L'uso della logica modale per fornire una semantica classica alla logica intuizionista

Gabriele Vanoni

Abstract

Dopo aver brevemente presentato le motivazioni filosofiche e matematiche per cui ha senso introdurre la logica intuizionista se ne discute brevemente l'interpretazione BHK e si fornisce la semantica di Kripke. Si passa poi a presentare la traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski che permette l'interpretazione dell'intuizionismo attraverso i connettivi modali classici, e in particolare si dimostra l'equivalenza con il sistema **S4**.

Indice

1 La logica intuizionista **1**

2 La traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski **4**

1 La logica intuizionista

Le motivazioni

Dalla seconda metà dell'800 le **dimostrazioni** hanno perso in generale contenuto **computazionale**.

Le dimostrazioni spesso non sono **costruttive**, provano l'esistenza di un oggetto ma non danno un **algoritmo** per costruirlo.

Brouwer capisce che questa mancanza è data dalla legge del **terzo escluso**:

$$\vdash p \vee \neg p$$

Esempio
Non possiamo asserire che $\forall n.f(n) = 0 \vee \exists n.f(n) \neq 0$.

La corrispondenza di Curry-Howard-Lambek (cenni)

- La logica intuizionista diventa fondamentale nel secondo dopoguerra nella teoria dei **linguaggi di programmazione**.
- Infatti viene stabilita una **corrispondenza sintattica** tra le dimostrazioni in **deduzione naturale** e i programmi del **lambda-calcolo tipato semplice**.
- La corrispondenza tra prove e programmi segna la nascita della moderna **teoria dei tipi** (Martin-Lof, Coquand), dei **linguaggi funzionali** (Lisp, Haskell) e dei **proof-assistant** (Coq, HOL).
- La corrispondenza viene poi estesa alla **teoria delle categorie** e in particolare alle Categorie Cartesiane Chiuse (CCC) aventi come oggetti i tipi (formule) e come morfismi i termini (dimostrazioni).

L'interpretazione BHK

- Una dimostrazione di $A \wedge B$ è data presentando una dimostrazione di A e una dimostrazione di B.
- Una dimostrazione di $A \vee B$ è data presentando una dimostrazione di A o una dimostrazione di B.
- Una dimostrazione di $A \rightarrow B$ è una costruzione che permette di trasformare qualsiasi dimostrazione di A in una dimostrazione di B.
- L'assurdo $\perp$ non ha dimostrazione.
- Una dimostrazione di $\neg A$ è una costruzione che trasforma ogni ipotetica dimostrazione di A in una dimostrazione di $\perp$ (ovvero una dimostrazione di $A \rightarrow \perp$).

Ovviamente queste regole non forniscono una semantica formale, lasciando generici i concetti di dimostrazione e costruzione.

Un calcolo alla Hilbert per Int

Heyting e Kolmogorov proposero per **Int** un calcolo alla Hilbert con i seguenti schemi di assiomi:

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
2. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
3. $P \wedge Q \rightarrow P$
4. $P \wedge Q \rightarrow Q$

5. $P \to (Q \to P \land Q)$
6. $P \to P \lor Q$
7. $Q \to P \lor Q$
8. $(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \lor Q \to R))$
9. $\perp \to P$

e la regola di inferenza **Modus Ponens**.

La logica **Int** risulta quindi essere un sottoinsieme proprio della logica **L**, avendo questa come unico assioma in più il **principio del terzo escluso** $P \lor (P \to \perp)$.

La semantica di Kripke per Int

- Dobbiamo immaginare che se una proposizione p non è vera in un istante x, non è detto che non lo diverrà in un futuro y. La conoscenza evolve cioè da uno stato all'altro. Tuttavia ciò che è vero, ovviamente nel futuro rimane vero.
- Possiamo quindi formalizzare il ragionamento costruendo un **frame** di Kripke $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ con $\mathfrak{W}$ insieme non vuoto dei **mondi** e $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{W} \times \mathfrak{W}$ **relazione di accessiblità** fra i mondi, su cui verranno costruiti i relativi **modelli** $\mathfrak{M} =< \mathfrak{F}, \mathfrak{V} >$ assegnando una funzione di **valutazione** $\mathfrak{V} : Var\mathcal{L} \to \mathcal{P}(\mathfrak{W})$.
- Per dare il significato ad R di "tempo", richiediamo che $\mathfrak{R}$ sia un **ordine parziale**, ovvero sia **transitiva**, **riflessiva** e **antisimmetrica**.
- Richiediamo inoltre che la funzione di valutazione $\mathfrak{V}$ garantisca che la verità venga mantenuta "nel tempo", ovvero che se $x \in \mathfrak{V}(p)$ e $x\mathfrak{R}y$ allora $y \in \mathfrak{V}(p)$ per ogni $p \in Var\mathcal{L}$.

