L'uso della logica modale per fornire una semantica classica alla logica intuizionista

Gabriele Vanoni

Politecnico di Milano

15 Dicembre 2016

Sommario

La logica intuizionista

Le motivazioni

Dalla seconda metà dell'800 le **dimostrazioni** hanno perso in generale contenuto **computazionale**.
Le dimostrazioni spesso non sono **costruttive**, provano l'esistenza di un oggetto ma non danno un **algoritmo** per costruirlo.
Brouwer capisce che questa mancanza è data dalla legge del **terzo escluso**:

$$\vdash p \vee \neg p$$

Esempio

Non possiamo asserire che $\forall n. f(n) = 0 \vee \exists n. f(n) \neq 0$.

La corrispondenza di Curry-Howard-Lambek (cenni)

- La logica intuizionista diventa fondamentale nel secondo dopoguerra nella teoria dei **linguaggi di programmazione**.
- Infatti viene stabilita una **corrispondenza sintattica** tra le dimostrazioni in **deduzione naturale** e i programmi del **lambda-calcolo tipato semplice**.
- La corrispondenza tra prove e programmi segna la nascita della moderna **teoria dei tipi** (Martin-Lof, Coquand), dei **linguaggi funzionali** (Lisp, Haskell) e dei **proof-assistant** (Coq, HOL).
- La corrispondenza viene poi estesa alla **teoria delle categorie** e in particolare alle Categorie Cartesiane Chiuse (CCC) aventi come oggetti i tipi (formule) e come morfismi i termini (dimostrazioni).

L'interpretazione BHK

- Una dimostrazione di $A \wedge B$ è data presentando una dimostrazione di A e una dimostrazione di B.
- Una dimostrazione di $A \vee B$ è data presentando una dimostrazione di A o una dimostrazione di B.
- Una dimostrazione di $A \rightarrow B$ è una costruzione che permette di trasformare qualsiasi dimostrazione di A in una dimostrazione di B.
- L'assurdo $\perp$ non ha dimostrazione.
- Una dimostrazione di $\neg A$ è una costruzione che trasforma ogni ipotetica dimostrazione di A in una dimostrazione di $\perp$ (ovvero una dimostrazione di $A \rightarrow \perp$).

Ovviamente queste regole non forniscono una semantica formale, lasciando generici i concetti di dimostrazione e costruzione.

Un calcolo alla Hilbert per **Int**

Heyting e Kolmogorov proposero per **Int** un calcolo alla Hilbert con i seguenti schemi di assiomi:

1. $P \to (Q \to P)$
2. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
3. $P \land Q \to P$
4. $P \land Q \to Q$
5. $P \to (Q \to P \land Q)$
6. $P \to P \lor Q$
7. $Q \to P \lor Q$
8. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \lor Q \to R))$
9. $\bot \to P$

e la regola di inferenza **Modus Ponens**.

La logica **Int** risulta quindi essere un sottoinsieme proprio della logica **L**, avendo questa come unico assioma in più il **principio del terzo escluso** $P \lor (P \to \bot)$.

La semantica di Kripke per **Int**

- Dobbiamo immaginare che se una proposizione p non è vera in un istante x, non è detto che non lo diverrà in un futuro y. La conoscenza evolve cioè da uno stato all'altro. Tuttavia ciò che è vero, ovviamente nel futuro rimane vero.
- Possiamo quindi formalizzare il ragionamento costruendo un **frame** di Kripke $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ con $\mathfrak{W}$ insieme non vuoto dei **mondi** e $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{W} \times \mathfrak{W}$ **relazione di accessiblità** fra i mondi, su cui verranno costruiti i relativi **modelli** $\mathfrak{M} =< \mathfrak{F}, \mathfrak{V} >$ assegnando una funzione di **valutazione** $\mathfrak{V} : Var\mathcal{L} \to \mathcal{P}(\mathfrak{W})$.
- Per dare il significato ad R di "tempo", richiediamo che $\mathfrak{R}$ sia un **ordine parziale**, ovvero sia **transitiva**, **riflessiva** e **antisimmetrica**.
- Richiediamo inoltre che la funzione di valutazione $\mathfrak{V}$ garantisca che la verità venga mantenuta "nel tempo", ovvero che se $x \in \mathfrak{V}(p)$ e $x\mathfrak{R}y$ allora $y \in \mathfrak{V}(p)$ per ogni $p \in Var\mathcal{L}$.

