① a) erfahrungsgemäss 6 mal

b) $h(F) = 2^F \rightarrow h(2)=4,\ h(3)=8,\ h(4)=16,\ h(5)=32$

c) $h(k) = 2^k$

d) Ich nehme Papierdicke 0.1 mm $\rightarrow h(k) = 10^{-4} \cdot 2^k$ Meter

② a) 2 4 6 8 10 , Folge der geraden Zahlen

b) 1 3 5 7 9 , Folge der ungeraden Zahlen

c) 1 4 9 16 25, Folge der Quadratzahlen

③ a) $a_k = 3k-5 \rightarrow -2, 1, 4, 7, 10, 13 \dots, 295, 298$

b) $b_k = \frac{k}{k+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \dots, \frac{100}{101}, \frac{101}{102}$

c) $c_k = (1+\frac{1}{k})^k \rightarrow 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, (\frac{6}{5})^5, (\frac{7}{6})^6 \dots, (\frac{101}{100})^{100}$

d) $d_k = \sin(k \cdot \frac{\pi}{2}) \rightarrow 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots, 0, 1$

④ a) $3, 8, 13, 18, 23 \rightarrow a_k = 5k-2$

b) $1, 3, 7, 15, 31 \rightarrow b_k = 2^k - 1$

c) $-1, 4, -9, 16, -25 \rightarrow c_k = k^2 \cdot (-1)^k$

d) $2, 6, 12, 20, 30 \rightarrow d_k = k(k+1)$

⑤ a) $1, 8, 27, 64, 125 \rightarrow a_k = k^3$

b) $1, 2, 6, 24, 120 \rightarrow b_k = k!$

c) $0, 1, 0, -1, 0, 1 \rightarrow c_k = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot (k-1))$

d) $2, 3, 5, 7, 11 \rightarrow d_k$: Folge der Primzahlen

e) $3, 1, 4, 1, 5, 9 \rightarrow e_k$: Folge der Ziffern von π

f) $2, 2+\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}, 2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} \rightarrow f_k = 2 + \frac{1}{2+a_{k-1}} \quad a_1 = 2$

6 a) $-7, -3, 1, 5, 9 \rightarrow a_k = a_{k-1} + 4 \qquad a_1 = -7$

b) $10, 12, 15, 19, 25 \rightarrow b_k = b_{k-1} + k \qquad b_1 = 10$

c) $a_k = k \cdot 2^k \rightarrow a_{k-1} = (k-1) \cdot 2^{k-1} \Rightarrow 2^{k-1} = \frac{a_{k-1}}{k-1}$

$$\Rightarrow a_k = k \cdot 2 \cdot \frac{a_{k-1}}{k-1} = \frac{2k}{k-1} \cdot a_{k-1}$$

d) $w_n \ldots \qquad w_3 = 180°, \quad w_4 = 360°, \quad w_5 = 540°$

$\rightarrow w_n = w_{n-1} + 180° \qquad w_3 = 180°$

e) $s_n \ldots \qquad s_1 = 0, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 3, \quad s_4 = 6, \quad s_5 = 10, \ldots$

$\rightarrow s_n = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad s_n = s_{n-1} + (n-1)$

f) $x_1 = a \rightarrow y_1 = \frac{q}{a} \rightarrow x_2 = \frac{a + \frac{q}{a}}{2} = \frac{a^2+q}{2a}$

$$\rightarrow y_2 = \frac{q}{\frac{a^2+q}{2a}} = \frac{2aq}{a^2+q} \rightarrow x_3 = \frac{\frac{a^2+q}{2a} + \frac{2aq}{a^2+q}}{2}$$

$$\rightarrow x_3 = \frac{\frac{(a^2+q)(a+1)}{2a(a+1)} + \frac{4aq}{2a(a+1)}}{2} = \ldots$$

$$\rightarrow x_n = \frac{x_{n-1}^2 + q}{2x_{n-1}}$$

7 $1 \; 2 \; 3 \; 4 \ldots$

$s_1 = 1 \qquad s_2 = 3 \qquad s_3 = 6 \qquad s_4 = 10 \rightarrow s_n = \frac{n(n+1)}{2}$

8 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots$

$s_1 = \frac{1}{2} \qquad s_2 = \frac{2}{3} \qquad s_3 = \frac{3}{4} \qquad s_4 = \frac{4}{5} \rightarrow s_n = \frac{n}{n+1}$

