全书解答 6

Chunwei Yan

2012 年 12 月 5 日

1 P163 例 49

1.1 知识点

此题也是基于对称性的二元函数积分。判断其关于 $y = x$ 对称，需要两个条件：

1. 积分域关于 $y = x$ 对称
2. 积分函数中，x 和 y 对换，形式不变

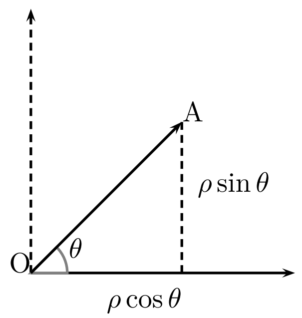
1.2 解答

1.2.1 极坐标

我之前有写过一个极坐标的文档，可以对照那个文档看看。

这里就简单回顾，如图，是一个极坐标，$A(\theta, \rho)$

同时可以看到，如果在直角坐标下，$x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$，如此，A 的直角坐标为 $A(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$



1.2.2 方法一、用极坐标解

极坐标下的二元函数积分的具体内容参照 P1160 页

固定公式需要记住，分为极点 O 在区域 D 内部、边界和外部 3 种情况。

这里 O 是区域的圆心，利用内部的那种情况

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \tag{1}$$

其中，将 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ 代入，可以直接得到

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R (\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2})\rho^3 d\rho \tag{2}$$

后面对 ρ 求积分，前面 θ 不需要动

$$= \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} d\theta \tag{3}$$

再后面把 $\cos^2\theta$ 和 $\sin^2 theta$ 分开积分，这里只列出 $\cos^2\theta$ 的积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos^2\theta}{a^2} d\theta = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta \tag{4}$$

剩下的就是普通的积分了，算出来就是最后的结果了。需要多看看极坐标求积分适用的范围

1.2.3 方法二、用对称的方法求解

直接目测，利用上面介绍的方法也能够判定其对称

于是，x, y 可以互换

底下就按照解答

2 P164 例 52

这个是先 x 后 y 的积分

具体

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \tag{5}$$

代表的是，从前往后看，y 从 0 到 1,x 从 y^2 到 y

为什么是 x 从 y^2 到 y，而不是从 y 到 y^2

可以再图像中央画一条横线，可以看到其与弧形阴影有两个交点，按照 x 轴的方向从左往右看，就是 $x=y^2$ 到 $x=y$

在积分的时候，注意前后的顺序，先后面对 x 积分，所以即使里面有 y，也没有影响，把 y 当做常量，可以提到前面去。

$$=\int_0^1 \frac{\sin y}{y}dy\int_{y^2}^{y}dx=\int_0^1 (y-t^2)\frac{\sin y}{y}dy \tag{6}$$

$$=\int_0^1 \{\sin y - y\sin y\}dy \tag{7}$$

分开进行计算

$\int_0^1 \sin ydy$ 很容易计算，而 $\int_0^1 \sin ydy$

是一个标准的分部积分的例子，**需要回顾之前的分部积分的内容，全书 P89，做几道典型题找找感觉**

我这里直接用不定积分求出其原函数，然后可以代入值计算

$$\int y\sin ydy=\int yd\cos y=y\cos y-\int \cos ydy \tag{8}$$

已经一目了然了，然后代入值就能解出了

不定积分和定积分的求解方法是基础中的基础，一定要很熟练，如果有点生疏的话，得回头好好看看。这个知识点会穿插到大部分题目里面，很关键

3 P165 例 54

方法三采用的是移动圆形的方法，可以看到图中的圆心 x 轴方向偏离 $\frac{1}{2}$,y 轴方向偏离 $\frac{1}{2}$。

通过 $x-\frac{1}{2}$ 和 $y-\frac{1}{2}$ 将圆心重新调到零点处。当调到零点后，就可以采用**对称**拆分的方法，极大地减少计算量

由于积分区域 D 此时关于 x 和 y 均对称，而积分函数 $f(x,y)=x+y$, 在 x 轴右边 $x=a$ 为 $f(a,y)=a+y$, 在左边对称的地方 $x=-a$ 为 $f(-a,y)=-a+y$, 左右加起来为 0，同样，y 轴上下加起来也为 0，如此结果为 0

3.1 总结

看看例 55, 可以看到它也可以用移动的方法求解，整体将其向下移动 1 个单位 $(y-1)$，可以使其关于 x 轴对称，然后就可以用对称的方法了。

好好品味这里的典型题，利用一些技巧，降低计算量

而且，这些技巧是真题里面最提倡的，好好做做，好好总结

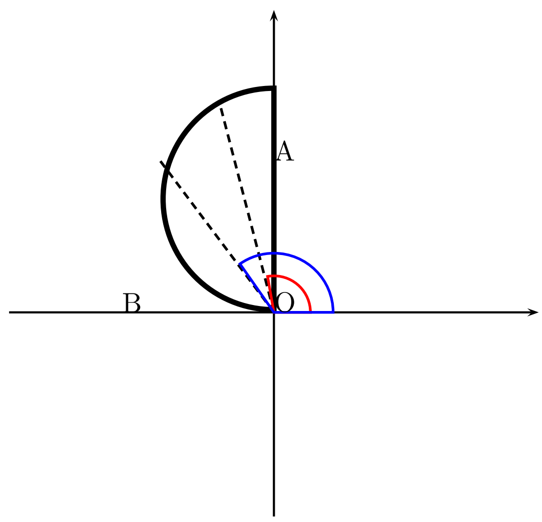
4 P166 例 55

4.1 方法一第 7 行的式子来源

前面提到平移的方法， $y-1$ 就是把图形整体向下平移 1 个单位，然后那个圆弧正好以原点为圆心，利用极坐标，就得到那个式子了。

4.2 方法二第一行最后一个式子

还是极坐标那边的知识，好好看看我附件里面的那个 PPT



如图，极坐标的角度只从原点开始，从 x 轴正方向开始算

因此，角度范围为从 y 轴正轴到 x 轴的负轴，算成角度就是 $\frac{\pi}{2}$ 到 π(切线)