全书解答 4

Chunwei Yan

2012 年 11 月 30 日

1 前言

现在开始做真题，同时，可以对着考纲，把每个知识点落实一下。好好积累，多记忆，抓重点题型.

2 充分条件与必要条件的区别

这里说一下如 $a \to b$ 则，我们说

1. a 是 b 的充分条件 (a 可以推出 b)
   (a) a 成立，则 b 必然成立
2. b 是 a 的必要条件 (a 可以推出 b)
   (a) b 是 a 的前提条件
   (b) b 成立，a 不一定成立；但 b 不成立，则 a 肯定不成立

2.1 理解

1. 可以把充分条件理解为，足够充分的条件, 如 a 是 b 的充分条件，表明 a 是 b 成立足够充分的条件 (a 是 b 成立所需要的所有条件)，因此，a 成立，则 b 必然成立

2. 可以把必要条件理解为，必须要满足的条件，如 b 是 a 的必要条件，表明如果 a 成立，b 必须要成立，则 b 是 a 的前提条件（但不一定是足够充分的条件，可能还需要 c 成立)，但是如果 b 不成立，那么 a 肯定不成立

3 可微

书上有一个定义：如果 Δz 可以表示为：

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \tag{1}$$

其中

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 与 x, y 无关，则认为 $z = f(x,y)$ 可微

证明可微方面，参照**P134 三、讨论二元函数的可微性**

3.1 用定义证明可微

当无法用偏导数来证明可微时，可以用定义来证明。

由上面的定义来看, 可微的充分条件是

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho} \tag{2}$$

$$= 0 = \frac{o(\rho)}{\rho}$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$， $\Delta x = x - x_0$， $\Delta y = y - y_0$， $o(\rho)$ 为 ρ 的无穷小

只要满足这个条件，就认为可微

下面会有用到这个结论的题目，你看看考纲，是不是有用定义证明可微的要求，如果有就看，一切按照考纲上的要求.

3.2 可微的充分条件

$z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微的必要条件是其在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在且连续.

因此，一般证明可微，可以用偏导数存在且连续的方法证明. **注意，偏导存在且连续是可微的充分条件而非必要条件，也就是说，可微并不能够推得偏导连续**，前面有得到偏导存在时可微的必要条件

总结一下，就是可微可以得到偏导存在，但并不能推得偏导连续.

3.3 可微的必要条件

参照 P130 定理 1, 如果函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则该函数在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

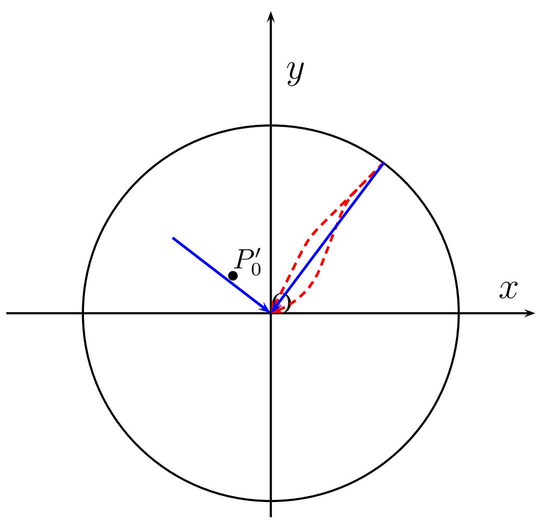
4 P131, 例 1

下面，提到的二元函数的情况同时也可以推广到其他多元函数的情况

在上一个文档里面讲过，二元函数 $z = f(x,y)$，从自变量角度，x, y 在一个二维平面的一定区域 (定义域）上，从一个点到另外一个点有多种路径。

4.1 只考虑自变量

从自变量角度，直接看定义域内，点 $P(x,y)$ 趋近于点 O 的路径



在前面说过，如果要判断二元函数的极限存在，需要从各个方向的各种路径到固定点的极限都存在且相等，要证明极限不存在，只需要证明按照任意两个路径的极限不存在便可。一般最简单也最常用的是采用两个不同的直线轨迹趋近，就是类似图中的实线路径。

采用 $y = kx$ 的直线作为趋近轨迹，代入其中

$$\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0, y=kx\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{x}{1+k^2}$$

因为结果里面包含了 k，极限会因为 k 取不同的值而不同，也就是按照不同的轨迹会有不同的极限，说明极限不存在.

