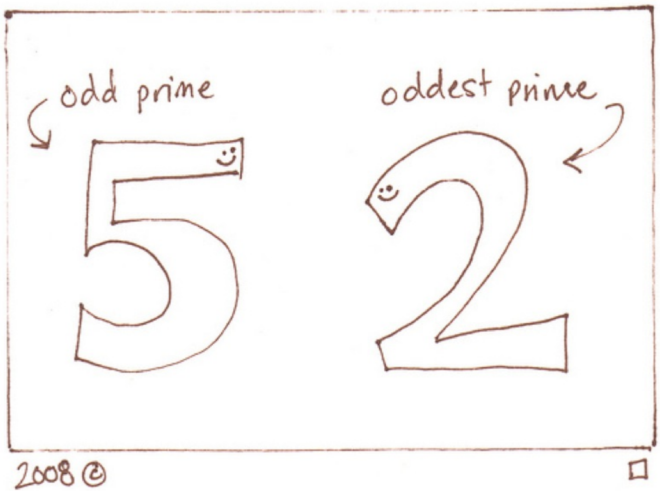



# Zahlen & Rechnen

**I like $\mathbb{P}$**

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Mengenlehre

## 1.1 Historisches zur Mengenlehre

Die Mengenlehre kann als Fundament der gesamten modernen Mathematik aufgefasst werden. Ihre Begriffe und Sprachelemente sind heute für die Formulierung mathematischer Probleme unentbehrlich geworden.

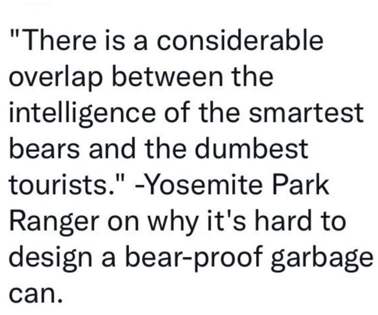



Abbildung 1: Schnittmenge

Die axiomatische Mengenlehre ist ein relativ neuer mathematischer Gegenstand. Die wichtigsten Grundbegriffe gehen auf den deutschen Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) zurück. Seine erste mengentheoretische Arbeit erschien 1874. Nach einem Ausspruch von David Hilbert, einem bedeutenden deutschen Mathematiker (1862–1943), schuf Cantor mit seiner Mengenlehre

> „. . . einen der fruchtreichsten und kräftigsten Wissenszweig der Mathematik, ein Paradies, aus dem uns niemand soll vertreiben kännen.“

## 1.2 Definition der Menge nach Cantor

Unsere Sprache enthält viele Ausdrücke zur Bezeichnung von Mengen. Die Mathematiker bevorzugen die, etwas unscharfe,

**Definition 1.1: Menge**

Unter einer Menge versteht man jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

**Bemerkung 1.2.1.** Es ist empfehlenswert, eine leere Menge zu definieren. Die leere Menge $\{\} =: \emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.

Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Menge hinzuschreiben:

- die aufzählende Form
- die beschreibende Form

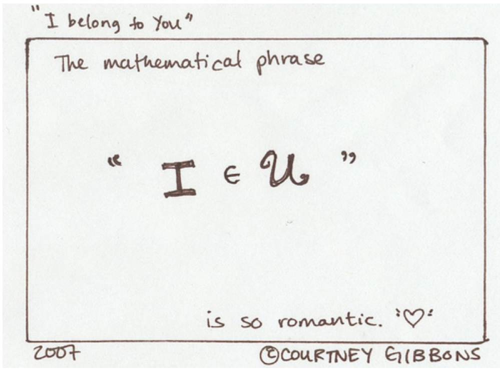



Abbildung 2: „ist Element von“

**Definition 1.2: Element**

Die Objekte einer Menge nennt man Elemente der Menge.

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ Objekte. Diese lassen sich zu einer Menge $\mathbb{G}$ zusammenfassen. Elemente einer Menge werden in geschweifte Klammern gefasst. Man schreibt

$$\mathbb{G} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

**Beispiel 1.2.1.** Die Menge der fünf traditionellen Sinne

$$\mathbb{S} = \{\text{sehen}, \text{hören}, \text{riechen}, \text{schmecken}, \text{tasten}\}$$

Mengen bezeichnet man üblicherweise mit Grossbuchstaben, Elemente mit Kleinbuchstaben. Zur Veranschaulichung benutzt man meist sogenannte Euler- oder Venndiagramme.

**Bemerkung 1.2.2.** Um auszudrücken, ob ein Element zu einer Menge $\mathbb{G}$ gehört oder nicht, benutzt man die Symbole $\in$ (sprich „ist Element von“, oder kurz „in“) bzw. $\notin$ (sprich „ist nicht Element von“, oder kurz „nicht in“).

**Übung 1.1.**

Entscheide, ob es sich um eine Menge im mathematischen Sinn handelt. Begründe deine Antwort.

a) Alle Primzahlen kleiner als 20.

b) Alle reichen Leute in der Schweiz.

c) Die Menge der Patienten eines Spitals.

d) Die Bremer Stadtmusikanten aus dem gleichnamigen Märchen.

**Übung 1.2.**

Schreibe die folgenden Mengen explizit auf.

a) Die Menge der Primzahlen kleiner als 10

b) Die Menge natürlicher Satelliten der Erde

**Übung 1.3.**

Gib eine Beschreibung in Worten der folgenden Mengen an und füge jeweils ein weiteres Element hinzu:

a) $\{a, e, i, o, \quad \}$

b) $\{1972, 1976, 1980, \quad \}$

c) $\{2, 4, 8, 16, 32, \quad \}$

**Übung 1.4.**

Schreibe als Menge:

a) die Buchstaben im Wort Mississippi

b) Grossbuchstaben mit einem Symmetriezentrum

**Übung 1.5.**

Es sei $\mathbb{A}$ die Menge der Konsonanten, $\mathbb{B}$ die Menge der Vielfachen von 5 und

$$\mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x-5)(x+3)(x-2) = 0\}.$$

Setze das richtige Zeichen ($\in$ oder $\notin$).

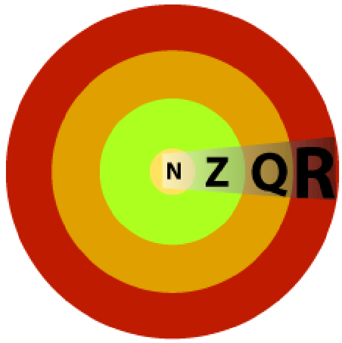
a) $d \quad \mathbb{A}$

b) $5 \quad \mathbb{C}$

c) $99 \quad \mathbb{B}$

## 1.3 Historisches zu Zahlen

Beim Zählen benutzte der Mensch die Finger, wie dies heute noch Naturvölker oder Kinder tun. Dies spiegelt sich auch in den alten Zahlenzeichen wieder. Häufig waren dies Striche oder Kerben.




Alte Kulturvölker wie die Babylonier, Ägypter oder Römer schufen bestimmte Symbole für die Zahlen $1, 5, 10, 100, 1000$ u.a. und bildeten damit durch Aneinanderreihen die übrigen natürlichen Zahlen.

Die Inder gaben diesen Ziffern einen Stellenwert und erfanden für eine leere Stelle ein besonderes Zeichen, die Null. Ein Stellenwertsystem und ein Zeichen für die Null hatten lange vor den Indern auch schon die Babylonier. Bei ihnen war 60 die Grundzahl (Sexagesimalsystem).

## 1.4 Bezeichnungen

Hier werden folgend übliche Bezeichnungen und Notationen betreffend Zahlenmengen aufgeführt.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

abgekürzt.

Bei der Subtraktion von $3 - 3$ oder $4 - 5$ treten Schwierigkeiten auf, denn die Ergebnisse sind nicht mehr in den natürlichen Zahlen enthalten. Man erhält so die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Bei der Behandlung nichttrivialer Divisionen, wie etwa $2 \div 3$, entsteht ein weiteres Mal das Bedürfnis, das Zahlensystem zu erweitern. Zur Menge der ganzen Zahlen kommen die Brüche hinzu. Damit erhält man die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$$

In dieser Zahlenmenge kännen die vier Grundoperationen $+, -, \cdot, \div$ uneingeschränkt durchgeführt werden; ausser die Division durch 0. Man sagt:

$\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen bezüglich allen vier Grundoperationen.

**Bemerkung 1.4.1.** Jede rationale Zahl lässt sich durch Division in einen Dezimalbruch verwandeln und vice versa.

Dabei treten zwei Fälle auf:

- Nach endlich vielen Schritten tritt der Rest 0 auf, d.h. der Dezimalbruch ist abbrechend.
- Der Rest 0 tritt nie auf. Dann heisst der Dezimalbruch periodisch.

**Beispiel 1.4.1.** Die rationale Zahl

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

ist abbrechend. Dagegen ist

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

periodisch.

**Übung 1.6.**

Kannst du obige Beispiele mit schriftlicher Division bestätigen?

**Bemerkung 1.4.2.** Umgekehrt lässt sich jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln.

**Beispiel 1.4.2.** Bei den abbrechenden Dezimalbrüchen ist die Umwandlung einfach. Man bestimmt die Grässe der letzten Nachkommastelle, schreibt als Bruch und kürzt gegebenenfalls:

$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Bei den periodischen hilft folgendes Vorgehen: Man definiert die gesuchte Zahl, die als Bruch dargestellt werden soll als $x$. Danach bestimmt man die Länge der Periode und den Wert des Vielfachen von $x$ mit der Periodenlänge. Anschliessend wird $x$ von diesem

Produkt abgezogen und die entstandene Gleichung nach $x$ aufgeläst; voilˆ.

$$\begin{aligned} 0.\overline{12} &= x \\ 12.\overline{12} &= 100x \\ 12 &= 99x \\ \frac{12}{99} &= x \\ \frac{4}{33} &= x \end{aligned}$$

**Beispiel 1.4.3.** Es gibt aber offensichtlich Dezimalbrüche, die weder abbrechend noch periodisch sind.

$$0.1234567891011121314\ldots$$

**Übung 1.7.**

Kannst du einen nicht periodischen und nicht abbrechenden Dezimalbruch konstruieren, der nur Nullen und Einsen enthält?

Ein weiteres berühmtes Beispiel für eine nicht rationale Zahl ist die positive Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist, nämlich $\sqrt{2}$. Mit der folgenden Argumentation (indirekte Beweismethode) lässt sich dies leicht einsehen.

**Satz 1.1: Es gibt irrationale Zahlen**

satz:sqrt2irrational $\sqrt{2}$ ist nicht rational.

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Dazu nehmen wir das Gegenteil der Behauptung an. Können wir diese Gegenannahme auf einen Widerspruch führen, so muss die Gegenannahme falsch und somit die ursprüngliche Aussage richtig sein. (Tertium non datur)

Annahme $\sqrt{2}$ ist rational. Also gibt es eine Darstellung

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

wobei $p, q \in \mathbb{N}$ und der Bruch vollständig gekürzt ist. Daraus folgt durch Quadrieren und Multiplizieren mit $q^2$

$$2q^2 = p^2$$

Das bedeutet, dass $p^2$, und damit $p$ eine gerade Zahl ist. Andererseits gilt

$$q^2 = \frac{p^2}{2} = p \cdot \frac{p}{2}$$

Also ist $q^2$ und damit $q$ gerade. Widerspruch zur Annahme, dass $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt sei. Denn der Bruch kann sicher mit 2 gekürzt werden, weil sowohl $p$ als auch $q$ gerade sind. Also ist $\sqrt{2}$ nicht rational. □

Diese und andere Tatsachen führen dazu, dass man eine umfassendere Zahlenmenge braucht. Wir geben hier keine formale Definition, sondern beschreiben sie folgendermassen.

**Definition 1.3: Reelle Zahlen**

Die reellen Zahlen entsprechen eindeutig sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.

Demnach ist also auch jede rationale Zahl eine reelle. Wir unterscheiden noch durch

**Definition 1.4: Irrationale Zahlen**

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heissen irrational.

**Übung 1.8.**

Kannst du die Situation aller oben vorgestellten Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{I}$ in einem Eulerdiagramm skizzieren?

**Übung 1.9.**

Berechne mit Hilfe der schriftlichen Division den Wert von

a) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{15}$

c) $\frac{3}{11}$

d) $\frac{1}{7}$

**Übung 1.10.**

Schreibe als rationale Zahl in Bruchform

a) $0.1234$

b) $0.\overline{3}$

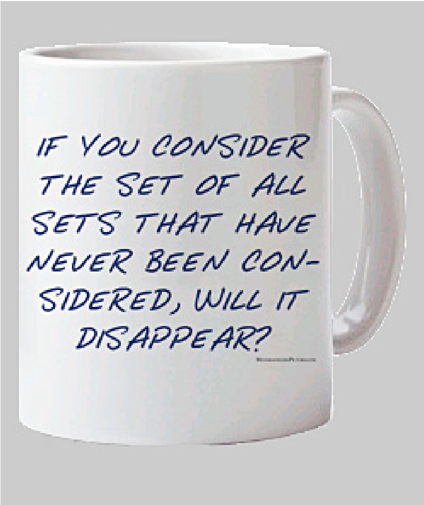



Abbildung 3: Is there a set of non considered sets?

c) $0.\overline{14}$

d) $0.1\overline{23}$

e) $2.\overline{9}$

**Übung 1.11.**

Konstruiere auf einer Zahlengerade die Punkte

a) $\sqrt{5}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $-1\frac{1}{4}$

d) $-\sqrt{3}$

e) $0.\overline{7}$

## 1.5 Kardinalität einer Menge

Im täglichen Leben verwendet man die natürlichen Zahlen vor allem

- zum Nummerieren/Ordnen von Gegenständen; die natürlichen Zahlen dienen als Ordinalzahlen.

- als Anzahlen zur grössenmässigen Beschreibung von Mengen; als Kardinalzahlen.

Wenn man Elemente einer Menge $\mathbb{G}$ abzählt, so ist die letzte Zahl zugleich die Anzahl der Elemente dieser Menge.

**Definition 1.5: Kardinalität**

Die Anzahl der Elemente einer Menge $\mathbb{G}$ heisst *Kardinalität* oder Mächtigkeit von $\mathbb{G}$. Man schreibt $\operatorname{card}(\mathbb{G})$.

**Beispiel 1.5.1.** Für $\mathbb{G} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ist $\operatorname{card}(\mathbb{G}) = 5$. Oder man hat $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

## 1.6 Teilmenge

**Definition 1.6: Teilmenge**

Ist jedes Element einer Menge $\mathbb{A}$ auch in einer Menge $\mathbb{B}$ enthalten, so ist $\mathbb{A}$ eine *Teilmenge* von $\mathbb{B}$. Man schreibt

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B} \text{ oder auch } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$$

**Satz 1.2: Leere Menge**

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

*Beweis.* Gegenannahme: Wäre die leere Menge nicht Teilmenge jeder Menge, dann gäbe es mindestens eine Menge, sagen wir $\mathbb{M}$, welche die leere Menge nicht enthalten würde. Dann müsste es aber nach Definition von Teilmenge ein Element $x$ in der leeren Menge geben, das nicht zu $\mathbb{M}$ gehärt. Widerspruch, denn somit wäre die leere Menge ja nicht leer, weil sie dieses $x$ enthalten würde. Also muss die leere Menge Teilmenge jeder Menge sein. $\square$

Haben zwei Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ die gleichen Elemente, so schreibt man $\mathbb{A} = \mathbb{B}$.

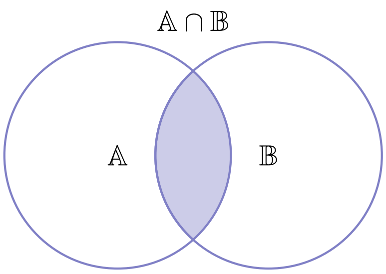
## 1.7 Operationen

### 1.7.1 Durchschnittsmenge

**Definition 1.7: Schnitt**

Die Durchschnittsmenge zweier Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die sowohl zu $\mathbb{A}$ als auch zu $\mathbb{B}$ gehären. In mathematischer Schreibweise

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x \mid x \in \mathbb{A} \text{ und } x \in \mathbb{B}\}$$




**Beispiel 1.7.1.** Ist $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ und $\mathbb{B} = \{2, 3\}$, dann gilt

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{2\}$$

**Definition 1.8: disjunkt**

Zwei Mengen heissen *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, d. h.

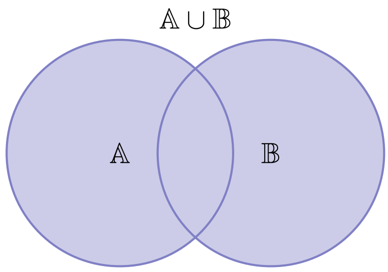
$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$$

### 1.7.2 Vereinigungsmenge

**Definition 1.9: Vereinigung**

Die *Vereinigunsmenge* zweier Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die zu $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{B}$ gehären. Man schreibt

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x \mid x \in \mathbb{A} \text{ oder } x \in \mathbb{B}\}$$




**Beispiel 1.7.2.** Für $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ wie im obigen Beispiel gilt

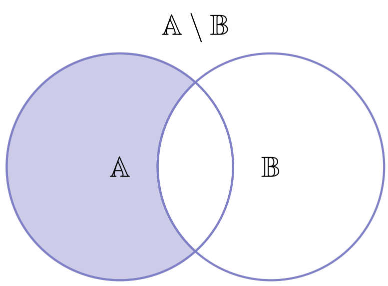
$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3\}$$

### 1.7.3 Differenzmenge

**Definition 1.10: Differenz**

Die Differenzmenge von $\mathbb{A}$ mit $\mathbb{B}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die zu $\mathbb{A}$, aber nicht zu $\mathbb{B}$ gehären. Man schreibt

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{x \mid x \in \mathbb{A} \text{ und } x \notin \mathbb{B}\}$$



**Beispiel 1.7.3.** Mit $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ wie oben gilt

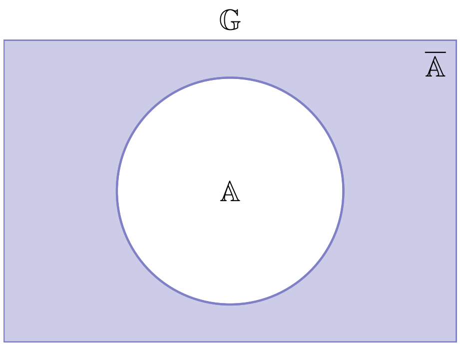
$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{1\}$$

### 1.7.4 Komplementärmenge

**Definition 1.11: Komplement**

Es sei $\mathbb{A} \subset \mathbb{G}$. Das *Komplement* von $\mathbb{A}$ bezüglich der Grundmenge $\mathbb{G}$ besteht aus sämtlichen Elementen von $\mathbb{G}$, die nicht zu $\mathbb{A}$ gehären. Man schreibt

$$\overline{\mathbb{A}} = \{x \mid x \in \mathbb{G} \text{ und } x \notin \mathbb{A}\}$$




**Beispiel 1.7.4.** Ist $\mathbb{G} = \{1, 2, 3\}$ und $\mathbb{A}$ wie oben, dann gilt

$$\overline{\mathbb{A}} = \{3\}$$

**Übung 1.12.**

Es seien

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \{k, a, p, i, t, e, l\} \\ \mathbb{B} &= \{t, e, i, l\} \\ \mathbb{C} &= \{k, a, p\} \\ \mathbb{D} &= \{\} \\ \mathbb{E} &= \{e, i, s\} \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$

b) $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$

c) $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$

d) $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$

e) $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$

f) $\mathbb{E} \subset \mathbb{D}$

**Übung 1.13.**

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $0 \notin \emptyset$

b) $0 \subset \{0, 1, 2\}$

c) $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$

d) $\emptyset \subset 0$

e) $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

f) $\{1, 2\} \not\subset \{2, 1\}$

g) $\emptyset \in \{0\}$

h) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$

i) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{a\}\}$

j) $\emptyset \in \{\emptyset, \{a\}\}$

**Definition 1.12: Potenzmenge**

Die Menge aller Teilmengen einer Menge $\mathbb{A}$ heisst Potenzmenge von $\mathbb{A}$.

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{B} \mid \mathbb{B} \subset \mathbb{A}\}.$$

**Beispiel 1.7.5.** Die Potenzmenge von $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ ist

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

**Übung 1.14.**

Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ von

$$\mathbb{A} = \{a, b, c\}$$

**Übung 1.15.**

Wie viele Elemente hat die Potenzmenge einer Menge $\mathbb{A}$ mit $\text{card}(\mathbb{A}) = n$?

**Übung 1.16.**

Es sei die Grundmenge

$$\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20\}$$

sowie Teilmengen von $\mathbb{G}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \{x \in \mathbb{G} \mid x \text{ ist Viererzahl}\} \\
\mathbb{B} &= \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \\
\mathbb{C} &= \{x \in \mathbb{G} \mid x \text{ ist ungerade}\}
\end{aligned}$$

Ermittle

a) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$

b) $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}$

c) $\overline{\mathbb{C} \cup \mathbb{B}}$

d) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{A}$

**Übung 1.17.**

Ermittle

a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$

b) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$

**Übung 1.18.**

Von 45 Schülerinnen nehmen 26 an einer Arbeitsgemeinschaft für Physik, 14 an einer Arbeitsgemeinschaft für Chemie teil. Wie viele Schülerinnen nehmen mindestens an keiner der beiden Arbeitsgemeinschaften teil, wie viele höchstens?

