Quadratische Gleichungen

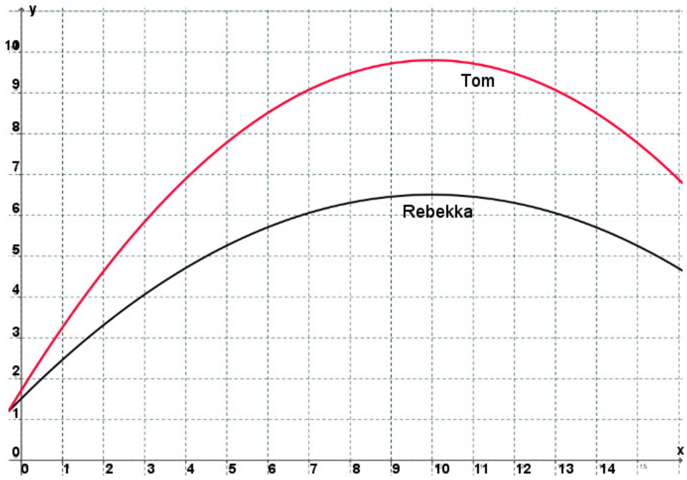
Zusatzmaterialien

zum mathbu.ch für GU 9++

Inhaltsverzeichnis

Lernumgebung

Rebekka und Tom werfen beide einen Ball.



(x bezeichnet die Wurfweite in Meter, y die Wurfhöhe in Meter.)

Leider ist auf dem Bild nicht erschichtlich, wie weit die beiden Bälle fliegen und welcher Ball weiter fliegt.

Die Wertetabelle enthält Punktepaare $(x|y)$, die Koordinaten der eingezeichneten Punkte auf der Flugkurve des Balles von Rebekka darstellen.

x	0	2	4	6	8	10	12	14
y	1.5	3.3	4.7	5.7	6.3	6.5	6.3	5.7

Aufgabe:

(a) Prüfe nach, dass die angegebenen Wertepaare jeweils Punkte auf der Flugkurve darstellen.

(b) Gib für die Kurve näherungsweise weitere Wertepaare an.

(c) Die $(x|y)$-Koordinaten der Punkte auf der Flugkurve erfüllen die Gleichung

$$y = -0.05x^2 + x + 1.5$$

Prüfe dies bei einigen Wertepaaren nach.

Prüfe dies auch bei einigen selber gefundenen Wertepaaren nach. Wie lassen sich die Abweichungen erklären?

(d) Erstelle eine Wertetabelle für Punkte auf der Flugkurve des Balles von Tom.

(e) (*) Suche eine quadratische Gleichung, die die Koordinaten $(x|y)$ der Punkte der Flugkurve des Balles von Tom erfüllen.

Um herauszufinden, wie weit der Ball von Rebekka fliegt, müssen wir offenbar ein x finden, für welches $-0.05x^2 + x + 1.5 = 0$ ist.

Im Folgenden geht es um Gleichungen vom Typ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wo a, b und c reelle Zahlen mit $a \neq 0$ sind.

Solche Gleichungen heissen **quadratisch**, weil die Unbekannte x auch im Quadrat vorkommt.

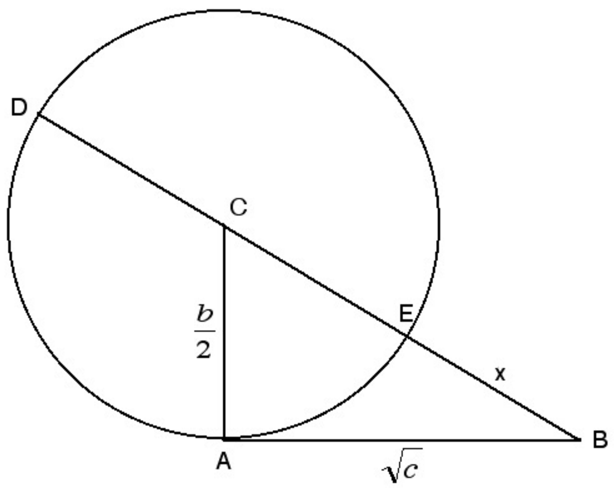
Geometrisches Lösen von quadratischen Gleichungen
Schon die griechischen und babylonischen Mathematiker haben quadratische Gleichungen gelöst, allerdings meistens nicht mit algebraischen, sondern mit geometrischen Mitteln. Die Lösung(en) wurden als Strecken(-längen) konstruiert. Da geometrische Grössen wie Streckenlängen oder Flächen nie negativ sein können, waren Fallunterscheidungen nötig.

Wir betrachten eine Lösungsmethode für die Gleichung $x^2 + bx = c$ mit $b, c > 0$, die allerdings nicht auf die Griechen, sondern auf René Déscartes (1596-1650) zurückgeht.

Gegeben sind die Strecken(-längen) b und c.

Konstruiere $\overline{AB}$ mit $AB = \sqrt{c}$ (vgl. mit dem Kapitel "Geometrisches Lösen von quadratischen Gleichungen, Fall (2)" im Arbeitsheft).
Errichte die Senkrechte $\overline{AC}$ zu $\overline{AB}$ mit $AC = \frac{b}{2}$.
Konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $\overline{AC}$.
Zeichne die Gerade durch B und C. Diese Gerade schneidet den Kreis in den Punkten E und D.

Behauptung: $x = BE$ ist Lösung der Gleichung $x^2 + bx = c$.



Aufgabe: Drücke $x = BE$ durch b und c aus und zeige, dass x die Gleichung $x^2 + bx = c$ erfüllt.

Arbeitsheft

Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen

Eine Gleichung, die sich durch elementare Äquivalenzumformungen auf die Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

bringen lässt, heisst **quadratische Gleichung**.
(a, b und c sind beliebige reelle Zahlen mit $a \neq 0$.)

Ist $a = 1$, so schreibt man die Gleichung häufig in der Form

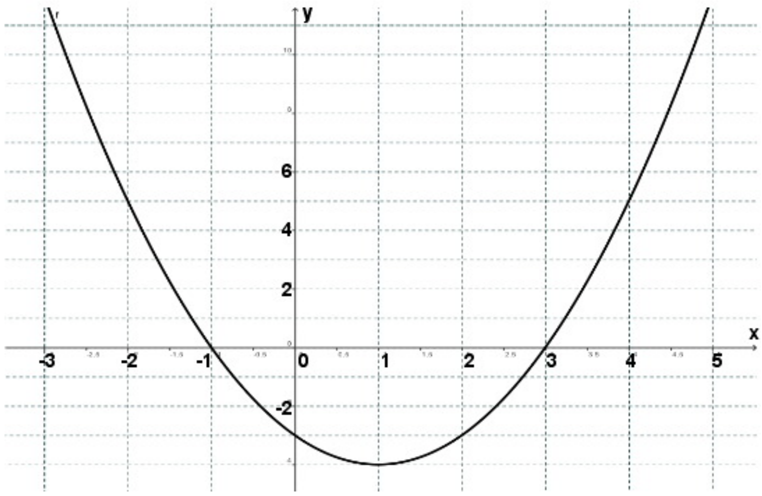
$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{(Quadratische Gleichung in Normalform)}$$

(p, q sind beliebige reelle Zahlen.)

Eine quadratische Gleichung lösen heisst, alle (reellen) Zahlen x zu finden, sodass $ax^2 + bx + c = 0$ wird.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ist die Funktionsgleichung einer **quadratischen Funktion** (falls $a \neq 0$). Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel.

Die Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann Lösungen, wenn die Parabel die x-Achse schneidet oder berührt.



Die Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$, weil die Parabel der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ die x-Achse an den Stellen -1 und 3 schneidet. Mit Einsetzen überzeugt man sich, dass $f(-1) = f(3) = 0$ gilt.

Aufgaben:

1. (a) Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

   (b) Bestimme mit Hilfe der Skizze möglichst genau die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 2x - 1 = 0$.

   (c) Skizziere weitere quadratische Funktionen und gib möglichst genau die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichungen an.

2. Finde Funktionsvorschriften quadratischer Funktion so, dass der Graph die x-Achse

   (a) nicht schneidet

   (b) berührt.

Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Geometrisches Lösen von quadratischen Gleichungen

In diesem Abschnitt stellen wir weitere geometrische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen in Normalform vor (vgl. LU, zweite Seite):

Da Strecken und Flächeninhalte stets positiv sind, waren die Griechen und Babylonier beim Lösen quadratischer Gleichungen zu Fallunterscheidungen gezwungen:

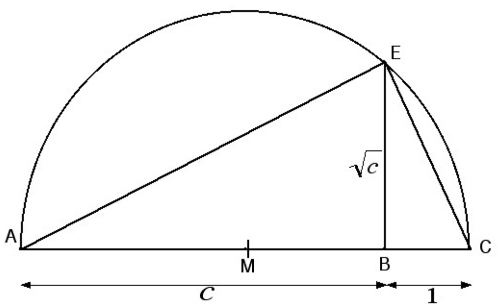
Sie unterschieden fünf Fälle, in denen die Zahlen b und c (wie auch die Lösung x) stets positiv sind:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Fall (1)} & x^2 & = & bx \\ \text{Fall (2)} & x^2 & = & c \\ \text{Fall (3)} & x^2 & = & bx + c \\ \text{Fall (4)} & x^2 + c & = & bx \\ \text{Fall (5)} & x^2 + bx & = & c \end{array}$$

Bemerkung zu **Fall (1)**: Weil $x = 0$ nicht als geometrische Grösse angesehen wurde, ist $x = b$ die einzige Lösung der Gleichung $x^2 = bx$.

Fall (2): Im Buch "Elemente" von Euklid (ca. 325 v. Chr. bis ca. 265 v. Chr.) ist beschrieben, wie man die Wurzel einer (positiven) Zahl konstruiert, also die quadratische Gleichung $x^2 = c$ mit $c > 0$ löst:

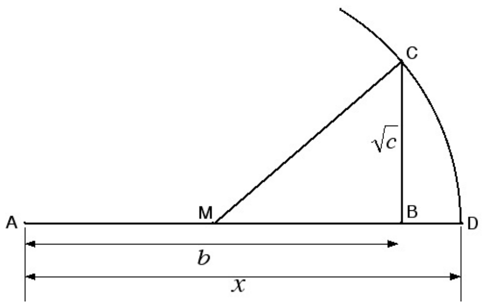
Konstruiere $\overline{AB}$ mit $AB = c$
Verlängere $\overline{AB}$ über B hinaus zu C, so dass $BC = 1$ ist.
Halbiere $\overline{AC}$ in M.
Konstruiere einen Halbkreis mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{AM}$.
Errichte die Senkrechte zu $\overline{AC}$ in B. Bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten mit dem Halbkreis mit E.
Dann ist $BE = \sqrt{c}$.



Aufgabe: Zeige, dass diese Konstruktion stimmt.

Fall (3): Um Gleichungen vom Typ $x^2 = bx + c$ zu lösen, gingen die Griechen um Pythagoras (ca. 570 v. Chr. bis 490 v. Chr.) folgendermassen vor:

Konstruiere $\overline{AB}$ mit $AB = b$
Errichte die Senkrechte $\overline{BC}$ zu $\overline{AB}$ mit $CB = \sqrt{c}$.
Halbiere $\overline{AB}$ in M.
Konstruiere einen Halbkreis mit Mittelpunkt M und Radius $\overline{MC}$.
Bezeichne den Schnittpunkt des Halbkreises mit der Verlängerung von $\overline{AB}$ mit D.
Dann ist $x = AD$.



Aufgabe: Zeige, dass die Strecke x die Gleichung $x^2 = bx + c$ löst.

Fall (4) wurde durch die Babylonier gelöst:

Die Summe b und das Produkt c zweier Zahlen x und y seien gegeben.

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ x \cdot y &= c \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $y = b - x$, eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt $x \cdot (b - x) = c$ resp. $x^2 + c = bx$.
Die Lösung des obigen Gleichungssystems ergibt also eine Lösung für **Fall (4)**.

Bei der Lösung des Gleichungssystems gingen die Babylonier wie folgt vor:
Zuerst lösten sie ein einfacheres Problem und führten das kompliziertere auf das einfachere zurück.

Ist die Summe S und die Differenz D zweier Zahlen x und y gegeben, also

$$\begin{aligned} x + y &= S \\ x - y &= D \end{aligned}$$

dann wird $x = \frac{S+D}{2}$ und $x = \frac{S-D}{2}$.

Zurück zu

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ x \cdot y &= c \end{aligned}$$

Ausgehend von der Identität $(x-y)^2+4xy = (x+y)^2$ wird $(x-y)^2+4xy = (x-y)^2+4c = (x+y)^2 = b^2$, also $(x-y)^2 = b^2-4c$ oder $x-y = \sqrt{b^2-4c}$.
Also gilt

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & b \\ x-y & = & \sqrt{b^2-c} \end{array}$$

So wird $x = \frac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ und $y = \frac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$.
$x = \frac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ ist auch die Lösung der Gleichung $x^2+c = bx$.

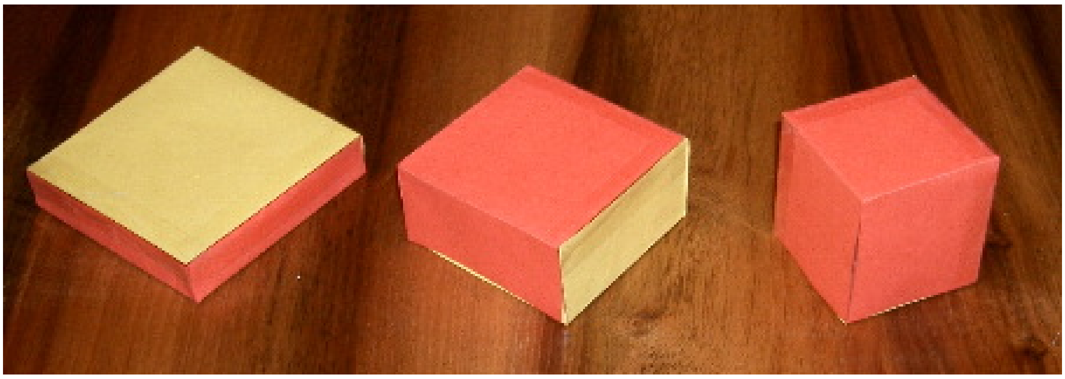
Fall (5) ist in der LU gelöst.

Aufgabe: Betrachte die Zeichnung in den LU zur geometrischen Lösung von $x^2+bx = c$ durch Descartes und zeige, dass $y = BD$ Lösung der Gleichung $y^2 = by + c$ ist.

Quadratisches Ergänzen 1

In diesem Abschnitt geht es um ein wichtiges algebraisches Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen. Wir gehen zuerst von einem geometrischen Modell aus.

Die abgebildeten Schachteln sind nach dem gleichen Schema gebaut: Die Grundfläche ist quadratisch, die beiden 'Farben' hell und dunkel[1]

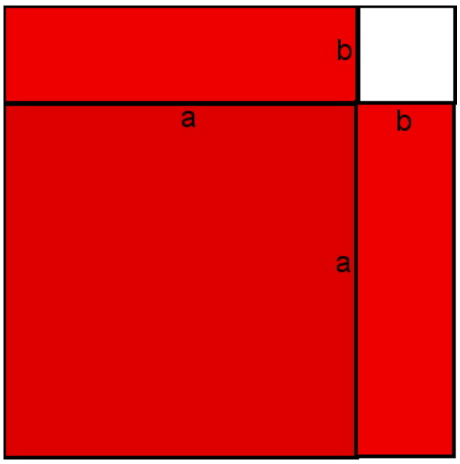


Aufgaben:

1. (a) Welche Farbe haben die nicht sichtbaren Flächen?

   (b) Zeichne zweifarbige Abwicklungen der Schachteln.

2. Jede Schachteln ist aus zwei Papierquadraten hergestellt, bei denen je ein Quadrat der Seitenlänge b weggeschnitten wird und zwei Rechtecke hochgefaltet werden (siehe Abbildung).



Wir betrachten im Folgenden nur eines der beiden Papierquadrate.

Berechne die fehlenden Angaben in der nachfolgenden Tabelle.

[1] hell= weiss bei schwarz/weiss-Kopien, hell = gelb bei Farbkopien; dunkel= grau bei schwarz/weiss-Kopien, dunkel = rot bei Farbkopien.

Grundfläche der Schachtel	a	b	dunkle Fläche	Fläche des Papierquadrates	Seitenlänge des Papierquadrates	Fläche des Abfalls
	8				9	
		2			9	
36					9	
					9	49
5					9	
				81		20
	a	b				

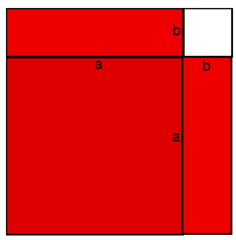
3. Stelle folgende Abhängigkeiten graphisch dar:
   (a) Die dunkle Fläche in Abhängigkeit von b.
   (b) Die Fläche des Papierquadrates in Abhängigkeit von b.
   (c) Die Fläche des Abfalls in Abhängigkeit von b.

4. Die Höhe der Schachtel misst 1 cm, die dunkle Fläche ist 35 cm^2.
   (a) Wie gross ist der Abfall?
   (b) Wie gross ist das Papierquadrat?
   (c) Wie gross ist die quadratische Grundfläche der Schachtel?
   (d) Wie lang ist die Grundkante a der Schachtel?

