

5 Bruchterme

Ergebnisse mit Nennern sind generell als *ein* Bruch anzugeben, wobei der Zähler und der Nenner ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist.

5.1 Kürzen und Erweitern

Kürzen: Zähler und Nenner eines Bruches durch denselben Divisor dividieren.

Erweitern: Zähler und Nenner eines Bruches mit demselben Faktor multiplizieren.

$$\frac{at}{bt} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, t \neq 0)$$

Zu 1–12: Bestimme den ggT und das kgV der untereinander stehenden Polynome.

Bemerkung: Als ggT von z. B. $6a$ und $-8a$ kann man sowohl $2a$ als auch $-2a$ angeben. Bei jedem ggT und kgV zweier Polynome gibt es in diesem Sinn zwei entgegengesetzte Möglichkeiten; im Lösungsteil unseres Buches ist jeweils nur eine davon angegeben.

- | | | | | |
|---|---------------------------|---------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| 1 | a) $\frac{6d}{4d}$ | b) $\frac{-9xy}{45xz}$ | c) $\frac{p^6}{p^4}$ | d) $\frac{18a^2bc^3}{8ab^4}$ |
| 2 | a) $\frac{uv}{vw}$ | b) $\frac{6n^6}{9n^9}$ | c) $\frac{15m^2}{-8mq}$ | d) $\frac{9r^2s^2t}{36r^2s^3}$ |
| 3 | a) $\frac{a}{a+b}$ | b) $\frac{4i+4}{5i+5}$ | c) $\frac{4c^2-6cd}{2c}$ | d) $\frac{3x-3y}{y-x}$ |
| 4 | a) $\frac{z}{z^2-3z}$ | b) $\frac{15t-25}{-6t+10}$ | c) $\frac{5p}{p+5}$ | d) $\frac{u^2+uv}{u^2-uv}$ |
| 5 | a) $\frac{h^2-h}{h-h^2}$ | b) $\frac{abc+b^2c}{a^2b+ab^2}$ | c) $\frac{x^2-y^2}{2x-2y}$ | d) $\frac{n^3-4n}{n^3+2n^2}$ |
| 6 | a) $\frac{6p-9}{4p^2-6p}$ | b) $\frac{8uv}{8u-20v}$ | c) $\frac{s-s^2}{s^3-s}$ | d) $\frac{e^2-f^2}{(e-f)^2}$ |

- | | | | |
|----|--|---|---|
| 7 | a) $\frac{r^2-8r+15}{-r^2-r+12}$ | b) $\frac{x(x+y)+x^2-y^2}{4x^2-4xy+y^2}$ | c) $\frac{am+an-bm-bn}{m^2-n^2+m+n}$ |
| 8 | a) $\frac{z^2-8z+16}{wz-4w-3z+12}$ | b) $\frac{(2c-18)^2}{c^2-7c-18}$ | c) $\frac{u^3-v^3}{-u^2+v^2}$ |
| 9 | a) $\frac{6a^2b}{15a^3b^2}$
$\frac{18a^4b^4}{18a^4b^4}$ | b) $\frac{2t-5}{10-4t}$
$\frac{6t-15}{6t-15}$ | c) $\frac{d^2-9}{d-3}$
$\frac{d^2-9d+18}{d^2-9d+18}$ |
| 10 | a) $\frac{2g+2}{3g+3}$
$\frac{4g+4}{4g+4}$ | b) $\frac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$
$\frac{x^2-2xy}{x^2-2xy}$ | c) $\frac{r^2-s^2-2s-1}{r^2-2r-s^2+1}$
$\frac{r^2-2rs+s^2-1}{r^2-2rs+s^2-1}$ |
| 11 | a) $\frac{6ac-9ad-4c^2+6cd}{3a^2+4ac-4c^2}$ | b) $\frac{2p^3-7p^2+8p+6}{18p^3+9p^2}$ | |
| 12 | a) $\frac{8u^2v-uv^2-9v^3}{u^3v+2u^2v^2+uv^3}$ | b) $\frac{z^2-9z+20}{z^3-3z^2-50}$ | |

Zu 13–20: Kürzel!

- | | | | | | |
|----|--------------------------|--------------------------|--|----------------------------------|------------------------------------|
| 13 | a) $\frac{12d}{9}$ | b) $\frac{10r}{15r}$ | c) $\frac{16xyz}{20xz}$ | d) $\frac{24a^2bc^2}{56abc}$ | e) $\frac{-72uv^3w^6}{-60uv^3w^5}$ |
| 14 | a) $\frac{14}{21e}$ | b) $\frac{25pq}{5q}$ | c) $\frac{-27s^2}{-36st}$ | d) $\frac{4mq^2}{8mq^3}$ | e) $\frac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2}$ |
| 15 | a) $\frac{5a+20}{5}$ | b) $\frac{14n-10}{7}$ | c) $\frac{28x-35y}{21}$ | d) $\frac{u^2+uv}{uv}$ | |
| 16 | a) $\frac{60c-40d}{20c}$ | b) $\frac{92p+46q}{23}$ | c) $\frac{360z^2-90z}{45z^2}$ | d) $\frac{225i-15}{15}$ | |
| 17 | a) $\frac{25}{5r+10}$ | b) $\frac{uw}{uv+uw}$ | c) $\frac{2m}{4mn-2m}$ | d) $\frac{-36x^2y}{12x^2y-60xy}$ | |
| 18 | a) $\frac{36}{9s-18t}$ | b) $\frac{-h}{h^2+h}$ | c) $\frac{18a^2bc}{18a^2b^2c+54a^2bc^2}$ | | |
| 19 | a) $\frac{7n+14}{7n-21}$ | b) $\frac{2y+2}{5y+5}$ | c) $\frac{rs-rt}{su-tu}$ | d) $\frac{p^3-p^2}{p^3+p^2}$ | |
| 20 | a) $\frac{a^2-a}{ab+a}$ | b) $\frac{4c-4d}{6c-6d}$ | c) $\frac{6x-6z}{9x+9z}$ | d) $\frac{w^3+w^2}{w^2+w}$ | |

- 21 Berechne die Werte der Terme $T_1 = \frac{6}{x}$ und $T_2 = \frac{6x-18}{x^2-3x}$ für $x = 1, 2, 3, 4, 10, -1.2$ (soweit sie definiert sind) und vergleiche.
- 22 Berechne die Werte der Terme $T_1 = \frac{x+5}{x-1}$ und $T_2 = \frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$ für $x = 2, 3, 4, 5, 6, -1$ (soweit sie definiert sind) und vergleiche.

Zu 23–42: Kürze!

