Dinamica epidemica su reti adattative

Thilo Gross, Carlos Dommar D'Lima, and Bernd Blasius

Gabriele Vanoni

Politecnico di Milano

6 Aprile 2017

Introduzione

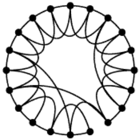
I punti di partenza

Modelli generativi di reti complesse

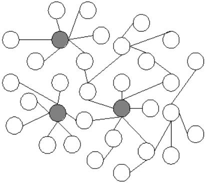
- Reti **small world** attraverso "rewiring selettivo" [Watts e Strogatz, *Nature*, 1998]
- Reti **scale-free** attraverso "attaccamento preferenziale" [Barabasi e Albert, *Science*, 1999]

Modello SIS su rete [Pastor-Satorras e Vespignani, *Phys. Rev. Lett.*, 2001]

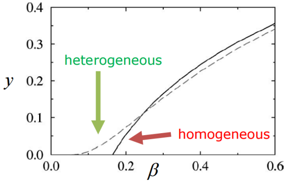
La **topologia** della rete influenza la dinamica di diffusione dell'epidemia.



Watts e Strogatz, *Nature*, 1998



Castiglio, *PhD Thesis*, 2004

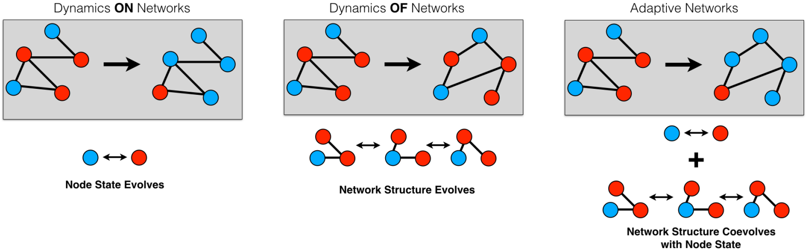


Piccardi, *Lett. Mat. Int.*, 2013

L'idea

Reti adattative

Chiamiamo una rete **adattativa** (o coevolutiva) se è in grado di modificare la propria topologia dinamicamente in risposta allo stato dinamico dei nodi.



Nishant Malik and Feng Shi, *DSWeb*, 2017

Modello

Definizione del modello

Definizione

- Consideriamo una rete non diretta, non pesata con N nodi e K link.
- Ogni nodo può essere suscettibile (S) o infetto (I).
- Ad ogni intervallo di tempo Δt, per ogni link SI, il nodo suscettibile diventa infetto con probabilità p costante.
- Ad ogni intervallo di tempo Δt, gli infetti si riprendono dalla malattia ritornando suscettibili con probabilità r costante.
- Ad ogni intervallo di tempo Δt, i suscettibili redirigono con probabilità w ogni link SI verso un suscettibile scelto a caso (auto-anelli e doppie connessioni non sono permessi).

Effetti del rewiring sulla stabilità dell'epidemia

Chiamiamo:

- p^* la **probabilità soglia di infezione** necessaria a mantenere stabile l'epidemia.
- R_0 il **basic reproductive number** ovvero il numero di nodi infettati da un singolo nodo infetto immerso in una rete di suscettibili.

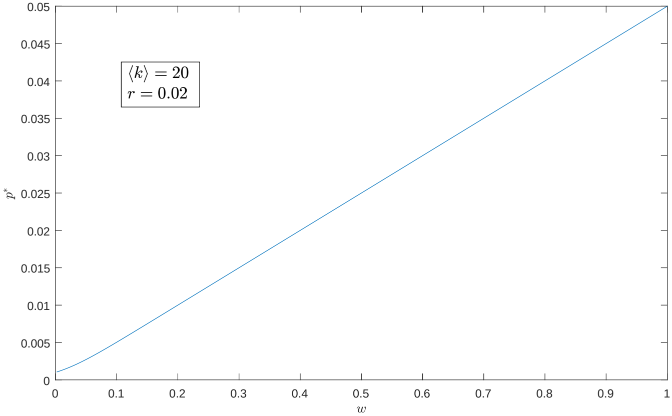
In una rete **casuale senza rewiring** $R_0 = \frac{p\langle k\rangle}{r}$.
Diciamo che l'epidemia è stabile se $R_0 = 1$, da cui $p^* = \frac{r}{\langle k\rangle}$.

Considerando che il **rewiring** fa perdere in media a un nodo infetto una frazione costante w di link il suo grado è descritto dall'equazione $k(t) = \langle k\rangle\, e^{-wt}$.

Mediando sull'intervallo medio di vita di un nodo infetto $\left[0, \frac{1}{r}\right]$ si ottiene per una rete casuale **con rewiring**, $p^* = \frac{w}{\langle k\rangle(1-e^{-\frac{w}{r}})}$.

