
# Ähnlichkeit

$k$, $k^2$ und $k^3$

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Kongruenzabbildungen

Eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung, bei der jedem Punkt einer ersten Punktmenge genau ein Punkt einer zweiten Punktmenge zugeordnet wird. Bei den Punktmengen handelt es sich um Geraden, Strecken, Winkel, Figuren (z.B. Dreiecke, Kreise), usw.

Wir nennen die erste Punktmenge die Originalmenge und die zweite Punktmenge die Bildmenge. In der Regel bezeichnen wir die Bildpunkte zu den Originalpunkten $A$, $B$, $P$, $\ldots$ mit $A'$, $B'$, $P'$, $\ldots$.

Abbildungen, bei denen die Bildmenge deckungsgleich (kongruent) zur Originalmenge ist, heissen Kongruenzabbildungen. Kongruente Figuren haben also dieselbe Form und dieselbe Grösse. Zu den Kongruenzabbildungen gehören

- Achsenspiegelungen
- Rotationen
- Punktspiegelungen
- Translationen
- Verkettungen oben genannter Abbildungen

**Beispiele.**

(a) Achsenspiegelung der Figur $F$ an der Geraden $g$

(b) Drehung der Figur $F$ um den Drehpunkt $Z$ um den Winkel $\alpha$

(c) Punktspiegelung der Figur $F$ am Punkt $Z$

(d) Verschiebung der Figur $F$ um einen vorgegebenen Verschiebungspfeil

(e) Verkettung einer Achsenspiegelung mit einer Drehung

# 2 Zentrische Streckung

Wir wählen einen Punkt $Z$ der Ebene und eine positive Zahl $k$. Ordnen wir nun jedem Punkt $P$ einen Bildpunkt $P'$ zu gemäss der Vorschrift

- $P'$ liegt auf dem Strahl $ZP$
- Die Strecke $ZP'$ ist $k$-mal so lang wie die Strecke $ZP$

so heisst diese Abbildung eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $Z$ und dem Streckungfaktor $k$.

Für $k > 1$ ist das Bild grösser als das Original, für $k = 1$ sind Bild und Original identisch und für $0 < k < 1$ ist das Bild kleiner als das Original.

**Beispiel 1.** Gegeben sind ein Punkt $Z$ und ein Dreieck $ABC$. Das Dreieck ist von $Z$ aus mit dem Streckungsfaktor 2 zentrisch zu strecken.

Eine zentrische Streckung hat folgende Eigenschaften

- Originalwinkel und Bildwinkel sind gleich gross.
- Originalgerade und Bildgerade sind parallel.
- Die Bildstrecke ist $k$-mal so lang wie die Originalstrecke.
- Der Flächeninhalt der Bildfigur ist $k^2$-mal so gross wie der Flächeninhalt der Originalfigur.

**Übung 1.** Strecken Sie ein Quadrat $Q$ von einem Punkt $Z$ aus mit dem Streckungsfaktor 3 zentrisch und überprüfe anschliessend obige Eigenschaften.

**Übung 2.** Eine Streckung mit einem negativen Streckungsfaktor bedeutet eine Streckung mit dem entgegengesetzten positiven Streckungsfaktor und eine zusätzliche Punktspiegelung am Streckungszentrum.

Strecke ein Dreieck von $Z$ aus mit dem Streckungsfaktor $-\frac{1}{2}$.

# 3 Ähnlichkeitsabbildungen

Kongruenzabbildungen, zentrische Streckungen und ihre Verkettungen heissen Ähnlichkeitsabbildungen. Figuren, welche durch Ähnlichkeitsabbildungen auseinander hervorgehen, heissen zueinander ähnlich. Ähnliche Figuren haben dieselbe Form.

**Beispiel 2.** Verkettung einer Drehung mit einer zentrischen Streckung.

Eine Ähnlichkeitsabbildung hat folgende Eigenschaften

- Originalwinkel und Bildwinkel sind gleich gross.
- Alle Bildstrecken sind $k$-mal so lang wie die entsprechenden Originalstrecken.
- Der Flächeninhalt der Bildfigur ist $k^2$-mal so gross wie der Flächeninhalt der Originalfigur

Daraus folgt insbesondere für ähnliche Dreiecke, dass sie gleiche Winkel haben und im Verhältnis von zwei einander entsprechenden Seiten übereinstimmen.

**Übung 3.** Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Wie verhalten sich die Flächen zweier Kreise, wenn sich ihre Radien wie $2 \div 3$ verhalten? Gib ein konkretes Beispiel zweier solcher Kreise.

## 4 Strahlensätze

**Satz 1** (1. Strahlensatz). *Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem andern Strahl.*

**Beispiel 3.** Standardbeispiel mit $a = 25$, b=10 und $c = 32$. Bestimme den fehlenden Abschnitt $d$.

**Übung 4.** Teile eine Strecke im Verhältnis $2 \div 3$.

**Satz 2** (2. Strahlensatz). *Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelenabschnitte wie die vom Anfangspunkt aus gemessenen Abschnitte auf einem der Strahlen.*

**Beispiel 4.** Standardbeispiel mit $a = 8$, $b = 3$ und $p = 10$. Bestimme $q$.

**Übung 5.** Eine freistehende Telefonstange im ebenen Gelände wirft bei einem bestimmten Sonnenstand einen Schatten von 5.6 m Länge. Um die Stangenhöhe $h$ zu bestimmen, wird ein Meterstab parallel zur Stange aufgestellt, so dass beide Schattengrenzen zusammenfallen. Der Abstand des Meterstabes von der Stange misst 2.9 m.

Beide Strahlensätze gelten sinngemäss auch dann, wenn ...

- ... mehr als zwei Strahlen von zwei Parallelen geschnitten werden.
- ... zwei Strahlen von mehr als zwei Parallelen geschnitten werden.
- ... anstatt Strahlen zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten werden.

**Beispiel 5.** Ein Fotograf steht in der Entfernung $e = 60\,\mathrm{m}$ von einem Baum. Die Brennweite $f$ des Kamera-Objektivs beträgt $45\,\mathrm{mm}$, die Grösse $a$ des Baum-Bildes auf dem Negativ misst $24\,\mathrm{mm}$. Berechne die Baumhöhe $h$.

Alle Strahlensätze lassen sich z.B. mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken beweisen.

# 5 Ähnliche Körper

Körper, welche durch Ähnlichkeitsabbildungen auseinander hervorgehen, heissen zueinander ähnlich. Ähnliche Körper haben dieselbe Form.

Neben den bereits bekannten Eigenschaften von Ähnlichkeitsabbildungen

- Eine Bildstrecke ist $k$-mal so lang wie die entsprechende Originalstrecke.
- Der Flächeninhalt einer Bildfigur ist $k^2$-mal so lang wie der Flächeninhalt der entsprechenden Originalfigur.

gilt zusätzlich

- Das Volumen de Bildkörpers ist $k^3$-mal so gross wie das Volumen des Originalkörpers

**Beispiel 6.** Alle Würfel sind zueinander ähnlich.

**Beispiele.**

(a) Zwei Würfel aus gleichem Material wiegen 1 g und 1 kg. Der leichtere Würfel hat eine Kantenlänge von 5 cm. Wie lang ist eine Kante des schwereren Würfels?

Weil die beiden Würfel aus gleichem Material sind verhalten sich wegen

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 \cdot \rho}{V_2 \cdot \rho} = \frac{V_1}{V_2}$$

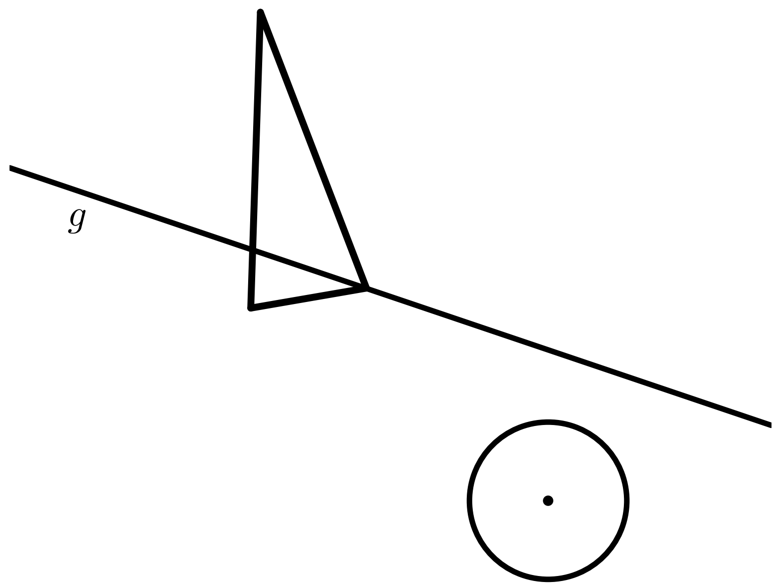
ihre Volumina wie $1 \div 1000$, also wegen $10^3 = 1000$ ihre Kantenlängen wie $1 \div 10$. Die Kantenlänge des schwereren Würfels beträgt deshalb 50 cm.