- 23 a) $\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b}$ b) $\frac{6u - 8v}{9u^2 - 16v^2}$ c) $\frac{n^3 - n}{n^3 + n^2}$
- 24 a) $\frac{4r - 2}{4r^2 - 1}$ b) $\frac{36x^2 - 4y^2}{18x - 6y}$ c) $\frac{4s^2 + 25}{16s^4 - 625}$
- 25 a) $\frac{u^2 + 2uv + v^2}{4u + 4v}$ b) $\frac{2ac - 5bc}{4a^2 - 20ab + 25b^2}$ c) $\frac{w^3 + 2w^2 + w}{wz + z}$
- 26 a) $\frac{10m - 5}{8m^2 - 8m + 2}$ b) $\frac{(16p - 16q)^2}{16p^2 - 16q^2}$ c) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$
- 27 a) $\frac{as + at + bs + bt}{2s + 2t}$ b) $\frac{375w - 1000}{6uw - 16u + 6vw - 16v}$ c) $\frac{4c^2 + cr - 4c - r}{5c - 5}$
- 28 a) $\frac{4af + 7ag - 8bf - 14bg}{3a - 6b}$ b) $\frac{kp - 5p + k - 5}{kp + k}$ c) $\frac{x - xy + y - 1}{y - yz + z - 1}$
- 29 a) $\frac{40cm - 60dm + 32cn - 48dn}{24cm - 36dm + 16cn - 24dn}$ b) $\frac{rs - rt - s^2 + t^2}{r - s - t}$
- 30 a) $\frac{u^2 - v^2 + 4u + 4v}{u^2 - v^2}$ b) $\frac{144x^3 - 60x^2z - 156x^2 + 65xz}{12xyz + 12xz^2 - 5yz^2 - 5z^3}$
- 31 a) $\frac{a^2 + 2a - 24}{a^2 - 6a + 8}$ b) $\frac{kn - 2k}{3n^2 - 3n - 6}$ c) $\frac{r^2 - 8r + 7}{2r^2 - 4r + 2}$ d) $\frac{c^2 - 9d^2}{c^2 + 2cd - 15d^2}$
- 32 a) $\frac{m^2 - 9m + 20}{m^2 - 10m + 25}$ b) $\frac{x^4 - 4x^3}{x^4 - x^3 - 12x^2}$ c) $\frac{h^4 - 1}{h^4 + 6h^2 + 5}$ d) $\frac{yz^2 + 2yz - 8y}{yz - 2y + 5z - 10}$
- 33 a) $\frac{10u^2 - 11u - 6}{25u^2 - 4}$ b) $\frac{18a - 9b}{32a^2 - 26ab + 5b^2}$ c) $\frac{r^2 + 12r + 36}{15r^2 + 88r - 12}$
- 34 a) $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - x - 15}$ b) $\frac{45n^2 - 12n - 28}{9n^2 + 12n + 4}$ c) $\frac{27c^2 - 48d^2}{24c^2 + 5cd - 36d^2}$

35 a) $\frac{a-b}{b-a}$ b) $\frac{4mp-20}{30-6mp}$ c) $\frac{k^2-13k+42}{14-2k}$ d) $\frac{-u^2+2uv-v^2}{4u^2-4v^2}$

36 a) $\frac{3z-3y}{4y-4z}$ b) $\frac{e^2-e}{1-e^2}$ c) $\frac{c^2+c-20}{-c^2+c+30}$ d) $\frac{r^2-rs-rt}{rt-rs-r^2}$

37 a) $\frac{80a^3-58a^2+11a-3}{5a-3}$ b) $\frac{3n^2-9n}{n^3-2n^2-5n+6}$

c) $\frac{4p^3-6p^2+2p+3}{4p^2-1}$ d) $\frac{v^2-4v+4}{v^4+3v^3-7v^2-9v+6}$

38 a) $\frac{8x+3}{96x^3+28x^2+37x+15}$ b) $\frac{3t^3+t^2+5t+12}{6t+8}$

c) $\frac{4u^3+5u^2-2u-3}{u^2+2u+1}$ d) $\frac{z^2+z-2}{z^4+z^3+z^2+z-4}$

39 a) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ b) $\frac{3n+3}{2n^3+2}$ c) $\frac{4s^2-12s+9}{27-8s^3}$ d) $\frac{r^3-8}{r^3-r^2-r-2}$

40 a) $\frac{x+y}{x^3+y^3}$ b) $\frac{u^3-v^3}{v^2-u^2}$ c) $\frac{250p^4-2p}{5p^2+29p-6}$ d) $\frac{(c+d)^2(c^3-d^3)}{(c^2-d^2)^2}$

41 a) $\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{2a+2b+2c}$ b) $\frac{180k^2s^3+240ks^2t+80st^2}{30ks^2+6kst+20st+4t^2}$ c) $\frac{(m+5)^2-(n+1)^2}{(m+7)-(n+3)}$

42 a) $\frac{25u^2-9(v-1)^2}{6v-10u-6}$ b) $\frac{36p^2-60pq+25q^2-9r^2}{6p-5q-3r}$ c) $\frac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x^6-y^6}$

Zu 43, 44: Erweitere mit -1 .

43 a) $\frac{b-a}{-a-c}$ b) $\frac{4y-x}{-3}$ c) $\frac{-uvw}{-u+v-w}$ d) $\frac{(-s+3)(-s+5)}{-s+7}$

44 a) $\frac{-t}{1-t-t^2}$ b) $\frac{1-qr}{1-q}$ c) $\frac{-m-n}{n-m}$ d) $\frac{6z-z^2-3}{5-4z-z^2}$

Zu 45, 46: Notiere den Term als Bruch mit dem Nenner N .

Beispiel: $\frac{z}{a-b}$, $N = a^2 - b^2$; Ergebnis: $\frac{z}{a-b} = \frac{(a+b)z}{a^2 - b^2}$

- 45 a) $\frac{6}{7x}$, $N = 84xyz$ b) $\frac{3u}{8}$, $N = 24u$ c) $\frac{a+b}{ab^2}$, $N = a^3b^3$
 d) $2r$, $N = 3$ e) $\frac{15w}{10-w}$, $N = w^2 - 10w$ f) p^2 , $N = p(p-1)$
 g) $\frac{s-t}{s+t}$, $N = s^2 - t^2$
- 46 a) $\frac{4ac}{3b}$, $N = 12b^2c^2$ b) $\frac{4q}{3q+2}$, $N = 6q^2 + 4q$ c) 7 , $N = 2w$
 d) k , $N = k$ e) $\frac{6mn}{2m-5n}$, $N = 8mn - 20n^2$ f) $\frac{-2}{4y-3x}$, $N = 6x - 8y$
 g) $\frac{d}{2d+1}$, $N = (6d+3)^2$

Zu 47–52: Mache gleichnamig.

- 47 a) $\frac{2}{a}$, $\frac{3}{b}$, $\frac{4}{c}$ b) $\frac{7}{8w}$, $\frac{5}{6w}$ c) $\frac{p}{e^2}$, $\frac{p}{e^3}$ d) $\frac{r^2}{9s^2u}$, $\frac{1}{r^2u^2}$, $\frac{8u}{15rs}$
- 48 a) $\frac{u}{2v}$, $\frac{v}{2u}$ b) $\frac{x}{yz}$, $\frac{y}{xz}$, $\frac{z}{xy}$ c) $\frac{15}{4mn^2}$, $\frac{25}{6m^3n}$ d) $\frac{13}{6h^2}$, 1 , $\frac{4}{21hi}$
- 49 a) $\frac{1}{rs}$, $\frac{1}{r^2+r}$ b) $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b+c}$ c) $\frac{q}{q^2-1}$, $\frac{q-1}{q+1}$
- 50 a) $\frac{x}{x+y}$, $\frac{y}{x-y}$ b) $\frac{1}{t^2-t}$, $\frac{t-1}{t}$ c) $\frac{3}{uv+v}$, $\frac{u+v}{2v}$
- 51 a) $\frac{n}{n-5}$, $\frac{5}{5-n}$ b) $\frac{w-z}{w+z}$, $\frac{w+z}{w-z}$ c) $\frac{a}{a^2-b^2}$, $\frac{b}{b-a}$
- 52 a) $\frac{3c+2d}{3c-2d}$, $\frac{2c+3d}{2c-3d}$ b) $\frac{21}{2x-2}$, $\frac{-31}{3x-3}$, $\frac{41}{4x-4}$
- 53 Welcher Bruch ist grösser, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a+1}{b+1}$, wenn $a > 0 \wedge b > 0$?
- 54 Welcher Bruch ist grösser, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a+d}{b+d}$, wenn $a > 0 \wedge b > 0 \wedge d > 0$?