9 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

$s_1 = 1 \qquad s_2 = \frac{3}{2} \qquad s_3 = \frac{7}{4} \qquad s_4 = \frac{15}{8} \rightarrow s_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

(10) $\frac{n(n+1)}{2} \to \infty$, $\frac{n}{n+1} \to 1$, $\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \to 2$

(11) arithmetisch heisst $a_k = a_{k-1} + d$. Das arithmetische Mittel ist $\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} = \frac{a_k - d + a_k + d}{2} = \frac{2a_k}{2} = a_k$

(12) 81 84 ... 1020

$a_1 = 81$, $a_n = 1020 = a_1 + (n-1) \cdot d$

$\to 1020 = 81 + 3n - 3 \Rightarrow 942 = 3n \Rightarrow n = 314$

$\to S_{314} = \frac{81+1020}{2} \cdot 314 =$

(13) $a_1 = 5$ $a_2 = 15$ $a_3 = 25$ $a_4 = 35$ $\to a_k = 5 + (k-1) \cdot 10$

a) $a_{13} = 5 + 12 \cdot 10 = 125$ m

b) $S_{13} = \frac{5+125}{2} \cdot 13 =$

c) $S_n = 1805 = \frac{5 + 5 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n$

$\Rightarrow 1805 = 5n^2 \Rightarrow 361 = n^2 \to n = 19$

(14) geometrisch heisst $a_n = a_{n-1} \cdot q$. Das geometrische Mittel ist

$\sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} = \sqrt{\frac{a_k}{q} \cdot a_k \cdot q} = \sqrt{a_k^2} = |a_k|$

(15) $-2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 4096 \to q = -2$, $a_1 = -2$

$a_n = 4096 = (-2) \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n \Rightarrow n = 12$

$\to S_{12} = (-2) \cdot \frac{(-2)^{12} - 1}{(-2) - 1} =$

(16) $1 \ldots 2 \to a_1 = 1$, $a_{10} = 2 \Rightarrow 2 = 1 \cdot q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{2}$

$\to a_k = (\sqrt[9]{2})^{k-1}$

$\to S_{10} = 1 \cdot \frac{(\sqrt[9]{2})^{10} - 1}{\sqrt[9]{2} - 1} =$

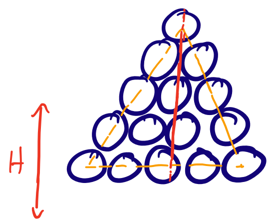
(17) 60 Rohre, Durchmesser 20cm

$a_1 = 4$, $d = 1$, $s_n = 60 = \frac{4 + 4 + (n-1)\cdot 1}{2} \cdot n = \frac{(n+7)n}{2}$

$\Rightarrow 120 = n^2 + 7n \Rightarrow 0 = n^2 + 7n - 120 = (n+15)(n-8)$

$\rightarrow n = 8$

$\rightarrow s = 10d \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10d$



$H = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10d - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2d + d =$

(18) pro Stunde -5.42% $\rightarrow I_k = 1 \cdot 0.9458^k$ beschreibt den vorhandenen Prozentsatz I_k nach k Stunden (auf 1 normiert).

Verlust: $(1 - I_3) \cdot 100 =$

(19) Sterngrösse : 1M 6M

Helligkeit : 100 1

$\rightarrow m_k = 100 \cdot \underbrace{\left(\sqrt[5]{\frac{1}{100}}\right)}_{q}^{k-1}$

b) Sirius (-1.6M) : $m_{-1.6} =$

c) 24M $\rightarrow m_{24} =$

Vergleiche zum Beispiel "wie viel mal heller": $\frac{m_{-1.6}}{m_{24}} =$

(20) $+\frac{3}{10}°$ DIN Lichtempfindlichkeit verdoppelt bzw. Belichtungszeit halbiert.