**Übung 1.19.**

Betrachte folgende Mengen: Grundmenge

$$\mathbb{G} = \{x \mid x \text{ ist Klubmitglied}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \{x \mid x \text{ trägt eine Krawatte}\} \\
\mathbb{B} &= \{x \mid x \text{ hat seinen Arbeitsplatz in Basel}\} \\
\mathbb{C} &= \{x \mid x \text{ hat braune Augen}\} \\
\mathbb{D} &= \{x \mid x \text{ ist älter als 20 Jahre}\}
\end{aligned}$$

Übersetze die folgenden beiden Sätze in die Mengensprache:

a) Es gibt keine Klubmitglieder mit braunen Augen, die älter als 20 Jahre sind.

b) Alle Klubmitglieder, die eine Krawatte tragen, arbeiten in Basel.

## 1.8 Notizen zu den Übungen

### Notizen zu Übung 1.19

a) ✗, klar definiert $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

b) ✓, reich ist als Kriterium nicht stringent genug.

c) ✗, klar definierte Individuen; man kann entscheiden, ob das Element dazu gehört oder nicht.

d) Darüber lässt sich streiten. ✗, denn jeder kennt die Bremer Stadtmusikanten. ✓, vielleicht gibt es mehr als einen Esel, der singen kann. Vielleicht kann ich nicht entscheiden, ob dieser oder jener Hahn dazu gehört.

### Notizen zu Übung 1.19

a) $\{2, 3, 5, 7\}$

b) {Mond}

### Notizen zu Übung 1.19

a) Menge der Vokale, $u$.

b) Menge an Jahrzahlen, an denen Olympische Spiele stattfanden, 1984

c) Menge der Zweierpotenzen mit natürlichen Exponenten, 64.

### Notizen zu Übung 1.19

a) $\{M, i, s, p\}$

b) $\{\mathtt{H}, \mathtt{I}, \mathtt{N}, \mathtt{O}, \mathtt{S}, \mathtt{X}, \mathtt{Z}\}$

### Notizen zu Übung 1.19

a) $d \in \mathbb{A}$

b) $5 \in \mathbb{C}$, da $0 \cdot 8 \cdot 3 = 0$

c) $99 \notin \mathbb{B}$

### Notizen zu Übung 1.19

Zuerst $1 \div 8 = 0$ Rest 1. Dann $10 \div 8$ ist 1 Rest 2. Wieder einen Zehner für eine weitere Stelle opfern: $20 \div 8 = 2$ Rest 4 und $40 \div 8 = 5$; insgesamt also 0.125.

Bei einem Siebtel rechnet man analog zu oben und kommt so zum Ergebnis aus dem Skript.

**Notizen zu Übung 1.19**

$0.101001000100001\ldots$

**Notizen zu Übung 1.19**

Es muss $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Notizen zu Übung 1.19**

Man kann das Ergebnis mit einem Rechner prüfen. Exemplarisch rechne ich hier

$$\begin{aligned} 1 \div 16 &= 0.0625 && \text{(Rest 1,10)} \\ 100 \div 16 &= 6 && \text{(Rest 4)} \\ 40 \div 16 &= 2 && \text{(Rest 8)} \\ 80 \div 16 &= 5 && \text{(Rest 0)} \end{aligned}$$

**Notizen zu Übung 1.19**

Auch hier kann man das Ergebnis wieder mit einem Rechner kontrollieren. Exemplarisch rechne ich hier

$$\begin{aligned} x &= 0.1\overline{23} \\ 100x &= 12.3\overline{23} \\ 100x - x &= 12.3\overline{23} - 0.1\overline{23} \\ 99x &= 12.2 \\ x &= \frac{12.2}{99} = \frac{122}{990} = \frac{61}{450} \end{aligned}$$

**Notizen zu Übung 1.19**

a) Verwende Pythagoras $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$

b) Mit Strahlensatz: Man ziehe von 0 aus einen Strahl und trage 3 gleichlange Strecken ab. Den Endpunkt verbindet man nun mit 1. Die Parallelen zu dieser Strecke, welche durch die Markierungen gehen, teilen das Intervall $[0, 1]$ in Drittel.

c) Man trägt rückwärts ab und konstruiert einen Viertel analog zu einem Drittel.

d) $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}$ und $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$ konstruieren wir auch mit dem Pythagoras.

e) Wir können berechnen, dass $0.\overline{7} = \frac{7}{9}$ ist und konstruieren Neuntel so wie oben die Drittel.

**Notizen zu Übung 1.19**

a) ✗, $s \notin \mathbb{A}$

b) ✗, $k, a, p \notin \mathbb{B}$

c) ✓

d) ✓

e) ✓

f) ✗, $e, i, s \notin \mathbb{D}$

**Notizen zu Übung 1.19**

a) ✓

b) ✗, 0 ist keine Menge.

c) ✗, das Element $\emptyset$ kommt nicht vor.

d) ✗, 0 ist keine Menge.

e) ✓

f) ✗, das Element $\emptyset$ kommt nicht vor.

g) ✗, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

h) ✓

i) ✓

j) ✓

**Notizen zu Übung 1.19**

$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \mathbb{A}\}$

**Notizen zu Übung 1.19**

Sei $K$ die Anzahl Elemente der Potenzmenge. Wir wissen die ersten paar Zuordnungen $(n \mid K)$:

$$(0 \mid 1), (1 \mid 2), (2 \mid 4), (3 \mid 8)$$

Fügt man zur Menge $\mathbb{A}$ ein weiteres Element hinzu, so nimmt die Anzahl möglicher Mengenkombinationen um den Faktor 2 zu. Denn jede bereits vorhandene Menge, kann mit dem neuen Element kombiniert werden, woraus sich $2n$ Elemente für die neue Potenzmenge ergeben. Wir haben also $K = 2n$ Elemente in der Potenzmenge für eine Menge mit $n$ Elementen.

**Notizen zu Übung 1.19**

a) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8, 12\}$

b) $\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{\}$

c) $\overline{\mathbb{C} \cup \mathbb{B}} = \{2, 4, 6, 14, 16, 18, 20\}$, da $\mathbb{C} \cup \mathbb{B} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 19\}$

d) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{A} = \{2, 6, 10, 14, 18\}$

**Notizen zu Übung 1.19**

a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

b) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$

**Notizen zu Übung 1.19**

Will ich möglichst viele Schülerinnen, die an keiner der beiden Arbeitsgemeinschaften teilnehmen, dann kommen alle 14 der Chemie in den Schnitt mit der Physik. Dies ergibt dann $45 - 26 = 19$ Leute.

Für möglichst wenige Schülerinnen in Arbeitsgemeinschaften lassen wir den Schnitt von Chemie und Physik leer: $45 - (24 + 16) = 5$.

**Notizen zu Übung 1.19**

a) $\mathbb{C} \cap \mathbb{D} = \emptyset$

b) $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$

# 2 Polynome und Brüche

## 2.1 Grundlagen

Polynome und Bruchterme bilden die Bausteine vieler Berechnungen und mathematischer Theorien. Deshalb gehört die Fähigkeit — mit Polynomen und Brüchen sicher umgehen zu können — zu den grundlegendsten Voraussetzungen, um Technik und Anwendungen der Neuzeit verstehen zu können. Als Einstieg zu den Polynomen betrachten wir erst das Pascal'sche Dreieck.

## 2.2 Das Pascal'sche Dreieck

**Übung 2.1.**

Multipliziere aus.

a) $(a+b)^0$

b) $(a+b)^1$

c) $(a+b)^2$

d) $(x-y)^3$

e) $(-u+2v)^4$

Im Folgenden sollen nun das Pascal-Dreieck und einige seiner Eigenschaften präsentiert werden.

Das Pascal'sche Dreieck sieht wie folgt aus; es kann theoretisch unendlich „hoch“ werden.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ & & & & \ldots & & & \end{array}$$

Offensichtlich besteht das Dreieck aus lauter 1-en am Rand. In jeder folgenden Zeile nimmt die Anzahl der Zahlen um Eins zu. Die Zahl in der unteren Zeile ist gleich der Summe der darüber liegenden Zahlen.

Ferner sehen wir, dass diese Zahlen stets der Koeffizienten der Summanden des ausmultiplizierten Terms $(a+b)^n$ sind.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

**Übung 2.2.**

Theoretisch kann man die $k$-te Zahl in der $n$-ten Zeile auch direkt berechnen. Finde eine Formel.

Das Pascal-Dreieck besitzt unter anderem folgende Eigenschaften

- In der Diagonalen $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ liest man die Dreieckszahlen ab.
- Die Summe der $n$-ten Zeile entspricht der Zweierpotenz $2^n$.
- Das Verhältnis zweier benachbarter Zahlen einer Zeile entspricht dem Verhältnis der Anzahl Zahlen, die links und rechts davon stehen inklusive.

**Übung 2.3.**

Berechne mit Hilfe des Pascal'schen Dreieck

a) $(x-1)^5$

b) $(-3+2c)^3$

c) $(y^3-2)^3$

d) $(-x-z)^4$

## 2.3 Notizen zu den Übungen

### Notizen zu Übung 2.3

Man notiert die ersten paar Zeilen des Pascal'schen Dreiecks und rechnet:

a) $1$

b) $a+b$

c) $a^2+2ab+b^2$

d) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

e) $1\cdot(-u)^4+4(-u)^3\cdot 2v+6(-u)^2\cdot(2v)^2+4(-u)\cdot(2v)^3+1\cdot(2v)^4 = u^4-8u^3v+24u^2v^2-32uv^3+16v^4$

### Notizen zu Übung 2.3

Wir denken ans Ausmultiplizieren eines Terms $(a+b)^n$ und welcher Summand wie viele Beiträge bekommt. Seien $0\le k,l\le n$ natürliche Zahlen. Dann kommt der Summand $a^kb^l$ genau $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-l+1)}{l!}$ vor, da ich ja aus $n$ Faktoren $k$ bzw. $l$ kombinieren kann. Man schreibt

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

und nennt letzteres einen Binomialkoeffizienten (sprich: „n tief k“).

### Notizen zu Übung 2.3

a) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$

b) $(-3)^3+3\cdot(-3)^2(2c)+3(-3)(2c)^2+8c^3 = 8c^3-$

$36c^2 + 54c - 27$

c) $y^3 - 6y^6 + 12y^3 - 8$

d) $x^4 + 4x^3z + 6x^2z^2 + 4xz^3 + z^4$

## 2.4 Aufgaben zu Polynome

2 Polynome

## 2 Polynome

*Polynome*[1] sind Terme. Beispiele:

| | |
|---|---|
| $-8ab^2cd$ | 1-gliedriges Polynom oder *Monom*[2] |
| $5yz + 2z^3$ | 2-gliedriges Polynom oder *Binom*[2] |
| $-u - v - w$ | 3-gliedriges Polynom oder *Trinom*[2] |
| $x^5 - x^4 - 1.3x^2 + 7$ | 4-gliedriges Polynom |

Das Monom $-8ab^2cd$ besteht aus dem "Namen" $ab^2cd$ $(abbcd)$ und dem *Koeffizienten*[3] $-8$.

Wir fassen das Polynom $x^5 - x^4 - 1.3x^2 + 7$ als die *Summe der Glieder* $x^5, -x^4, -1.3x^2, 7$ auf. Jedes dieser Glieder ist ein Monom.

Beispiele für Terme, die keine Polynome sind: $\frac{1}{x}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $|n-5|$, $2^y$

Dagegen gilt ein Term, der zu einer Summe von Monomen oder einem einzelnen Monom äquivalent ist, ebenfalls als Polynom. Beispiele:

$$2(a^2 - 3a - 4) = 2a^2 - 6a - 8, \quad \frac{c+d}{2} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d, \quad |y^2| = y^2$$

Unter der *Normalform* eines Polynoms versteht man seine einfachste Darstellung als Summe von Monomen oder als einzelnes Monom.

### 2.1 Berechnung von Polynomwerten

**1** Berechne den Wert des Binoms $a - b^2$ für
a) $a = 9,\ b = 4$ b) $a = 11,\ b = -3$ c) $a = -2,\ b = 5$ d) $a = b = -0.5$

**2** Berechne den Wert des Trinoms $-x^2 + 4xy + 7$ für
a) $x = 3,\ y = 5$ b) $x = -2,\ y = 6$ c) $x = 0,\ y = -9.8$ d) $x = -1,\ y = -6$

1 Griech. polýs "viel", griech. nómos "Gesetz, Regel".
2 Griech. mónos "allein", lat. bis "zweimal", lat. tres "drei".
3 Lat. con (= cum) "zusammen mit", lat. efficiens "bewirkend".

32

2.1 Berechnung von Polynomwerten

**3** Berechne die Polynomwerte $P(10),\ P(0),\ P(-10)$
a) $P(k) = 6k^3 + 7k^2 + 8k + 9$ b) $P(z) = z^3 - z^2 - 5z$

**4** Berechne die Polynomwerte $P(1),\ P(-1),\ P(2),\ P(-2)$
a) $P(a) = a^4 - 5a^2 + a + 4$ b) $P(b) = b^4 - b^3 + b^2 - b + 1$

Zu 5 – 8: Fülle die Tabelle aus.

**5**

| | $x$ | $5x-6$ | $\frac{1}{2}x+8$ | $-x^3+x^2$ | $-x^2-10x-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 4 | | | | |
| b) | −4 | | | | |
| c) | | 19 | | | |
| d) | | | 7.5 | | |

**6**

| | $a$ | $b$ | $3a+4b$ | $a^2+b^2$ | $a^2b-ab^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 5 | 3 | | | |
| b) | −2 | −6 | | | |
| c) | 1 | | −25 | | |
| d) | | 3 | 0 | | |

**7**

| | $3y+1$ | $6y+2$ | $9y+3$ | $-3y-1$ | $-6y-2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 10 | | | | |
| b) | | 16 | | | |
| c) | | | | 20 | |
| d) | | | 4.5 | | |

**8**

| | $z^2$ | $5z^2+7$ | $z^4$ | $z^6-9z^2$ | $z^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 4 | | | | |
| b) | 5 | | | | |
| c) | | 17 | | | |
| d) | | | 9 | | |

33

2 Polynome

### 2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen

Glieder mit dem gleichen "Namen" kann man *zusammenfassen*.
Beispiel: $2ab - 5ab = -3ab$. Dabei werden die Koeffizienten addiert.

Glieder mit verschiedenen "Namen" kann man nicht zusammenfassen.
Beispiel: $2ab - 5a$ ist ein Binom, das nicht zu einem Monom umgeformt werden kann.

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.2 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

**9** a) $10a - 5b - c - 17a - 6b + 9a - 7b - 12c + 8b$
b) $-x^2 + 35x - 24 - 3x^2 + 19 - 47x - 19 + 48x + 2x^2$

**10** a) $4ab - 6.2ac + 5bc - 9.3ab - 1.5ac - 4bc + 9.4ab$
b) $xyz - \frac{3}{2}xy - x - \frac{25}{3}xyz - 11 + \frac{7}{6}xy - x - xy + \frac{25}{3}xyz$

**11** a) $(4m - 17) + (11m - 6)$ b) $5n^2 + 8n + (n^3 - 5n^2)$
c) $x^2 - 3x - 2 + (-x^2 + x + 2)$ d) $(2ef + e - 5f) - 9e - 6f + 3$

**12** a) $8u + (6v + w) + (-15u + 12w) + (-9v - 3w) + (7u - 4v)$
b) $8u + (6v + w - 15u) + 12w + (-9v) + (-3w + 7u - 4v)$
c) $8u + 6v + (w - 15u) + (12w - 9v - 3w + 7u) + (-4v)$
d) $(8u + 6v) + w + (-15u) + (12w - 9v - 3w + 7u - 4v)$

Zu 13 – 16: Addiere die untereinander stehenden Polynome.

**13** a) $136a - 75b$
$-19a + 28b$
b) $-7r^2 - 6r$
$15r^2 + r$
c) $-3x^2y + \frac{7}{2}xy^2$
$\frac{8}{3}x^2y - \frac{5}{2}xy^2$

**14** a) $-x^2 + 2x - 5$
$4x^2 - 3x + 8$
b) $2a - 7b - 9c$
$5b - 6c - d$
c) $u^3 - u^2v + uv^2$
$u^2v - uv^2 + v^3$

**15** a) $-6abc + 5ab - 4a - 13$
$9abc - 8ab - 2a + 10$
$7abc + 3ab - a - 12$
b) $-1.3z^2 - 2.4z - 1.9$
$7.6z^2 + 0.8z - 0.1$
$-0.2z^2 + 1.6z + 5.4$

**16** a) $p^4 - 6p^3 - 12p^2$
$p^3 - 6p^2 - 12p$
$-p^2 + 6p + 12$
b) $x^2 - xy + y^2 + y - 1$
$x^2 - 6y^2 - 7x$
$xy + 2y^2 - 5x + 8$

34

2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen

**17** a) $-(a + b)$ b) $-(11r + 13s + 8t)$ c) $-(x^3 + 4x^2 + 5x + 6)$
d) $-(-z)$ e) $-(-u + v - w - y)$ f) $-(2ab - 7ac - a + 9)$

**18** Stelle die Werte der Binome $a + b,\ a - b,\ -a + b,\ -a - b,\ b + a,\ b - a$ für
a) $a = 29,\ b = 53$ b) $a = -47,\ b = 16$ c) $a = 61,\ b = -35$
d) $a = -28,\ b = -14$
in einer Wertetabelle zusammen.

**19** a) $a - (b + c)$ b) $5k - (k + 3)$ c) $-n - (n^2 + 4n)$

**20** a) $8y + 2 - (3y + 5)$ b) $2x + 4 - (x^3 + 4)$ c) $2.5a - 3.6b - (1.8b + c)$

**21** a) $a - (b + c + d)$ b) $4x - 5y + 6z - (3x + 2y + 8z)$

**22** a) $x^2 + 8x - (x^2 + 2x + 4)$ b) $2a^3 - 3a^2b - (a^2b + ab^2 + ab)$

**23** a) $a - (b - c)$ b) $a - (-b + c)$ c) $a - (-b - c)$
d) $3m - (3m - 4)$ e) $\frac{1}{2}y - \left(-x - \frac{1}{3}y\right)$ f) $12t^2 - (-12t^2 + 5t)$

**24** a) $z^2 - 4z - (2z - 3)$ b) $-5e + 7 - (-5e + 7)$ c) $p + q - (-p - q)$

**25** a) $a - (-b + c - d)$ b) $a - (b - c - d + e)$
c) $4v - (-5u - 6v + 7w)$ d) $8x - 8y - 8z - (x - 2y + 3z)$

**26** a) $-6g + 5 - (g^2 - 7g - 1)$ b) $a - 2b + 3c - 4d - (a - 2b + 3c - 4d)$

Zu 27 – 30: Subtrahiere das untere Polynom vom oberen.

**27** a) $3a - 5b$
$9a + 7b$
b) $-2c - d$
$6c - d$
c) $-8z + 7$
$-8z - 12$
d) $x^2 + \frac{2}{3}y^2$
$-x^2 - \frac{1}{5}y^2$

**28** a) $5rs - 7rt - 9st$
$-6rs + rt - st$
b) $1.6n^3 - 0.8n^2 + 2.7n - 3.2$
$1.2n^3 - 0.6n^2 - 1.5n + 4.8$

**29** a) $x - y + z$
$x - z$
b) $4a$
$2a - 5b + c$
c) $-e^2 + 9e$
$e^2 - 3$
d) $8p - 8q$
$7q - 7r$

**30** a) $5at - 2bt - 3c$
$5at - 2bt + 1$
b) $2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x$
$-4x^3 + 6x^2 + 8x - 10$

**31** $P_1 = a - 0.5b - 1.8c + 2d,\quad P_2 = 1.4b - 0.6c - 3.5d + 2e$
a) $P_1 + P_2 = ?$ b) $P_1 - P_2 = ?$ c) $P_2 - P_1 = ?$

35

**32** $P_1 = -5x^2 - 7xy - y^2 - 4x + 8y - 2, \quad P_2 = 5x^2 + xy - y^2 + 3x - 4y - 9$
a) Addiere die Polynome $P_1$ und $P_2$.
b) Subtrahiere das Polynom $P_2$ von $P_1$.
c) Subtrahiere das Polynom $P_1$ von $P_2$.