5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

- 55 a) $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$ b) $\frac{7}{8a} - \frac{1}{8a}$ c) $\frac{5}{3n} + \frac{2}{3n} - \frac{-5}{3n}$
- 56 a) $\frac{5z}{6} - \frac{z}{6}$ b) $\frac{5c}{12y} + \frac{c}{12y}$ c) $\frac{-76u}{35v} - \frac{8u}{35v}$
- 57 a) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ b) $\frac{a+nb}{n} - \frac{a-nb}{n}$ c) $-\frac{3r+4}{6} + \frac{5r+7}{6}$
- 58 a) $\frac{-t+7}{4t} - \frac{3t+4}{4t} - \frac{8t-5}{4t}$ b) $\frac{x^2+x-8}{2x} - \frac{x^2-7x-3}{2x} + \frac{2x^2-4x+5}{2x}$
- 59 a) $\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}$ b) $\frac{cd}{b-d} - \frac{bc}{b-d}$
 c) $\frac{xy}{y^2-2yz+z^2} - \frac{xz}{y^2-2yz+z^2}$ d) $\frac{4a}{4a^2+7a+3} + \frac{3}{4a^2+7a+3}$
- 60 a) $\frac{q}{p-q} - \frac{p}{p-q}$ b) $\frac{4ktw}{2t-1} - \frac{2kw}{2t-1}$
 c) $-\frac{s^3}{s^2-1} + \frac{s^2}{s^2-1}$ d) $\frac{52x}{65x^2+59x-72} - \frac{36}{65x^2+59x-72}$
- 61 a) $\frac{e}{2} - \frac{e}{3}$ b) $\frac{2p}{15q} + \frac{8p}{9q}$ c) $\frac{5}{6ac} - \frac{3}{4cd}$ d) $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}$
- 62 a) $\frac{4u}{21} + \frac{9u}{14}$ b) $\frac{8}{9m} - \frac{11}{36m}$ c) $\frac{z}{n^2} + \frac{4}{3n}$ d) $\frac{7v}{10w} - \frac{5v}{6w}$
- 63 a) $\frac{7s}{18} - \frac{4s-9}{45}$ b) $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$ c) $\frac{x+y}{2xy} + \frac{x+z}{2xz} + \frac{y+z}{2yz}$
- 64 a) $\frac{c-2}{c^3} + \frac{c-1}{c^2}$ b) $\frac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \frac{2u+v}{u^2v} + \frac{u-3v}{uv^2}$
- 65 a) $\frac{a}{3} + 1$ b) $7r - \frac{9}{2s}$ c) $5w - 1 + \frac{3}{w}$
- 66 a) $8m - \frac{n}{5}$ b) $b + \frac{1}{b}$ c) $\frac{x}{4z} - 2y + 3z$
- 67 a) $\frac{2r+3}{6} + 1$ b) $t - 4 - \frac{t+1}{2}$ c) $d - \frac{nd-2}{n}$

- 68 a) $p + \frac{9-p}{2}$ b) $\frac{x-y}{3x} - 1$ c) $2 - \frac{k^2 - k + 1}{k^2}$
- 69 a) $\frac{2a}{a+b} + 1$ b) $4 - \frac{u-v}{u+v}$ c) $\frac{z^2}{z+1} - z$
- 70 a) $3 - \frac{m}{m-n}$ b) $\frac{q}{q+1} - 1$ c) $e - \frac{e^2 - 2}{e - 2}$
 d) $1 + \frac{z}{1-z}, 1 + z + \frac{z^2}{1-z}, 1 + z + z^2 + \frac{z^3}{1-x}$
- 71 a) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$ b) $\frac{8}{n+5} - \frac{n+2}{n}$ c) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$
- 72 a) $\frac{m}{m-1} - \frac{m-1}{m+2}$ b) $\frac{2r}{s} - \frac{r+3}{r+s+1}$ c) $\frac{w-4}{w-2} + \frac{w+6}{w+3}$
- 73 a) $\frac{c}{c+d} - \frac{c-d}{2(c+d)}$ b) $\frac{4}{z-1} + \frac{z}{z^2-1}$
 c) $\frac{3u}{u^2+2uv+v^2} - \frac{1}{u+v}$ d) $\frac{a+2b+t}{4at+8bt} - \frac{1}{4t}$
- 74 a) $\frac{x-y}{15x+10y} + \frac{x+y}{3x+2y}$ b) $\frac{8p}{4p^2-4p+1} - \frac{3}{2p-1}$
 c) $\frac{r+2}{5r^2} - \frac{4r+4}{5r^3+10r^2}$ d) $\frac{1}{q-1} - \frac{q^2+2}{q^3-1}$
- 75 a) $\frac{c}{c-d} - \frac{2cd}{c^2-d^2} - \frac{d}{c+d}$ b) $\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+5} - \frac{2a+3}{a^2+3a-10}$
- 76 a) $\frac{z}{z-5} - \frac{5}{z+3} - \frac{40}{z^2-2z-15}$ b) $\frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{n^2-1}$
- 77 a) $\frac{a-b}{4a+4b} + \frac{a+4b}{6a+6b}$ b) $\frac{t+7}{3t-6} - \frac{t+4}{t^2-2t}$
 c) $\frac{u}{uv+v^2} - \frac{v}{u^2+uv}$ d) $\frac{c}{c^2-8c+16} + \frac{2}{c^2-6c+8}$
- 78 a) $\frac{1}{rx+ry} + \frac{1}{sx+sy}$ b) $\frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{(a-b)^2}$
 c) $\frac{z+9}{z^2-1} - \frac{z+5}{z^2+z}$ d) $\frac{5}{n^2+n-6} - \frac{3}{n^2-n-2}$

- 79 a) $\frac{7}{e-1} + \frac{6}{1-e}$ b) $\frac{5}{3h-3} - \frac{4}{2-2h}$
 c) $\frac{r-4}{5r+5} + \frac{2}{1-r^2}$ d) $\frac{u}{u-v} - \frac{4uv}{u^2-v^2} - \frac{v}{v-u}$
- 80 a) $\frac{a-b}{c-d} - \frac{a+b}{d-c}$ b) $\frac{x+y}{2x-6y} + \frac{x+3y}{9y-3x}$
 c) $\frac{8s}{s^2-4} + \frac{2+s}{2-s}$ d) $\frac{m^2-8m}{2m^2+m-15} - \frac{m}{5-2m}$
- 81 a) $\frac{2n-11}{3n-5} - \frac{4n+15}{n+7} + 1$ b) $\frac{2v+3w}{2v+w} - \frac{2v-w}{2v} - \frac{2v+3w}{w}$
- 82 a) $\frac{2r-19}{3r-7} - \frac{5r}{6r-8} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{p-2} - \frac{3}{2p+1} + \frac{1}{p+1}$
- 83 a) $\frac{5}{4x-8y} - \frac{3}{10y-5x} - \frac{11}{6x-12y}$ b) $\frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-b}{ac+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$
- 84 a) $\frac{k+2}{6k-15} + \frac{8k+1}{8k-20} + \frac{k+11}{10-4k}$ b) $\frac{u}{u-v} + \frac{v}{v-u} - \frac{u+v-1}{u+v}$
- 85 a) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{x^2-9} - \frac{2}{3x}$ b) $\frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{2s-s^2}$
- 86 a) $\frac{2u-v}{2u-2v} - \frac{u-v}{3u+3v} - \frac{v(3v-u)}{3v^2-3u^2}$ b) $\frac{1}{z^2-z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2+z}$
- 87 $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$
- 88* $\frac{x^4+36x^2-32}{x^4-8x^2+16} - \frac{16x}{x^3+2x^2-4x-8} - \frac{16x}{x^3-2x^2-4x+8} - 1$
- 89* $\frac{a^2+3a+5}{a^4-a^3-31a^2+25a+150} - \frac{a+2}{a^3-3a^2-25a+75}$
 $+ \frac{a-3}{a^3+2a^2-25a-50} - \frac{a-5}{a^3+4a^2-11a-30}$
- 90* $\frac{6-x}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24} + \frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^2-4x+3}$

