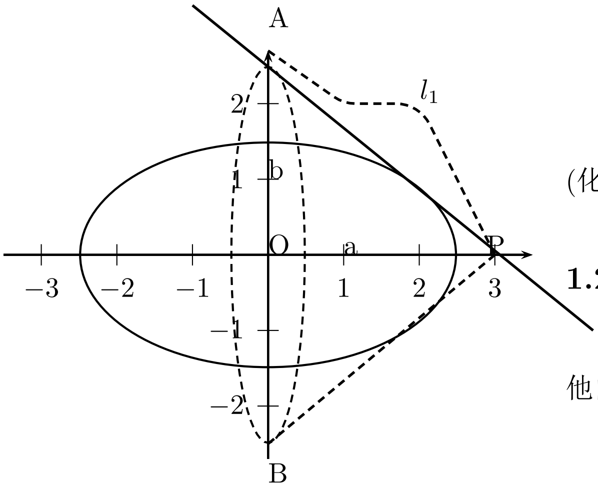
全书解答 2

Chunwei Yan

2012 年 11 月 8 日

1 P59-例 7



1.1 计算截距

由图形得到，由于旋转的是一个三角形，所以需要求的体积是一个圆锥，可以直接用圆锥的计算公式计算。当然，如果旋转的是一个曲线 l_1，则形成的就是一个曲面椎体，则必须用积分的方式求解体积。

首先求切线的公式：

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得到：

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

两边同时对 x 求导，得到：

$$2y\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}2x$$

设切线斜率为 k, 即：

$$k=y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

此处切点为 (ξ,η), 所以，切线为：

$$y-\eta=-\frac{b^2\xi}{a^2\eta}(x-\xi)$$

可以得到截距：

$$\begin{cases} X=\frac{b^2\xi^2+a^2\eta^2}{b^2\xi}=\frac{a^2}{\xi} \\ Y=\frac{b^2}{xi} \end{cases}$$

(化简时用到：$\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=1$)

1.2 计算圆锥体积

此处直接使用圆锥公式计算，当然，如果是其他曲线旋转一周的话，一定要像答案一样采用积分。

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

得到：

$$V=\frac{\pi a^2b^4}{3\eta^2\xi}$$

1.3 求体积最小值

由 **P55 3** 得到最大最小值求解的方法。

在 条件 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=1$ 下求解:

$$V\propto\frac{1}{\eta^2\xi}$$

所以，求 V 最小值，就是求 $\eta^2\xi$ 最大值。设 $g(\xi,\eta)=\xi\eta^2$: 由 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=1$ 得到 ξ,η 互相间的关系，进行替代，得到：

$$g(\xi,\eta)=\xi b^2\frac{a^2-\xi^2}{a^2}$$

求解 $g(\xi,\eta)$ 的最大值.

求微:

$$\frac{dg}{d\xi}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-3\xi^2)$$

取的其极值点：$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}}$

判断有效性

1. 当 $0 < \xi < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时，$\frac{dg}{d\xi} > 0$
2. 当 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 时，$\frac{dg}{d\xi} > 0$

得到 $\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}$ V

1.4 公式积累

圆锥体积

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

球体积

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2 P69 例 12

此为经典题型，要求 $\xi \in (0,1)$，使 $(1+\xi)f'(\xi) = f(\xi)$. 就是求解 $(1+x)f'(x) = f(x)$, 使得其在 $x \in (0,1)$ 内有解。

$$f'(x) = \frac{f(x)}{(}1+x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x)}{1+x}$$

这是一个很标准的微分函数
将两侧分子分母交换得到：

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{dx}{1+x}$$

通过两侧同时积分求解：

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{dx}{1+x}$$

得到 $\ln|f(x)| = \ln|1+x| + C$ 改写为方程

$$\frac{f(x)}{1+x} = C$$

不妨设：

$$g(x) = \frac{f(x)}{1+x} - C$$

此时可以看到，题目中 $x = 1, 0$, 代入：有

$$g(1) = \frac{f(1)}{2} - C = \frac{2f(0)2}{-}C = f(0)$$

$$g(0) = f(0)$$

所以：

$$g(1) = g(0)$$

利用 **P61 罗尔定理**得到：必存在 $x \in (0,1)$, 使得

$$g'(x) = 0 = \frac{df(x)}{f(x)} = \frac{dx}{1+x}$$

不妨将此解 x 表示为 ξ
得证.

