全书解答 7

Chunwei Yan

2012 年 12 月 9 日

1 极坐标详细讲解

极坐标和直角坐标一样，都是一种定位点的方式。

1.1 定义

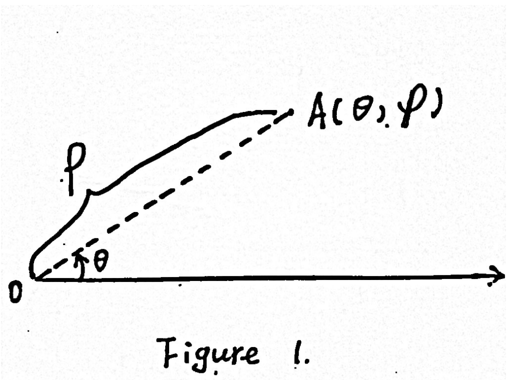
直角坐标系下，每个点由 (x, y) 定位,x,y 分别是点按照 x，y 轴正方向离原点的距离

极坐标由 (θ, ρ) 决定，其中

1. θ 表示角度，从轴逆时针旋转的角度

2. ρ 表示旋转的半径长度，就是点到原点的距离

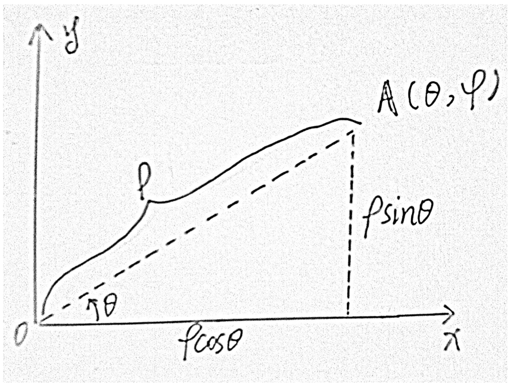
极坐标下，每一个点就是这样由一个旋转角度 θ 和一个半径长度 ρ 表示 Fiture 1



1.2 与直角坐标的转换

极坐标由角度 θ 和旋转半径 ρ 决定，通过将计算，可以将相应的 x，y 算出来。

Fiture 2



如图，横轴 x 的距离为 $\rho\cos\theta$，纵轴 y 的距离为 $\rho\sin\theta$，因此，其对应的直角坐标就是 $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

1.2.1 简单的实例

- 极坐标到直角坐标：$(2, \frac{\pi}{6}) \Rightarrow (\sqrt{3}, 1)$

- 直角坐标到极坐标：$(1, 1) \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$

1.3 二元函数的极坐标计算

1.3.1 二元函数积分的本质

参看全书 P160

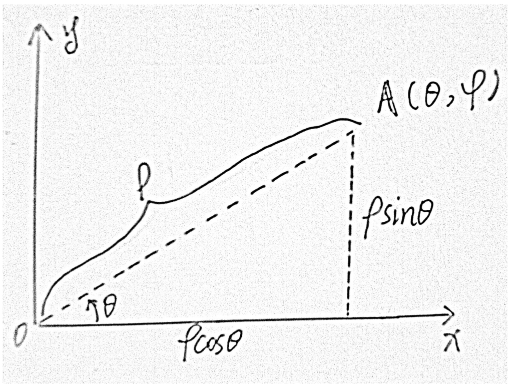
二元函数的积分公式里面包含两个部分：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \tag{1}$$

1. 积分区域 D，用于规定积分的区域

2. 积分函数 $f(x, y)$，在积分区域内每个点计算和积分

Fiture 2



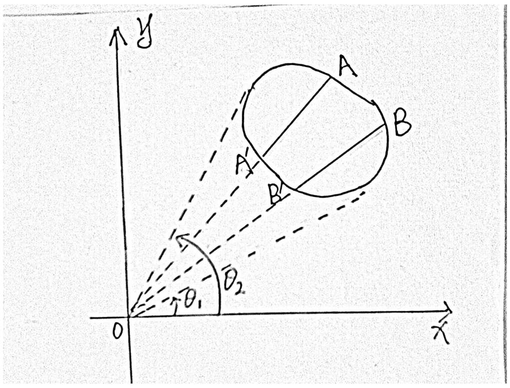
如图，阴影部分为积分区域

积分区域规定积分函数积分的区域，除此之外，两者之间没有直接关系

1.3.2 用极坐标积分计算

用极坐标计算和用直角坐标计算原理是相通的，只需要将直角坐标系下的定义域 D 和积分函数 $f(x,y)$ 用极坐标表示出来其中，积分函数的转化比较简单，直接将 x, y 转换为 $\rho\cos\theta, \rho\sin\theta$

