

pictures/aero.jpg

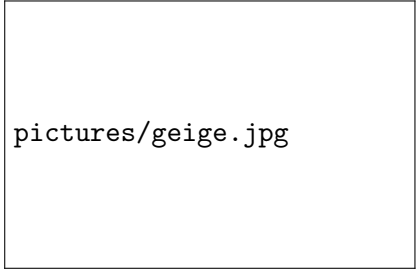
Differentialgleichungen

The Core of the Whole Business

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiele

Wir beschäftigen uns hier mit — wie der Name des Skripts sagt — Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Eigenschaften der Lösungen. Wir verzichten vorerst auf eine formale Definition einer „gewöhnlichen Differentialgleichung“. Es handelt sich dabei um Gleichungen, in der eine Funktion f , Ableitungen von f und eventuell noch Variablen, von denen f abhängt, auftauchen.



pictures/geige.jpg

1.1 Problemstellung

Als erstes, einfaches Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$f'(x) = f(x).$$

Eine Lösung kann leicht erraten werden.

Abbildung 1: Geige

Übung 1. Nenne zwei mögliche Lösungen obiger Differentialgleichung.

Als Mathematiker ist man oft an der Lösungsvielfalt interessiert. In andern Wissenschaften jedoch wird häufig bloss eine Lösung — eine spezielle Lösung, beispielsweise zu einem bekannten Anfangswert — gesucht.

Bevor wir exemplarisch typische zusätzliche Anforderungen angeben und motivieren, möchte ich durch eine schwammige Definition den Begriff „gewöhnliche Differentialgleichung“ abgrenzen.

Definition 1. Sucht man eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und gibt eine Relation zwischen f und den Ableitungen von f an, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung**.

Bemerkung. Betrachtet man hingegen Funktionen, die auf einem höherdimensionalen Raum definiert sind

$$f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und gibt Beziehungen zwischen f und den *partiellen* Ableitungen von f an, so handelt es sich um eine sogenannte partielle Differentialgleichung.

Das Interesse an Differentialgleichungen ist schon alt, denn sie eignen sich hervorragend zum Modellieren von Problemen der realen Welt; insbesondere physikalischer Natur. Diese Problemstellungen haben auch die Typen der oft untersuchten Gleichungen und der zusätzlichen Bedingungen, die man an die Lösungen stellt um Eindeutigkeit zu erhalten, geprägt. Jedoch können die meisten Differentialgleichungen analytisch

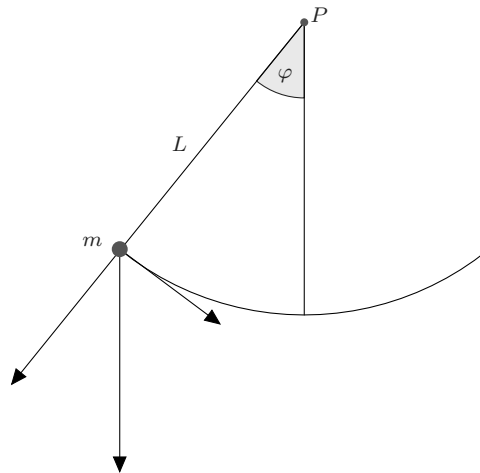


Abbildung 2: Das mathematische Fadenpendel

nicht in geschlossener Form gelöst werden. Analytische Methoden liefern aber oft Aufschluss über qualitatives Verhalten wie Langzeitverhalten, Stabilität etc. Während das quantitative Verhalten heute recht bequem mit dem Computer untersucht werden kann, sind qualitative Aussagen fast ausschliesslich analytischen Untersuchungen zu verdanken. Fragestellungen von Anwendern verlangen oft beides. Deshalb wollen wir auch beide Vorgehensweisen berühren.

1.2 Modellprobleme

Bei einigen Problemen werde ich zur Begründung, warum gerade die angegebene Differentialgleichung untersucht wird, physikalischen Hintergrund erläutern. Diese sind aber für das Verstehen der Mathematik nicht notwendig.

1.2.1 Das mathematische Pendel

Ein Pendel der Länge L und Masse m sei an einem festen Punkt P aufgehängt und schwingt in einer Ebene um die Ruhelage. Wir wollen den zeitlichen Verlauf dieser Bewegung untersuchen. Bei der zu beschreibenden Bewegung reicht es offensichtlich, die Winkelauslenkung φ zu jedem Zeitpunkt t anzugeben; wir suchen also $\varphi(t)$. Wie erhält man eine Gleichung für φ ?

Offensichtlich wirkt auf m die Kraft $F_G = mg$ mit g als Ortsfaktor, wobei der radiale Anteil dafür sorgt, dass die Schnur gespannt bleibt, und der Winkelanteil $mg \sin(\varphi)$ für die Winkelbeschleunigung $L\varphi''$ verantwortlich ist. Damit ergibt sich

$$mL\varphi''(t) = -mg \sin(\varphi(t)).$$

Mit dem negativen Vorzeichen weisen wir darauf hin, dass die Kraft rücktreibend ist. Formen wir die Gleichung nach φ'' um und benutzen die bekannte Näherung für kleine Winkel, $\sin(\alpha) \approx \alpha$, so haben wir

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{L}\varphi(t). \quad (1)$$

Setzt man

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ergibt sich als Lösung

$$\varphi(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t),$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig sind. Man erkennt, dass für eine Anfangsauslenkung und eine Anfangsgeschwindigkeit eine eindeutige Lösung vorliegt.