**33** Setze in den Term $a - b$ und in den Term $b - a$ ein:
a) $a = -26,\ b = -15$ b) $a = 4.4,\ b = -3.9$
c) $a = 5x + 2y,\ b = 4x + y$ d) $a = 2t - 3,\ b = t + 6$
e) $a = v - 7,\ b = w - 5$ f) $a = z^2 + 2z - 4,\ b = 3z^2 - z + 8$

**34** Setze in den Term $a - b - c$ ein:
a) $a = 14,\ b = 60,\ c = 29$
b) $a = -25,\ b = -37,\ c = -12$
c) $a = 4n - 5,\ b = 3n - 6,\ c = 2n - 7$
d) $a = x - 4y,\ b = -2x + 9z,\ c = 5y - 8z$
e) $a = u^2 - u + 3,\ b = 6u - 7,\ c = u^2 - 4u$
f) $a = p,\ b = q - r,\ c = r - q$

**35** a) $2v - (5w + 10) - 4w - (8v - 7) - 1 + (6v - 9w)$
b) $a - (2b + 3c + 4) + (-5a + 6) - 7b - (-8a + 9b + 10c - 11)$

**36** a) $\frac{1}{3} - (m^2 - m - 2.5) - 4m - \left(m^2 + \frac{5}{6}\right)$
b) $8x^2y - 2xy^2 - (7x^2y^2 + 4xy^2 - 5xy) - 16x^2y - (-13x^2y^2 + 8x^2y - 6xy^2)$

**37** a) $a - (b - (c - d))$ b) $-(-(3p + 8) + 6p) + 8$
c) $15y - [5y - (2y - z)]$ d) $6.4r - [2.7 - (4.5r + 3.1)]$
e) $-[a - (6b + 4) + b] + 3a - 7$ f) $8x^2 - [4x - (3x^2 - 7x + 2)] + 9$

**38** a) $-9s + 6t - [t - (5s - 8t) - (3s + 7t) - s]$
b) $12q^2 - (25q^2 - (17q - 20) - 13q^2) - (10q - 15)$

**39** a) $6.75f - (3.2g - 1.05) - [2.54f - (f - 0.49g + 0.07)]$
b) $-\left[\frac{1}{10}x - \left(xy - \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}y\right)\right] + xy - \left(\frac{1}{15}x - \frac{1}{4}y\right)$

**40** $45n^3 - (12n^2 + 3n - 1) - [45n^3 - (5n^2 + 10n - 1) - (-9n^2 + 16n + 3)] - 24n^2$

**41** a) $+[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$
b) $+[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$
c) $-[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$
d) $-[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$

**42** a) $(15x - 7y) - [5x - (10x + 8y) + 12] - [20x + y - (5x + 12)] - y$
b) $-[-(-2u^2 + 11u - 13) + 4u + 5] + 7u^2 - u - [3u - 8 - (-u^2 + 9)]$





**43** a) $a - (b - (c - (d - e)))$
b) $1 - (2 - (3 - (4 - (5 - z))))$
c) $50k + 29 - \{18k - [44 - (7k + 36)]\} - 13k$

**44** a) $-(3p + 8) + 5p - \{-6p + 2 - [9p - (p - 1) - 7] + 4p\}$
b) $2a^3 - \{4a - [4 - (6a^3 - 1) - a^2] - (3a^2 - 5) + 3a - [4a^3 - (2a^2 - 7a)]\}$
c) $20x^2 - (7xy - (3y^2 - (8x^2 + 11xy + 6y^2) - 12x^2) - 5y^2) - (9xy - 4y^2)$

## 2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.3 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

**45** a) $3(2a + 5b)$ b) $(-2)(9c - d)$ c) $(-n)(-n + 8)$
d) $(-x - 2y)(-3)$ e) $(4z - 1)z^2$ f) $(6s - 5t)(-0.5u)$

**46** In welchen Aufgaben von Nr. 45 kann man ein Klammerpaar weglassen, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert?

**47** a) $-5(7v - 9w)$ b) $-c(-a + b - c)$ c) $2p(p^2 - 1.5p - 4)$

**48** a) $(8s + 3t)3u$ b) $(-x - y + z - 1)(-1)$ c) $(e + 2f - 6)ef$

**49** Multipliziere das Polynom $x^2 - 0.8x + 2.4$ mit
a) $4$ b) $-4$ c) $\frac{2}{3}$ d) $5x$ e) $-x^2$ f) $-0.5y$

**50** Multipliziere das Polynom $2a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 8b^3$ mit
a) $-1$ b) $0$ c) $a$ d) $-b$ e) $ab$ f) $-2.5r$

**51** a) $3uv^2(u^4 - 3u^2v^2 - 2v^4)$ b) $-2abc(2a^2 + 4ab - b^2 - ac + 8c^2)$

**52** a) $(-m^6 + m^4 - m^2 + 1)(-m)$ b) $-\frac{1}{3}xy^2z^3\left(\frac{5}{2}x^3y^2z - 6x^2y + \frac{3}{5}x\right)$

**53** a) $(-1)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$ b) $b_3(-b_1 + b_2 - b_3 + b_4)$

**54** a) $(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)x_4$ b) $y_1y_4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

**55** a) $4(a + 2b) + 3(a - 3b)$ b) $d(c - 11) - c(d - 9)$
c) $x - 5y - 8(x - y + z)$ d) $n^2 - n(n + 5) - 6(1 - n)$

**56** a) $2(3u - v) - 3(2u + v)$ b) $a(9a + 10) - 5(a^2 + 2a - 3)$
c) $p(q - r) - q(p - r) - r(-p + q)$ d) $4(2x - 7y - 3z) - 7(x - 4y) + z$





**Zu 57 – 78:** $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

**57** a) $(a + b)(c + d)$ b) $(x + 4)(x + y)$ c) $(t + 2)(t + 5)$
d) $(e + f)(g - h)$ e) $(v - 6)(w + 1)$ f) $(p - q)(x + 7)$

**58** a) $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$ b) $(n + 8)(n - 3)$ c) $(a - z)(b + z)$

**59** a) $(a - b)(c - d)$ b) $(x - y)(z - 5)$ c) $(k - 2)(k - 4)$

**60** a) $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$ b) $(u - 3)(v - 3)$ c) $(p - x)(p - y)$

**61** a) $(-s_1 + s_2)(t_1 - t_2)$ b) $(-r + 6)(-r + 4)$ c) $(-f - g)(-g + 1)$

**62** a) $(a + b)(x + y)$ b) $(a - b)(x + y)$ c) $(a - b)(x - y)$
d) $(-a + b)(-x + y)$ e) $(-a - b)(x - y)$ f) $(-a + b)(-x - y)$

**63** a) $(2c - 7)(4d - 1)$ b) $(5v - 3w)(-6w + 5)$ c) $\left(m + \frac{1}{6}\right)\left(4m - \frac{3}{5}n\right)$

**64** a) $(3x - 2y)(2x - 3y)$ b) $(-11a + 17)(-10b - 17)$ c) $\left(\frac{3}{2}r - 6\right)\left(\frac{2}{3}s + 8\right)$

**65** a) $(z^2 - 1)(z + 1)$ b) $(st - 9s)(-st + 9t)$ c) $(4a^2 - 5b^2)(3a^2 - b^2)$

**66** a) $(p^3 - p)(p^2 - p)$ b) $(10x^2 + 5y)(2x - 6y^2)$ c) $(k^4 + 0.4)(k^2 - 0.2)$

**67** a) $(a + 6)(a - 2)$ b) $(c - 9)(c + 1)$ c) $(x - 5)(x - 3)$
d) $(b - 7)(b - 1)$ e) $(z + 11)(z - 11)$ f) $(8 - t)(4 - t)$

**68** a) $(x - 12)(x + 5)$ b) $(p + 2)(p - 20)$ c) $(a - 2)(a - 9)$
d) $(1 + n)(15 - n)$ e) $(r - 6)(r - 6)$ f) $(y - 3)(y + 4)$

**69** Berechne $a^2 - 10a + 24$ sowie $(4 - a)(6 - a)$ für
a) $a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ b) $a = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ c) $a = 0,\ 16,\ -16,\ 2.5$

**70** Berechne $2x^2 + 5x - 3$ sowie $(x + 3)(2x - 1)$ für
a) $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ b) $x = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ c) $x = 0,\ 10,\ -10,\ 0.6,\ \frac{1}{2}$

**71** a) $(2a - 5)(3a - 1)$ b) $(9 - 4x)(-3 + x)$ c) $(7i - 1)(5i + 1)$
d) $(-k + 4)(-k + 4)$ e) $(2d - 1)(-3d + 8)$ f) $\left(z + \frac{9}{10}\right)\left(z - \frac{5}{6}\right)$





**72** a) $(5y - 13)(y - 7)$ b) $(10 - 3a)(3 + 10a)$ c) $(-5s - 6)(5s - 6)$
d) $(q - 1.2)(q - 0.4)$ e) $(-c - 5)(-c - 2)$ f) $\left(\frac{3}{2}r + 3\right)\left(2r - \frac{4}{3}\right)$

**73** a) $(a + 2b)(3a - b)$ b) $(4x - y)(5x + 2y)$ c) $(-c + d)(-c + 12d)$

**74** a) $(q - 3r)(q - 4r)$ b) $(2a + 3c)(-a + 6c)$ c) $(8s - 9t)(10s + 11t)$

**75** a) $(t^2 + 2)(t^2 + 7)$ b) $(p^2 - 5)(3p^2 - 5)$ c) $(n^2 - 2)(2n^2 + 1)$

**76** a) $(x^2 - 10)(x^2 - 10)$ b) $(-w^2 + 8)(4w^2 + 9)$ c) $(0.3z^2 + 6)(2z^2 - 1)$

**77** a) $(3a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)$ b) $(c^3 - 5)(c^3 + 4)$ c) $(x^2 - 2x)(-3x + 1)$

**78** a) $(x^2 - 2y^2)(x^2 - 8y^2)$ b) $(6r - 1)(r^2 + 2r)$ c) $(m^2 + 4m)(m^2 - 3m)$

**79** a) $(a - 2b)(c - d + e)$ b) $(x - z - 1)(2x + 3y)$

**80** a) $(p + q - r)(m - n)$ b) $(4a - b)(b - c - 1)$

**81** a) $(4x^2 - 5x + 6)(3x - 1)$ b) $(y - 1)(4y^2 + 3y - 1)$

**82** a) $(a + 1)(a^2 - a - 1)$ b) $(-6z^2 + 3z + 4)(-5z + 3)$

**83** a) $(2x + 4y - z)(3x - 6y + z)$ b) $(-s^2 + 3s + 1)(s^2 - s + 2)$

**84** a) $(a - 2b - 3)(2a + 3b - 2)$ b) $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$

**85** $(5xy - 2xz + yz)(xy + xz - 2yz)$

**86** $(3a^2 - ab - 4b^2)(-a^2 + 2ab + b^2)$

**87** a) $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ b) $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$

**88** a) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ b) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

**89** $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3)(3x^2 + 2x + 1)$

**90** $(z^3 - 2z^2 - 5z + 6)(z^3 + 2z^2 - 5z - 6)$

**91** a) $2(a + b)(c - d)$ b) $-4(p - 2)(-p + s)$
c) $5(2x - 1)(3x + 1)$ d) $(y + 3)(y - 6)(-y)$

**92** a) $-0.7(a-2)(4b+5)$ b) $2(0.5r-3)(r-0.5)$ c) $n(3n-1)(n-6)$ d) $(x-2y)(-x+3y)z$

**93** a) $(a-b)(a+b)(x-y)$ b) $(k+1)(k+2)(k+3)$ c) $(g+2)(2v-1)(v+4)$ d) $(2x+1)(3x-1)(5x+2)$

**94** a) $(1-c)(5-x)(5+x)$ b) $(3a-b)(a-b)(a+2b)$ c) $(z+2)(z-2)(z^2+4)$ d) $(n^2+1)(2n^2-3)(3n^2-2)$

**95** a) $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$ b) $(2x+3)(y-4)(3z+1)$ c) $(x+2)(x-3)(x+4)$ d) $(c+d)(c-8)(d-8)$

**96** a) $(a+b)(s-t)(x+y)$ b) $(x-5)(x+6)(x-1)$ c) $(-x+2)(-y+3)(z-4)$ d) $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2)$

**97** a) $(a+b)(a+2b)+(a-b)(a-2b)$ b) $(x+4)(x+5)-2x(x+7)$ c) $(c+d)(8u-v)-d(8u-v)$ d) $(2a-3)(4a-1)-(5a+4)(a-1)$

**98** a) $(3x-y)(x+y)+(2x+y)(x-y)$ b) $5p(p-3)-(2p+1)(p-8)$ c) $(a-5)(b-5)-(a-6)(b-6)$ d) $7n(9n+28)-(7n-1)(9n+28)$

**99** Berechne die Polynomwerte $P(3)$, $P(7)$, $P(10)$ und $P(-99.5)$.
a) $P(x)=(x-7.5)(x-6)-(x-8)(x-5.5)$
b) $P(t)=2t^2-(2t+5)(t-3)$

**100** Berechne die Polynomwerte $P(11)$, $P(-2)$, $P(0)$ und $P(3.33)$.
a) $P(a)=(a-5)(a-8)-(a-10)(a-4)$
b) $P(x)=(4x+9)(4x+5)-(8x+15)(2x+3)$

**101** a) $17r^2-(4r-2)(8r-5)+(3r-4)(5r+6)$
b) $(a-7)(a+1)(y+z)+(a-7)(a+1)(-z)$

**102** a) $(2x+3)(3x-4)x-(x-11)(x-1)-6x^3$
b) $-(u-1)(2u-1)(3u-1)-1+6u(u^2-u+1)$

**103** a) $4a^2-5[a(2a-9)-3(a+7)]+6(a-12)(a+1)$
b) $[(2m-15)(3m-4)-5(m^2-9m+12)](m-1)$

**104** a) $13x-[-11y-3(5x-6y)+5(2x-7y)-26x]-12y$
b) $36-[r-(r+3)(r-2)][r^2-(r+3)(r-2)]+(r-6)r^2$

**105** a) $40z-\{8z-(9z-4)-2[3z-(7z+1)-(z-9)]-(3z-5(5z-3)]\}$
b) $((((ax+b)x+c)x+d)x+e)x+f$





**106** a) $(25u-13v)-\{15u-[14u-3(4u-5v)-8u]-7(2u+4v)\}$
b) $1-x(1-x(1-x(1-x(1-x(1-x)))))$

Zu 107, 108: $a=x-1$, $b=x+2$, $c=x-3$, $d=x+4$. Ersetze $a$, $b$, $c$, $d$ im folgenden Term durch das entsprechende Binom in $x$ und gib die Normalform des so entstandenen Polynoms an.

**107** a) $ab$ b) $b+cd$ c) $2a-bd$ d) $(a+b)c$ e) $ac+bc$ f) $d^2-12$

**108** a) $a-bcd$ b) $ab-ac$ c) $a(b-c)$ d) $c^2+3c$ e) $(4a-3c)(2b+d)$ f) $abcd$

### Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation, d. h.
$a:b=x \quad \Leftrightarrow \quad a=xb; \quad (a:b)b=a; \quad (ab):b=a$

Der Divisionalgorithmus und Zerlegungen mit Rest folgen im Abschnitt 2.5, die Darstellung von Quotienten in Bruchform im Kapitel 5.

**109** a) $(-58a):(-2)$ b) $21rs:3s$ c) $15ac:(-15a)$

**110** a) $(-35x):7x$ b) $84d:(-6)$ c) $(-9ab):(-9ab)$

**111** a) $3n:6n$ b) $-15y:20$ c) $-8cp:\left(-\frac{1}{2}c\right)$

**112** a) $26z:\left(-\frac{2}{3}\right)$ b) $-54k:(-24k)$ c) $0.4ad:(-1.4d)$

**113** a) $-19t^2:(-t)$ b) $-105px^2:1.5px$ c) $-21r^3:(-r^2)$

**114** a) $-2ab^3:(-4ab)$ b) $119u^4z:(-7u^2)$ c) $-9.2m^2n^2:2.3mn$

**115** a) $-5c^3d^4:5c^2d^2$ b) $-42w^5:(-3w^2)$ c) $-28ax^3y^4:16ax^2$

**116** a) $6a^4n^4:\left(-\frac{1}{3}a^3n^4\right)$ b) $-x^3y^4z^5:x^2y^3z^4$ c) $-\frac{1}{8}mq^4:\left(-\frac{7}{2}q^3\right)$

**117** a) $(8a-8b):8$ b) $(uv+vw):v$ c) $(15x^2+5x):\left(-\frac{5}{3}\right)$

**118** a) $(6m+12n):6$ b) $(24a-20):\left(-\frac{4}{5}\right)$ c) $(-bt+ct):(-t)$





**119** a) $(15ab-10a):5a$ b) $(p^2-p):(-p)$ c) $(1.4x^4+2x^3z):0.1x^3$ d) $(-7cy+3y):(-3y)$

**120** a) $(14r^2-35r):(-7r)$ b) $(u^2v-uv):uv$ c) $(-9ax^4+8bx^3):(-6x^2)$ d) $(8apq-12bpq):\left(-\frac{1}{4}pq\right)$

**121** a) $(18ab+27ac-36ad):9a$ b) $(10k^2+17k-32):(-1)$
c) $(-1.8x^5+2.4x^4-3x^3+3.6x^2):(-2.4x^2)$

**122** a) $(-12at+20bt-32ct):(-4t)$ b) $(16z^3-35z^2-27z):42z$
c) $(70x^5y+25x^4y^3-90x^3y^4-5x^2y):(-5x^2y)$

**123** a) $(a+c):[-(a+c)]$ b) $(x-y):(-y+x)$ c) $(r-5):(-r+5)$

**124** a) $(1-z):(z-1)$ b) $(-m+n):(-n+m)$ c) $(u^2-8):(8-u^2)$

**125** a) $4x(y+z):2x$ b) $-15a^2(s-3):5a$ c) $(d-6)k:(-k)$ d) $-x^4y^3(8x+12):(-4x^3y^3)$

**126** a) $abc(a+b-c):ab$ b) $p^3(-2p+1):(-p)$ c) $-64n^2(x+y):(-8n)$ d) $3z(z^2+10z-24):6z$

**127** a) $6cd^3(u-v):3d(u-v)$ b) $-21(2r-5):7(5-2r)$ c) $2.5(a+b)(a-2):(a+b)$ d) $2.5(a+b)(a-2):(2-a)$

**128** a) $-34c(2x-y):51(-2x+y)$ b) $7.2(t-5)^2:1.8(t-5)$
c) $(a-b)^2(a+b):\left[\frac{1}{2}(b-a)\right]^2$ d) $9mn^3(n-6)(2n-1):3mn(6-n)$

**129** $(12x^2+11x-56):(4x-7)$
Hinweis: Bestimme die Koeffizienten $a$, $b$ so, dass $(ax+b)(4x-7)=12x^2+11x-56$.

**130** Ist der Quotient ein Polynom? Bestimme dieses Polynom gegebenenfalls wie in Nr. 129.
a) $(8x^2-46x+45):(2x-9)$ b) $(15x^2+28x+8):(3x+4)$
c) $(-y^2+2y+24):(y-6)$ d) $(z^2-2.5z-21):(2z+7)$

Zu 131 – 134: Der Quotient soll ein Polynom sein. Bestimme dieses Polynom sowie die Zahl $c$.

**131** a) $(18x^2+cx+14):(3x+2)$ b) $(x^2+cx+32):(-x+4)$

**132** a) $(10x^2+cx-5):(5x+1)$ b) $(2x^2+cx+42):(3x-6)$

**133** a) $(21x^2-37x+c):(7x-3)$ b) $(cx^2+3x-10):(x+2)$

**134** a) $(cx^2-20x+25):(2x-5)$ b) $(x^2+3.6x+c):(0.4x+1.2)$





## 2.4 Formeln

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a+b)^2$ | $=$ | $a^2+2ab+b^2$ | |
| $(a+b)(a-b)$ | $=$ | $a^2-b^2$ | Binomische Formeln |
| $(a+b)^3$ | $=$ | $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ | |
| $(a+b+c)^2$ | $=$ | $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ | Trinomische Formel |

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.4 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

Zu 135 – 138: Rechne auf 2 Arten.

**135** a) $(10+3)^2$ b) $(2+0.4)^2$ c) $\left(6\frac{2}{3}\right)^2$ d) $(2x+3x)^2$

**136** a) $(1.8+1.2)^2$ b) $(100+1)^2$ c) $\left(4\frac{3}{4}\right)^2$ d) $(y+5y)^2$

**137** a) $(10-4)^2$ b) $(2-11)^2$ c) $(-1-20)^2$ d) $(5c-2c)^2$

**138** a) $(3-20)^2$ b) $(-30+5)^2$ c) $(1.7-0.2)^2$ d) $(a-a)^2$

**139** a) $(2x+3)^2$ b) $(4c+5d)^2$ c) $(r^2+17)^2$

**140** a) $(a+11)^2$ b) $(3m^2+0.4)^2$ c) $(5b+23)^2$

**141** a) $(x+(-y))^2$ b) $(a-b)^2$ c) $(6n-1)^2$

**142** a) $(c-2d)^2$ b) $(k^2-k)^2$ c) $(10p^2-18)^2$

**143** a) $(-a+b)^2$ b) $(-a-b)^2$ c) $(-s+1.9)^2$

**144** a) $(-8m-7)^2$ b) $\left(-q+\frac{5}{6}\right)^2$ c) $(-22w-5)^2$

**145** a) $(2ab+16)^2$ b) $(xy-yz)^2$ c) $\left(-2uv+\frac{3}{4}v\right)^2$

**146** a) $(3r^2-6rs)^2$ b) $(-9p^3+4p^2)^2$ c) $(0.3a^2+b^2)^2$

**Zu 147, 148:** Berechne $(a+b)(a-b)$ sowie $a^2-b^2$ für

**147** a) $a=30,\ b=2$ b) $a=5,\ b=15$ c) $a=-20,\ b=3$
d) $a=4x,\ b=3x$

**148** a) $a=17,\ b=3$ b) $a=17,\ b=-3$ c) $a=-8,\ b=0.4$
d) $a=t,\ b=t$

**149** a) $(2x+5)(2x-5)$ b) $\left(r+\frac{2}{3}s\right)\left(r-\frac{2}{3}s\right)$ c) $(4y-1)(4y+1)$

**150** a) $(a+7b)(a-7b)$ b) $(z^2-1)(z^2+1)$ c) $(8c+3d)(8c-3d)$

**151** a) $(-3n+10)(-3n-10)$ b) $(-4a+12bc)(-4a-12bc)$

**152** a) $(-0.6r+1)(-0.6r-1)$ b) $(-2u-11v)(-2u+11v)$

**153** a) $(5n+4)(-5n+4)$ b) $(y-2z)(-y-2z)$

**154** a) $(-8q-1)(8q-1)$ b) $(7a+10b)(10b-7a)$

**155** a) $\left(\frac{7}{2}z^2+1\right)\left(\frac{7}{2}z^2-1\right)$ b) $(-m^3+m)(m^3+m)$
c) $(-xy-13)(-xy+13)$ d) $(1.4i-2.3)(1.4i+2.3)$

**156** a) $(c^3-d^3)(c^3+d^3)$ b) $\left(9ab-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{3}{5}b+9ab\right)$
c) $(4p^4+1)(4p^4-1)$ d) $(-25n^2+6n)(-25n^2+6n)$

**157** a) $(5x^2-8x)^2$ b) $\left(2e+3\frac{1}{3}\right)\left(2e-3\frac{1}{3}\right)$
c) $(17+4n)(17-4n)$ d) $(-a^2-b^2)(-a^2-b^2)$