积分区域的转换 Figure 4



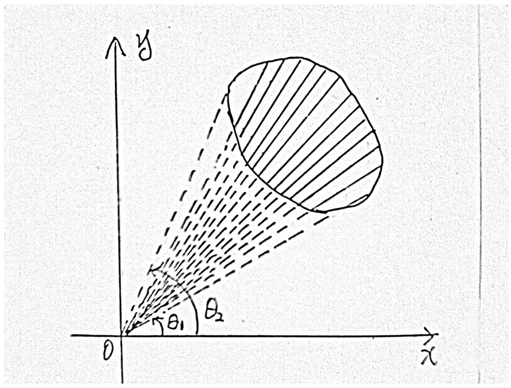
见 Figure 4

极坐标下定义积分区域的方式： **注意，在极坐标下，只需要关心两点: 旋转角度 θ. 旋转半径 ρ**

可以想象，图中的积分区域是由一个线段沿着从 θ_1 逆时针旋转到 θ_2 画成的

积分是无数个微观过程的总和，比如从角度 θ_1 到 θ_2 的过程中，其中两个线段: AA' 和 BB'，其中 $AA' = \rho_A - \rho'_A = OA - OA'$

如果无数个线段旋转着联合起来，就是下图 Figure 5



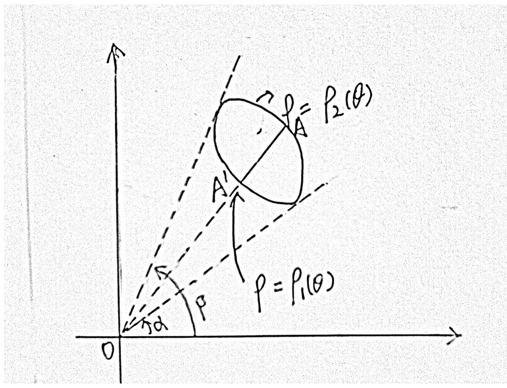
构成了一个积分区域，就是图中的阴影部分

1.4 理解 P160 的几个公式

在全书 P160(2) 在极坐标下的计算中，列出了 4 个图，相应的有四种情况

1.4.1 极点 O 在区域 D 之外

Figure 6



看 Figure 6

联合之前讲的例子，AA' 是构成极坐标下积分域中的一条线段，如果设 θ_A 是 A 对应的角度

很明显

$$AA' = \rho_2(\theta_A) - \rho_1(\theta_A) \tag{2}$$

首先，当然积分函数 $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ 最容易确定 (x,y 换成极坐标就可以了)

然后定极坐标:

1. 角度 θ, 那么从 α 逆时针旋转到 β，于是有 $\int_\alpha^\beta$
2. (线段构成的) 轮廓从图中看，之前讲过，无数条绕着 O 旋转的线段构成了积分域 (阴影部分), 其中 AA' 只是其中的一条

对于这当中的任何一个角度 θ 的线段，长度为 $L=\rho_2(\theta)-\rho_1(\theta)$

于是有了

$$\int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \tag{3}$$

添上极坐标下的积分函数，再加上固定项 $\rho d\rho$，**这个注意，只要是极坐标下的二元积分，都是这个固定项 $\rho d\rho$，而不是 $d\rho$**

最后就是

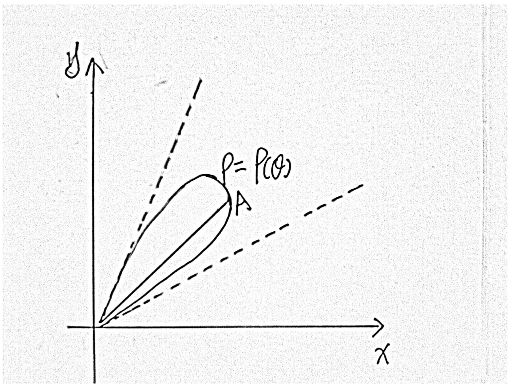
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \tag{4}$$

参照上面的式子，可以理解为

- 角度 θ 从 α 积分到 β，旋转的总角度为 $\beta-\alpha$
- 对应着每一个角度 θ，在射线方向上从 $\rho_1(\theta)$ 积分到 $\rho_2(\theta)$，对应的线段长度为 $\rho_2(\theta)-\rho_1(\theta)$