(b) Ein gerader Kreiskegel wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in halber Höhe geteilt. Er zerfällt dabei in einen kleineren Kegel und einen Kegelstumpf. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Teile?

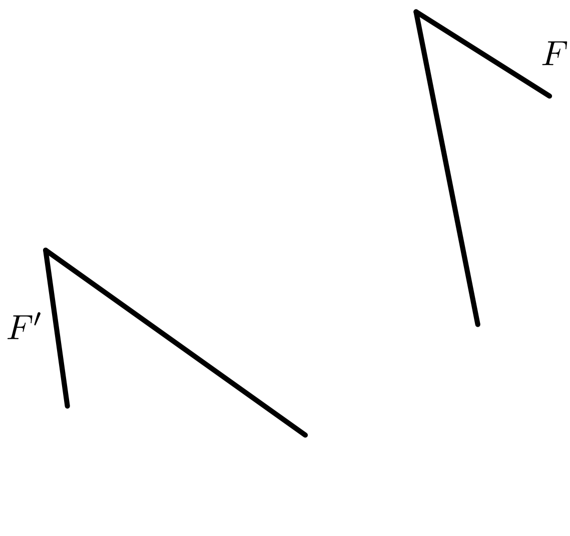
Der kleine Kegel ist zum ursprünglichen ähnlich (zentrische Streckung mit Kegelspitze als Streckungszentrum). Ihre Höhne verhalten sich wie $1 \div 2$, ihre Grundflächen wie $1 \div 4$ und ihre Volumina wie $1 \div 8$. Das Volumen des Kegelstumpfs ist Volumen des ursprünglichen Kegels minus Volumen des kleinen Kegels. Also verhält sich das Volumen des kleinen Kegels zu dem des Kegelstumpfs wie $1 \div 7$.

# 6 Übungen

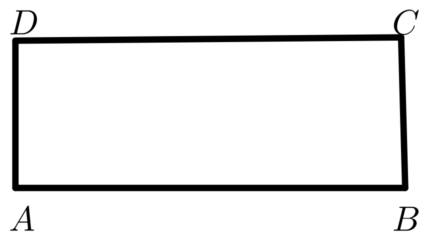
1. Spiegle das Dreieck und den Kreis an der Geraden $g$.




2. Die Figur $F$ kann durch eine Achsenspiegelung in die Figur $F'$ überführt werden. Konstruiere die Spiegelachse.

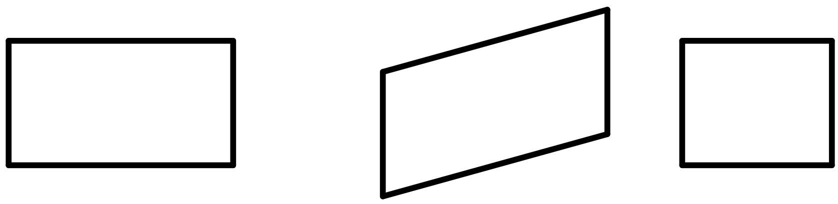


3. Spiegle das Rechteck $ABCD$ an der Rechteckdiagonalen durch $A$ und $C$.



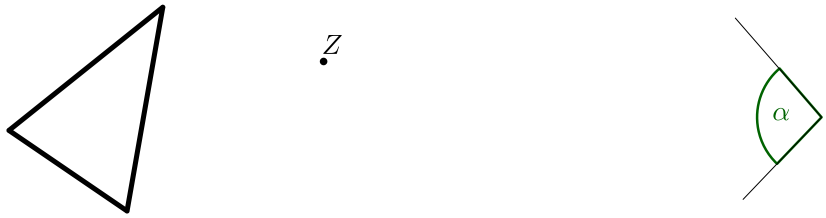

4. Geht eine Figur durch eine Achsenspiegelung in sich selbst über, so heisst die Figur achsensymmetrisch. Bei Achsensymmetrie heisst die Spiegelachse auch Symmetrieachse der Figur.

   Zeichne bei den Figuren alle möglichen Symmetrieachsen und Symmetriepunkte ein.



5. Drehe den Punkt $P$ um $Z$ um den Winkel 120° im Uhrzeigersinn.

6. Drehe die Figur im Gegenuhrzeigersinn um $Z$ um den Winkel $\alpha$.

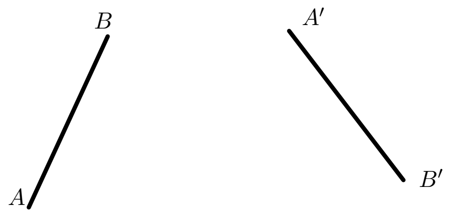



7. Die Aufnahme zeigt den nächtlichen Nordhimmel. Wegen der langen Belichtungszeit haben die Sterne kreisbogenförmige Spuren hinterlassen, deren Mittelpunkt den Himmelspol kennzeichnet. Die dicke Spur unterhalb des Drehzentrums stammt vom Polarstern.

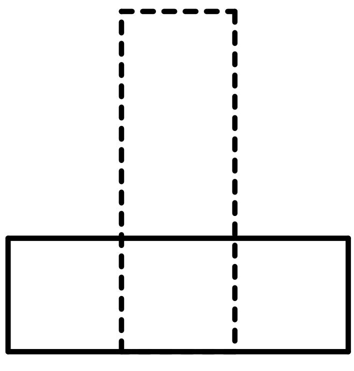
   Wie lange wurde der Film belichtet?

8. Der Punkt $A$ wurde um einen Drehpunkt nach $A'$ gedreht. Wo muss der Drehpunkt liegen?

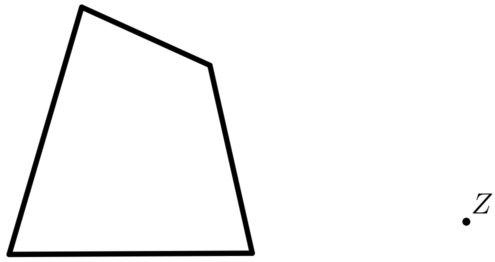

9. Die Strecke $AB$ wurde um einen Drehpunkt nach $A'B'$ gedreht. Konstruiere den Drehpunkt.



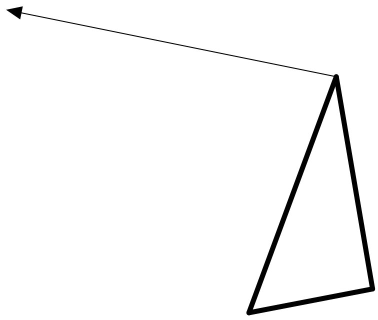

10. Eine rechteckige Tischplatte soll auf ihrem Untergestell derart gelagert sein, dass sie die beiden gezeichneten Lagen einnehmen kann. An welcher Stelle muss der Tischler den Drehzapfen anbringen?



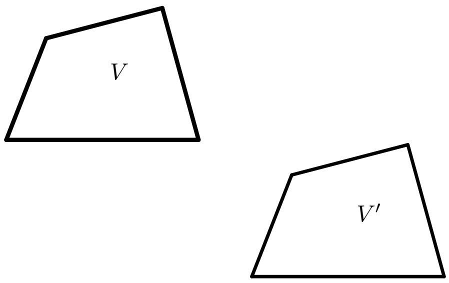
11. Drehe die Figur um $Z$ um 180°.



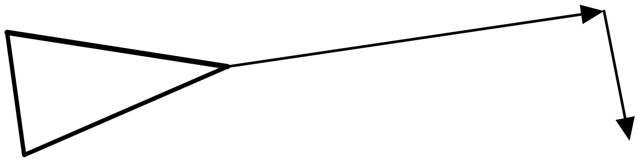

12. Verschiebe das Dreieck um den vorgegebenen Verschiebungspfeil.



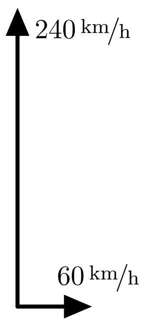
13. Das Viereck $V$ kann durch eine Verschiebung in $V'$ überführt werden. Zeichne einen zugehörigen Verschiebungspfeil.



