北京大学 24/25 学年第 2 学期

高数 B 期中试题

2025.04.13

1. (12 分) 计算二重积分

$$\iint_D (|x|+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是闭圆域 $x^2+y^2 \le a^2 (a>0)$。

2. (12 分) 求由三个圆柱面 $x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2, z^2+x^2=R^2$ 所围立体的表面积 ($R>0$)。

3. (12 分) 计算第一型曲线积分

$$\int_C (x+y+1)\mathrm{d}s$$

其中 C 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界。

4. (14 分) 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_{C^+} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$$

其中 C 为圆周：$x^2+y^2+z^2=a^2 (a>0), x+y+z=0$，从 x 轴正向看去，C^+ 为逆时针方向。

5. (14 分) 求第二型曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} (x^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2 (R>0)$ 的外侧。

6. (15 分) 求解方程

$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

7. (15 分) 求微分方程

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^x}$$

的通解。

8. (6 分) 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导数，且对以任意点 (x_0,y_0) 为中心，以任意 $R>0$ 为半径的上半圆 $L: y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ 恒有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

（对曲线的两个方向都成立）。证明：$P(x,y)\equiv 0, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$，对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$。