全书解答 3

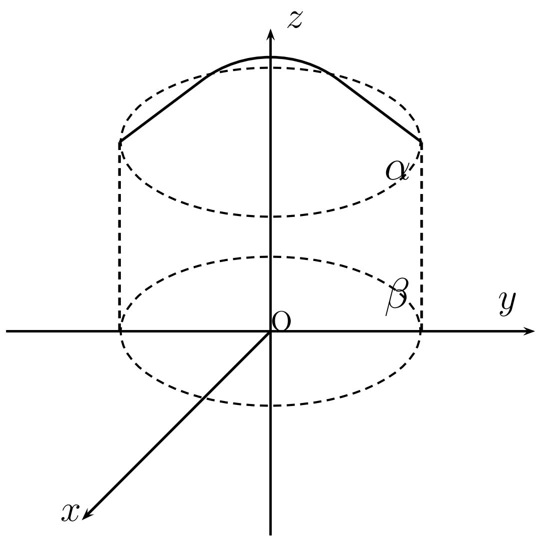
Chunwei Yan

2012 年 11 月 28 日

1 多元函数极限连续偏导

底下你需要明白在 xoy 二维平面上，一点到另外一点可以有不同路径的由来就可以了。 通常说的二元函数的图形是一张曲面

$z = f(x, y)$

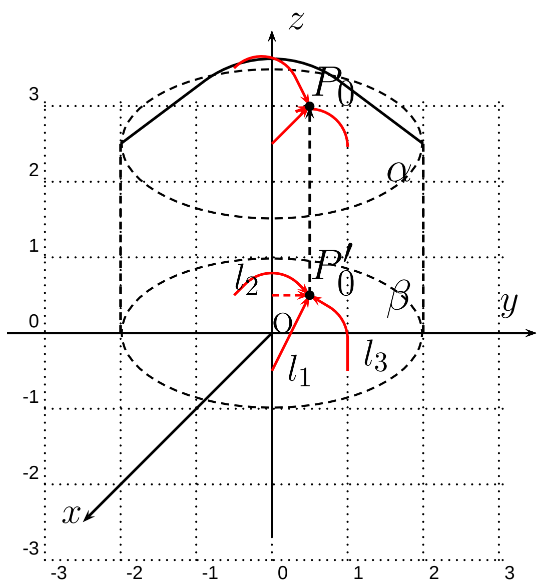


1.1 多元函数极限

1. 回顾一元函数的极限，只有一个自变量 x: $x \to x_0$, 有 $f(x) \to A$, A 为一个常数

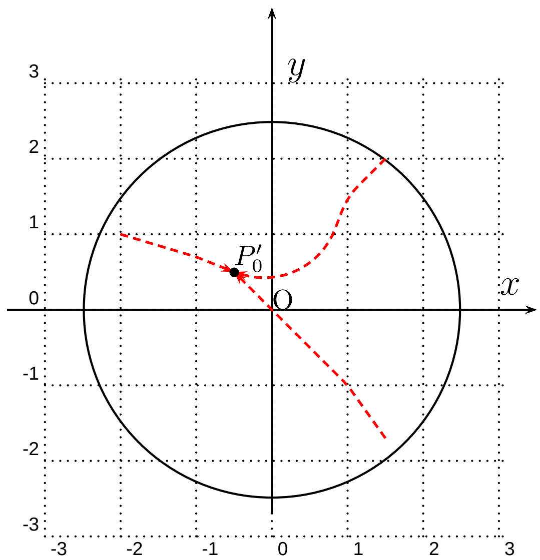
2. 二元函数的二重极限，有两个自变量 x, y: $\{x \to x_0, y \to y_0;\}$ $f(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$ P_0 为一个定点

但是需要注意，在二元函数里面，由于 x, y 存在于二维空间 xoy 中, 在二维空间上 (x, y) 趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 的路径多种多样 —-x, y 同时变化，(在一元函数上，如 $y = f(x)$，x 趋近于某一个点 $x = a$ 的路径只能为一条直线).



如图中，曲线中，点 $P_0(x_0, y_0)$ 周围的点 $P(x, y)$ 的趋向于 P_0 的路径多样，如图中红色轨迹。

看上图的俯视图，只看 xoy 平面上，$P_0(X_0, y_0)$ 附近点的集合 $\{(x, y)\}$ 趋近于它的轨迹：



现在你知道在二元函数的空间里面 (可以扩展到多元函数)，趋近于一点的路径多种多样，如图中，设置可以 360 度，随便一个轨迹，只要最终趋近到 P_0 就可以了。

而要判断二元函数 $y = f(x,y)$ 在某一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的极限存在，需要保证在 P_0 周围一个很小范围内的任何一个点，以任何一种轨迹，最终都能在曲面 $z = f(x,y)$ 上 (回到三维空间上，(x,y,z)) 逼近到点 $P'(x,y,z)$

