73. Der Zufall als Rechenknecht: Monte-Carlo-Verfahren

Monte-Carlo ist allgemein bekannt: durch das regierende Fürstenhaus, die Rallye und die Spielbank. Mathematiker haben bei diesem Namen noch eine andere Assoziation, sie denken an Monte-Carlo-Verfahren. Das sind Rechenverfahren, bei denen der Zufall als Rechenknecht eingesetzt wird.

Zur Erläuterung stellen wir uns eine komplizierte Fläche F vor, die in einem Quadrat mit der Kantenlänge Eins liegt. Wie groß ist der Flächeninhalt? Der klassische Weg wäre, die Fläche in einfache Bestandteile zu zerlegen, dafür den Flächeninhalt zu berechnen und dann die Summe zu bilden.

Die Monte-Carlo-Methode geht ganz anders vor. Der wichtigste Bestandteil ist ein Zufallsgenerator, der einen Punkt in dem Quadrat erzeugt. Der Generator muss so programmiert sein, dass alle Punkte die gleiche Chance haben, man spricht von einer Gleichverteilung. Heutige Computer können derartige Punkte mehrere Millionen Mal pro Sekunde erzeugen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in unserer Fläche F landet, proportional zum Flächeninhalt. Der Monte-Carlo-Flächenmesser muss also nur experimentell feststellen, wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist. Liegt also – zum Beispiel – bei einer Million Versuchen der Punkt 622 431 Mal in der Fläche, so heißt das, dass die Wahrscheinlichkeit für Treffer ungefähr gleich 62.2 Prozent ist. Der Flächeninhalt sollte also 62.2 Prozent der Gesamtfläche sein, und da die gleich Eins ist, ist das Ergebnis der Monte-Carlo-Flächenberechnung 0.622.

Das Verfahren hat Vorteile und Tücken. Der Hauptvorteil besteht darin, dass Monte-Carlo-Verfahren auch für komplizierte Situationen leicht umzusetzen sind: Das zugehörige Programm ist schnell geschrieben, da ja der wichtigste Baustein – die Erzeugung des Zufalls – in die modernen Rechner schon werksseitig eingebaut ist. Leider ist der Zufall alles andere als zuverlässig. Es könnte ja sein, dass die erzeugten Punkte doch nicht gleichmäßig über das Quadrat verteilt sind, so dass die Trefferwahrscheinlichkeit gar nicht den wirklichen Flächeninhalt wiedergibt.

Die typischen Ergebnisse von Monte-Carlo-Verfahren sollten daher auch vorsichtig interpretiert werden, etwa als: „Mit 99 Prozent Wahrscheinlichkeit liegt der gesuchte Wert zwischen 0.62 und 0.63."

Es ist deswegen kein Wunder, dass Mathematiker – wann immer möglich – exakte Verfahren bevorzugen. Oder würden Sie gern über eine Brücke fahren, deren Stabilität nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 Prozent garantiert werden kann?

Eine Monte-Carlo-Parabelflächenmessung

Als Beispiel für eine typische Monte-Carlo-Flächenberechnung wollen wir die Fläche unter einem Parabelbogen ausrechnen: Wie groß ist die Fläche zwischen Parabel und x-Achse zwischen den Abszissen $x = 0$ und $x = 1$?

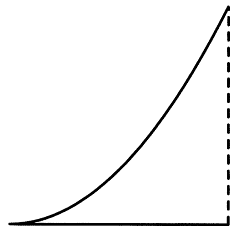

Abbildung 62: Wie groß ist die Fläche unter der Parabel?

Das ist leicht exakt möglich: Schon Archimedes konnte es vor 2000 Jahren, und heute gehört es zum Standard-Schulstoff: Die Parabel ist durch die Gleichung $f(x) = x^2$ gegeben, eine Stammfunktion ist mit $x^3/3$ leicht gefunden, und Einsetzen von oberer und unterer Grenze führt zum Flächeninhalt $1/3$.

Mit Monte-Carlo-Verfahren kann man sich das alles sparen. Es gibt sogar *zwei Möglichkeiten*.

Möglichkeit 1: Man zeichnet um die zu bestimmende Fläche F ein Rechteck R, im vorliegenden Fall kann man ein Quadrat mit den Kantenlängen 1 wählen. Dann lässt man den Computer „viele" zufällige Punkte in diesem Rechteck erzeugen, und zwar so, dass kein Bereich des Rechtecks bevorzugt ist. Es ist dann nur noch zu zählen, wie viele dieser Punkte in der Fläche liegen: Da die Punkte gleichmäßig verteilt sind, wird der Anteil der „Treffer" so sein wie das Verhältnis der Flächeninhalte von F zu R. Hier ein Beispiel:

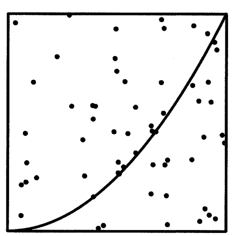

Abbildung 63: Flächenberechnung mit dem Monte-Carlo-Verfahren

Es wurden 60 Punkte erzeugt, davon lagen 22 in der zu bestimmenden Fläche. Also sollte der Flächeninhalt durch $22/60$ mal Flächeninhalt des Quadrats, also durch $0.366\ldots$ geschätzt werden können.

Das ist für so wenige Punkte gar nicht schlecht. Für den Computer ist es kein Problem, die Anzahl um ein Vielfaches zu erhöhen, damit man verlässlichere und genauere Ergebnisse erhält.

Möglichkeit 2: Dieses Verfahren beruht auf einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Interpretation: Die gesuchte Fläche stimmt mit dem mittleren Gewinn überein, falls

Punkte x im Einheitsintervall erzeugt werden und jeweils x^2 ausgezahlt wird. Um das auszunutzen, verfährt man wie folgt. Man setzt zu Beginn ein Register r auf Null und lässt den Computer Zufallszahlen zwischen 0 und 1 produzieren. Die werden quadriert und zu r addiert. (Wird z.B. die Zufallszahl 0.22334455 ausgegeben, so erhöht man den Wert von r um $0.22334455 \cdot 0.22334455 = 0.04988278801$.) Das macht man ganz oft und teilt durch die Anzahl der Versuche (die soll hier n genannt werden). In der üblichen Programm-Kurzschreibweise sieht das so aus:

```
 ⋮
n := 10000;
r := 0;
for i := 1 to n do
  begin y :=random; r := r + y * y; end;
r := r/n;
 ⋮
```

In r steht dann ein approximativer Wert für die Fläche unter dem Parabelstück. Hier das Ergebnis einiger Computersimulationen:

Versuchsanzahl n	10 000	10 000	100 000	100 000
r	0.333839	0.336283	0.33350	0.33304

Es ist bemerkenswert, dass man eine recht gute Näherung an den wirklichen Wert $0.33333\ldots$ ohne jegliche Integrationskenntnisse erhält. Es dauerte nur Sekundenbruchteile, und die Funktion hätte auch beliebig kompliziert sein können. Nachteilig ist wirklich nur, dass man nie sicher sein kann. Nur wenn man weiß, was wirklich herauskommt, kann man einschätzen, ob die Näherung gut ist. Wenn nicht, muss man dem Computer vertrauen, und das wird man sich bei Rechnungen mit schwerwiegenden Folgerungen lieber noch einmal überlegen.