

Stratosphärensprung

Am 14. Oktober 2012 sprang *Felix Baumgartner* aus einer Höhe von 39045 m aus einem Heliumballon, um im freien Fall die Schallgeschwindigkeit zu übertreffen. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit und Höhe über dem Erdboden als Funktion der Zeit unter Berücksichtigung

- der mit zunehmender Höhe z über der Erdoberfläche abnehmenden Gravitationsbeschleunigung:

$$a_g = g \cdot \left(\frac{R_E}{R_E + z} \right)^2$$

(Erdradius $R_E = 6356$ km) sowie

- des Strömungswiderstandes der Luft

$$\begin{aligned} F_L &= p_{\text{Stau}} c_w A \\ &= \frac{1}{2} \varrho_{\text{Luft}}(z) v^2 \cdot c_w A, \end{aligned}$$

wobei die Luftdichte nach der barometrischen Höhenformel höhenabhängig ist:

$$\varrho_{\text{Luft}}(z) = \varrho_0 e^{-\frac{Mg}{RT} z}$$

mit

der Luftdichte am Erdboden	$\varrho_0 = 1,204 \text{ kg/m}^3$
der mittleren molaren Masse der Atmosphäregase	$M = 0,029 \text{ kg/mol}$
der Fallbeschleunigung am Erdboden	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
der universeller Gaskonstante	$R = 8,314 \text{ J/K/mol}$
der mittleren absoluten Temperatur	$T = 280 \text{ K}$
dem Widerstandsbeiwert	$c_w = 0,25$

Die Temperaturabhängigkeit der Luftdichte wird vernachlässigt. Mit der für den Luftwiderstand relevanten Querschnittsfläche $A = 0.45 \text{ m}^2$ und der Masse von Person und

Ausrüstung $m = 130 \text{ kg}$ ergibt sich in einem Koordinatensystem, bei dem der Ursprung der z -Achse an der Erdoberfläche liegt, aus dem Newtonschen Grundgesetz

$$\ddot{z} = -a_g + \frac{F_L}{m}$$

die Bewegungsgleichung

$$\ddot{z}(t) - \frac{1}{2m} \varrho_0 e^{-\frac{M_g}{RT} z(t)} c_w A \dot{z}^2(t) + g \left(\frac{R_E}{R_E + z(t)} \right)^2 = 0.$$

1. Wandeln Sie diese gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung in ein Paar gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung um und bestimmen Sie mit Hilfe von `scipy.integrate.odeint()` die Zeitabhängigkeit von Höhe und Geschwindigkeit beginnend bei der Absprunghöhe (Anfangsgeschwindigkeit Null) bis zum Auslösen des Fallschirms in 1585 m Höhe!
2. Stellen Sie die so ermittelte Geschwindigkeit als Funktion der Zeit und der Höhe grafisch dar!
3. Bestimmen Sie die Maximalgeschwindigkeit beim Sprung! In welcher Höhe wird sie erreicht?