北京大学 2019 年春高等数学 (B) 期中试题

刘旭峰

April.23 2019

1.(13 分) 计算重积分

$$I=\iiint_{\Omega}(1+xy+yz+zx)\ dxdydz,$$

其中 Ω 为 $z^2=x^2+y^2(z\geq 0)$ 与 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围区域.

2. (13 分) 计算曲线积分 $I=\int_l(1+y^2)\ ds$, 其中 l 为摆线段:

$$x=a(t-\sin t)\ ,\ y=a(1-\cos t)\ ,\ 0\leq t\leq 2\pi.$$

3. (13 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_{(S,\hat{n})}xyz\ dxdy,$$

S 为曲面 $\{\ (x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\}$, 法向量 $\hat{n}$ 为其内侧方向.

4. (13 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_S(x+y)^2\ d\sigma_{xy}$$

其中 S 代表曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围区域表面.

5. (13 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_{(S,n)}\left(y^5-z^5\right)dydz+\left(z^5-x^5\right)dzdx+\left(x^5-y^5\right)dxdy$$

S 为半球面 $\{\ (x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\ ,\ z\geq 0\ \}$, 法向量 $\hat{n}$ 为其内侧方向.

并证明你的结论.

7.(13 分) 设 ([0,1],l) 是 xy 平面上的一条 C^1 简单闭曲线，不经过 xy 平面上的某一给定的点 P. 令 $\hat{n}$ 为此曲线的满足条件 $\hat{n} \times \hat{l} = \hat{k}$ 的单位法向量场，这里 $\hat{l}$ 表示此曲线的切向量场. 考虑曲线积分：

$$I = \oint_l \frac{\cos\alpha}{|PM|}\ ds$$

其中，$|PM|$ 表示从 P 点到曲线 $([0,1],l)$ 上一点 M 的距离，而 α 表示向量 $\overrightarrow{PM}$ 和 $\hat{n}$ 的夹角.

1）求曲线 $([0,1],l)$ 上一个向量场 $\vec{f}$，使得

$$I = \oint_l \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

2) 设 $P = (1,0)$，而 $l(t) = (2\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)(t \in [0,1])$，求 I 的值.

8.(10 分) 设 $D = [0,1][0,1]$, 对 $C[0,1]$ 中任一函数定义：

$$I(f) = \iint_D 2^{f(x)-f(y)}\ dxdy$$

请证明 $\exists\ g\ s.t.\ I(g) \le I(f)\ ,\forall f \in C[0,1]$，并求出一个函数 g.