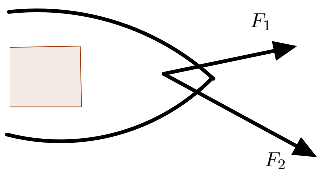
14. Verschieben Sie das Dreieck zuerst um den ersten, dann um den zweiten angegebenen Verschiebungspfeil. Zeichnen Sie anschliessend einen Verschiebungspfeil, durch den das Originaldreieck direkt in die Endlage überführt wird.



15. Ein Sportflugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 240 km/h nach Norden. Von Westen weht ein Wind mit 60 km/h. Bestimmen Sie an der Abbildung die Richtung und die tatsächliche Geschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber dem Erdboden.



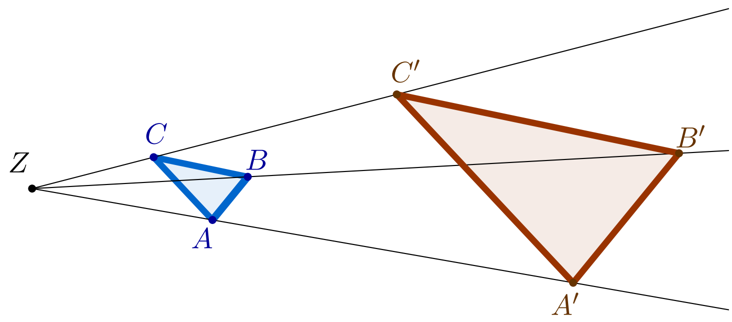

16. Zwei Schlepper ziehen an einem Frachtschiff mit den Kräften $F_1$ bzw. $F_2$. Zeichne die resultierende Kraft, durch welche das Schiff bewegt wird.



17. Ein Schiff fährt bei einem Nordostwind von 40 km/h mit der Geschwindigkeit 25 km/h nach Süden. Von welcher Seite scheint für einen an Deck stehenden Passagier der Wind zu kommen und welche Geschwindigkeit scheint er zu haben? Löse die Aufgabe zeichnerisch.

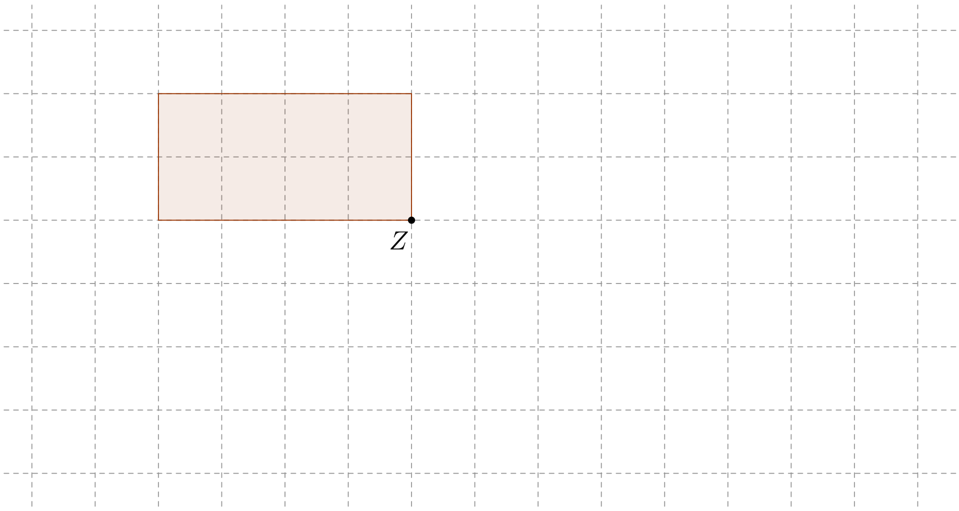
18. Durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $Z$ ist aus dem Originaldreieck $ABC$ das Bilddreieck $A'B'C'$ entstanden.

    Mit welchem Streckungsfaktor wurde es gestreckt? In welchem Verhältnis stehen entsprechende Seitenlängen zueinander? In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte zueinander?

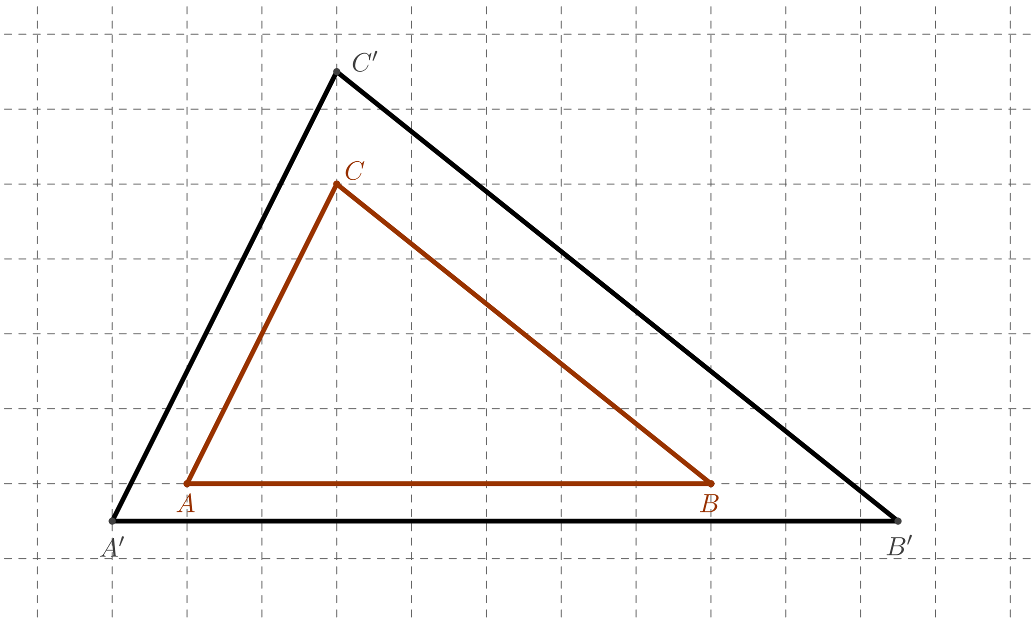



19. Strecke die Figur von $Z$ aus mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{3}$.

20. Strecke das Rechteck von $Z$ aus mit dem Streckungsfaktor $-2$.

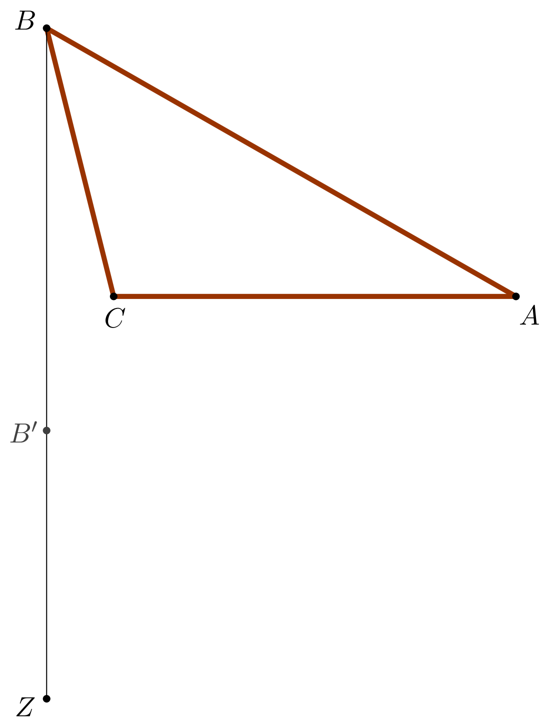



21. Das Dreieck $ABC$ kann durch eine zentrische Streckung in das Bilddreieck $A'B'C'$ überführt werden. Konstruiere das Streckungszentrum $Z$ und gib den Streckungsfaktor an.

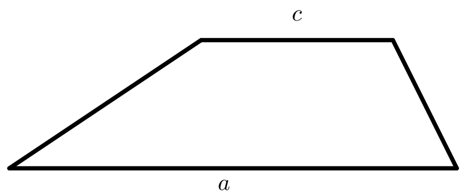


22. Verbindet man die Seitenmitten eines Dreiecks $ABC$, so entsteht ein weiteres Dreieck. Dieses könnte aus dem Dreieck $ABC$ durch eine zentrische Streckung erhalten werden. Wo liegt das Streckungszentrum und wie gross ist der Streckungsfaktor?

