72. Der mathematische Nobelpreis

Gibt es einen Nobelpreis für Mathematik? Bis vor wenigen Jahren hätte man darauf mit einem klaren „Nein“ antworten müssen. Als Ersatz haben die Mathematiker die prestigeträchtigen Fields-Medaillen, die alle vier Jahre auf dem Weltkongress der Mathematik vergeben werden. Auch wenn die Preisträger ausgesorgt haben, weil sie aufgrund des hohen Ansehens dieser Auszeichnung mit Angeboten für gut bezahlte Stellen überhäuft werden, so ist die ausgelobte Summe doch eher bescheiden. Der Preis für den besten Nachwuchsdichter der Stadt Wanne-Eickel dürfte höher dotiert sein.

Das ist nun seit zwei Jahren anders, die Vorgeschichte des neuen Preises beginnt vor vielen Millionen Jahren. Damals fanden nämlich diejenigen geologischen Entwicklungen statt, die zu einem Erdölsee unter der norwegischen Küste geführt und dieses kleine Land (nur vier Millionen Einwohner!) in den letzten Jahrzehnten sehr wohlhabend gemacht haben.

Außerdem hat Norwegen einen der begabtesten Mathematiker des 19. Jahrhunderts hervorgebracht: Niels Henrik Abel (1802 – 1829). Der hatte nur ein kurzes, von Krankheit und materieller Not gekennzeichnetes Leben. Der Ruf auf eine Professorenstelle (bemerkenswerterweise nicht an eine Universität in Norwegen, sondern nach Berlin) erreichte ihn zu spät: Er konnte sie wegen seines Gesundheitszustands schon nicht mehr antreten.

Erst nach seinem Tod erkannte man auch in seinem Heimatland, welch genialer Mensch er gewesen war. Um ihn nachträglich ganz besonders zu würdigen, wurde 2002 der Abel-Preis geschaffen. Er wird jährlich an Mathematiker verliehen, deren Lebenswerk einen besonderen Einfluss auf die Entwicklung des Faches hatte. Die Preissumme beträgt stattliche 700 000 Euro, entspricht also der von Nobelpreisen.

Der erste Preis (2003) ging an Jean-Pierre Serre, es folgten Sir Michael Atiyah und Isidore Singer (2004), Peter Lax (2005) und Lennart Carleson (2006). Und Berlin ist auch immer dabei: Die norwegische Botschaft spendierte sehr großzügig eine Reise zur Preisverleihung für das Siegerteam vom Berliner „Tag der Mathematik“, der jährlich veranstaltet wird und sich an Schülerinnen und Schüler richtet.

Abel und die Gleichung fünften Grades

Abel hat in verschiedenen Bereichen der Mathematik Großes geleistet. Als Beispiel soll hier über seine Ergebnisse im Zusammenhang mit dem Auflösen von Gleichungen berichtet werden.

Das Problem

Viele Probleme in den Anwendungen reduzieren sich auf die Aufgabe, alle Zahlen x zu finden, die einer mit der Fragestellung zusammenhängenden Gleichung des Typs $x^2 - 2.5x + 3 = 0$ oder $x^7 - 1200x^6 + 3.1x - \pi = 0$ genügen[69]. Funktionen, wie sie hier auftreten (also $x^2 - 2.5x + 3$ und $x^7 - 1200x^6 + 3.1x - \pi$), nennt man *Polynome*. Das allgemeinstmögliche Polynom kann als

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

geschrieben werden; dabei ist n irgendeine natürliche Zahl und die „Koeffizienten“, d.h. die a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0, sind beliebige Zahlen.

Die höchste auftretende Potenz heißt der *Grad* des Polynoms. In den Beispielen war der Grad 2 bzw. 7, und das allgemeine Polynom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ hat den Grad n. Dabei sollte a_n von Null verschieden sein. (Wäre dieser Koeffizient Null, so könnte man den Summanden $a_n x^n$ einfach weglassen.)

Das Positive

Es hat bis ins 19. Jahrhundert gedauert, bis wirklich bewiesen war, dass für alle Polynome die Gleichung $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ Lösungen hat. Wenn man den Bereich der Zahlen bis zu den komplexen Zahlen erweitert, kann das auch für die kompliziertesten Fälle garantiert werden[70]. Das bedeutet aber noch lange nicht, dass man dann auch eine einfache Formel finden kann, durch die man die gesuchten Zahlen ausdrücken kann. Das geht nur dann, wenn der Grad des Polynoms „sehr klein“ ist. Hier die wenigen positiven Ergebnisse:

- *Grad* $= 1$

  Das ist das folgende Problem: Gesucht ist ein x, so dass $a_1 \cdot x + a_0 = 0$ gilt, dabei sind a_1 und a_0 vorgegebene Zahlen. Die Lösung lernt man in der Schule: Die fragliche Gleichung ist einfach nach x aufzulösen, das Ergebnis ist $x = -a_0/a_1$.

- *Grad* $= 2$

  Diesmal möchte man alle x finden, für die – bei vorgegebenen a_2, a_1, a_0 – die Gleichung

  $$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

  erfüllt ist. Die Lösung ist Schülern seit vielen Generationen unter dem Stichwort „p-q-Formel für quadratische Gleichungen“ beigebracht worden: Wenn man die Gleichung nach Teilen durch a_2 in die Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ gebracht hat, so sind die Lösungen x_1, x_2 durch

---

[69] Ingenieure haben damit täglich zu tun: Aus der Lage der Lösungen x können sie etwa ablesen, ob ein System stabil bleiben oder zu empfindlich auf Störungen reagieren wird.

