全书解答 8

Chunwei Yan

2012 年 12 月 13 日

1 P87 例 8, 方法 2

首先，参照例 6 的结论，这个结论比较重要:

1.1 例 6 关于 $f(x)$ 及其原函数奇偶性和周期性的关系

首先明确一点:

- $f(x)$ 的原函数是 $\int_0^x f(x)+C$，其中 C 是常数项
- $\int_0^x f(x)$ 只是 $f(x)$ 的一个原函数 (根据 C 的不同，还有很多其他的原函数)

那么会有三种情况

1.1.1 已知 $F(x)$ 的情况，看 $f(x)$ 的情况

1. 如果 $F(x)$ 是奇函数，则 $f(x)$ 是偶函数
2. 如果 $F(x)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 是奇函数
3. 如果 $F(x)$ 是 T 周期函数，那么 $f(x)$ 也是 T 周期函数

1.1.2 已知 $f(x)$ 的情况，看 $F(x)$ 的情况

反之，由于 $f(x)$ 的反函数 $F(x)=\int_0^x f(x)+C$ 受常数 C 的影响，情况会复杂一点

1. $f(x)$ 为偶函数，则其只有一个特殊的原函数 $\int_0^x f(x)$ 为奇函数，而其他原函数 $\int_0^x f(x)+C$ 则会由于常数项 C 的变化而变化
   - 主要因为 $F(x)+f(-x)=\{\int_0^x f(x)+C\}+\{\int_0^{-x} f(x)+C\}=2C$
   - 这个值只在 $C=0$ 时，才有 $F(x)+F(-x)=0$
2. $f(x)$ 为奇函数，则其所有原函数 $\int_0^x f(x)+C$ 全为偶函数
   - $F(x)-F(-x)=\{\int_0^x f(x)+C\}-\{\int_0^{-x} f(x)+C\}=0$
3. 若 f(x) 为 T 周期函数，那么必须有 $\int_0^T f(x)dx=0$，才能够有 $F(x)$ 为周期函数

1.2 间断点

如果不熟悉第一类间断点、跳跃间断点、第二类间断点，回顾一下 P31ξ3

1.3 解答

采用了论证法，无非就是按照题目中的条件，推导出来结论

跳跃间断点就是左右极限存在但不相等

如果在 $x=a_0$ 处存在跳跃间断点，也就是

$$\lim_{x\to a_0^+} f(x)=A \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a_0^-} f(x)=B \tag{2}$$

$$A\neq B \tag{3}$$

调到方法 2 第 3 个公式

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x)-A & x>0; \\ 0 & x=0; \\ f(x)+A & x<0; \end{cases} \tag{4}$$

接下来，当 $x>0$ 时

$$\int_0^x \varphi(x)dx=\int_0^x (f(t)+A)dt=\int_0^x f(t)dt+Ax \tag{5}$$

当 $x<0$ 时类似

如此，继续向下看，到

$$\int_0^x f(t)dt - A|x| \tag{6}$$

判断其为偶函数，其中 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数就是根据上面提到的例 6 的结论

2 P92 例 2 最后一行解答

这里用到复杂分式的分解

当出现类似

$$\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

就可以将其中的分式分解为多个简单分式的和，然后拆分开来积分

2.1 复杂分式的分解

首先进行化简，如

$$\frac{ax+b}{(x-1)^2x} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^2x} \tag{7}$$

2.1.1 分子为常数项的简单分式的分解

下面讨论类似于 $\frac{1}{x(x-1)^3}$ 的式子的拆分

先将分母拆分为所有可能的小的部分

这里，分母可以拆分为

$$\begin{aligned} &x \\ &(x+1) \\ &(x+1)^2 \\ &(x+1)^3 \end{aligned} \tag{8}$$

然后设上参数

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} = \frac{1}{x(x+1)^3} \tag{9}$$

求得

$$\begin{cases} A = 1 \\ D = 1 \end{cases} \tag{10}$$

于是，就可以得出

$$\frac{1}{x(x+1)^3} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{(x+1)^3} \tag{11}$$

2.1.2 分子为多项式的分式的分解

比如需要分解

$$\frac{x^2+x+2}{x(x+1)^3} \tag{12}$$

首先化简

$$\frac{x^2+x+2}{x(x+1)^3} = \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{3}{x(x+1)^3} \tag{13}$$

其中 $\frac{x}{(x+1)^3}$ 的分解

对分母的分解方法不变，但是分子 x 的分解，需要将分子中的多项式还原为 n 项的参数多项式

比如分子为 n 次多项式 $g(n,x)$ 需要转化为 $= Ax^n + Bx^{(n-1)} + Cx^{(n-2)} + \cdots + D$

这里分子比较简单，就是一次多项式 x，需要转化为 1 次参数多项式 $Ax+B$

如果这里分子比较复杂，为 x^2+2，二次多项式，那么也是从二次一直到 0 次 (常数)，为 Ax^2+Bx+C，其中的参数 A,B,C 将会被计算出来

回来原来的题目

拆分分子分母，并且设方程

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{Ax+C}{(x+1)} + \frac{Ax+C}{(x+1)^2} + \frac{Ax+C}{(x+1)^3} \tag{14}$$

3 P94 例 7 倒数第三行

4 P96 例 11 解答 1、2 最后一行

5 P98 例 15(1) 评注

6 P100 例 18P101 上数第 3 行

7 P105 例 5 解答倒数 7、8 行

8 P110 例 1(2)

9 P112 第 1 行

10 P120 第 1 行

11 P120 例 7 方法 1

12 P121 例 8 方法 1

13 P123 例 10