Effetti del rewiring sulla stabilità dell'epidemia (continua)

Si nota che coerentemente $p^* \to \frac{r}{\langle k \rangle}$ per $w \to 0$. Inoltre $p^* \to \frac{w}{\langle k \rangle}$ per $\frac{w}{r} \to +\infty$, un alto tasso di rewiring dunque aumenta significativamente la **soglia epidemiologica**.



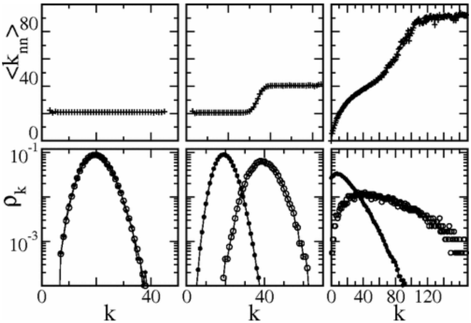
Effetti del rewiring sulla topologia (1/2)

Per indagare gli effetti del rewiring sulla topologia consideriamo tre dinamiche distinte.

- **1° caso**: rewiring casule.
- **2° caso**: rewiring selettivo ma dinamica locale assente.
- **3° caso**: rewiring selettivo e dinamica locale presente.

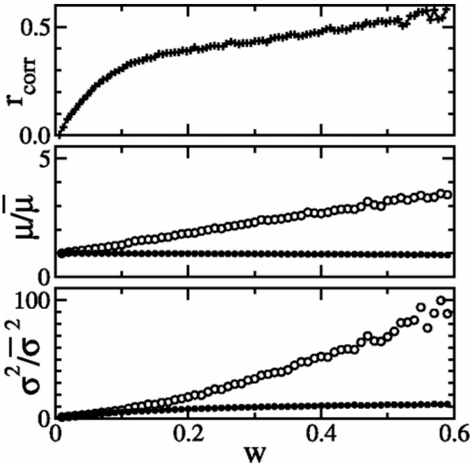
Il modello completo porta:

- **Allargamento** della distribuzione di grado
- **Assortatività**
- **Separazione** tra suscettibli e infetti



Effetti del rewiring sulla topologia (2/2)

Un'analisi più raffinata può essere condotta considerando i **parametri topologici** in funzione della probabilità di rewiring w.



All'aumentare di w:

- Aumenta l'**assortatività.**
- Aumenta la **media** della distribuzione di grado dei suscettibili (cerchi).
- Aumenta la **varianza** della distribuzione di grado dei suscettibili (cerchi).

Effetti globali del rewiring

L'effetto del **rewiring** è duplice e contrapposto infatti:

- agisce sulla **dinamica locale** tendendo a far aumentare la soglia epidemiologica.
- crea una **dinamica topologica** tendendo a far aumentare la varianza della distribuzione di grado perciò facendo diminuire la soglia epidemiologica (che va come $\frac{r\langle k\rangle}{\langle k^2\rangle}$ in una **rete scale-free**).

Si instaura nella rete in questo modo una **dinamica complessa** che è conveniente descrivere con un **modello di campo medio**.

Le variabili di stato di campo medio

- i: densità degli infetti.
- l_{II}: densità di link II.
- l_{SS}: densità di link SS.

