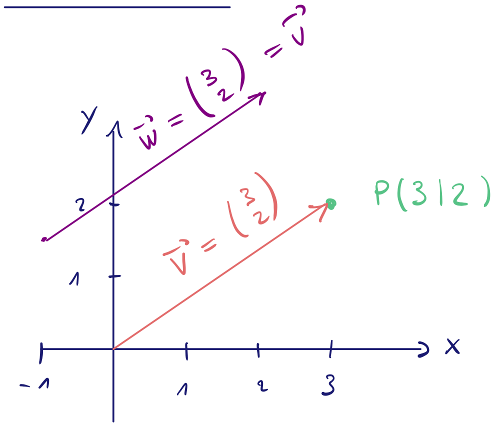
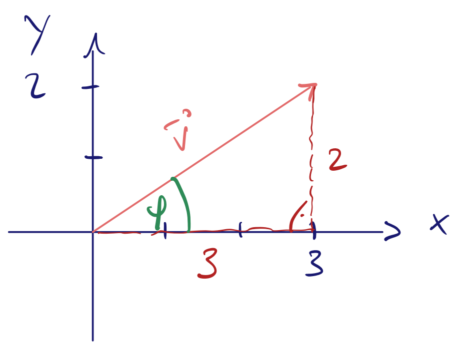
VEKTOREN



Def: Ein Vektor ist eine Schar von "Pfeilen", die dieselbe Richtung und dieselbe Länge haben.

Wie beschreibt man Vektoren?

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ oder



$\tan^{-1}(\,) \mathrel{\hat{=}} \arctan(\,)$

Länge: $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$

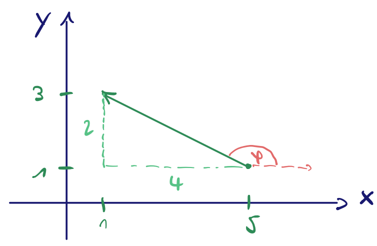
Richtung: $\tan(\varphi) = \frac{2}{3}$

$\rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33.6°$

Konvention: Richtung bezüglich positive x-Achse gemessen

→ Skript lesen bis p. 8 und Üb 2

(1)

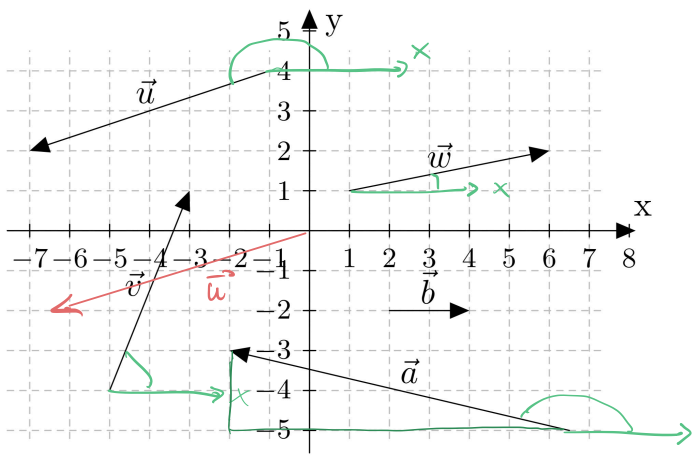


Länge: $\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$

Richtung: $\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx 180° - 26.6°$

$= \underline{\underline{153.4°}}$

(2)



z.B. $\vec{a}$:

Länge: $\sqrt{8.5^2+2^2} = \sqrt{76.25}$

$\approx \underline{\underline{8.7}}$

Richtung:

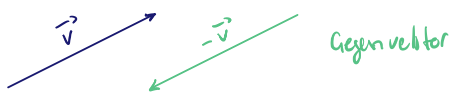
$\tilde{\varphi} = \arctan\left(\frac{2}{8.5}\right)$

$\approx \underline{\underline{13.2°}}$

$\rightarrow \varphi \approx 180° - 13.2° = \underline{\underline{166.8°}}$

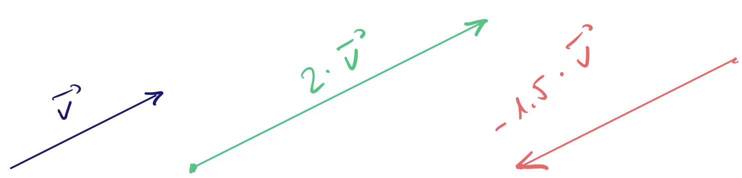
Betrag $\hat{=}$ Länge

Gegenvektor



S-Multiplikation

(Multiplikation mit einem Skalar)



Strecken

Stauchen

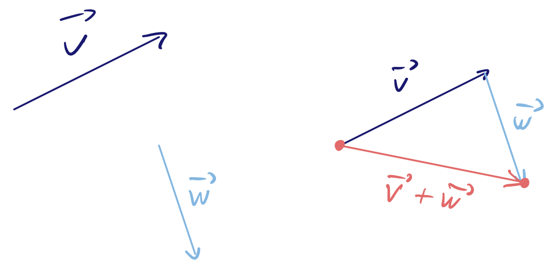
"es gibt"

Def: Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heissen kollinear, wenn $\exists t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\vec{v} = t \cdot \vec{w}$ (Parallelität)

Addition von Vektoren

$\vec{v} + \vec{w}$

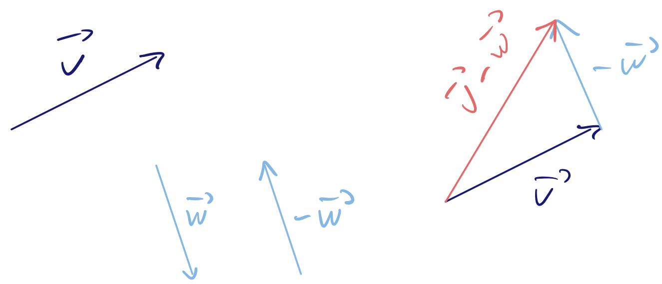


Subtraktion von Vektoren

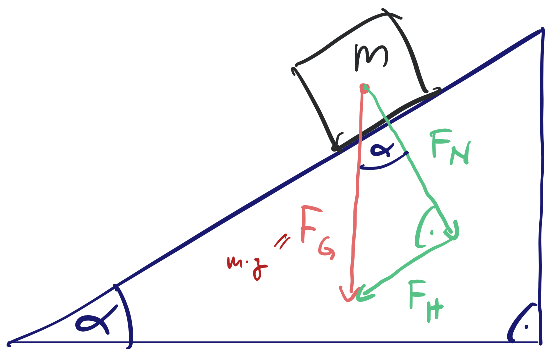
$\vec{v} - \vec{w}$

$=$

$\vec{v} + (-\vec{w})$

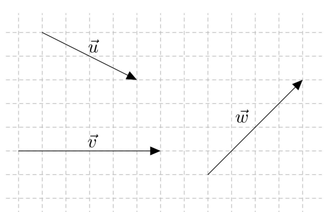


Beispiel Kräftezerlegung:



→ Üb 5

Übung 5 (Pfeilchen zeichnen)**.** Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$.



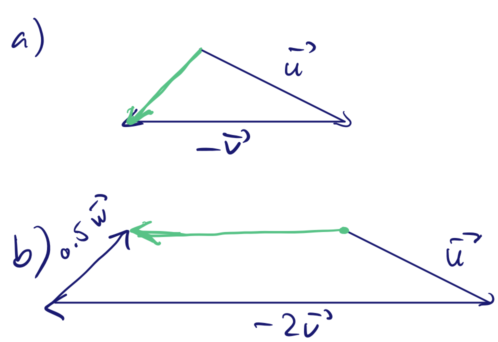
Konstruiere

(a) $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$

(b) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + 0.5\vec{w}$

(c) $\vec{b} = 3\vec{u} + 1.5\vec{v} - 4\vec{w}$

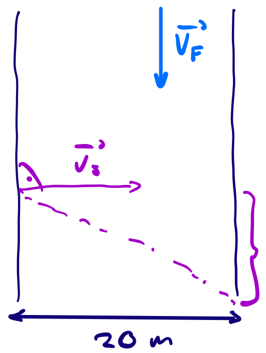
(d) $\vec{c}$ so, dass $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{c} = \vec{w}$ gilt.



. . . . . .

bis Aufgabe 8 ...

