Formelbüchlein GF Mathematik

gym|lerbermatt / WaJ

Version 2018

Inhalt

1 Algebra & Analysis

1.1 Algebra Basics

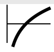
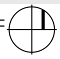
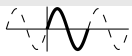
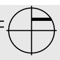
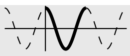
Zahlen	Bruch: $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$
$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen: $1, 2, 3, ...$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen: $..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen: "Brüche" $\frac{p}{q}$ (abbrechend *oder* periodisch)
$\mathbb{I}$	Irrationale Zahlen (nicht abbrechend *und* aperiodisch): $\sqrt{2} = 1.414\dots$ Diagonale des Einheitsquadrats $e = 2.718\dots$ Euler'sche Zahl, $\pi = 3.141\dots$ Durchmesser des Einheitskreis
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen: Alle Punkte des Zahlenstrahls
Wurzeln	$\sqrt[n]{x} = u$ (n-te Wurzel von x), da $u^n = x$
Potenzgesetze	Potenz x^a ("x hoch a", x Basis, a Exponent) (I) $x^0 = 1$, $x^1 = x$ (K) $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ (W) $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ (GB) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ (GE) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ (PP) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$
Operatorenhierarchie	Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung
Binomische Formeln	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (1) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ (2) $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ (3)
Logarithmen	$\log_b(x) = u$ (Logarithmus von x zur Basis b), da $b^u = x$.
Insbesondere!	$\log_b(a^n) = n \cdot \log_b(a)$
logarithmus naturalis	$\ln(a) := \log_e(a)$
Zehner-Logarithmus	$\log(a) := \log_{10}(a)$
TR-Regel	$\log_b(a) = \frac{\log_n(a)}{\log_n(b)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \frac{\log(a)}{\log(b)}$

Gleichungen	klassifiziere!
Lineare Gleichung	$ax + b = 0$ x auf eine Seite, Rest auf andere Seite, Division mit Vorfaktor von x.
Lineare Gleichungssysteme	$\left\| \begin{array}{lll} ax + by + d & = 0 & (1) \\ dx + ey + f & = 0 & (2) \end{array} \right\|$ $\to x$ z.B. mit Additionsverfahren...
Quadratische Gleichungen	$ax^2 + bx + c = 0$ faktorisieren $d \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$, oder $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ mit TI-82: wähle `PRGM` "QuadrGl"
Wurzelgleichungen	$ax^n + b = 0$ $\to$ isoliere x^n, auf beiden Seiten $\sqrt[n]{\ }$ anwenden.
Variable im Exponenten	$au^x + b = 0$ $\to$ isoliere u^x, auf beiden Seiten $\ln(.)$ anwenden, Nutze $\ln(u^x) = x \ln(u)$.
Gleichungen mit sin, cos, tan	$a \sin(x) + b = 0$ $\to$ isoliere $\sin(x)$, brauche $\sin^{-1}(.)$. $\sin(x) = c \cdot \cos(x)$ $\to \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) = c$, brauche $\tan^{-1}(.)$.

1.2 Funktionstypen

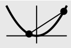
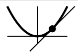
Funktion f	Bildet x auf $y = f(x)$ ab (Maschinchen). Zu jedem x gibt es ein eindeutig bestimmtes y.
$f(x)$	$f(x)$ bezeichnet den Wert, auf den x unter f abgebildet wird.
Graph von f	Die "Kurve", die man erhält, wenn man die Punkte $(x\|f(x))$ in ein Koordinatensystem einzeichnet.

