

86. Zauberhafte Invarianten

Was hat Bestand, worauf kann man sich verlassen? Mathematiker sind seit Jahrhunderten auf der Suche nach Invarianten. Das sind, vereinfacht ausgedrückt, Größen, deren Wert sich bei den gerade betrachteten Handlungen nicht ändert.

Als Beispiel betrachten wir einen Stapel Karten, etwa einige Karten aus einem gewöhnlichen Skatblatt. Wenn man den Stapel mischt, so gibt es recht wenige Invarianten: Die Anzahl der Karten bleibt natürlich unverändert, genauso die Anzahl der Damen, die Anzahl der Buben usw. Anders sieht es aus, wenn man nicht beliebiges Mischen zulässt, sondern nur (beliebig häufiges) Abheben. Bemerkenswerterweise bleibt dabei die relative Reihenfolge unverändert. Wenn Pikass drei Karten nach der Herz Dame liegt, so wird das auch nach dem Abheben genauso sein.

Dabei ist allerdings das Wörtchen „nach“ richtig zu interpretieren. Wenn die Herz Dame zufällig die unterste Karte des Stapels sein sollte, so wird Pikass nun die dritte Karte von oben sein. „Nach“ ist also so aufzufassen, dass es nach dem Ende des Stapels mit dem Anfang weitergeht.

Das kann man sich für einen kleinen *Zaubertrick* zunutze machen. Suchen Sie alle Damen und Könige aus Ihrem Skatspiel heraus und legen Sie diese acht Karten in eine bunte Reihe. Dabei soll der Abstand zueinander gehöriger Pärchen (also Kreuz Dame zu Kreuz König, Pik Dame zu Pik König usw.) exakt gleich vier sein. Wenn man das so vorbereitete Spiel flüchtig zeigt, sieht es ziemlich zufällig aus. Niemand wird also Verdacht schöpfen, und wenn Sie nun noch einige Male abheben lassen, werden alle denken, dass der Kartenstapel perfekt durchmischt ist.



Abbildung 69: Das vorbereitete Kartenspiel

Sie wissen aber, dass der relative Abstand eine Invariante ist: Vier Karten nach der obersten Karte liegt der Partner (oder die Partnerin). Man kann also problemlos – unter dem Tisch oder unter einem Tuch – ein Pärchen hervorzaubern, wobei man recht angestrengt wirken sollte. Das klappt auch ein zweites (und drittes und viertes) Mal, allerdings sind die Pärchen jetzt im Abstand drei (bzw. zwei und eins).

Grundlage des Tricks war die Tatsache, dass es so etwas wie Ordnung im scheinbaren Chaos gibt: In der Mathematik ist die Suche nach dem Bleibenden sogar so etwas wie ein Leitmotiv der Forschung geworden: Schreibe vor, welche Veränderungen zulässig sind, die Mathematik sucht dann systematisch nach den Größen, die erhalten bleiben. Besonders wichtig war diese Idee als Vereinheitlichung für viele Zweige der Geometrie. Sie wurde schon 1872 von dem Mathematiker Felix Klein vorgeschlagen und hat seitdem die Forschung wesentlich beeinflusst.



Abbildung 70: Das Spiel nach dem Abheben

Der Hintergrund: Der Abstand modulo der Kartenanzahl ist invariant

Mit der im Beitrag 22 erläuterten „modulo“-Schreibweise kann man das diesem Trick zugrunde liegende Prinzip noch etwas mathematischer formulieren:

Liegen n Karten übereinander und haben zwei dieser Karten die Positionen a und b (von oben gezählt), so ist $(b - a) \bmod n$ eine Invariante: Auch nach beliebig häufigem Abheben hat sich – modulo n gerechnet – die Differenz der Positionswerte nicht geändert.

Dazu muss man die modulo-Rechnung allerdings auch für negative Zahlen verwenden. Das ist nicht besonders schwierig, wir wissen ja auch alle, dass vor sieben Tagen der gleiche Wochentag war wie heute und dass vor 13 Tagen Dienstag war, wenn heute Montag ist. In diesem Sinn ist etwa -13 modulo 7 gleich 1.

Diese Feinheit muss man kennen, um die vorstehend angegebene Umschreibung richtig zu interpretieren. Ein Beispiel: In einem Kartenstapel von 10 Karten liegen Herz As bzw. Kreuz Bube an den Positionen 2 und 5. Die Differenz ist also 3. Nun wird nach der zweiten Position abgehoben. Herz As liegt dann an Position 10, und der Bube ist nach Position 3 aufgerückt. Die

Differenz (Position der zweiten Karte minus Position der ersten Karte) ist also $3 - 10 = -7$. Und modulo 10 ist diese Zahl wie vorher gleich 3.