Bei $15/10°$ $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{60}$ Sekunde $\Rightarrow$ $27/10°$ sind 4 Schritte

$\Rightarrow \frac{1}{60} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$

(21) $a + b + c = 3$ arithmetische Reihe

$b + c + a = 3$ geometrische Reihe

$\Rightarrow \quad a + (a+d) + (a+2d) = 3 \qquad (AR)$

$3a + 3d = 3$

$a + d = 1$

$b = 1$

$\rightarrow \quad 1 + 1\cdot q + 1\cdot q^2 = 3 \qquad (GR)$

$q^2 + q - 2 = 0$

$(q+2)(q-1) = 0 \quad \Rightarrow q_1 = -2 \;, \; \cancel{q_2 = 1}$ $\quad a = b = c = 1$

$\Rightarrow \quad b = 1 \qquad c = -2 \qquad a = 4$

22 a) $a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 4 \quad \dots \quad a_k = 2^{k-1}$

$\rightarrow \quad S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \approxeq 2^{64}$

b) 20 Körner seien 1g $\rightarrow$ 2 Körner $0.1g = 10^{-1}g = 10^{-4}$ kg $= 10^{-7}$ t

Dann wiegen fast 2^{64} Körner etwa $2^{63} \cdot 10^{-7}$ t.

Ich erhalte ca. 6 AE.

c) Ich nehme $41'000 \text{ km}^2 = 41 \cdot 10^9 \text{ m}^2$ für die Fläche Schweiz

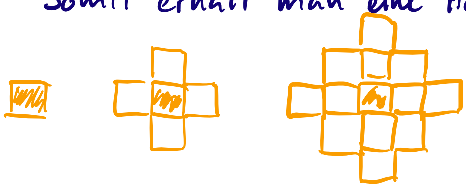
Das Volumen eines Reiskorns ist $V = \pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

$= \pi \cdot 10^{-8}$

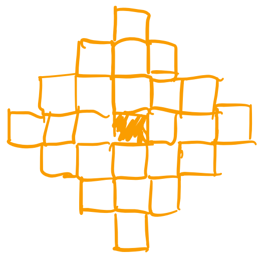
Also ist das Volumen aller Reiskörner $(2^{64} \approxeq 2 \cdot 10^{19})$

$2 \cdot 10^{19} \cdot \pi \cdot 10^{-8} = 2\pi \cdot 10^{11}$

Somit erhält man eine Höhe von gut 15 m.

23  $A_1 = 1 \qquad A_2 = 5 \qquad A_3 = 13$

$\qquad 1^2 + 4 \qquad 2^2 + 9$



$A_4 = 25 \quad \rightarrow A(n) = (n-1)^2 + n^2$

$3^2 + 16$

$A(n) = (2n-1) + 2 \cdot (n-1)^2$ überzeugt

① $a_k = 5 + \frac{1}{k}$ $a_{10} = 5.1$ $a_{11} = 5.09$ $a_{1000} = 5.001$

--- einfache Einsetzübung.

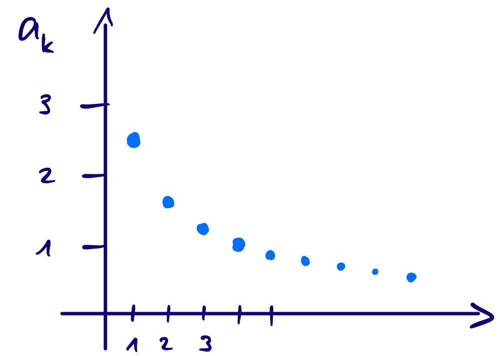
② $a_k = 2 + (-1)^k \cdot \frac{4}{k}$ $N\left(\frac{1}{100}\right)$?

Also müssen wir $\left| 2 + (-1)^k \cdot \frac{4}{k} - 2 \right| < \frac{1}{100}$ erfüllen, d.h.

$\frac{4}{k} < \frac{1}{100} \Rightarrow 400 < k \rightarrow N = 400$

③ $a_k = \frac{5}{k+1}$ geht offensichtlich für grosse k gegen 0, $g = 0$.

Zu beurteilen ist $\frac{5}{k+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} < k+1 \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 1 < k$



Die andern Teilaufgaben behandelt man analog. Grenzwerte sehe ich $g_b = \frac{7}{2}$, x_k divergiert, $g_u = -2$.

④ a) endlich viele

b) höchstens einen

⑤ fallend $a_k = \frac{1}{k}$ steigend $b_k = k$ $c_k = \sin(k)$

⑥ Sie ist sicher beschränkt

7 Sie sind monoton und beschränkt ol lich konvergent.

① Die Näherung für cos(x) scheint noch "überraschend":

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Testen wir $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Tippen: $1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 = 0.5017962$

$\rightarrow$ 0.359 %

② a) $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ haben wir bereits früher gesehen und $s_n = \frac{n}{n+1}$ erhalten. Wir vermuten, dass für grosse n $s_n \approx 1$ ergibt.