**158** a) $(9uv^2-1)(9uv^2+1)$ b) $(-6r^2+19)(-6r^2-19)$
c) $\left(\frac{7}{6}a-\frac{3}{7}b\right)\left(-\frac{3}{7}b+\frac{7}{6}a\right)$ d) $[(5x+2y)(5x-2y)]^2$

**159** a) $(x+3y+4z)^2$ b) $(2a-b-3)^2$ c) $(-n^2+n+1)^2$

**160** a) $(4a-1.5b+c)^2$ b) $(-u^2-2uv+2v^2)^2$ c) $[(p+1)(p+5)]^2$

**161** a) $(a+b+c+d)^2$ b) $(x^3-x^2-x-4)^2$

**162** a) $(5x-2y+z-1)^2$ b) $(a+b+c+d+1)^2$





**163** a) $2c(c-5)^2$ b) $(x-y)(y-z)^2$ c) $\left(k+\frac{1}{4}\right)(2k-6)^2$

**164** a) $(u-v)(u+3v)^2$ b) $(-p+2)^2(p+4)$ c) $(a+b)(a+b)^2$

**165** a) $(a+b)^3$ b) $(c+10)^3$ c) $(2r+5s)^3$ d) $(z^2+3z)^3$

**166** a) $(d+1)^3$ b) $(uv+v)^3$ c) $\left(m^2+\frac{1}{3}\right)^3$ d) $(10k+10)^3$

**167** a) $(a-b)^3$ b) $(4g-1)^3$ c) $\left(\frac{1}{2}k-2\right)^3$ d) $(x^2-y^2)^3$

**168** a) $(3n^2+2n)^3$ b) $(3n^2-2n)^3$ c) $(-3n^2+2n)^3$ d) $(-3n^2-2n)^3$

**169** a) $(2n+5)(2n-5)(n+1)$ b) $(a-b)(x+y)(x-y)$
c) $(6z^2+1)(3z+2)(3z-2)$ d) $(r+3)(r-3)(r+4)(r-4)$

**170** a) $(a+2)(a-2)(7b-8)$ b) $(4x+2)(4x-2)(x+1.5)(x-1.5)$
c) $(9c^2+d^2)(3c-d)(3c+d)$ d) $(p-5)^2(p+5)^2$

**171** a) $(x+9)(x-9)-(y+9)(y-9)$ b) $(7e+4)^2+(7e-4)^2$
c) $(a+4b)(a-4b)-(a-5b)^2$ d) $(2uv)^2-(2u^2+v^2)^2$

**172** a) $(2y+2z)^2-2(y+z)^2$ b) $(r^2+r)(r^2-r)+\left(r^3-\frac{1}{2}r\right)^2$
c) $(3x+8)^2-(3x-8)^2$ d) $(a^2-b^2)^2-(a+b)^2(a-b)^2$

**173** $P(u,v)=u^2-(u+v)(u-v)$;
berechne die Polynomwerte $P(13,\ 9)$, $P(4,\ 7)$, $P(8,\ -12)$ und $P(-5.1,\ -6)$.

**174** $P(x)=(x+9)^2-(x+7)(x+11)$;
berechne die Polynomwerte $P(3)$, $P(-15)$, $P(9)$ und $P(-7.5)$.

**175** a) $(4a-b)^2-3(a+b)(a-b)-2b(-a+2b)$
b) $(2x+3y)^2+(4y-3x)^2-3(7y^2-x^2)-4(2x-y)^2$

**176** a) $(5s-3)^2-(9s+1)(2s-7)-(s-3)^2-40s$
b) $6(n-1)(n+1)-(n^2+1)^2+n^4-2(-n+2)(-2n+1)$

**177** $(x-y-z)^2+(-x+y-z)^2+(-x-y+z)^2$

**178** a) $(r^2+r+4)^2+(r^2-r-5)^2$ b) $(-7a+b+6c)^2-(7a-b-6c)^2$

**179** a) $(n+1)^3-(n-1)^3$ b) $(q^2+2)^3-6(q^2+1)^2$

**180** a) $(-a+b)^3+b(2a-b)(2a+b)$ b) $(x-1)(x+8)^2-(x-4)^3$





**181** a) $2m^2-17m-5(m-2)(m-6)-[8(m-7)-3(m+4)^2]$
b) $\{[3b-(b+4)(b-1)]^2-b^4\}(b^2+2)+8b^4$

**182** a) $2c^2\{(a-c)^2-[a(a-c)-c(a+c)]\}$
b) $(k+5)^2-(2k+5)[(k-1)^2-(k+2)(k-2)]$

**Zu 183–188:** Multipliziere mit Hilfe binomischer Formeln aus. Beispiel:
$[a+b+c][a-b+c]=[(a+c)+b][(a+c)-b]=(a+c)^2-b^2$
usw.

**183** a) $(x+3y-8z)(x+3y+8z)$ b) $(5m-n+5)(5m-n-5)$
c) $(r+s-7)(-r+s-7)$ d) $(u^2+uv+v^2)(u^2-uv+v^2)$

**184** a) $(19f-g+21)(19f-g-21)$ b) $(-6a+b-c)(-6a+b+c)$
c) $(p^2-4p-2)(p^2+4p-2)$ d) $(-x^2-y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)$

**185** a) $(a+b+c)(a-b-c)$ b) $(2u-5v-w)(2u+5v+w)$
c) $(x-y+z)(x+y-z)$ d) $(-r^2+r+6)(r^2+r-6)$

**186** a) $(-5p-3q+1)(5p+3q+1)$ b) $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$
c) $(-4u+v-7w)(-4u-v+7w)$ d) $(n^2+4n+8)(-n^2+4n-8)$

**187** a) $(a+b+u+v)(a+b-u-v)$ b) $(x+y-z-3)(x-y-z+3)$

**188** a) $(r^3+r^2-r+1)(r^3-r^2-r-1)$ b) $(cd+5c-d-4)(cd-5c+d-4)$

**Zu 189, 190:** Zeige, dass die angegebene Gleichung eine Termumformung darstellt.

**189** a) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$
b) $x^2-3(x+y)^2+3(x+2y)^2=(x+3y)^2$
c) $(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2$
d) $(r^2+s^2-t^2)^2+(2rt)^2+(2st)^2=(r^2+s^2+t^2)^2$

**190** a) $[(k+3)^2+k^2]-[(k+1)^2+(k+2)^2]=4$
b) $n^2+(n+1)^2+[n(n+1)]^2=[n(n+1)+1]^2$
c) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ax+by+cz)^2$

**191** Multipliziere zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen gleicher Parität (also entweder zwei aufeinander folgende gerade oder zwei aufeinander folgende ungerade Zahlen) und addiere 1. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?

**192** Multipliziere drei aufeinander folgende natürliche Zahlen und addiere dazu die mittlere dieser Zahlen. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?





**Zu 193, 194:** Verwende das Pascal-Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

u s w.

**193** a) $(3c+d)^4$ b) $(e-5f)^4$ c) $(x+2y)^5$ d) $(-m+10)^5$
e) $\left(k+\frac{1}{2}\right)^6$ f) $(1-z^2)^6$ g) $(2r+s)^4-(2r-s)^4$

**194** a) $(-u+4v)^4$ b) $(n^2+n)^5$ c) $(0.1-p)^6$ d) $(a^3+b^3)^4$
e) $(i^2-3)^5$ f) $\left(t+\frac{1}{t}\right)^6$ g) $(h-1)^5-(1-h)^5$

## 2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

Die Darstellung eines Polynoms als Produkt heisst eine Faktorzerlegung:

| Summe | $\xrightarrow{\text{faktorisieren}}$ | Produkt |
|---|---|---|
| $a^2+3a$ | $=$ | $a(a+3)$ |
| $4x^2-y^2$ | $=$ | $(2x+y)(2x-y)$ |
| $n^2+5n+6$ | $=$ | $(n+2)(n+3)$ |

Faktorzerlegungen können zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen (Kapitel 3) oder Kürzen von Brüchen (Kapitel 5) nützlich sein.

In den meisten Aufgaben des Abschnitts 2.5 ist eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten zu finden; die Ausnahmen sind aus dem Zusammenhang ersichtlich (z. B. Nr. 205–214). Reine Zahlfaktoren müssen nicht weiter zerlegt werden. Wenn ein Polynom keine Faktorzerlegung hat (abgesehen von Zerlegungen mit dem Faktor 1 oder −1), heisst es *unzerlegbar* (*prim*).

### Ausklammern

**195** a) $5a+5b$ b) $6x-9$ c) $cd+ce$ d) $u^2-uv$

**196** a) $20y-12$ b) $35a+48b$ c) $pq-qr$ d) $ct-dt^2$

**197** a) $6ax+6ay$ b) $24z^3-16z^2$ c) $10c-21$ d) $108n^2+168n$

**198** a) $3bt-9ct$ b) $21efg-35eg$ c) $81y^3+54y$ d) $126a^2b+96ab^2$

**199** a) $8a+4$ b) $z^2-z$ c) $6bc+2b$ d) $x^2y^2-xy$

**200** a) $7e-7$ b) $2rs+s$ c) $p^3+p^2$ d) $36uvw+9uw$

**201** a) $14f-21g+28$ b) $10at+15bt-6ct$ c) $xy-y^2-yz$

**202** a) $15x-27y-12z$ b) $13r+65s-91$ c) $14np-12nq+21n$

**203** a) $18a^2b+18ab^2-9ab$ b) $4x^2yz-10xy^2z+16xyz^2$

**204** a) $42m^3n^2-70m^2n^3-42m^2n^2$ b) $3qr^2+3r^3+3r^2s-r^2$

**Zu 205, 206:** Klammere $-1$ aus.

**205** a) $-y-2$ b) $-5c+d$ c) $-3m+4n-1$ d) $u-v-w$ e) $-7x^2+4x+11$ f) $-a_1-a_2+a_3-a_4$

**206** a) $-mx+q$ b) $-6r-s-8t$ c) $-c^2-d^2+36$ d) $-b_1+b_2-b_3+b_4$ e) $z^5-z^4-z^3+z^2-z-1$

**207** Klammere 2 aus.
a) $2n+\frac{4}{5}$ b) $4u+3v+2w$ c) $2a-\frac{5}{4}b+\frac{6}{7}$

**208** Klammere 3 aus.
a) $3p-4$ b) $3x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}rs-\frac{2}{3}r-\frac{3}{4}s$

**209** Klammere $\frac{1}{6}$ aus.
a) $\frac{1}{6}a+\frac{3}{2}b$ b) $\frac{1}{2}q^2-q+\frac{2}{3}$ c) $4c+5d-\frac{1}{6}$

**210** Klammere $-1.2$ aus.
a) $-1.2t^2+3.6$ b) $6e-2.4f-8.4$ c) $-1.2x+y+1.5z$

**Zu 211–214:** Ausmultiplizieren und Ausdividieren mit Hilfe von Ausklammern

**211** a) $(a+b)(4a+4b)$ b) $(2n-2)(3n-3)$ c) $(1.5u-1.5v)(6u+6v)$

**212** a) $(7f-7g)(f-g)$ b) $(5r+5s)(8r-8s)$ c) $(2.5c+2.5)(0.4c+0.4)$

**213** a) $(9xy+9y):(x+1)$ b) $(4.5ac-7.5ad):(3c-5d)$

**214** a) $(18ab-12b^2):(3a-2b)$ b) $(0.7x^2y+2.8xy^2):(x+4y)$

**215** a) $(a+2)x+(b-3)x$ b) $r(2u+3v)-r(u+v)$ c) $e^2(n-4)-e^2(2n-7)$ d) $(p^2-5p)z+(p^2+p)z$

**216** a) $(8-t)y-(6-2t)y$ b) $(3a-5b)x+(b+1)x$ c) $(2k^3-k^2)r-(k^3-7k^2)r$ d) $d^2(e-f+g)-d^2(f+g-h)$





**217** a) $a(x+y)+b(x+y)$ b) $m(u+v)-3(u+v)$ c) $cd(6c-d)-4(6c-d)$ d) $q(r-s)+(r-s)$

**218** a) $(m+n)y+(m+n)z$ b) $2a(a-b)-b(a-b)$ c) $(5e-1)-c(5e-1)$ d) $(f+g)-d(f+g)$

**219** a) $5p(3p-2)+(-3p+2)$ b) $x(y-z)-(z-y)$

**220** a) $s(st-4)+t(4-st)$ b) $r(-r+2)+(r-2)$

**221** a) $4x(a+b)-5y(a+b)-6(a+b)-3x(a+b)-(a+b)$
b) $3p^2(u-v)-2p(v-u)-8(u-v)+(u-v)$

**222** a) $-a(x-y)+2b(x-y)-3c(x-y)+4(x-y)$
b) $7m(r+s)-3n(r+s)-4(r+s)-n(r+s)+(r+s)$

**223** a) $4v(p+q)-8w(p+q)$ b) $(t^2-t)z+9(t^2-t)$ c) $a^3(2ab-c)+a^2(2ab-c)$ d) $10q(9e-6)-5(9e-6)$

**224** a) $3w(2u-6v)+5(2u-6v)$ b) $2r^2(r-7)-r(-r+7)$
c) $a^2(xy+xz-x)-ab(xy+xz-x)+a(xy+xz-x)$

**225** a) $(e-4f)(f+g)+2e(f+g)$ b) $(c-d)(n+5)+(c-d)(2n+3)$ c) $q(2x-3y)-(q+1)(-2x+3y)$ d) $(3a-5c)(m+4)-(a+c)(m+4)$

**226** a) $8p(2p-5)-(2p+5)(2p-5)$ b) $(c^3+c^2)(r-3)+(c^3+c^2)(r-1)$ c) $(3u+v)(u-v)-(3u+v)(u-w)$ d) $(a-b)(5z-1)+(2b-2a)(z+4)$

### Ausklammern in Teilsummen

**227** a) $a(x+y)+2x+2y$ b) $bq+cq-(b+c)r$ c) $2u-v+5r(2u-v)$ d) $7k(4n-3)-4n+3$

**228** a) $a(3a-2b)+9ac-6bc$ b) $4m(p+q)-p-q$ c) $(t-5)x-ty+5y$ d) $r^2-r+(r-1)s$

**229** a) $au+av+bu+bv$ b) $j^2-jk+2j-2k$ c) $-2cx+cy-4dx+2dy$ d) $12st+16s-27t-36$ e) $24pz-39p-16qz+26q$ f) $35f^2-63fg-15f+27g$

**230** a) $81ab+72ad+36bc+32cd$ b) $mn-m+n-1$ c) $8v^2-2vw-12v+3w$ d) $20xy-15xz-24y+18z$ e) $20r^2s+4rs^2-5r-s$ f) $-21ef-56eg+6fg+16g^2$





**231** a) $4amx+4amy+4anx+4any$ b) $6ab+3a-12b-6$ c) $u^4-u^3v-2u^3w+2u^2vw$ d) $40r^3s^2-60r^2s^2+16r^3s-24r^2s$

**232** a) $5act-20adt+15bct-60bdt$ b) $-e^2fg-ef^2g+efg^2+f^2g^2$ c) $28pq-42p-24q+36$ d) $-18x^2y^2+36xy^2z+30xy^3-60y^3z$

**233** a) $mx+my+mz+nx+ny+nz$ b) $as+at+bs+bt+cs+ct$ c) $eu+fu-ev-fv+ew+fw$ d) $3kp+3kq-3kr-6p-6q+6r$

**234** a) $ar-a+br-b+cr-c$ b) $efm-efn-ef+egm-egn-eg$ c) $-px-py-pz+5x+5y+5z$ d) $u^2-uv-uw-u+v+w$

**235** a) $2a^2+10ab-12ac+5a+25b-30c$ b) $2pr^2+4pr-3qr^2-6qr-r^2-2r$

**236** a) $22cv-22ct+66c-33dv+33dt-99d$ b) $15mnx-5mny+10mnz-3x+y-2z$

### Faktorzerlegung mit Hilfe von Formeln

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

**237** a) $x^2-y^2$ b) $4c^2-9d^2$ c) $z^2-225$ d) $36n^2-1$ e) $-a^2+324b^2$ f) $-u^2v^2+1$ g) $16p^2-q^4$ h) $x^4-y^4$

**238** a) $16m^2-9n^2$ b) $25x^2-1$ c) $-4s^2+49t^2$ d) $121q^2-576$ e) $u^2v^2-64w^2$ f) $-p^2+289$ g) $r^4-1$ h) $-y^4z^2+81$

**239** a) $6a^2-6b^2$ b) $9k^4-36k^2$ c) $n^3-n$ d) $-50e^2+338$

**240** a) $18z^2-2$ b) $75r^2-147$ c) $-c^4d^2+4c^2$ d) $x^6y^4-x^2y^8$

**241** a) $a(x^2-y^2)+b(x^2-y^2)$ b) $p^2u+2p^2v-4u-8v$

**242** a) $63km^2-28kn^2+45m^2-20n^2$ b) $cr^2-c-dr^2+d$

**243** a) $x^2-2xy+y^2$ b) $36u^2+60uv+25v^2$ c) $n^2-4n+4$ d) $4c^2+28cd+49d^2$ e) $9q^2-6q+1$ f) $a^4-2a^2b^2+b^4$

**244** a) $m^2-2m+1$ b) $4f^2-20fg+25g^2$ c) $x^2+16x+64$ d) $16r^2-24rs+9s^2$ e) $p^4-8p^2+16$ f) $36z+81z^2+4$

**245** a) $5a^2-10ab+5b^2$ b) $xy^2+2xy+x$ c) $-3u^2+18uv-27v^2$

**246** a) $72n^2+168n+98$ b) $-q^2r^2+4qr-4$ c) $-c^4-2c^3d-c^2d^2$





**247** a) $a^2+2ab+b^2-36z^2$ b) $p^2-x^2-2x-1$

**248** a) $u^2-8uv+16v^2-1$ b) $m^2-q^2+10q-25$

### Klammeransatz bei geeigneten Trinomen

Beispiel: $a^2+8a+15=(a+3)(a+5)$

**249** a) $x^2+9x+20$ b) $d^2+20d+91$ c) $r^2-15r+54$ d) $n^2-26n+144$ e) $n^2-24n+144$ f) $3c^2+16c+5$

**250** a) $s^2+18s+72$ b) $z^2-19z+48$ c) $p^2+23p+132$ d) $y^2-29y+210$ e) $b^2+10b+9$ f) $2x^2-5x+2$

**251** a) $a^2+2a-24$ b) $u^2-3u-40$ c) $t^2-6t-7$ d) $x^2-25x+84$ e) $x^2+25x-84$ f) $4e^2+3e-1$

**252** a) $c^2-3c-108$ b) $m^2+4m-5$ c) $y^2-y-30$ d) $z^2+9z-90$ e) $r^2-43r-240$ f) $5k^2-2k-3$

**253** a) $b^2+20b+51$ b) $t^2+t-156$ c) $x^2-4x+16$ d) $v^2-7v-98$ e) $p^2-7p-120$ f) $2n^2+7n+3$

**254** a) $m^2-m-110$ b) $z^2-29z+208$ c) $q^2-16q-36$ d) $y^2+40y+400$ e) $a^2+6a-10$ f) $12r^2-8r+1$

**255** a) $5x^2+10x-75$ b) $n^3-n^2-n$ c) $-4t^2-4t+48$

**256** a) $9z^4-36z^3+27z^2$ b) $-3k^2-3k-60$ c) $2b^5+9b^4-5b^3$

**257** a) $x^2-7xy+10y^2$ b) $p^2-2pq-8q^2$ c) $m^4-5m^2n-24n^2$

**258** a) $a^2+5ab+4b^2$ b) $r^2+4rs-21s^2$ c) $c^4-13c^2d^2+36d^4$

### Vermischte und schwierigere Aufgaben zur Faktorzerlegung

**259** a) $-16x^5+x$ b) $n^3-19n^2+90n$ c) $fgh+fg+fh+f$

**260** a) $625c^3-225cd^2$ b) $-3z^4+6z^3+24z^2$ c) $64st-48s-48t+36$

**261** Vervollständige die Zerlegung
a) $(36a-54b)^2$ b) $(r^2+r)(r^2+r-6)$ c) $(kx^2-ky^2)^3$

**262** Zerlege die Polynome $P$, $Q$, $P+Q$ und $PQ$ (vollständig)
a) $P=(5u+5v)^2$, $Q=(du+dv)^2$ b) $P=(2n-2)^3$, $Q=(3n-3)^3$

**Zu 263, 264:** Klammere zuerst einen Bruch aus, sodass der andere Faktor ein Polynom mit teilerfremden ganzen Koeffizienten ist.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+6=\frac{3}{4}(x^2-6x+8)=\frac{3}{4}(x-2)(x-4)$

**263** a) $\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{2}b^2$ b) $-1.25r^2-5r-5$ c) $\frac{7}{30}c^2+\frac{7}{6}c-\frac{28}{5}$

**264** a) $4.8p^2-7.5$ b) $3m^2-2mn+\frac{1}{3}n^2$ c) $0.2q^2-2.4q+5.4$

**265** a) $(a+b)^3-5(a+b)^2$ b) $(x+6y)^2+8x(x+6y)$

**266** a) $u^2(4u+4)+(4u+4)^2$ b) $p(3w+3)+(p-5)(2w+2)$

**267** a) $(2a-3b)^2-(3b-2a)$ b) $r(r-s)^2-(s-r)^3$

**268** a) $(k-7)^2(k+2)+(-k+7)^3$ b) $s^2(t-5)+s(5-t)-2(t-5)$

**269** a) $n(n+4)(n-8)-(n+4)(n-8)$ b) $(a+b)^2(a-c)-(a+b)(c-a)^2$

**270** a) $(u-1)(2v-2)+(3-3u)(4-4v)$ b) $(x-y)(x^2-z^2)-(x^2-y^2)(x-z)$

**271** a) $a(a+3)-10$ b) $(m+9)^2-36m$ c) $u^2(v-1)-(u^2-v)v$

**272** a) $4pq-(p+q)^2$ b) $st(t-6)-4s(t+6)$ c) $2(e^2-fg)+e(f-4g)$

**273** a) $a^2-2ab+b^2-c^2$ b) $9x^2-y^2-2yz-z^2$
c) $u^2-4uv+4v^2-1$ d) $u^2-4v^2+4v-1$

**274** a) $r^2-4s^2+12st-9t^2$ b) $25c^2-d^2+10d-25$
c) $w^2-8w-z^2+16$ d) $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$

**275** a) $c^2m^2-c^2n^2-d^2m^2+d^2n^2$ b) $8rt^2-2r-12st^2+3s$
c) $2uv-7uw+4v^2-49w^2$ d) $64a^2-80a+25-24ab+15b$





**276** a) $p^3+p^2-p-1$ b) $27ef-18eg+9f^2-12fg+4g^2$
c) $b^2-6b-4c^2+12c$ d) $4r^2-9s^2+6s-1$

**277** a) $(5x-4y+3)^2-(x+2y-1)^2$ b) $a^4-(13a-30)^2$

**278** a) $81t^2-25(t^2+6t+9)$ b) $n^4-25n^2-60n-36$

**279** a) $a^4-10a^2b^2+9b^4$ b) $x^4+x^2y^2+y^4$

**280** a) $z^4+4z^2-32$ b) $r^4-3r^2+1$

**Zu 281, 282:** $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

**281** a) $x^3-8$ b) $375n^3-3$ c) $a^3+b^3$ d) $p^6-q^6$

**282** a) $y^3+1$ b) $128c^4d-54cd^4$ c) $r^3+r^2-s^3-s^2$

**283*** Beweise:
a) Für jede natürliche Zahl $n$ ist $n^3-n$ durch 6 teilbar.
b) Für jede ungerade natürliche Zahl $u$ ist $u^3-u$ durch 24 teilbar.
c) Für jede Primzahl $p>3$ ist $p^2-1$ durch 24 teilbar.