Übung 2. Prüfe obige Lösung durch Einsetzen in (1).

1.2.2 Der radioaktive Zerfall

Durch Beobachtungen stellt man fest, dass die Anzahl Zerfälle proportional zur noch vorhandenen Stoffmenge N ist. Bezeichnen wir mit $N(t)$ den zum Zeitpunkt t noch verbleibenden Rest und mit N_0 die Stoffmenge zur Zeit $t = 0$. Dann haben wir

$$N'(t) = -kN(t) \quad (2)$$

für ein $k \in \mathbb{R}^+$. Das negative Vorzeichen in (2) interpretiert die Abnahme mit zunehmender Zeit. Wie im ersten Beispiel kann man eine Lösung sofort hinschreiben:

$$N(t) = ce^{-kt}.$$

Übung 3. Überlege kurz, dass mit unserer Notation $c = N_0$ gilt.

Wie lange dauert es, bis sich die Menge der radioaktiven Substanz halbiert hat? Bezeichnen wir mit T diese Zeit, so erhalten wir

$$T = \frac{\ln(2)}{k}$$

und stellen freudig fest, dass T unabhängig von N_0 ist. In der Euphorie geben wir T den suggestiven Namen *Halbwertszeit*. Sie charakterisiert für ein Element den Zerfallsprozess.

Übung 4. Leite die Formel $T = \frac{\ln(2)}{k}$ her.

Bemerkung. Allgemein führen Wachstums- und Zerfallsprozesse, bei denen die Veränderung proportional zur gegenwärtigen Grösse ist, auf Differentialgleichungen zu (2) ähnlicher Gestalt.

1.2.3 Bevölkerungswachstum

Das Wachstum einer Bevölkerung ist eine Frage von eminenter Bedeutung, sowohl in der Medizin, in der Zoologie, aber auch für die Menschheit. Ein einfaches Modell zur Beschreibung einer Population p ohne natürliche Feinde ist, dass sowohl die Geburtenzahl, wie auch die Sterbezahle proportional zur Grösse der Bevölkerung sind. Dann gibt es eine Geburtenrate B , eine Sterberate D und p genügt der Gleichung

$$p' = Bp - Dp. \quad (3)$$

Mit $\beta = B - D$ in (3) erhält man via $k = -\beta$ einen Wachstumsprozess vom Typ (2) mit Verdoppelungszeit $T = \ln(2)/\beta$. Beobachtet man aber in der Realität ein Wachstum, das noch stärker ist — Verkürzung der Verdoppelungszeiten — dann ist (3) kein geeignetes Modell. Ein schwerer Nachteil dieses Modells ist die Vorhersage grenzenlosen Wachstums. Dies kann wegen der Endlichkeit aller Dinge nicht vorliegen. Nun erweitert man das Modell durch einen sogenannten Stressfaktor S , der proportional zur Anzahl Begegnungen von Individuen der Bevölkerung ist, welche selbst proportional zu p^2 ist. Damit hat man

$$p' = \beta p - Sp^2. \quad (4)$$

Mit $p(t) = \frac{\beta}{S}$ verfügt man über eine konstante Lösung. Es ergibt sich sogar, dass jede Lösung sich an diese konstante Lösung annähert. Man erhält dies, indem man zu jedem Anfangswert eine Lösung durch diesen Anfangswert angibt, die diese Eigenschaft hat. Aus der Eindeutigkeit, die wir noch zeigen werden, folgt dann die Behauptung. Man bekommt die Lösung für einen beliebigen Anfangswert mit der Methode der *Trennung der Veränderlichen*.

Nehmen wir an, es gibt eine Lösung $p(t)$ mit $p_0 \neq \beta/S$. Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$ liefert (4)

$$\frac{dp}{dt} \frac{1}{\beta p - Sp^2} = 1.$$

Integration von t_0 bis t liefert

$$\int_{t_0}^t \frac{dp(s)}{dt} \frac{ds}{\beta p(s) - Sp(s)^2} = \int_{t_0}^t ds = t - t_0.$$

Ist $\beta p - Sp^2 \neq 0$, so ist auch $p' \neq 0$ und die linke Seite ergibt mit der Substitutionsregel

$$\int_{p_0}^p \frac{dz}{\beta z - Sz^2}.$$

Dies wird mittels einer Partialbruchzerlegung integriert.

Übung 5. Zeige, dass mit $K = \beta/S$

$$\frac{1}{\beta z - Sz^2} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{K - z} \right)$$

gilt.