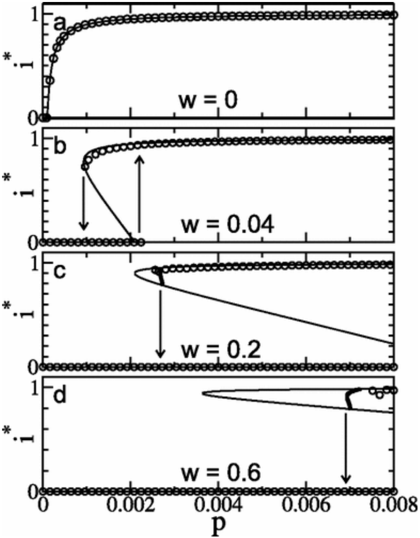
Il modello di campo medio

Il sistema di ODE

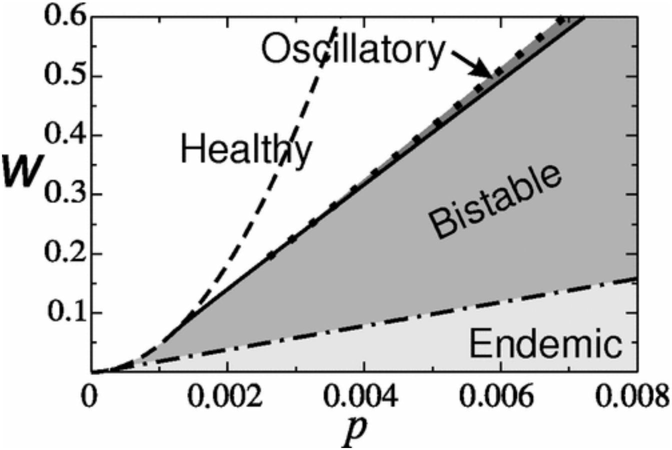
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = pl_{SI} - ri \\ \frac{\mathrm{d}l_{II}}{\mathrm{d}t} = pl_{SI}\left(\frac{l_{SI}}{s} + 1\right) - 2rl_{II} \\ \frac{\mathrm{d}l_{SS}}{\mathrm{d}t} = (r+w)l_{SI} - \frac{2pl_{SI}l_{SS}}{s} \end{cases}$$

L'analisi di **biforcazione** rispetto a p per i diversi valori di w mostra la presenza di **dinamiche complesse**:

- **cicli di isteresi**
- **bistabilità**
- **dinamiche oscillatorie** (linee spesse).



Analisi di biforcazione completa

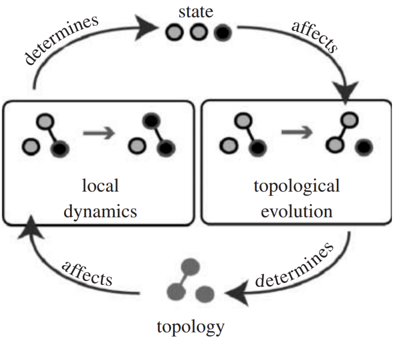


Legenda

— · — · — : **transcritica**	— — —— : **nodo sella**
———— : **Hopf**	· · · · · · · ·· : **tangente di cicli**

Conclusioni

Conclusioni



Gross and Blasius, *J.R.Soc Interface*, 2007

Il modello presentato arricchisce la letteratura riguardante la dinamica **su** e **di** reti complesse con un nuovo capitolo, mostrando come l'**interazione** tra le due dinamiche porti alla formazione di un **anello di retroazione** che produce dinamiche complesse.

Ulteriori **raffinamenti** del modello sono possibili. Ad esempio:

- considerare la probabilità di rewiring w come **funzione della consapevolezza** della diffusione dell'epidemia e quindi della densità di infetti i. [Gross e Kevrekidis, *arXiv*, 2007]
- **temporizzare** il rewiring. [Valdez *et al.*, *Phys. Rev. E*, 2012]

Bibliografia

Albert-László Barabási and Réka Albert.
Emergence of Scaling in Random Networks.
Science, 286(5439):509–512, 1999.

Thilo Gross and Bernd Blasius.
Adaptive coevolutionary networks: a review.
Journal of The Royal Society Interface, 5(20):259–271, 2008.

Thilo Gross, Carlos J. Dommar D'Lima, and Bernd Blasius.
Epidemic Dynamics on an Adaptive Network.
Phys. Rev. Lett., 96(20):208701, 2006.

Romualdo Pastor-Satorras and Alessandro Vespignani.
Epidemic Spreading in Scale-Free Networks.
Phys. Rev. Lett., 86(14):3200–3203, 2001.

Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz.
Collective dynamics of 'small-world' networks.
Nature, 393(6684):440–442, 1998.

Derivazione del modello di campo medio

Derivata degli infetti: $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = pl_{SI} - ri$

- Aumento dovuto al contagio: pl_{SI}.
- Diminuzione dovuta alla ripresa: $-ri$.

Moment closure approximation

$l_{ABC} = l_{AB}\mathrm{Pr}(BC|B) = l_{AB}\frac{l_{BC}}{B}$

Derivata dei link II: $\frac{\mathrm{d}l_{II}}{\mathrm{d}t} = pl_{SI}\left(\frac{l_{SI}}{s} + 1\right) - 2rl_{II}$

- Aumento dovuto al contagio da parte del nodo i: pl_{SI}.
- Aumento dovuto al contagio di nodi i collegati ad s: $\frac{pl_{SI}^2}{s}$.
- Diminuzione dovuta alla ripresa dei nodi i: $-2rl_{II}$.

Derivata dei link SS: $\frac{\mathrm{d}l_{SS}}{\mathrm{d}t} = (r+w)l_{SI} - \frac{2pl_{SI}l_{SS}}{s}$

- Aumento dovuto alla ripresa degli infetti: rl_{SI}.
- Aumento dovuto al rewiring: wl_{SI}.
- Diminuzione dovuta al contagio $-\frac{2pl_{SI}l_{SS}}{s}$.