

北京大学 24/25 学年第 2 学期

高数 B 期末试题

2025.6.9

1. (14分) 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2};$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$

2. (14分) 判断下列级数是否收敛? 如果级数收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$

3. (16分) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$ 的收敛半径、收敛区间、收敛域及和函数.

4. (12分) 求积分 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x) dx, a \neq 0.$

5. (12分) 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha}$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$) 的敛散性.

6. (12分) 讨论积分 $\int_1^{+\infty} t e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx$ 在区间 $0 \leq t < +\infty$ 上的一致收敛性.

7. (20分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$. 求出 $f(x)$ 的傅氏级数及其和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的和.