66. Mathematik, die man hören kann

Die heutige Hauptperson ist Joseph Fourier, der seine „Fourier-Analyse“ zu Beginn des 19. Jahrhunderts entwickelte. Er hatte, bedingt durch die Wirren während und nach der französischen Revolution, ein sehr abwechslungsreiches Leben. Unter anderem war er mit Napoleon in Ägypten, dort schrieb er als Erster einen systematischen wissenschaftlichen Bericht über ägyptische Geschichte und Kultur.

Fourier-Analyse gehört heute zum Handwerkszeug aller Mathematiker und Ingenieure. Es geht dabei darum, wie man Schwingungen aus einfachen Bausteinen zusammensetzen kann. Wir wollen uns hier auf Töne, also auf hörbare Schwingungen beschränken. Die „Atome“ der Töne sind die Sinusschwingungen verschiedener Frequenz. Wenn Sie wollen, können Sie sofort so einen Ton hören: Sie brauchen nur zu pfeifen, das kommt dem Sinus schon recht nahe.

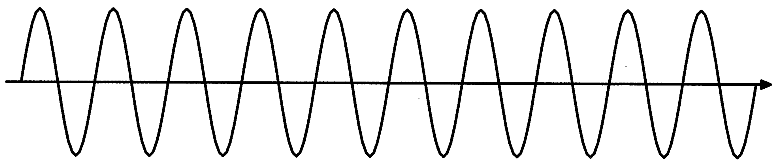

Abbildung 57: Eine Sinusschwingung

Die Theorie sagt nun voraus, mit welchen Intensitäten man Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen mischen muss, um eine vorgegebene Wellenform zu erhalten. Man braucht den Sinus der Grundfrequenz, ein bisschen vom Sinus der doppelten Frequenz, dann vielleicht noch einen Anteil der dreifachen Frequenz usw.

Und das kann man durch Hören nachprüfen. Man suche sich eine Wellenform, die aus einem Sinus und einem Anteil der dreifachen Frequenz besteht. Die so genannte Rechteckschwingung ist gut dafür geeignet. Es sollte dann so sein, dass der Unterschied zwischen einer Sinusschwingung und einer Rechteckschwingung bis zu einer Frequenz hörbar ist, die einem Drittel der höchsten hörbaren Frequenz entspricht. Die dürfte bei den meisten Lesern so um die 15 Kilohertz liegen, der Unterschied zwischen beiden Schwingungstypen sollte also bis 5 Kilohertz zu bemerken sein.

Um das selbst bestätigen zu können, braucht man im Idealfall einen Frequenzgenerator (vielleicht gibt es im Bekanntenkreis einen Ingenieur). Oder gehören ein Synthesizer oder ein anderes elektronisches Musikinstrument zu Ihrem Haushalt? Dann müssen Sie nur die Wellenformen „Sinus“ und „Rechteck“ suchen, und schon kann das Experiment beginnen.

Wer sich mit einer eher qualitativen Bestätigung von Fouriers Theorie zufrieden geben muss, kann bei der nächste Party einmal aufmerksam auf die Stimmen achten: Es ist leichter, sehr tiefe Männerstimmen voneinander zu unterscheiden als

sehr hohe Frauenstimmen. Das liegt daran, dass bei tiefen Stimmen sehr viele Oberschwingungen im hörbaren Bereich liegen und das Ohr dadurch viele Chancen zur Differenzierung hat.

Eine „black box“

Es gibt noch andere mathematische Ergebnisse, die man mit den Ohren mindestens qualitativ nachprüfen kann. Man stelle sich einen schwarzen Kasten vor – heute sagt man „black box“ –, in den man Signale eingeben kann, die dann „irgendwie“ verarbeitet und dann ausgegeben werden. Elektronikbastler können an eine beliebig komplizierte Schaltung denken, in die an eine Stelle ein elektrisches Signal eingespeist und an einer anderen Stelle abgegriffen wird.

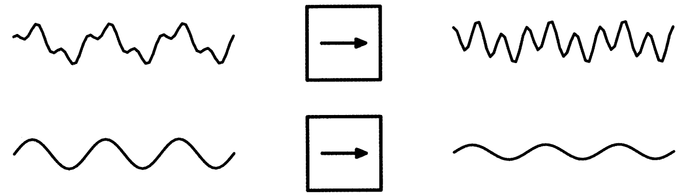

Abbildung 58: So arbeitet ein „schwarzer Kasten“

Der schwarze Kasten soll nun die folgenden Eigenschaften haben:

- Er soll „linear“ sein: Ein doppelt so starkes Eingangssignal bewirkt eine Verdoppelung des Ausgangssignals, und wenn man eine Schwingung eingibt, die eine Überlagerung von zwei Teilschwingungen ist, so erscheint am Ausgang die Überlagerung derjenigen Ausgangssignale, die von den Teilschwingungen produziert werden würden.
- Er soll „zeitinvariant“ sein: Wenn man eine Schwingung eingibt und das Ausgangssignal protokolliert, so ist morgen bei gleichem Eingangssignal das gleiche Ausgangssignal zu erwarten.

Für den Elektronikbastler bedeutet das: Bitte keine Transistoren verwenden (die sind nicht linear), und nirgendwo dürfen während der Experimente Einstellungen verändert werden. Am besten, man beschränkt sich auf Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten, und die auftretenden Ströme und Spannungen sollten nicht zu groß sein.