Übung Fluss



$|\vec{v_F}| = 1.2\ m/s$

$|\vec{v_S}| = 1.5\ m/s$

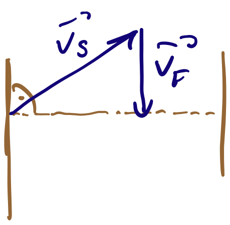
Schnellster Weg

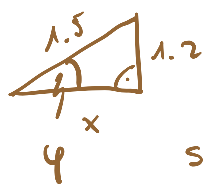
$$v = \frac{s}{t} \iff t = \frac{s}{v} = \frac{20}{1.5} = 13\tfrac{1}{3} \text{ sek}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = v \cdot t = 1.2 \cdot 13\tfrac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{40}{3} = 16 \text{ m}$$

Abdrift



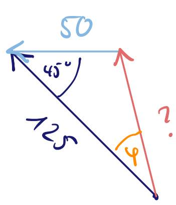


$$\sin(\varphi) = \frac{1.2}{1.5} \implies \varphi = \arcsin\left(\frac{1.2}{1.5}\right) \approx 53^\circ$$

$$x = \sqrt{1.5^2 - 1.2^2} = 0.9\ m/s$$

$$\implies t = \frac{20}{0.9} \approx 22\tfrac{2}{9} \text{ sek}$$

Flugzeug



Cossatz: $x^2 = 50^2 + 125^2 - 2 \cdot 50 \cdot 125 \cdot \cos(45°)$

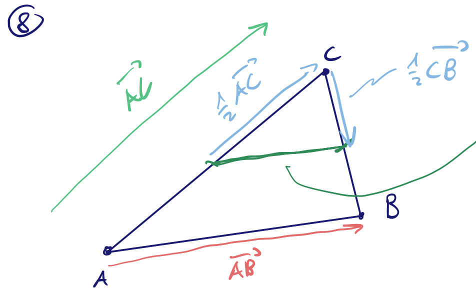
$= 50^2 + 125^2 - 12500 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow \quad x = 96.4\ \frac{km}{h}$

Sinsatz: $\frac{\sin(45°)}{x} = \frac{\sin(\varphi)}{50} \iff \varphi = \arcsin\left(\frac{50 \cdot \sin(45°)}{x}\right)$

$\approx 21.5° \rightarrow$ N23.4°W

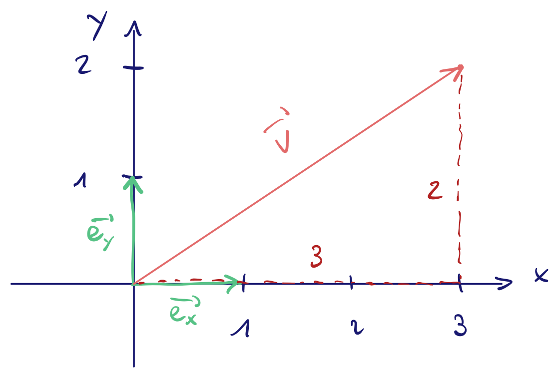
⑧



$$\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{CB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\vec{AB}$$

d.h. die Mittellinie ist halb so und parallel zur Grundlinie □

Vektoren im Koordinatensystem



Basisvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$

$(|\vec{e_x}| = 1 = |\vec{e_y}|)$

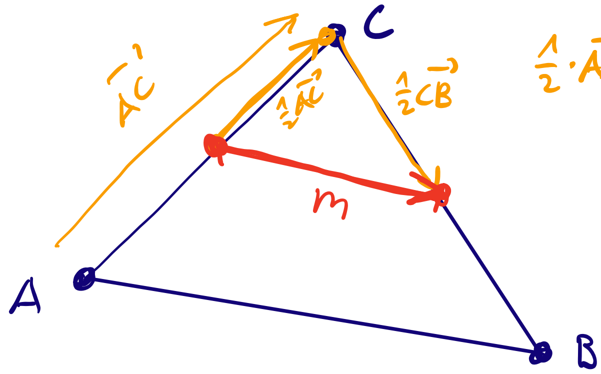
$$\rightarrow \quad \vec{v} = \underbrace{3 \cdot \vec{e_x} + 2 \cdot \vec{e_y}}_{\text{Linearkombination}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ Üb ⑨, ⑩*

→ ⑪ und ⑫ und ⑬

⑧ Die Seitenmitten sind halb so lang wie die Grundlinien.

Entweder verwendet man ein direktes Ähnlichkeits-/Streckungsargument, oder:



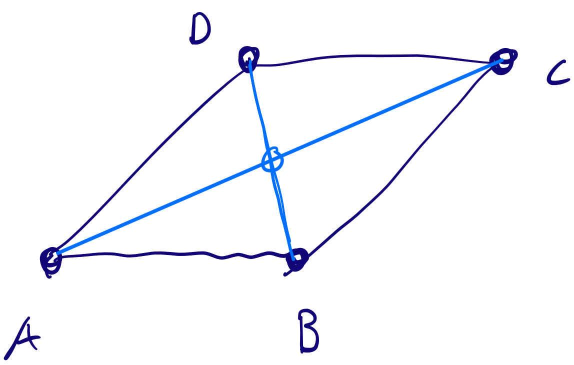
$$\frac{1}{2}\cdot\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC}+\vec{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\vec{AB} = \vec{m} \qquad \square$$

Grundlinienvektor

also ist $\vec{m}$ halb so lang und parallel zu $\vec{AB}$

⑨



Voraussetzung:
4-Eck und die beiden Diagonalen halbieren sich

Zeige: Dann muss es sich bei diesem Viereck um ein Parallelogramm handeln.

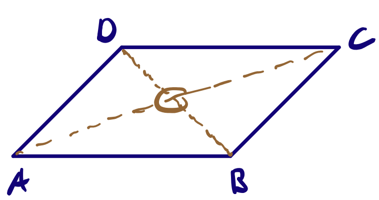
z.B. $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB}$

$$\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{AC} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB} = \vec{AB}$$

also sind DC und AB parallel und gleich lang. $\square$

⑩



Parallelogramm (Voraussetzung)

z.z.: Diagonalen halbieren sich

Wir wissen, dass z.B. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Es ist $\vec{AB} = x \cdot \vec{AC} + y \cdot \vec{DB}$ und

$$\vec{DC} = (1-y) \cdot \vec{DB} + (1-x) \cdot \vec{AC}$$

Somit $\underline{x \cdot \vec{AC}} + \underline{y \cdot \vec{DB}} = \underline{(1-x) \cdot \vec{AC}} + \underline{(1-y) \cdot \vec{DB}}$

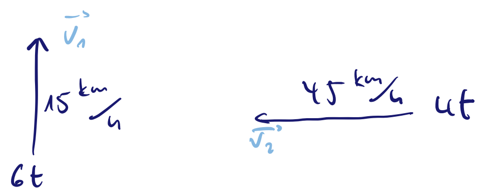
$\Rightarrow \quad x = 1-x \quad$ und $\quad y = 1-y$

$$2x = 1 \qquad\qquad 2y = 1$$

$$x = \tfrac{1}{2} \qquad\qquad y = \tfrac{1}{2} \qquad\qquad \square$$

D.h. die Diagonalen halbieren sich.

(11)



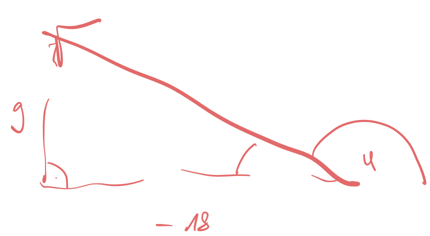
Skript lesen! $\rightarrow$ Def Impuls und Satz Impulserhaltung

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{vor} = m_1 \cdot \vec{v_1} + m_2 \cdot \vec{v_2} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underset{\uparrow\, 6+4}{10} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -180 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -180 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\, v_x \\ 10\, v_y \end{pmatrix}$$



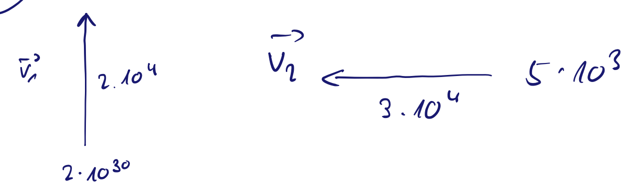
$\Rightarrow \quad v_x = -18 \;, \quad v_y = 9$

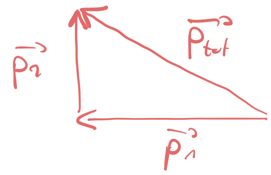
$$\underline{\underline{\vec{v} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix}}} \quad \rightarrow |\vec{v}| \approx 22 \tfrac{km}{h}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{18^2 + 9^2}}}$$

$$\varphi = 180° - \arctan\left(\tfrac{9}{18}\right) \approx \underline{\underline{157°}}$$

(12)





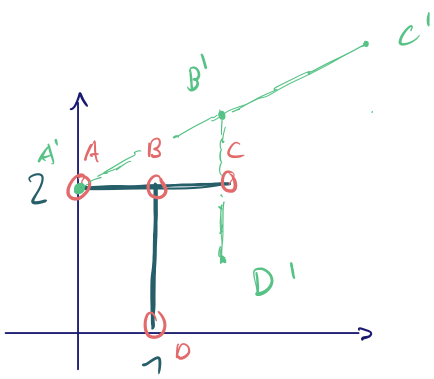
$$\vec{p}_{vor} = 2\cdot10^{30}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\cdot10^4\end{pmatrix} + 5\cdot10^{30}\cdot\begin{pmatrix}-3\cdot10^4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\cdot10^{34}\\4\cdot10^{34}\end{pmatrix}$$

$\hat{=}\ 7\cdot10^{30}$

$$\vec{p}_{nach} = 7\cdot10^{30}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \overset{!}{=} 7\cdot10^{30}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2\frac{1}{7}\cdot10^4\\\frac{4}{7}\cdot10^4\end{pmatrix}}_{\vec{v}'\text{ nachher}} \approx \begin{pmatrix}-21428\\5714\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow |\vec{v}'|$ und φ

(13)



$\vec{A} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 0\cdot\vec{e_x} + 2\vec{e_y}$

$\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{e_x} + 2\vec{e_y}$

$\vec{C} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\vec{e_x} + 2\cdot\vec{e_y}$

$\vec{D} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{e_x} + 0\cdot\vec{e_y}$

$\rightarrow\ \vec{A'} = 0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

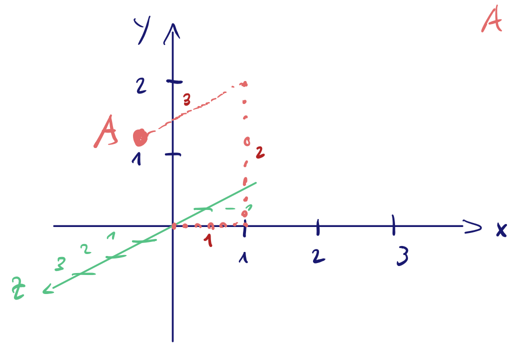
$\vec{B'} = 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{C'} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