3 P70 例 13

此题较难把握，题型难以掌握，建议跳过

4 P71 例 14(2)

此部分，还是要把几个不等式好好熟悉一下

首先，大题中，后面的小题肯定会用到前面小题中的结论，特别是前面小题比较简单的时候，就是提示
首先由 (1)，结合 **P61 拉格朗日中值定理**得到：

$$\exists\eta \in (0,\xi), f'(\eta)(\xi - 0) = \frac{a}{a+b}$$

$$\exists\zeta \in (\xi,1), f'(\zeta)(1-\zeta) = \frac{b}{a+b}$$

将 $f'(\xi)$ 和 $f'(\zeta)$ 代入

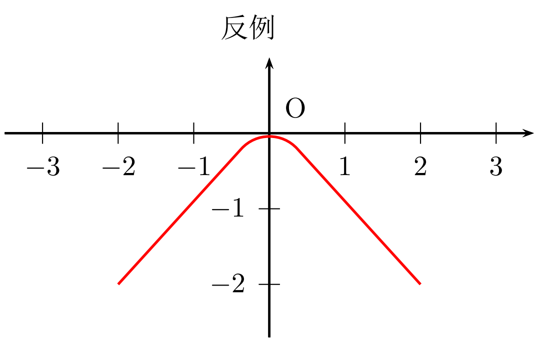
$$\frac{a}{f'\eta} + \frac{b}{f'\zeta} = a+b$$

得证。

5 P71 例 15

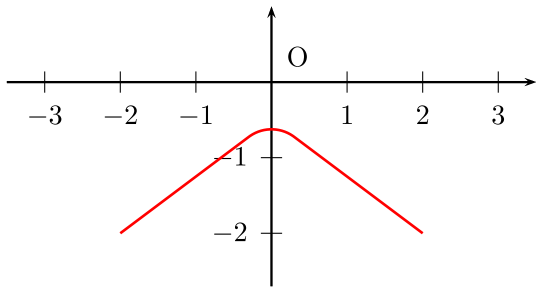
P61 费马引理、罗尔定理、拉格朗日定理等等要非常熟悉，基本上这些都是重点，简单点的应用（小题）很频繁。 具体的可以记住一些具体的图形例子。

1. A: 由罗尔定理可知,$f'(x)$ 的零点与 $f(x)$ 并无直接关系, 所以不要被迷惑



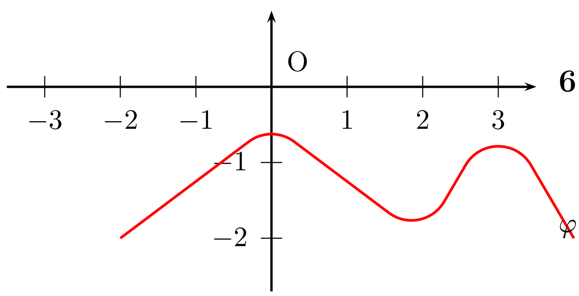
2. B:

反例



3. C:

反例



6 P72 例 17

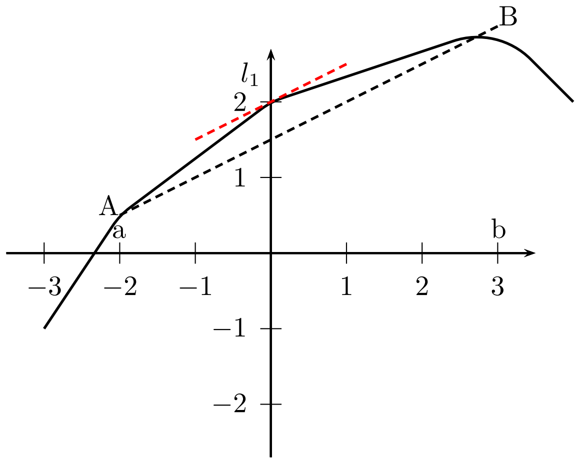
此处采用的是类似书本上拉格朗日中值公式的证明方法。拉格朗日中值法：

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

或者

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}$$

很类似题目中的形式，参照证明中的方法：



6.1 AB 直线公式

斜率

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$y - f(a) = k(x-a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