5. Die Höhe der Schachtel misst 4 cm, die dunkle Fläche ist 100 cm^2.
   Berechne die Länge der Seite a.

6. Berechne aus der Höhe b und der dunklen Fläche die Seitenlänge a der Schachtel.

7. (a) Löse die Gleichung $x^2 + 6x = 10$.
   Deute den Term $x^2 + 6x$ im Flächenmodell.



   (b) Beschreibe allgemein, wie Gleichungen des Typs $x^2 + bx = c$ gelöst werden können.

Quadratisches Ergänzen 2

Bestimme die Lösungsmenge der unternstehenden Gleichungen. In der Regel hat jede Gleichungen zwei Lösungen. Schreibe Deine Gedankengänge auf. Notiere bei jeder Aufgabe, was im Vergleich zur vorangehenden anders ist.

(a) $x^2 = 4$

(b) $x^2 - 3 = 0$

(c) $2x^2 - 1 = 0$

(d) $x^2 = 6$

(e) $(x + 2)^2 = 6$

(f) $x^2 - 6x + 9 = \frac{25}{4}$

(g) $x^2 - 6x = 31$

(h) $x^2 + 4x = -\frac{7}{4}$

(i) $x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{9}$

(j) $x^2 - 3x = -\frac{25}{4}$

(k) $x^2 + 4x - 7 = 0$

(l) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

(m) $x^2 + 2px + q = 0$

(n) $ax^2 + bx + c = 0$

(Quelle: PM Heft 7 / Februar 2006 / 48.Jg.)

Quadratisches Ergänzen 3

Um beide Lösungen einer quadratischen Gleichung zu finden, wollen wir im Folgenden $x^2 + px + q = 0$ und $ax^2 + bx + c = 0$ mit algebraischen Methoden lösen.

Idee: Betrachten wir ein Beispiel:

$$x^2 + 6x = 10$$

Wir möchten durch Addition einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung die linke Seite mit Hilfe der binomischen Formel "zu einem Quadrat machen", und danach die Wurzel ziehen. Links hätten wir also gerne einen Ausdruck der Form

$$(x + a)^2$$

Wenn wir $(x + a)^2$ ausmultiplizieren, erhalten wir $x^2 + 2ax + a^2$.
Wenn wir die ersten beiden Terme dieser Summe mit $x^2 + 6x$ vergleichen, sehen wir, dass $2a = 6$, das heisst $a = \frac{6}{2} = 3$ sein muss. Wegen

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

folgt, dass wir auf beiden Seiten der Gleichung noch die Zahl 9 addieren müssen:

$$x^2 + 6x + 9 = 10 + 9 = 19$$

Mit der Binomischen Formel wird dieser Ausdruck zu

$$(x + 3)^2 = 19 \qquad (3)$$

Wurzelziehen liefert

$$x + 3 = \pm\sqrt{19}$$

und daraus bekommen wir die beiden Lösungen

$$x_1 = -3 + \sqrt{19} \quad \text{und} \quad x_2 = -3 - \sqrt{19}$$

Der Vorgang, der von der Gleichung

$$x^2 + 6x = 10$$

zur Gleichung

$$(x + 3)^2 = 19$$

führt, heisst **quadratisches Ergänzen**.

Betrachten wir noch ein etwas komplizierteres Beispiel:

$$\begin{aligned}
3x^2 + 10x &= 23 && \text{(Multiplizieren mit } 3) \\
9x^2 + 30x &= 69 \\
9x^2 + 36x + 25 &= 69 + 25 \\
(3x + 5)^2 &= 94 && \text{(Wurzelziehen)} \\
3x + 5 &= \pm\sqrt{94}
\end{aligned}$$

Auflösen nach x ergibt

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{94}}{3} \quad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-5-\sqrt{94}}{3}$$

Lösungsformel und Lösbarkeit

Eine quadratische Gleichung sei in der sogenannten **Standardform**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gegeben.
Durch Umformen und quadratisches Ergänzen finden wir:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \qquad \text{(Multiplizieren mit } \ a) \\
a^2x^2 + abx + ac &= 0 \\
a^2x^2 + abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 + ac &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2}{4} - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4} \\
ax + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\
ax &= -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Die beiden Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Das ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen (in Standardform).

Bemerkung: Die beiden Ausdrücke für x_1 und x_2 machen nur dann Sinn, wenn der Ausdruck $D = b^2 - 4ac \geq 0$ ist. D heisst **Diskriminante** und dient dazu, die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung zu bestimmen:
Es gilt:

$$D = b^2 - 4ac > 0 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \ \text{ hat zwei Lösungen}$$

$$D = b^2 - 4ac = 0 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \ \text{ hat eine Lösung}$$

$$D = b^2 - 4ac < 0 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \ \text{ hat keine (reelle) Lösung}$$

Beispiel: Die Gleichung $3x^2 - 4x - 6 = 0$ hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 + \sqrt{88}}{6} \approx 2.2301 \ \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 - \sqrt{88}}{6} \approx -0.8968$$

Bemerkungen:
1. Sind $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, dann gilt

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ (Der Ausdruck ax^2+bx+c kann in Linearfaktoren zerlegt werden)

2. Im Falle $D = b^2 - 4ac < 0$ hat die quadratische Gleichung <u>keine</u> reellen Lösungen.

3. Falls in der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ eine der Zahlen b oder c gleich 0 ist, dann lässt sich die Gleichung direkt lösen:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

und da ein Produkt nur dann gleich 0 ist, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist, folgt $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{-b}{a}$.

resp.

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ x^2 &= \frac{-c}{a} \end{aligned}$$

und daher $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ falls $\frac{-c}{a} \geq 0$.

Aufgaben

Grundaufgaben

1. Kontrolliere die Lösungen der Aufgaben 1 (b) und (1(c) im Kapitel "Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen".

2. Löse folgende Gleichungen.

   (a) $x^2 - 2x - 35 = 0$

   (b) $d^2 - 3d - 6 = 0$

   (c) $2x^2 + x - 10 = 0$

   (d) $8x^2 - 3x = 12$

   (e) $0.4x^2 - 3.2x + 2 = 0$

   (f) $x^2 - x - 1 = 0$

   (g) $x^2 = 3x - 1$

   (h) $x(x-2) = 5$

   (i) $(x^2 - 3)(x - 6) = x^3$

   (j) $(s^2 - 3)(s - 6) = 0$

3. Bestimme die Lösungen folgender Gleichungen möglichst ohne Formel und kontrolliere die Lösungen mit Hilfe der Formel.

   (a) $z^2 - 20 = 0$

   (b) $\left(z - \frac{5}{6}\right)\left(8 - \frac{z}{9}\right) = 0$

   (c) $34 - 3x - x^2 = 3(3 - x)$

   Jede der drei obigen Gleichungen kann auch ohne Formel gelöst werden. Überlege, wie.

4. Löse die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\text{(a)} \quad x - 1 &= \frac{2x+23}{x+1} \\
\text{(b)} \quad \frac{42-30x}{7-x} &= 3x+6 \\
\text{(c)} \quad \frac{5x+1}{3x-1} &= \frac{x-7}{x-5} \\
\text{(d)} \quad \frac{3x-8}{2x-4} &= \frac{2x-5}{x-1} \\
\text{(e)} \quad \frac{3}{x-5} + \frac{2}{x+1} + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

5. Gib eine quadratische Gleichung an, die
   (a) nur eine,
   (b) keine (reelle) Lösung

   hat.

6. Für welche Werte von a hat die Gleichung $x^2 = -ax - 3$ eine, zwei Lösungen?

7. Finde alle x, die die folgende Ungleichung erfüllen: $x^2 - 3x > 7$.

8. Löse die folgende Gleichung: $|x^2 - 2| = 2$ ($|x|$ ist der Betrag einer Zahl.)

Textaufgaben

1. Wie weit fliegt der Ball von Rebekka? Wie weit fliegt der Ball von Tom? (vgl. LU, Seite 1)

2. Finde zwei Zahlen, deren Summe gleich 7.5 und deren Produkt 14 ist.

3. Ein Rechteck hat den Umfang 20 cm und die Fläche 5 cm^2. Wie gross sind die Seiten?

4. Von einem 1 m langen Stoffband werden 5 quadratische Tücher abgeschnitten. Es bleibt vom Stoffband ein Stück der Fläche 375 cm^2 übrig.

   Wie breit ist das Stoffband?

5. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist um 5 cm länger als die andere. Das Dreieck hat eine Fläche von 25 cm^2.
   Berechne die Länge der beiden Katheten.

6. Von zwei Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere und das Produkt ist um 50 grösser als die Summe. Wie heissen die beiden Zahlen?

7. Addiert man vier Neuntel eines Bruches zur Hälfte seines Kehrbruches, so erhält man 1. Bestimme den Bruch. (Hinweis: Bezeichne den Bruch mit x.)