**284*** a) Die beiden letzten Ziffern von $25^2$ bilden die Zahl 25. Gibt es noch eine andere zweistellige Zahl mit der entsprechenden Eigenschaft?
b) Die drei letzten Ziffern von $125^3$ bilden die Zahl 125. Bestimme alle weiteren dreistelligen Zahlen mit der entsprechenden Eigenschaft!





## 2.6 Der Divisionsalgorithmus für Polynome

Im Abschnitt 2.6 werden Polynome mit nur einer Variablen und beliebigen Koeffizienten (aus $\mathbb{R}$) betrachtet.

Ein Beispiel zum Divisionsalgorithmus:

$$\begin{array}{lcll}
(6x^3+29x^2+38x+35) & :(2x+7) = & 3x^2+4x+5 & \\
\underline{6x^3+21x^2} & & 6x^3+21x^2 & =(2x+7)\cdot 3x^2 \\
\quad 8x^2+38x+35 & & & \\
\quad \underline{8x^2+28x} & & 8x^2+28x & =(2x+7)\cdot 4x \\
\qquad 10x+35 & & & \\
\qquad \underline{10x+35} & & 10x+35 & =(2x+7)\cdot 5 \\
\qquad\qquad 0 & & &
\end{array}$$

$(6x^3+29x^2+38x+35) : (2x+7) = 3x^2+4x+5 \Leftrightarrow$
$6x^3+29x^2+38x+35 = (3x^2+4x+5)(2x+7)$
(Faktorzerlegung)

$(6x^3+29x^2+38x+44) : (2x+7) = 3x^2+4x+5+9:(2x+7) \Leftrightarrow$
$6x^3+29x^2+38x+44 = (3x^2+4x+5)(2x+7)+9$
(Zerlegung mit Rest)

**Zu 285 – 288:** Divisionen ohne Rest

**285** a) $(6x^3-14x^2+17x-12):(3x-4)$ b) $(y^3-10y^2+16y+48):(y-6)$
c) $(n^4+5n-6):(n+2)$ d) $(c^3+1.5c^2-2c-20):(2c-5)$

**286** a) $(4a^3-12a^2+a+4):(2a+1)$ b) $(z^3+9z^2-100):(z+5)$
c) $\left(4r^3+\frac{2}{3}r^2+\frac{5}{3}r+2\right):(3r+2)$ d) $(k^5-1):(k-1)$

**287** a) $(x^4-8x^3+14x^2-7x-30):(x^2-3x+5)$
b) $(9p^4-31p^2+25):(3p^2+p-5)$

**288** a) $(12a^4-15a^3-5.5a^2+9a-8):(4a^2-3a+2)$
b) $(u^5-3u^4-9u^2-16u+12):(u^2+4)$





**289** Dividiere durch $x+3$ und notiere das Ergebnis in Form einer Zerlegung mit Rest (im Fall des Restes 0 als Faktorzerlegung).
a) $x^2+8x+24$ b) $x^2+8x+3$ c) $x^3$ d) $x^3-13x-12$

**290** Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x+1$.

**291** Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x$.

**292** Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x-4$.

**Zu 293 – 298:** Notiere das Divisonsergebnis, gegebenenfalls mit Rest.

**293** a) $(6a^3-17a^2+21a-30):(2a-5)$
b) $(n^4-3n-22):(n+2)$
c) $(6z^4+8z^3-19z^2-7z-12):(3z^2-2z-4)$
d) $(8x^7-10x^6+x^5-16x^4+2x^3+25x^2+14x-24):(2x^3-x^2+3x-4)$

**294** a) $(-12y^3+8y^2+13y+3):(-2y+3)$
b) $(a^4-9a^3+6a^2-5a+12):(a-2)$
c) $(6p^5-3p^4+p^3+6p^2-13p+3):(3p^3-4p+1)$
d) $k^5:(k^2+k-1)$

**295** a) $\left(x^2-\frac{7}{2}x-2\right):\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)$ b) $(a^3-4a^2+2a-1):(2a-1)$

**296** a) $(2q^3+5q^2-4q-3):(q+0.5)$ b) $(y^3+y^2):(3y+1)$

**297** a) $(x+4x^2+x^3):(x-2+x^2)$ b) $(r^3-6r^2+5r+8):(4-r)$

**298** a) $2t^4:(2+t)$ b) $(1+z)^3:(1-z)^2$

**Zu 299, 300:** Finde mit Hilfe des Divisonsalgorithmus eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten.

**299** a) $x^3-4x^2+x+6$ b) $n^4-7n^2+6n$

**300** a) $z^5-2z^4-4z^3+5z^2$ b) $-3a^3+9a^2-12$

## 2.5 Aufgaben zu Brüche



# 5 Bruchterme

Ergebnisse mit Nennern sind generell als *ein* Bruch anzugeben, wobei der Zähler und der Nenner ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist.

## 5.1 Kürzen und Erweitern

*Kürzen:* Zähler und Nenner eines Bruches durch denselben Divisor dividieren.

*Erweitern:* Zähler und Nenner eines Bruches mit demselben Faktor multiplizieren.

$$\frac{at}{bt} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0,\ t \neq 0)$$

Zu 1 – 12: Bestimme den ggT und das kgV der untereinander stehenden Polynome.

Bemerkung: Als ggT von z. B. $6a$ und $-8a$ kann man sowohl $2a$ als auch $-2a$ angeben. Bei jedem ggT und kgV zweier Polynome gibt es in diesem Sinn zwei entgegengesetzte Möglichkeiten; im Lösungsteil unseres Buches ist jeweils nur eine davon angegeben.

**1** a) $6d$, $4d$ b) $-9xy$, $45xz$ c) $p^6$, $p^4$ d) $18a^2bc^3$, $8ab^4$

**2** a) $uv$, $vw$ b) $6n^6$, $9n^9$ c) $15m^2$, $-8mq$ d) $9r^2s^2t$, $36r^2s^3$

**3** a) $a$, $a+b$ b) $4i+4$, $5i+5$ c) $4c^2-6cd$, $2c$ d) $3x-3y$, $y-x$

**4** a) $z$, $z^2-3z$ b) $15t-25$, $-6t+10$ c) $5p$, $p+5$ d) $u^2+uv$, $u^2-uv$

**5** a) $h^2-h$, $h-h^2$ b) $abc+b^2c$, $a^2b+ab^2$ c) $x^2-y^2$, $2x-2y$ d) $n^3-4n$, $n^3+2n^2$

**6** a) $6p-9$, $4p^2-6p$ b) $8uv$, $8u-20v$ c) $s-s^2$, $s^3-s$ d) $e^2-f^2$, $(e-f)^2$





**7** a) $r^2-8r+15$, $-r^2-r+12$ b) $x(x+y)+x^2-y^2$, $4x^2-4xy+y^2$ c) $am+an-bm-bn$, $m^2-n^2+m+n$

**8** a) $z^2-8z+16$, $wz-4w-3z+12$ b) $(2c-18)^2$, $c^2-7c-18$ c) $u^3-v^3$, $-u^2+v^2$

**9** a) $6a^2b$, $15a^3b^2$, $18a^4b^4$ b) $2t-5$, $10-4t$, $6t-15$ c) $d^2-9$, $d-3$, $d^2-9d+18$

**10** a) $2g+2$, $3g+3$, $4g+4$ b) $x^2-4y^2$, $x^2-4xy+4y^2$, $x^2-2xy$ c) $r^2-s^2-2s-1$, $r^2-2r-s^2+1$, $r^2-2rs+s^2-1$

**11** a) $6ac-9ad-4c^2+6cd$, $3a^2+4ac-4c^2$ b) $2p^3-7p^2+8p+6$, $18p^3+9p^2$

**12** a) $8u^2v-uv^2-9v^3$, $u^3v+2u^2v^2+uv^3$ b) $z^2-9z+20$, $z^3-3z^2-50$

Zu 13 – 20: Kürze!

**13** a) $\frac{12d}{9}$ b) $\frac{10r}{15r}$ c) $\frac{16xyz}{20xz}$ d) $\frac{24a^2bc^2}{56abc}$ e) $\frac{-72uv^3w^6}{-60uv^3w^5}$

**14** a) $\frac{14}{21e}$ b) $\frac{25pq}{5q}$ c) $\frac{-27s^2}{-36st}$ d) $\frac{4mq^2}{8mq^3}$ e) $\frac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2}$

**15** a) $\frac{5a+20}{5}$ b) $\frac{14n-10}{7}$ c) $\frac{28x-35y}{21}$ d) $\frac{u^2+uv}{uv}$

**16** a) $\frac{60c-40d}{20c}$ b) $\frac{92p+46q}{23}$ c) $\frac{360z^2-90z}{45z^2}$ d) $\frac{225i-15}{15}$

**17** a) $\frac{25}{5r+10}$ b) $\frac{uw}{uv+uw}$ c) $\frac{2m}{4mn-2m}$ d) $\frac{-36x^2y}{12x^2y-60xy}$

**18** a) $\frac{36}{9s-18t}$ b) $\frac{-h}{h^2+h}$ c) $\frac{18a^2bc}{18a^2b^2c+54a^2bc^2}$

**19** a) $\frac{7n+14}{7n-21}$ b) $\frac{2y+2}{5y+5}$ c) $\frac{rs-rt}{su-tu}$ d) $\frac{p^3-p^2}{p^3+p^2}$

**20** a) $\frac{a^2-a}{ab+a}$ b) $\frac{4c-4d}{6c-6d}$ c) $\frac{6x-6z}{9x+9z}$ d) $\frac{w^3+w^2}{w^2+w}$

**21** Berechne die Werte der Terme $T_1 = \frac{6}{x}$ und $T_2 = \frac{6x-18}{x^2-3x}$ für $x = 1, 2, 3, 4, 10, -1.2$ (soweit sie definiert sind) und vergleiche.

**22** Berechne die Werte der Terme $T_1 = \frac{x+5}{x-1}$ und $T_2 = \frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$ für $x = 2, 3, 4, 5, 6, -1$ (soweit sie definiert sind) und vergleiche.

**Zu 23 – 42:** Kürze!

**23** a) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}$ b) $\frac{6u-8v}{9u^2-16v^2}$ c) $\frac{n^3-n}{n^3+n^2}$

**24** a) $\frac{4r-2}{4r^2-1}$ b) $\frac{36x^2-4y^2}{18x-6y}$ c) $\frac{4s^2+25}{16s^4-625}$

**25** a) $\frac{u^2+2uv+v^2}{4u+4v}$ b) $\frac{2ac-5bc}{4a^2-20ab+25b^2}$ c) $\frac{w^3+2w^2+w}{wz+z}$

**26** a) $\frac{10m-5}{8m^2-8m+2}$ b) $\frac{(16p-16q)^2}{16p^2-16q^2}$ c) $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2x+1}$

**27** a) $\frac{as+at+bs+bt}{2s+2t}$ b) $\frac{375w-1000}{6uw-16u+6vw-16v}$ c) $\frac{4c^2+cr-4c-r}{5c-5}$

**28** a) $\frac{4af+7ag-8bf-14bg}{3a-6b}$ b) $\frac{kp-5p+k-5}{kp+k}$ c) $\frac{x-xy+y-1}{y-yz+z-1}$

**29** a) $\frac{40cm-60dm+32cn-48dn}{24cm-36dm+16cn-24dn}$ b) $\frac{rs-rt-s^2+t^2}{r-s-t}$

**30** a) $\frac{u^2-v^2+4u+4v}{u^2-v^2}$ b) $\frac{144x^3-60x^2z-156x^2+65xz}{12xyz+12xz^2-5yz^2-5z^3}$

**31** a) $\frac{a^2+2a-24}{a^2-6a+8}$ b) $\frac{kn-2k}{3n^2-3n-6}$ c) $\frac{r^2-8r+7}{2r^2-4r+2}$ d) $\frac{c^2-9d^2}{c^2+2cd-15d^2}$

**32** a) $\frac{m^2-9m+20}{m^2-10m+25}$ b) $\frac{x^4-4x^3}{x^4-x^3-12x^2}$ c) $\frac{h^4-1}{h^4+6h^2+5}$ d) $\frac{yz^2+2yz-8y}{yz-2y+5z-10}$

**33** a) $\frac{10u^2-11u-6}{25u^2-4}$ b) $\frac{18a-9b}{32a^2-26ab+5b^2}$ c) $\frac{r^2+12r+36}{15r^2+88r-12}$

**34** a) $\frac{x^2-7x+12}{2x^2-x-15}$ b) $\frac{45n^2-12n-28}{9n^2+12n+4}$ c) $\frac{27c^2-48d^2}{24c^2+5cd-36d^2}$





**35** a) $\frac{a-b}{b-a}$ b) $\frac{4mp-20}{30-6mp}$ c) $\frac{k^2-13k+42}{14-2k}$ d) $\frac{-u^2+2uv-v^2}{4u^2-4v^2}$

**36** a) $\frac{3z-3y}{4y-4z}$ b) $\frac{e^2-e}{1-e^2}$ c) $\frac{c^2+c-20}{-c^2+c+30}$ d) $\frac{r^2-rs-rt}{rt-rs-r^2}$

**37** a) $\frac{80a^3-58a^2+11a-3}{5a-3}$ b) $\frac{3n^2-9n}{n^3-2n^2-5n+6}$

c) $\frac{4p^3-6p^2+2p+3}{4p^2-1}$ d) $\frac{v^2-4v+4}{v^4+3v^3-7v^2-9v+6}$

**38** a) $\frac{8x+3}{96x^3+28x^2+37x+15}$ b) $\frac{3t^3+t^2+5t+12}{6t+8}$

c) $\frac{4u^3+5u^2-2u-3}{u^2+2u+1}$ d) $\frac{z^2+z-2}{z^4+z^3+z^2+z-4}$

**39** a) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ b) $\frac{3n+3}{2n^3+2}$ c) $\frac{4s^2-12s+9}{27-8s^3}$ d) $\frac{r^3-8}{r^3-r^2-r-2}$

**40** a) $\frac{x+y}{x^3+y^3}$ b) $\frac{u^3-v^3}{v^2-u^2}$ c) $\frac{250p^4-2p}{5p^2+29p-6}$ d) $\frac{(c+d)^2(c^3-d^3)}{(c^2-d^2)^2}$

**41** a) $\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{2a+2b+2c}$ b) $\frac{180k^2s^3+240ks^2t+80st^2}{30ks^2+6kst+20st+4t^2}$ c) $\frac{(m+5)^2-(n+1)^2}{(m+7)-(n+3)}$

**42** a) $\frac{25u^2-9(v-1)^2}{6v-10u-6}$ b) $\frac{36p^2-60pq+25q^2-9r^2}{6p-5q-3r}$ c) $\frac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x^6-y^6}$

**Zu 43, 44:** Erweitere mit $-1$.

**43** a) $\frac{b-a}{-a-c}$ b) $\frac{4y-x}{-3}$ c) $\frac{-uvw}{-u+v-w}$ d) $\frac{(-s+3)(-s+5)}{-s+7}$

**44** a) $\frac{-t}{1-t-t^2}$ b) $\frac{1-qr}{1-q}$ c) $\frac{-m-n}{n-m}$ d) $\frac{6z-z^2-3}{5-4z-z^2}$





**Zu 45, 46:** Notiere den Term als Bruch mit dem Nenner $N$.

*Beispiel:* $\frac{z}{a-b}$, $N = a^2-b^2$; Ergebnis: $\frac{z}{a-b} = \frac{(a+b)z}{a^2-b^2}$

**45** a) $\frac{6}{7x}$, $N = 84xyz$ b) $\frac{3u}{8}$, $N = 24u$ c) $\frac{a+b}{ab^2}$, $N = a^3b^3$
d) $2r$, $N = 3$ e) $\frac{15w}{10-w}$, $N = w^2-10w$ f) $p^2$, $N = p(p-1)$
g) $\frac{s-t}{s+t}$, $N = s^2-t^2$

**46** a) $\frac{4ac}{3b}$, $N = 12b^2c^2$ b) $\frac{4q}{3q+2}$, $N = 6q^2+4q$ c) $7$, $N = 2w$
d) $k$, $N = k$ e) $\frac{6mn}{2m-5n}$, $N = 8mn-20n^2$ f) $\frac{-2}{4y-3x}$, $N = 6x-8y$
g) $\frac{d}{2d+1}$, $N = (6d+3)^2$

**Zu 47 – 52:** Mache gleichnamig.

**47** a) $\frac{2}{a}, \frac{3}{b}, \frac{4}{c}$ b) $\frac{7}{8w}, \frac{5}{6w}$ c) $\frac{p}{e^2}, \frac{p}{e^3}$ d) $\frac{r^2}{9s^2u}, \frac{1}{r^2u^2}, \frac{8u}{15rs}$

**48** a) $\frac{u}{2v}, \frac{v}{2u}$ b) $\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy}$ c) $\frac{15}{4mn^2}, \frac{25}{6m^3n}$ d) $\frac{13}{6h^2}, 1, \frac{4}{21hi}$

**49** a) $\frac{1}{rs}, \frac{1}{r^2+r}$ b) $\frac{a}{b}, \frac{a}{b+c}$ c) $\frac{q}{q^2-1}, \frac{q-1}{q+1}$

**50** a) $\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x-y}$ b) $\frac{1}{t^2-t}, \frac{t-1}{t}$ c) $\frac{3}{uv+v}, \frac{u+v}{2v}$

**51** a) $\frac{n}{n-5}, \frac{5}{5-n}$ b) $\frac{w-z}{w+z}, \frac{w+z}{w-z}$ c) $\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{b}{b-a}$

**52** a) $\frac{3c+2d}{3c-2d}, \frac{2c+3d}{2c-3d}$ b) $\frac{21}{2x-2}, \frac{-31}{3x-3}, \frac{41}{4x-4}$

**53** Welcher Bruch ist grösser, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a+1}{b+1}$, wenn $a > 0 \wedge b > 0$?

**54** Welcher Bruch ist grösser, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a+d}{b+d}$, wenn $a > 0 \wedge b > 0 \wedge d > 0$?