Polstelle von f	Definitionslücke von f.
Asymptote von f	Grenzfunktion von f für $x \to \pm\infty$.
Polynom vom Grad n	$f(x) = a_n \cdot x^n + ... + a_1 \cdot x + a_0$ mit $a_n \neq 0$; $a_n, \ldots, a_1, a_0$ heissen Koeffizienten; $n = 0, 1, 2, ...$
Konstante Funktion	$f(x) = a \; \forall x \in \mathbb{D}$ (Grad 0), Graph:
Lineare Funktion	$f(x) = m \cdot x + q$ (Grad 1), $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Steigung, q y-Achsenabschnitt. Gerade:
Quadratische Funktion	$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (Grad 2) Graph: oder (Parabeln).
Kubische Funktion	$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ (Grad 3) Graph: oder .
Nullstelle	x mit $P(x) = 0$
Potenzfunktion	$f(x) = x^n$ (n reell)
parabolisch	$f(x) = x^{gerade}$ $(2, 4, ...)$, Graph: $f(x) = x^{ungerade}$ $(1, 3, ...)$, Graph:
hyperbolisch	$f(x) = \frac{1}{x^{gerade}} = x^{-gerade}$, Graph: $f(x) = \frac{1}{x^{ungerade}} = x^{-ungerade}$, Graph: Polstelle bei $x = 0$, Ayomptote $y = 0$.
Wurzelfunktion	$f(x) = \sqrt[gerade]{x} = x^{1/gerade}$, Graph: $f(x) = \sqrt[ungerade]{x} = x^{1/ungerade}$, Graph:
Exponentialfunktion	$f(t) = a \cdot b^t$, $b > 1$ prozentuales Wachstum; Graph: $f(t) = a \cdot b^t$, $0 < b < 1$ prozentualer Zerfall; Graph: Asymptote $y = 0$.

schematisch	$\begin{array}{ccccccc} y_1 & \xrightarrow{\cdot b} & y_2 & \xrightarrow{\cdot b} & \cdots & \xrightarrow{\cdot b} & f(t) \\ t_1 & \xrightarrow{+\Delta t} & t_2 & \xrightarrow{+\Delta t} & \cdots & \xrightarrow{+\Delta t} & t \end{array}$ Halbwertszeit $T_{1/2}$: $0.5 = b^{T_{1/2}}$
Logarithmen	$f(x) = \log_a(x)$ $(a > 0)$, Graph:  $f(x) = \log_a(x)$ $(0 < a < 1)$, Graph:  Inversfunktion einer Exponentialfunktion: z.B. $\ln(e^x) = x$
Trigonometrische Funktionen (Schwingungen)	definiert via Einheitskreis.
x Radian [rad]	Bogenlänge auf dem Einheitskreis, Start bei $(1\|0)$. Einmal rundherum ist 2π. $x > 0$: Gegenuhrzeigersinn, $x < 0$: Uhrzeigersinn.
x Grad [°]	Punkt auf dem Einheitskreis, der mit dem Startpunkt $(1\|0)$ und dem Zentrum $(0\|0)$ den Winkel x einschliesst. Eine volle Umdrehung entspricht 360!‘. $x > 0$: Gegenuhrzeigersinn, $x < 0$: Uhrzeigersinn.
Sinus	$\sin(x) =$ , Graph: 
Cosinus	$\cos(x) =$ , Graph: 
Tangens	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Trigonometrischer Pythagoras	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