8. An einer Party stossen die Gäste an. Insgesamt klirren 253mal die Gläser. Wie viele Gäste sind anwesend?

9. Welches regelmässige Vieleck hat 350 Diagonalen?

10. Welches Vieleck hat 100mal so viele Diagonalen wie Seiten?

11. Würde man den Umfang eines Rades um 1 m vergrössern, so würde es sich beim Abrollen auf einer 546 m langen Strecke 25mal weniger drehen. Berechne den Umfang des Rades.

12. Die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten eines Quaders unterscheiden sich je um 2 cm. Wie lang sind die Kanten, wenn die Oberfläche des Körpers 5758 cm^2 misst?

13. Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, so dass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung?

Anspruchsvolle Anwendungen quadratischer Gleichungen

Benzinverbrauch von Autos

Autos verbrauchen Benzin. Üblicherweise interessiert einen das erst, wenn wieder eine Fahrt zur Tankstelle nötig ist. Manche Menschen führen dann Buch und ermitteln, wie viele Kilometer sie mit einer Tankfüllung gefahren sind.
IngenieurInnen wollen das genauer wissen. Sie lassen Autos auf einer Teststrecke mit einer bestimmten gleichbleibenden Geschwindigkeit fahren und messen den Benzinverbrauch pro 100 km. Für jeden Autotyp wird mit solchen Tests ermittelt, wieviel Benzin er bei $40,\ 50,\ 60,\ 70,\ldots$ Stundenkilometern verbraucht.
Die Analyse dieser Messungen ergibt, dass der Treibstoffverbrauch quadratisch von der Geschwindigkeit v abhängt. Zwei Beispiele:

Audi Modell 100:	Verbrauch $b \approx 0.0004v^2 - 0.03v + 5$
Mercedes Modell 400 SE:	Verbrauch $b \approx 0.00066v^2 - 0.055v + 11$

Der Verbrauch wird in Litern pro 100 km, die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde gemessen. Diese Formeln erlauben uns, bei bekannter Geschwindigkeit den Benzinverbrauch zu berechnen.

Umgekehrt können wir zum Beispiel herausfinden, bei welcher Geschwindigkeit wir 5 Liter pro 100 km verbrauchen. Wir müssen, wenn uns der Audi interessiert, die quadratische Gleichung

$$b = 0.0004v^2 - 0.03v + 5$$

nach v auflösen. Dazu bringen wir sie auf Normalform:

$$\begin{aligned} b &= 0.0004v^2 - 0.03v + 5 \\ 0 &= 0.0004v^2 - 0.03v + 5 - b \\ 0 &= v^2 - 75v + 12500 - 2500b \end{aligned}$$

und wenden die Lösungsformel an. Wir erhalten

$$v_{1,2} = \frac{75 \pm \sqrt{75^2 - 4(12500 - 2500b)}}{2}$$

Für $b = 5$ ergeben sich die Lösungen $v_1 = 75$ und $v_2 = 0$.

Die zweite Lösung ist- milde ausgedrückt - irritierend. Das zeigt, dass bei der Deutung von Lösungen Vorsicht geboten ist. Die angegebenen Formeln gelten nämlich nur, wenn die Geschwindigkeit grösser als etwa 40 Stundenkilometer ist. Deshalb fällt die Lösung $v_2 = 0$ gar nicht in Betracht.
Die erste Lösung hingegen macht Sinn: Bei 75 Stundenkilometern verbraucht der Audi 5 Liter pro 100 km.

Aufgaben:

(a) Wie viel verbrauchen Audi und Mercedes bei 100 Stundenkilometern?

(b) Stelle den Verbrauch der beiden Automodelle graphisch dar.

(c) Berechne beim Mercedes-Modell die Geschwindigkeit, bei der der Wagen 5, 10 beziehungsweise 20 Liter Benzin pro 100 km verbraucht.

Wie tief ist der Brunnen?

Stell dir vor, du stehst am Rande eines tiefen Brunnens und rufst etwas ins unergründliche schwarze Loch hinab. Vielleicht lässt du auch einen Stein oder eine Münze hineinfallen.

Wie tief ist der Brunnen? Da kannst du berechnen, wenn du die Sekunden zählst, die es braucht, bis du den Stein ins Wasser fallen hörst. Nehmen wir an, es habe $t = 1.6$ Sekunden gedauert. Wir bezeichnen die Tiefe des Brunnens mit h. Zuerst ist die Münze bis auf den Wasserspiegel gefallen. Das habe u Sekunden gedauert.

Mit dem Fallgesetz gilt: $h = \frac{g}{2}u^2$
(g: Erdbeschleunigung $g \approx 9.8\frac{\text{m}}{\text{sec}}$)

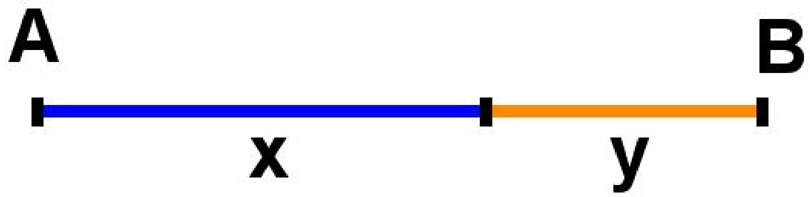
Dann hat sich der Schall in $t - u$ Sekunden den Brunnen hinauf bis an dein Ohr fortgepflanzt. Da der Schall 330 Meter pro Sekunde zurücklegt, muss
$h = 330(t - u)$
sein. Denn der Weg hinauf ist natürlich gleich lang wie der Weg hinab.

Aufgaben:
(a) Wie tief ist der Brunnen?
(b) Nehmen wir an, die Messung von t sei nur auf eine Zentelsekunde genau erfolgt. t könnte also auch 1.5 oder 1.7 Sekunden sein.
Wieviel macht das für die Brunnentiefe aus?

(c) Wie tief ist ein Brunnen, bei dem für t 3 Sekunden gemessen werden?
(d) Welche Zeit t wird man messen bei einem Brunnen, der 50 Meter tief ist?

Der Goldene Schnitt:

Eine Strecke AB ist im Goldenen Schnitt geteilt, wenn sich die grösse Teilstrecke zur ganzen Strecke verhält, wie die kleinere Teilstrecke zur grösseren. (siehe auch mathbu.ch 9+, LU "Körperschule", Seite 44)



Setzen wir $x + y = 1$ (also $y = 1 - x$), dann kann der Satz
"wenn sich die grösse Teilstrecke zur ganzen Strecke verhält, wie die kleinere Teilstrecke zur grösseren" in die Gleichung

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

übersetzt werden.
Multiplizieren mit x führt zu $x^2 + x - 1 = 0$.

Aufgabe: Finde eine Lösungen dieser Gleichung und interpretiere diese.

Ergänzung: Der Satz von Vieta

Zwischen den Koeffizienten p und q der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und den Lösungen x_1 und x_2 besteht ein einfacher Zusammenhang:

Satz: Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, dann gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

Beweis: Die Lösungen der quadratischen Gleichung in Normalform lauten:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

$$\text{Daraus folgt} \quad x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

und

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q \ .$$

Anwendungen des Satzes von Vieta:

1. Mit dem Satz von Vieta lässt sich sehr leicht prüfen, ob die berechneten Lösungen einer quadratischen Gleichung stimmen.

2. Mit dem Satz lässt sich leicht eine quadratische Gleichung mit vorgegebenen Lösungen finden:
Beispiel: Gesucht ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 7$ und $x_2 = -3$. Wegen $x_1 + x_2 = 7 - 3 = 4$ und $x_1 \cdot x_2 = -21$ lautet eine mögliche Gleichung $x^2 - 4x - 21 = 0$. (Vergleiche auch mit Aufgabe 6)

3. Die eine Lösung der Gleichung $x^2 - 7x + 10 = 0$ ist $x_1 = 2$, wie lautet die zweite Lösung?
Antwort: Wegen $x_1 \cdot x_2 = 10$ muss die zweite Lösung $x_2 = \frac{10}{x_1} = 5$ sein!

Aufgaben

1. Prüfe mit Hilfe des Satzes von Vieta, ob die angegebenen Lösungen der quadratischen Gleichungen stimmen.

   (a) $x^2 - 12x + 35 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 7$.

   (b) $x^2 - x - 6 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$.

(c) $x^2 + x - 6 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$.

(d) $x^2 - 13x - 300 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 25$ und $x_2 = -12$.

(e) $x^2 - 3x + 1 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2. Die eine Lšung der Gleichung $x^2 - 17x + 72 = 0$ ist $x_1 = 8$. Wie lautet die zweite Lösung?

François Viéte oder Vieta (1540-1603), der Entdecker des nach ihm benannten Satzes lebte von 1540 bis 1603 in Frankreich.