Obwohl derartige schwarze Kästen eine sehr allgemeine Situation beschreiben, haben sie alle eine Eigenschaft gemeinsam. Sinusschwingungen, die Bausteine der Fourier-Analyse, gehen durch so einen schwarzen Kasten im Wesentlichen ungeändert hindurch. Sie können abgeschwächt werden und die Phase kann sich verschieben, das ist aber auch schon alles.

Die hörbare Konsequenz: Ein Filter für akustische Signale (Hochpass, Tiefpass usw.), der als schwarzer Kasten mit den eben beschriebenen Eigenschaften aufgefasst werden kann, verändert den Charakter von Sinustönen nicht. Wenn man einen Pfeifton eingibt (in guter Näherung eine Sinusschwinngung), so kommt ein Pfeifton der gleichen Frequenz heraus. Dagegen kann ein gesungener Ton seinen Charakter völlig verändern, zum Beispiel viel dumpfer oder irgendwie piepsig klingen.

Das „Kochrezept" für periodische Schwingungen: Fouriers Formel

Periodische Schwingungen sind aufgrund der Ideen von Fourier aus Sinusschwingen zusammengesetzt. Wie sieht das „Rezept" aber genau aus, d.h. in welchen Anteilen treten die Sinusfunktionen auf?
Gegeben soll eine periodische Funktion f sein, sie könnte etwa so aussehen:

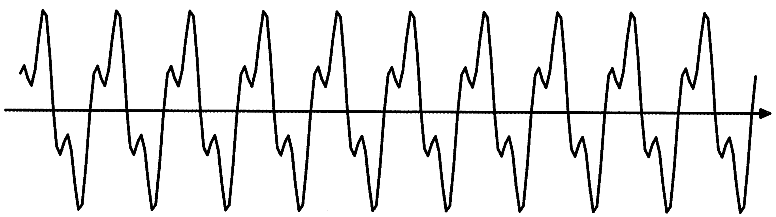

Abbildung 59: Eine periodische Funktion f

Es gibt also eine Zahl p (die Periodenlänge), so dass die Funktion an der Stelle $x+p$ stets den gleichen Wert wie an der Stelle x hat. Deswegen reicht es, die Funktion auf einem Intervall I der Länge p zu kennen, also nur den folgenden Ausschnitt:

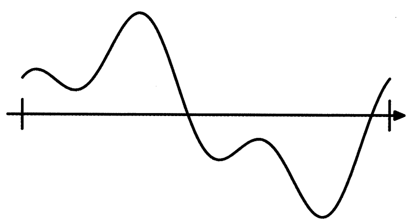

Abbildung 60: Der wesentliche Teil von f

Meist nimmt man an, dass $p = 2 \cdot \pi$ ist, denn dann werden die Formeln besonders einfach. Das ist durch eine Änderung der Maßeinheit auf der x-Achse stets leicht zu erreichen.

Als letzte Vorbereitung muss man wissen, was Mathematiker unter einem *Integral* verstehen. Die Idee ist einfach: Wenn g eine Funktion ist, die auf einem Intervall

erklärt ist, so soll das Integral von g die Fläche sein, die zwischen dem Graphen von g und der x-Achse liegt. Doch Achtung: Dabei wird der Anteil, der unterhalb der x-Achse liegt, negativ gerechnet. Wenn also zum Beispiel die Fläche zwischen den positiven Werten und der x-Achse gleich 4 und zwischen den negativen Werten und der x-Achse gleich 3 ist, so hat das Integral den Wert $4 - 3 = 1$. Und wenn beide Anteile gleich groß sind, so ist das Integral gleich Null. (Im vorstehenden Bild ist ein Beispiel für eine derartige Funktion zu sehen.)

Nun können die „Zutaten" berechnet werden: Wenn f eine Funktion mit Periode $2 \cdot \pi$ ist, so kann man f schreiben als

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \cdots . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet „sin" die Sinus- und „cos" die Cosinusfunktion[63]. Die „Gewichte" $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, mit der diese Funktionen beim Aufbau verwendet werden, ermittelt man wie folgt:

- a_0 ist das Integral von f (auf dem Intervall von 0 bis 2π), geteilt durch 2π.
- a_1 ist das Integral der Funktion $f(x) \cos x$ (auf dem Intervall von 0 bis 2π), geteilt durch π.
- a_2 ist das Integral der Funktion $f(x) \cos(2x)$ (auf dem Intervall von 0 bis 2π), geteilt durch π.
- ...
- b_1 ist das Integral der Funktion $f(x) \sin x$ (auf dem Intervall von 0 bis 2π), geteilt durch π.
- b_2 ist das Integral der Funktion $f(x) \sin(2x)$ (auf dem Intervall von 0 bis 2π), geteilt durch π.
- ...

Fazit: Wer Integrale ausrechnen kann, ist auch in der Lage, die genauen Anteile für das Zusammensetzen aus einfachen Bausteinen zu bestimmen.

[63] Die Cosinusfunktion ist eine zeitversetzte Sinusfunktion. Deswegen treten in der Formel eigentlich nur Sinusfunktionen auf.