5.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

Multiplikation

91 a) $3 \cdot \frac{4}{5}$ b) $a \cdot \frac{b}{c}$ c) $a \cdot \frac{-b}{c}$ d) $a \cdot \frac{b}{-c}$ e) $(-a) \cdot \frac{-b}{c}$

92 a) $x \cdot \frac{y}{x}$ b) $u \cdot \frac{u}{v}$ c) $n \cdot \frac{m}{n^2}$ d) $r^2 \cdot \frac{1}{rs}$ e) $pq \cdot \frac{p}{q}$

93 a) $6ab \cdot \frac{9a}{4b}$ b) $44x^2y^2 \cdot \frac{2x^3}{11y^3}$ c) $21m^3n \cdot \frac{-7cd}{12mn^2}$

94 a) $29k^5t \cdot \frac{47h^2}{29k^5t}$ b) $\frac{5rs^2}{18uv^3}(-15rsuv)$ c) $(-4pz) \left(-\frac{3q^2z}{10p^2} \right)$

95 a) $(a-b) \frac{2a+b}{a-b}$ b) $(3x+3y) \frac{9c}{x+y}$ c) $\frac{5}{q^2-1}(q-1)$

96 a) $4z \cdot \frac{z+1}{8z^2+12z}$ b) $\frac{d}{d^2-8d+15}(d-5)$ c) $(2k-7) \frac{k}{7-2k}$

97 a) $(r^2-36s^2) \frac{r+6s}{r-6s}$ b) $(2p-4) \frac{p-4}{p^2-4}$ c) $\frac{a+b+c}{ab+ac} \cdot abc$

98 a) $\frac{x}{yz}(xz+yz)$ b) $(3g-3f) \frac{4f+4g}{5f-5g}$ c) $(m^2-n^2) \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$

99 a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3}$ b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ e) $\left(\frac{a}{b} \right)^3$

100 a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{-d}$ b) $\frac{a}{-b} \cdot \frac{-c}{d}$ c) $\left(-\frac{1}{n} \right)^5$ d) $\left(-\frac{-a}{-b} \right) \left(-\frac{-c}{-d} \right) \left(-\frac{-e}{-f} \right)$

101 a) $\frac{8a}{3b} \cdot \frac{9bc}{4a}$ b) $\frac{-xy^2}{35z^3} \cdot \frac{7z^2}{x^2y^2}$ c) $\frac{-18u^2w}{65v^4} \cdot \frac{-26v}{27uw^3}$

102 a) $\frac{7m^2}{12n^3} \cdot \frac{-3n^2}{14m}$ b) $\frac{-a}{b} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-c}{a}$ c) $\frac{17r^4s^3}{54t^5} \cdot \frac{24st^2}{85r^2}$

103 a) $\left(\frac{6a}{7b} \right)^2$ b) $\left(\frac{-12}{n^3} \right)^2$ c) $\left(-\frac{xyz}{cd} \right)^2$ d) $\left(\frac{m}{4} \right)^3$

104 a) $\left(\frac{-8h^2}{9} \right)^2$ b) $\left(\frac{5uv}{17w} \right)^2$ c) $\left(\frac{19r}{2st} \right)^2$ d) $\left(-\frac{3}{e^2} \right)^4$

105 a) $\frac{m-n}{3m} \cdot \frac{5m}{2m-2n}$ b) $\frac{d-1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1-d}$ c) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{xy}$

106 a) $\frac{t}{4u+4v} \cdot \frac{3u^2-3v^2}{t^2+t}$ b) $\frac{5a^2}{5b-3} \cdot \frac{9-15b}{10ac}$ c) $\frac{7r^2s}{12(r-s)} \cdot \frac{(2s-2r)^2}{21rs^2}$

107 a) $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \cdot \frac{p+q}{p-q}$ b) $\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n} \cdot \frac{m^4-n^4}{x-3y+z}$

108 a) $\frac{v^2+4v+4}{3t-3} \cdot \frac{9-9t}{v^2+5v+6}$ b) $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{225a^2b^2-150abc+25c^2} \cdot \frac{45abc-15c^2}{ab-b}$

109 a) $xy \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$ b) $(n-z) \left(\frac{n}{n-z} - \frac{z}{n^2-z^2} \right)$ c) $\left(-\frac{r^2}{s^2} \right) \left(\frac{s}{r} - \frac{s^2}{r^2} + \frac{s^3}{r^3} \right)$

110 a) $\left(c - \frac{d}{c} \right) \left(c + \frac{d}{c} \right)$ b) $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \left(\frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v} \right)$

c) $\left(\frac{ab}{a-b} + a \right) \left(\frac{ab}{a+b} - b \right) \frac{b-a}{ab^2}$

111 a) $\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{n} \right)^2$ b) $\left(\frac{z^2}{x-z} + z \right)^2$ c) $\left(\frac{p}{q} - 1 \right)^2 - \left(\frac{p}{q} + 1 \right)^2$

112 a) $\left(\frac{a}{2b} - \frac{c}{3d} \right)^2$ b) $\left(\frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} \right)^2$ c) $\left(u - \frac{v}{u} \right)^2 - \left(u + \frac{v}{u} \right)^2$

113 $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2} \right) \left(\frac{x}{2} + y \right) - \left(\frac{x}{3} + y \right) \left(\frac{x}{2} - y \right)$

114 $\frac{3a}{3a-2b} \cdot \frac{3a}{2b} - \left(\frac{3a}{3a-2b} + \frac{3a}{2b} \right)$

115 a) $\left(1 + \frac{r}{s} \right)^3 - \left(1 - \frac{r}{s} \right)^3$ b) $\left(\frac{n^3-2n-1}{n^2-1} - n \right) \left(n - \frac{2n^2}{n+1} \right)$

116 a) $\left(\frac{c}{3} - 1 \right)^3 - \left(\frac{c}{3} + 1 \right)^3$ b) $\left(\frac{8x^2+4x+1}{4x^2-2x} - \frac{2x}{2x-1} \right) \frac{6x-3}{4x^2+2x}$

Division

117 a) $\frac{4}{5} : 3$ b) $\frac{a}{b} : c$ c) $\frac{-a}{b} : c$ d) $\frac{a}{-b} : c$ e) $\left(\frac{-a}{b}\right) : (-c)$

118 a) $\frac{21}{8} : 7$ b) $\frac{mn}{d} : m$ c) $\frac{u^2}{v^2} : u$ d) $\frac{9}{25} : 15$ e) $\frac{xy}{wz} : yz$

119 a) $\frac{15d}{4e} : 6de$ b) $\frac{19r^2s^2}{23t} : 19r^2s^2$ c) $\frac{-16ab^2}{27c} : (-16bc^2)$

120 a) $\frac{7u^3}{9v^2} : 21u^2v$ b) $\frac{-8h}{11mn} : 11mn$ c) $\frac{72x^6}{5y^3z^4} : 24x^2$

121 a) $\frac{10k-15}{12k} : 5$ b) $\frac{a^2+ab}{b+c} : a$ c) $\frac{6hs-9h}{10s} : 18hs$

122 a) $\frac{3u^2v-4uv^2}{3u+4v} : uv$ b) $\frac{q^3+q^2}{4} : q^3$ c) $\frac{10xz+16yz}{5x-10} : 10xyz$

123 a) $\frac{2a+2b}{ab} : (a+b)$ b) $\frac{w^2-t^2}{w^2+t^2} : (t-w)$ c) $\frac{c^2-cd}{d^2} : (3c-3d)$