## 5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

**55** a) $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$ b) $\frac{7}{8a} - \frac{1}{8a}$ c) $\frac{5}{3n} + \frac{2}{3n} - \frac{-5}{3n}$

**56** a) $\frac{5z}{6} - \frac{z}{6}$ b) $\frac{5c}{12y} + \frac{c}{12y}$ c) $\frac{-76u}{35v} - \frac{8u}{35v}$

**57** a) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ b) $\frac{a+nb}{n} - \frac{a-nb}{n}$ c) $-\frac{3r+4}{6} + \frac{5r+7}{6}$

**58** a) $\frac{-t+7}{4t} - \frac{3t+4}{4t} - \frac{8t-5}{4t}$ b) $\frac{x^2+x-8}{2x} - \frac{x^2-7x-3}{2x} + \frac{2x^2-4x+5}{2x}$

**59** a) $\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}$ b) $\frac{cd}{b-d} - \frac{bc}{b-d}$

c) $\frac{xy}{y^2-2yz+z^2} - \frac{xz}{y^2-2yz+z^2}$ d) $\frac{4a}{4a^2+7a+3} + \frac{3}{4a^2+7a+3}$

**60** a) $\frac{q}{p-q} - \frac{p}{p-q}$ b) $\frac{4ktw}{2t-1} - \frac{2kw}{2t-1}$

c) $-\frac{s^3}{s^2-1} + \frac{s^2}{s^2-1}$ d) $\frac{52x}{65x^2+59x-72} - \frac{36}{65x^2+59x-72}$

**61** a) $\frac{e}{2} - \frac{e}{3}$ b) $\frac{2p}{15q} + \frac{8p}{9q}$ c) $\frac{5}{6ac} - \frac{3}{4cd}$ d) $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}$

**62** a) $\frac{4u}{21} + \frac{9u}{14}$ b) $\frac{8}{9m} - \frac{11}{36m}$ c) $\frac{z}{n^2} + \frac{4}{3n}$ d) $\frac{7v}{10w} - \frac{5v}{6w}$

**63** a) $\frac{7s}{18} - \frac{4s-9}{45}$ b) $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$ c) $\frac{x+y}{2xy} + \frac{x+z}{2xz} + \frac{y+z}{2yz}$

**64** a) $\frac{c-2}{c^3} + \frac{c-1}{c^2}$ b) $\frac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \frac{2u+v}{u^2v} + \frac{u-3v}{uv^2}$

**65** a) $\frac{a}{3} + 1$ b) $7r - \frac{9}{2s}$ c) $5w - 1 + \frac{3}{w}$

**66** a) $8m - \frac{n}{5}$ b) $b + \frac{1}{b}$ c) $\frac{x}{4z} - 2y + 3z$

**67** a) $\frac{2r+3}{6} + 1$ b) $t - 4 - \frac{t+1}{2}$ c) $d - \frac{nd-2}{n}$

**68** a) $p+\frac{9-p}{2}$ b) $\frac{x-y}{3x}-1$ c) $2-\frac{k^2-k+1}{k^2}$

**69** a) $\frac{2a}{a+b}+1$ b) $4-\frac{u-v}{u+v}$ c) $\frac{z^2}{z+1}-z$

**70** a) $3-\frac{m}{m-n}$ b) $\frac{q}{q+1}-1$ c) $e-\frac{e^2-2}{e-2}$

d) $1+\frac{z}{1-z}$, $1+z+\frac{z^2}{1-z}$, $1+z+z^2+\frac{z^3}{1-x}$

**71** a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$ b) $\frac{8}{n+5}-\frac{n+2}{n}$ c) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$

**72** a) $\frac{m}{m-1}-\frac{m-1}{m+2}$ b) $\frac{2r}{s}-\frac{r+3}{r+s+1}$ c) $\frac{w-4}{w-2}+\frac{w+6}{w+3}$

**73** a) $\frac{c}{c+d}-\frac{c-d}{2(c+d)}$ b) $\frac{4}{z-1}+\frac{z}{z^2-1}$

c) $\frac{3u}{u^2+2uv+v^2}-\frac{1}{u+v}$ d) $\frac{a+2b+t}{4at+8bt}-\frac{1}{4t}$

**74** a) $\frac{x-y}{15x+10y}+\frac{x+y}{3x+2y}$ b) $\frac{8p}{4p^2-4p+1}-\frac{3}{2p-1}$

c) $\frac{r+2}{5r^2}-\frac{4r+4}{5r^3+10r^2}$ d) $\frac{1}{q-1}-\frac{q^2+2}{q^3-1}$

**75** a) $\frac{c}{c-d}-\frac{2cd}{c^2-d^2}-\frac{d}{c+d}$ b) $\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+5}-\frac{2a+3}{a^2+3a-10}$

**76** a) $\frac{z}{z-5}-\frac{5}{z+3}-\frac{40}{z^2-2z-15}$ b) $\frac{n}{n+1}-\frac{2n+1}{n-1}+\frac{n^2+5n}{n^2-1}$

**77** a) $\frac{a-b}{4a+4b}+\frac{a+4b}{6a+6b}$ b) $\frac{t+7}{3t-6}-\frac{t+4}{t^2-2t}$

c) $\frac{u}{uv+v^2}-\frac{v}{u^2+uv}$ d) $\frac{c}{c^2-8c+16}+\frac{2}{c^2-6c+8}$

**78** a) $\frac{1}{rx+ry}+\frac{1}{sx+sy}$ b) $\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{b}{(a-b)^2}$

c) $\frac{z+9}{z^2-1}-\frac{z+5}{z^2+z}$ d) $\frac{5}{n^2+n-6}-\frac{3}{n^2-n-2}$





**79** a) $\frac{7}{e-1}+\frac{6}{1-e}$ b) $\frac{5}{3h-3}-\frac{4}{2-2h}$

c) $\frac{r-4}{5r+5}+\frac{2}{1-r^2}$ d) $\frac{u}{u-v}-\frac{4uv}{u^2-v^2}-\frac{v}{v-u}$

**80** a) $\frac{a-b}{c-d}-\frac{a+b}{d-c}$ b) $\frac{x+y}{2x-6y}+\frac{x+3y}{9y-3x}$

c) $\frac{8s}{s^2-4}+\frac{2+s}{2-s}$ d) $\frac{m^2-8m}{2m^2+m-15}-\frac{m}{5-2m}$

**81** a) $\frac{2n-11}{3n-5}-\frac{4n+15}{n+7}+1$ b) $\frac{2v+3w}{2v+w}-\frac{2v-w}{2v}-\frac{2v+3w}{w}$

**82** a) $\frac{2r-19}{3r-7}-\frac{5r}{6r-8}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{p-2}-\frac{3}{2p+1}+\frac{1}{p+1}$

**83** a) $\frac{5}{4x-8y}-\frac{3}{10y-5x}-\frac{11}{6x-12y}$ b) $\frac{b-c}{a^2+ac}-\frac{a-b}{ac+c^2}+\frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$

**84** a) $\frac{k+2}{6k-15}+\frac{8k+1}{8k-20}+\frac{k+11}{10-4k}$ b) $\frac{u}{u-v}+\frac{v}{v-u}-\frac{u+v-1}{u+v}$

**85** a) $\frac{2x-1}{x-3}-\frac{2x(x+2)}{x^2-9}-\frac{2}{3x}$ b) $\frac{3s}{(s-2)^2}-\frac{2}{s}+\frac{s+4}{2s-s^2}$

**86** a) $\frac{2u-v}{2u-2v}-\frac{u-v}{3u+3v}-\frac{v(3v-u)}{3v^2-3u^2}$ b) $\frac{1}{z^2-z}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^2+z}$

**87** $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

**88*** $\frac{x^4+36x^2-32}{x^4-8x^2+16}-\frac{16x}{x^3+2x^2-4x-8}-\frac{16x}{x^3-2x^2-4x+8}-1$

**89*** $\frac{a^2+3a+5}{a^4-a^3-31a^2+25a+150}-\frac{a+2}{a^3-3a^2-25a+75}$

$+\frac{a-3}{a^3+2a^2-25a-50}-\frac{a-5}{a^3+4a^2-11a-30}$

**90*** $\frac{6-x}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}+\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2-4x+3}$





## 5.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

### Multiplikation

**91** a) $3\cdot\frac{4}{5}$ b) $a\cdot\frac{b}{c}$ c) $a\cdot\frac{-b}{c}$ d) $a\cdot\frac{b}{-c}$ e) $(-a)\frac{-b}{c}$

**92** a) $x\cdot\frac{y}{x}$ b) $u\cdot\frac{u}{v}$ c) $n\cdot\frac{m}{n^2}$ d) $r^2\cdot\frac{1}{rs}$ e) $pq\cdot\frac{p}{q}$

**93** a) $6ab\cdot\frac{9a}{4b}$ b) $44x^2y^2\cdot\frac{2x^3}{11y^3}$ c) $21m^3n\cdot\frac{-7cd}{12mn^2}$

**94** a) $29k^5t\cdot\frac{47h^2}{29k^5t}$ b) $\frac{5rs^2}{18uv^3}(-15rsuv)$ c) $(-4pz)\left(-\frac{3q^2z}{10p^2}\right)$

**95** a) $(a-b)\frac{2a+b}{a-b}$ b) $(3x+3y)\frac{9c}{x+y}$ c) $\frac{5}{q^2-1}(q-1)$

**96** a) $4z\cdot\frac{z+1}{8z^2+12z}$ b) $\frac{d}{d^2-8d+15}(d-5)$ c) $(2k-7)\frac{k}{7-2k}$

**97** a) $(r^2-36s^2)\frac{r+6s}{r-6s}$ b) $(2p-4)\frac{p-4}{p^2-4}$ c) $\frac{a+b+c}{ab+ac}\cdot abc$

**98** a) $\frac{x}{yz}(xz+yz)$ b) $(3g-3f)\frac{4f+4g}{5f-5g}$ c) $(m^2-n^2)\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$

**99** a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{3}$ b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ c) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$ d) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

**100** a) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{-d}$ b) $\frac{a}{-b}\cdot\frac{-c}{d}$ c) $\left(-\frac{1}{n}\right)^5$ d) $\left(-\frac{-a}{-b}\right)\left(-\frac{-c}{-d}\right)\left(-\frac{-e}{-f}\right)$

**101** a) $\frac{8a}{3b}\cdot\frac{9bc}{4a}$ b) $\frac{-xy^2}{35z^3}\cdot\frac{7z^2}{x^2y^2}$ c) $\frac{-18u^2w}{65v^4}\cdot\frac{-26v}{27uw^3}$

**102** a) $\frac{7m^2}{12n^3}\cdot\frac{-3n^2}{14m}$ b) $\frac{-a}{b}\cdot\frac{-b}{c}\cdot\frac{-c}{a}$ c) $\frac{17r^4s^3}{54t^5}\cdot\frac{24st^2}{85r^2}$

**103** a) $\left(\frac{6a}{7b}\right)^2$ b) $\left(\frac{-12}{n^3}\right)^2$ c) $\left(-\frac{xyz}{cd}\right)^2$ d) $\left(\frac{m}{4}\right)^3$





**104** a) $\left(\frac{-8h^2}{9}\right)^2$ b) $\left(\frac{5uv}{17w}\right)^2$ c) $\left(\frac{19r}{2st}\right)^2$ d) $\left(-\frac{3}{e^2}\right)^4$

**105** a) $\frac{m-n}{3m}\cdot\frac{5m}{2m-2n}$ b) $\frac{d-1}{18d}\cdot\frac{12d^2}{1-d}$ c) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x-y}{xy}$

**106** a) $\frac{t}{4u+4v}\cdot\frac{3u^2-3v^2}{t^2+t}$ b) $\frac{5a^2}{5b-3}\cdot\frac{9-15b}{10ac}$ c) $\frac{7r^2s}{12(r-s)}\cdot\frac{(2s-2r)^2}{21rs^2}$

**107** a) $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\cdot\frac{p+q}{p-q}$ b) $\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n}\cdot\frac{m^4-n^4}{x-3y+z}$

**108** a) $\frac{v^2+4v+4}{3t-3}\cdot\frac{9-9t}{v^2+5v+6}$ b) $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{225a^2b^2-150abc+25c^2}\cdot\frac{45abc-15c^2}{ab-b}$

**109** a) $xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ b) $(n-z)\left(\frac{n}{n-z}-\frac{z}{n^2-z^2}\right)$ c) $\left(-\frac{r^2}{s^2}\right)\left(\frac{s}{r}-\frac{s^2}{r^2}+\frac{s^3}{r^3}\right)$

**110** a) $\left(c-\frac{d}{c}\right)\left(c+\frac{d}{c}\right)$ b) $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\frac{u}{u+v}+\frac{v}{u-v}\right)$

c) $\left(\frac{ab}{a-b}+a\right)\left(\frac{ab}{a+b}-b\right)\frac{b-a}{ab^2}$

**111** a) $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{n}\right)^2$ b) $\left(\frac{z^2}{x-z}+z\right)^2$ c) $\left(\frac{p}{q}-1\right)^2-\left(\frac{p}{q}+1\right)^2$

**112** a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{c}{3d}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{r-s}-\frac{1}{r+s}\right)^2$ c) $\left(u-\frac{v}{u}\right)^2-\left(u+\frac{v}{u}\right)^2$

**113** $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)-\left(\frac{x}{3}+y\right)\left(\frac{x}{2}-y\right)$

**114** $\frac{3a}{3a-2b}\cdot\frac{3a}{2b}-\left(\frac{3a}{3a-2b}+\frac{3a}{2b}\right)$

**115** a) $\left(1+\frac{r}{s}\right)^3-\left(1-\frac{r}{s}\right)^3$ b) $\left(\frac{n^3-2n-1}{n^2-1}-n\right)\left(n-\frac{2n^2}{n+1}\right)$

**116** a) $\left(\frac{c}{3}-1\right)^3-\left(\frac{c}{3}+1\right)^3$ b) $\left(\frac{8x^2+4x+1}{4x^2-2x}-\frac{2x}{2x-1}\right)\frac{6x-3}{4x^2+2x}$

**Division**

117 a) $\frac{4}{5} : 3$ b) $\frac{a}{b} : c$ c) $\frac{-a}{b} : c$ d) $\frac{a}{-b} : c$ e) $\left(-\frac{a}{b}\right) : (-c)$

118 a) $\frac{21}{8} : 7$ b) $\frac{mn}{d} : m$ c) $\frac{u^2}{v^2} : u$ d) $\frac{9}{25} : 15$ e) $\frac{xy}{wz} : yz$

119 a) $\frac{15d}{4e} : 6de$ b) $\frac{19r^2s^2}{23t} : 19r^2s^2$ c) $\frac{-16ab^2}{27c} : (-16bc^2)$

120 a) $\frac{7u^3}{9v^2} : 21u^2v$ b) $\frac{-8h}{11mn} : 11mn$ c) $\frac{72x^6}{5y^3z^4} : 24x^2$

121 a) $\frac{10k-15}{12k} : 5$ b) $\frac{a^2+ab}{b+c} : a$ c) $\frac{6hs-9h}{10s} : 18hs$

122 a) $\frac{3u^2v-4uv^2}{3u+4v} : uv$ b) $\frac{q^3+q^2}{4} : q^3$ c) $\frac{10xz+16yz}{5x-10} : 10xyz$

123 a) $\frac{2a+2b}{ab} : (a+b)$ b) $\frac{w^2-t^2}{w^2+t^2} : (t-w)$ c) $\frac{c^2-cd}{d^2} : (3c-3d)$

124 a) $\frac{2p-8}{15} : (4-p)$ b) $\frac{x+y}{x-y} : (x^2-y^2)$ c) $\frac{8n^2-34n-9}{n+4} : (4n^2+n)$

125 a) $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$ b) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ c) $7 : \frac{3}{4}$ d) $a : \frac{c}{d}$ e) $47 : \frac{47}{59}$

126 a) $\frac{a}{b} : \left(-\frac{c}{d}\right)$ b) $(-a) : \left(-\frac{c}{d}\right)$ c) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$ d) $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ e) $\frac{z}{a} : \frac{z}{b}$

127 a) $\frac{5km}{6} : \frac{3k}{2m}$ b) $\frac{112n^2}{19xyz} : \frac{-7n}{19xyz}$ c) $\frac{12u^2v}{25tw} : \frac{18uv^2}{35tw}$

128 a) $\frac{9c}{10ab} : \frac{6ac}{25b}$ b) $\frac{1}{24rs^3} : \frac{1}{16r^2s}$ c) $\left(-\frac{78f}{85h^3}\right) : \left(-\frac{48f^2}{85h^3}\right)$

129 a) $\frac{uv}{u+v} : \frac{5v}{u^2+uv}$ b) $\frac{z}{3z-3} : \frac{z}{2-2z}$ c) $\frac{n^2-19n+90}{n+9} : \frac{n-9}{n+9}$

130 a) $\frac{c^2-d^2}{c-1} : \frac{c+d}{1-c}$ b) $\frac{x^2-xy}{x+y} : \frac{3x+3y}{x-y}$ c) $\frac{m^2-m}{m+2} : \frac{m^2-1}{4m+8}$





131 a) $\frac{w^2-w-12}{t^2} : \frac{w-4}{t^2-t}$ b) $\frac{196a^2-25}{4b^2+20b+25} : \frac{70a+25}{2b+5}$

132 a) $\frac{1}{4n^2-4} : \frac{1}{(4n-4)^2}$ b) $\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2 : \frac{2x^3-3x^2+1}{4x^2}$

133 a) $\frac{a^3+a^2b}{c^2+1} : \frac{a^3-ab^2}{c^2-c}$ b) $\frac{e^2+2ef+f^2}{e^2+2ef} : \frac{e^2+ef-e-f}{2ef+4f^2}$

134 a) $\frac{10x^2-20x+10}{9x^2+18x+9} : \frac{15x^2+15x-30}{2x^2-2x-4}$ b) $\frac{r^4-1}{rs-s^2} : \frac{4r+4}{r^2-rs-r+s}$

135 a) $6abc : \frac{15ac^2}{4bd}$ b) $(u+v) : \frac{u+v}{w}$ c) $(-4n-4) : \frac{n+1}{-2}$

136 a) $39g^2h^2 : \frac{52g}{9h}$ b) $(7-k) : \frac{k-7}{-k-7}$ c) $(p+q) : \frac{p^2-q^2}{pq}$

137 a) $(4m-2) : \frac{4m^2-1}{m-2}$ b) $xyz : \frac{xyz-xy}{xz-yz}$

138 a) $(6d^2-9d) : \frac{4d-6}{2d+3}$ b) $(a^2b+ab^2) : \frac{a^3b-ab^3}{a^2+b^2}$

139 a) $\left(u^2+\frac{u}{v}\right) : \frac{u}{v}$ b) $\left(\frac{x^4}{y^2}-x^3\right) : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

140 a) $\left(4ef-\frac{2e}{f}\right) : \frac{2e}{f}$ b) $\left(6\cdot\frac{r^2}{s^2}-3\cdot\frac{r}{s}+\frac{3}{2}\right) : \left(-3\cdot\frac{r^2}{s^2}\right)$

141 a) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right) : \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$ b) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right) : \left(1+\frac{1}{n}\right)$

142 a) $\left(x-\frac{1}{x}\right) : \left(x+\frac{1}{x}\right)$ b) $\left(\frac{w}{2}-\frac{2}{w}\right) : (w+2)$





## 5.4 Doppelbrüche

143 a) $\dfrac{\frac{25}{36}}{\frac{15}{16}}$ b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ c) $\dfrac{\frac{u}{v}}{x}$ d) $\dfrac{x}{\frac{u}{v}}$ e) $\dfrac{\frac{p}{n}}{\frac{q}{n}}$ f) $\dfrac{\frac{z}{r}}{\frac{z}{s}}$

144 a) $\dfrac{\frac{a}{b}}{a}$ b) $\dfrac{\frac{a}{b}}{b}$ c) $\dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}}$ d) $\dfrac{c}{\frac{c}{d}}$ e) $\dfrac{d}{\frac{c}{d}}$ f) $\dfrac{x}{\frac{1}{y}}$

145 a) $\dfrac{\frac{14u^3v}{57xyz}}{\frac{35uv^2}{76y^2z}}$ b) $\dfrac{\frac{3m}{4n}}{6mn}$ c) $\dfrac{\frac{1}{p^2-4}}{\frac{1}{p^2-4p+4}}$ d) $\dfrac{2e-6f}{\frac{3e^2-9ef}{2f}}$

146 a) $\dfrac{\frac{54k^2}{65t}}{\frac{81k}{75t^2}}$ b) $\dfrac{9ab^2c^3}{\left(9\cdot\frac{ab}{c}\right)^2}$ c) $\dfrac{\frac{2w^2-w}{w-2}}{w^2-2w^3}$ d) $\dfrac{\frac{rs}{r+s}}{\frac{r:s}{r^2-s^2}}$

147 a) $\dfrac{g+\frac{1}{3}}{g-\frac{1}{3}}$ b) $\dfrac{h}{0.5h-0.75}$ c) $\dfrac{1-\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e^2}}$ d) $\dfrac{\frac{y}{x}-\frac{z}{y}}{-\frac{z}{x}}$

148 a) $\dfrac{1-\frac{n}{v}}{-nv}$ b) $\dfrac{0.6m-0.4p}{p+0.8}$ c) $\dfrac{r^2+\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r^2}}$ d) $\dfrac{\frac{5f}{2n}}{\frac{1}{2n}-\frac{1}{4}}$

149 a) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ b) $\dfrac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{z}}$ c) $\dfrac{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}{\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}$ d) $\dfrac{-\frac{2k}{a}+\frac{3k}{b}}{\frac{6}{a}\cdot\frac{k}{b}}$

150 a) $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}}$ b) $\dfrac{\frac{q-p}{r}}{1-\frac{p}{q}}$ c) $\dfrac{\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}}{\frac{e}{f}-\frac{g}{h}}$ d) $\dfrac{\frac{u}{v}-\frac{v}{u}}{\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+2}$





151 a) $\dfrac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{x+y}}$ b) $\dfrac{\frac{n}{n^2-1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}}$

c) $\dfrac{s^2+t^2}{\frac{s}{s-t}-\frac{t}{s+t}}$ d) $\dfrac{\frac{z}{z+6}-\frac{8}{z}}{z-\frac{32}{z(z+6)}}$

152 a) $\dfrac{\frac{r}{r+1}-\frac{r}{r+2}}{\frac{r}{r+2}-\frac{2r}{r+1}}$ b) $\dfrac{\frac{2c}{c-3}-\frac{c}{c+4}}{\frac{c+11}{c^2+c-12}}$

c) $\dfrac{\frac{u}{w}-\frac{u+uv}{u+w}}{6u^2-12uvw+6v^2w^2}$ d) $\dfrac{\frac{4a^2-9b^2}{(2a+3b)^2}-\frac{2a+3b}{2a-3b}}{\frac{(2a+3b)^2}{4a^2-9b^2}-\frac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}}$

## 5.5 Vermischte Aufgaben

153 $a$, $b$ sind zwei beliebige Zahlen und $m = \frac{a+b}{2}$. Vergleiche $m-a$ mit $b-m$.