$\vec{D'} = 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

VEKTOREN 3D

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$



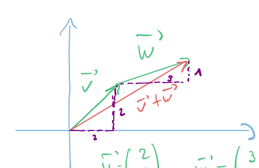
$A(1|2|3)$

Alles wie im 2D:

λ : lambda

z.B. S-Multiplikation $\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \\ \lambda v_z \end{pmatrix}$

Addition: $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$

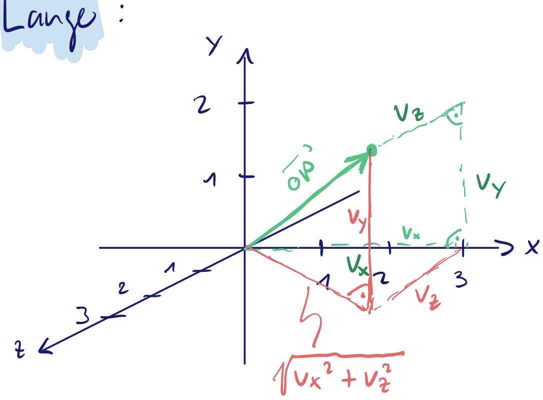


$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 2+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

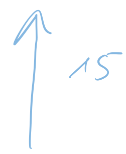
Länge:



$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P(3|2|2)$

$$|\vec{OP}| = \sqrt{v_y^2 + \sqrt{v_x^2 + v_z^2}^{\,2}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$



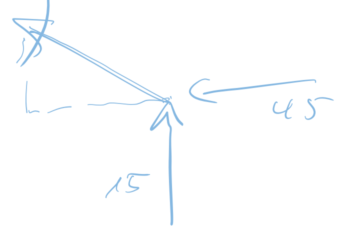
$$\vec{p}_{vor} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -180 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -180 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{nach} = 10 \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -180 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$



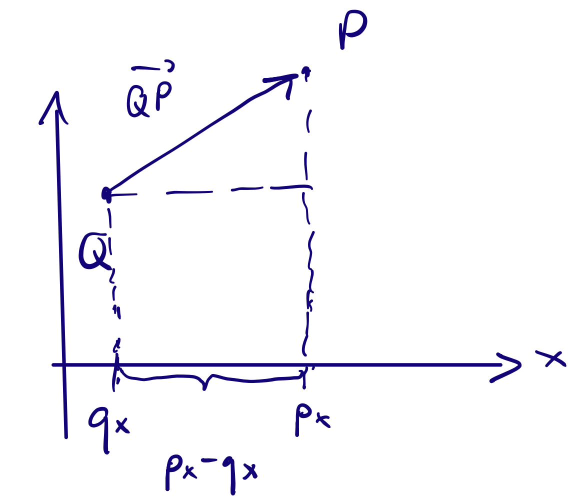
$$\Rightarrow \begin{aligned} -180 &= 10 v_x \\ 90 &= 10 v_y \end{aligned}$$

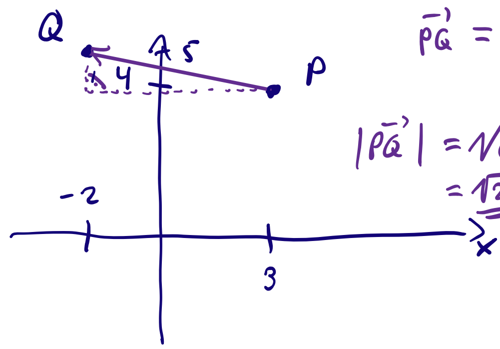
$$\vec{v}_{nach} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$|\vec{v}|$

$$\frac{-15 \cdot 10^{34}}{7 \cdot 10^{30}}$$

Übungen bis p. 28 (Kap. 6 1x überfliegen)

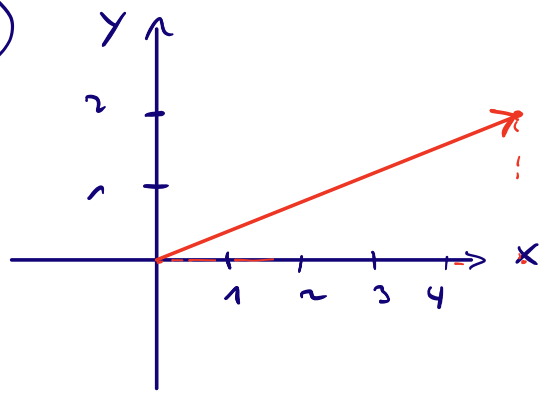




$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

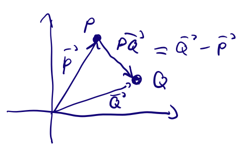
$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2}$
$= \sqrt{26}$

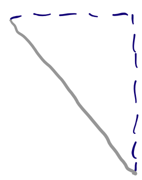
15

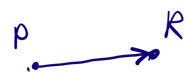


$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) $\vec{QP} = P - Q = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$







$\vec{PR} = R - P = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

17

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{e_x} + \ldots + v_z \vec{e_z}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} w \\ \vdots \end{pmatrix} = w_x \cdot \vec{e_x} + \ldots + w_z \vec{e_z}$

$\vec{v} + \vec{w} = v_x \vec{e_x} + \ldots + w_z \vec{e_z}$

$(v_x + w_x) \cdot \vec{e_x} + (v_y + w_y) \vec{e_y}$

$= \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}$

$v_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$

(18) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \vec{v} + 2\vec{w} - 0.5\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Länge : $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}} \approx 3.7$

(19) ja, $3 \cdot \vec{v} = \vec{w}$

$3 \cdot \vec{v} = \vec{w}$, also ja

$\boxed{\lambda \cdot \vec{v}, = \vec{w}}$

$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{w}$

b) nein, wegen $\lambda \cdot v_x = u_x$ muss $\lambda = -\frac{1}{2}$, aber $-\frac{1}{2} \cdot v_z \neq w_z$.

(20) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow 4 \cdot v_x = w_x \rightarrow \vec{w} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix}}}$

b) $\rightarrow (-\frac{1}{3}) \cdot v_y = w_y \rightarrow (-\frac{1}{3}) \cdot \vec{v} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}}}$

(21) $P(10|-6|7)$, $Q(2|-2|8) \rightarrow \vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}} \rightarrow \vec{QP} = (-1) \cdot \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $|\vec{PQ}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{81} = \underline{\underline{9}}$

c) $\vec{PR} = R - P = \begin{pmatrix} x-10 \\ -1+6 \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-10 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

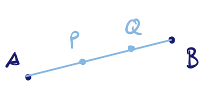
$\rightarrow |\vec{PR}| = \sqrt{(x-10)^2 + 5^2 + 2^2} \overset{!}{=} 15$

$$(x-10)^2 + 25 + 4 = 225$$
$$x^2 - 20x + 100 + 29 = 225$$
$$x^2 - 20x - 96 = 0$$
$$(x-24)(x+4) = 0 \quad \rightarrow x_1 = 24, \quad x_2 = -4 \quad \rightarrow \underline{\underline{R\,(24|-1|5)}}$$

(23) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = Q - P$ und $Q(-3|-5|2)$

$\rightarrow P = Q - \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}}$

(24) $A(-9|15|-2)$, $B(-12|-6|4)$



$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Koords $\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

$$\vec{Q}' = \vec{A}' + \tfrac{2}{3}\vec{AB}' = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

(25) $P(x|0|0)$ mit $|\vec{AP}| = 2 \cdot |\vec{BP}|$

$\rightarrow \quad \vec{AP} = \begin{pmatrix} x-12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{BP} = \begin{pmatrix} x-15 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\sqrt{(x-12)^2 + 12^2 + 6^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-15)^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$(x-12)^2 + 12^2 + 6^2 = 4 \cdot \left[(x-15)^2 + 6^2 + 3^2 \right]$$

$$x^2 - 24x + 144 + \cancel{144} + \cancel{36} = 4x^2 - 120x + 900 + \cancel{144} + \cancel{36}$$

$$0 = 3x^2 - 96x + 756 \quad \rightarrow \quad x_1 = 18, \; x_2 = 14$$

$\rightarrow$ Es gibt 2 Möglichkeiten: $P_1\underline{\underline{(18|0|0)}}$ und $P_2\underline{\underline{(14|0|0)}}$

(26) ausprobieren: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \vec{AB}$

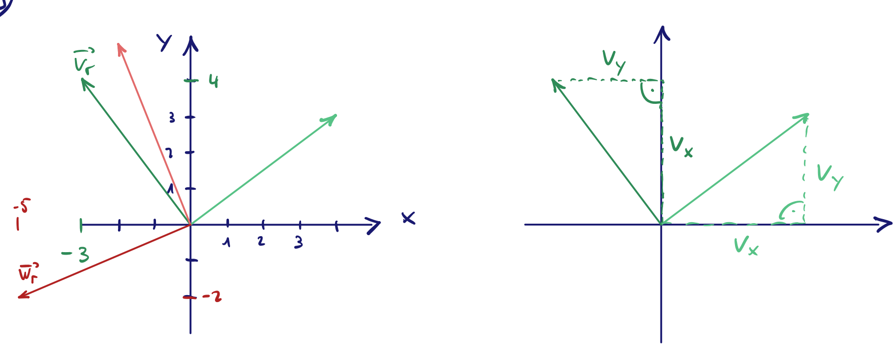
$\rightarrow$ d.h. die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind parallel und gleich lang. Dies impliziert den gleichen Fact für die beiden andern Seiten.

