Групповой проект номер №5

Дисциплина “Научное программирование”

Супонина Анастасия Павловна, Лобов Михаил Сергеевич, Нирдоши Всеволод Раджендер

05 Октября 2024

Кафедра теории вероятностей и кибербезопасности

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия

В одном изолированном городе под названием “Амбрелла Сити” вспыхнула эпидемия чумы. Известно, что из всех проживающих на острове (N=7777) в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших чумой людей (являющихся распространителями инфекции) I=1500, А число выздоровевших (recovered) людей с иммунитетом к болезни R=0. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени S=N-I-R. Вместимость зоны изоляции I* = 1300.

Мы имеем дело с “Задачей об эпидемии” — это математическая модель, описывающая распространение инфекционных заболеваний в популяции.

Модель SIR является одной из наиболее фундаментальных эпидемиологических моделей. Расшифровывается как Susceptible (Восприимчивые), Infected (Инфицированные), и Recovered (Выздоровевшие). Это одна из простейших моделей, которая была предложена шотландскими учёными Уильямом Огилви Кермаком и Андерсоном Греем Маккендриком около 100 лет назад.

Рис. 1 Диаграмма переходов между состояниями

Она часто используется для моделирования задачи об эпидемии.

Данная модель позволяет создавать симуляции, которые позволяют визуализировать и анализировать разные эпидемиологические сценарии.

Рассмотрим в нашей работе один из них.

Математическкая модель предполагает использование дифференциальных уравнений.

Скорость изменение числа восприимчивых к болезни особей (S(t)):

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, \text{ если } I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^* \\ 0, \text{ если } I(\mathrm{t}) \le \mathrm{I}^* \end{cases}$$

Скорость изменение числа инфицированных особей, являющихся распространителями (I(t)):

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, \text{ если } I(\mathrm{t}) > \mathrm{I}^* \\ -\beta I, \text{ если } I(\mathrm{t}) \le \mathrm{I}^* \end{cases}$$

Скорость изменение числа особей с иммунитетом (переболевших) (R(t)):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

где α и β - коэффициенты заболевания и выздоровления соответственно.

Параметры задачи

```
N = 7777  # Общее количество особей в популяции
# Она делится на 3 группы (по обозначениям SIR) :
I = 1500   # Количество инфицированных особей
R = 0      # Количество выздоровевших особей
S = N - I - R  # Количество здоровых, восприимчивых к инфекции особей
# В дифференциальных уравнениях модели у нас появляются два коэффициента:
a = 0.007  # Коэффициент заболевания
b = 0.003  # Коэффициент выздоровления
# Если I < crit_I, то все больные изолированы.
crit_I = 1300 # Критическое значение инфицированных
# Начальные условия
u0 = [S, I, R]
tspan = (0.0, 2500.0)
```

Библиотека `DifferentialEquations.jl`

Julia предоставляет мощную библиотеку для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE) с помощью `DifferentialEquations.jl`. Функция `ODEProblem` задает дифференциальное уравнение, начальные условия и временной промежуток для решения. Использование этой библиотеки позволят нам избежать ошибок, связанных с тем, что мы решаем не просто дифференциальные уравнения, а алгебродифференциальные уравнения. При решении задачи таким методом, число людей в нашей ограниченной популяции всегда остается одинаковым.

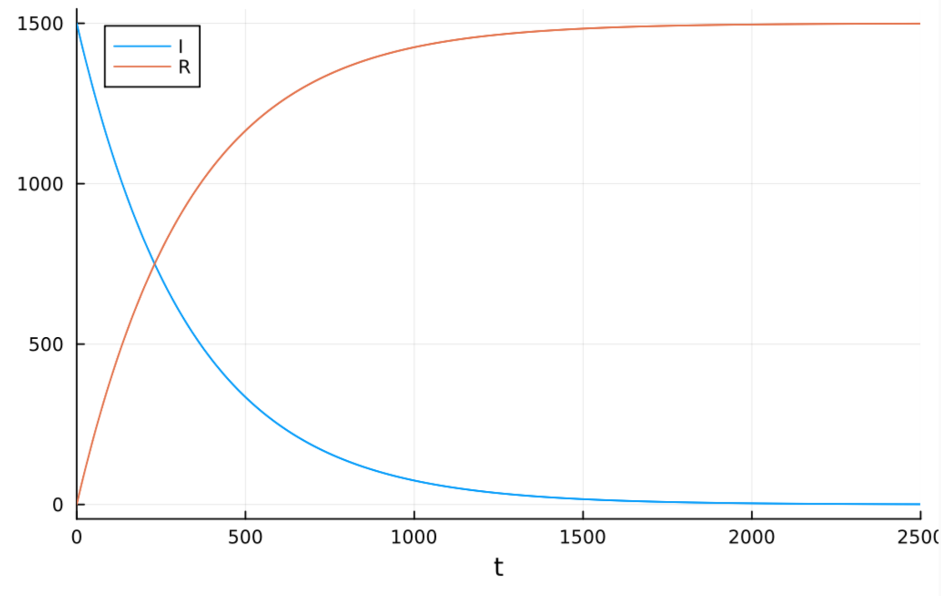
```julia
import Pkg
Pkg.add("DifferentialEquations")

prob_combo = ODEProblem(combo_case!, u0, tspan, p_combo)
```

Программная реализация

```
function first_case!(du, u, p, t)
    _, b = p
    du[1] = 0
    du[2] = -u[2] * b
    du[3] = u[2] * b
end
```

В первом условии мы рассматриваем случай, когда I>crit_I.