1.3 Funktionen anwenden

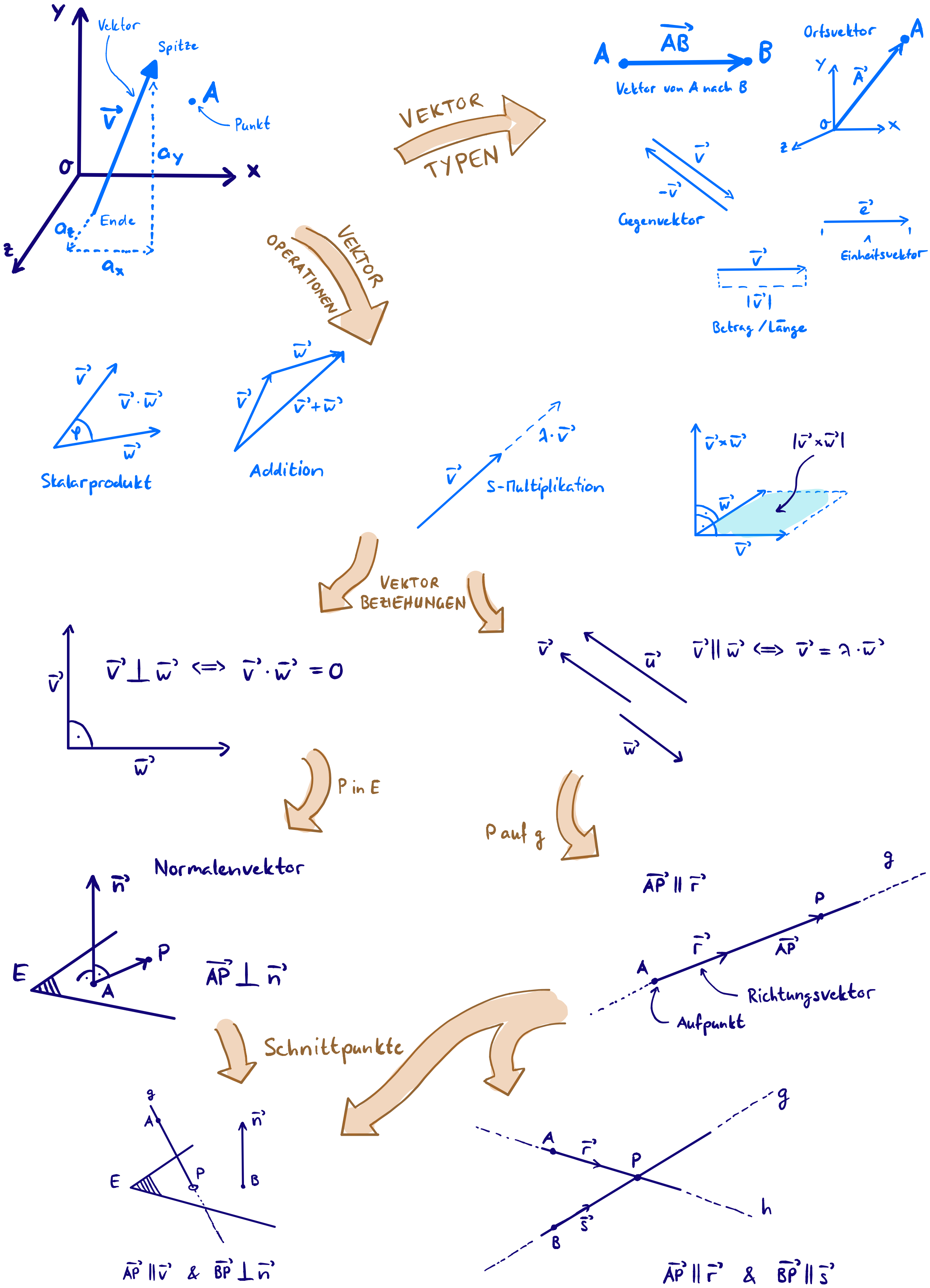
Schnittpunkte	
Nullstelle von f	x mit $f(x) = 0$. Schnittpunkt des Graphen von f mit der x-Achse.
Nullstellen mit TI-82	plot f, wähle `CALC` und dann `OPTION 2`
y-Achsenschnittpunkt von f	$f(0)$ Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse.
Schnittpunkt von f und g	x mit $f(x) = g(x) \rightarrow S(x\|f(x))$ oder $S(x\|g(x))$

Funktionsanpassung	verschieben, strecken/stauchen $\leftrightarrow$ Graph anpassen.
Verschiebung in x	$f(x-3) = \xrightarrow{3}$, $f(x+3) = \xleftarrow{3}$
Verschiebung in y	$f(x)+3 = \uparrow 3$, $f(x)-3 = \downarrow 3$
Streckung an y-Achse	$f(3\cdot x) = \xleftrightarrow{1/3}$, $f(\frac{1}{3}\cdot x) = \xleftrightarrow{3}$, $f(\frac{1}{a}\cdot x) = \xleftrightarrow{a}$
Streckung an x-Achse	$3\cdot f(x) = \updownarrow 3$, $\frac{1}{3}\cdot f(x) = \updownarrow 1/3$, $a\cdot f(x) = \updownarrow a$
Spiegelung	$f(-x)$ an y-Achse, $-f(x)$ an x-Achse, $-f(-x)$ am Ursprung
Ableitung von f	$f'(x)$ ("f Strich von x"). Tangentensteigung von f im Punkt x.
Differenzenquotient ü. $[x_1, x_2]$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (durchschnittliche Änderungsrate )
Differentialquotient bei x	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (momentane Änderungsrate 
Tangentengleichung	Funktionsgleichung der Tangente (linear/Gerade).
Extrema & Wendestellen	$f'(x) = 0$: Horizontaltangente ... $f''(x) < 0$: x lokales Maximum (rechtsgekrümmt) ... $f''(x) > 0$: x lokales Minimum (linksgekrümmt) ... $f''(x) = 0$: x Wendepunkt oder Terrassenpunkt .. $f'''(x) \neq 0$: x Wende- oder Terrassenpunkt (hinreichend)
Ableitungsregeln	AK $(c)' = 0$ MK $(c\cdot f)' = c\cdot f'$ S $(f+g)' = f'+g'$ P $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ Q $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$ KR $(f(g))' = f'(g)\cdot g'$
Spezielle Ableitungen	$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$ $(e^x)' = e^x$ $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $(\sin(x))' = \cos(x)$ $(\cos(x))' = -\sin(x)$
$f'(x)$ mit TI-82	plot f, dann `CALC` und wähle `OPTION 6`