(27) $A(2|-5)$, $B(-6|7)$ $\Rightarrow$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\vec{M} = \vec{A} + \tfrac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) wie (26) und (27a)

(28) Verwende die Resultate von früher (ca. Üb (10)) und rechne.

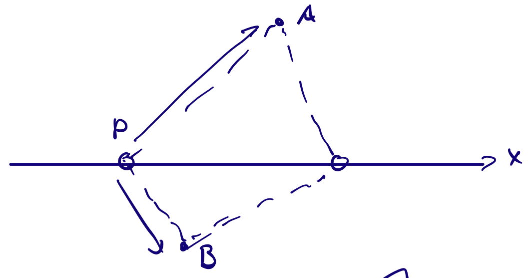
(29)

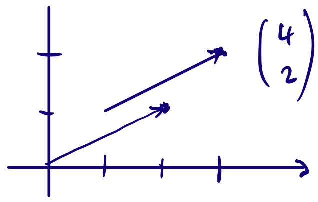


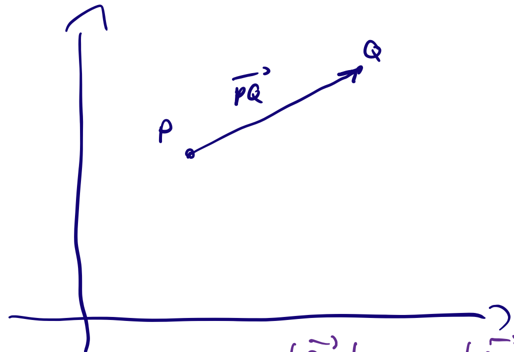
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ $\curvearrowright$ $\vec{v_r} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}}}$

(30) Nichts für faule Leute mit wenig Geduld.

26



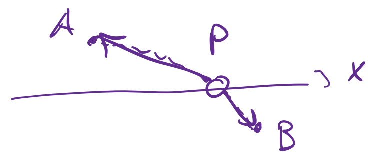




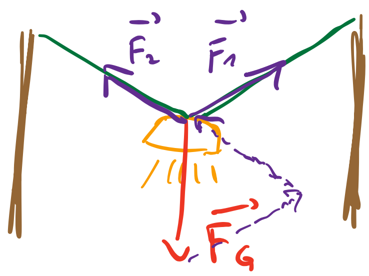
$|\overrightarrow{PA}| = 2 \cdot |\overrightarrow{PB}|$

$$2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 - x \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 15 - x \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$2 \cdot \sqrt{(12-x)^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{}$$

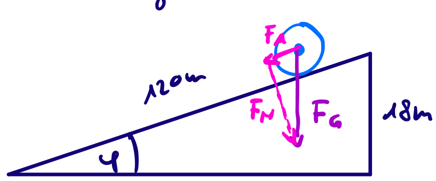


Kräfte :

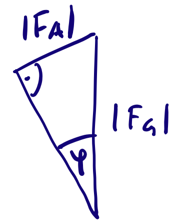


$$\vec{F_G} + \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$$

Aufgabe Lastwagen



$$\sin(\varphi) = \frac{18}{120} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{3}{20}\right)$$

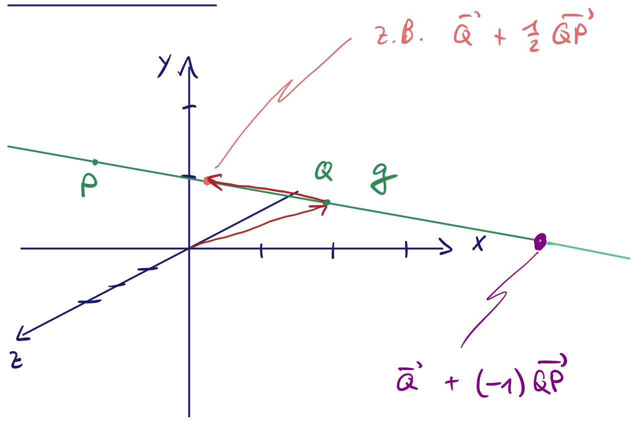


$|F_G| = 42 \text{ kN}$ $\qquad \vec{F_G} = \vec{F_A} + \vec{F_N}$

$$\sin(\varphi) = \frac{|F_A|}{|F_G|}$$

$$|F_A| = |F_G| \cdot \sin(\varphi) = 42'000 \cdot \frac{3}{20} = \underline{\underline{6'300\ N}}$$

GERADEN



$g_t: \vec{Q} + t \cdot \overrightarrow{QP} \qquad t \in \mathbb{R}$

Allgemein : $\quad g_t: \vec{P} + t \cdot \vec{r} \qquad t \in \mathbb{R}$

(Parameterform der Geraden)

$\vec{P}$: Stützvektor

$\vec{r}$: Richtungsvektor

(60) a) $g_t: \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h_s: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Gegenseitige Lage ?

Parallel ? Nein $\quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6+4t \\ 1 \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2s \\ 1 \\ 9-3s \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad 6+4t = 2+2s \qquad (1)$

$\quad\;\; 3+5t = 9-3s \qquad (2)$

aus (1): $\quad 4+4t = 2s \quad |:2$

$\quad 2+2t = s$

in (2): $\quad 3+5t = 9-3(2+2t)$

$\quad 3+5t = 3-6t$

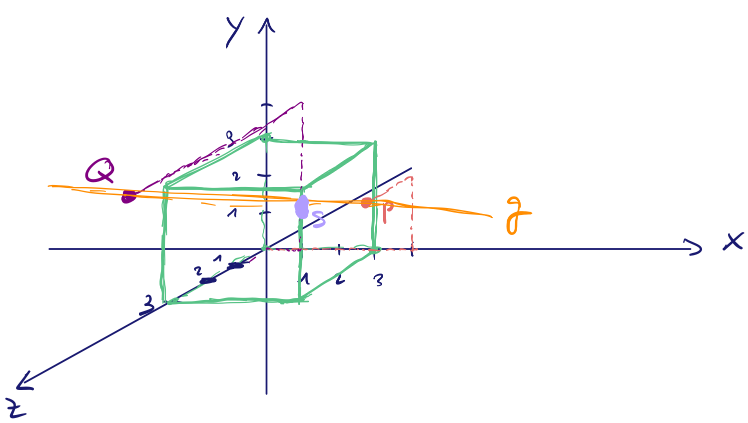
$\quad 11t = 0$

$\quad t = 0 \quad \rightarrow \quad s = 2$

1280 x 800

$\rightarrow g_0: \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h_2: \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S(6|1|3)}}$

(54) Würfel Kantenlänge 3 $\quad P(4|2|2) \quad Q(1|4|5)$



Sehe ich von P aus den Punkt Q oder liegt der undurchsichtige Würfel dazwischen?

$\rightarrow$ Trifft die Gerade durch P und Q die Frontfläche des Würfels?

$\rightarrow$ Geradengleichung: $g_t: \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{PQ}} = \begin{pmatrix} 4-3t \\ 2+2t \\ 2+3t \end{pmatrix}$

Frontfläche : $z = 3$

$$\Rightarrow \quad 2 + 3t \stackrel{!}{=} 3$$

$$3t = 1$$

$$t = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad g_{1/3} : \begin{pmatrix} 3 \\ 2^{2/3} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad S(3 \mid 2\tfrac{2}{3} \mid 3)$$

→ d.h. man sieht den Punkt Q von P aus nicht.

60 Gegenseitige Lage von Geraden

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad g: \vec{p} + t \cdot \vec{r}$

Parallel ? $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

d.h. nicht parallel

Schnittpunkt ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - t = 3 + 2s \qquad (1)$$

$$2t = 1 - s \qquad (2)$$

$$2 + t = 3s \qquad (3)$$

(2) : $2t = 1 - s \quad | + s$

$$2t + s = 1 \quad | - 2t$$

$$s = 1 - 2t$$

in (1) : $1 - t = 3 + 2 \cdot (1 - 2t)$

$$1 - t = 3 + 2 - 4t \quad | + 4t$$

$$1 + 3t = 5 \quad | - 1$$

$$3t = 4 \quad /:3$$

$$t = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad s = 1 - 2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$$

$t = \frac{4}{3} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}}}$$

$\times$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \\ -15/3 \end{pmatrix}}}$$

d.h. es gibt keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind zueinander windschief.

c) $$\begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

parallel ? $\rightarrow$ nein $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} -5 + 2t &= 2 + 3s && (1) \\ 10 - 3t &= 2 - 2s && (2) \\ t &= 7 + 5s && (3) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ (3) in (1):

$$\begin{aligned} -5 + 2 \cdot (7 + 5s) &= 2 + 3s \\ -5 + 14 + 10s &= 2 + 3s && /-3s \\ 9 + 7s &= 2 && /-9 \\ 7s &= -7 && /:7 \\ s &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad t = 7 + 5 \cdot (-1) = \underline{\underline{2}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

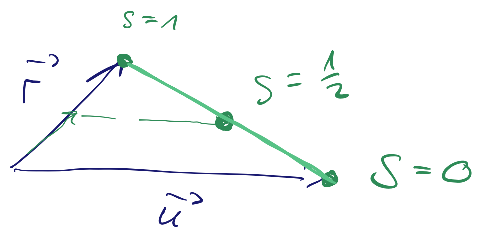
$\shortparallel$

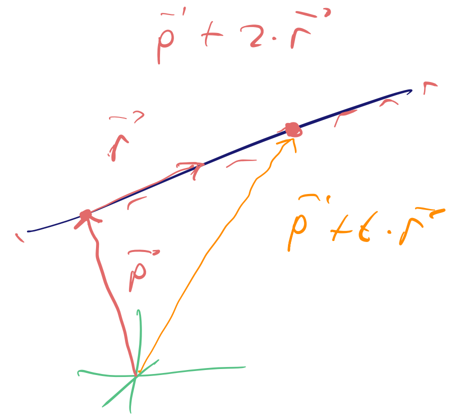
$$\begin{pmatrix} 2 \\ \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

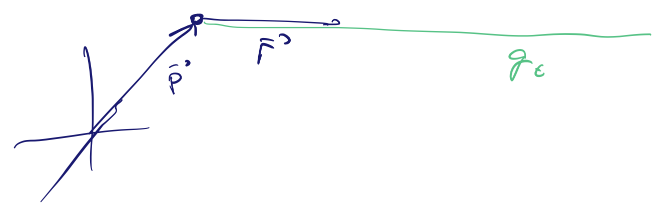
d.h. die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $\underline{\underline{\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}}}$.