La semantica di Kripke per **Int** (continua)

La **valutazione** delle formule su un **mondo** x di un **modello** $\mathfrak{M} =< \mathfrak{F}, \mathfrak{V} >$ costruito su un **frame** $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ procede per induzione sulla costruzione della formula:

- $(\mathfrak{M}, x) \models p$ sse $x \in \mathfrak{V}(p)$
- $(\mathfrak{M}, x) \models P \wedge Q$ sse $(\mathfrak{M}, x) \models P$ e $(\mathfrak{M}, x) \models Q$
- $(\mathfrak{M}, x) \models P \vee Q$ sse $(\mathfrak{M}, x) \models P$ o $(\mathfrak{M}, x) \models Q$
- $(\mathfrak{M}, x) \models P \rightarrow Q$ sse per ogni y tale che $x\mathfrak{R}y$ se $(\mathfrak{M}, y) \models P$ allora $(\mathfrak{M}, y) \models Q$
- $(\mathfrak{M}, x) \not\models \perp$

segue quindi che $(\mathfrak{M}, x) \models \neg P$ sse per ogni y tale che $x\mathfrak{R}y$ $(\mathfrak{M}, y) \not\models P$.

Si verifica per induzione sulla complessità della formula che se P è vera in x e $x\mathfrak{R}y$ allora P è vera anche in y.

Esempio: il principio del terzo escluso

Ci basta trovare un modello in cui $p \vee \neg p \equiv p \vee (p \to \bot)$ non sia valida. Consideriamo un frame con soli due mondi x e y, $\mathfrak{R} = \{(x, x), (x, y), (y, y)\}$, un'unica lettera proposizionale p e $\mathfrak{V}(p) = \{y\}$. Rappresentiamo a sinistra del mondo ciò che è vero mentre a destra ciò che non lo è (non è detto che sia falso!).

$$\begin{tikzcd} p, p \vee (p \to \bot) & \overset{y}{\bullet} & p \to \bot \\ & \underset{x}{\bullet} \arrow[u] & p, p \to \bot, p \vee (p \to \bot) \equiv \mathbf{p \vee \neg p} \end{tikzcd}$$

La traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski

L'idea

- Abbiamo fornito una **semantica formale** ad **Int** utilizzando un **frame di Kripke** con particolari proprietà, che intuitivamente rispecchiano il possibile aumento di **conoscenza** nel tempo.
- Vorremmo ora formalizzare l'**interpretazione BHK** che faceva invece riferimento alla **dimostrabilità**.
- L'idea è quella di utilizzare l'operatore **modale** $\Box$ con il significato di "è dimostrabile".
- Capiamo che per assegnare la corretta semantica all'operatore $\Box$, necessitiamo di una teoria più forte di **K**, in particolare avremo bisogno che la dimostrabiltà di A implichi A e che la dimostrabilità di A implichi la dimostrabilità della sua dimostrabilità, ovvero devono valere gli **assiomi**:
  - **T**: $\Box A \rightarrow A$
  - **4**: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
- Faremo vedere dunque una traduzione di **Int** in **S4**, ovvero la logica determinata dai frame **riflessivi** e **transitivi**.

Una nota sul concetto di dimostrabilità

La **semantica** che diamo all'operatore $\Box$ è quella di "**dimostrabilità**" in un senso **informale**, non in un particolare **sistema formale S** come potrebbe essere **PA**. Infatti avremmo che in **S**:

$$\Box(0 \neq 0) \to 0 \neq 0 \text{ (assioma } \mathbf{T} \text{ e sostituzione)}$$

da cui deriviamo

$$\neg \Box (0 \neq 0) \text{ (essendo il conseguente falso),}$$

che asserisce la **coerenza** di **S**, andando contro il **secondo teorema di incompletezza**.
Per considerare la dimostrabilità in un **sistema formale S** dobbiamo considerare non **S4**, ma la logica **GL** in cui l'operatore $\Box$ ha le stesse proprità del predicato "è dimostrabile in **S**" definito nella dimostrazione dei **teoremi di incompletezza**.