Wir erhalten mit $K = \beta/S$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta} \int_{p_0}^p \frac{1}{z} + \frac{1}{K-z} dz = \\ &= \frac{1}{\beta} \left(\ln \left(\frac{|p|}{|p-K|} \right) - \ln \left(\frac{|p_0|}{|p_0-K|} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Übung 6. Zeige: Wegen $p_0, p > 0$ erhält man für den Ausdruck (5) die Form

$$\frac{p(p_0 - K)}{(p - K)p_0} = e^{\beta(t-t_0)}.$$

Daraus folgt

$$p(1 - B) = -BK. \quad (6)$$

Schliesslich erhalten wir die Lösung

$$p(t) = \frac{Kp_0}{p_0 - e^{-\beta(t-t_0)}(p_0 - K)}.$$

Übung 7. Leite die Lösung her, indem du (6) nach p auflöst, den Bruch ausschreibst und danach mit $e^{-\beta(t-t_0)}$ erweiterst.

Übung 8. Untersuche die Qualität der Lösung. Erfüllt $p(t_0)$ die Erwartungen. Wie siehts in ferner Zukunft aus, d.h. $t \rightarrow \infty$? Wie sahs in der Vergangenheit aus (betrachte die Fälle $p_0 \in (0, K)$ und $p_0 > K$)?

Bemerkung. Die hier behandelte Gleichung wird oft **logistische Gleichung** genannt.

1.2.4 Die schwingende Saite

Bemerkung. An diesem Beispiel möchte ich zeigen, dass gewöhnliche Differentialgleichungen eine erhebliche Rolle bei der Diskussion von Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen spielen.

Bei einer schwingenden Saite sucht man eine Funktion u , die die Auslenkung zum Zeitpunkt t an der Stelle x beschreibt; also

$$u(t, x).$$

Ohne Begründung gebe ich die zugrundeliegende partielle Differentialgleichung an. Sie lautet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Die Saite sei an den Endpunkten $x = 0$ bzw. $x = \pi$ befestigt. Damit erhält man die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$. Der Einfachheit halber setzen wir $\lambda = 1$. Mit dem Ansatz

$$u(t, x) = v(x) \cdot w(t)$$

erhält man die Beziehung

$$v(x)w''(t) = v''(x)w(t).$$

Betrachten wir einen Punkt (t, x) , in dem beide Funktionen nicht verschwinden, so können wir

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}$$

schreiben. Da die beiden Seiten von verschiedenen Variablen abhängen, müssen sie konstant und gleich sein. Also in der Art

$$\begin{aligned}w'' &= -Kw \\ v'' &= -Kv\end{aligned}$$

mit $K > 0$. Das Vorzeichen ist wiederum physikalisch motiviert. Sonst erhält man keine zeitlich periodische Lösung. Für eine vollständige Lösung müsste man aus mathematischer Sicht auch den andern Fall diskutieren. Wie in (1) lautet eine Lösung der zweiten Gleichung

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{K}x) + c_2 \sin(\sqrt{K}x).$$

Übung 9. Überlege dir, dass mit den Randbedingungen der Cosinusterm verschwindet und $K = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ gelten muss, so dass also

$$v(x) = c_2 \sin(nx)$$

wird.

Damit kann man eine Schar von Lösungen der Gleichung (7) angeben, nämlich

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n^1 \cos(nt) + d_n^2 \sin(nt)) \sin(nx).$$

Übung 10. Geht man von einer Ausgangslenkung mit Anfangsgeschwindigkeit 0 aus, so erhält man

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(nt) \sin(nx).$$

Auf Seite ?? findet man eine mögliche Lösung in Abbildung ?? geplottet.

1.2.5 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, die die Temperaturentwicklung in einem Stab modelliert. Wir nehmen an, wir hätten einen Stab der Länge l . Für $x \in (0, l)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $u(x, t)$ die Temperatur des Stabes zum Zeitpunkt t an der Stelle x . Die Anfangsverteilung der Temperatur sei durch eine Funktion $u_0(x)$ gegeben. An den Enden des Stabes bieten sich verschiedene Randbedingungen an, die physikalisch motiviert sind. Zum einen kann man annehmen, dass man an den Enden eine feste

Temperatur T hat, o.E.d.A. nehmen wir $T = 0$ an, oder eine vollständige Isolierung, d.h. keine Temperaturänderung durch den Rand: $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. An der Stelle (x, t) ist dabei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt. Wiederum setzen wir $k = 1$ und brauchen den Ansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$. Man erhält

$$\frac{w'}{w} = \frac{v''}{v} = \lambda.$$

Hier lautet eine mögliche Lösung

$$u(x, t) = e^{\lambda t} (c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)).$$

Aus der Randbedingung links ergibt sich $c_1 = 0$, und die Bedingung rechts liefert $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$, also

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Da man beliebige Summen bzw. Reihen bilden kann, lautet eine allgemeinere Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).$$

Die Werte für c_n bestimmt man durch Entwicklung von u_0 in eine Fourierreihe.