62 c)





a)



$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \underline{\underline{t}}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

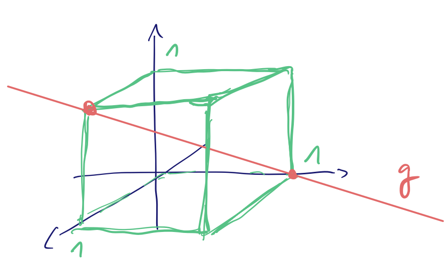
$0 = 1+4t \quad \rightarrow \quad t=-\frac{1}{4}$

$-2 = 2+5t$

$\vec{p}+t\cdot\vec{PQ} \qquad t\in\mathbb{R}$

$-4 = 3+6t$

59

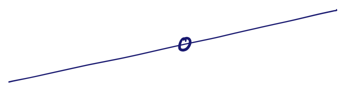


z.B. $g_t: \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

oder $g_t: \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

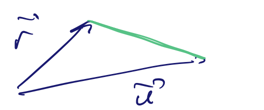
oder $g_t: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\\-5\end{pmatrix}$

62 b)



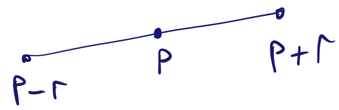
gelochte Gerade (bei $\vec{p}$)

c) Strecke zwischen $\vec{r}$ und $\vec{u}$



d) Strecke zwischen $\vec{p}-\vec{r}$ und $\vec{p}+\vec{r}$

da $\sin(t) \in [-1, 1]$ $\forall t \in \mathbb{R}$



63 $g: t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$ $R(3|0|0)$

$\rightarrow \vec{RG} = \begin{pmatrix}t-3\\t\\t\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{RG}| = \sqrt{(t-3)^2+t^2+t^2} = \sqrt{3t^2-6t+9}$

min $\sqrt{}$ $\rightarrow$ min Radikand $3t^2-6t+9$ $(t \geq 1)$

Ist eine Parabel $\rightarrow$ Scheitelpunkt $\rightarrow t_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 3} = 1$

$\Rightarrow P_{min} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}$

64 $t=1$ $P_1(5|-4|7)$, $t=3$ $P_3(1|2|4)$

$\rightarrow g_t$: $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{P_1P_3}$, dann hat man den Geschwindigkeits-Vektor pro Sekunde

$\rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix}$

→ Ich würde jetzt den Stützvektor zum Zeitpunkt $t=0$ wählen:

$\rightarrow \vec{P_0} = \vec{P_1} - \vec{r} = \begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix}}}$

$\Rightarrow g_t: \underline{\underline{\begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix}}}$

xz-Ebene $\rightarrow y=0 \rightarrow -7+3t = 0$

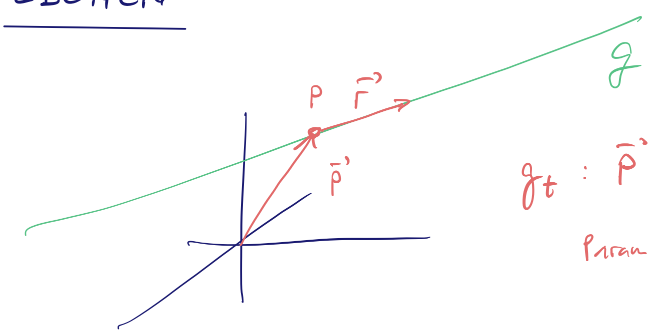
$3t = 7$

$t = \frac{7}{3}$ $\rightarrow$: $\begin{pmatrix}7\\-7\\ \ldots\end{pmatrix} + \frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix}-2\\3\\ \ldots\end{pmatrix}$

c – /3 $\quad$ 7 ⅔ · (8.5) · 3 (−3/2)

=

EBENEN

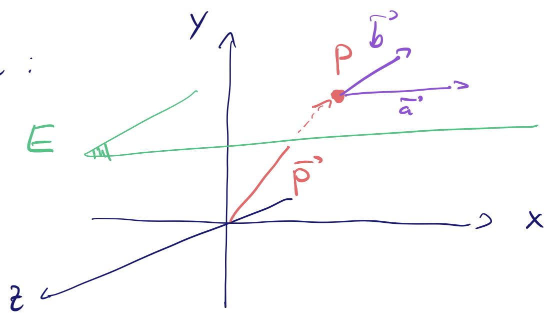


(Gerade)

$g_t : \vec{p} + t \cdot \vec{r} \qquad t \in \mathbb{R}$

Param. form der Gerade

Für Ebene :

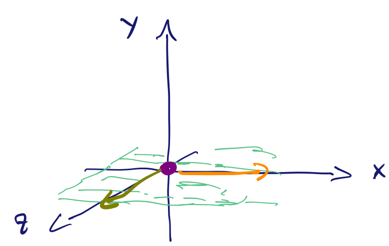


$E_{s,t} : \vec{p} + s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$

Stützvektor

Spannvektoren

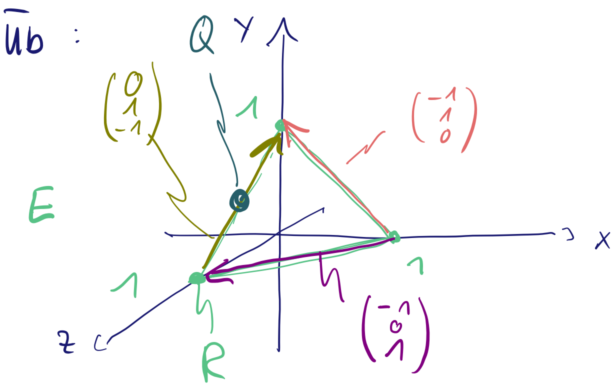
Beispiel : xz - Ebene



$\rightarrow E_{s,t} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Üb :



$E_{s,t} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

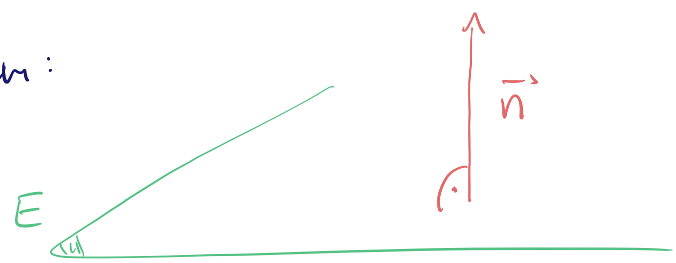
Üb: Bestimme eine Parameterform der xy-Ebene:

z.B. $\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}}$

VEKTORPRODUKT

Bem:

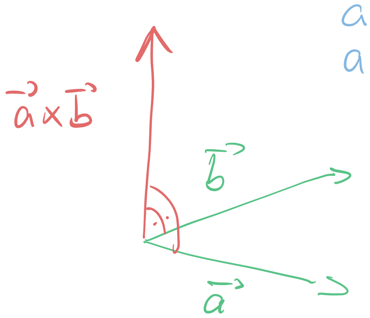
$\vec{n}$: Normalenvektor von E



Vektorprodukt / Kreuzprodukt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liefert einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ steht.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_y b_z - a_z b_y\\a_z b_x - a_x b_z\\a_x b_y - a_y b_x\end{pmatrix}$$

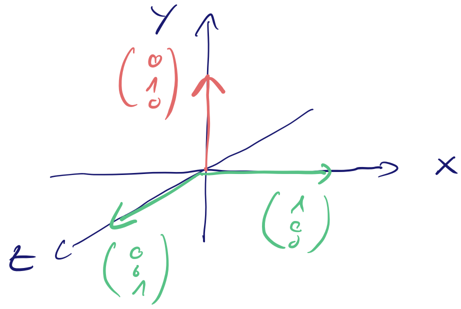
$$\begin{array}{ccc} a_x & & b_x \\ a_y & & b_y \end{array}$$



Üb: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot0 - 1\cdot0\\1\cdot1 - 0\cdot0\\0\cdot0 - 0\cdot1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}}$

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}$



Das Vektorprodukt ist $\underline{\text{nicht}}$ kommutativ!