比如，k 分别取 1,2. 如此，趋近的轨迹分别是 $y = x$ 和 $y = 2x$，会得到

$$\lim_{y=kx, x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \begin{cases} \frac{1}{1+1} & k=1 \\ \frac{2}{1+4} & k=2 \end{cases}$$

这个是证明二元函数极限不存在的最常用的方法，好好掌握

5 P132, 例 2

主要还是采用的之前等价无穷小那部分的知识点，那部分很重要

5.1 知识点

还是参照**全书 P11 的 3. 几个重要极限与几个重要的等价无穷小**

做真题的时候，注意参照数学的考纲，把每个知识点都过一下，若觉得有不懂的点，好好看看，把规定要考的每个点都熟悉的话，就很好了

$$x \to 0, \sin x \sim x$$

同样的

$$x \to \infty, \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

把等价无穷小部分再看看，那部分很重要，大部分题目都会碰到

5.2 解答

参照**全书 P11　3. 几个重要的极限与几个重要的等价无穷小**

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

一般用的时候，这边的 x 可以换成一个函数 $\varphi(t)$，只要满足

$$\lim_{\varphi(t)\to 0} (1+\varphi(t))^{\frac{1}{\varphi(t)}} = e$$

这个式子是考纲里面专门列出来的两个式子之一，所以肯定会考的，多把那些基础的熟悉熟悉，可以把那些变形的形式也整理一下，多看看就可以了

最后结果的来源：

$$\lim_{x\to\infty,y\to 1}(1+\frac{1}{xy})^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}} = (1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{\frac{2}{x}}} = e^{\frac{1}{2}}$$

5.3 几种变形形式

公式 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 有几种变形形式：

1.
$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{-x\to 0}(1+(-x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{-x\to 0}\frac{1}{(1+(-x))^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e}$$

2. 自然, $x\to 0$ 和 $x\to\infty, \frac{1}{x}\to 0$ 等价，
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{\frac{1}{x}}} = e$$

5.4 总结

如此，等价去穷小的式子里面，真正考的时候，都是用函数替换的方式，自己每次做到这部分题目都可以把前面的公式过一下，有必要可以把这个题目的形式摘录下来，每天看看就熟悉，下次就第一时间能够反映过来了。

6 P134, 例 6

6.1 知识点

主要是微分与偏导及连续的关系

根据 **P130 6. 多元函数连续、可导、可微的关系** 可以得到，对于二元函数

1. 可微 $\to$ 连续、可导
   (a) 连续是可微的必要条件（前提条件）
   (b) 可导是可微的必要条件（前提条件）
2. **连续与可导并没有直接关系** (这个与一元函数不同，一元函数可导可以推出连续)

再回顾一下，可微的的充分条件有两种，也就是证明可微的方法：

1. 定义法，参照上面**可微**部分的内容
2. 用偏导的方法进行证明，每个偏导均存在及连续 $\Rightarrow$ 可微

7 P134, 例 7

题目主要考察可微与偏导的关系。

最后两行就是用定义判断函数在 $(0,0)$ 是否可微。

$$\frac{o(\rho)}{\rho} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-(f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

其中

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

在证明

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta y(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

的极限值不存在时，同样采用了二元函数的极限存在性的判断。上面讲到了，如何判断二元函数的极限是否存在，可以先用一个直线线段轨迹 $y=kx$ 试一下，如果极限里面带 k，说明，根据不同的直线轨迹，极限不同，因此此二元函数的极限不存在。