Er studierte ursprünglich Jurisprudenz (Recht) und war Rechtsanwalt und Kronjurist. Aus politischen Gründen wurde ihm zwischen 1584 und 1589 diese Tätigkeit verboten. In dieser Zeit beschäftigte er sich gründlich mit Mathematik und studierte die Schriften der grossen griechischen und italienischen Mathematiker. Dieses Studium regte ihn zu eigener Produktion an. Im Jahre 1593 hatte er Gelegenheit, sein mathematisches Können zu zeigen. Der Holländer van Roomen hatte in einer Zeitschrift eine Preisaufgabe gestellt und in dem dieser Schrift beigelegten Verzeichnis der bedeutendsten lebenden Mathematiker keinen einzigen Franzosen aufgeführt; der höllandische Gesandte in Paris äusserte sich daher geringschätzig über die französischen Mathematiker.
Der herbeigerufene Vieta teilte von der in Form einer Gleichung 45. Grades (eine Gleichung, die mit x^{45} beginnt!) gestellten Preisaufgabe eine Lösung sofort mit, am nächsten Tag die weiteren 22 positiven Lösungen! Später hat er in einem Antwortschreiben an van Roomen die allgemeine Lösungsmethode für solche Gleichungen dargestellt. Vieta fasste bei seinen mathematischen Untersuchungen und Forschungen Unbekannte in einer Gleichung noch als positive Zahlen auf, was ihn oft zu Fallunterscheidungen zwang.
Vieta war auch einer der ersten, der in Europa das **Dezimalsystem** konsequent verwendete.

Lösungen

Lösungen der Aufgaben in der Lernumgebung

(a) Fasst man die Wertepaare $(x|y)$ als Koordinaten von Punkten auf, so liegen diese Punkte alle auf der Parabel.

(b)

x	1	3	5	7	9	11	13	15
y	2.45	4.05	5.25	6.05	6.45	6.45	6.05	5.25

Die angegebenen Wertepaare wurden durch Einsetzen in die Formel (siehe bei (c)) gefunden. Durch blosses Ablesen können sich Ungenauigkeiten und Abweichungen ergeben.

(c) $-0.05 \cdot 0^2 + 0 + 1.5 = 1.5$
$-0.05 \cdot 2^2 + 2 + 1.5 = 3.3$
$-0.05 \cdot 4^2 + 4 + 1.5 = 4.7$
$-0.05 \cdot 6^2 + 6 + 1.5 = 5.7$
$-0.05 \cdot 8^2 + 8 + 1.5 = 6.3$, etc.

Siehe auch bei Teilaufgabe (b).

(d)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	1.8	3.32	4.68	5.88	6.92	7.8	8.52	9.08	9.48	9.72	9.8	9.72	9.48	9.08	8.52

Man beachte die Symmetrie. Mit $y = f(x)$ gilt
$f(9) = f(11),\ \ f(8) = f(12),\ \ f(7) = f(13), \ldots$.

(e) (*) Die Flugkurve des Balles von Tom kann durch die Gleichung

$$y = -0.08x^2 + 1.6x + 1.8$$

beschrieben werden.
Die Lösungen der Schülerinnen und Schüler werden wahrscheinlich mehr oder weniger von der angegebenen Formel abweichen.

Wie man die Gleichung $-0.05x^2 + x + 1.5 = 0$ löst, wird weiter hinten erklärt. Die Lösungen sollen hier trotzdem schon präsentiert werden: Die beiden Zahlen $x_1 \approx -1.402$

und $x_2 \approx 21.402$ erfüllen die Gleichung. Offenbar ist 21.4 Meter die ungefähre Wurfweite des Balles von Rebekka.

Zur Lösungsmethode von Descartes:

Nach Pythagoras gilt:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (\sqrt{c})^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Einerseits ist also

$$x+\frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

und somit

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \ .$$

Anderseits ist

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + c$$

oder

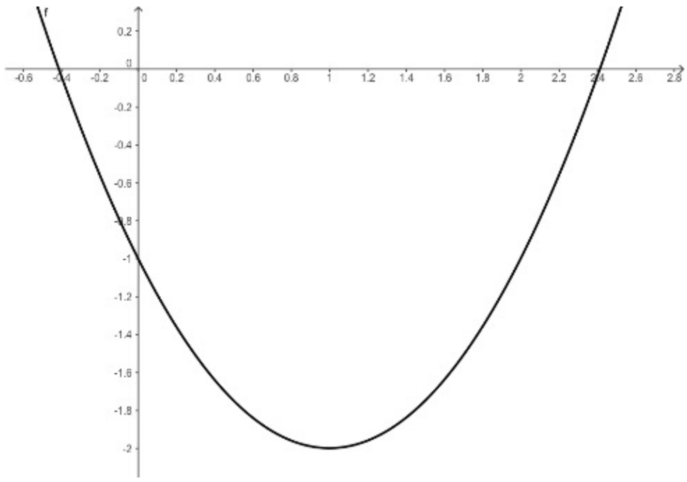
$$x^2 + bx = c \ .$$

Also ist die konstruierte Strecke x tatsächlich Lösung der vorgegebenen Gleichung.

Lösungen der Aufgaben im Arbeitsheft

Lösungen zu "Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen"

1. (a)



$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

   (b) Durch Ablesen schätzt man etwa $x_1 \approx 2.4$ und $x_2 \approx -0.4$.

   (c) Individuelle Lösungen

2. (a) Damit die zur Funktionsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ gehörige Parabel die x-Achse <u>nicht</u> schneidet, muss $D = b^2 - 4ac > 0$ gelten (siehe im Kapitel "Lösungsformel und Lösbarkeit").

   (b) Damit die zur Funktionsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ gehörige Parabel die x-Achse berührt, muss $D = b^2 - 4ac = 0$ gelten (siehe Kapitel "Lösungsformel und Lösbarkeit").

Lösungen zu "Geometrisches Lösen von quadratischen Gleichungen"

Aufgabe zum Fall (2): Die Konstruktion der Wurzel:

$$\text{Nach Höhensatz gilt:}\quad AB \cdot BC = BE^2$$

Der Höhensatz seinerseits folgt unter anderem aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke ABE und EBC. Es ist also $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{BC}$ oder eben $BE^2 = AB \cdot BC = c \cdot 1 = c$. Also ist

$$BE = \sqrt{c}$$

Aufgabe zum Fall (3): Nach Pythagoras gilt:

$$\overline{MC} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

$$x = \overline{AM} + \overline{MD} = \frac{b}{2} + \overline{MC} = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

Also ist

$$x^2 = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}\right)^2 = \frac{b^2}{4} + b\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b^2}{4} + c = \frac{b^2}{2} + b\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + c$$

Anderseits ist

$$bx + c = b\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}\right) + c = \frac{b^2}{2} + b\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + c$$

Also ist $x^2 = bx + c$ und die konstruierte Strecke x ist Lösung der vorgegebenen Gleichung.

Zur Aufgabe am Schluss des Abschnittes: Es gilt $x^2 + bx = c$ sowie $y = x + b$, also $x = y - b$.
Einsetzen von x in die erste Gleichung liefert:

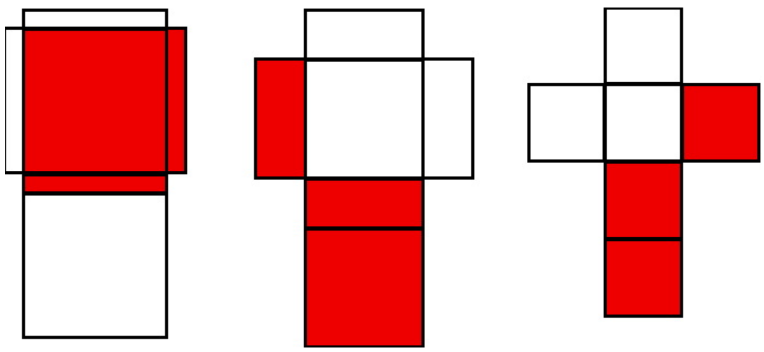
$$\begin{aligned} (y-b)^2 + b(y-b) &= c \\ y^2 - 2by + b^2 + by - b^2 &= c \\ y^2 - by &= c \\ y^2 &= by + c \end{aligned}$$

Lösungen zu "Quadratisches Ergänzen 1"

Aufgaben:

1. (a) Schachtel links: Boden: dunkel; nicht sichtbare Seitenflächen: hell
   Schachtel in der Mitte: Boden: hell; nicht sichtbare Seitenflächen: einmal hell, einmal dunkel
   Schachtel rechts: Alle nicht sichtbaren Seitenflächen sind hell.

   (b)



   Bemerkung: Die angegebenen Lösungen sind nicht eindeutig.

2.