($\rightarrow$ 3-Finger-Regel - rechte-Hand: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$)

Zeigefinger Mittelfinger Daumen

Üb: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

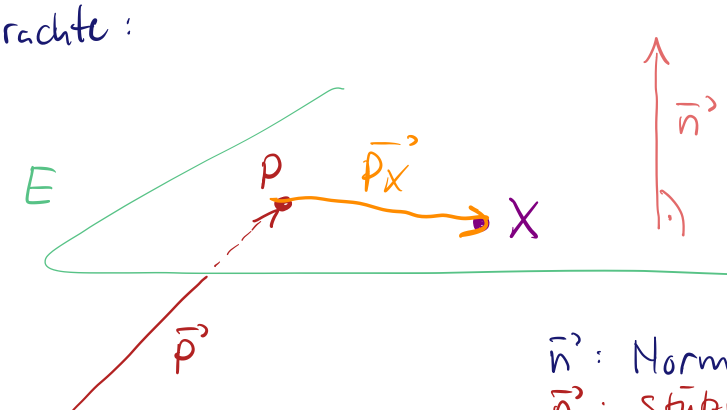
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$

Finde einen Normalenvektor der Ebene E gegeben durch die Punkte $(1|0|0)$, $(0|1|0)$, $(0|0|1)$ mit den Spannvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

Betrachte:



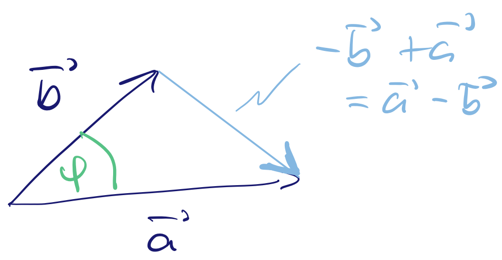
$\vec{n}$: Normalenvektor von E

$\vec{p}$: Stützvektor

Welche Beziehung gibt es, für einen beliebigen Punkt X in der Ebene, zwischen $\vec{PX}$ und $\vec{n}$?

→ $\vec{PX}$ steht immer senkrecht auf $\vec{n}$ (ausser für P = X)

→ Wie berechne ich den Winkel zwischen 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?



φ ?

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi)$ (Allg △)

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

φ ausrechnen : $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$$\left| \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$\underbrace{(a_x - b_x)^2}_{\cancel{a_x^2} - 2a_xb_x + b_x^2} + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$\cancel{a_x^2} - 2a_xb_x + b_x^2 + \ldots + \cancel{b_z^2} = \cancel{a_x^2} + \ldots + \cancel{b_z^2} - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$-2a_xb_x - 2a_yb_y - 2a_zb_z = -2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi) \qquad /:(-2)$$

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$$

$$\rightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\text{oder} \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

Def. : $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z =: \vec{a} \cdot \vec{b}$
(Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

Satz : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

Bsp: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

Satz : $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff \vec{v} \perp \vec{w}$

Beweis: Nach Def ist $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$

Es gelte $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = 0$

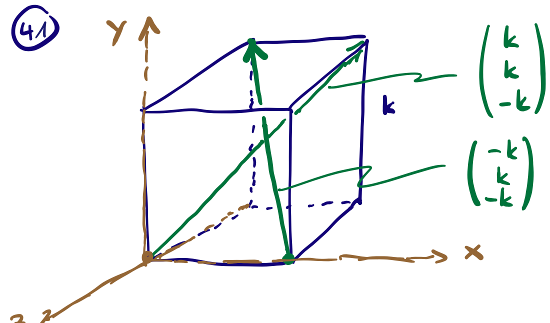
$\Rightarrow \cos(\varphi) = 0$, da $|\vec{v}| \neq 0 \neq |\vec{w}|$

$\Rightarrow \varphi = \arccos(0) = 90°$, also $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Sei umgekehrt $\vec{v} \perp \vec{w}$, d.h. Zwischenwinkel $90°$

$\Rightarrow |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(90°) = 0$, d.h. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ $\square$

(41)



$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$

$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \cos(\varphi)$

$$\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right) = \gamma$$

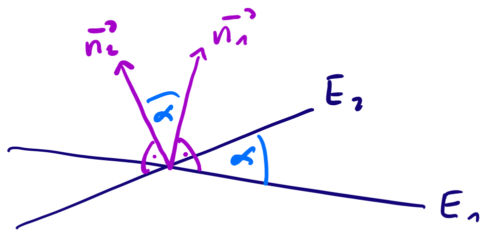
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -k \\ k \\ -k \end{pmatrix} = -k^2 + k^2 + k^2 = k^2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + k^2 + (-k)^2} = \sqrt{3k^2} = \sqrt{3}\,k = |\vec{w}|$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{k^2}{\sqrt{3}k\cdot\sqrt{3}k}\right) = \arccos\left(\frac{\cancel{k^2}}{3\cancel{k^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\approx \underline{\underline{70^\circ}}$$

(45)



grün $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$

blau $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix} = 0 + k^2 + 0 = k^2$$

$$|\vec{n_1}| = \sqrt{k^2 + k^2 + 0} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}\,k = |\vec{n_2}|$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{\cancel{k^2}}{2\cancel{k^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60^\circ}}$$

Übung (46) ...

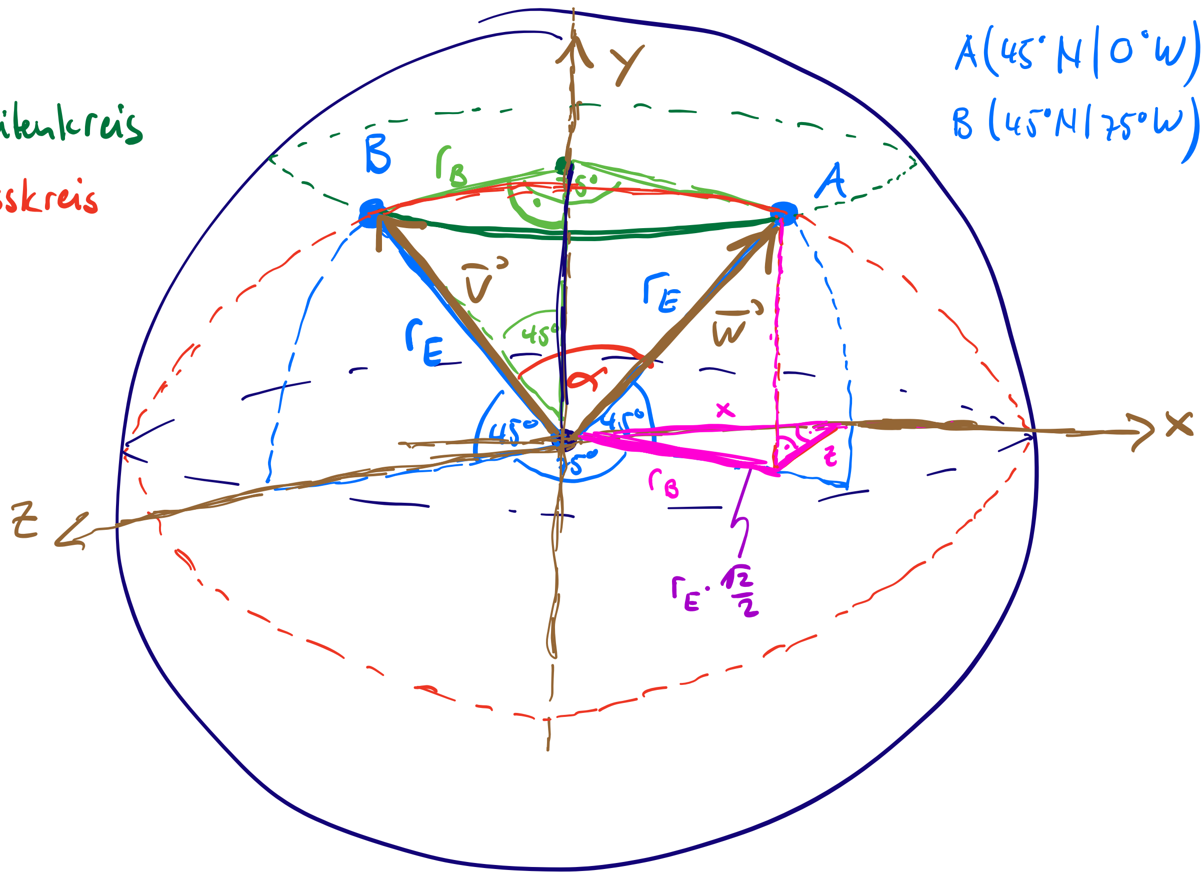
43

Breitenkreis

Grosskreis

$A(45°N|0°W)$

$B(45°N|75°W)$



Es ist $\sin(45°) = \frac{r_B}{r_E}$

$\Rightarrow r_B = r_E \cdot \sin(45°) = 6370 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Weg Breitenkreis : $\cancel{2}\pi \cdot 6370 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{75°}{360°} = \underline{\underline{5896 \text{ km}}}$

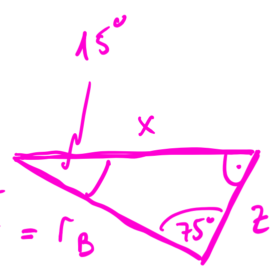
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zum Grosskreis :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ r_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} r_E \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(75°) \\ r_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ r_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(75°) \end{pmatrix}$$

$r_E \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = r_B$



$\sin(75°) = \frac{x}{r_B}$

$x = r_B \cdot \sin(75°)$

$z = r_B \cdot \cos(75°)$

$$\vec{v}' \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} r_E \\ \frac{\sqrt{2}}{2} r_E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} r_E \sin(75°) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} r_E \\ \frac{\sqrt{2}}{2} r_E \cdot \cos(75°) \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + \frac{r_E^2}{2} + \frac{r_E^2}{2} \cos(75°) = \frac{r_E^2}{2}\left(1 + \cos(75°)\right)$$