6.2 考察直线 AB 和 $f(x)$ 的距离

$$\varphi(x) = f(x) - y = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)]$$

分析 $\varphi(x)$ 表示曲线 AB 上任意一点到直线 AB 的距离。当 $\varphi'(x) = 0$ 时，就是此点上切线与直线 AB 平行的情况。

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

因为

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

因此，在 AB 两点间，如果 $\varphi(x) == 0$，则 $f(x)$ 曲线与直线 AB 吻合，所以 $f(x)$ 就是一次式。与题目矛盾。所以，至少存在一个点 $x = \xi$，使得 $\varphi(\xi) > 0 or \varphi(\xi) < 0$ 这两种情况均会得到：

$$|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right|$$

得证

7 P73 例 18

7.1 连续与可导的关系

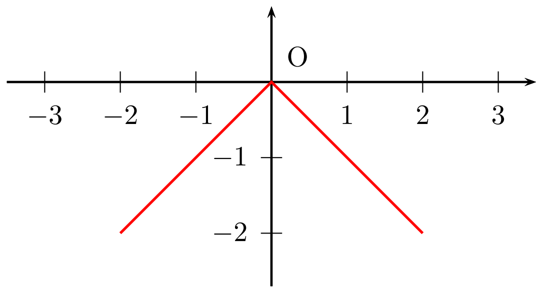
自己也注意积累，我只列出了几个最基础的

1. 连续是可导的必要条件（前提），所以，知道可导，则说明必连续
2. 可导，不代表导数连续。所以，任意一点的导数及导数的极限并没有很直接的关系。当考虑到导数的极限时，确定其导数是否有充分条件连续
3. 一阶可导 => 连续，二阶可导 => 一阶导数连续，反之不成立

所以，相应得到：

1. A: 就是连续性的判断，如果成立，就说明 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
2. B: 同样是连续性的判断条件
3. D:

反例



在 O 点处导数不存在（两侧导数值不一致）

7.2 衍生和积累

自己还是要注意，由点到面的复习方法。此处就可以把连续性和可导性那部分好好看看。会比单独一道题要收获很多。下次的话，同类型的题目，题型方法 OK, 知识点也懂的话，就没有问题了。

8 P82 例 1

8.1 列出分段函数

需要确立好 x 的前提范围

8.2 进行积分

8.3 参数统一

因为最终的分段函数的范围需要连接起来得到了：

$$\int |1-|x||dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - x - 1 + C_1, & x \le -1 \\ \frac{x^2}{2} + x + C_2, & -1 < x \le 0 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_3, & 0 < x \le 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + 1 + C_4, & x > 1 \end{cases}$$

此处 C_1, C_2, C_3, C_4 的来源：分段函数的各段都是由单独的积分而来，常数 C 并不统一，因此每段用 C_1, C_2, C_3, C_4 单独替代。如此，每一段函数间是有联系的。

参照 P80 定理 3.1.1 定积分存在定理 不定积分的原函数都是能够可导的，如：

$$F(x) = \int f(x)dx$$

则

$$F'(x) = f(x)$$

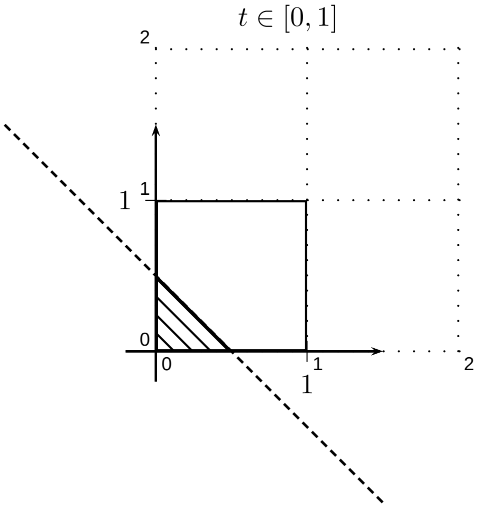
既然可导，说明，F(x) 连续。

因此，可以积累结论：不定积分必连续，且可导。此时，可以得到: 分段函数应该是可导连续的。因此，函数 $f(x)$ 需要在 $x = -1, 0, 1$ 处均连续。因此：