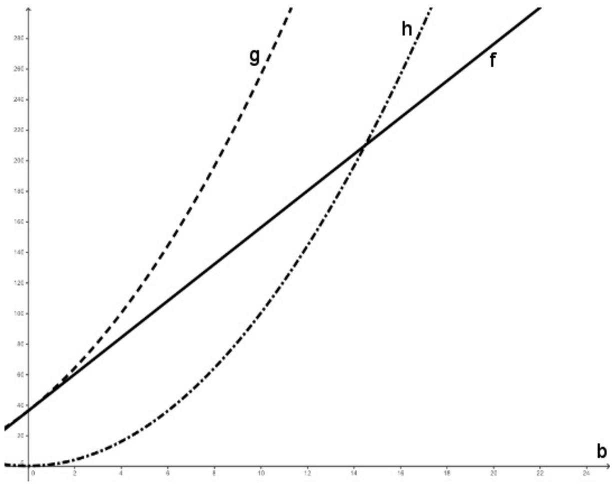
Grundfläche der Schachtel	a	b	dunkle Fläche	Fläche des Papierquadrates	Seitenlänge des Papierquadrates	Fläche des Abfalls
64	8	1	80	81	9	1
49	7	2	77	81	9	4
36	6	3	72	81	9	9
4	2	7	32	81	9	49
5	2.24	6.76	35.2	81	9	45.8
20.5	4.53	4.47	61	81	9	20
a^2	a	b	$a^2 + 2ab$	$(a+b)^2$	$a+b$	b^2

3. (a) $f(b) = a^2 + 2ab, \quad a$ fest.

   (b) $g(b) = (a+b)^2, \quad a$ fest.

   (c) $h(b) = b^2$

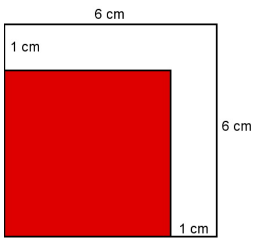
   Mit $a = 6$ ergeben sich folgende Graphen.



4. (a) Der Abfall beträgt 1 cm^2, denn b ist 1 cm.

   (b) Das Papierquadrat hat eine Fläche von 36 cm^2. Der Abfall wird zur dunklen Fläche dazugezählt.

   (c) Die quadratische Grundfläche der Schachtel ist 25 cm^2. Vom Papierquadrat wird ein Winkel der Breite 1 cm abgeschnitten.



   (d) Die Grundkante a der Schachtel ist 5 cm lang.

5. Es ist $a^2 + 2 \cdot 4 \cdot a = 100$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= 116 \\ (a+4)^2 &= 116 \\ a + 4 &= \sqrt{116} \\ a &= -4 + \sqrt{116} \approx 6.77 \end{aligned}$$

6. D sei die dunkle Fläche.

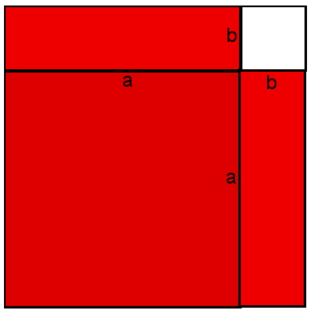
$$\begin{aligned} a^2 + 2ab &= D \\ a^2 + 2ab + b^2 &= D + b^2 \\ (a+b)^2 &= D + b^2 \\ a + b &= \sqrt{D + b^2} \\ a &= -b + \sqrt{D + b^2} \end{aligned}$$

Bemerkung: Beim Wurzelziehen wäre auch $-\sqrt{D+b^2}$ denkbar. Da a aber positiv sein muss, ist diese Lösung nicht möglich.

7. (a)

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 10 \\ x^2 + 6x + 3^2 &= 10 + 3^2 \\ (x+3)^2 &= 19 \\ x + 3 &= (\pm)\sqrt{19} \\ x &= -3 + \sqrt{19} \end{aligned}$$

Der Term $x^2 + 6x$ entspricht der dunklen Fläche $a^2 + 2ab$. Setze $x = a$ und $6 = 2b$, also $b = 3$.



(b)

$$\begin{aligned} x^2 + bx &= c \\ x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \text{(Quadratisches Ergänzen)} \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right) &= \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \\ x &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Sind die Grössen b und c positiv und soll auch x positiv sein, dann ist

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

die einzige Lösung der Gleichung $x^2 + bx = c$. Andernfalls kommt auch noch $x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ in Frage.

Lösungen zu "Quadratisches Ergänzen 2"

$$(a)\ x^2 = 4 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 2\ ;\ x_2 = -2$$

$$(b)\ x^2 - 3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \sqrt{3}\ ;\ x_2 = -\sqrt{3}$$

$$(c)\ 2x^2 - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(d)\ x^2 = 6 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \sqrt{6}\ ;\ x_2 = -\sqrt{6}$$

$$(e)\ (x+2)^2 = 6 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -2+\sqrt{6}\ ;\ x_2 = -2-\sqrt{6}$$

$$(f)\ x^2 - 6x + 9 = \frac{25}{4} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 3 + \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{11}{2}\ ;\ x_2 = 3 - \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(g)\ x^2 - 6x = 31 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - 6x + 9 = 40 \Longrightarrow x_1 = 3 + \sqrt{40}\ ;\ x_2 = 3 - \sqrt{40}$$

$$(h)\ x^2 + 4x = -\frac{7}{4} \quad\Longrightarrow\quad x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Longrightarrow x_1 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\ ;\ x_2 = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$(i)\ x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$$

$$(j)\ x^2 - 3x = -\frac{25}{4} \quad\Longrightarrow\quad x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -4\ :$$

Die Gleichung hat keine Lösungen

$$(k)\ 2x^2 + 4x - 7 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 4x^2 + 8x + 4 = 18 \Longrightarrow (2x+2)^2 = 18$$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{18}}{2}\ ;\ x_2 = \frac{-2-\sqrt{18}}{2}$$

$$(l)\ \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - \frac{3}{2}x = 1 \Longrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2\ ;\ x_2 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$(m)\ x^2 + 2px + q = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 + 2px + p^2 = (x+p)^2 = p^2 - q$$

$$\Longrightarrow x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}\ ;\ x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

$$(n)\ ax^2 + bx + c = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungen zu "Grundaufgaben"

1. Individuelle Lösungen

2.

(a) $x^2 - 2x - 35 = 0$	$x_1 = -5$	$x_2 = 7$
(b) $d^2 - 3d - 6 = 0$	$d_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4.37$	$d_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{2} \approx -1.37$
(c) $2x^2 + x - 10 = 0$	$x_1 = -\frac{5}{2}$	$x_2 = 2$
(d) $8x^2 - 3x = 12$	$x_1 = \frac{3+\sqrt{393}}{16} \approx 1.43$	$x_2 = \frac{3-\sqrt{393}}{16} \approx -1.05$
(e) $0.4x^2 - 3.2x + 2 = 0$	$x_1 = 4 + \sqrt{11} \approx 7.32$	$x_2 = 4 - \sqrt{11} \approx 0.68$
(f) $x^2 - x - 1 = 0$	$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$	$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$
(g) $x^2 = 3x - 1$	$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$	$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$
(h) $x(x-2) = 5$	$x_1 = \frac{2+\sqrt{24}}{2} = 1 + \sqrt{6}$	$x_2 = \frac{2-\sqrt{24}}{2} = 1 - \sqrt{6}$
(i) $(x^2 - 3)(x - 6) = x^3$	$x_1 = -2$	$x_2 = \frac{3}{2}$
(j) $(s^2 - 3)(s - 6) = 0$	$s_1 = 6$	$s_2 = \sqrt{3}$; $s_3 = -\sqrt{3}$

3. (a) Die Lösungen lauten $z_1 = \sqrt{20}$ und $z_2 = -\sqrt{20}$.
   (b) Die Lösungen lauten $z_1 = \frac{5}{6}$ und $z_2 = 72$.
   (c) Die Lösungen lauten $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$.

   Zu (a): $z^2 = 20$, dann Wurzelziehen.

   Zu (b): Ein Produkt zweier Terme ist genau dann gleich Null, wenn einer der beiden Faktoren gleich Null ist. Also $z - \frac{5}{6} = 0 \implies z = \frac{5}{6}$ oder $8 - \frac{z}{9} = 0 \implies z = 72$.

   Zu (c): Rechte Seite ausmultiplizieren, die Gleichung vereinfacht sich zu $25 = x^2$. Dann Wurzelziehen.

4.