1.2.6 Das elektrische Feld

Sei \vec{E} ein elektrisches Feld in der Ebene. Sei \vec{U} das Potential dieses Feldes. Also $\vec{E} = \nabla \vec{U}$, wobei \vec{U} eine Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y ist. Welches sind die Linien, längs denen das Potential konstant ist? In fast allen Punkten (x, y) wird entweder $x = x(y)$ eine Funktion von y sein, oder umgekehrt $y = y(x)$ eine Funktion von x . Wir beschränken uns auf den zweiten Fall, der erste geht daraus durch einfaches Umschreiben hervor. Um die Äquipotentiallinien zu finden, geben wir uns eine, zunächst beliebige, Konstante c vor und stellen die Frage, wo ist $\vec{U} = c$? Die Annahme, dass diese Linie durch $y = y(x)$ zu beschreiben ist, führt auf

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Dies ist ein Beispiel einer sogenannten exakten Differentialgleichung.

Übung 11. Überlege kurz, dass obige Gleichung Sinn macht.

Definition 2. Die Differentialgleichung der Form

$$f(x, y) \frac{dy}{dx} + g(x, y) = 0 \quad (8)$$

heisst **exakt**, wenn es eine Funktion $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{und} \quad g(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (9)$$

Aus $U_{xy} = U_{yx}$ erhält man unmittelbar die notwendige Bedingung $f_x = g_y$ für die Exaktheit der Gleichung. Ist bei einer Gleichung der Form (8) die Bedingung (9) nicht erfüllt, so ist es manchmal möglich, einen **integrierenden Faktor** zu finden. Dies ist eine Funktion $M(x, y)$, so dass Mf bzw. Mg die Bedingung (9) erfüllen. Eine Diskussion der Gleichung ist dann der Diskussion einer exakten Gleichung ähnlich. Insbesondere führt die Forderung $(Mg)_y = (Mf)_x$ auf die partielle Differentialgleichung

$$M_y g + M g_y = M_x f + M f_x.$$

2 Lösungsmethoden

2.1 Lineare Differentialgleichungen

Definition 3. Eine Differentialgleichung der Form

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = b(x)$$

heißt **lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung**, wobei $a_n(x), \dots, a_0(x)$ und $b(x)$ Funktionen sind.

Beispiel 1. Ein Spezialfall einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist

$$a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = b(x).$$

Der von x abhängige Ausdruck $b(x)$ wird **Störterm** genannt.

Definition 4. Ist $b(x) = 0$, so heißt die Differentialgleichung **homogen**, andernfalls wird sie **inhomogen** genannt.

Bemerkung. Für einige explizite Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es Standardverfahren zu ihrer numerischen Lösung. Viele explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen, auf die dann diese Standardverfahren angewendet werden dürfen.

Beispiel 2. Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

eine DGL n -ter Ordnung. Diese lässt sich in ein DGL-System verwandeln. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_1 &= y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)} \\ b_1 &= \cdots = b_{n-1} = 0, b_n = b(x) \end{aligned}$$

Für $n = 4$ erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -a_0y_1 - a_1y_2 - a_2y_3 - a_3y_4 + b(x) \end{aligned}$$

2.2 Lineare Differentialgleichungssysteme

Beispiel 3. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 5y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$



das heisst

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Staunen Sie nun, wie man die Lösungen bestimmen kann: Wir finden die Eigenwerte via

$$(\lambda - 7)(\lambda + 2) + 20 = 0.$$

Das ergibt $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Daraus erhält man die Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert das Fundamentalsystem der Lösungen

$$\vec{y}_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = e^{3x} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Übung 12. Rechne Eigenwerte und Eigenvektoren nach.

Übung 13. Zeige, dass $c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2$ das Gleichungssystem erfüllt.

2.3 Die Traktrix

In der Abbildung ziehe man einen Punkt $P(x|y)$ an einer Strecke PZ der Länge a . Z soll auf der positiven y -Achse liegen, und zu Beginn befinde sich P in $(a, 0)$. Welche Kurve beschreibt P ? Wir suchen eine Funktion $y = y(x)$ mit $|Z - P| = a$. Betrachtet man den Steigungswinkel erhält man für den Punkt P

$$y' = -\frac{Z - y}{x}.$$

Ferner gilt

$$Z - y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

und damit

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Mit der Bedingung $y(a) = 0$ erhält man als Lösung

$$y(x) = a \cdot \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

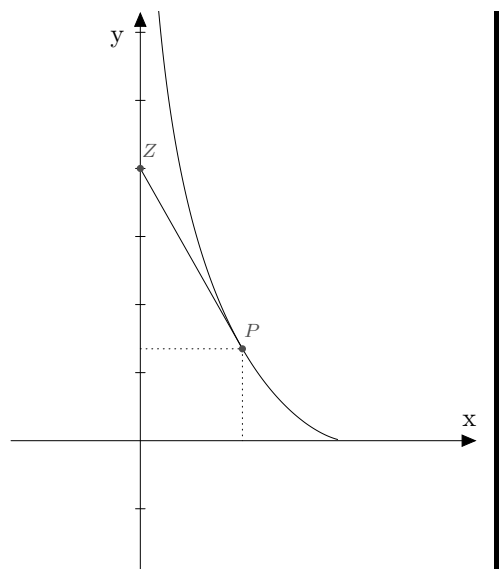


Abbildung 3: Die Traktrix

Übung 14. Überprüfe die Lösung.