124 a) $\frac{2p-8}{15} : (4-p)$ b) $\frac{x+y}{x-y} : (x^2-y^2)$ c) $\frac{8n^2-34n-9}{n+4} : (4n^2+n)$

125 a) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$ b) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ c) $7 : \frac{3}{4}$ d) $a : \frac{c}{d}$ e) $47 : \frac{47}{59}$

126 a) $\frac{a}{b} : \left(-\frac{c}{d}\right)$ b) $(-a) : \left(-\frac{c}{d}\right)$ c) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$ d) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ e) $\frac{z}{a} : \frac{z}{b}$

127 a) $\frac{5km}{6} : \frac{3k}{2m}$ b) $\frac{112n^2}{19xyz} : \frac{-7n}{19xyz}$ c) $\frac{12u^2v}{25tw} : \frac{18uv^2}{35tw}$

128 a) $\frac{9c}{10ab} : \frac{6ac}{25b}$ b) $\frac{1}{24rs^3} : \frac{1}{16r^2s}$ c) $\left(-\frac{78f}{85h^3}\right) : \left(-\frac{48f^2}{85h^3}\right)$

129 a) $\frac{uv}{u+v} : \frac{5v}{u^2+uv}$ b) $\frac{z}{3z-3} : \frac{z}{2-2z}$ c) $\frac{n^2-19n+90}{n+9} : \frac{n-9}{n+9}$

130 a) $\frac{c^2-d^2}{c-1} : \frac{c+d}{1-c}$ b) $\frac{x^2-xy}{x+y} : \frac{3x+3y}{x-y}$ c) $\frac{m^2-m}{m+2} : \frac{m^2-1}{4m+8}$

131 a) $\frac{w^2-w-12}{t^2} : \frac{w-4}{t^2-t}$

b) $\frac{196a^2-25}{4b^2+20b+25} : \frac{70a+25}{2b+5}$

132 a) $\frac{1}{4n^2-4} : \frac{1}{(4n-4)^2}$

b) $\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2 : \frac{2x^3-3x^2+1}{4x^2}$

133 a) $\frac{a^3+a^2b}{c^2+1} : \frac{a^3-ab^2}{c^2-c}$

b) $\frac{e^2+2ef+f^2}{e^2+2ef} : \frac{e^2+ef-e-f}{2ef+4f^2}$

134 a) $\frac{10x^2-20x+10}{9x^2+18x+9} : \frac{15x^2+15x-30}{2x^2-2x-4}$

b) $\frac{r^4-1}{rs-s^2} : \frac{4r+4}{r^2-rs-r+s}$

135 a) $6abc : \frac{15ac^2}{4bd}$ b) $(u+v) : \frac{u+v}{w}$ c) $(-4n-4) : \frac{n+1}{-2}$

136 a) $39g^2h^2 : \frac{52g}{9h}$ b) $(7-k) : \frac{k-7}{-k-7}$ c) $(p+q) : \frac{p^2-q^2}{pq}$

137 a) $(4m-2) : \frac{4m^2-1}{m-2}$

b) $xyz : \frac{xyz-xy}{xz-yz}$

138 a) $(6d^2-9d) : \frac{4d-6}{2d+3}$

b) $(a^2b+ab^2) : \frac{a^3b-ab^3}{a^2+b^2}$

139 a) $\left(u^2 + \frac{u}{v}\right) : \frac{u}{v}$

b) $\left(\frac{x^4}{y^2} - x^3\right) : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

140 a) $\left(4ef - \frac{2e}{f}\right) : \frac{2e}{f}$

b) $\left(6 \cdot \frac{r^2}{s^2} - 3 \cdot \frac{r}{s} + \frac{3}{2}\right) : \left(-3 \cdot \frac{r^2}{s^2}\right)$

141 a) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$

b) $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

142 a) $\left(x - \frac{1}{x}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right)$

b) $\left(\frac{w}{2} - \frac{2}{w}\right) : (w+2)$

5.4 Doppelbrüche

$$143 \quad \text{a) } \frac{\frac{25}{36}}{\frac{15}{16}} \quad \text{b) } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \text{c) } \frac{\frac{u}{v}}{\frac{x}{y}} \quad \text{d) } \frac{\frac{x}{u}}{\frac{v}{w}} \quad \text{e) } \frac{\frac{p}{n}}{\frac{q}{r}} \quad \text{f) } \frac{\frac{z}{r}}{\frac{z}{s}}$$

$$144 \quad \text{a) } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} \quad \text{b) } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} \quad \text{c) } \frac{\frac{m}{n}}{\frac{n}{m}} \quad \text{d) } \frac{\frac{c}{c}}{\frac{d}{d}} \quad \text{e) } \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} \quad \text{f) } \frac{x}{\frac{1}{y}}$$

$$145 \quad \text{a) } \frac{\frac{14u^3v}{57xyz}}{\frac{35uv^2}{76y^2z}} \quad \text{b) } \frac{\frac{3m}{4n}}{6mn} \quad \text{c) } \frac{\frac{1}{p^2-4}}{\frac{1}{p^2-4p+4}} \quad \text{d) } \frac{\frac{2e-6f}{3e^2-9ef}}{2f}$$

$$146 \quad \text{a) } \frac{\frac{54k^2}{65t}}{\frac{81k}{75t^2}} \quad \text{b) } \frac{\frac{9ab^2c^3}{(9 \cdot \frac{ab}{c})^2}}{\frac{2w^2-w}{w^2-2w^3}} \quad \text{c) } \frac{\frac{2w^2-w}{w^2-2w^3}}{\frac{rs}{r+s}} \quad \text{d) } \frac{\frac{rs}{r+s}}{\frac{r:s}{r^2-s^2}}$$

$$147 \quad \text{a) } \frac{g + \frac{1}{3}}{g - \frac{1}{3}} \quad \text{b) } \frac{h}{0.5h - 0.75} \quad \text{c) } \frac{1 - \frac{1}{e}}{1 + \frac{1}{e^2}} \quad \text{d) } \frac{\frac{y}{x} - \frac{z}{y}}{-\frac{z}{x}}$$

$$148 \quad \text{a) } \frac{1 - \frac{n}{v}}{-nv} \quad \text{b) } \frac{0.6m - 0.4p}{p + 0.8} \quad \text{c) } \frac{r^2 + \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r^2}} \quad \text{d) } \frac{\frac{5f}{2n}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}}$$

$$149 \quad \text{a) } \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}} \quad \text{b) } \frac{1}{\frac{1}{w} + \frac{1}{z}} \quad \text{c) } \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{s} + \frac{1}{t}} \quad \text{d) } \frac{-\frac{2k}{a} + \frac{3k}{b}}{\frac{6}{a} - \frac{k}{b}}$$

$$150 \quad \text{a) } \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}} \quad \text{b) } \frac{\frac{q-p}{r}}{1 - \frac{p}{q}} \quad \text{c) } \frac{\frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h}}{\frac{e}{f} - \frac{g}{h}} \quad \text{d) } \frac{\frac{u}{v} - \frac{v}{u}}{\frac{u}{v} + \frac{v}{u} + 2}$$

$$151 \quad \text{a) } \frac{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{y}{x+y}} \quad \text{b) } \frac{\frac{n}{n^2-1}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{s^2+t^2}{s} - \frac{t}{s+t}}{\frac{s}{s-t} - \frac{t}{s+t}} \quad \text{d) } \frac{\frac{z}{z+6} - \frac{8}{z}}{z - \frac{32}{z(z+6)}}$$

$$152 \quad \text{a) } \frac{\frac{r}{r+1} - \frac{r}{r+2}}{\frac{r}{r+2} - \frac{2r}{r+1}} \quad \text{b) } \frac{\frac{2c}{c-3} - \frac{c}{c+4}}{\frac{c+11}{c^2+c-12}}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{u}{w} - \frac{u+uv}{u+w}}{6u^2 - 12uvw + 6v^2w^2} \quad \text{d) } \frac{\frac{4a^2-9b^2}{(2a+3b)^2} - \frac{2a+3b}{2a-3b}}{\frac{(2a+3b)^2}{4a^2-9b^2} - \frac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}}$$