La traduzione

Diamo quindi una **traduzione** T: $For\mathcal{L} \to For\mathcal{ML}$ ottenuta dall'**interpretazione BHK** sostituendo alla parola "dimostrazione" o "costruzione" l'operatore $\Box$.

Traduzione GMT

- $\mathrm{T}(p) = \Box p$
- $\mathrm{T}(P \wedge Q) = \mathrm{T}(P) \wedge \mathrm{T}(Q)$
- $\mathrm{T}(P \vee Q) = \mathrm{T}(P) \vee \mathrm{T}(Q)$
- $\mathrm{T}(P \to Q) = \Box(\mathrm{T}(P) \to \mathrm{T}(Q))$
- $\mathrm{T}(\bot) = \Box \bot$

Ciò che vogliamo dimostrare è che per ogni formula $P \in For\mathcal{L}$:

$$P \in \mathbf{Int} \text{ se e solo se } \mathrm{T}(P) \in \mathbf{S4}.$$

Lemma preliminare

Abbiamo bisogno di alcune definizioni e lemmi preliminari.

Lemma

Sia $\mathfrak{M}$ un modello costruito su un frame $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ transitivo. Allora per ogni mondo x in $\mathfrak{W}$ se $(\mathfrak{M}, x) \models \Box P$ allora per ogni y tale che $x\mathfrak{R}y$ $(\mathfrak{M}, y) \models \Box P$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che in un mondo y tale che $x\mathfrak{R}y$ $(\mathfrak{M}, y) \not\models \Box P$. Allora dovrebbe esistere un mondo z tale che $y\mathfrak{R}z$ in cui $(\mathfrak{M}, z) \not\models P$. Per la transitività di $\mathfrak{R}$ $x\mathfrak{R}z$ e dunque contraddirremmo l'ipotesi. $\Box$

Frame skeleton

Definizione (relazione di cluster)

Dato un frame $\mathfrak{F}$ transitivo $< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ diciamo che per ogni $x, y \in \mathfrak{W}$ $x \approx y$ se e solo se o $x = y$ o $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}x$.

Definizione

Il frame quoziente di un frame transitivo $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ rispetto alla relazione di cluster $\approx$, cioè $< \mathfrak{W}/\approx, \mathfrak{R}/\approx >$ essendo:

- $\mathfrak{W}/\approx$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\mathfrak{W}$ rispetto a $\approx$
- $C(x)\,\mathfrak{R}/\approx\; C(y)$ se e solo se $x\mathfrak{R}y$

è chiamato frame skeleton di $\mathfrak{F}$ e indicato con $\rho\mathfrak{F} =< \rho\mathfrak{W}, \rho\mathfrak{R} >$.

Risulta evidente che un frame skeleton è **antisimmetrico**, **transitivo** e mantiene l'eventuale **riflessività** di R.

Costruzione del modello skeleton

Torniamo alla logica **S4**. Consideriamo un suo **modello** $\mathfrak{M} =< \mathfrak{F}, \mathfrak{V} >$. Sappiamo che è costruito su un **frame** $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ **transitivo e riflessivo** (**preordinato**).
Costruiamo il **frame skeleton** $\rho\mathfrak{F}$ (che è **parzialmente ordinato**, essendo **transitivo**, **riflessivo** e **antisimmetrico**) e assegnamogli la **valutazione** $\rho\mathfrak{V}$ così definita:

$$\rho\mathfrak{V}(p) = \{C(x) : (\mathfrak{M}, x) \models \Box p\}.$$

Osserviamo che per il lemma precedente la valutazione è trasparente rispetto alla scelta del mondo all'interno del cluster e che inoltre rispetta la proprietà per cui se $C(x) \in \rho\mathfrak{V}(p)$ e $C(X)\,\mathfrak{R}/\approx\, C(y)$ allora $C(y) \in \rho\mathfrak{V}(p)$ per ogni $p \in Var\mathcal{L}$.
Chiamiamo **skeleton** di $\mathfrak{M}$ il **modello** $\rho\mathfrak{M} =< \rho\mathfrak{F}, \rho\mathfrak{V} >$.
$\rho\mathfrak{M}$ è dunque un **modello intuizionista**.