La **valutazione** delle formule su un **mondo** x di un **modello** $\mathfrak{M} =< \mathfrak{F}, \mathfrak{V} >$ costruito su un **frame** $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ procede per induzione sulla costruzione della formula:

- $(\mathfrak{M}, x) \models p$ sse $x \in \mathfrak{V}(p)$
- $(\mathfrak{M}, x) \models P \land Q$ sse $(\mathfrak{M}, x) \models P$ e $(\mathfrak{M}, x) \models Q$
- $(\mathfrak{M}, x) \models P \lor Q$ sse $(\mathfrak{M}, x) \models P$ o $(\mathfrak{M}, x) \models Q$
- $(\mathfrak{M}, x) \models P \to Q$ sse per ogni y tale che $x\mathfrak{R}y$ se $(\mathfrak{M}, y) \models P$ allora $(\mathfrak{M}, y) \models Q$

- $(\mathfrak{M}, x) \not\models \bot$

segue quindi che $(\mathfrak{M}, x) \models \neg P$ sse per ogni y tale che $x\mathfrak{R}y$ $(\mathfrak{M}, y) \not\models P$.

Si verifica per induzione sulla complessità della formula che se P è vera in x e $x\mathfrak{R}y$ allora P è vera anche in y.

Esempio: il principio del terzo escluso

Ci basta trovare un modello in cui $p \vee \neg p \equiv p \vee (p \to\bot)$ non sia valida. Consideriamo un frame con soli due mondi x e y, $\mathfrak{R} = \{(x,x),(x,y),(y,y)\}$, un'unica lettera proposizionale p e $\mathfrak{V}(p) = \{y\}$. Rappresentiamo a sinistra del mondo ciò che è vero mentre a destra ciò che non lo è (non è detto che sia falso!).

$$\begin{tikzcd} p, p \vee (p \to\bot) & \overset{y}{\bullet} & p \to\bot \\ & \underset{x}{\bullet} \arrow[u] & p, p \to\bot, p \vee (p \to\bot) \equiv \boldsymbol{p \vee \neg p} \end{tikzcd}$$

2 La traduzione di Gödel-McKinsey-Tarski

L'idea

- Abbiamo fornito una **semantica formale** ad **Int** utilizzando un **frame di Kripke** con particolari proprietà, che intuitivamente rispecchiano il possibile aumento di **conoscenza** nel tempo.
- Vorremmo ora formalizzare l'**interpretazione BHK** che faceva invece riferimento alla **dimostrabilità**.
- L'idea è quella di utilizzare l'operatore **modale** $\Box$ con il significato di "è dimostrabile".
- Capiamo che per assegnare la corretta semantica all'operatore $\Box$, necessitiamo di una teoria più forte di **K**, in particolare avremo bisogno che la dimostrabiltà di A implichi A e che la dimostrabilità di A implichi la dimostrabilità della sua dimostrabilità, ovvero devono valere gli **assiomi**:
  - **T**: $\Box A \to A$
  - **4**: $\Box A \to \Box\Box A$
- Faremo vedere dunque una traduzione di **Int** in **S4**, ovvero la logica determinata dai frame **riflessivi** e **transitivi**.

Una nota sul concetto di dimostrabilità

La **semantica** che diamo all'operatore $\Box$ è quella di "**dimostrabilità**" in un senso **informale**, non in un particolare **sistema formale S** come potrebbe essere **PA**. Infatti avremmo che in **S**:

$$\Box(0 \neq 0) \rightarrow 0 \neq 0 \text{ (assioma } \mathbf{T} \text{ e sostituzione)}$$

da cui deriviamo

$$\neg \Box (0 \neq 0) \text{ (essendo il conseguente falso),}$$

che asserisce la **coerenza** di **S**, andando contro il **secondo teorema di incompletezza**.

Per considerare la dimostrabilità in un **sistema formale S** dobbiamo considerare non **S4**, ma la logica **GL** in cui l'operatore $\Box$ ha le stesse proprità del predicato "è dimostrabile in **S**" definito nella dimostrazione dei **teoremi di incompletezza**.