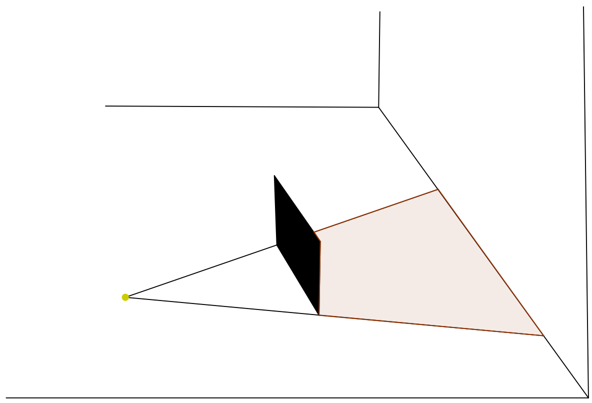
23. Der Eckpunkt $B$ des Dreiecks $ABC$ wurde durch eine zentrische Streckung von $Z$ aus in $B'$ überführt. Konstruiere das Bilddreieck $A'B'C'$, und bestimme den Streckungsfaktor.



24. Gegeben sei ein Trapez mit den parallelen Seiten $a = 7\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$. Verlängern Sie die Schenkel bis sie sich schneiden und bezeichnen Sie den Schnittpunkt mit $Z$. Bei einer zentrischen Streckung von $Z$ aus soll die Strecke $c$ das Bild der Strecke $a$ sein; wie gross ist der Streckungsfaktor?




25. In einem Zimmer steht das schwarze rechteckige Brett parallel zur Wand auf dem Boden. Von einem Punkt vom Boden aus strahlt Licht. Zeichnen Sie die Lichtstrahlen durch die oberen Eckpunkte des Bretts und finde so deren Schlagschatten an der Wand.

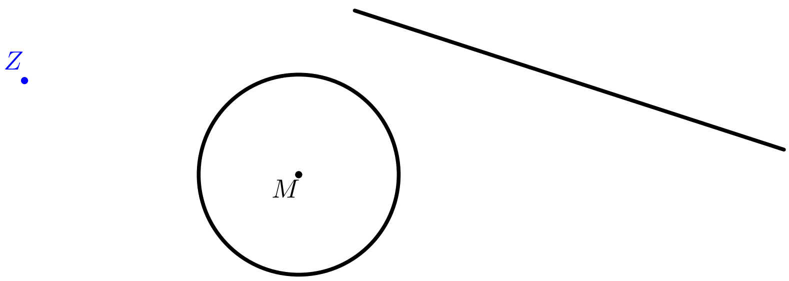


26. Ein Filmnegativ der Grösse $24 \times 36\,\text{mm}$ soll so vergrössert werden, dass das Bild alles zeigt, was auf dem Negativ ist. Bei welchem der drei Papierformate $9 \times 13$, $10 \times 15$, $13 \times 18$ (alle Masse in cm) ist dies ohne Verschnitt möglich?

27. Auf dem Kartenausschnitt links ist das Kilometernetz erkennbar. Damit lässt sich der Kartenmassstab bestimmen. Ermittle daraus den Massstab der Luftaufnahme rechts.



28. Der Kreis mit Mittelpunkt $M$ soll von $Z$ aus so gestreckt werden, dass der Bildkreis die Gerade $g$ berührt. Konstruiere den Bildkreis.




29. Bei einer zentrischen Streckung eines Kreises vervierfacht sich dessen Radius. Wie verändert sich dabei der Inhalt der Kreisfläche?

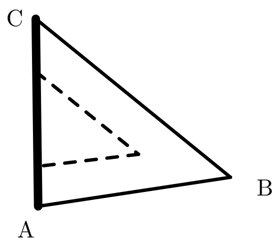
30. Bei einer zentrischen Streckung eines Quadrats wird dessen Flächeninhalt 100 mal grösser. Wie viel mal grösser wird dabei die Seitenlänge?

31. Ein Mikroskop vergrössert 100-fach. Wie viel mal wird mit diesem Mikroskop der Flächeninhalt eines Insektenflügels vergrössert?

32. Auf einer Karte mit Massstab $1 \div 25'000$ ist ein horizontales Autobahnstück 65 mm lang und eine Stadt bedeckt eine Fläche von $420\,\text{cm}^2$. Wie lang ist das Autobahnstück und wie gross ist die Stadtfläche in Wirklichkeit?

33. Die Schweiz hat eine Fläche von $41'000\,\text{km}^2$. Die Luftlinie Bern-Thun beträgt 25 km. Welche Fläche hat die Schweiz auf einer Karte, bei der die Distanz Bern-Thun 5 cm beträgt?

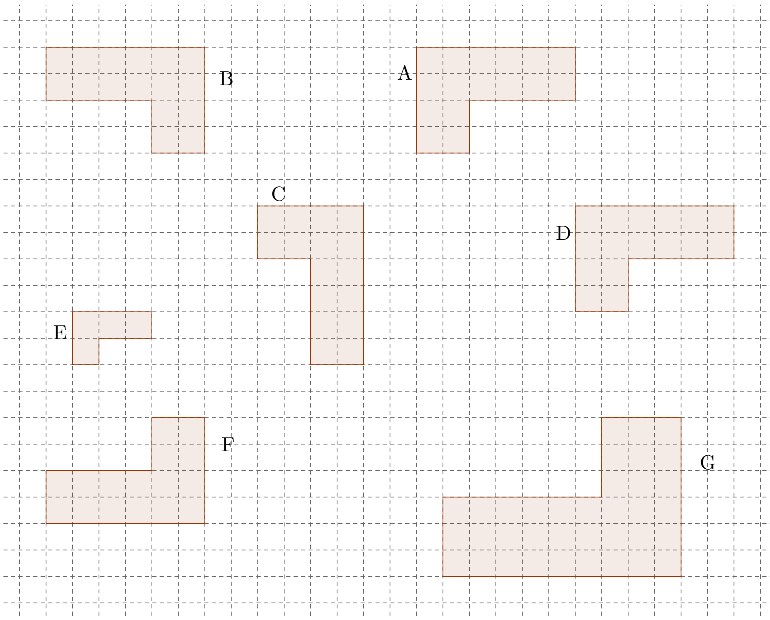
34. Die Skizze zeigt ein dreieckiges Segel $ABC$, das um eine Stange gewickelt werden kann. Dabei verkleinert sich die Segelfläche auf die gestrichelte Grösse.




(a) Ein Segel von $20\,\text{m}^2$ Flächeninhalt wird soweit aufgerollt, bis die Segelunterkante $AB$ von 5 m auf 4 m verkürzt wird. Wie gross ist die neue Segelfläche?

(b) Ein $36\,\text{m}^2$ grosses Segel wird auf $16\,\text{m}^2$ verkleinert. Um welchen Faktor verkleinert sich die Segelunterkante $AB$?

35. Die Originalfigur $A$ kann je durch eine Ähnlichkeitsabbildung in die Bildfigur $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ oder $G$ abgebildet werden.




Welche Abbildung ist

(a) eine Kongruenzabbildung

(b) eine Punktspiegelung

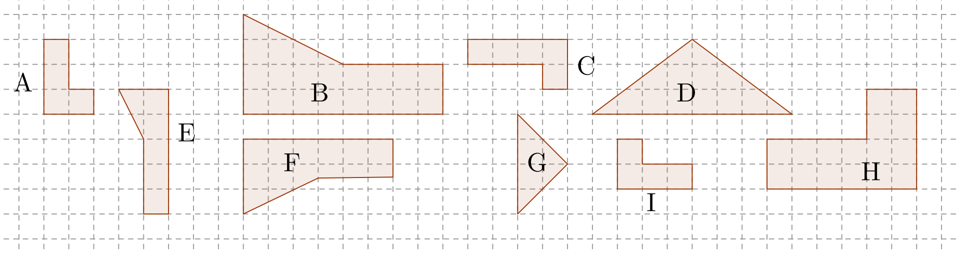
(c) eine Rotation

(d) eine Achsenspiegelung

(e) eine Verschiebung

(f) eine zentrische Streckung

36. Welche Figuren sind zueinander ähnlich?



37. Wahr oder falsch?

    (a) Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

    (b) Alle rechtwinkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

    (c) Alle gleichschenkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

    (d) Alle rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

    (e) Alle Quadrate sind zueinander ähnlich.