Integral von f	$\int_a^b f(x)\,dx$ Integral von f von a bis b (Integrationsgrenzen $a \leq b$) "Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse, begrenzt durch a und b."
Rechtecksumme	$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + ... + f(x_n)\cdot\Delta x$ $n \to \infty \quad \to \quad \Delta x \to 0 \quad \to$ bessere Näherung.
Integrationsregeln	(MK) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b g(x)\,dx$ (S) $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (U) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ $(a \leq b \leq c)$
Rotationsvolumen	$V_{\text{Rot}} = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ Rotation des Graphen von f um die x-Achse.
Stammfunktion von f	Eine Funktion F heisst Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)\ \forall x$.
Hauptsatz der Integral- & Differenzialrechnung	Um $\int_a^b f(x)\,dx$ zu berechnen, finde eine Stammfunktion F von f. Es ist dann $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\|_a^b = F(b) - F(a)$. Spezielle Stammfunktionen: $f(x) = x^n \to F(x) = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$ $(n \neq -1)$ $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \to F(x) = \ln(x)$ $f(x) = e^x \to F(x) = e^x$ $f(x) = \sin(x) \to F(x) = -\cos(x)$ (x in Radian) $f(x) = \cos(x) \to F(x) = \sin(x)$ (x in Radian)
$\int_a^b f(x)\,dx$ mit TI-82	plot f, wähle `CALC` und dann `OPTION 7`
Folgen & Summen	
arithmetisch	$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} \dots \xrightarrow{+d} a_n$ a_1 Startwert, d konstante Differenz $(d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots)$ $a_k = a_1 + (k-1)d$ (Zaunpfosten) $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ("Gauss-Trick") $s = a_1 + a_2 + ... = \pm\infty$ $(d \neq 0)$

geometrisch	$a_1 \xrightarrow{\cdot q} a_2 \xrightarrow{\cdot q} \dots \xrightarrow{\cdot q} a_n$ a_1 Startwert, q konstanter Quotient $(q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots)$ $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$ $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $(q \neq 1)$ $s = a_1 + a_2 + ... = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a_1}{1-q} & \text{falls } -1 < q < 1 \\ \pm\infty & \text{falls } \lvert q \rvert > 1 \end{array} \right\}$
Gauss-Trick	$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n}{2} \cdot (1 + n)$
Summe der Quadratzahlen	$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

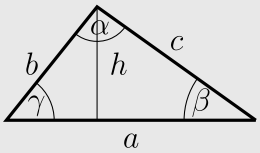
2 Geometrie



Vektor
Spitze
Punkt
Ende
VEKTOR TYPEN
Vektor von A nach B
Ortsvektor
Gegenvektor
Einheitsvektor
Betrag / Länge
VEKTOR OPERATIONEN
Skalarprodukt
Addition
S-Multiplikation
VEKTOR BEZIEHUNGEN
$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$
P in E
P auf g
Normalenvektor
$\vec{AP} \perp \vec{n}$
$\vec{AP} \parallel \vec{r}$
Richtungsvektor
Aufpunkt
Schnittpunkte
$\vec{AP} \parallel \vec{v}$ & $\vec{BP} \perp \vec{n}$
$\vec{AP} \parallel \vec{r}$ & $\vec{BP} \parallel \vec{s}$