2.4 Isoklinenverfahren

Über die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

ist jedem Punkt der xy -Ebene eine Richtung $y' = \tan(\alpha)$ zugeordnet. Wählt man für y' einen festen Wert,

$$y' = c = f(x, y),$$

so beschreibt diese Gleichung eine Kurve in der Ebene. Diese Kurven heissen **Isoklinen**, also Kurven gleicher Neigung. Durch Zeichnung von genügend vielen Richtungstrecken erhält man ein Richtungsfeld, in das man näherungsweise Lösungskurven der Differentialgleichung eintragen kann.

Übung 15. Zeichne für

$$y' = -\frac{y}{x}$$

einige Isoklinen und damit mögliche Lösungskurven.

2.5 Trennung der Variablen

Viele Differentialgleichungen erster Ordnung lassen sich auf die Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

bringen. Für diesen Typ lässt sich das Problem auf ein Integrationsproblem zurückführen, das aber nicht unbedingt eine analytische Lösung haben muss. Man schreibt y' als Quotient der Differentiale dy/dx

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

und trennt dann die Variablen:

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx.$$

Durch Integration beider Seiten erhält man die Lösungen der Differentialgleichung, nämlich

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

Auch wenn die Integrale keine elementare Lösung haben gilt die Differentialgleichung als gelöst.

Übung 16. Löse

$$y' = (x^2 + 1)(y - 2).$$

Übung 17. Löse mit der Methode der Trennung der Variablen

(a) $u' = u^2 + 1$



(b) $u' = -\frac{x^2}{u^3}$

(c) $u' = e^u \sin(x)$

und diskutiere das Verhalten der Lösungen mit $u(0) = p_0$ wobei $p_0 \in \mathbb{R}$. Darunter verstehen wir die Beantwortung folgender Fragen.

- Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert eine Lösung?
- Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow t_+$ bzw. $t \rightarrow t_-$, wenn (t_-, t_+) das Intervall bezeichnet, auf dem die Lösung $u(t)$ existiert?

2.6 Substitution

Hat die Funktion $f(x, y)$ noch nicht die für eine Trennung der Variablen erforderliche Form eines Produkts, so lässt sich diese Form häufig durch eine Substitution erreichen. Wir betrachten hier den Spezialfall, dass die Variablen x, y immer in der folgenden Form auftreten:

$$\frac{ax + by + c}{dx + ey + f} = z.$$

Wir setzen $y' = f(x, y) = g(z)$ und unterscheiden für den Nachweis, dass dann immer eine Trennung der Variablen möglich ist, zwei Fälle. Sei $D = ae - bd$ die Determinante von

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}.$$

2.6.1 D gleich 0

Falls $b = 0 = e$, so hängt $g(z)$ nur noch von x ab und die Variablen sind getrennt. Sei daher $b \neq 0$ oder $e \neq 0$.

Fall a) Sei $b \neq 0$. Dann setzen wir

$$u = ax + by + c.$$

Aus $D = 0$ folgt, dass es eine Zahl k gibt, so dass $d = ka$ und $e = kb$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} z &= \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \\ &= \frac{ax + by + c}{k(ax + by + c) - kc + f} \\ &= \frac{u}{ku + f - kc} \end{aligned}$$

Nun hat man für die Ableitung von u

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= a + b \frac{dy}{dx} = a + bg(z) \\ &= a + bg\left(\frac{u}{ku + f - kc}\right) \end{aligned}$$

Die rechte Seite hängt nur noch von u ab, d.h. eine Trennung der Variablen ist erreicht.

Fall b) Sei $b = 0$ und $e \neq 0$. Dann substituiert man den Nenner mit

$$u = dx + ey + f.$$

Aus $D = 0$ und $b = 0$ folgt $a = 0$. Also

$$z = \frac{c}{dx + ey + f} = \frac{c}{u}$$

und für die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= d + e \frac{dy}{dx} = d + eg(z) \\ &= d + eg\left(\frac{c}{u}\right) \end{aligned}$$

Damit sind wir fertig.

2.6.2 D ungleich 0

Wir setzen

$$ax + by + c = 0 \quad \text{und} \quad dx + ey + f = 0$$

Wegen $D \neq 0$ ergibt das eine eindeutige Lösung (x_0, y_0) . Wir setzen $x = x_0 + v$ und $y = y_0 + w$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} \\ &= \frac{ax_0 + by_0 + c + av + bw}{dx_0 + ey_0 + f + dv + ew} \\ &= \frac{av + bw}{dv + ew} \end{aligned}$$

Anschliessend setzt man $u = \frac{w}{v}$ woraus

$$z = \frac{a + bu}{d + eu}$$

folgt. Nun leiten wir ab

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{v \frac{dw}{dx} - w \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ &= \frac{v \frac{dy}{dx} - w}{v^2} \\ &= \frac{1}{v} \frac{dy}{dx} - \frac{u}{v} = \frac{1}{v} (g(z) - u) \end{aligned}$$

Das heisst

$$\frac{du}{g(z(u)) - u} = \frac{dv}{v}$$

und wir haben wiederum die Variablen getrennt.

