全书解答 5

Chunwei Yan

2012 年 12 月 4 日

1 P136 例 9

1.1 知识点

知识点不熟悉的话，那部分的内容回顾一下。

1. 二元函数 $f(x,y)$ 在某一点处的偏导数的求法见: 全书 P129 三、二元函数的偏导数与全微分)
2. 用定义法证明二元函数可微 (见: 全书 P134 三、讨论函数的可微性)

1.2 解答

1.2.1 用定义求偏导

首先，第一部分是偏导数的求法

这里利用了偏导的定义法来求解，比如求解 $f'_x(x,y)$

1. 控制和排除无关变量，对 x 求偏导，我们暂时对 y 不感兴趣，因为在点 $(0,0)$ 处，直接将 $y=0$，此时二元函数实际上变成了一个一元函数 $z=f(x,0)$
2. 利用极限的定义，求解 $f'_x(0,0)$,

$$f'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x-0}$$

注意偏导和全微分的区别，偏导数是一次只对一个或者几个自变量求导 (如 $f'_x(x_0,y_0)$，而全微分是同时对所有的自变量求导

1.2.2 用定义判断是否可微

参照 P134 的方法，思路就是判断

$$\Delta z=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}$$

$$\frac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'x(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

是否为 0，如果为 0 则可微，否则不可微。

1.3 总结

这道题很好，多元函数这部分题型很固定，好好记忆一下。

是否可微的判断，有两种方法

1. 利用定义证明，也就是本题的方法
2. 如果满足其每一个偏导存在且连续，则可微

2 P136 例 10

2.1 知识点

1. 用定义求偏导
2. 极限
3. 用定义判断是否可微

2.2 问题一，用定义求偏导

按照定义求偏导，综合利用极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x}\frac{|\Delta x|\,\rho(\Delta x,0)}{\Delta x}$$

不要被这里的 Δx 吓住了，一视同仁，这个就是最简单的极限求解， Δx 就是一个普通的变量。

$\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$

就是一个求符号的运算，会分为 $+,-$ 两种情况。

相应也就得到

$$=\begin{cases}\rho(0,0) & \Delta x \to 0+ \\ -\rho(0,0) & \Delta x \to 0- \end{cases}$$

由一元函数的极限 (二元函数的偏导降维为一维) 的定义可以得到，极限存在必须左右极限相等，也就是 $\rho(0,0) = -\rho(0,0) = 0$

由于题目中已经点出， $\rho(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，因此 $\lim_{\Delta x \to 0} \rho(\Delta x, 0) = \rho(0,0)$

2.3 问题二，用定义判断可微

判断可微与否的方法有两种

1. 利用定义判断
2. 利用各偏导存在且连续

但是此处无法判断偏导连续，因此用定义法。用定义法的话，一般就常规地算出来就可以了。因为形式有点复杂，所有没有什么太难的必要。所以，套路很明显。

注意 Δx 也是常规的变量，用极限的方法常规对待就可以了

3 P139 例 9

答案应该是对的吧

3.1 知识点

求偏导的方法，主要分为两个步骤

1. 控制无关变量，将不需要偏导的变量用常数替代，或者视为常数
2. 对剩下的一元函数求导

函数微分的表示见 P130 4. 可微的必要条件

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

3.2 解答

$$df(1,1,1) = f'_x(x,1,1)dx + f'_y(1,y,1)dy + f'_z(1,1,z)dz$$

其中 $f'_x(x,1,1)$ 是 $f(x,y,z)$ 在点 $(1,1,1)$ 处对 x 求偏导形成的，对 x 求导，控制无关变量 y,z，均分别用 1 替代。

你可以再做一下.

4 P146 例 28

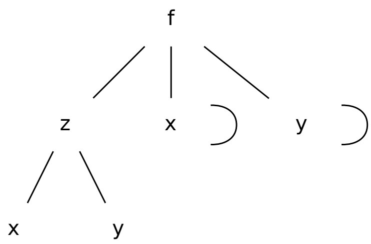
这个题目比较活，你可以跳过去

5 P149 例 33

这个是典型题，好好把握

5.1 知识点

复合求偏导



$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' * (1 + \frac{\partial z}{\partial x})$$

左右都有 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ，提取出来，可以计算到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'}{1-f'} \tag{1}$$

其中 f' 是 $f'(x+y+z)$ 的简写

下面的挑战是求 $\frac{\partial z^2}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{f'}{1-f'}}{\partial x} \tag{2}$$

平常心，不要被形式迷惑。下面就是简单的求导

设想 f 是关于 x 的函数，对 x 求偏导

$$\frac{\partial \frac{f'}{1-f'}}{\partial x} = \frac{\partial(-1 + \frac{1}{1-f'})}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial \frac{1}{1-f'}}{\partial x}$$

把 f 看作 x 的函数，进行分式的求导就可以得到最后的结果

$$= -\frac{1}{(1-f')^2}\frac{\partial f'}{\partial x}$$

其中

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial f'(x+y+z)}{\partial x} = f''*\frac{\partial(x+y+z)}{\partial x} = f''*1+\frac{\partial f'z}{\partial x}$$

根据公式 (1) 可以将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 用 f' 表示，最终结果就得出来了。

5.2 衍生

z''_{xy} 表示 z 分别对 x, y 进行偏导

$$z''_{xy} = \frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial\frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x}$$