2.1 Planare und räumliche Figuren

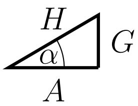
Dreieck



3 Kanten
Umfang: $a + b + c$
Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Fläche: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ (h=Hšhe, senkrecht auf a)
Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$
Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{1}{2R}$ (R: Umkreisradius)

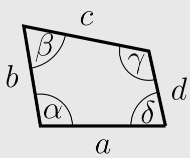
gleichschenkliges Dreieck
Schenkel $b = c$, Basis a

gleichseitiges Dreieck
$a = b = c$ (es folgt $\alpha = \beta = \gamma = 60°$)



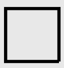
rechtwinkliges Dreieck
Pythagoras: $H^2 = A^2 + G^2$
Trigonometrie: "GugelHopf, AHa, Geht Auch!"
H=Hypotenuse, A=Ankathete (von α), G=Gegenkathete (von α)

Viereck

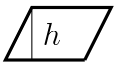


4 Kanten
Umfang: $a + b + c + d$
Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

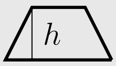
Rechteck: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$, $a = c$ und $b = d$
Fläche: $a \cdot b$



Quadrat: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$, $a = b = c = d$
Fläche: a^2

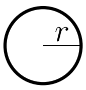


Parallelogramm: $a||c$ and $b||d$ (es folgt $a = c$ und $b = d$)
Fläche: $a \cdot h$ (h=Hšhe, senkrecht zu a)

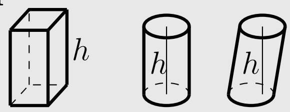
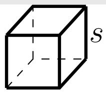
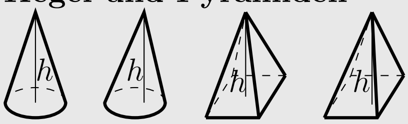
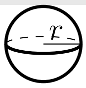


gleichschenkliges Trapez: $a||c$ und $b = d$
Fläche: $\frac{h}{2}(a + c)$ (h=Hšhe, senkrecht zu a und c)

Kreis



Umfang: $2\pi r$ (r ist Radius)
Fläche: πr^2

Prisma  	"Grundfläche = Deckel", z.B. Quader, gerader Zylinder, schiefer Zylinder Volumen: $h \cdot G$ h=Hšhe (senkrecht zur Grundfläche), G=Grundfläche
 	Würfel (alle Seiten s gleich lang) Volumen: s^3
Kegel und Pyramiden  	"Decke ist Punkt" (*Spitze*), z.B.: gerader Kegel, schiefer Kegel, gerade Pyramide, schiefe Pyramide Volumen: $\frac{1}{3} \cdot h \cdot G$ h=Hšhe (senkrecht auf Grundfläche), G=Grundfläche
Kugel  	Oberfläche: $4\pi r^2$ (r ist Radius) Volumen: $\frac{4\pi}{3} r^3$

2.2 Basics Vektoren, Geraden, Ebenen

$A(A_x \vert A_y \vert A_z)$	3D-Punkt mit Koordinaten A_x,A_y,A_z. Position im 3D-Raum. Ursprung: $O = (0 \vert 0 \vert 0)$
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$	Vektor mit Komponenten v_x, v_y, v_z "Wie kommt man vom Ende zur Spitze des Pfeils parallel zu den 3 Koordinatenachsen?" Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{pmatrix}$	Gegenvektor von $\vec{v}$. "Wie kommt man von der Spitze zum Schaft des Pfeils $\vec{v}$ parallel zu den 3 Koordinatenachsen?"
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{pmatrix}$	Vektor vom Punkt A zum Punkt B. "Endpunkt minus Anfangspunkt".
$\overrightarrow{OA} = \vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$	Ortsvektor vom Punkt A; $A \sim \vec{A}$ Vektor der vom Ursprung zum Punkt A zeigt.