    (f) Alle Rechtecke sind zueinander ähnlich.

    (g) Alle Kreise sind zueinander ähnlich.

38. Sind zwei Vierecke ähnlich, wenn die einander entsprechenden Winkel gleich gross sind?

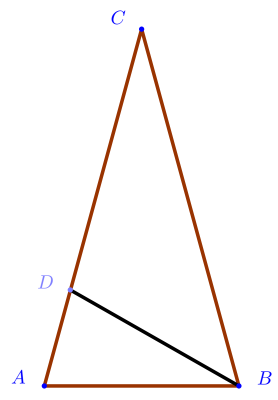
39. Gegeben seien zwei ähnliche Dreiecke. Die Längen von zwei einander entsprechenden Seiten verhalten sich wie $1 \div 7$. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte?

40. Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie $4 \div 25$. Wie verhalten sich die Längen von zwei einander entsprechenden Seiten?

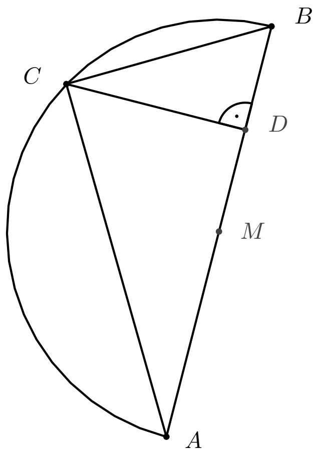
41. Die Radien zweier Kreise messen 7 cm und 42 cm. Wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?

42. Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie $1 \div 2$. Wie verhalten sich die Seitenlängen?

43. Zeigen Sie, dass die gleichschenkligen Dreiecke $ABC$ und $DAB$ in der Grösse von zwei Winkeln übereinstimmen und somit ähnlich sind.

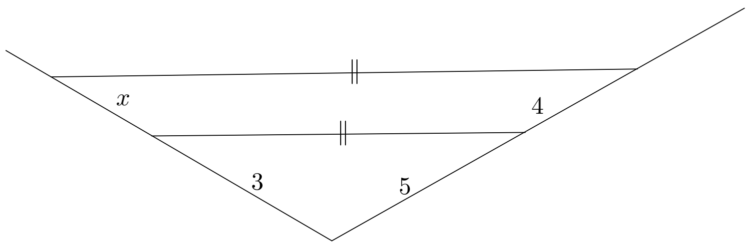


44. Über der Strecke $AB$ ist der Halbkreis mit dem Mittelpunkt $M$ gezeichnet, $C$ liegt auf dem Halbkreis. Beweise die Ähnlichkeit der Dreiecke $ADC$ und $ACB$.

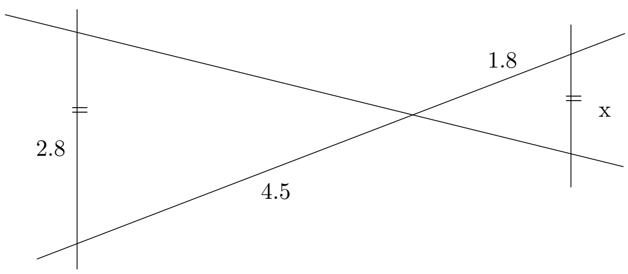



45. Berechne aus den gegebenen Angaben die Streckenlänge $x$.

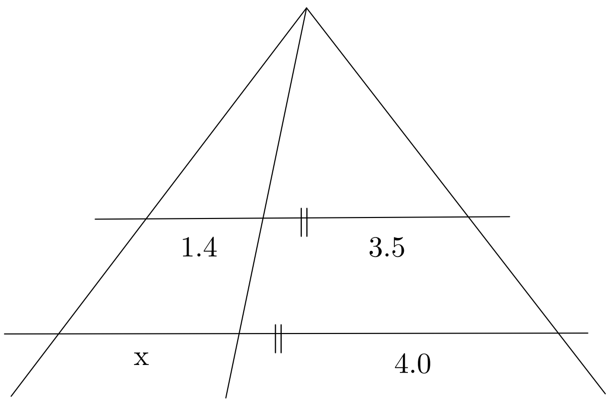
(a)



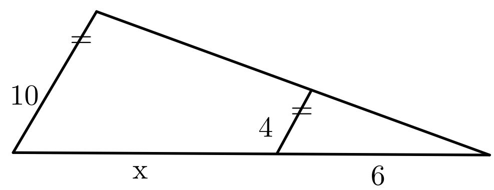

(b)



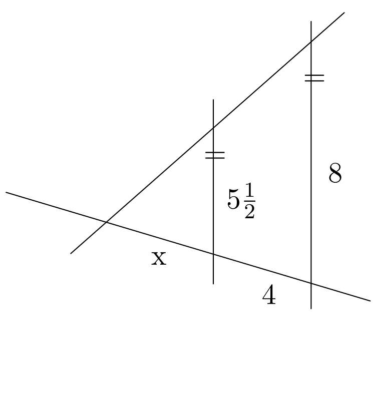
(c)




(d)




(e)



46. Teile, ohne zu messen oder zu rechnen, eine Strecke $AB$ im Verhältnis $1 \div 2$.

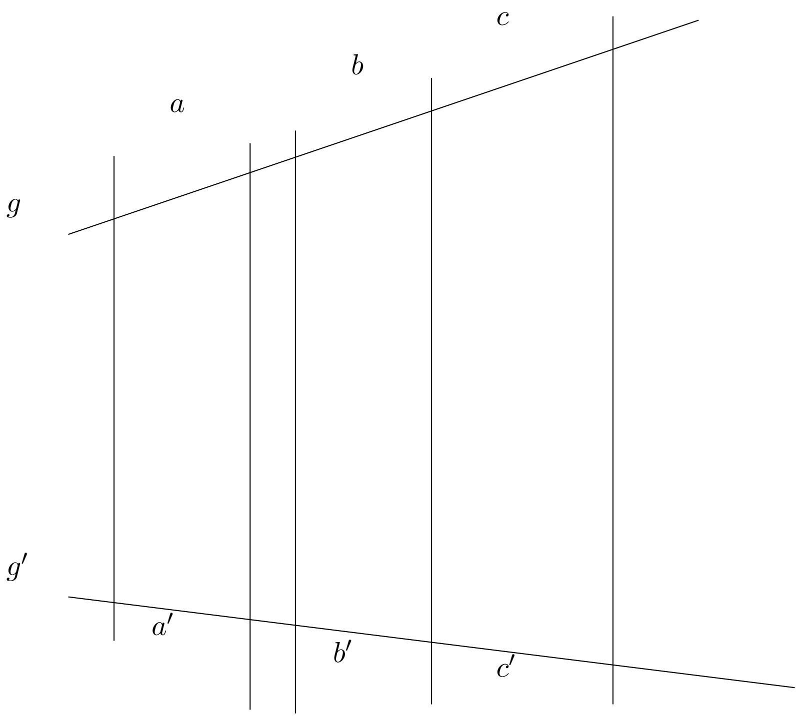
47. Konstruiere eine Strecke, für deren Länge $x$ die Beziehung gilt:

    (a) $2 \div 3 = 5 \div x$

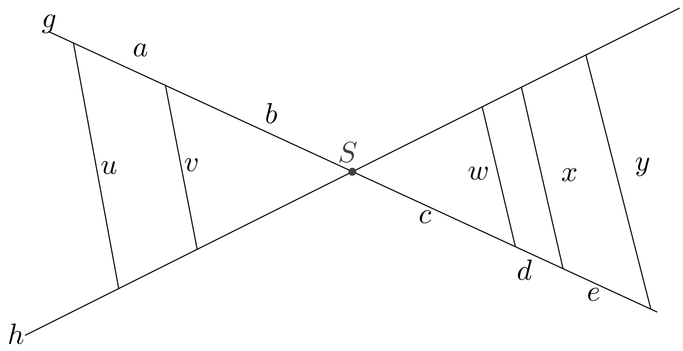
    (b) $x \div 5 = 3 \div 4$

48. Teile, ohne zu messen oder zu rechnen, eine Strecke in vier gleiche Teile.

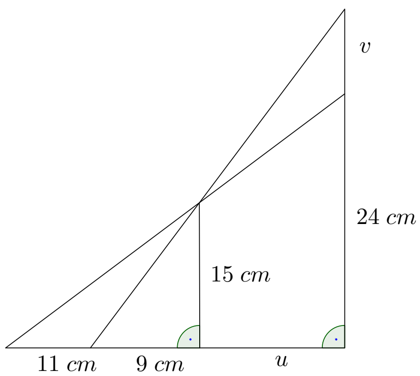
49. Die Geraden $g$ und $g'$ werden von Parallelen geschnitten. Es sind folgende Längen gegeben: $a = 12\,\text{cm}$, $b' = 10\,\text{cm}$, $c = 10\,\text{cm}$, $c' = 12.5\,\text{cm}$. Berechne die fehlenden Länge $a'$ und $b$.



