北京大学 24/25 学年第 2 学期

高数 B 期中试题

2025.04.13

1. (12 分) 计算二重积分 $\iint_D (|x|+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中D是闭圆域: $x^2+y^2 \leq a^2$ ($a>0$).
2. (12 分) 求由三个圆柱面 $x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2, z^2+x^2=R^2$ 所围立体的表面积 ($R>0$).
3. (12 分) 计算第一型曲线积分 $\int_C (x+y+1)\mathrm{d}s$,其中$C$是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界.
4. (14 分) 计算第二型曲线积分 $y=\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 C 为圆周: $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0), x+y+z=0$, 从 x 轴正向看去, C^+ 为逆时针方向.
5. (14 分) 求第二型曲面积分

$$I=\oiint_{S^+}(x^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

   S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ ($R>0$) 的外侧.
6. (15 分) 求解方程 $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.
7. (15 分) 求微分方程 $y''+3y'+2y=\frac{1}{2+\mathrm{e}^x}$ 的通解.
8. (6 分) 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导数, 且对以任意点 (x_0,y_0) 为中心, 以任意 $R>0$ 为半径的上半圆

$$L: y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$$

   恒有 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$. (对曲线的两个方向都成立) 证明: $P(x,y)\equiv 0, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$, 对任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.