Gerade g	Eine Gerade g ist eindeutig bestimmt durch einen Aufpunkt/Stützvektor A (irgendein Punkt auf g) und einem Richtungsvektor $\vec{r}$ (irgendein Vektor parallel zu g). Paramterform $g\colon \vec{A} + \lambda \cdot \vec{r}$
Winkel zwischen Geraden	Winkel zwischen den Richtungsvektoren von g und h.
Ebene E	Eine Ebene E ist eindeutig bestimmt durch einen Punkt $A \in E$ (irgendein Punkt in E) und einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E (irgendein Vektor senkrecht auf E). Koordinatenform: $Ax + By + Cz + D = 0$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$
Winkel Gerade-Ebene	Winkel zwischen Richtungsvektor von g und Normalenvektor auf E.
Winkel zwischen Ebenen	Winkel zwischen Normalenvektoren von E und F.

2.3 Vektoroperationen

$\lvert\vec{v}\rvert = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	Betrag/Länge von $\vec{v}$
Einheitsvektor	$\lvert\vec{e}\rvert = 1$ (Vektor der Länge 1); z.B. $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_x \\ \lambda \cdot v_y \\ \lambda \cdot v_z \end{pmatrix}$	S-Multiplikation von $\vec{v}$ mit Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Streckt den Pfeil $\vec{v}$ um den Faktor λ.
$\vec{v} \pm \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \pm w_x \\ v_y \pm w_y \\ v_z \pm w_z \end{pmatrix}$	Summe von $\vec{v}$ und $\vec{w}/-\vec{w}$. Vektor, der das Dreieck vervollständigt. "Aneinanderhängen von $\vec{v}$ und $\vec{w}/-\vec{w}$."
$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$	Skalarprodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Zwischenwinkel der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. (Enden aneinanderfügen)
$\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert}$	φ ist Winkel zwischen den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$	Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) von $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Produziert einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}$ *und* auf $\vec{w}$ steht. Rechte-Hand-Regel: Zeigefinger $\times$ Mittelfinger $\rightarrow$ Daumen zeigt in Richtung Produkt.
$\lvert\vec{v} \times \vec{w}\rvert$	Fläche des Parallelogramms, das durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird.

2.4 Vektorbeziehungen

$\vec{v} = \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} v_x = w_x \\ v_y = w_y \\ v_z = w_z \end{array}$	$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind gleich (Repräsentanten).
$\vec{v} \parallel \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$	$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind kollinear (Pfeile sind parallel; das heisst, verschobene, gestreckte, und/oder gespiegelte Versionen).
$\vec{v} \perp \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$	$\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind orthogonal (90° Winkel) genau dann, wenn das Skalarpodukt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Null ist.
$P \in g \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \parallel \vec{r}$	Punkt P ist auf der Geraden g (gegeben durch Punkt A und Richtungsvektor r) genau dann, wenn der Vektor von A nach P kollinear (parallel) zum Vektor $\vec{r}$ ist.
$P \in E \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$	Punkt P ist in der Ebene E (gegeben durch Punkt A und Normalenvektor $\vec{n}$), falls der Vektor von A nach P orthogonal ist zu $\vec{n}$.

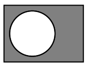
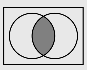
2.5 Vektorkonstruktionen

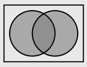
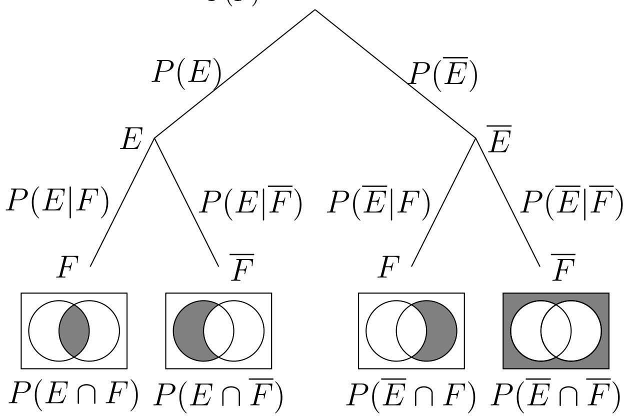
Schnittpunkt $P = g \cap h$	P ist Schnittpunkt der Geraden g and h: P ist auf der Geraden g *und* P ist auf der Geraden h.
Schnittpunkt $P = g \cap E$	P ist ein Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E: P ist auf der Geraden g *und* P ist in der Ebene E
Distanz $d(A, B)$	Distanz zwischen zwei Punkten A und B: Länge/Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$
Distanz $d(P, E)$	Distanz zwischen dem Punkt P und der Ebene E: Finde den Schnittpunkt Q der Geraden g und der Ebene E, wobei g durch den Punkt P geht und senkrecht auf E steht. Die Distanz ist dann gegeben durch $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$.