5.5 Vermischte Aufgaben

$$153 \quad a, b \text{ sind zwei beliebige Zahlen und } m = \frac{a+b}{2}. \text{ Vergleiche } m-a \text{ mit } b-m.$$

154 Berechne das arithmetische Mittel der beiden Terme.

$$\text{a) } \frac{7}{12}, \frac{3}{4} \quad \text{b) } \frac{7}{12}x, \frac{3}{4}x \quad \text{c) } \frac{7}{12}(a+b), \frac{3}{4}(a+b) \quad \text{d) } \frac{7}{12n}, \frac{3}{4n}$$

155 Berechne das arithmetische Mittel der drei Terme.

$$\text{a) } \frac{3}{5}t, \frac{2}{3}t, \frac{5}{6}t \quad \text{b) } \frac{3}{5}(x-y), \frac{2}{3}(x-y), \frac{5}{6}(x-y) \quad \text{c) } \frac{3a}{5b}, \frac{2a}{3b}, \frac{5a}{6b}$$

156 Verifiziere, dass $a = n$, $b = \frac{n^2-1}{2}$ und $c = \frac{n^2+1}{2}$ für jeden Wert des Parameters n die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Berechne a , b , c für

$$\text{a) } n=3 \quad \text{b) } n=5 \quad \text{c) } n=7 \quad \text{d) } n=19 \quad \text{e) } n=4 \quad \text{f) } n=10$$

$$157 \quad \text{a) } \left(\frac{2a+1}{a} - 1\right)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{x-z^2}{z} + z - 1\right)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{m-n}{m+n} + 1\right)^2$$

$$158 \quad \text{a) } \left(\frac{2a-b}{a} - \frac{b+c}{b} - \frac{b+c}{c}\right) : \frac{-1}{abc} \quad \text{b) } \left(\frac{r^3-1}{r^3} - \frac{r^2-r-1}{r^2} - \frac{1}{r}\right) : \frac{1}{r^3}$$

$$159 \quad \text{a) } 4y^2z^3 \left(\frac{2x}{yz^2} - \frac{3x}{y^2z} \right) : (3z - 2y) \quad \text{b) } u^2v^2 \left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u} \right)^2 : (u-v)(u+v)^2$$

$$160 \quad \text{a) } \left(\frac{5s-3}{s-t} - \frac{5s+3}{s+t} \right) : \frac{25t^2-9}{s+t} \quad \text{b) } \left(\frac{2n+1}{2n-1} - \frac{2n-1}{2n+1} \right) \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8n} \right)$$

$$161 \quad \text{a) } \left(\frac{7ab}{5c-5d} \cdot \frac{4e^3}{9f^3} \right) : \frac{14b}{3c-3d} \cdot \left(\frac{2e}{3f} \right)^2$$

$$\text{b) } \frac{25x^2-9}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2+5x+6}{y^3} : \frac{5x-3}{xy^3+2y^3}$$

$$162 \quad \text{a) } \frac{9a^2-30ab+25b^2-1}{3a-5b-1} \quad \text{b) } \frac{u^4-v^4+2v^2-1}{u^2+v^2-1}$$

$$163 \quad \text{a) } (p+1)^2 \cdot \left(p-1 + \frac{1}{p+1} \right)^2 \quad \text{b) } (c-5) : \frac{c^2-3c-10}{c^2-4}$$

$$164 \quad \text{a) } (x-3) : \frac{x^2-2x-3}{xy+x+y+1} \quad \text{b) } \left(\frac{r}{r^2-r-1} \right)^2 \left(-r+1 + \frac{1}{r} \right)^2$$

$$165 \quad \frac{a^2b}{8} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right]$$

$$166 \quad \text{a) } \frac{u-3v}{u^2-v^2} \cdot \frac{u+v}{u} + \frac{3uv-v^2}{u^2-2uv+v^2} : \frac{v^2}{u-v}$$

$$\text{b) } \frac{1}{(a+b)^2} \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$$

$$167 \quad \left(\frac{2}{m-1} + m + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{m^2-1} - \frac{2m}{m^4-1} \right)$$

$$168 \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c}{ab} \right) (a+b+c) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{c^2}{a^2b^2} \right)$$

$$169 \quad 1^2 = \frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2}, \quad 2^2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2}, \quad 3^2 = \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2}; \text{ Verallgemeinerung?}$$

$$170 \quad \text{Unter der Voraussetzung } a \leq b+c \text{ für die positiven Zahlen } a, b, c \text{ ist die Ungleichung } \frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \text{ zu beweisen.}$$

5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

Multiplikation (beider Seiten) einer Gleichung mit einem Term kann eine Gewinnumformung sein. Vergleiche Abschnitt 4.3. Beispiele:

$$\frac{4x+5}{2x-8} = \frac{17}{2x-8} \Leftrightarrow 4x = 12, \quad \frac{4x+5}{2x-6} = \frac{17}{2x-6} \Rightarrow 4x = 12$$

Zu 171–200: Bestimme die (reellen) Lösungen.

$$171 \quad \text{a) } \frac{1}{x} + 2 = \frac{9}{x} \quad \text{b) } \frac{5}{6x} + \frac{13}{4} = \frac{5}{3} - \frac{2}{9x} \quad \text{c) } \frac{x+10}{3x} - \frac{x+8}{5x} = 1$$

$$172 \quad \text{a) } \frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = 4 \quad \text{b) } \frac{1}{2x} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{6} = 0 \quad \text{c) } \frac{11}{5} - \frac{x-20}{2x} = \frac{2x-1}{3x}$$

$$173 \quad \text{a) } \frac{5-x}{10} = \frac{x}{10} \quad \text{b) } \frac{2x-4}{x} = \frac{8x-7}{x} \quad \text{c) } \frac{3(x+2)}{x+8} = \frac{2(x+3)}{x+8}$$

$$174 \quad \text{a) } \frac{4x+1}{6x} = \frac{7x+8}{6x} \quad \text{b) } \frac{4-x}{3x-1} = \frac{2x+3}{3x-1} \quad \text{c) } \frac{2(x-2)}{x-5} = \frac{2x-4}{x-5}$$

$$175 \quad \text{Löse die Gleichung } \frac{3x-7}{N} = \frac{x+1}{N} \text{ mit dem Nenner } N:$$

$$\text{a) } N = 10 \quad \text{b) } N = x \quad \text{c) } N = x-4 \quad \text{d) } N = x+4 \quad \text{e) } N = x^2 + x - 20$$

$$176 \quad \text{Löse die Gleichung } \frac{Z}{4x-25} = \frac{Z}{10-x} \text{ mit dem Zähler } Z:$$

$$\text{a) } Z = 9 \quad \text{b) } Z = 2x-4 \quad \text{c) } Z = 7-x \quad \text{d) } Z = (x+4)(2x-1) \quad \text{e) } Z = x^2 + 1$$

$$177 \quad \text{a) } \frac{1}{x} = \frac{9}{x-5} \quad \text{b) } \frac{2}{x-3} = \frac{3}{x+5} \quad \text{c) } \frac{x-6}{x} = \frac{x}{x+10}$$

$$178 \quad \text{a) } \frac{4}{2x+1} = \frac{3}{2x} \quad \text{b) } \frac{7}{x-8} = \frac{11}{x-1} \quad \text{c) } \frac{14}{x-14} = \frac{x-14}{14}$$

$$179 \quad \text{a) } \frac{2x+19}{x+2} = \frac{47}{3x+6} \quad \text{b) } \frac{2x}{x-5} = \frac{x-24}{5-x} \quad \text{c) } \frac{x-7}{6x+6} = \frac{x+7}{8x+8}$$

$$180 \quad \text{a) } \frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{9-3x} \quad \text{b) } \frac{10}{4x+3} = \frac{x+3}{4x^2+3x} \quad \text{c) } \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$181 \quad \text{a) } \frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{5x-8}{2(x-1)} = \frac{3(x-4)}{2(x-1)} \quad \text{b) } \frac{2}{x+9} + \frac{3}{4(x+9)} = \frac{1}{4}$$