[70] Vgl. Beitrag 94.

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}, \; x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{-q + \frac{p^2}{4}}$$

gegeben.

- *Grad* $= 3$

  Auch in diesem Fall kann man die Lösungen noch explizit angeben. Man findet sie mit der *Cardano-Formel*, die von dem berühmten italienischen Mathematiker Girolamo Cardano schon im 16. Jahrhundert gefunden wurde.

  Ausgangspunkt ist eine Gleichung dritten Grades, die durch eine Variablentransformation in die Form

  $$x^3 - ax - b = 0$$

  gebracht wurde. Eine Lösung ist dann durch

  $$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

  gegeben.

- *Grad* $= 4$

  Für Gleichungen vierten Grades gibt es ebenfalls geschlossene Ausdrücke für die Lösungen: Man muss wieder nur unter Verwendung von $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ geeignete – ziemlich komplizierte – Ausdrücke aus den Koeffizienten bilden und Wurzeln ziehen. Das Ergebnis stammt von Ludovico Ferrari (1522 – 1565), einem Zeitgenossen Cardanos.

Eigentlich könnte es nun immer so weiter gehen. Warum sollte es nicht möglich sein, mit immer komplizierteren Formeln für Gleichungen immer höheren Grades eine Lösung geschlossen aufschreiben zu können? Danach wurde über 200 Jahre lang intensiv gesucht, bis das Problem von Niels Henrik Abel ein für alle Mal geklärt wurde.

Abels Unmöglichkeits-Satz

Abel zeigte im Jahr 1824 (also im Alter von 22 Jahren!): Mehr positive Ergebnisse als im vorstehenden Unterpunkt zusammengestellt sind nicht zu erwarten. Schon für die Gleichung fünften Grades ist es unmöglich, eine Formel zu finden – und sei sie noch so kompliziert –, die bei gegebenen Koeffizienten eine Lösung darstellt.

Seit dieser Zeit wissen die Mathematiker, dass sie in vielen Fällen nicht mehr finden können als (allerdings beliebig) genaue Näherungen der gesuchten Lösungen.

73. Der Zufall als Rechenknecht: Monte-Carlo-Verfahren

Monte-Carlo ist allgemein bekannt: durch das regierende Fürstenhaus, die Rallye und die Spielbank. Mathematiker haben bei diesem Namen noch eine andere Assoziation, sie denken an Monte-Carlo-Verfahren. Das sind Rechenverfahren, bei denen der Zufall als Rechenknecht eingesetzt wird.

Zur Erläuterung stellen wir uns eine komplizierte Fläche F vor, die in einem Quadrat mit der Kantenlänge Eins liegt. Wie groß ist der Flächeninhalt? Der klassische Weg wäre, die Fläche in einfache Bestandteile zu zerlegen, dafür den Flächeninhalt zu berechnen und dann die Summe zu bilden.

Die Monte-Carlo-Methode geht ganz anders vor. Der wichtigste Bestandteil ist ein Zufallsgenerator, der einen Punkt in dem Quadrat erzeugt. Der Generator muss so programmiert sein, dass alle Punkte die gleiche Chance haben, man spricht von einer Gleichverteilung. Heutige Computer können derartige Punkte mehrere Millionen Mal pro Sekunde erzeugen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in unserer Fläche F landet, proportional zum Flächeninhalt. Der Monte-Carlo-Flächenmesser muss also nur experimentell feststellen, wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist. Liegt also – zum Beispiel – bei einer Million Versuchen der Punkt 622 431 Mal in der Fläche, so heißt das, dass die Wahrscheinlichkeit für Treffer ungefähr gleich 62.2 Prozent ist. Der Flächeninhalt sollte also 62.2 Prozent der Gesamtfläche sein, und da die gleich Eins ist, ist das Ergebnis der Monte-Carlo-Flächenberechnung 0.622.

Das Verfahren hat Vorteile und Tücken. Der Hauptvorteil besteht darin, dass Monte-Carlo-Verfahren auch für komplizierte Situationen leicht umzusetzen sind: Das zugehörige Programm ist schnell geschrieben, da ja der wichtigste Baustein – die Erzeugung des Zufalls – in die modernen Rechner schon werksseitig eingebaut ist. Leider ist der Zufall alles andere als zuverlässig. Es könnte ja sein, dass die erzeugten Punkte doch nicht gleichmäßig über das Quadrat verteilt sind, so dass die Trefferwahrscheinlichkeit gar nicht den wirklichen Flächeninhalt wiedergibt.

Die typischen Ergebnisse von Monte-Carlo-Verfahren sollten daher auch vorsichtig interpretiert werden, etwa als: „Mit 99 Prozent Wahrscheinlichkeit liegt der gesuchte Wert zwischen 0.62 und 0.63."

Es ist deswegen kein Wunder, dass Mathematiker – wann immer möglich – exakte Verfahren bevorzugen. Oder würden Sie gern über eine Brücke fahren, deren Stabilität nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 Prozent garantiert werden kann?

Eine Monte-Carlo-Parabelflächenmessung

Als Beispiel für eine typische Monte-Carlo-Flächenberechnung wollen wir die Fläche unter einem Parabelbogen ausrechnen: Wie groß ist die Fläche zwischen Parabel und x-Achse zwischen den Abszissen $x = 0$ und $x = 1$?