Die Stichzahl: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Rightarrow (1-\varepsilon)(n+1) < n \Rightarrow n + 1 - \varepsilon n - \varepsilon < n$

$\Rightarrow 1 < \varepsilon(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \rightarrow 999 < n$

b) Sicher nicht konvergent, beschränkt auch nicht.

③ Für die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ streben die Summanden gegen 0. Man kann aber einsehen, dass die Reihe divergiert; mit einem Minorantenkriterium. Betrachte

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\ldots \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

④ a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \ldots$ divergiert, weil $a_k = \frac{k}{2k+1}$ für k gross gegen $\frac{1}{2}$ geht.

b) divergiert, weil $\cos\left(\frac{1}{k}\right)$ gegen 1 geht für grosse k.

c) divergiert im Allgemeinen

(5) a) $\rightarrow q = \frac{2}{3} \rightarrow s = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

b) $\rightarrow q = -\frac{1}{3} \rightarrow s = \frac{2}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$

c) $\rightarrow q = -\frac{99}{100} \rightarrow s = \frac{1}{1-(-\frac{99}{100})} = \frac{1}{\frac{199}{100}} = \frac{100}{199}$

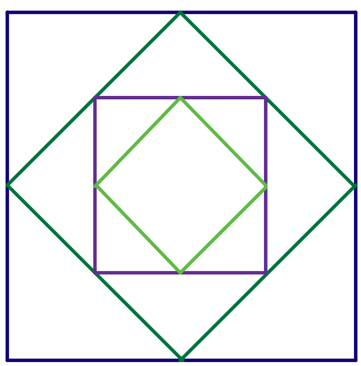
d) $\rightarrow q = \frac{8}{9} \rightarrow s = \frac{3/2}{1-8/9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{1} = \frac{27}{2}$

(6) $p^3 + \frac{p^6}{27} + \frac{p^9}{729} \rightarrow q = \frac{p^3}{27}$

Es muss $-1<q<1$ gelten: $-1 < \frac{p^3}{27} < 1 \Rightarrow -27 < p^3 < 27$
$\Rightarrow -3 < p < 3$

(7) $0.\overline{4} = 0.4 + 0.04 + 0.004 + \ldots \rightarrow q = \frac{1}{10} \rightarrow s = \frac{0.4}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$

(8)



a) $A = a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \ldots$
$= \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$

b) $c = 4a + 2\sqrt{2}a + 2a + \sqrt{2}a + \ldots$
$= \frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}}$

(9) a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \ldots$

b) $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$

(10) Zenon zerlegt die Zeit bzw Distanz in unendlich viele Teilzeiten bzw Teildistanzen, die aber in ihrer Summe endlich sind.

(11) $1 = \frac{a_1}{1-q}$ und $2 = \frac{\sqrt{a_1}}{1-\sqrt{q}}$

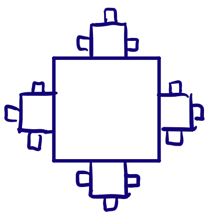
$1-q = a_1$ $\qquad 2-2\sqrt{q} = \sqrt{a_1} \Rightarrow 4 - 8\sqrt{q} + 4q = a_1$

$\Rightarrow 1-q = 4-8\sqrt{q}+4q \Rightarrow 8\sqrt{q} = 3+5q$

$\Rightarrow 64q = 9+30q+25q^2 \Rightarrow 0 = 25q^2-34q+9$

$\Rightarrow q_1 = \frac{9}{25} \qquad \cancel{q_2 = 1}$

(12)



a) $A = a^2 + 4\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{a}{9}\right)^2 + 4\cdot 3\cdot 3\cdot\left(\frac{a}{27}\right)^2$

$= a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{27}a^2 + \frac{4}{81}a^2 + \ldots$

$= a^2 + \frac{4/9\, a^2}{1-\frac{1}{3}} = a^2 + \frac{2}{3}a^2 = \frac{5}{3}a^2$

b) $C = 4a + 4\cdot 2\cdot\frac{a}{3} + 4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{a}{9} + 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{a}{27} + \ldots$

$= 4a + \frac{8}{3}a + \frac{8}{3}a + \frac{8}{3}a + \ldots$ divergiert

(13) $1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots =: s$

$\rightarrow ps = p + 2p^2 + 3p^3 + 4p^4 + \ldots$

$\rightarrow s - ps = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots = \frac{1}{1-p}$