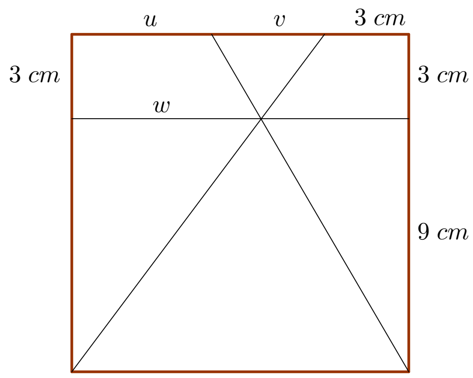
50. Die Geraden $g$ und $h$, die sich in $S$ schneiden, begrenzen parallele Strecken. Es sind folgende Längen gegeben: $a = 20\,\text{mm}$, $b = 28\,\text{mm}$, $c = 32\,\text{mm}$, $e = 24\,\text{mm}$, $w = 20\,\text{mm}$, $y = 40\,\text{mm}$. Berechne alle fehlenden bezeichneten Längen.



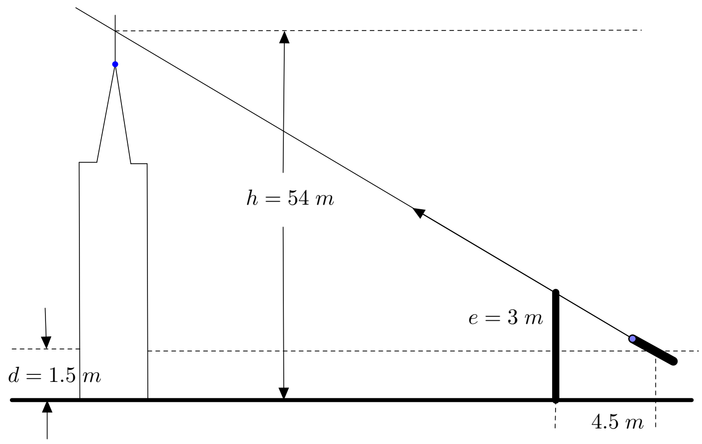

51. Berechne $u$ und $v$.




52. Gegeben sei ein Quadrat, darin schneiden sich drei Geraden — wie abgebildet — in einem Punkt. Berechne $w$, $v$ und $u$.



53. Berechne die horizontale Entfernung des Kirchturms vom Beobachtungsinstrument.




54. Visiert man einen vertikal gehaltenen Bleichstift $Z$ zuerst mit dem rechten und dann mit dem linken Auge an, so kommt er mit zwei verschiedenen Geländepunkten $A$ und $B$ zur Deckung. Wie weit ist der Bleistift von $A$ entfernt, wenn der Abstand Bleistift-rechtes Auge $d = 72\,\text{cm}$, Pupillenabstand $s = 7.5\,\text{cm}$ und die Länge der Strecke $\overline{AB} = 250\,\text{m}$ bekannt sind?

55. Bern ist 60 km von den Alpen entfernt. Wenn man auf der Bundeshaus-Terrasse bei ausgestrecktem Arm abwechselnd mit dem rechten und linken Auge über den Daumen gegen die Alpen blickt, scheint der Daumen vom Eiger zum Jungfraugipfel zu springen. Schätze ihren Augenabstand und den Abstand Auge-Daumen. Wie weit liegen die beiden Berggipfel auseinander?

56. Anna kann mit einem 7 cm langen Bleistift, den sie 35 cm von ihrem rechten Auge entfernt hält den 100 m hohen Berner Münsterturm gerade abdecken. Wie weit ist Anna vom Münster entfernt?

57. Bei einem gleichschenkligen Trapez messen die parallelen Seiten 36 cm und 60 cm. Die beiden Diagonalen sind je 60 cm lang. Berechne die Längen der Diagonalabschnitte.

58. Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks misst 6 cm, die Höhe 12 cm. Dem Dreieck ist ein Quadrat einbeschrieben. Wie lang ist die Quadratseite?

59. Die Sonne erzeugt vom Mond einen Schlagschatten, der als Schattenkegel weit in den Raum hinausreicht. Berechne, wie weit die Spitze des Schattenkegels vom Mondzentrum entfernt ist.

60. Wahr oder falsch?

    (a) Würfel sind einander ähnlich.

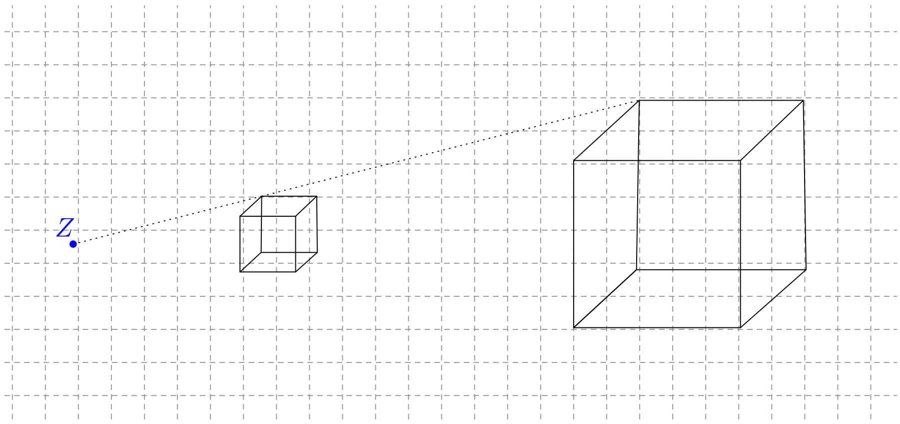
    (b) Quader sind einander ähnlich.

    (c) Kugeln sind einander ähnlich.

    (d) Zylinder sind einander ähnlich.

61. Ein Würfel der Kantenlänge 5 cm wird mit dem Streckungsfaktor 8 gestreckt. Welche Kantenlänge hat der Bildwürfel?

62. Der Würfel links wurde von $Z$ aus zentrisch gestreckt.




    (a) Wie gross ist der Streckungsfaktor?

    (b) In welchem Verhältnis stehen die Kantenlängen von Bild- und Originalwürfel?

    (c) In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Seitenflächen von Bild- und Originalwürfel?

    (d) In welchem Verhältnis stehen die Volumen von Bild- und Originalwürfel?

63. Ein Würfel wird zentrisch gestreckt, so dass sich die Kantenlängen des Bildwürfels zu den Kantenlängen des Originalwürfels wie $3 \div 2$ verhalten. Wie verhalten sich

    (a) die Längen der Körperdiagonalen,

    (b) die Inhalte der Seitenflächen,

    (c) die Volumen?

64. Zwei Würfel aus dem gleichen Material wiegen 1 kg und 8 kg. Wie verhalten sich
    (a) ihre Volumen,
    (b) ihre Kantenlängen,
    (c) die Inhalte ihrer Seitenflächen?
65. Die Volumen zweier Würfel verhalten sich wie $1 \div 27$. Wie verhalten sich ihre Seitenflächeninhalte?
66. Ein Quader ist 6 cm lang, 4 cm breit und 7 cm hoch. Er wird mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$ zentrisch gestreckt. Welche Länge, Breite und Höhe hat der Bildquader?
67. (a) Die Kantenlängen eines Quaders $A$ sind doppelt so lang wie die entsprechenden Kantenlängen eines ähnlichen Quaders $B$. Wie verhalten sich die entsprechenden Seitenflächen von $A$ und $B$?
    (b) Die Inhalte der Seitenflächen eines Quaders $C$ sind viermal kleiner als die Inhalte der entsprechenden Seitenflächen eines ähnlichen Quaders $D$. Wie verhalten sich entsprechende Kantenlängen von $C$ und $D$?
    (c) Die Kantenlängen eines Quaders $E$ sind dreimal kleiner als die entsprechenden Kantenlängen eines ähnlichen Quadrats $F$. Wie verhalten sich die Volumen von $E$ und $F$?
    (d) Die Inhalte der Seitenflächen eines Quaders $J$ sind neunmal grösser als die Inhalte der entsprechenden Seitenflächen eines ähnlichen Quaders $K$. Wie verhalten sich die entsprechenden Kantenlängen von $J$ und $K$?
    (e) Das Volumen eines Quaders $G$ ist tausendmal grösser als das Volumen eines ähnlichen Quaders $H$. Wie verhalten sich die entsprechenden Kantenlängen von $G$ und $H$?
    (f) Das Volumen eines Quaders $L$ ist 64 mal kleiner als das Volumen eines ähnlichen Quaders $M$. Wie verhalten sich die Inhalte entsprechender Seitenflächen von $L$ und $M$?
68. Die Durchmesser zweier Kugeln verhalten sich wie $4 \div 5$. Wie verhalten sich ihre Volumen?
69. Die Volumen zweier Kugeln verhalten sich wie $8 \div 27$. Wie verhalten sich ihre Radien?
70. Zwei Kugeln aus gleichem Material wiegen 1 g und 64 g. Die leichtere Kugel hat einen Durchmesser von 3 mm. Welchen Durchmesser hat die schwerere Kugel?