1.4.2 极点 O 在区域 D 的边界上

Figure 7



角度 θ 的情况与上面一个图没有变化，只是轮廓发生了变化

如图，每一个旋转的线段，总有一个端点在原点，于是，线段的长度就是

$$OA=\rho(\theta)-0 \tag{5}$$

类比于上一个情况，其积分成为

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho \tag{6}$$

1.4.3 极点 O 在区域 D 的内部

这个很直观，就是角度需要旋转一周 2π，然后每一条旋转的线段类似于上面一种情况，从 0 到 $\rho(\theta)$

1.4.4 O 在环形域内部

角度旋转一周 (2π)，然后积分域中每一条旋转的线段类似于上面一种情况，从 0 到 $\rho(\theta)$

2 P173 例 65

现在应该能够直观看出极坐标了，旋转角度 θ 是 0 到 2π

轮廓的话，就是将

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \tag{7}$$

代入就可以了。

3 P173 例 66

倒数第二行积分的计算

首先 $\int 8\pi t dt = 4\pi t^2$

然后，在方括号里面

$$\int 8\pi t e^{4\pi t^2} e^{-\int 8\pi t dt} dt + C \tag{8}$$

好好分析形式，不要被吓着

上面已经得到了 $\int 8\pi t dt = 4\pi t^2$，代进去

$$\int 8\pi t e^{4\pi t^2} e^{-\int 8\pi t dt} dt + C = \int 8\pi t e^{4\pi t^2} e^{-4\pi t^2} dt + C \tag{9}$$

$$= \int 8\pi t dt + C = 4\pi t^2 + C \tag{10}$$

如此，就算出来了。注意积分号的范围就行了.

4 P174 例 67

4.1 积分中值定理

4.1.1 一元函数

如果 $f(x)$ 在积分范围内连续

$$\ni \eta \in (a,b) s.t. \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\eta) \tag{11}$$

用线段 ab 中的一点 η 的值来作为线段中所有点的平均值

平均值 $f(\eta)$ 乘以线段长度 (b-a) 作为积分值

4.1.2 二元函数

如果 $f(x,y)$ 在积分范围内连续

$$\ni \alpha,\beta \in D s.t. \iint_D f(x,y)d\sigma = S(D)f(\alpha,\beta) \tag{12}$$

用积分域 D 中的一点 (α,β) 来作为 D 中所有点的平均值

平均值 $f(\alpha,\beta)$ 乘以积分域的面积 $S(D)$ 作为积分值

4.1.3 极限中采用积分中值定理

如果积分区域中有自变量有极限

如一元函数中，有 $\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt$

当采用中值定理时，有 $x\to 0, \eta\in(0,x)$，因此，$\eta\to 0$

二元函数也类似

4.2 方法一

从方法一第二行开始解释

还是之前等价无穷小的知识点，回头回顾一下

$$f(x)\to 0; 1-e^{f(x)} \sim f(x) \tag{13}$$

看到变限积分，而且上下都有 x，就用对 x 求导的方式去掉一层积分号

分子部分对 x 求导，去掉外层积分号，后面的 u 统一用 x 代替

于是有

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} f(t,x)dt}{3x^2} \tag{14}$$

x 有一个极限，下面采用积分中值定理

题目中方法一倒数第三行

$$-\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2} f(t,x)dt}{3x^2} \tag{15}$$

首先，分子是对 t 求导，这个要注意，不是对 x 求导，因此，积分号里面 x 可以当作为一个常量，对实际的积分运算没有一点关系

采用中值定理，分子部分变成

$$\ni c\in(0,x^2) s.t. \int_0^{x^2} f(t,x)dt = x^2 f(c,x) \tag{16}$$

这里因为 $x\to 0$，而 $c\in(0,x^2)$ 夹在其中，于是 $c\to 0$

于是有

$$\lim_{x\to 0^+, c\in(0,x^2)} f(c,x) = f(0,0) \tag{17}$$

4.3 方法二

直接采用了积分中值定理，而且利用了夹逼性得到其极限

看 P175 上面第一个式子的分母

$$\int_0^{x^2} dt\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du = f(\xi,\eta)\cdot\frac{1}{3}x^3 \tag{18}$$

其中 $\frac{1}{3}x^3$ 是积分域 D 的面积，$(\xi,\eta)\in D$ 因为 $x\to 0^+$，因此使得整个 D 趋近于 0，因此 $f(\xi,\eta)\to 0$