154 Berechne das arithmetische Mittel der beiden Terme.

a) $\frac{7}{12}, \frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{12}x, \frac{3}{4}x$ c) $\frac{7}{12}(a+b), \frac{3}{4}(a+b)$ d) $\frac{7}{12n}, \frac{3}{4n}$

155 Berechne das arithmetische Mittel der drei Terme.

a) $\frac{3}{5}t, \frac{2}{3}t, \frac{5}{6}t$ b) $\frac{3}{5}(x-y), \frac{2}{3}(x-y), \frac{5}{6}(x-y)$ c) $\frac{3a}{5b}, \frac{2a}{3b}, \frac{5a}{6b}$

156 Verifiziere, dass $a = n$, $b = \frac{n^2-1}{2}$ und $c = \frac{n^2+1}{2}$ für jeden Wert des Parameters $n$ die Gleichung $a^2+b^2=c^2$ erfüllen. Berechne $a$, $b$, $c$ für

a) $n=3$ b) $n=5$ c) $n=7$ d) $n=19$ e) $n=4$ f) $n=10$

157 a) $\left(\frac{2a+1}{a}-1\right)^2$ b) $\left(\frac{x-z^2}{z}+z-1\right)^2$ c) $\left(\frac{m-n}{m+n}+1\right)^2$

158 a) $\left(\frac{2a-b}{a}-\frac{b+c}{b}-\frac{b+c}{c}\right) : \frac{-1}{abc}$ b) $\left(\frac{r^3-1}{r^3}-\frac{r^2-r-1}{r^2}-\frac{1}{r}\right) : \frac{1}{r^3}$

**159** a) $4y^2z^3\left(\frac{2x}{yz^2}-\frac{3x}{y^2z}\right):(3z-2y)$ b) $u^2v^2\left(\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\right)^2:(u-v)(u+v)^2$

**160** a) $\left(\frac{5s-3}{s-t}-\frac{5s+3}{s+t}\right):\frac{25t^2-9}{s+t}$ b) $\left(\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8n}\right)$

**161** a) $\left(\frac{7ab}{5c-5d}\cdot\frac{4e^3}{9f^3}\right):\frac{14b}{3c-3d}\cdot\left(\frac{2e}{3f}\right)^2$

b) $\frac{25x^2-9}{(x+2)^2}\cdot\frac{x^2+5x+6}{y^3}:\frac{5x-3}{xy^3+2y^3}$

**162** a) $\frac{9a^2-30ab+25b^2-1}{3a-5b-1}$ b) $\frac{u^4-v^4+2v^2-1}{u^2+v^2-1}$

**163** a) $(p+1)^2\cdot\left(p-1+\frac{1}{p+1}\right)^2$ b) $(c-5):\frac{c^2-3c-10}{c^2-4}$

**164** a) $(x-3):\frac{x^2-2x-3}{xy+x+y+1}$ b) $\left(\frac{r}{r^2-r-1}\right)^2\left(-r+1+\frac{1}{r}\right)^2$

**165** $\frac{a^2b}{8}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]$

**166** a) $\frac{u-3v}{u^2-v^2}\cdot\frac{u+v}{u}+\frac{3uv-v^2}{u^2-2uv+v^2}:\frac{v^2}{u-v}$

b) $\frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$

**167** $\left(\frac{2}{m-1}+m+1\right)\cdot\left(\frac{1}{m^2-1}-\frac{2m}{m^4-1}\right)$

**168** $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{ab}\right)(a+b+c):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{c^2}{a^2b^2}\right)$

**169** $1^2=\frac{0\cdot1}{2}+\frac{1\cdot2}{2}$, $2^2=\frac{1\cdot2}{2}+\frac{2\cdot3}{2}$, $3^2=\frac{2\cdot3}{2}+\frac{3\cdot4}{2}$; Verallgemeinerung?

**170** Unter der Voraussetzung $a\le b+c$ für die positiven Zahlen $a$, $b$, $c$ ist die Ungleichung $\frac{a}{a+1}<\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$ zu beweisen.





## 5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

Multiplikation (beider Seiten) einer Gleichung mit einem Term kann eine Gewinnumformung sein. Vergleiche Abschnitt 4.3. Beispiele:

$$\frac{4x+5}{2x-8}=\frac{17}{2x-8}\Leftrightarrow 4x=12,\qquad \frac{4x+5}{2x-6}=\frac{17}{2x-6}\Rightarrow 4x=12$$

Zu 171 – 200: Bestimme die (reellen) Lösungen.

**171** a) $\frac{1}{x}+2=\frac{9}{x}$ b) $\frac{5}{6x}+\frac{13}{4}=\frac{5}{3}-\frac{2}{9x}$ c) $\frac{x+10}{3x}-\frac{x+8}{5x}=1$

**172** a) $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}=4$ b) $\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x}+\frac{5}{6}=0$ c) $\frac{11}{5}-\frac{x-20}{2x}=\frac{2x-1}{3x}$

**173** a) $\frac{5-x}{10}=\frac{x}{10}$ b) $\frac{2x-4}{x}=\frac{8x-7}{x}$ c) $\frac{3(x+2)}{x+8}=\frac{2(x+3)}{x+8}$

**174** a) $\frac{4x+1}{6x}=\frac{7x+8}{6x}$ b) $\frac{4-x}{3x-1}=\frac{2x+3}{3x-1}$ c) $\frac{2(x-2)}{x-5}=\frac{2x-4}{x-5}$

**175** Löse die Gleichung $\frac{3x-7}{N}=\frac{x+1}{N}$ mit dem Nenner $N$:

a) $N=10$ b) $N=x$ c) $N=x-4$ d) $N=x+4$ e) $N=x^2+x-20$

**176** Löse die Gleichung $\frac{Z}{4x-25}=\frac{Z}{10-x}$ mit dem Zähler $Z$:

a) $Z=9$ b) $Z=2x-4$ c) $Z=7-x$ d) $Z=(x+4)(2x-1)$ e) $Z=x^2+1$

**177** a) $\frac{1}{x}=\frac{9}{x-5}$ b) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+5}$ c) $\frac{x-6}{x}=\frac{x}{x+10}$

**178** a) $\frac{4}{2x+1}=\frac{3}{2x}$ b) $\frac{7}{x-8}=\frac{11}{x-1}$ c) $\frac{14}{x-14}=\frac{x-14}{14}$

**179** a) $\frac{2x+19}{x+2}=\frac{47}{3x+6}$ b) $\frac{2x}{x-5}=\frac{x-24}{5-x}$ c) $\frac{x-7}{6x+6}=\frac{x+7}{8x+8}$

**180** a) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+1}{9-3x}$ b) $\frac{10}{4x+3}=\frac{x+3}{4x^2+3x}$ c) $\frac{x-2}{x^2-x}=\frac{x}{x^2-1}$

**181** a) $\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{5x-8}{2(x-1)}=\frac{3(x-4)}{2(x-1)}$ b) $\frac{2}{x+9}+\frac{3}{4(x+9)}=\frac{1}{4}$





**182** a) $\frac{x}{2(x-6)}+\frac{1}{2}=\frac{3}{x-6}$ b) $\frac{y}{y+3}-\frac{y+1}{2(y+3)}=\frac{1}{3}$

**183** a) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{2x-1}{2x+2}=\frac{4x-1}{4x+4}$ b) $\frac{z-3}{z-2}+\frac{z}{5z-10}=\frac{4}{5}$

**184** a) $\frac{r-7}{r+5}-\frac{3-r}{2r+10}=2$ b) $\frac{x}{2x-8}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{3}{2}$

**185** a) $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x+8}{x^2-4}$ b) $\frac{5}{n-4}-\frac{1}{n-5}=\frac{9n-1}{n^2-9n+20}$

c) $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+2}{x-3}=\frac{x-5}{x^2-5x+6}$ d) $\frac{2k+17}{7k-3}+\frac{5k^2}{7k^2-3k}=\frac{k+2}{k}$

**186** a) $\frac{5}{2t^2+3t}+\frac{6}{2t+3}-\frac{7}{t}=0$ b) $\frac{7x-51}{x^2-9}-\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+3}=0$

c) $\frac{v+1}{v-1}-\frac{v-1}{v+1}-\frac{1}{v^2-1}=0$ d) $\frac{x-1}{x+3}-\frac{x-4}{x+5}=\frac{7x+13}{x^2+8x+15}$

**187** a) $\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x-2}=\frac{x+3}{4-x^2}$ b) $\frac{x}{3x-4}+\frac{1}{8-6x}-2=0$

**188** a) $\frac{8x+1}{x-8}-\frac{8x-1}{8-x}=8$ b) $\frac{5+x}{5-x}-\frac{5-x}{5+x}=\frac{5x-5}{x^2-25}$

**189** a) $\frac{x}{x-3}-\frac{x}{x-4}=\frac{5}{x-3}$ b) $\frac{1}{p}+\frac{2p+5}{p+6}=2$

c) $\frac{1}{w-5}+\frac{2w-3}{w+2}=2$ d) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-8}=\frac{11}{8-x}$

**190** Kopfrechnungen!

a) $\frac{x}{x+7}+\frac{7}{x+7}=\frac{100}{x+2}$ b) $\frac{2x}{2x-11}-\frac{11}{2x-11}=\frac{x-8}{3}$

c) $\frac{3x}{x+2}+\frac{6}{x+2}=\frac{1}{x}$ d) $\frac{6}{x-6}-\frac{x}{x-6}=\frac{9}{9-x}$

**191** a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$ b) $\frac{x}{2x-3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x-3}$

**192** a) $\frac{1}{q}-\frac{q}{4q-15}+\frac{1}{4}=0$ b) $\frac{1}{1-m}+\frac{2}{m}=\frac{1}{2+m}$

**193** a) $\frac{2x-1}{2x}-\frac{3x-1}{3x}+\frac{4}{4x+1}=0$ b) $\frac{x-4}{x-2}+\frac{x-8}{2x-4}+\frac{x-9}{3x-6}=0$

c) $\frac{x+4}{6x^2+x-2}-\frac{3}{8x-4}=0$ d) $\frac{3r+7}{r^2+4r}-\frac{5}{r+4}=\frac{1}{4r}$





**194** a) $\frac{x}{x-3}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2x-2}$ b) $\frac{1}{n^2-n}+\frac{1}{n^2-1}=\frac{5}{n^2+n}$

c) $\frac{6}{4s^2-9}+\frac{5}{2s^2-s-3}=\frac{4}{s^2-1}$ d) $\frac{1}{4x-4}+\frac{1}{6x-6}=\frac{5}{9x^2-x-8}$

e) $\frac{x+10}{x^2-10x}+\frac{x+5}{x^2-5x}=\frac{x}{x^2-15x+50}$

f) $\frac{x}{4x^2-20x+25}-\frac{1}{4x-10}+\frac{10}{4x^2-25}=0$

**195** a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-7}{x-8}$

**196** a) $\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+9}$ b) $\frac{6}{2x-5}-\frac{3}{x+3}=\frac{22}{2x-7}-\frac{11}{x-2}$

**197** a) $\frac{0.5x-1}{x+0.1}-\frac{0.2}{2x+0.2}=1$ b) $\frac{1-\frac{r}{3}}{1+\frac{r}{3}}=\frac{1+r}{2.6-r}$ c) $\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}}-\frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}}=\frac{1-\frac{4}{x}}{4+\frac{4}{x}}$

**198** a) $\frac{\frac{1}{4}x+1}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{3}{2}}{2-x}=\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{1+\frac{1}{w}}=\frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}}$ c) $\frac{0.75}{1.5+0.5x}+\frac{0.2x}{x+3}=0.3$

Zu 199, 200: Kopfrechnungen!

**199** a) $\frac{1}{x}=\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{x}=6$ c) $\frac{1}{x}=-\frac{5}{3}$ d) $\frac{1}{x}=2.7$ e) $\frac{1}{x}=-0.01$

f) $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{x}+7\right)=0$

g) $\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{1}{n}\right)=0$

h) $\frac{1}{f}\left(\frac{1}{f}-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{f}+\frac{5}{7}\right)\left(3-\frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{f}-1.6\right)\left(0.04-\frac{1}{f}\right)=0$

**200** a) $\frac{8}{x+2}=\frac{8}{9}$ b) $\frac{7}{2x-3}=\frac{7}{5}$ c) $\frac{25}{x-1}=1$ d) $\frac{12}{x+5}=4$ e) $\frac{6}{x-3}=\frac{1}{9}$

f) $\left(\frac{24}{x-3}-1\right)\left(\frac{24}{x-1}-3\right)=0$

g) $\left(\frac{1}{x-1}-1\right)\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{x-3}-\frac{1}{3}\right)=0$

## Gleichungen mit Parametern

Wenn aus dem Aufgabentext nichts anderes hervorgeht, ist die angegebene Gleichung ohne Berücksichtigung von Sonderfällen nach $x$ aufzulösen.

**201** a) $x+1=\frac{a}{a+b}$ b) $\frac{r}{r-1}=\frac{r}{r+1}+x$ c) $5x=3x+\frac{4}{u}-\frac{2}{v}$

**202** a) $x+\frac{1}{m}=\frac{1}{m-1}$ b) $2x-\frac{3a+b}{2a+2b}=\frac{b-2a}{2a+2b}$ c) $6x-\frac{1}{2h}=\frac{1}{3h}-4x$

**203** a) $x+\frac{x}{p}=1$ b) $\frac{x}{e}+\frac{x}{f}=\frac{1}{f}$ c) $\frac{n+1}{x}+\frac{n}{x+1}=0$

**204** a) $2x-\frac{dx}{2}=c$ b) $\frac{1}{x-t}=1-\frac{1}{t}$ c) $\frac{a}{w}-\frac{w}{a}=\frac{a^2}{x+aw}$

Zu 205 – 208: Löse die Gleichung nach jeder Variablen auf.

**205** a) $A=\frac{abc}{4r}$ b) $s=\frac{1}{1-q}$ c) $\frac{x}{a}=\frac{h-x}{h}$

**206** a) $\frac{x}{y}=\frac{x+a}{y+b}$ b) $F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$ $(r>0)$ c) $\alpha=\frac{(n-2)180^\circ}{n}$

**207** a) $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x\cdot y}$ b) $\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}$ c) $t=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

**208** a) $\frac{y}{x}-\frac{y}{x+1}=\frac{y+1}{x}$ b) $\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ c) $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$ $(c>0)$

**209** a) $\frac{1+x}{1-x}=a$ b) $\frac{3x+p}{3x-1}=\frac{x+1}{x-p}$ c) $\frac{m}{x-2}+\frac{2x}{2x-m}=1$

**210** Diskutiere in Nr. 209 die Sonderfälle.

**211** a) $\frac{x-1}{x-c}=c$ b) $\frac{s-5}{x-s}+\frac{1}{x}=0$ c) $\frac{a}{x}+1=\frac{x}{x-b}$

**212** Diskutiere in Nr. 211 die Sonderfälle.





**213** a) $\frac{a^2x-bx+c}{ax+bx-c}=a-1$ b) $\frac{g-hx}{gx-g}-\frac{(x+1)}{x-1}=1$ $(gx-g)=g(x-1)$

c) $\frac{x+r}{x-r}-\frac{x-r}{x+r}=\frac{4r^2+2r}{x^2-r^2}$

**214** a) $\frac{(mx-n)(m+n)}{mx-nx+n}+n=m$ b) $\frac{x}{c-d}-\frac{x+c+d}{c^2-d^2}=0$

c) $\frac{x^2}{sx-2s}-\frac{x-s}{s}=\frac{1}{x-2}$

**215** a) $\frac{2a-x}{4a^2-4ab+b^2}=\frac{x-b+2}{4a-2b}$ b) $\frac{x^2+n^2}{x^2-nx}-\frac{n^2+1}{nx-n^2}=1$

c) $\frac{r^2-4}{24r}-\frac{5r-6}{8x}=\frac{8r+2}{3rx}-r$ d) $\frac{4}{x+y}+\frac{1}{x}+\frac{4}{x-y}=0$

e) $\frac{2(x-c)}{a^2+ab-ac-bc}-\frac{x+c}{a^2+ab+ac+bc}=\frac{1}{a+b}$

**216** a) $\frac{c-dx}{c^2-9d^2}-\frac{c+dx}{c^2+6cd+9d^2}=0$ b) $\frac{7}{t^2+tx}-\frac{t+4}{tx}+\frac{3t-2}{tx+x^2}=0$

c) $\frac{ex-f}{ex+e}+\frac{3e+fx}{fx+f}=\frac{e^2+f^2}{ef}$ d) $\frac{1}{(x-k)^2}+\frac{2}{(x+k)^2}=\frac{3}{x^2-k^2}$

e) $\frac{a-x}{2a^2-2ab}-\frac{2(a+x)}{a^2-b^2}+\frac{x}{ab+b^2}+\frac{a^2+6ab+b^2}{2a^3-2ab^2}=0$

**217** a) $\frac{x+g}{x+\frac{x}{g}}=1$ b) $\frac{1}{\frac{x}{u}-\frac{x}{v}}=uv$ c) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{d}}=\frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{c}}$

**218** a) $\frac{1-\frac{x+a}{x-b}}{1-\frac{x-a}{x+b}}=1$ b) $\frac{r-\frac{1}{x}}{r+\frac{1}{x}}=\frac{x-\frac{1}{r}}{x+\frac{1}{r}}$ c) $\frac{x-\frac{1}{n}}{\frac{1}{x}-n}=n+x+1$

### Textaufgaben

**219** Der Zähler eines ungekürzten Bruches ist um 3 grösser als der Nenner. Der Wert des Bruches ist 0.8. Berechne Zähler und Nenner.

**220** Der Nenner eines ungekürzten Bruches ist um 240 grösser als der Zähler. Addiert man 1200 zum Zähler, so erhält man einen Bruch, dessen Wert zum ursprünglichen reziprok ist. Berechne Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruches.





**221** Peter verwechselt das Subtrahieren mit dem Dividieren. Statt dass er $x$ durch $a$ dividiert, subtrahiert er $a$ von $x$. Trotzdem erhält er das richtige Resultat. Bestimme $x$.

a) $a=2$ b) $a=3$ c) $a=10$ d) $a=-10$ e) $a=\frac{4}{3}$ f) allgemein

**222** Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz dieser Kehrwerte. Welche Zahlen sind es?

**223** Ein grosser Bagger benötigt für einen Aushub 12 Stunden. Würde noch ein kleinerer Bagger helfen, so könnte der Aushub in 9 Stunden gemacht werden. Wie lange würde der kleine Bagger allein brauchen?

**224** Ein Wasserbecken wird durch eine Zuleitung in 10 Stunden gefüllt. Die Zuleitung wird um 9.00 Uhr geöffnet. Um 11.30 Uhr wird zusätzlich eine zweite Zuleitung geöffnet, so dass das Becken schon um 16.00 Uhr voll ist. Wie lange hätte die zweite Zuleitung allein, um das Becken zu füllen?

**225** Zwei Metallstücke haben die Massen 6 kg und 7.2 kg. Das Volumen des zweiten Stückes beträgt 90 % des Volumens des ersten. Die beiden Dichten unterscheiden sich um 2.5 g/cm$^3$. Berechne das Volumen des ersten Stückes.

**226** Ein Schiff benötigt für eine 180 km lange Strecke einen Sechstel weniger an Zeit als ein langsameres Schiff, dessen mittlere Geschwindigkeit um 5 km/h kleiner ist als die des schnelleren. Berechne die beiden Fahrzeiten.

**227** Ein Autofahrer erreicht sein Ziel nach 120 km Fahrt um 15.00 Uhr. Wäre seine mittlere Geschwindigkeit um 4 km/h grösser gewesen, so hätte er 4 % Zeit gewonnen. Wann ist er gestartet?

**228*** Läufer $A$ benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer $B$ für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von $A$ ist um 2.5 km/h grösser als die von $B$. Berechne die Laufzeit von $A$.

**229** Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr, um allein Schutt wegzuführen, als ein grosser. Beide gemeinsam können den Schutt in je 20 Fahrten wegführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?

**230** Der Kilopreis der Kaffeesorte $A$ ist um 2 Franken höher als derjenige der Sorte $B$. Von der Sorte $B$ erhält man für 160 Franken 8 kg mehr, als man von der Sorte $A$ für 120 Franken erhält. Berechne den Kilopreis der Sorte $A$.





## Einige Ungleichungen

**231** a) $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x}<-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x}<3$ d) $\frac{-1}{x}<-3$

**232** a) $\frac{2}{x}>1$ b) $\frac{-2}{x}>-1$ c) $\frac{-1}{-2x}>1$ d) $\frac{-1}{-2x}>-1$

**233** a) $\frac{1}{x-4}<0$ b) $\frac{8}{x+5}>0$ c) $\frac{-7}{2x-3}<0$ d) $\frac{5}{6-x}>0$

**234** a) $\frac{2}{3x+8}<0$ b) $\frac{-6}{1-x}>0$ c) $\frac{-1}{3-4x}<0$ d) $\frac{12}{8x-9}>0$

**235** a) $\frac{1}{(x-2)(x-6)}<0$ b) $\frac{1}{(x-2)(x-6)}>0$ c) $\frac{x-2}{x-6}>0$

**236** a) $\frac{x}{x+5}<0$ b) $\frac{-3}{x^2+5x}<0$ c) $\frac{4}{x^2-8x+15}>0$

**237** a) $\frac{6}{x-5}<\frac{1}{2}$ b) $\frac{6}{x-5}>\frac{1}{2}$ c) $\frac{x+5}{x-3}<2$ d) $\frac{x+1}{x-8}>4$

**238** a) $\frac{5}{4-x}>\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{4-x}<\frac{2}{3}$ c) $\frac{2x-1}{2x+1}<\frac{7}{6}$ d) $\frac{x-3}{x+3}>3$

# 3 Zehnerpotenzen

Häufig treten in alltäglichen oder wissenschaftlichen Kontexten, zum Beispiel in Physik, Biologie oder Chemie, grosse oder kleine Zahlen auf. Potenzen können dazu verwendet werden um sehr grosse oder sehr kleine Zahlen kurz und übersichtlich zu notieren. Zwei wichtige Beispiele für solche Zahlen sind folgend aufgeführt.