71. Eine Kugel wiegt 16 kg, eine andere aus gleichem Material 54 kg. Gib in möglichst einfachen ganzen Zahlen an:

    (a) das Verhältnis der Volumen,

    (b) das Verhältnis der Durchmesser,

    (c) das Verhältnis der Oberflächeninhalte.

72. In der Kanalisation einer Siedlung sind die Abflussrohre überlastet. Sie werden durch Rohre mit doppelt so grossem Durchmesser ersetzt. Wie verändert sich das Fassungsvermögen?

73. Die Höhe einer quadratischen Pyramide wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche halbiert. Wie verhalten sich die Volumen

    (a) der Pyramidenspitze und der ganzen Pyramide zueinander,

    (b) der Pyramidenspitze und des Pyramidenstumpfs zueinander?

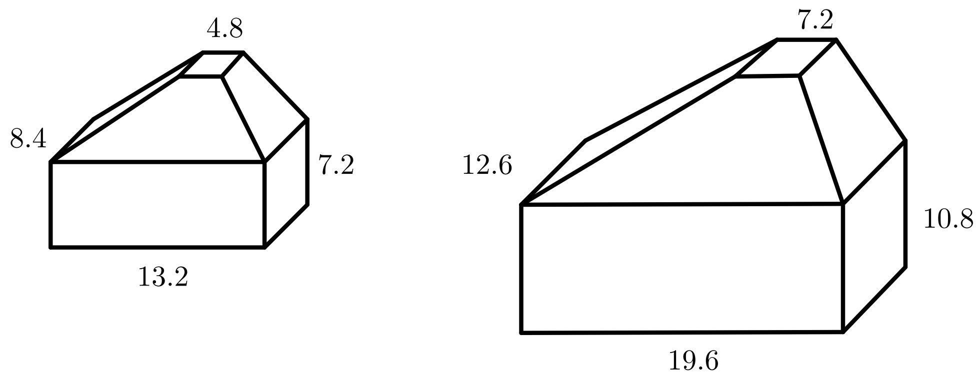
74. In welchem Abstand von der Spitze eines Kegels mit der Höhe $h$ muss parallel zur Grundfläche ein Schnitt gelegt werden, wenn das Volumen dadurch im Verhältnis $8 \div 19$ geteilt werden soll?

75. Eine ägyptische Pyramide mit quadratischem Grundriss wird von waagrecht abgelagertem Wüstensand allmählich begraben. Die Höhe der noch sichtbaren Pyramide beträgt nur noch vier Fünftel der Höhe der ursprünglichen Pyramide.

    (a) Wie verhalten sich die Volumen des sichtbaren und des verschütteten Teils zueinander?

    (b) Wie viele % des ursprünglichen Pyramidenvolumens ragen noch aus dem Sand?

76. Die beiden massiven Körper sind zueinander ähnlich und aus gleichem Material.

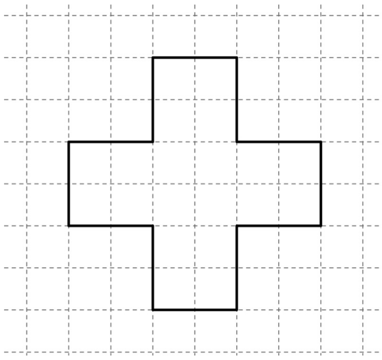



(a) Beim grösseren Körper steht eine falsche Zahl. Korrigiere sie.

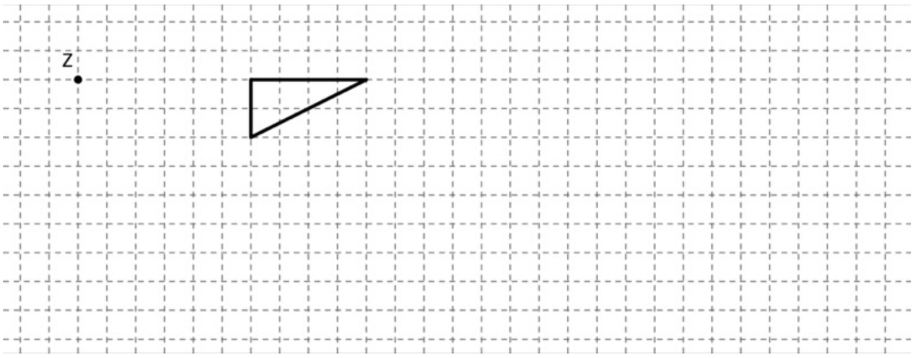
(b) Wie viel wiegt der kleinere Körper, wenn der grössere 16.2 kg wiegt?

# 7 Selbstkontrolle

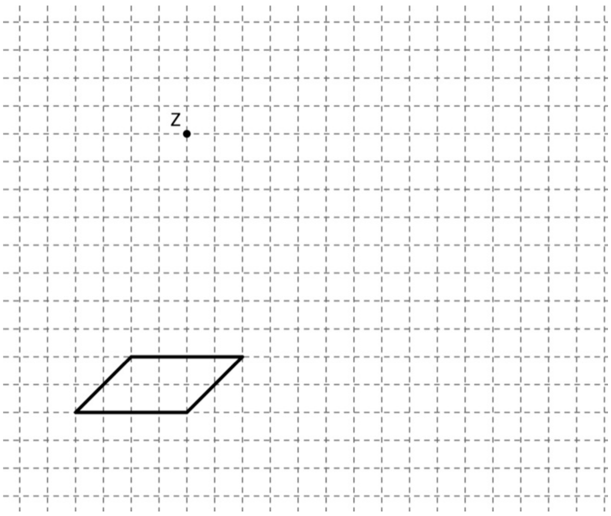
1. Zeichne bei der abgebildeten Figur alle Symmetrieachsen ein.



2. Strecke das abgebildete Dreieck vom Punkt $Z$ aus mit dem Streckungsfaktor 2.



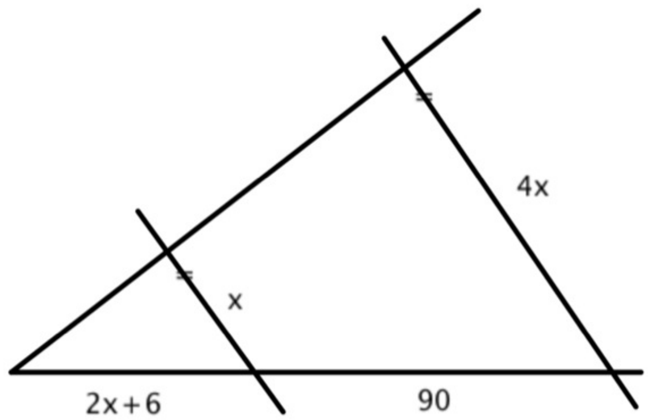

3. Drehe die abgebildete Figur um den Punkt $Z$ um 90°.



4. Ein gegebenes Dreieck soll von einem gegebenen Punkt aus zentrisch gestreckt werden. Welchen Streckungsfaktor muss man wählen, um den Umfang des Dreiecks zu vervierfachen?

5. Berechnen Sie die Höhe eines Mastes, dessen Schatten eine Länge von 55 m hat, wenn gleichzeitig der Schatten eines 180 cm grossen Mannes 4.5 m lang ist.