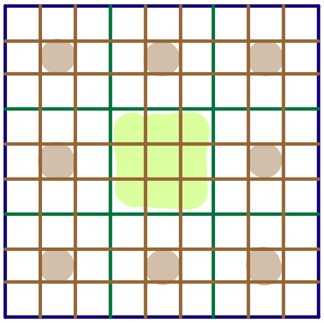
$\Rightarrow s(1-p) = \frac{1}{1-p} \Rightarrow s = \frac{1}{(1-p)^2}$

(14) a) $U_1 = \frac{1}{2} \quad U_2 = \frac{3}{4} \quad U_3 = \frac{7}{8} \quad \ldots \quad U_k = \frac{2^k-1}{2^k}$

$\rightarrow \lim_{k\to\infty} U_k = 1$

b) $U_{52} = \frac{2^{52}-1}{2^{52}} \approx 1$

(15)



$$A = s^2 - \frac{1}{9}s^2 - 8\cdot\frac{1}{81}s^2 - 8\cdot 8\cdot\frac{1}{729}s^2 - \dots$$

$$= s^2 - \frac{1}{9}s^2 - \frac{8}{9^2}s^2 - \frac{8^2}{9^3}s^2 - \dots$$

$$= s^2 - s^2\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9^2} - \frac{8^2}{9^3} - \dots\right)$$

$$\Rightarrow A = s^2 - s^2\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{8}{9}} = s^2 - s^2 = 0$$

(16) $1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \dots \quad \to q = \frac{1}{3} \qquad a_k = \frac{1}{3^{k-1}}$

b) $s_1 = 1 \qquad s_2 = \frac{4}{3} \qquad s_3 = \frac{13}{9} \qquad s_4 = \frac{40}{27}$

$$s_{100} = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{1-\frac{1}{3}} \approx \frac{3}{2}$$

c) $s = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

d) $s - s_n < 10^{-6} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < 10^{-6}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right) < 10^{-6} \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{2}{3}\cdot 10^{-6} \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\cdot 10^{-6}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} =$$

① Die Näherung für cos(x) scheint noch "überraschend":

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Testen wir $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Tippen: $1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 = 0.5017962$

$\rightarrow$ 0.359 %

② a) $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ haben wir bereits früher gesehen und $s_n = \frac{n}{n+1}$ erhalten. Wir vermuten, dass für grosse n $s_n \approx 1$ ergibt.

Die Stichzahl: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} \Rightarrow (1-\varepsilon)(n+1) < n \Rightarrow n+1-\varepsilon n - \varepsilon < n$

$\Rightarrow 1 < \varepsilon(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \rightarrow 999 < n$

b) Sicher nicht konvergent, beschränkt auch nicht.

③ Für die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ streben die Summanden gegen 0. Man kann aber einsehen, dass die Reihe divergiert; mit einem Minorantenkriterium. Betrachte

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$\dots \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

④ a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots$ divergiert, weil $a_k = \frac{k}{2k+1}$ für k gross gegen $\frac{1}{2}$ geht.

b) divergiert, weil $\cos\left(\frac{1}{k}\right)$ gegen 1 geht für grosse k.

c) divergiert im Allgemeinen

(5) a) $\rightarrow q = \frac{2}{3} \rightarrow s = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

b) $\rightarrow q = -\frac{1}{3} \rightarrow s = \frac{2}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$

c) $\rightarrow q = -\frac{99}{100} \rightarrow s = \frac{1}{1-(-\frac{99}{100})} = \frac{1}{\frac{199}{100}} = \frac{100}{199}$

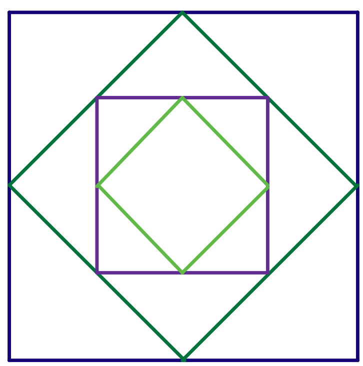
d) $\rightarrow q = \frac{8}{9} \rightarrow s = \frac{3/2}{1-8/9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{1} = \frac{27}{2}$

(6) $p^3 + \frac{p^6}{27} + \frac{p^9}{729} \rightarrow q = \frac{p^3}{27}$

Es muss $-1<q<1$ gelten: $-1 < \frac{p^3}{27} < 1 \Rightarrow -27 < p^3 < 27$
$\Rightarrow -3 < p < 3$

(7) $0.\overline{4} = 0.4 + 0.04 + 0.004 + \dots \rightarrow q = \frac{1}{10} \rightarrow s = \frac{0.4}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$

(8)



a) $A = a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \dots$
$= \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$

b) $c = 4a + 2\sqrt{2}a + 2a + \sqrt{2}a + \dots$
$= \frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}}$

(9) a) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \dots$

b) $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

(10) Zenon zerlegt die Zeit bzw Distanz in unendlich viele Teilzeiten bzw Teildistanzen, die aber in ihrer Summe endlich sind.