Wir zeichnen auf eine dehnbare Zeichenfläche

Die allerwenigsten Invarianten der Mathematik lassen sich für Zaubertricks nutzen. Ihre große Bedeutung liegt darin, dass durch die Invarianten einer Theorie das Unwesentliche vom Wesentlichen getrennt werden kann. Um das an einem etwas unkonventionellen Beispiel zu veranschaulichen, brauchen wir eine aus einem dehnbaren Material hergestellte Zeichenfläche⁸¹⁾.

Darauf zeichnen wir irgendeine Figur: Ein Dreieck, einen Kreis, eine Ansammlung von Rechtecken, was auch immer. Nun wird die Zeichenfläche verzerrt, wir ziehen und stauchen, wie es uns gerade in den Sinn kommt. Unsere Zeichnung wird sich dann wesentlich verändern. Aus einem kleinen Kreis kann ein großer Kreis werden, aus rechten Winkeln können spitze oder stumpfe Winkel werden usw.

Es gibt aber Invarianten. Eine ist die, die mit dem Fachbegriff „Zusammenhang“ bezeichnet wird. Wenn die Figur im Original die Eigenschaft hatte, dass man innerhalb der Figur eine Verbindungslinie zwischen je zwei beliebigen Punkten ziehen konnte – wie beim Dreieck und beim Kreis, nicht aber bei der Ansammlung von Rechtecken – so wird das auch bei der verzerrten Figur der Fall sein. Kurz: Zusammenhang ist eine Invariante bei Verzerrungen.

⁸¹⁾ Etwa ein Stück eines Trainings-Gummibands.

87. Mathematics go cinema

Hin und wieder kann man Mathematik auch im Kino bewundern. Mathematiker gehen mit gemischten Gefühlen in solche Filme, denn oft werden nur die gängigen Klischees bedient. Interessant ist immerhin, welche Aspekte des Faches von den Regisseuren für die Darstellung ausgesucht wurden.

Betrachten wir als Beispiel den Film „Sneakers – die Lautlosen“. Die Guten – angeführt von Robert Redford – versuchen dem Bösen (Ben Kingsley) ein mathematisches Verfahren abzujagen, das ein genialer Mathematiker zur Entschlüsselung aller Geheimcodes dieser Welt entwickelt hat.

Der Mathematiker ist vor seinem gewaltsamen Tod noch auf einem Kongress zu sehen. Das, was er sagt, hätte wirklich auf einer Mathematikkonferenz mitgeschnitten worden sein können, da wurde wirklich ausnahmsweise einmal bemerkenswert sorgfältig recherchiert. Die Leute sprechen da tatsächlich so, nach einem Semester Studium könnte man sogar alles verstehen. Mathematik kommt in dem Film eigentlich ganz gut weg, allerdings werden die Möglichkeiten des Faches beim Decodieren von Geheimnissen maßlos übertrieben.

In eine andere Richtung geht die Übertreibung im Film mit dem schlichten Titel „ π “. Da wird die Zahlenmystik auf die Spitze getrieben. Die Botschaft ist nämlich, dass in den Ziffern der Kreiszahl viele Geheimnisse verschlüsselt sind. Und wenn man die nur richtig herausliest, scheinen viele Phänomene plötzlich eine Erklärung zu haben. Vielleicht muss man das als Metapher auffassen. Richtig ist nämlich, dass π in quasi allen mathematischen Gebieten eine wichtige Rolle spielt und dass es rund um diese Zahl noch viele Geheimnisse zu entdecken gibt.

Sollten Mathematiker ihren Lieblingsfilm wählen, würde mit hoher Wahrscheinlichkeit „A beautiful mind“ mit Russell Crowe in der Hauptrolle gewählt werden. Es ist eine Verfilmung der von Sylvia Nasar verfassten Biografie des Spieltheoretikers John Nash. Bemerkenswert gekonnt wird darin auch der emotionale Aspekt der Mathematik eingefangen. Der unwiderstehliche Drang, ein Problem lösen zu wollen, kann so dominant werden, dass sogar das Privatleben gefährdet ist.

Moral: Wer sich mit dem Gedanken trägt, einen Mathematiker oder eine Mathematikerin zu heiraten, sollte darauf vorbereitet sein, dass er bzw. sie hin und wieder in einer anderen Welt verschwindet. Kaum eine(r) bringt es fertig, das weitere Nachdenken auf den nächsten Arbeitstag zu verschieben.