(a)
$$\begin{aligned} x-1 &= \frac{2x+23}{x+1} \\ (x-1)(x+1) &= 2x+23 \\ x^2-1 &= 2x+23 \\ x^2-2x-24 &= 0 \\ x_1=-4 \quad &; \quad x_2=6 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \frac{42-30x}{7-x} &= 3x+6 \\ 42-30x &= (3x+6)(7-x) = -3x^2+15x+42 \\ 3x^2-45x &= 0 \\ 3x(x-15) &= 0 \\ x_1=0 \quad &; \quad x_2=15 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \frac{5x+1}{3x-1} &= \frac{x-7}{x-5} \\ x_1=-2 \quad &; \quad x_2=3 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \frac{3x-8}{2x-4} &= \frac{2x-5}{x-1} \\ x_1=3 \quad &; \quad x_2=4 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} \frac{3}{x-5}+\frac{2}{x+1}+1 &= 0 \\ \frac{3(x+1)}{(x-5)(x+1)}+\frac{2(x-5)}{(x+1)(x-5)}+\frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-5)} &= 0 \\ 3(x+1)+2(x-5)+(x-5)(x+1) &= 0 \\ x^2+x-12 &= 0 \\ x_1=-4 \quad &; \quad x_2=3 \end{aligned}$$

5. (a) Zum Beispiel $(x+1)^2 = x^2+2x+1=0$;
   (b) Zum Beispiel $(x+1)^2=-1$, also $x^2+2x+2=0$.

6. Die Lösungen lauten: $x_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-12}}{2}$.
   Für $a^2-12=0$ hat die Gleichung eine Lösung, also für $a=\pm\sqrt{12}$.
   Für $a^2-12>0$ hat die Gleichung zwei Lösungen, also für $a>\sqrt{12}$ oder $a<-\sqrt{12}$.

7. Die Lösungen der Gleichung $x^2-3x=7$ lauten $x_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}\approx 4.54$ und $x_1=\frac{3-\sqrt{37}}{2}\approx -1.54$.

Für $x < -1.54$ und für $x > 4.54$ ist die Ungleichung erfüllt.

8. Entweder gilt $x^2 - 2 = 2$ mit den Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ oder es gilt $x^2 - 2 = -2$ mit der Lösung $x_3 = 0$.

Lösungen zu "Textaufgaben"

1. Rebecca: Es gilt, die Gleichung $-0.05x^2 + x + 1.5 = 0$ zu lösen.
   Die Lösungsformel liefert $x_1 \approx 21.4$ und $x_2 \approx -1.4$.

   Der Ball von Rebekka fliegt etwa 21.4 m weit.

   Tom: Es gilt, die Gleichung $-0.08x^2 + 1.6x + 1.8 = 0$ zu lösen.
   Die Lösungsformel liefert $x_1 \approx 21.07$ und $x_2 \approx -1.07$.

   Der Ball von Tom fliegt etwa 21.1 m weit.

2. Wir nennen die zwei gesuchten Zahlen a und b. Es muss gelten

   $$a + b = 7.5 \quad \text{und} \quad a \cdot b = 14.$$

   Aus der ersten Gleichung bekommen wir $b = 7.5 - a$, eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt $a \cdot (7.5 - a) = 14$. Das ist eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $a_1 = 3.5$ und $a_2 = 4$. Daraus können wir jeweils b berechnen und bekommen $b_1 = 4$ sowie $b_2 = 3.5$.
   Die beiden Zahlen lauten 3.5 und 4.

3. Das ist im Prinzip dieselbe Aufgabe wie 2. Das Rechteck hat die Seitenlängen $l = 5 + \sqrt{20} \approx 9.47$ und $b = 5 - \sqrt{20} \approx 0.53$.

   Die Seiten des Rechteckes betragen etw 9.47 cm und 0.53 cm.

4. Das Stoffband ist x cm breit und hat nach dem Abschneiden eine Länge von $(100 - 5x)$ cm.

   Die Gleichung lautet: $x(100 - 5x) = 375$ mit den Lösungen 5 und 15.

   Das Stoffband ist entweder 5 cm oder 15 cm breit.

5. Die eine Kathete sei x cm lang, die andere misst dann $x + 5$ cm.

   Die Gleichung lautet $\frac{1}{2}x(x + 5) = 25$.

   Die eine Kathete ist 5 cm lang, die andere 10 cm. (Die zweite Lösung der Gleichung ($x_2 = -10$) macht hier keinen Sinn).

6. Hier ergeben sich die Gleichungen $a + 50 = b$ und $ab - 50 = a + b$. Einsetzen von b (aus der ersten Gleichung) in die zweite Gleichung ergibt die quadratische Gleichung $a^2 + 48a - 100 = 0$ mit den Lösungen $a_1 = 2$ und $a_2 = -50$. Daraus ergeben sich $b_1 = 52$ und $b_2 = 0$. Die gesuchten Zahlenpaare lauten 2 und 52 oder -50 und 0.

7. Die Gleichung für den Bruch x lautet: $\frac{4}{9}x + \frac{1}{2}\frac{1}{x} = 1$. Multiplizieren der Gleichung mit x und vereinfachen führt zur Gleichung $x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8} = 0$ mit den Lösungen $x_1 = \frac{3}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$. Das sind die beiden möglichen Brüche.

8. Bei zwei Gästen klirren die Gläser 1mal.
   Bei drei Gästen klirren die Gläser 3mal.
   Bei vier Gästen klirren die Gläser 6mal.
   Bei n Gästen klirren die Gläser $\frac{n(n-1)}{2}$mal.

   Es gilt also die Gleichung $\frac{n(n-1)}{2} = 253$ zu lösen.
   Wir bekommen $n_1 = 23$ und $n_2 = -22$.
   Offensichtlich waren 23 Gäste anwesend.

9. Ein Dreieck hat keine Diagonalen.
   Ein Viereck hat 2 Diagonalen.
   Ein Fünfeck hat 5 Diagonalen.
   Ein n-Eck hat $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

   Die Gleichung $\frac{n(n-3)}{2} = 350$ führt zu den
   Lösungen $n_1 = 28$ und $n_2 = -25$. Das 28-Eck hat 350 Diagonalen.

10. Ein n-Eck hat $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen und n Seiten.

    Die zu lösende Gleichung lautet: $\frac{n(n-3)}{2} = 100n$ mit den Lösungen $x_1 = 203$ und $x_2 = 0$. Das 203-Eck hat die verlangte Eigenschaft.

11. Alle Angaben in Meter.

    Sei u der Umfang des ursprünglichen Rades. Dann gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{546}{u} - \frac{546}{u+1} &= 25 \\ 546(u+1) - 546u &= 25u(u+1) \\ 546 &= 25u^2 + 25u \\ 25u^2 + 25u &= 546 \end{aligned}$$

    Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = \frac{21}{5}$ und $x_2 = -\frac{26}{5}$. Der Umfang des ursprünglichen Rades beträgt $\frac{21}{5} = 4.2$ Meter, der Radius also etwa 67 Zentimeter.

    Beim Abrollen würde sich das ursprüngliche Rad $\frac{546}{4.2} = 130$ mal drehen, das vergrösserte Rad nur $\frac{546}{5.2} = 105$ mal.

12. Alle Angaben in Zentimeter.
    Für die Kanten(-längen) des Quaders setzen wir $x - 2$, x und $x + 2$.

Für die Oberfläche gilt dann

$$\begin{aligned} 2x(x-2)+2x(x+2)+2(x-2)(x+2) &= 5758 \\ 6x^2-8 &= 5758 \\ x^2 &= 961 \\ x &= \pm 31 \end{aligned}$$

Die Kanten des Quaders messen 29, 31 und 33 cm.

13. Das Blumenbeet hat die Fäche 6 m^2. Bezeichnen wir die Breite der Einfassung mit x, so hat das Beet ohne Einfassung die Fläche $(3-2x)(2-2x)$.

    Das führt zur Gleichung

$$\begin{aligned} (3-2x)(2-2x) &= \frac{3\cdot 2}{2} \\ 6-10x+4x^2 &= 3 \\ 4x^2-10x+3 &= 0 \end{aligned}$$

    Die Lösungen dieser Gleichung sind $x_1 \approx 2.1514$ und $x_2 \approx 0.3486$. x_1 kommt wegen der Abmessungen des Blumenbeetes nicht in Frage, also ist die Einfassung etwa 34.86 cm breit.