(11) $1 = \frac{a_1}{1-q}$ und $2 = \frac{\sqrt{a_1}}{1-\sqrt{q}}$

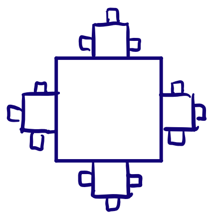
$1-q = a_1$ $\qquad 2-2\sqrt{q} = \sqrt{a_1} \Rightarrow 4 - 8\sqrt{q} + 4q = a_1$

$\Rightarrow 1-q = 4 - 8\sqrt{q} + 4q \Rightarrow 8\sqrt{q} = 3 + 5q$

$\Rightarrow 64q = 9 + 30q + 25q^2 \Rightarrow 0 = 25q^2 - 34q + 9$

$\Rightarrow q_1 = \frac{9}{25} \qquad \cancel{q_2 = 1}$

(12)



a) $A = a^2 + 4\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{a}{9}\right)^2 + 4\cdot 3\cdot 3\cdot\left(\frac{a}{27}\right)^2$

$= a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{27}a^2 + \frac{4}{81}a^2 + \dots$

$= a^2 + \frac{4/9\, a^2}{1-\frac{1}{3}} = a^2 + \frac{2}{3}a^2 = \frac{5}{3}a^2$

b) $C = 4a + 4\cdot 2\cdot\frac{a}{3} + 4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{a}{9} + 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{a}{27} + \dots$

$= 4a + \frac{8}{3}a + \frac{8}{3}a + \frac{8}{3}a + \dots$ divergiert

(13) $1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \dots =: s$

$\rightarrow ps = p + 2p^2 + 3p^3 + 4p^4 + \dots$

$\rightarrow s - ps = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \dots = \frac{1}{1-p}$

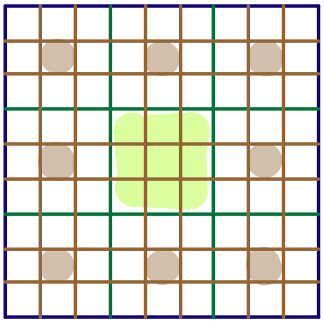
$\Rightarrow s(1-p) = \frac{1}{1-p} \Rightarrow s = \frac{1}{(1-p)^2}$

(14) a) $U_1 = \frac{1}{2} \quad U_2 = \frac{3}{4} \quad U_3 = \frac{7}{8} \quad \dots \quad U_k = \frac{2^k - 1}{2^k}$

$\rightarrow \lim_{k\to\infty} U_k = 1$

b) $U_{52} = \frac{2^{52}-1}{2^{52}} \approx 1$

(15)



$$A = s^2 - \frac{1}{9}s^2 - 8\cdot\frac{1}{81}s^2 - 8\cdot 8\cdot\frac{1}{729}s^2 - \ldots$$

$$= s^2 - \frac{1}{9}s^2 - \frac{8}{9^2}s^2 - \frac{8^2}{9^3}s^2 - \ldots$$

$$= s^2 - s^2\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9^2} - \frac{8^2}{9^3} - \ldots\right)$$

$$\Rightarrow A = s^2 - s^2\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{8}{9}} = s^2 - s^2 = 0$$

(16) $1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \ldots \quad \to \quad q = \frac{1}{3} \qquad a_k = \frac{1}{3^{k-1}}$

b) $s_1 = 1 \qquad s_2 = \frac{4}{3} \qquad s_3 = \frac{13}{9} \qquad s_4 = \frac{40}{27}$

$$s_{100} = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{1-\frac{1}{3}} \approx \frac{3}{2}$$

c) $s = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

d) $s - s_n < 10^{-6} \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) < 10^{-6}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right) < 10^{-6} \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{2}{3}\cdot 10^{-6} \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\cdot 10^{-6}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} =$$