Distanz $d(P, g)$	Distanz zwischen Punkt P und der Geraden g: Finde den Schnittpunkt Q der Geraden g und h, wobei h durch den Punkt P geht und senkrecht auf g steht. Distanz ist gegeben durch $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$.
Schwerpunkt S	Der Schwerpunkt eines Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und C entspricht beispielsweise dem Durchschnitt dieser drei Punkte: $$S = \frac{A + B + C}{3}.$$

3 Stochastik

3.1 Wahrscheinlichkeit Basics

Zufallsexperiment	Experiment mit zufälligen Ereignissen ω_1,..., ω_n. Einmalig ausgeführt wird eines der Ereignisse eintreten, aber wir kšnnen nicht 100% voraussagen, welches.
Stichprobenraum Ω	$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, Menge aller Ereignisse.
$\lvert\Omega\rvert$	Anzahl der mšglichen Ereignisse in Ω (Kardinalität).
Wahrscheinlichkeit $P(\omega_k)$	$P(\omega_k) = \frac{N_k}{N}$ (oft in Prozent angegeben) N_k Anzahl Ereignisse ω_k bei N (gross) Durchführungen des Experiments.
Ereignis E	E ist eine Teilmenge von Ω ($E \subseteq \Omega$). Wir sagen, das Ereignis E ist eingetreten, falls ein Element von E eingetreten ist.
Wahrscheinlichkeit $P(E)$	$P(E) = \frac{N_E}{N}$ Prozentsatz der Zufallsexperimente mit Ausgang E, wenn das Experiment oft wiederholt wird (N). N_E Anzahl Zufallsexperimente mit Ausgang E.
$P(\{\omega_1, \omega_5, \omega_6\})$	Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis mit einem Ausgang ω_1, ω_5, oder ω_6 (unvereinbar) eintritt. $P(\{\omega_1, \omega_5, \omega_6\}) = P(\omega_1) + P(\omega_5) + P(\omega_6)$ (Kolmogorov (III))
$P(\Omega)$	Sicheres Ereignis, $P(\Omega) = 1$ (Kolmogorov II)
$P(\{\})$	$P(\{\}) = 0$ "unmšgliches Ereignis", $\{\}$ oder $\emptyset$, leere Menge
$P(\overline{E})$ 	Wahrscheinlichkeit, dass E nicht eintritt. $\overline{E}$ heisst das Gegenereignis von E. Es enthält alle Ausgänge von Ω, die nicht in E sind. Satz: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ (Gegenwahrscheinlichkeit)
$P(E \cap F)$ 	Wahrscheinlichkeit, dass E *und* F eintreten. $E \cap F$ heisst der Schnitt von E und F. Es enthält alle Ereignisse, die sowohl in E als auch in F sind.
unvereinbare Ereignisse	E und F heissen unvereinbar, falls $E \cap F = \{\}$ (Wahrscheinlichkeit 0, dass E und F gleichzeitig eintreten).

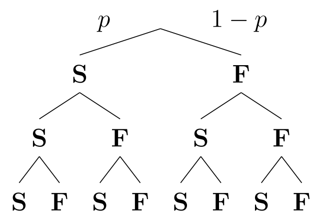
$P(E \cup F)$ 	Wahrscheinlichkeit, dass E *oder* F eintritt (nur E, nur F, oder ihr Schnitt). $E \cup F$ heisst Vereinigung von E und F. Es enthält alle Ausgänge in E, in F, oder im Schnitt. Es gilt: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P(E\|F)$ ("P von E unter der Voraussetzung F") ist die Wahrscheinlichkeit, dass E eintritt, unter der Voraussetzung, dass F bereits eingetreten ist. Definition: $P(E\|F) := \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ oder $P(F) \cdot P(E\|F) = P(E \cap F)$ 
unabhängige Ereignisse	E und F heissen unabhängig, falls der Eintritt von E keinen Einfluss auf den Eintritt von F hat (oder vice-versa). Das heisst, $P(E\|F) = P(E)$ oder $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.