График

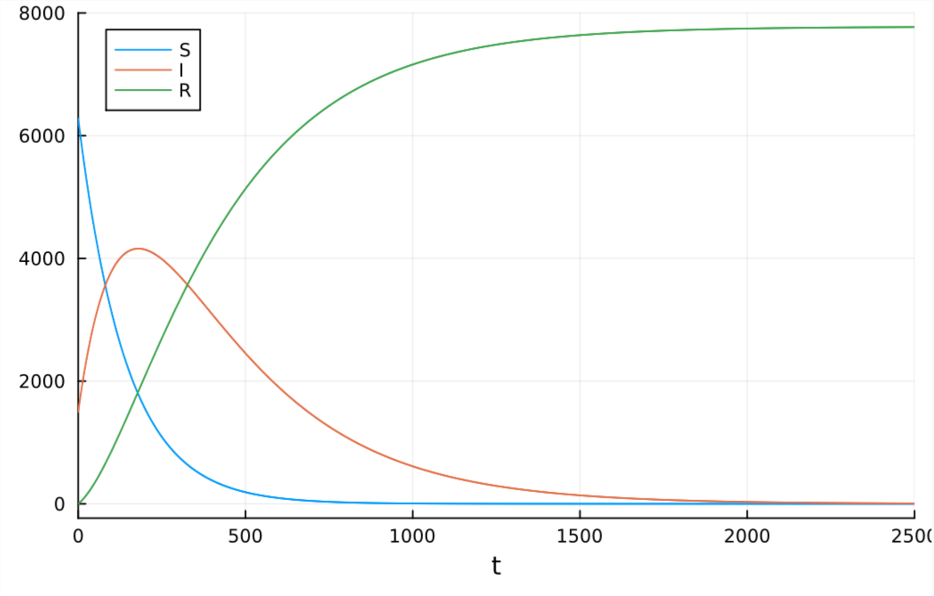


Программная реализация - второй случай

Второе, когда все больные изолированы.

```
function second_case!(du, u, p, t)
    a, b = p
    du[1] = -a * u[1]
    du[2] = a * u[1] - u[2] * b
    du[3] = u[2] * b
end
```

График

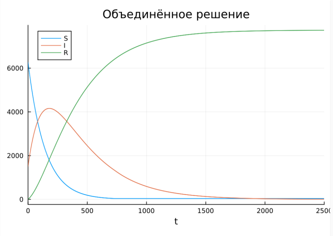


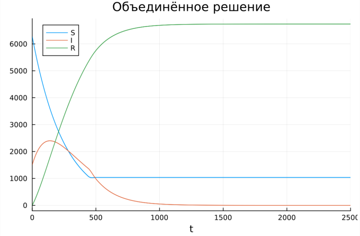
Итоговая реализация

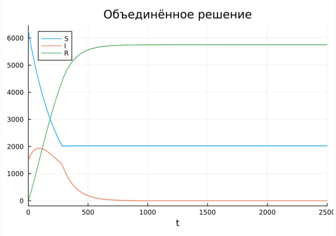
Мы объединяем 2 предыдущих условия.

```
function combo_case!(du, u, p, t)
    a, b, crit_I = p
    if u[2] > crit_I
        du[1] = -a * u[1]          # Уменьшается за счет заражений
        du[2] = a * u[1] - u[2] * b
        du[3] = u[2] * b
    else
        du[1] = 0                  # Остается неизменным
        du[2] = -u[2] * b
        du[3] = u[2] * b
    end
end
```

Сравнение графиков с разными коэффициентами α и β







$\alpha = 0.007$ $\beta = 0.003$ $\alpha = 0.004$ $\beta = 0.006$ $\alpha = 0.004$ $\beta = 0.009$

В зависимости от скорости заражения и скорости выздоровления, становится возможно сдержать инфекцию, что видно на графиках. Данная реализация позволяет нам рассматривать задачу с разными данными и оценивать влияние коэффициентов заболевания и выздоровления на период эпидемии.

Вывод

В работе рассмотрена задача моделирования эпидемии с помощью модели SIR, которая разделяет популяцию на восприимчивых, инфицированных и выздоровевших. Используя библиотеку `DifferentialEquations.jl`, мы смогли гибко учитывать изменение наших параметров и решать алгебродифференциальные уравнения. Благодаря этому, число особей в популяции на каждом шаге остается неизменным. Поэтому построив такую модель мы смогли изучить влияние изменения коэффициентов заболевания и заражения на развитие нашей эпидемии.

Построенная нами модель позволяет наглядно увидеть динамику эпидемии, а также эффективно прогнозировать и контролировать распространения инфекций.

Спасибо за внимание!