- Abstand Erde-Sonne, eine astronomische Einheit (1 AE)

$$150'000'000\,\mathrm{km}$$

- Durchmesser eines Atoms, ein Ångström (1 Å)

$$0.000\,000\,000\,1\,\mathrm{m}$$

## 3.1 Der Potenzbegriff für natürliche Exponenten

**Definition 3.1: Potenz, Basis und Exponent**

Seien $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$. Der Term

$$a^b$$

heisst Potenz. $a$ nennt man Basis, $n$ heisst Exponent.

**Definition 3.2: Potenz mit natürlichem Exponenten**

Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} \text{ für } n \geq 2$$

**Übung 3.1.**

Berechne

a) $2^2$

b) $2^3$

c) $2^{10}$

d) $3^3$

e) $4^4$

f) $5^3$

## 3.2 Zehnerpotenzen

Nach Definition gilt also zum Beispiel

$$10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000,$$

was leicht nachgerechnet werden kann. Die obige Liste weist auch ein System auf: Erhöht man nämlich den Exponenten einer Zehnerpotenz um 1, so muss man einfach die entsprechende Zahl mit 10 multiplizieren. Wenden wir dieses Prinzip rückwärts an, so können wir Bedeutungen für bislang sinnlose Ausdrücke

$$10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad \text{etc.}$$

festlegen. Nämlich

$$10^0 = 1 \quad 10^{-1} = 0.1 = \frac{1}{10} \quad 10^{-2} = 0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} \quad \ldots$$

Ich empfehle zu den jeweiligen Zehnerpotenzen auch die entsprechenden Präfixe und Abkürzungen, vielleicht mit Tabelle 1 auf Seite 42, zu lernen. Sie gehören zu einer umfassenden Allgemeinbildung, da sie uns im Alltag begegnen.

## 3.3 Wissenschaftliche Darstellung

Wir kommen auf unsere Motivation zu Beginn des Kapitels zurück; der schlanken Darstellung grosser und kleiner Zahlen. Bei der sogenannten *wissenschaftlichen Darstellung* von Zahlen schreibt man die Zahl als Dezimalbruch mit Einer und Zehnerpotenzen.

**Beispiel 3.3.1.**

- Abstand Erde-Sonne:
$$150'000'000\,\text{km} = 1.5 \cdot 10^8\,\text{km}$$

- Durchmesser eines Atoms:
$$0.000\,000\,000\,1\,\text{m} = 1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $10^{15}$ | 1 000 000 000 000 000 | 1 Billiarde | Peta- | P |
| $10^{12}$ | 1 000 000 000 000 | 1 Billion | Tera- | T |
| $10^{11}$ | 100 000 000 000 | | | |
| $10^{10}$ | 10 000 000 000 | | | |
| $10^{9}$ | 1 000 000 000 | 1 Milliarde | Giga- | G |
| $10^{8}$ | 100 000 000 | | | |
| $10^{7}$ | 10 000 000 | | | |
| $10^{6}$ | 1 000 000 | 1 Million | Mega- | M |
| $10^{5}$ | 100 000 | | | |
| $10^{4}$ | 10 000 | | | |
| $10^{3}$ | 1 000 | 1 Tausend | Kilo- | k |
| $10^{2}$ | 100 | | Hekto- | h |
| $10^{1}$ | 10 | | Deka- | d |
| $10^{0}$ | 1 | | | |
| $10^{-1}$ | 0.1 | | Dezi- | d |
| $10^{-2}$ | 0.01 | | Centi- | c |
| $10^{-3}$ | 0.001 | 1 Tausendstel | Milli- | m |
| $10^{-4}$ | 0.000 1 | | | |
| $10^{-5}$ | 0.000 01 | | | |
| $10^{-6}$ | 0.000 001 | 1 Millionstel | Mikro- | $\mu$ |
| $10^{-7}$ | 0.000 000 1 | | | |
| $10^{-8}$ | 0.000 000 01 | | | |
| $10^{-9}$ | 0.000 000 001 | 1 Milliardstel | Nano- | n |
| $10^{-10}$ | 0.000 000 000 1 | | | |
| $10^{-11}$ | 0.000 000 000 01 | | | |
| $10^{-12}$ | 0.000 000 000 001 | 1 Billionstel | Piko | p |
| $10^{-15}$ | 0.000 000 000 000 001 | 1 Billiardstel | Femto | f |

Tabelle 1: Zehnerpotenzen: Namen und Abkürzungen

- $$92'300 = 9.23 \cdot 10^4$$

- $$0.0032 = 3.2 \cdot 10^{-3}$$

**Übung 3.2.**

Schreibe die Zahlen aus:

a) $2.52 \cdot 10^5$

b) $6.52 \cdot 10^7$

c) $5.555 \cdot 10^{12}$

d) $4.15 \cdot 10^9$

e) $4.31 \cdot 10^9$

f) $3.11 \cdot 10^3$

g) $1.23 \cdot 10^6$

h) $6.22 \cdot 10^4$

**Übung 3.3.**

Schreibe in wissenschaftlicher Darstellung:

a) $99'000'000$

b) $4'180'000'000$

c) $48'500'000$

d) $0.000\,008\,21$

e) $92'400$

f) $0.000\,016$

g) $190'300$

h) $2'340$

i) $1'350'000$

j) $0.000\,000\,000\,101$

k) $0.000\,000\,077$

## 3.4 Rechenregeln für Potenzen

Mit der Definition einer Potenz lassen sich leicht die folgenden Gesetze einsehen.

Für die folgenden Ausführungen seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$; sowie bei Bedarf $n > m$. Es gilt

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1}$$
$$a^n \div a^m = a^{n-m} \tag{2}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{3}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{4}$$
$$a^n \div b^n = (a \div b)^n \tag{5}$$

**Beispiel 3.4.1.** Folgend je ein konkretes Beispiel:

- $x^{2n} \cdot x^{3-n} = x^{2n+3-n} = x^n + 3$
- $z^7 \div z^{3-n} = z^{7-(3-n)} = z^{n+4}$
- $\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
- $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$
- $25^3 \div 5^3 = (25 \div 5)^3 = 5^3 = 125$

## 3.5 Notizen zu den Übungen

### Notizen zu Übung 3.3

a) $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

c) $2^{10} = 1024$

d) $3^3 = 27$

e) $4^4 = (2^2)^4 = 2^8 = 256$

f) $5^3 = 125$

### Notizen zu Übung 3.3

a) 252 000

b) 65 200 000

c) 5 555 000 000 000

d) 4 150 000 000

e) 4 310 000 000

f) 3110

g) 1 230 000

h) 62 200

### Notizen zu Übung 3.3

a) $9.9 \cdot 10^7$

b) $4.18 \cdot 10^9$

c) $4.85 \cdot 10^7$

d) $8.21 \cdot 10^{-6}$

e) $9.2400 \cdot 10^4$

f) $1.6 \cdot 10^{-5}$

g) $1.903 \cdot 10^{5}$

h) $2.34 \cdot 10^{3}$

i) $1.35 \cdot 10^{6}$

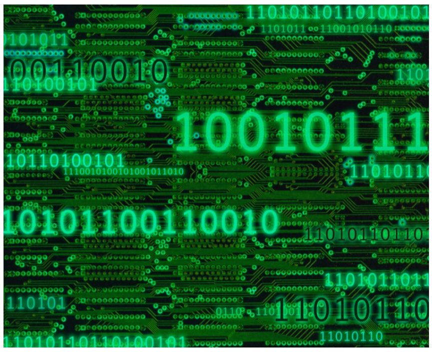
j) $1.01 \cdot 10^{-10}$

k) $7.7 \cdot 10^{-8}$

# 4 Zahlensysteme

## 4.1 Eine kurze Geschichte der Zahlen

Es ist nicht genau bekannt, seit wann die Menschen Zahlen benutzen. Die ersten Darstellungen von Zahlen waren wahrscheinlich Striche. Man spricht hier von einem unären Zahlensystem, weil alle Zahlen mit nur einem Zeichen (Strich) dargestellt werden.



**Übung 4.1.**

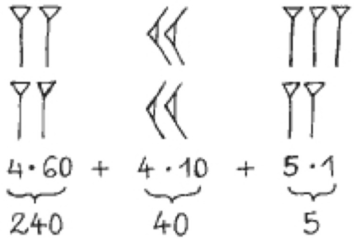
Weshalb fasst man just fünf Striche zu einem Bündel zusammen?

## 4.2 Zahlen in Babylonien (ca. 2000 v. Chr.)

Abbildung 4: Babylonische Rechentafel und Sternkarte

Die Babylonier verwendeten als eines der ersten Völker ein sogenanntes Positionssystem. Der Wert eines Zeichens hängt auch von dessen Position ab. Während wir heute in unserem Dezimalsystem (Basis 10) die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ verwenden, brauchten die Babylonier in ihrem Sechzigersystem 59 Ziffern, denn ein Zeichen für die Null gab es damals noch nicht.

Abschliessend noch ein Beispiel, wie diese Zeichen verwendet werden.




## 4.3 Zahlen in Indien und Arabien

Die Ziffern, wie wir sie heute verwenden, haben ihren Ursprung in Indien und Arabien. Sie wurden unter anderem durch Kaufleute wie Fibonacci im 13. Jahrhundert nach Europa gebracht, konnten sich aber erst später gegen die römischen Zahlen durchsetzen.

Eine grossartige Leistung des menschlichen Geistes stellt die Erfindung der Zahl Null dar. Für die Menschen war es lange Zeit unvorstellbar, ein Zeichen für „Nichts“ zu gebrauchen. Bei Positionssystemen ist ein Zeichen für Null als Platzhalter aber unentbehrlich.


Abbildung 5: Evolution von den indischen bis zu den heutigen arabischen Ziffern

**Übung 4.2.**

Lerne die römischen Zahlen von 1 bis 3000.

**Übung 4.3.**

Schreibe 2024 mit römischen Zahlzeichen; und 1848.

Abbildung 6: Magisches Quadrat am Tor der Familia Sagrada

## 4.4 Zahlensysteme

Ein Zahlensystem wird zur Darstellung von Zahlen verwendet. Eine Zahl wird dabei nach den Regeln des Zahlensystems als Folge von Ziffern dargestellt. Man unterscheidet im Wesentlichen zwischen Additionssystemen und Stellenwertsystemen (Positionssystemen).

Ein Positionssystem hat eine Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Jede Zifferposition hat einen Wert, der einer Potenz der Basis entspricht. Für die $k$-te Position, $k \in \mathbb{N}_0$ hat man einen Wert von $b^{k-1}$. Die Berechnung des Zahlenwertes erfolgt durch Multiplikation der einzelnen Ziffern $z_i$ mit den zugehörigen Stellenwerten $b_i$ und Summation dieser Produkte:

$$\text{Zahlenwert} = z_n \cdot b^n + \cdots + z_i \cdot b^i + \cdots + z_0 \cdot b^0.$$

**Beispiel 4.4.1.** Unter der Zahl 1257 im üblichen Dezimalsystem (d.h. die Basis ist 10) verstehen wir den Wert

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 1257.$$

Mit der Beschränkung des niedrigsten Exponenten auf 0 kann man nur ganze Zahlen darstellen. Lässt man auch negative Exponenten zu, kann man auch rationale Zahlen in einem Stellenwertsystem schreiben, wobei der Übergang vom nichtnegativen zum negativen Exponenten durch ein Trennzeichen markiert wird, beispielsweise einen Punkt:

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 121.47$$

**Übung 4.4.**

Computer stellen Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1 dar und zwar als magnetische Polung oder elektrisches Signal (Nord oder Süd bzw. Plus oder Minus). Die binäre Zahl 1011 entspricht der Dezimalzahl

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11.$$

Stelle die Dezimalzahlen von 1 bis 20 im Binärsystem dar.

**Übung 4.5.**

Finde für die Dezimalzahlen 34 und 37 die Binärschreibweise.

**Übung 4.6.**

Stelle die Zahl $\pi$ binär mit sechs Nachkommastellen dar.

## 4.5 Das Sexagesimalsystem

Das babylonische Zahlensystem ist ein Stellenwertsystem zur Basis 60, mit dem beliebig grosse, aber auch beliebig kleine Zahlen systematisch dargestellt werden können. Die Babylonier benutzten eine Keilschrift. Hier sind die ersten 59 Zahlen.

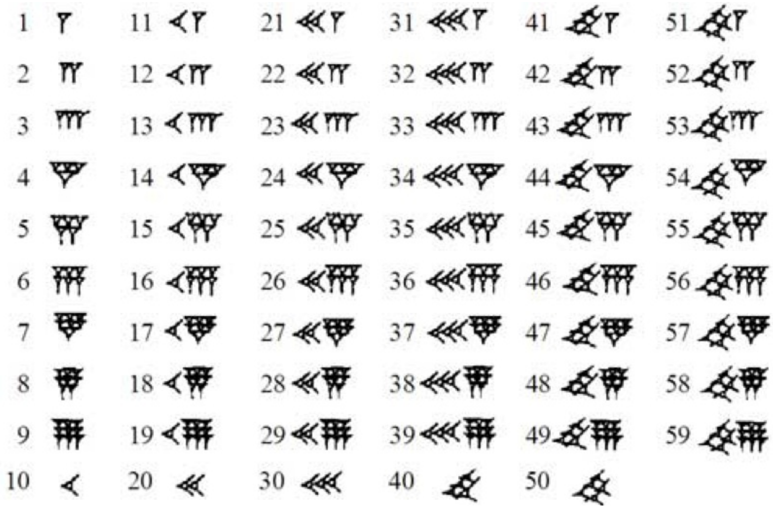
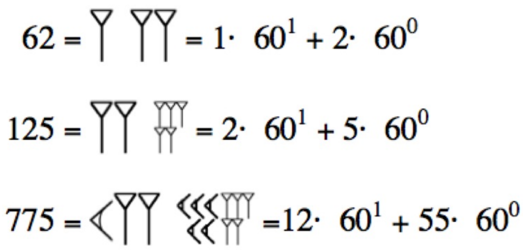


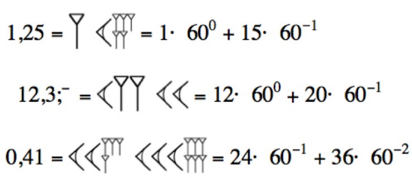

Abbildung 7: Babylonische Zahlen von 1 bis 59

Jede dieser oben aufgeführten Zahlen ist als eine Ziffer zu interpretieren. Erst bei Zahlen über 59 wird naturgemäss die nächste Stelle benutzt. Sie wird, wie auch bei unserem Dezimalsystem, nach links eingerückt.

Abbildung 8: Babylonische Tontafel, 7289 v.Chr.




Genauso interessant ist, dass die Babylonier ihr Stellenwertsystem auch für Nachkommazahlen nutzten. Dabei kam ihnen die vielfältige Teilbarkeit der Zahl 60 zugute — dies war vermutlich auch der Grund, weshalb das Sexagesimalsystem überhaupt eingeführt wurde. Ein Zeichen für den „Punkt“ war nicht vorhanden, so dass die Zuordnung der Stellen zu den 60-er Potenzen nicht eindeutig war. Welche Position z.B. die $60^0$-Stelle hat, musste aus dem Kontext erraten werden.




Eine genaue Untersuchung des Objekts aus Abbildung 8 auf Seite 51 fördert folgendes Schriftbild zu Tage, das in Abbildung 9 auf Seite 52 deutlicher zu erkennen ist. Es

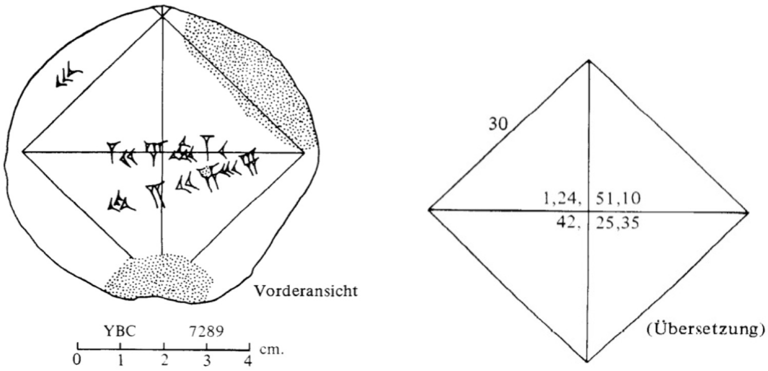



Abbildung 9: Schema und Übersetzung der Zahlen

zeigt sich, dass man ein sinnvolles Ergebnis kriegt, wenn man die erste „1" mit $1 \cdot 60^0$ identifiziert. Wir erhalten so für die erste Zeile

$$1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$$

**Übung 4.7.**

Welche Zahl wird hier beschrieben?

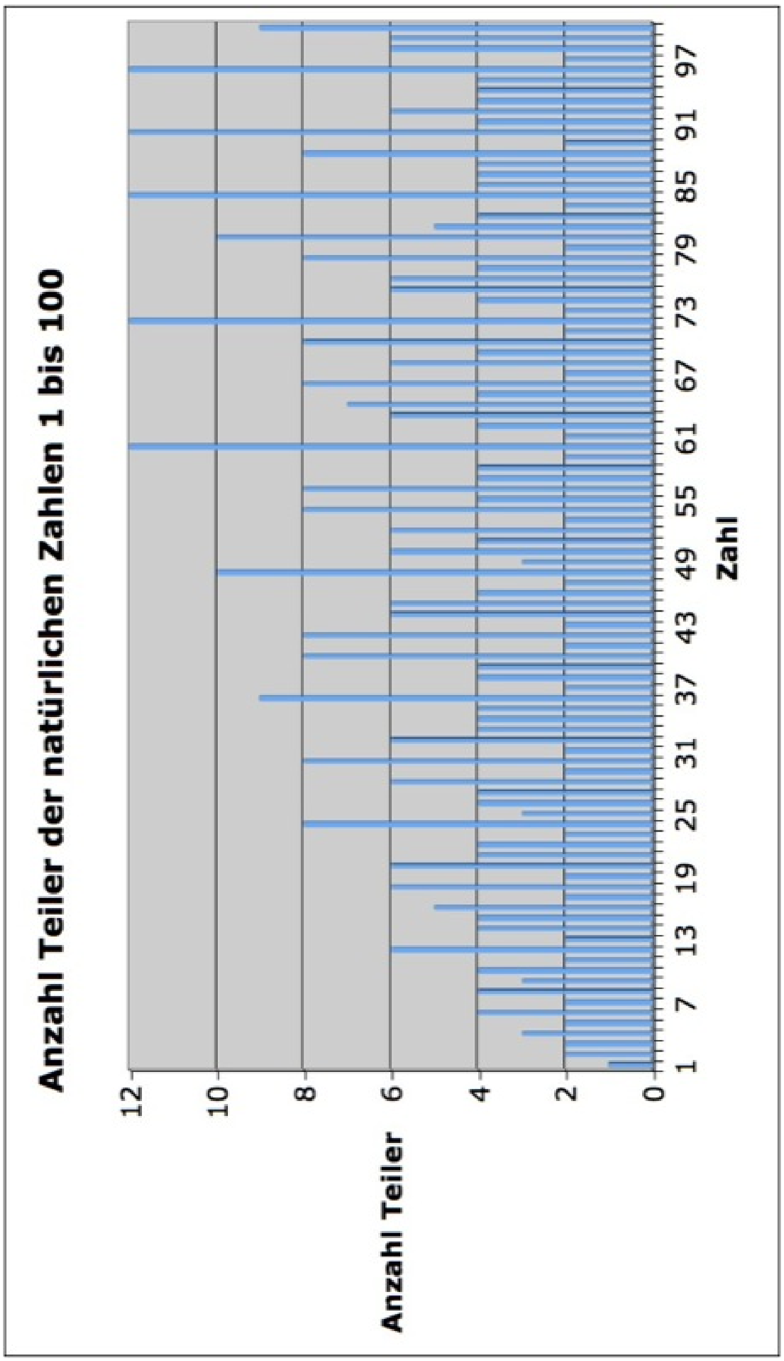



Abbildung 10: Anzahl Teiler der ersten hundert natürlichen Zahlen

## 4.6 Notizen zu den Übungen

### Notizen zu Übung 4.7

Vermutlich kommt dies vom Zählen mit den Fingern.

### Notizen zu Übung 4.7

Von `I` bis `M` kann man diese Ziffern kombinieren. Beachte, dass nie mehr als drei gleichartige Ziffern nebeneinander stehen. Steht aber eine minderwertige Ziffer links einer höherwertigen, so wird ihr Wert abgezogen.

### Notizen zu Übung 4.7

`MMXXIV` und `MDCCCXLVIII`

### Notizen zu Übung 4.7

| BIN | DEC | BIN | DEC |
|---|---|---|---|
| 0001 | 1 | 1011 | 11 |
| 0010 | 2 | 1100 | 12 |
| 0011 | 3 | 1101 | 13 |
| 0100 | 4 | 1110 | 14 |
| 0101 | 5 | 1111 | 15 |
| 0110 | 6 | 10000 | 16 |
| 0111 | 7 | 10001 | 17 |
| 1000 | 8 | 10010 | 18 |
| 1001 | 9 | 10011 | 19 |
| 1010 | 10 | 10100 | 20 |

### Notizen zu Übung 4.7

$34 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^1 = 100010_{(2)}$ und $37 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 100101_{(2)}$

### Notizen zu Übung 4.7

$3 = 11_{(2)}$ und weiter haben $2^{-3}$ und $2^{-6}$ Platz: $11.001001\ldots$

### Notizen zu Übung 4.7

Es ist $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3} = 1.41421\overline{296}$, was nahe bei $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$ ist.

## Abbildungsverzeichnis