3.2 Kombinatorik

Fakultät	$n! = n \cdot (n-1) \cdot n(-2) \cdot ... \cdot 1$, "n-Fakultät". 0!=1!=1, $n! = n \cdot (n-1)!$ TI-82: `PRB` $\rightarrow$!
Binomialkoeffizienten	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, "n tief k". $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Pascal-Dreieck)
Permutation	n Personen auf n Stühle in eine Reihe setzen.
verschiedene Buchstaben	Anzahl der verschiedenen "Wšrter" ist n!

Klassiker `MISSISSIPPI`	Anzahl verschiedener "Wšrter" $\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}$
Binärzahl 00110010	Anzahl verschiedene Bytes $\frac{8!}{5!\cdot 3!} = \binom{8}{3} = \binom{8}{5}$

3.3 Spezielle Zufallsereignisse

Laplace-Experiment	Zufallsereignis, bei dem jeder Ausgang (von n mšglichen) gleichwahrscheinlich ist. $P(\omega_1) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$ $P(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{\text{günstig}}{\text{mšglich}}$
Binomialverteilung  	Erfolg/Misserfolg-Experiment (z.B. Coin-Flip) Erfolgswahrscheinlichkeit p (Success), Misserfolg $q = 1 - p$ (Fail), n Wiederholungen. Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge: $P(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \texttt{binompdf}(n, p, k).$ p darf sich von Experiment zu Experiment nicht ändern!

3.4 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

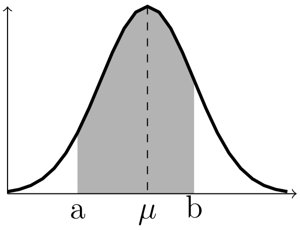
Zufallsvariable	Die Gršsse X nimmt einer der Zustände $x_1, ..., x_n$ (sortiert, $x_1 < ... < x_n$) für ein Ereignis an. (Gleicher X-Wert für verschiedene Ausgänge mšglich.)
$\{X = x_k\}$	Die Zufallsvariable "X nimmt den Wert x_k an".
$P(X = x_k)$	Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert x_k annimmt. $P(X = x_1 \text{ oder } X = x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$
Verteilung von X	Menge der Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), \ldots, P(X = x_n)$.
Kumulative Verteilung von X	Menge aller Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq u)$, wobei u von $-\infty$ bis ∞. $P(X \leq x_k) = P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_k)$ $P(X \leq x_n) = P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_n) = 1$ $P(X > x_k) = 1 - P(X \leq x_k)$

Erwartungswert E bzw. μ von X	Mittelwert der X-Werte, wenn das Zufallsexperiment oft wiederholt wird (N). $$\begin{aligned} \mu &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N} \\ E(X) &= P(X = x_1) \cdot x_1 + \cdots + P(X = x_n) \cdot x_n \end{aligned}$$
Standardabweichung σ von X	Mass für die durchschnittliche Abweichung vom Mittelwert, wenn das Zufallsexperiment oft wiederholt wird (N). $$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + (x_3 - \mu)^2 + ... + x_N}{N}} \\ \sigma &= \sqrt{P(X = x_1) \cdot (x_1 - \mu)^2 + ... + P(X = x_k) \cdot (x_k - \mu)^2} \end{aligned}$$
Binomialverteilung	X heisst binomialverteilt mit Parameter p und n, wenn X die Werte $0, 1, 2, ..., n$ annimmt, und $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ ($\rightarrow$ Abschnitt 3.3). Es ist $P(X = k) =$ `binompdf(`n, p, k`)` $P(X \leq k) =$ `binomcdf(`n, p, k`)` $P(X \geq k) = 1-$`binomcdf(`$n, p, k - 1$`)` Insbesondere: $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
Kontinuierliche Verteilung	Die Zufallsvariable X nimmt Werte auf einem Intervall an. X ist definiert durch $P(a \leq X \leq b)$ für alle mšglichen Werte zwischen a und b.

Normalverteilung

X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, falls

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{Gauss'sche Glockenkurve}} dx$$



$P(a \leq X \leq b) =$ `normcdf(`a, b, μ, σ`)`

$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0.67$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.99$