Modello modale e lemma skeleton

Osserviamo che dato un **modello intuizionista** $\mathfrak{N} = < \rho\mathfrak{F}, \mathfrak{U} >$ costruito come skeleton di un **frame modale** $\mathfrak{F}$ possiamo costruire un **modello modale** $\mathfrak{M}$ considerando la **valutazione**

$$\mathfrak{V}(p) = \{x \, : \, (\rho\mathfrak{N}, C(x)) \models p\}.$$

In particolare avremo $\rho\mathfrak{M}$ isomorfo a $\mathfrak{N}$. Inoltre se ogni **cluster** di $\mathfrak{F}$ è singolo abbiamo che $\mathfrak{F}$ è isomorfo a $\rho\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{M}$ è isomorfo ad $\mathfrak{N}$.

Lemma (skeleton)

Per ogni modello $\mathfrak{M}$ modale costruito su un frame preordinato, per ogni mondo x di $\mathfrak{M}$ e per ogni formula $P \in For\mathcal{L}$ $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \models P$ se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \models \mathrm{T}(P)$.

Lemma skeleton - dimostrazione

Dimostrazione.

La dimostrazione procede per induzione sulla complessità della formula.

Caso base (formula atomica): per la definizione di $\rho\mathfrak{V}$, $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \models p$ se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \models \Box p$ e $\mathrm{T}(p) = \Box p$.

Supponiamo allora che per una formula con n connettivi Q valga $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \models Q$ se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \models \mathrm{T}(Q)$.

Dimostriamo che la proprietà vale aggiungendo l'$n + 1 esimo$ connettivo. Distinguiamo i seguenti casi.

Caso $P = Q \rightarrow R$**:** $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \not\models P$ se e solo se $(\rho\mathfrak{M}, C(y)) \models Q$ e $(\rho\mathfrak{M}, C(y)) \not\models R$ in un qualche $C(y)$ tale che $C(X)\,\mathfrak{R}/\approx\; C(y)$. È possibile per ipotesi di induzione se e solo se $(\mathfrak{M}, y) \models \mathrm{T}(Q)$ e $(\mathfrak{M}, y) \not\models \mathrm{T}(R)$ con $y \in C(y)$ cioè se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \not\models \Box(\mathrm{T}(Q) \rightarrow \mathrm{T}(R))$ cioè $(\mathfrak{M}, x) \not\models \mathrm{T}(P)$.

Gli altri **casi** con $\wedge$ e $\vee$ si provano allo stesso modo. $\Box$

T è una traduzione di **Int** in **S4**

Corollario

Per ogni frame $\mathfrak{F}$ quasi ordinato e ogni $P \in For\mathcal{L}$
$\rho\mathfrak{F} \models P$ *se e solo se* $\mathfrak{F} \models \mathrm{T}(P)$.

Teorema

$P \in$ **Int** *se e solo se* $\mathrm{T}(P) \in$ **S4**.

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$) Supponiamo che $\mathrm{T}(P) \notin$ **S4**. Allora esiste un frame $\mathfrak{F}$ transitivo e riflessivo per cui $\mathfrak{F} \not\models \mathrm{T}(P)$. Per il corollario sopra allora $\rho\mathfrak{F} \not\models P$. Dunque $P \notin$ **Int**.
($\Longleftarrow$) Supponiamo che $P \notin$ **Int**. Allora esiste un frame intuizionista $\mathfrak{F}$ per cui $\mathfrak{F} \not\models P$. Possiamo allora considerare $\mathfrak{F}$ come un frame modale isomorfo al suo skeleton, per cui per il corollario sopra $\mathfrak{F} \not\models \mathrm{T}(P)$ e quindi $\mathrm{T}(P) \notin$ **S4**. □

Riferimenti bibliografici

Alexander Chagrov and Michael Zakharyaschev.
Modal Logic.
Clarendon Press, 1997.

Gabriele Lolli.
Logica Intuizionista.
Note del corso di filosofia della matematica, 2013.

Giovanni Sambin.
Molteplicità delle logiche e necessità delle traduzioni. Logica intuizionistica e logica classica a confronto.
Note.

Thierry Coquand.
Constrctive Logic.
Note della MAP Summer School, Trieste, August 2008.