Übung 18. Löse

$$y' = \frac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 1}$$

und überzeuge dich davon, dass die Lösung eine Parabel ist.

Übung 19. Löse

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

und schreibe die Lösung in der Form $\frac{y}{x}$. Wechsle anschliessend zu Polarkoordinaten und notiere $\varphi(r)$. Überzeuge dich davon, dass das Resultat eine Spirale ist.

2.7 Variation der Konstanten

Die linear Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = s(x)$$

wobei $s(x)$ eine sogenannte Störfunktion ist, wird in zwei Schritten gelöst.

1. Man löst die zugeordnete homogene Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = 0$$

durch Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= - \int g(x) dx \\ \ln |y| &= - \int g(x) dx \\ y &= ce^{-\int g(x) dx}\end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

2. Die Integrationskonstante c wird als Funktion von x angesetzt — Variation der Konstanten

$$y = c(x)e^{-\int g(x) dx}.$$

Für die Ableitung erhalten wir

$$y' = c'(x)e^{-\int g(x) dx} + c(x)(-g(x))e^{-\int g(x) dx}$$

was

$$s(x) - g(x)y$$

entsprechen soll. Daraus folgt

$$c'(x) = s(x)e^{\int g(x)dx}$$

also

$$c(x) = \int s(x)e^{\int g(x)dx}dx + K$$

Die Lösung lautet

$$y = e^{-\int g(x)dx} \cdot \left(\int s(x)e^{\int g(x)dx}dx + K \right).$$

Übung 20. Löse

$$y'(x) = xy(x) + x$$

Übung 21. Löse

$$y' - y \tan(x) = -\sin(x).$$

Übung 22. Löse

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 + 4$$

Übung 23. Löse

$$y'(x) = y(x) + x$$

Übung 24. Löse

$$y'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot y(x) + \sin(x)$$

2.7.1 Variation der Konstanten — abstrakter

Wir beschränken uns auf den Fall eines einzigen Freiheitsgrades, den einzigen mit expliziten Lösungsmethoden.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a, s : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir studieren die Differentialgleichungen

$$y' = ay \tag{10}$$

$$y' = ay + s \tag{11}$$

Satz 2.0. *Die homogene lineare Differentialgleichung besitzt als Lösung genau die Funktionen $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$y(x) = ce^{\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.

Beweis. Dass die oben beschriebenen Funktionen y die Gleichung erfüllen, erkennen wir durch Ableiten. Für die Eindeutigkeit brauchen wir auch ein direktes Argument. Sei y wie oben und z eine weitere Lösung, so ergibt sich

$$\frac{d}{dx} \frac{z}{y} = \frac{z'y - zy'}{y^2} = \frac{azy - zay}{y^2} = 0.$$

Also ist $\frac{z}{y}$ konstant und somit $z = cy$. □

Satz 2.0. Die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung sind ein Nebenraum $N = L + d$ der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung L , wobei d eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Beweis. Um d zu erhalten bedienen wir uns der Formel

$$d(x) = c(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

mit

$$c(x) = \int_{x_0}^x s(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} dt,$$

wobei $x_0, t_0 \in I$ beliebig gewählt werden dürfen. Sie kann aus einer Lösung L durch Variation der Konstanten gewonnen werden. Wir hatten

$$y(x) = c(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}$$

und es soll die inhomogene lineare Differentialgleichung erfüllt sein. Also

$$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} + c(x)a(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} \\ &= a(x)y(x) + s(x). \end{aligned}$$

Dies liefert die Bedingung

$$c'(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} = s(x)$$

woraus sich $c'(x)$ und damit die Behauptung ergibt. □

Korrolar 1. Für $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung c der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit $c(t_0) = x_0$.

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar aus den oben stehenden Betrachtungen. □

2.8 Exakte Gleichungen

Hier folgt noch einmal die Definition einer exakten Differentialgleichung.



Definition 5. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

mit $P, Q : G \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **exakt**, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $P = \frac{\partial F}{\partial x} = F_x$ und $Q = \frac{\partial F}{\partial y} = F_y$ gilt.

Wir erhalten die Lösungen, indem wir die Niveaulinien $F^{-1}(c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ nach der ersten oder zweiten Variablen auflösen.

Bemerkung. Eine Lösung F der obigen DGL heisst Potentialfunktion des Vektorfeldes $(P | Q)$.

Jetzt zu den in der Einleitung bereits erwähnten integrierenden Faktoren. Wir setzen wiederum voraus, dass $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist, und $P : G \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : G \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind. Wenn nun die durch (P, Q) definierte Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy = 0 \quad (12)$$

nicht exakt ist, kann man versuchen, eine Funktion $M : G \rightarrow \mathbb{R}$ so zu bestimmen, dass

$$(MP)dx + (MQ)dy = 0$$

exakt ist. Eine solche Funktion nennen wir einen integrierenden Faktor für (12). Wenn man die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ anwendet, erhält man

$$\frac{\partial(MP)}{\partial y} = \frac{\partial(MQ)}{\partial x}$$

oder

$$M_y P + M P_y = M_x Q + M Q_x,$$

also eine partielle Differentialgleichung für M . Dies führt zu Fragen, die ich hier nicht weiter untersuchen möchte.