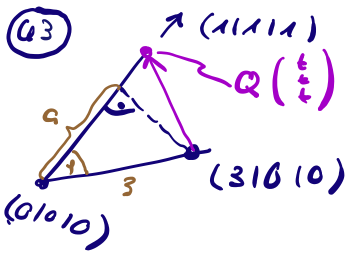
$$|\vec{v}'| = r_E = |\vec{w}'|$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\frac{\cancel{r_E^2}}{2}\left(1+\cos(75°)\right)}{\cancel{r_E^2}} \right) = \arccos\left(\frac{1+\cos(75°)}{2} \right)$$

$\rightarrow$ Längs Grosskreis: $2\pi \overbrace{r_E}^{6370} \cdot \dfrac{\arccos\left(\frac{1+\cos(75°)}{2}\right)}{360°}$

$$\approx \underline{\underline{5669 \text{ km}}}$$

Q3



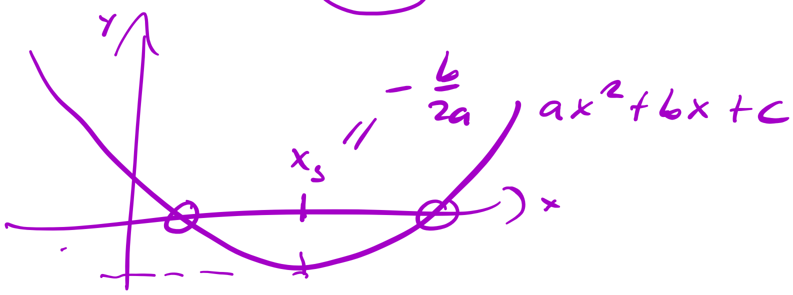
$$\varphi = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot \sqrt{3}} \right)$$

$\cos(\varphi) = \frac{a}{3}$ $\qquad\qquad \left| t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = a$

oder: $\begin{pmatrix} t-3 \\ t \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{|()|} \sqrt{(t-3)^2 + t^2 + t^2}$ minimieren

$= \sqrt{3t^2 - 6t + 9}$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



KOORDINATENGLEICHUNG

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

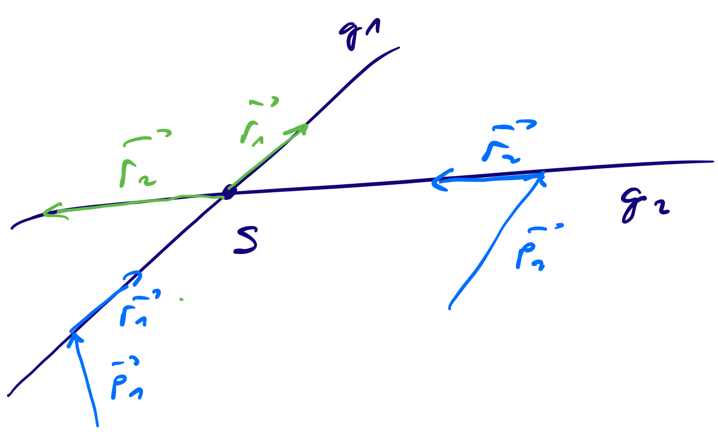
$$\begin{pmatrix} 2 + t + 2s \\ 2 - 2t + 5s \\ 1 + 3t + 7s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad x = 2 + t + 2s \quad (1)$$

$$y = 2 - 2t + 5s \quad (2)$$

$$z = 1 + 3t + 7s \quad (3)$$

Reduziere auf eine Gleichung ohne Parameter s und t.



$E: \vec{s} + t \cdot \vec{r_1} + s \cdot \vec{r_2}$

(1) & (3) s elim. $\Rightarrow$ (4)

(2)
(4) $\rightarrow$ t elim.

(4) in (2) : $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z - 1\right)$

$y = \frac{5}{3}x + \frac{5}{2}z - 5 \qquad | - y$

$E: \; 0 = \frac{5}{3}x - y + \frac{5}{2}z - 5$

$T \in E$? $\quad \frac{5}{3} \cdot (-12) - (15) + \frac{5}{2} \cdot 4 - 5 =$

$-20 - 15 + 10 - 5$

Koordinatenform

$E: \; Ax + By + Cz + D = 0$

Betrachte : $P \in E \rightarrow Ap_x + Bp_y + Cp_z + D = 0$

$Q \in E \rightarrow Aq_x + Bq_y + Cq_z + D = 0$

$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}$

Bastle $\vec{n} := \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ und rechne :

$\vec{n} \cdot \vec{PQ} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}$

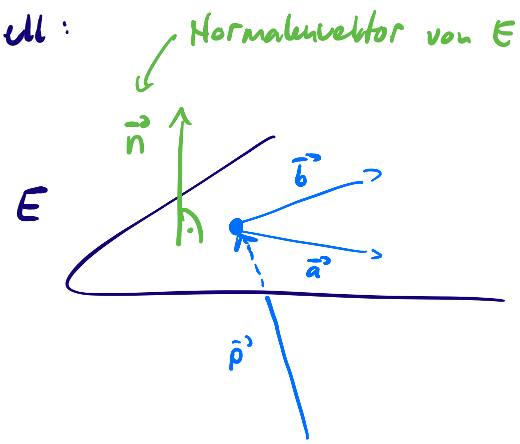
$= A \cdot (q_x - p_x) + B(q_y - p_y) + C \cdot (q_z - p_z)$

$$= \underbrace{Aq_x + Bq_y + Cq_z}_{-D} - (\underbrace{Ap_x + Bp_y + Cp_z}_{-D})$$

$$= -D - (-D) = 0$$

d.h. $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$.

Visuell :



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$E \cdot \ \vec{p} + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

$E: \ Ax + By + Cz + D = 0$

$E: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ Koordinatenform ?

$$\rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 - 15 \\ 6 - 7 \\ 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & \quad & 2 \\ -2 & & 5 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad E: \ -29x - y + 9z + D = 0$$

$$P \in E: \ -29 \cdot 2 - 2 + 9 \cdot 1 + D = 0$$

$$-51 + D = 0$$

$D = 51$

$E: -29x - y + 9z + 51 = 0 \quad /(-1)$

$29x + y - 9z - 51 = 0$

bis 74

73 a)

Koordform von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 - 8 \\ -20 - 9 \\ 6 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -29 \\ 41 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -5 \\ 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow 13x - 29y + 41z + D = 0$

$P \in E$: $13 \cdot 1 - 29 \cdot 2 + 41 \cdot 6 + D = 0$

$D = -201$

$\Rightarrow E: 13x - 29y + 41z - 201 = 0$

$g \cap E$: $13 \cdot (6 - 4t) - 29 \cdot (4 + 3t) + 41 \cdot (-5 + 7t) - 201 = 0$

$78 - 52t - 116 - 87t - 205 + 287t - 201 = 0$

$-444 + 148t = 0$

$148t = 444$

$t = 3$

$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}}}$

(38) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$

z.B. mit Satz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

$\rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 28 + 3u_y + 8u_z \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -35 + 20u_y + 9u_z \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$

aus (1): $3u_y = -28 - 8u_z$

$u_y = \frac{-28 - 8u_z}{3}$

in (2): $-35 + 20 \cdot \frac{-28 - 8u_z}{3} + 9u_z = 0 \qquad / \cdot 3$

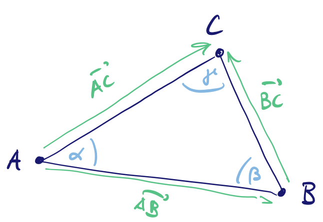
$-105 + 20(-28 - 8u_z) + 27u_z = 0$

$-665 - 133u_z = 0 \qquad / +133u_z$

$-665 = 133u_z \qquad / : 133$

$-5 = u_z \quad \Rightarrow \quad u_y = \frac{-28 - 8 \cdot (-5)}{3} = 4 \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

(40) $A(2|1|-3), \ B(-3|0|1), \ C(7|-19|-1)$



$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AB}| = \sqrt{42}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AC}| = \sqrt{429}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{465}$

$\rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}\right) \qquad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -25 + 20 + 8 = 3$

$= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{429}}\right) \approx \underline{\underline{88.7^\circ}}$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}\right) \qquad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 50 - 19 + 8 = 39$

$= \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{465}}\right) \approx \underline{\underline{73.8^\circ}} \qquad \rightarrow \quad \gamma = 180^\circ - 88.7^\circ - 73.8^\circ = \underline{\underline{17.5^\circ}}$

(49) v ist die kurze Schreibweise für $|\vec{v}|$

a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 0-6 \\ 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\rightarrow |\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx \underline{\underline{14.14}}$

Ferner: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$, $|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

Winkel: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 5$

$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{5 \cdot 3}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5°$

Fläche: $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(70.5°) \approx 5 \cdot 3 \cdot 0.94 = 14.14$ ✓

$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{k \cdot k}{2 \cdot 2}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} k/2 \\ k \\ -\frac{k}{2} \end{pmatrix}$

$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k^2 + \left(-\frac{k}{2}\right)^2}$

$\sqrt{\frac{k^2}{4} + k^2 + \frac{k^2}{4}}$

(44) z.B. Ursprung Koordsys links/vorne/unten

$\rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} k/2 \\ k \\ -k/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} k \\ k/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}k = \frac{k}{2}$

$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4}$

$\frac{k}{2} \cdot \frac{k}{2}$

$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$

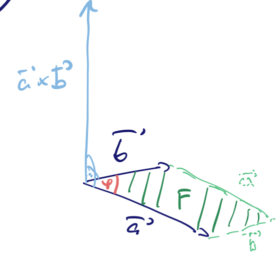
$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} k/2 \\ k \\ -k/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2} + 0 = k^2$

$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{k^2}{4} + k^2 + \frac{k^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}k^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,k$

$|\vec{w}| = \sqrt{k^2 + \frac{k^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}k^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}\,k$

$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\cancel{k^2}\ 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\cancel{k} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}\,\cancel{k}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}}\right) \approx \underline{\underline{43.1°}}$

(50)

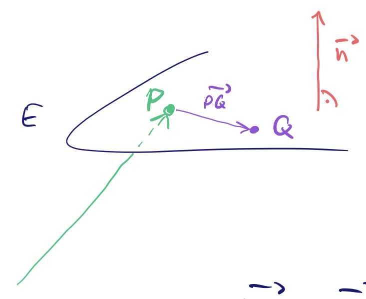


Fläche = Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$

$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

Länge $\vec{a}$ mal Länge $\vec{b}$ mal Sinus ihres Zwischenwinkels φ.