- 182 a) $\frac{x}{2(x-6)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{x-6}$ b) $\frac{y}{y+3} - \frac{y+1}{2(y+3)} = \frac{1}{3}$
- 183 a) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-1}{2x+2} = \frac{4x-1}{4x+4}$ b) $\frac{z-3}{z-2} + \frac{z}{5z-10} = \frac{4}{5}$
- 184 a) $\frac{r-7}{r+5} - \frac{3-r}{2r+10} = 2$ b) $\frac{x}{2x-8} + \frac{x-6}{x-4} = \frac{3}{2}$
- 185 a) $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$ b) $\frac{5}{n-4} - \frac{1}{n-5} = \frac{9n-1}{n^2-9n+20}$
- c) $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-5}{x^2-5x+6}$ d) $\frac{2k+17}{7k-3} + \frac{5k^2}{7k^2-3k} = \frac{k+2}{k}$
- 186 a) $\frac{5}{2t^2+3t} + \frac{6}{2t+3} - \frac{7}{t} = 0$ b) $\frac{7x-51}{x^2-9} - \frac{5}{x-3} + \frac{4}{x+3} = 0$
- c) $\frac{v+1}{v-1} - \frac{v-1}{v+1} - \frac{1}{v^2-1} = 0$ d) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-4}{x+5} = \frac{7x+13}{x^2+8x+15}$
- 187 a) $\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{x+3}{4-x^2}$ b) $\frac{x}{3x-4} + \frac{1}{8-6x} - 2 = 0$
- 188 a) $\frac{8x+1}{x-8} - \frac{8x-1}{8-x} = 8$ b) $\frac{5+x}{5-x} - \frac{5-x}{5+x} = \frac{5x-5}{x^2-25}$
- 189 a) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-4} = \frac{5}{x-3}$ b) $\frac{1}{p} + \frac{2p+5}{p+6} = 2$
- c) $\frac{1}{w-5} + \frac{2w-3}{w+2} = 2$ d) $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-8} = \frac{11}{8-x}$
- 190 Kopfrechnungen!
- a) $\frac{x}{x+7} + \frac{7}{x+7} = \frac{100}{x+2}$ b) $\frac{2x}{2x-11} - \frac{11}{2x-11} = \frac{x-8}{3}$
- c) $\frac{3x}{x+2} + \frac{6}{x+2} = \frac{1}{x}$ d) $\frac{6}{x-6} - \frac{x}{x-6} = \frac{9}{9-x}$
- 191 a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{x}{2x-3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x-3}$
- 192 a) $\frac{1}{q} - \frac{q}{4q-15} + \frac{1}{4} = 0$ b) $\frac{1}{1-m} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2+m}$
- 193 a) $\frac{2x-1}{2x} - \frac{3x-1}{3x} + \frac{4}{4x+1} = 0$ b) $\frac{x-4}{x-2} + \frac{x-8}{2x-4} + \frac{x-9}{3x-6} = 0$
- c) $\frac{x+4}{6x^2+x-2} - \frac{3}{8x-4} = 0$ d) $\frac{3r+7}{r^2+4r} - \frac{5}{r+4} = \frac{1}{4r}$

- 194 a) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2x-2}$ b) $\frac{1}{n^2-n} + \frac{1}{n^2-1} = \frac{5}{n^2+n}$
- c) $\frac{6}{4s^2-9} + \frac{5}{2s^2-s-3} = \frac{4}{s^2-1}$ d) $\frac{1}{4x-4} + \frac{1}{6x-6} = \frac{5}{9x^2-x-8}$
- e) $\frac{x+10}{x^2-10x} + \frac{x+5}{x^2-5x} = \frac{x}{x^2-15x+50}$
- f) $\frac{x}{4x^2-20x+25} - \frac{1}{4x-10} + \frac{10}{4x^2-25} = 0$
- 195 a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-3}{x-4} - \frac{x-7}{x-8}$
- 196 a) $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+9}$ b) $\frac{6}{2x-5} - \frac{3}{x+3} = \frac{22}{2x-7} - \frac{11}{x-2}$
- 197 a) $\frac{0.5x-1}{x+0.1} - \frac{0.2}{2x+0.2} = 1$ b) $\frac{1-\frac{r}{3}}{1+\frac{r}{3}} = \frac{1+r}{2.6-r}$ c) $\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}} - \frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}} = \frac{1-\frac{4}{x}}{4+\frac{4}{x}}$
- 198 a) $\frac{\frac{1}{4}x+1}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{2-x} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{1+\frac{1}{w}} = \frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}}$ c) $\frac{0.75}{1.5+0.5x} + \frac{0.2x}{x+3} = 0.3$

Zu 199, 200: Kopfrechnungen!

- 199 a) $\frac{1}{x} = \frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{x} = 6$ c) $\frac{1}{x} = -\frac{5}{3}$ d) $\frac{1}{x} = 2.7$ e) $\frac{1}{x} = -0.01$
- f) $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{x} + 7\right) = 0$
- g) $\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(0 - \frac{1}{n}\right) = 0$
- h) $\frac{1}{f}\left(\frac{1}{f} - \frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{f} + \frac{5}{7}\right)\left(3 - \frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{f} - 1.6\right)\left(0.04 - \frac{1}{f}\right) = 0$
- 200 a) $\frac{8}{x+2} = \frac{8}{9}$ b) $\frac{7}{2x-3} = \frac{7}{5}$ c) $\frac{25}{x-1} = 1$ d) $\frac{12}{x+5} = 4$ e) $\frac{6}{x-3} = \frac{1}{9}$
- f) $\left(\frac{24}{x-3} - 1\right)\left(\frac{24}{x-1} - 3\right) = 0$
- g) $\left(\frac{1}{x-1} - 1\right)\left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{x-3} - \frac{1}{3}\right) = 0$

Gleichungen mit Parametern

Wenn aus dem Aufgabentext nichts anderes hervorgeht, ist die angegebene Gleichung ohne Berücksichtigung von Sonderfällen nach x aufzulösen.

201 a) $x + 1 = \frac{a}{a+b}$ b) $\frac{r}{r-1} = \frac{r}{r+1} + x$ c) $5x = 3x + \frac{4}{u} - \frac{2}{v}$

202 a) $x + \frac{1}{m} = \frac{1}{m-1}$ b) $2x - \frac{3a+b}{2a+2b} = \frac{b-2a}{2a+2b}$ c) $6x - \frac{1}{2h} = \frac{1}{3h} - 4x$

203 a) $x + \frac{x}{p} = 1$ b) $\frac{x}{e} + \frac{x}{f} = \frac{1}{f}$ c) $\frac{n+1}{x} + \frac{n}{x+1} = 0$

204 a) $2x - \frac{dx}{2} = c$ b) $\frac{1}{x-t} = 1 - \frac{1}{t}$ c) $\frac{a}{w} - \frac{w}{a} = \frac{a^2}{x+aw}$

Zu 205–208: Löse die Gleichung nach jeder Variablen auf.