由此，一般如果要判定一个二元函数在某一点处无极限，只需要判断 (x,y) 在以某两个不同的轨迹趋近于 (x_0,y_0) 时得到的极限值不同

$$\lim_{P\to P_0,(x,y)\in l_1} z = f(x,y) \neq \lim_{P\to P_0,(x,y)\in l_2} z = f(x,y)$$

就像一元函数 $y = f(x)$ 在某一点左右极限存在但不相等，则此一元函数在此点处极限不存在 **二元函数（或者多元函数），要证明其在某一点处极限不存在，只要证明其以不同路径趋近于此点时的极限不存在，为了便于计算，一般采用直线路径逼近: $y = kx$,k 为变化的常数, 如果结果中极限带 k, 说明按照不同 k 产生的直线轨迹 $y = kx$ 会有不同的极限，那么二元函数的极限肯定不存在。反之，如果结果中不包含 k，至少证明按照直线轨迹趋近时的极限存在相等，但是不能判断其连续，因为还可能有其他的曲线轨迹不行。**

现实中，的确会出现一些不同轨迹极限不相同的情况：这个你不需要深究，只要记住**如果二元函数在某一点的极限存在，那么此二元函数在此点周围的很小范围内，通过任何一条路径（所有路径）趋近于此点时，其极限存在且相同**

记忆的时候类比一元函数的情况就好了，二元函数（多元函数）只是比一元函数增加了一些自变量（维度）而已 如判断：

1. 一元函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处极限是否存在
2. 二元函数 $z = f(x,y)$ 在 $x = 0, y = 0$ 处极限是否存在

1. 极限差别：
   (a) 一元函数：需要考虑左右极限是否存在且相等，即,$\lim_{x\to 0+} f(x)? = \lim_{x\to 0-} f(x)$，因为 x 趋近于 $x_0 = 0$ 只有两个路径（方向）:$x \to -0$，$x \to +0$
   (b) 二元函数，因为 (x,y) 在一个二维平面，可以有不同的路径趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$，因此需要考虑所有的路径情况，如果有任何两个路径上极限不存在或者不相同，则此点处的二元函数极限不存在。

1.2 练习

[P131 例 1] 证明下列重极限不存在

$$\lim_{x\to 0,y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

证明重极限不存在，只需要证明任意两个路径趋近时的极限不相等。

一般只需要任意取两个路径便可，但是更简便的方式就是用 $y = kx$ 直线族 (k 不同会出现不同的直线路径，直接将 k 作为一个变量，如果计算出来的极限里面包含 k，则不同直线路径达到的极限会随着 k 不同而变化，则重极限不存在)

解答里面的直线趋近，你应该就懂了

1.3 多元函数的连续性

连续性方面会使用到前面多元函数极限的知识。

类比于一元函数的连续：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

二元函数连续的定义是：$\lim_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 此处需要考虑 $P(x,y) \to P_0(x_0,y_0)$ 的路径.

而对于连续性的判断，两者的定义基本一致, 只是判断的区域的差别:

1. 一元函数是一维
2. 二元函数是二维
3. 多元函数是多维

   其他没有什么区别

在定义上，如果

$$\lim_{x\to x_0 y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则认为其在点 (x_0,y_0) 处连续

1.4 多元函数偏导数

偏导数可以认为是只对某一维（变量）求导的特殊导数

底下你只需要明白偏导数的定义，和偏导数的求法就可以了

求法 如果对 x 求偏导，则只关心 x 的变化。首先固定其他无关变量的值（当作为常数便可），原来的多元函数就变成了一个一元函数（非 x 的变量都当做了常数)，然后对 x 求一下导数就可以了。

定义 类似于一元函数的情况：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

二元函数 $z = f(x, y)$，当把 y 固定到 y_0 时，也就是一元函数的情况了

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

如二元函数 $z = f(x, y)$, 我只想考虑此函数在点 (x_0, y_0) 处的 x 的变化，自然要固定其他的变量 $y = y_0$，

于是原先的二元函数：$z = f(x, y)$ 降维为 $z = f(x, y_0)$(一个一元函数)，如此直接对 x 进行求导，就是 $z = f(x, y)$ 关于 x 在 (x_9, y_0) 的偏导数。

书上的例题：P14 例 1：求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 (1,2) 处的偏导数。需要分别对 x, y 求偏导。

1. 对 x 求导，则可以先将其他的变量固定，把 $y = 2$ 代入原式。有 $z = x^2 + 6x + 4$ 就降为一个一元函数了，再对 x 求导，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6 = 2 * 1 + 6 = 8$$

2. 对 y 求偏导，首先固定无关变量 x, 降维, 得到 $z = 1 + 3y + y^2$，然后求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 + 2y = 3 + 2 * 2 = 7$$