Übung 25. Prüfe, ob die Differentialgleichung

$$(\cos y + 2xy)dx + (x^2 - y - x \sin y)dy = 0$$

exakt ist und löse, wenn möglich, in expliziter Form. Falls du nicht nach y auflösen kannst, löse nach x .

Übung 26. Man überprüfe die folgenden Gleichungen auf Exaktheit. Falls nicht Exaktheit vorliegt, versuche einen integrierenden Faktor zu finden und bestimme die Lösungen.

(a) $yy' = x$

(b) $xy' = -y$

(c) $x - y + (1 - x)y' = 0$

(d) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$

(e) $xy^2 + y - xy' = 0$

Im Anhang findet ihr Abbildungen der Lösungen; ab Abbildung ?? auf Seite ??.



2.9 Potenzreihenansatz

Ohne ins Detail zu gehen akzeptieren wir folgenden

Satz 2.0. *Wenn die Koeffizienten einer Differentialgleichung Potenzreihen sind, dann auch die Lösungen. Die Lösungen haben zudem den gleichen Definitionsbereich wie die Koeffizientenfunktionen.*

2.9.1 Die Hermite'sche Differentialgleichung

Betrachte

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad (13)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit dem Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$$

erhalten wir die Bedingung

$$(2c_2 + \lambda c_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2)c_{k+2} - 2kc_k + \lambda c_k] \cdot x^k = 0,$$

die wir wie folgt erfüllen können. c_0 und c_1 können frei gewählt werden, und für $k \geq 0$ muss

$$c_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+1)(k+2)} \cdot c_k$$

gelten. So erhalten wir

$$y(x) = c_0 g(x) + c_1 h(x)$$

mit

$$g(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[4(k-1) - \lambda][4(k-2) - \lambda] \cdots [4 - \lambda]\lambda}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

und

$$h(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[4k - 2 - \lambda][4(k-1) - 2 - \lambda] \cdots [2 - \lambda]}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Besonders interessant ist der Fall $\lambda = 2n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn n gerade ist, ist in diesem Fall $g = g_n$ ein gerades Polynom vom Grad n ; wenn n ungerade ist, ist $h = h_n$ ein ungerades Polynom vom Grad n . Man definiert die *Hermite'schen Polynome* H_n durch

$$H_n = (-1)^{n/2} \cdot 2^{n/2} \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) \cdot g_n,$$

für gerade n und

$$H_n = (-1)^{(n-1)/2} \cdot 2^{(n+1)/2} \cdot 3 \cdot 5 \cdots n \cdot h_n,$$

falls n ungerade ist.

Übung 27. Kannst du die ersten paar Hermite'schen Polynome, vielleicht H_0 bis H_3 , bestimmen?

Bemerkung. Es wird gesagt, die Differentialgleichung (13) trete in der Quantentheorie, beim Studium der Schwingungen von Molekülen, auf.

Übung 28. Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Hermite'sche Differentialgleichung?

- (a) $y = 1$ (c) $y = -2 + 4x^2$
 (b) $y = 2x$ (d) $y = -12x + 8x^3$

2.9.2 Die Legendre'sche Differentialgleichung

Sie hat ihren Ursprung in der Astronomie und lautet

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0. \quad (14)$$

Wir suchen eine Potenzreihenentwicklung $y(x)$ um $x_0 = 0$. Weil sich die Funktionen

$$x \mapsto \frac{-2x}{1 - x^2} \quad \text{und} \quad x \mapsto \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1 - x^2}$$

über dem Intervall $(-1, 1)$ in Potenzreihen entwickeln lassen, lässt sich über diesem Intervall die Differentialgleichung durch eine Potenzreihe auflösen. Wir beginnen mit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$$

und der Abkürzung $\lambda(\lambda + 1) = \alpha$. Eine kleine Rechnung führt zur Rekursionsformel

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1) - \alpha}{(k+1)(k+2)} \cdot c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$. Wir können c_0 und c_1 frei wählen und erhalten die Werte für $c_k, k \geq 2$ mit obiger Formel. Dies führt zu

$$y(x) = c_0 g(x) + c_1 h(x)$$

mit

$$g(x) = 1 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} x^2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2k} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2 \cdot 3}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(2k - 2)(2k - 1)}\right) x^{2k}$$

und

$$h(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k + 1} \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1 \cdot 2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{(2k - 1)(2k)}\right) x^{2k+1}.$$

Wieder interessiert der Fall $\lambda = n \in \mathbb{N}$ besonders. Wenn n gerade ist, setzen wir $p_n = g_n$; wenn n ungerade ist, setzen wir $p_n = h_n$. Das *Legendre-Polynom* ist gegeben durch $P_n = \alpha_n p_n$, wobei α so bestimmt werden soll, dass der Koeffizient des Monoms x^n in P_n den Wert $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$ annimmt. P_n ist dann eine Lösung der Legendre'schen Differentialgleichung.