205 a) $A = \frac{abc}{4r}$ b) $s = \frac{1}{1-q}$ c) $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$

206 a) $\frac{x}{y} = \frac{x+a}{y+b}$ b) $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (r > 0)$ c) $\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$

207 a) $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x \cdot y}$ b) $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$ c) $t = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

208 a) $\frac{y}{x} - \frac{y}{x+1} = \frac{y+1}{x}$ b) $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$ c) $u' = \frac{u-v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (c > 0)$

209 a) $\frac{1+x}{1-x} = a$ b) $\frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p}$ c) $\frac{m}{x-2} + \frac{2x}{2x-m} = 1$

210 Diskutiere in Nr. 209 die Sonderfälle.

211 a) $\frac{x-1}{x-c} = c$ b) $\frac{s-5}{x-s} + \frac{1}{x} = 0$ c) $\frac{a}{x} + 1 = \frac{x}{x-b}$

212 Diskutiere in Nr. 211 die Sonderfälle.

213 a) $\frac{a^2x - bx + c}{ax + bx - c} = a - 1$ b) $\frac{g-hx}{gx-g} - \frac{(x+1)}{x-1} = 1$ $\frac{g-hx}{gx-g} - \frac{(x+1)}{x-1} = 1$

c) $\frac{x+r}{x-r} - \frac{x-r}{x+r} = \frac{4r^2+2r}{x^2-r^2}$

214 a) $\frac{(mx-n)(m+n)}{mx-nx+n} + n = m$ b) $\frac{x}{c-d} - \frac{x+c+d}{c^2-d^2} = 0$

c) $\frac{x^2}{sx-2s} - \frac{x-s}{s} = \frac{1}{x-2}$

215 a) $\frac{2a-x}{4a^2-4ab+b^2} = \frac{x-b+2}{4a-2b}$ b) $\frac{x^2+n^2}{x^2-nx} - \frac{n^2+1}{nx-n^2} = 1$

c) $\frac{r^2-4}{24r} - \frac{5r-6}{8x} = \frac{8r+2}{3rx} - r$ d) $\frac{4}{x+y} + \frac{1}{x} + \frac{4}{x-y} = 0$

e) $\frac{2(x-c)}{a^2+ab-ac-bc} - \frac{x+c}{a^2+ab+ac+bc} = \frac{1}{a+b}$

216 a) $\frac{c-dx}{c^2-9d^2} - \frac{c+dx}{c^2+6cd+9d^2} = 0$ b) $\frac{7}{t^2+tx} - \frac{t+4}{tx} + \frac{3t-2}{tx+x^2} = 0$

c) $\frac{ex-f}{ex+e} + \frac{3e+fx}{fx+f} = \frac{e^2+f^2}{ef}$ d) $\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{2}{(x+k)^2} = \frac{3}{x^2-k^2}$

e) $\frac{a-x}{2a^2-2ab} - \frac{2(a+x)}{a^2-b^2} + \frac{x}{ab+b^2} + \frac{a^2+6ab+b^2}{2a^3-2ab^2} = 0$

217 a) $\frac{x+g}{x+\frac{x}{g}} = 1$ b) $\frac{1}{\frac{x}{u} - \frac{x}{v}} = uv$ c) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{d}} = \frac{1}{d}$

218 a) $\frac{1 - \frac{x+a}{x-b}}{1 - \frac{x-a}{x+b}} = 1$ b) $\frac{r - \frac{1}{x}}{r + \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{1}{r}}{x + \frac{1}{r}}$ c) $\frac{x - \frac{1}{n}}{\frac{1}{x} - n} = n + x + 1$

Textaufgaben

219 Der Zähler eines ungekürzten Bruches ist um 3 grösser als der Nenner. Der Wert des Bruches ist 0.8. Berechne Zähler und Nenner.

220 Der Nenner eines ungekürzten Bruches ist um 240 grösser als der Zähler. Addiert man 1200 zum Zähler, so erhält man einen Bruch, dessen Wert zum ursprünglichen reziprok ist. Berechne Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruches.

- 221** Peter verwechselt das Subtrahieren mit dem Dividieren. Statt dass er x durch a dividiert, subtrahiert er a von x . Trotzdem erhält er das richtige Resultat. Bestimme x .
a) $a = 2$ b) $a = 3$ c) $a = 10$ d) $a = -10$ e) $a = \frac{4}{3}$ f) allgemein
- 222** Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz dieser Kehrwerte. Welche Zahlen sind es?
- 223** Ein grosser Bagger benötigt für einen Aushub 12 Stunden. Würde noch ein kleinerer Bagger helfen, so könnte der Aushub in 9 Stunden gemacht werden. Wie lange würde der kleine Bagger allein brauchen?
- 224** Ein Wasserbecken wird durch eine Zuleitung in 10 Stunden gefüllt. Die Zuleitung wird um 9.00 Uhr geöffnet. Um 11.30 Uhr wird zusätzlich eine zweite Zuleitung geöffnet, so dass das Becken schon um 16.00 Uhr voll ist. Wie lange hätte die zweite Zuleitung allein, um das Becken zu füllen?
- 225** Zwei Metallstücke haben die Massen 6 kg und 7.2 kg. Das Volumen des zweiten Stückes beträgt 90% des Volumens des ersten. Die beiden Dichten unterscheiden sich um 2.5 g/cm^3 . Berechne das Volumen des ersten Stückes.
- 226** Ein Schiff benötigt für eine 180 km lange Strecke einen Sechstel weniger an Zeit als ein langsames Schiff, dessen mittlere Geschwindigkeit um 5 km/h kleiner ist als die des schnelleren. Berechne die beiden Fahrzeiten.
- 227** Ein Autofahrer erreicht sein Ziel nach 120 km Fahrt um 15.00 Uhr. Wäre seine mittlere Geschwindigkeit um 4 km/h grösser gewesen, so hätte er 4% Zeit gewonnen. Wann ist er gestartet?
- 228*** Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B . Berechne die Laufzeit von A .
- 229** Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr, um allein Schutt wegzuführen, als ein grosser. Beide gemeinsam können den Schutt in je 20 Fahrten wegführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?
- 230** Der Kilopreis der Kaffeesorte A ist um 2 Franken höher als derjenige der Sorte B . Von der Sorte B erhält man für 160 Franken 8 kg mehr, als man von der Sorte A für 120 Franken erhält. Berechne den Kilopreis der Sorte A .

Einige Ungleichungen

- 231** a) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x} < 3$ d) $\frac{-1}{x} < -3$
- 232** a) $\frac{2}{x} > 1$ b) $\frac{-2}{x} > -1$ c) $\frac{-1}{-2x} > 1$ d) $\frac{-1}{-2x} > -1$
- 233** a) $\frac{1}{x-4} < 0$ b) $\frac{8}{x+5} > 0$ c) $\frac{-7}{2x-3} < 0$ d) $\frac{5}{6-x} > 0$
- 234** a) $\frac{2}{3x+8} < 0$ b) $\frac{-6}{1-x} > 0$ c) $\frac{-1}{3-4x} < 0$ d) $\frac{12}{8x-9} > 0$
- 235** a) $\frac{1}{(x-2)(x-6)} < 0$ b) $\frac{1}{(x-2)(x-6)} > 0$ c) $\frac{x-2}{x-6} > 0$
- 236** a) $\frac{x}{x+5} < 0$ b) $\frac{-3}{x^2+5x} < 0$ c) $\frac{4}{x^2-8x+15} > 0$
- 237** a) $\frac{6}{x-5} < \frac{1}{2}$ b) $\frac{6}{x-5} > \frac{1}{2}$ c) $\frac{x+5}{x-3} < 2$ d) $\frac{x+1}{x-8} > 4$
- 238** a) $\frac{5}{4-x} > \frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{4-x} < \frac{2}{3}$ c) $\frac{2x-1}{2x+1} < \frac{7}{6}$ d) $\frac{x-3}{x+3} > 3$