一步一步进行求导就可以了。题目中 $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$，因为题目中没有交代 y 可以被 x 表示。

6 P150 例 35

6.1 知识点

这里需要知道 $f(x, y)$,

- f'_1 表示对第一个自变量求偏导，也就是 f'_x
- f'_2 表示对第二个自变量求偏导，也就是 f'_y
- f''_{12} 表示先对第一个自变量求偏导，然后对第二个自变量求偏导, 也就是 f''_{xy}

6.2 解答

$$-\frac{(f''_{11}+f''_{12}\frac{dy}{dx}f'_2-(f''_{21}+f''_{22}\frac{dy}{dx})f'_1}{{f'_2}^2} \tag{3}$$

将第 2 行 $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1}{f'_2}$ 代入其中，分式上下同乘 f'_2 就得到最后结果了。

7 P155 例 43

7.1 知识点

求多元函数的最值，详见全书 P154

总之就是讨论其特殊点，包括

1. 极值点
2. 驻点 (一阶导数为 0 的点)
3. 边界上的点 (利用拉格朗日法求解条件极值)

7.1.1 条件极值

条件极值方面参照全书 P151 条件极值

1. 要求函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 下的极值

   就构造拉格朗日函数，用参数 λ 将函数和条件结合在一起

   $$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$$

   相应地，有多少个条件，就设几个参数

   比如，如果有两个条件的时候:

2. 要求函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \phi(x, y, z)$ 下的极值

   $$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z)+\lambda\varphi(x, y, z)+\mu\phi(x, y, z)$$

   条件极值是基础题型，固定题型，记住就行。很常考。好好看看.

7.2 解答

7.3 第一部分，多元函数的极值

详见 P151 对这个要有印象

$$\begin{aligned} &AC - B^2 > 0 \quad small \\ &AC - B^2 < 0 \quad big \\ &AC - B^2 = 0 \quad unknown \end{aligned}$$

如果有点不熟悉要好好看看，每天都看，都练，肯定能够熟练的

7.4 条件极值

上面一部分对区域 D 内部的点求极值和驻点

下面需要去讨论边界上的最大值。考虑函数在边界上的最值，无非也就是一种条件极值。

函数是 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$，条件只有一个，是 $x^2 + y^2 = 25$，于是设立一个参数 λ，统一起来构造拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = \cdots$$

这个就是解答里面的式子

8 P158 例 46

8.1 知识点

这里有一个公式，你也许不知道，需要记忆一下

任意一个三角形的面积 S 和周长 C 之间有一定的关系

假设 $p = \frac{C}{2}$，就会有

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

8.2 解答

第 2 行会得到 h 和 $\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ 的一个关系，替换到体积的公式里面，就会得到

$$V = \frac{4}{3}\pi p \frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{y}$$

这里会有一个技巧，因为连乘的 x, y, z 无法求导，一般有连乘或者幂函数的时候，采用求对数的方法将乘积变成求和

再接下来就是常规的条件极值了

8.3 总结

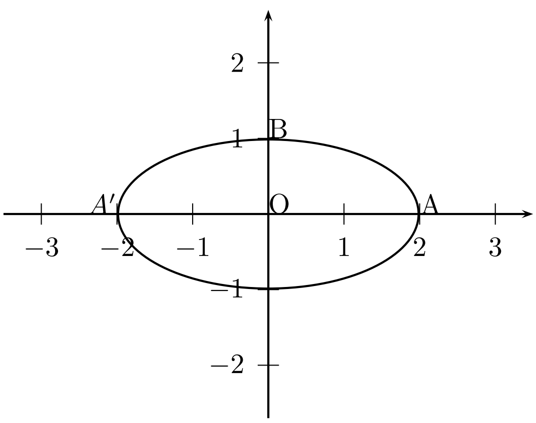
可以看到，这类综合题，尽管步骤比较多，但是也就是一些基础的知识点和题型的组合，如果自己的知识点和题型都比较熟悉的话，肯定能够按部就班做出来的。

所以，重点还是知识点和基础题型。

题目中发现有不懂的点，是好事，现在还额可以好好练好。

9 P158 例 47

9.1 知识点



- 其中线段 OA 就是长半轴（AA’ 是长轴），可以看到 A 是离椭圆中心最远的一点
- 线段 OB 就是短半轴，可以看到 B 是离椭圆中心最近的一点

题目就是根据这个，从离中心距离的最值来得到长半轴和短半轴

9.2 解答

P159 上面的解答得到 $x^2 + y^2 = -\lambda$

然后下面得到 $\lambda = -3 \pm 2\sqrt{2}$，这两个值代表了椭圆上点 (z, y) 离中心的最值，于是，更具上面的分析，得到长半轴 $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$

相应短半轴 $b = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$

10 P163 例 50

10.1 知识点

判断其关于 $y = x$，只需要将式子里面的所有 x 和 y 互换，如果得到的值相同，则其对称

10.2 解答

方法二，采用非常巧妙的排除法

假设 $f(x) = 1$，也就是说 $f(x)$ 是一个常值函数，永远等于 1，于是积分就一目了然了

$$\cdots = \iint_D (a+b) d\sigma = (a+b) S_D = \frac{(a+b)}{2}\pi$$

一下子就得到结果了

其中 $\iint_D d\sigma$ 就是此区域的面积

10.3 总结

二元函数积分方面，要充分利用对称等技巧，会极大地降低计算复杂度。毕竟，真题里面不会单纯让死算的。