La traduzione

Diamo quindi una **traduzione** T: $For\mathcal{L} \rightarrow For\mathcal{ML}$ ottenuta dall'**interpretazione BHK** sostituendo alla parola "dimostrazione" o "costruzione" l'operatore $\Box$.

Traduzione GMT

- $\mathsf{T}(p) = \Box p$
- $\mathsf{T}(P \wedge Q) = \mathsf{T}(P) \wedge \mathsf{T}(Q)$
- $\mathsf{T}(P \vee Q) = \mathsf{T}(P) \vee \mathsf{T}(Q)$
- $\mathsf{T}(P \rightarrow Q) = \Box(\mathsf{T}(P) \rightarrow \mathsf{T}(Q))$
- $\mathsf{T}(\bot) = \Box \bot$

Ciò che vogliamo dimostrare è che per ogni formula $P \in For\mathcal{L}$:

$$P \in \mathbf{Int} \text{ se e solo se } \mathsf{T}(P) \in \mathbf{S4}.$$

Abbiamo bisogno di alcune definizioni e lemmi preliminari.

Lemma 1. *Sia $\mathfrak{M}$ un modello costruito su un frame $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W}, \mathfrak{R} >$ transitivo. Allora per ogni mondo x in $\mathfrak{W}$ se $(\mathfrak{M}, x) \models \Box P$ allora per ogni y tale che $x\mathfrak{R}y$ $(\mathfrak{M}, y) \models \Box P$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che in un mondo y tale che $x\mathfrak{R}y$ $(\mathfrak{M}, y) \not\models \Box P$. Allora dovrebbe esistere un mondo z tale che $y\mathfrak{R}z$ in cui $(\mathfrak{M}, z) \not\models P$. Per la transitività di $\mathfrak{R}$ $x\mathfrak{R}z$ e dunque contraddirremmo l'ipotesi. $\Box$

Frame skeleton

Definizione 2 (relazione di cluster)**.** Dato un frame $\mathfrak{F}$ transitivo $<\mathfrak{W},\mathfrak{R}>$ diciamo che per ogni $x, y \in \mathfrak{W}$ $x \approx y$ se e solo se o $x = y$ o $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}x$.

Definizione 3. Il frame quoziente di un frame transitivo $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W},\mathfrak{R} >$ rispetto alla relazione di cluster $\approx$, cioè $< \mathfrak{W}/\approx, \mathfrak{R}/\approx>$ essendo:

- $\mathfrak{W}/\approx$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\mathfrak{W}$ rispetto a $\approx$
- $C(x)\,\mathfrak{R}/\approx\, C(y)$ se e solo se $x\mathfrak{R}y$

è chiamato frame skeleton di $\mathfrak{F}$ e indicato con $\rho\mathfrak{F} =< \rho\mathfrak{W}, \rho\mathfrak{R} >$.

Risulta evidente che un frame skeleton è **antisimmetrico**, **transitivo** e mantiene l'eventuale **riflessività** di R.

Costruzione del modello skeleton

Torniamo alla logica **S4**. Consideriamo un suo **modello** $\mathfrak{M} =< \mathfrak{F}, \mathfrak{V} >$. Sappiamo che è costruito su un **frame** $\mathfrak{F} =< \mathfrak{W},\mathfrak{R} >$ **transitivo e riflessivo** (**preordinato**).

Costruiamo il **frame skeleton** $\rho\mathfrak{F}$ (che è **parzialmente ordinato**, essendo **transitivo**, **riflessivo** e **antisimmetrico**) e assegnamogli la **valutazione** $\rho\mathfrak{V}$ così definita:

$$\rho\mathfrak{V}(p) = \{C(x) : (\mathfrak{M}, x) \models \Box p\}.$$

Osserviamo che per il lemma precedente la valutazione è trasparente rispetto alla scelta del mondo all'interno del cluster e che inoltre rispetta la proprietà per cui se $C(x) \in \rho\mathfrak{V}(p)$ e $C(X)\,\mathfrak{R}/\approx\, C(y)$ allora $C(y) \in \rho\mathfrak{V}(p)$ per ogni $p \in Var\mathcal{L}$.

Chiamiamo **skeleton** di $\mathfrak{M}$ il **modello** $\rho\mathfrak{M} =< \rho\mathfrak{F}, \rho\mathfrak{V} >$.