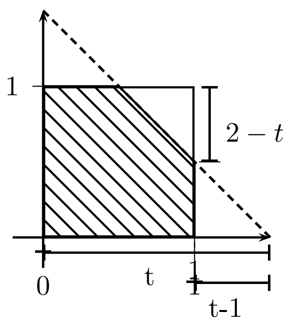
$$x \to -1 : -\frac{x^2}{2} - x - 1 + C_1 = \frac{x^2}{2} + x + C_2$$
$$\cdots$$

9 P83 例 2

$t \in [0, 1]$



$$t \in [1,2]$$

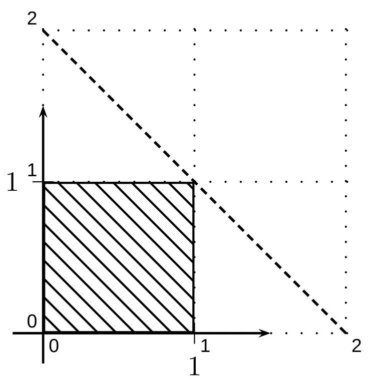


可以直接考虑正方形总面积 S 去除空白处的面积 $S'(t)$

$$S'(t) = \frac{1}{2}(2-t)^2$$

$S - S'(t)$ 便得

$$t > 2$$



10 P84 例 4

多联系，这类题只是步骤稍微多了点，按照步骤都可以做出来。自己懂了之后，就会发现，这个题目只是两个题目的组合而已。

10.1 分段函数

将分段函数 $f(x)$ 按照不同的范围进行积分

1. 当 $x < 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)dt \\ &= -\int_x^1 f(t)dt \\ &= -\int_x^0 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \\ &= -\int_x^0 e^t dt - \int_0^1 x dt \\ &= e^x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. 当 $x \geq 0$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_x^1 t dt \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以

$$F(X) = \begin{cases} e^x - \frac{3}{2}, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

如此，只是判断一个普通的分段函数在某个点处的性质

10.2 判断性质

...

11 P85 例 5

参照 P80 定积分存在定理, 原函数存在定理 于是判断两个函数 $f(x), g(x)$ 的连续性 $f(x)$ 在 0 处不连续

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 0 = g(0)$$

因此连续, 如此判断④正确
$f(x)$ 只存在几个可数的间断点，因此②正确

12 P85 例 6

做到这种选择题，如果证明太过复杂，注意排除法，另外，复习的时候，注意积累小结论 这道题里面核心点：

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

其中参数 C 才是关键。
A,B,C 中 => 不会受到 C 的影响。
但是回头，则需要注意 C

1. A 判断 => $F(x)$ 为奇，

$$So \quad F(x) = -F(-x)$$

$$Because \quad f(x) = F'(x)$$

$$So \quad f(x) = F'(x) = -(F(-x))' = f(-x)$$

所以 => 成立

2. A 判断 <= $f(x)$ 为偶函数

$$\begin{aligned}&So \quad f(x) = f(-x)\\&Because \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt + C\\&So \quad F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C\\&Set \quad u = -t\end{aligned}$$

因为 t 的范围为 $0 \to -x$
因此 $u = -x$ 的范围为 $0 \to x$

$$\begin{aligned}So \quad F(-x) &= \int_0^x f(-u)d-u + C\\&= -\int_0^x f(u)du + C\end{aligned}$$

$$So \quad F(x) + F(-x) = 2C$$

只有 $C = 0$ 时，<= 才成立.

3. B 判断 =>
同上

4. B 判断 <=
$f(x)$ 为奇数

$$\begin{aligned}&f(x) = -f(-x)\\&Because \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt + C\\&F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C\\&Set \quad u = -t\\&Because \quad t : 0 \to -x\\&So \quad u = -t : -0 \to -(-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SoF(-x) &= \int_0^x f(-u)d-u + C\\&= \int_0^x f(u)du + C\\&= F(x)\end{aligned}$$

其他两个情况也类似

12.1 关键点

定积分替换变量的方法

$$\begin{aligned}&F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C\\&Set \quad u = -t\\&Because \quad t : 0 \to -x\\&So \quad u = -t : -0 \to -(-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SoF(-x) &= \int_0^x f(-u)d-u + C\\&= \int_0^x f(u)du + C\\&= F(x)\end{aligned}$$