Gerade schneidet Ebene



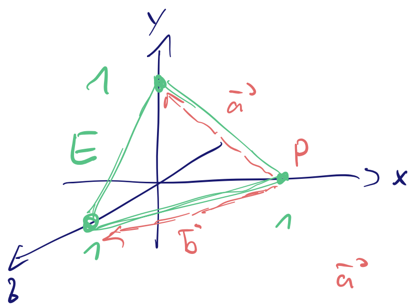
$\vec{p}$: Stützvektor

$\vec{n}$: Normalenvektor von E

Q : beliebiger Punkt in E

$$\rightarrow \quad \vec{PQ} \cdot \vec{n} = 0 \quad , \text{ da } \vec{PQ} \perp \vec{n} .$$

Beispiel : Ebene durch (1|0|0), (0|1|0), (0|0|1)



$\rightarrow$ Parameterform :

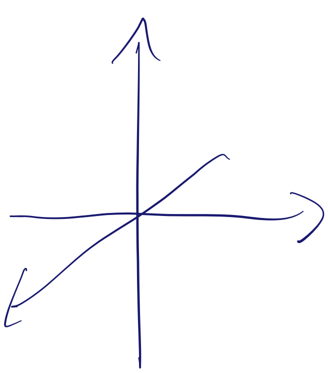
$$\text{z.B. } E : \underset{P}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + s \cdot \underset{\vec a}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + t \cdot \underset{\vec b}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \underset{\vec a}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \times \underset{\vec b}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \underset{\vec n}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\quad -1 \quad\quad -1$
$\quad 1 \quad\quad 0$

$$\rightarrow \quad \vec{Q} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad : \quad \vec{PQ} \cdot \vec{n} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$



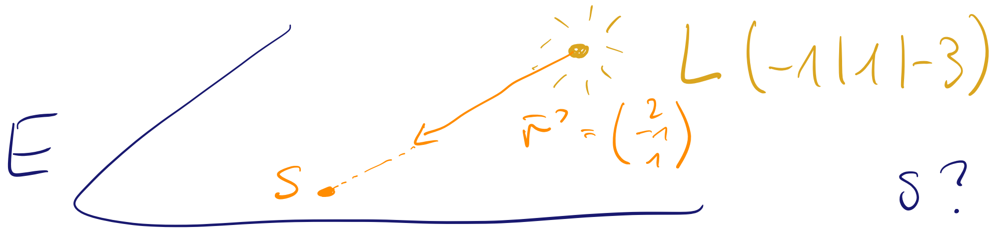
$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 0$$

$$E : \quad x + y + z - 1 = 0$$

(Koordinatengleichung von E)

$1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$
$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0$
$D = -1$



S ?

Lichtstrahl : $l_t : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2t \\ 1 - t \\ -3 + t \end{pmatrix}$

$l_t \in E \qquad t ? \quad : \quad (-1+2t) + (1-t) + (-3+t) - 1 = 0$

$$-1 + 2t + 1 - t - 3 + t - 1 = 0$$
$$2t - 4 = 0$$
$$2t = 4$$
$$t = 2$$

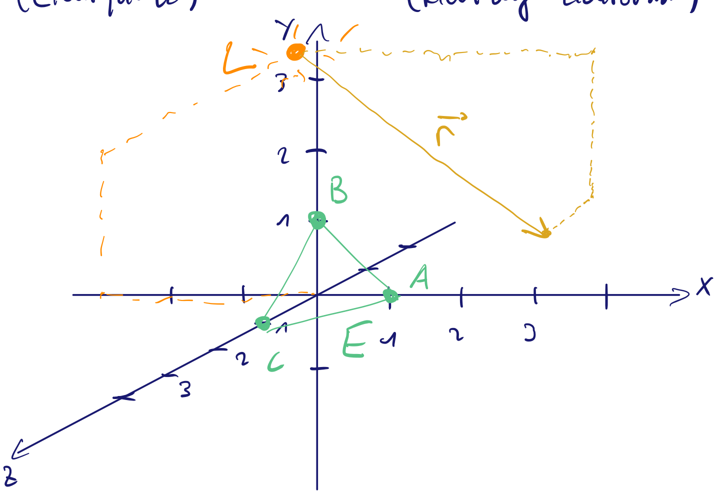
$$\rightarrow \quad S = l_2 = \begin{pmatrix} -1 + 4 \\ 1 - 2 \\ -3 + 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

Üb : 77, 78, 82, 85, 86, 90, 91

Reflexion

L(-3|2|-4) , $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Lichtquelle) (Richtung Lichtstrahl)



(Ebene)

A(1|0|0) , B(0|1|0) , C(0|0|1)

Zuerst : Wo schneidet der Lichtstrahl $l : \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Ebene E ?

Koordinatenform von E?

Parameterform: $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

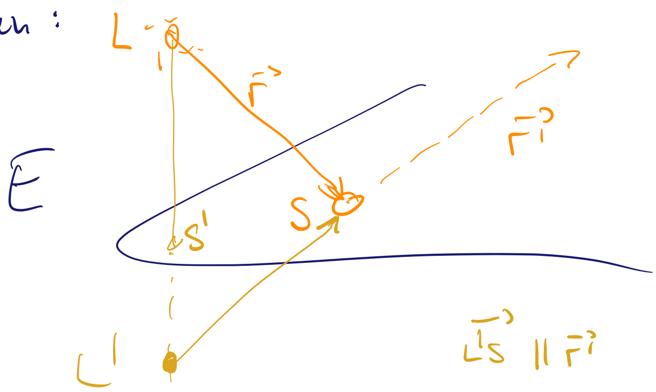
$\rightarrow 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + D = 0$

$A \in E: \quad 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0$

$D = -1$

$\rightarrow E: \quad x + y + z - 1 = 0$

Vorgehen:



d.h. wir gehen von L aus senkrecht auf die Ebene $\rightarrow$ S' und dann nochmal so weit weiter $\rightarrow$ L'

Auch S berechnen und dann $\vec{L'S}$ bilden.

Los geht's: S? $\rightarrow \; l: \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cap E: x+y+z-1=0$

$\rightarrow (-3+4t) + (2-2t) + (-4+2t) - 1 = 0$

$-6 + 4t = 0$

$4t = 6$

$t = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'? Gerade senkrecht auf E : $\ell': \begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Schnitt mit E (S') : $(-3+t)+(2+t)+(-4+t)-1 = 0$

$$-6+3t = 0$$
$$3t = 6$$
$$t = \underline{2} \Rightarrow S'$$

$2\cdot\underline{2}$

$\rightarrow L' = \begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Richtung der Reflexion: $\overrightarrow{L'S} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}2\\-7\\-1\end{pmatrix}}$

Reflektierter Lichtstrahl: $\vec{S} + t\cdot\overrightarrow{L'S} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-7\\-1\end{pmatrix}}}$

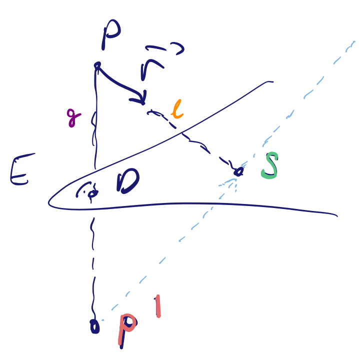
(77) $P(4|5|-1)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0.5\end{pmatrix}$, xy-Ebene $\rightarrow E: z = 0$ ← Koordinatengleichung klar, da Punkte in der xy-Ebene die Form $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ haben.

$\rightarrow \ell: \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0.5\end{pmatrix}$ („Lichtgerade")

Wo schneidet Gerade ℓ die Ebene E? $\rightarrow z = 0 \Rightarrow S$

$\ell \cap E$: $-1 + 0.5t = 0 \iff t = 2 \rightarrow S = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}}}$

P spiegeln : $g: \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Gerade durch P senkrecht auf E



$\rightarrow g \cap E$: $-1 + t = 0 \iff t = 1$

Schnittpunkt D von g mit E: $z=0 \Rightarrow D$

$\rightarrow D = \ldots$

Reflexion: $2\cdot 1$

$\rightarrow P' = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}}}$

$\overrightarrow{P'S}$ hat die Richtung der Reflexion

Richtung Reflexion : $\overrightarrow{P'S} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix}}}$

Zusatzaufgabe:

Abstand P zu E? P senkrecht zu E messen $D = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow |\overrightarrow{PD}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \underline{\underline{1}}$

Länge von $\overrightarrow{PD}$ ist der Abstand von P zu E.