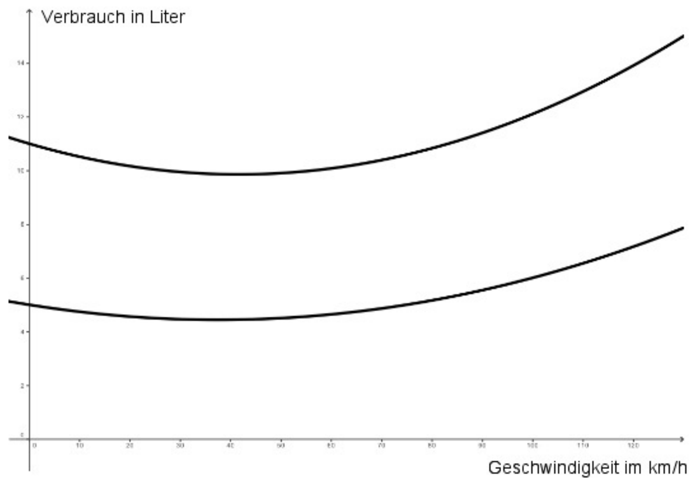
Lösungen zu "Anspruchsvolle Anwendungen quadratischer Gleichungen"

Benzinverbrauch von Autos

(a)

Audi Modell 100:	Verbrauch $b \approx 0.0004 \cdot 100^2 - 0.03 \cdot 100 + 5 = 6 \quad \text{(Liter)}$
Mercedes Modell 400 SE:	Verbrauch $b \approx 0.00066 \cdot 100^2 - 0.055 \cdot 100 + 11 = 12.1 \quad \text{(Liter)}$

(b)



(c) Löst man die Gleichung $b = 0.00066v^2 - 0.055v + 11$ nach v auf, bekommt man

$$v = \frac{1375 \pm \sqrt{55(48b - 473)}}{33}$$

Für $b = 5$ ergibt sich keine reellen Lösungen: Der Wagen braucht bei jeder Geschwindigkeit mehr als 5 Liter Benzin auf 100 km. Siehe auch die Graphik bei (b).
$b = 10 \implies v_1 \approx 26.80 \;;\; v_2 \approx 56.53$
$b = 20 \implies v_1 \approx 121.02 \;;\; v_2 \approx -112.68$

10 Liter pro 100 km braucht der Mercedes bei etwa 26.8 km/h und bei etwa 56.53 km/h, 20 Liter pro 100 km bei etwa 121 km/h.

Wie tief ist der Brunnen?

(a) Sei h die Tiefe des Brunnens. Es gilt

$$h = \frac{g}{2}u^2 = 330(1.6 - u) \quad \text{also} \quad 4.9u^2 + 330u - 528 = 0$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $u_1 \approx 1.56369$ und $u_2 \approx -68.91063$.
Einsetzen von u_1 ergibt $h = \frac{g}{2}u^2 \approx 11.98$.
Der Brunnen ist knapp 12 m tief.

(b) Mit $t = 1.5$ (statt $t = 1.6$) ergibt sich die Tiefe $h_1 \approx 10.56$, für $t = 1.7$ findet man $h_2 \approx 13.49$. Das sind jeweils rund 1.5 Meter Abweichung von genauen Wert!

(c) Die Gleichung $\frac{g}{2}u^2 = 330(3 - u)$ hat die Lösungen $u_1 \approx 2.877$ und $u_2 \approx -70.224$. Mit u_1 findet man die Tiefe 40.558 m.

(d) Aus $50 = 4.9u^2$ folgt $u \approx 3.1944$. Aus $50 = 330(t - 3.1944)$ ergibt sich $t \approx 3.3459$. Man wird eine Zeit von etwa 3.35 Sekunden messen.

Der Goldene Schnitt:

Aufgabe: Die Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ und $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$.
Eine Strecke der Länge 1 wird im Goldenen Schnitt geteilt, wenn der grössere der beiden Teilabschnitte circa 0.618 lang ist.

Lösungen zu "Ergänzung: Der Satz von Vieta"

1.
   (a) Die Lösungen stimmen.
   (b) Die Lösungen stimmen.
   (c) Die Lösungen stimmen nicht.
   (d) Die Lösungen stimmen.
   (e) Die Lösungen stimmen.

2. $x_1 \cdot x_2 = 72$. Die zweite Lösung lautet 9.

Kommentare

Das vorliegende Unterrichtsmaterial umfasst zwei Seiten Lernumgebung und 19 Seiten Arbeitsheft.

Das Thema "Quadratische Gleichungen" kann sowohl im Klassenverband wie auch im Selbststudium bearbeitet werden.

Wichtiger Hinweis: Es ist nicht die Meinung, das vorliegende Unterrichtsmaterial vollständig und in der angegebenen Reihenfolge durchzuarbeiten. Vielmehr ist eine sinnvolle Auswahl aus den vorgegebenen Kapiteln zu treffen.

Kommentare zur Lernumgebung

Die Seite 1 enthält ein einführendes Beispiel, welches zu einer quadratischen Gleichung führt: Um die Wurfweite des Balles von Rebekka zu finden, muss für den quadratischen Ausdruck $-0.05x^2 + x + 1.5$ ein x so gefunden werden, dass der Ausdruck gleich Null wird.

Zur Aufgabe (e) (*): Mit leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern kann die Frage diskutiert werden, wie man den "Abstand" zweier Funktionen festlegen könnte: Wer hat die beste Approximation der "richtigen" Funktion $y = -0.08x^2 + 1.6x + 1.8$ gefunden?

Auf der zweiten Seite der Lernumgebung wird zuerst eine geometrische Lösungsmethode (nach René Descartes) für die Gleichung $x^2 + bx = c$ vorgestellt.
Die Berechnung der Strecke $x = BE$ führt eigentlich schon zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Im Arbeitsheft wird an diese Aufgabe angeknüpft.

Kommentare zum Arbeitsheft

Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen

Im ersten Teil wird eine genaue Definition quadratischer Gleichungen gegeben.

Unter einer Äquivalenzumformung versteht man eine Umformung einer Gleichung, welche die Lösungsmenge der Gleichung unverändert lässt.
Elementare Umformung sind: - Addition desselben Ausdrucks auf beiden Seiten
- Subtraktion desselben Ausdrucks auf beiden Seiten
- Multiplikation mit demselben Ausdruck (ungleich null) auf beiden Seiten
- Division durch denselben Ausdruck (ungleich null) auf beiden Seiten
- Vertauschen beider Seiten.

Anschliessend wird der Zusammenhang zwischen quadratischen Funktionen und quadratischen Gleichungen erläutert. Es ist nicht beabsichtigt, an dieser Stelle die ganze Theorie quadratischer Funktionen abzuhandeln, das kann später geschehen. Vielmehr geht es darum zu verstehen, warum ein quadratische Gleichung eine, zwei oder keine Lösung haben kann.

Zur Aufgabe 2: Hier kann der Computer sinnvoll eingesetzt werden: GeoGebra oder ein anderes Programm, mit dem Funktionsgraphen gezeichnet werden können.

Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Geometrisches Lösen von quadratischen Gleichungen

Vor dem Aufkommen der modernen Algebra wurden quadratische Gleichungen geometrisch gelöst. Da Strecken nur positive Längen haben, waren die Griechen und Babylonier zu Fallunterscheidungen gezwungen. Jede quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ kann auf einen der fünf vorgestellten Fälle zurückgeführt werden. Für die Fälle (1), (2), (3) und (5) wird ein Lösungsverfahren vorgestellt, eines davon findet sich auf Seite 2 der Lernumgebung.

Bemerkung: Der in diesem Abschnitt erläuterte geometrische Zugang zu quadratischen Gleichungen kann in Ergänzung zum rein algebraischen Zugang zu einem vertiefteren Verständnis des Themas führen.

Quadratisches Ergänzen 1

Das Prinzip des quadratischen Ergänzens wird mit der (Hälfte der) Abwicklung eines Quaders mit quadratischer Grundfläche illustriert.

Quadratisches Ergänzen 2

Mit einer geeigneten Folge von Aufgaben werden die Lernenden Schritt für Schritt in die Kunst der quadratischen Ergänzens eingeführt.

Quadratisches Ergänzen 3

Für diejenigen, die dem geometrischen Ansatz misstrauen, wird anschliessend die quadratische Gleichung in Standardform, also $ax^2 + bx + c = 0$ rein algebraisch mit dem Verfahren des "quadratischen Ergänzens" gelöst.

Bemerkung: Es ist nicht notwendig, alle drei Zugänge zum quadratischen Ergänzen zu behandeln. Am Schluss sollte jedoch stets die allgemeine Lösungsformel stehen.

Für eine noch detailliertere Herleitung der Lösungsformel siehe z.B. das ETH-Leitprogramm von Prof. Dr. Urs Kirchgraber, das auch elektronisch vorliegt.
(http://www.educ.ethz.ch/lehrpersonen/mathematik/unterrichtsmaterialien)

Aufgaben

Grundaufgaben

Hier geht es um das Anwenden der Lösungsformel.

Textaufgaben

Die aufgeführten Textaufgaben führen zu quadratischen Gleichungen.

Anspruchsvolle Anwendungen

Anspruchsvolle Anwendungen, die auf quadratische Gleichungen führen.

Ergänzung: Der Satz von Vieta

Zum Abschluss wird der Satz von Vieta und Anwendungen davon behandelt.

Weitere Quellen:

http://www.educ.ethz.ch/lehrpersonen/mathematik/ (Abruf: 5.8.2008)
Dann Link "Unterrichtsmaterialien" unter "Arithmetik und Algebra"
(Ein Leitprogramm der ETH Zürich)

Zur Auflösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$
PM Heft 7 | Februar 2006 | 48. Jg.

Rainer Kaske, *Quadratische Gleichungen bei Al-Khwarizmi*,
in: mathematik lehren 91, S. 14-18 (Friedrich Verlag, 1998)
oder im Internet unter http://www.raikas.net/alkh.html