$\rho\mathfrak{M}$ è dunque un **modello intuizionista**.

Modello modale e lemma skeleton

Osserviamo che dato un **modello intuizionista** $\mathfrak{N}=< \rho\mathfrak{F}, \mathfrak{U} >$ costruito come skeleton di un **frame modale** $\mathfrak{F}$ possiamo costruire un **modello modale** $\mathfrak{M}$ considerando la **valutazione**

$$\mathfrak{V}(p) = \{x : (\rho\mathfrak{N}, C(x)) \models p\}.$$

In particolare avremo $\rho\mathfrak{M}$ isomorfo a $\mathfrak{N}$. Inoltre se ogni **cluster** di $\mathfrak{F}$ è singolo abbiamo che $\mathfrak{F}$ è isomorfo a $\rho\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{M}$ è isomorfo ad $\mathfrak{N}$.

Lemma 4 (skeleton)**.** *Per ogni modello $\mathfrak{M}$ modale costruito su un frame preordinato, per ogni mondo x di $\mathfrak{M}$ e per ogni formula $P \in For\mathcal{L}$*

$(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \models P$ *se e solo se* $(\mathfrak{M}, x) \models \mathsf{T}(P)$.

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione sulla complessità della formula.

Caso base (formula atomica): per la definizione di $\rho\mathfrak{V}$, $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \models p$ se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \models \Box p$ e $\mathsf{T}(p) = \Box p$.

Supponiamo allora che per una formula con n connettivi Q valga $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \models Q$ se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \models \mathsf{T}(Q)$.

Dimostriamo che la proprietà vale aggiungendo l'$n + 1esimo$ connettivo. Distinguiamo i seguenti casi.

Caso $P = Q \to R$***:*** $(\rho\mathfrak{M}, C(x)) \not\models P$ se e solo se $(\rho\mathfrak{M}, C(y)) \models Q$ e $(\rho\mathfrak{M}, C(y)) \not\models R$ in un qualche $C(y)$ tale che $C(X)\, \mathfrak{R}/ \approx\, C(y)$. È possibile per ipotesi di induzione se e solo se $(\mathfrak{M}, y) \models \mathsf{T}(Q)$ e $(\mathfrak{M}, y) \not\models \mathsf{T}(R)$ con $y \in C(y)$ cioè se e solo se $(\mathfrak{M}, x) \not\models \Box(\mathsf{T}(Q) \to \mathsf{T}(R))$ cioè $(\mathfrak{M}, x) \not\models \mathsf{T}(P)$.

Gli altri **casi** con $\wedge$ e $\vee$ si provano allo stesso modo. □

T è una traduzione di Int in S4

Corollario 5. *Per ogni frame* $\mathfrak{F}$ *quasi ordinato e ogni* $P \in For\mathcal{L}$
$\rho\mathfrak{F} \models P$ *se e solo se* $\mathfrak{F} \models \mathsf{T}(P)$.

Teorema 6. $P \in \mathbf{Int}$ *se e solo se* $\mathsf{T}(P) \in \mathbf{S4}$.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Supponiamo che $\mathsf{T}(P) \notin \mathbf{S4}$. Allora esiste un frame $\mathfrak{F}$ transitivo e riflessivo per cui $\mathfrak{F} \not\models \mathsf{T}(P)$. Per il corollario sopra allora $\rho\mathfrak{F} \not\models P$. Dunque $P \notin \mathbf{Int}$.

($\Longleftarrow$) Supponiamo che $P \notin \mathbf{Int}$. Allora esiste un frame intuizionista $\mathfrak{F}$ per cui $\mathfrak{F} \not\models P$. Possiamo allora considerare $\mathfrak{F}$ come un frame modale isomorfo al suo skeleton, per cui per il corollario sopra $\mathfrak{F} \not\models \mathsf{T}(P)$ e quindi $\mathsf{T}(P) \notin \mathbf{S4}$. □

Riferimenti bibliografici

[1] Alexander Chagrov and Michael Zakharyaschev. *Modal Logic.* Clarendon Press, 1997.

[2] Gabriele Lolli. *Logica Intuizionista.* Note del corso di filosofia della matematica, 2013.

[3] Giovanni Sambin. *Molteplicità delle logiche e necessità delle traduzioni. Logica intuizionistica e logica classica a confronto.* Note.

[4] Thierry Coquand. *Constrctive Logic.* Note della MAP Summer School, Trieste, August 2008.