6. Berechne $x$

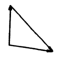



7. Die Durchmesser zweier kugelförmiger Planeten verhalten sich wie $1 \div 9$. In welchem Verhältnis stehen ihre Oberflächen zueinander?

8. Auf einer Karte im Massstab $1 \div 25\,000$ wird eine Seeoberfläche zu $416\,\mathrm{cm}^2$ bestimmt. Wie viele Quadratkilometer misst die Seeoberfläche in Wirklichkeit?

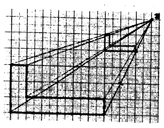
9. Ein gerader Kreiskegel wird durch zwei Schnitte parallel zur Grundfläche in drei gleich hohe Stücke geteilt. Wie verhält sich das Volumen des obersten zum Volumen des untersten Stücks?

17. Auf den Passagier wirkt der Fahrtwind aus Süden und der Nordostwind. Der resultierende Wind weht ungefähr aus dem Osten mit 28 km/h.

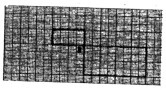


18. a) 3
b) 3 : 1
c) 9 : 1

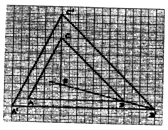
19.



20.

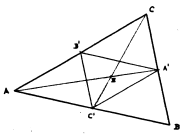


21.



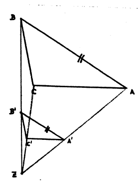
Der Streckungsfaktor beträgt $\frac{3}{2}$

22.



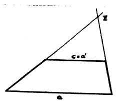
Das Streckungszentrum liegt im Schwerpunkt des Dreiecks.
Der Streckungsfaktor beträgt $-\frac{1}{2}$.

23.



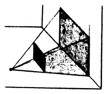
Der Streckungsfaktor beträgt 0.4

24.



Der Streckungsfaktor beträgt $\frac{4}{7}$.

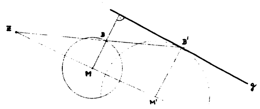
25.



26. Das Verhältnis Breite : Länge beträgt beim Filmnegativ 2 : 3. Nur beim Format 10 x 15 cm beträgt dieses Verhältnis ebenfalls 2 : 3, nur bei diesem Format gibt es also keinen Verschnitt.

27. Im Kartenausschnitt links gilt 4 cm ≙ 1 km, der Kartenmassstab beträgt also 1 : 25 000. Auf der Luftaufnahme rechts ist eine bestimmte Strecke (z.B. der Abstand der beiden Brücken) dreimal so lang wie die entsprechende Strecke auf der Karte. Der Massstab der Luftaufnahme beträgt also ungefähr 1 : 8300.

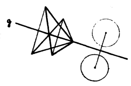
28. Der Berührungsradius des Bildkreises steht senkrecht zur Geraden g, also auch der zugehörige Radius im Originalkreis. Dies führt zum Punkt B, dem im Bildkreis der Berührungspunkt B' entspricht.



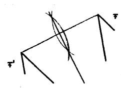
29. Er wird 16 mal grösser.

**Lösungen**

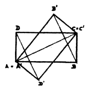
1.



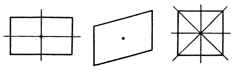
2. Mittelsenkrechte von zwei entsprechenden Punkten



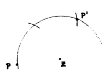
3.



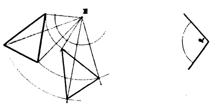
4.



5.



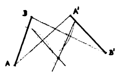
6.



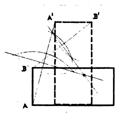
7. Der zu einer beliebigen kreisbogenförmigen Sternspur gehörige Drehwinkel beträgt ca. 45°. Das ist der achte Teil einer ganzen Umdrehung (360°), die in ca. 24 Std. vollzogen wird. Also beträgt die Belichtungszeit ca. 3 Std.

8. Auf der Mittelsenkrechten von AA'

9. Der Drehpunkt liegt im Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AA' und BB'.

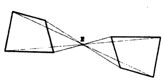


10.

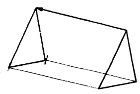


Es gibt zwei Lösungen.

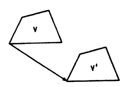
11.



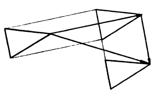
12.



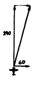
13.



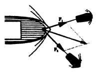
14.

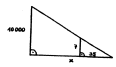


15. Die Nacheinanderausführung der beiden Verschiebungen führt zum Ort, wo sich das Flugzeug nach 1 Stunde befindet. Der resultierende Verschiebungspfeil ist 2.5 cm lang; die Geschwindigkeit beträgt 250 km/h.

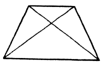


16.



56. 

ca. 500 m

57. 

22.5 cm und 37.5 cm

58. 4 cm

59. 375 940 km

60. a) w
b) f
c) w
d) f

61. 40 cm

62. a) 3
b) 3 : 1
c) 9 : 1
d) 27 : 1

63. a) 3 : 2
b) 9 : 4
c) 27 : 8

64. a) 1 : 8
b) 1 : 2
c) 1 : 4

65. 1 : 9
Tipp: Ermittle zuerst das Verhältnis der Kantenlängen.

66. 3 cm, 2 cm und $3\frac{1}{2}$ cm

67. a) 4 : 1
b) 1 : 2
c) 1 : 27
d) 3 : 1
e) 10 : 1
f) 1 : 16

68. (Der Streckungsfaktor beträgt 1.5.)
a) 19.6 durch 19.8 ersetzen
b) 4.8 kg

69. 64 : 125

70. 2 : 3

71. (Volumenverhältnis 1 : 64, Durchmesserverhältnis 1 : 4)
12 mm

72. a) 8 : 27
b) 2 : 3
c) 4 : 9

73. Es wird viermal grösser.
Beachte: Es kann nur die Querschnittsfläche der Rohre vergrössert werden, die Länge der Leitung bleibt konstant.)

74. a) 1 : 8
b) 1 : 7

75. Im Abstand $\frac{2}{3}h$

76. a) 64 : 61
b) 51.2 %

30. 10 mal

31. 10 000 mal

32. 1625 m
26.25 $km^2$

33. Der Kartenmassstab ist 1 : 500 000.
Die Fläche beträgt 16.4 $dm^2$.

34. a) Der Streckungsfaktor beträgt $\frac{4}{5}$.
Neue Segelfläche = 12.8 $m^2$
b) Um den Faktor $\frac{2}{3}$

35. a) A → B, A → C, A → D, A → F
b) A → F
c) A → C, A → F
d) A → B
e) A → D
f) A → E, A → G

36. Einerseits A, I und H, andererseits B und F

37. a) w
b) f
c) f
d) w
e) w
f) f
g) w

38. Nein
(z.B. zwei gleich lange und verschieden breite Rechtecke sind nicht ähnlich, obschon entsprechende Winkel gleich gross (90°) sind.)

39. 1 : 49

40. 2 : 5

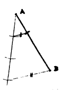
41. Die Radien verhalten sich wie 1 : 6, die Flächeninhalte somit wie 1 : 36.

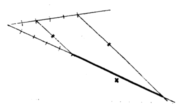
42. $1 : \sqrt{2}$

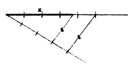
43. Die Dreiecke haben den Winkel bei A gemeinsam. Weil sie gleichschenklig sind, stimmen sie auch im anderen Basiswinkel überein.

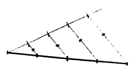
44. Die Dreiecke haben den Winkel bei A gemeinsam. Weil C auf dem Thaleskreis über AB liegt, enthält jedes Dreieck einen rechten Winkel. Also stimmen die Dreiecke in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich.

45. a) x = 2.4
b) x = 1.12
c) x = 1.6
d) x = 9
e) x = 8.8

46. 

47. a) 

b) 

48. 

49. Tipp: Verschaffe dir Übersicht, indem du die gegebenen Strecken grün und die gesuchten Strecken rot einzeichnest.
$a' = 15$ cm
b = 8 cm

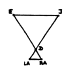
50. (Beachte den Tipp bei 49.)
v = 17.5 mm
u = 30 mm
d = 8 mm
x = 25 mm

51. u = 12 cm
v = 11 cm

52. Beachte: Es liegt ein Quadrat vor. Dieses hat die Seitenlänge 12 cm.
w = 6.75 cm
v = 4 cm
u = 5 cm

53. 157.5 m

54. 2400 m

55. 

Augenabstand ca. 6 cm
Abstand Auge-Daumen ca. 60 cm
Abstand der Berggipfel ca. 6 km