38. Wozu in aller Welt Axiome?

Kinder im Alter von drei bis sechs Jahren können ihre Umgebung manchmal dadurch nerven, dass sie immer weiter fragen: Mit einem harmlosen „Wie funktioniert ein Auto“ geht es los, doch über die Stichworte Motor, Verbrennung, chemische Reaktion kommen auch Experten ganz schnell zu einem Punkt, an dem ein „Es ist halt so!“ die Diskussion beendet.

In der Mathematik ist es ähnlich. Auch da könnte man ad infinitum immer weiter nach den Grundlagen der Grundlagen usw. fragen, doch da diese Diskussion letztlich völlig unfruchtbar bleibt, einigt man sich auf einen Ausgangspunkt, der nicht mehr hinterfragt wird: Das sind die Axiome.

Das erste Axiomensystem wurde schon vor über 2000 Jahren von *Euklid* aufgestellt (um 300 v. Chr.). In seinen „Elementen“ hat er der Geometrie eine axiomatische Grundlage gegeben. Am Anfang stehen fundamentale Begriffe wie Punkt und Gerade, und dann werden Eigenschaften postuliert: „Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die durch sie hindurchgeht“ usw.

Abbildung 37: Euklid in der „Schule von Athen“(Raffael, 1510)

Heute werden quasi alle mathematischen Gebiete axiomatisiert, Axiome können auch Zahlen, Vektoren oder Wahrscheinlichkeiten betreffen.

Danach kann es richtig losgehen, man kann dann nämlich untersuchen, was sich für Folgerungen daraus ergeben. Das finden alle viel spannender, als sich in endlosen Grundsatzdiskussionen zu verlieren.

Einiges bleibt daran mysteriös. Wie kommt es – zum Beispiel in der Geometrie –, dass man mit wenigen Axiomen eine Theorie entwickeln kann, die dann ein hervorragend funktionierendes mathematisches Modell für die Beschreibung der uns umgebenden Welt abgibt? Der große Erfolg der axiomatischen Methode führte dazu, dass auch in anderen Wissenschaften versucht wurde, die Theorie auf ein axiomatisches Fundament zu stellen. So liest sich Newtons Hauptwerk zur Mechanik (das bezeichnenderweise „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ heißt) über große Strecken wie ein Mathematik-Lehrbuch.

Wenn man statt „Axiome“ das Wort „Spielregeln“ einsetzt, erhält man eine ganz brauchbare Illustration. Diese Spielregeln sind – zum Beispiel beim Schach – festgesetzt, und die intellektuelle Energie wird nicht darauf verwendet, sie noch weiter zu begründen. Vielmehr werden gewaltige Anstrengungen unternommen um festzustellen, ob man unter Einhaltung der Spielregeln in einer speziellen Stellung gewinnen kann. Genauso, wie die Mathematiker wissen wollen, ob mit den Axiomen nun ein gerade interessierendes Problem entscheidbar ist.

Das Hilbertsche Programm

Obwohl die ersten Axiomensysteme schon vor über 2000 Jahren aufgestellt wurden, hat der Siegeszug dieses Ansatzes erst vor etwa einhundert Jahren begonnen. Es war der große Mathematiker Hilbert, der vorschlug, mathematische Theorien durchgängig axiomatisch zu begründen. Die Grundidee war dabei, auf diese Weise zwei Ziele zu erreichen. Erstens sollten durch Herleiten von Folgerungen aus den Axiomen mathematische Wahrheiten produzierbar sein, und zweitens sollte man für alle sinnvoll zu formulierenden Aussagen entscheiden können, ob sie wahr oder falsch sind. Zum Beispiel „JA!“ für „Es gibt eine Zahl, deren Quadrat gleich 25 ist“ und „NEIN!“ bei der Aussage „Es gibt eine Lösung der Gleichung $x = x + 1$“.

Dieses ambitionierte Programm ist leider gescheitert. Der Mathematiker Gödel wies in seinen Unvollständigkeitssätzen nach, dass man nie sicher sein kann, dass in einer Theorie gleichzeitig eine Aussage und ihr Gegenteil herleitbar sind und dass es richtige Aussagen gibt, die aus den Axiomen nicht beweisbar sind.

Axiome sind die „Gesetze“ der Mathematik

Neben dem Schachbeispiel, bei dem die Spielregeln mit den Axiomen verglichen wurden, kann man auch auf juristische Parallelen hinweisen. Wenn die Gesetze festgelegt sind, dann kann man straffrei dieses und jenes tun. Für den Anwalt ist dann nur in zweiter Linie wichtig, wie man das moralisch bewerten würde. Interessant ist hauptsächlich, ob es durch die Gesetze gedeckt ist oder nicht. Ähnlich wie in der Mathematik ist es dann schwierig zu entscheiden, wie sich alles nach Festlegen der Gesetze langfristig entwickeln wird. Vielleicht gibt es doch zu viele unerwünschte Folgerungen, und dann muss man nachbessern. Oder, in der Mathematik, das Axiomensystem modifizieren.

Anders als beim Schachspiel wird hier aber eine moralische Komponente deutlich, die für die Mathematik auch nicht vernachlässigt werden kann. Dem Mathematiker ist es nämlich in der Regel gar nicht bewusst, ob seine Ergebnisse zum Wohl der Menschen oder für eher finstere Machenschaften eingesetzt werden können. Wer etwa Optimierungsverfahren entwickelt, kann sich nie sicher sein, ob damit Düngemittel oder Biowaffen so wirkungsvoll wie möglich eingesetzt werden.