Übung 29. Kannst du die ersten vier Legendre-Polynome bestimmen?

Übung 30. Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Legendre Differentialgleichung?

(a) $y = 1$

(c) $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2$

(b) $y = x$

(d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3$

2.9.3 Die Tschebyscheff'sche Differentialgleichung

Sie ging aus dem Studium der Kolbenbewegung in Dampfmaschinen hervor und lautet

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0.$$

Sie kann ähnlich wie die Legendre-Gleichung durch einen Potenzreihenansatz über dem Intervall $(-1, 1)$ gelöst werden und führt zu den *Tschebyscheff-Polynomen*.

3 Differenzialgleichungen aus der Physik

3.1 Freier Fall

Wir betrachten den freien Fall unter der konstanten Erdbeschleunigung g ohne Luftwiderstand, d.h.

$$\dot{v} = g.$$

Durch Integrieren über die Zeit t erhält man die Lösung zur Anfangsgeschwindigkeit v_0 und zum Startpunkt s_0 , nämlich

$$v = v_0 + gt$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Bemerkung. In der Physik ist es üblich, die Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt und die Ableitung nach dem Ort mit einem Strich zu bezeichnen.



Abbildung 4: First Law of Cartoon Physics

3.2 (Freier) Fall mit Luftreibung

Hier setzt man wiederum konstante Erdbeschleunigung g voraus, aber berücksichtigt den Luftwiderstand

$$F_R = cv^2$$

wobei c konstant ist. Wählen wir für die Geschwindigkeit die Richtung zur Erde hin als positiv, so gilt für die Beschleunigung

$$\dot{v} = g - \frac{cv^2}{m}.$$

Als Lösung zur Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ erhalten wir

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right).$$

Betrachtet man \tanh , so erkennt man die Maximalgeschwindigkeit

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{c}}.$$

Übung 31. Skizziere den Geschwindigkeitsverlauf $v(t)$ in einem Koordinatensystem.

3.3 Freier Fall aus grosser Höhe

Nach Newton nimmt die Gravitationskraft mit zunehmender Entfernung quadratisch ab. Wir setzen daher

$$g = -\frac{\mu}{r^2}$$

aber arbeiten der Einfachheit halber ohne Luftwiderstand. Dann gilt

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2},$$

was wir auf beiden Seiten mit \dot{r} multiplizieren:

$$\ddot{r}\dot{r} = -\frac{\mu\dot{r}}{r^2}.$$

Integrieren auf beiden Seiten führt uns zum Energieerhaltungssatz

$$0.5\dot{r}^2 = \frac{\mu}{r} + c$$

und schliesslich zur Differentialgleichung

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2\frac{\mu}{r} + c}.$$

Mit den Anfangswerten $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$ folgt

$$c = -2\frac{\mu}{r_0}$$

und durch Trennung der Variablen erhält man als Lösung für das untere Vorzeichen

$$t = \sqrt{\frac{r_0}{2\mu}} \left(\sqrt{r(r_0 - r)} + r_0 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} \right) \right).$$

Eine Auflösung nach r ist nicht möglich.

Übung 32. Alle Schritte im obigen Beispiel klar? Kannst du nach r lösen?

3.4 Barometrische Höhenformel

Wir gehen von der Zustandsgleichung für ideale Gase,

$$pV = nRT,$$

aus, wobei $p(h)$ den Luftdruck in der Höhe h , V das Volumen, n die Masse in Mol, R die allgemeine Gaskonstante und T die Temperatur bezeichnen. Wir betrachten eine kleine Höhenänderung dh bezüglich der Querschnittsfläche A :

$$\begin{aligned} p(h) &= p(h + dh) + \frac{mg}{A} \\ &= p(h + dh) + \frac{\varrho A \cdot dh \cdot g}{A} \\ &= p(h + dh) + \varrho g \cdot dh \end{aligned}$$

Die Dichte ϱ hängt ebenfalls von der Höhe ab. Unter Benutzung der Zustandsgleichung für ideale Gase kann ϱ durch p ersetzt werden:

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT} = \frac{Mp}{RT}$$

wobei M das Molekulargewicht der Luft bezeichnen soll. Damit folgt

$$p(h + dh) - p(h) = -\frac{M}{RT}g \cdot dh,$$

also

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{Mg}{RT}p$$

Die Lösung ist also

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Fassen wir die Konstanten geschickt zusammen,

$$h_0 = \frac{RT}{Mg} \approx 8.3 \text{ km},$$

notiert man

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{h_0}}$$

und sieht, dass der Druck alle 8.3 km um den Faktor e abnimmt. Da die Temperatur allerdings auch mit der Höhe abnimmt — und nicht wie angenommen konstant bleibt — ist dies nur eine Näherung; die Dichte muss rascher abnehmen. Ferner wäre g keine Konstante.

pictures/taylor.jpg

Abbildung 5: MacLaurin-Reihe von $\cos(x)$

3.5 RC-Glied

Wir verwenden das bekannte URI.



$$U = RI = \frac{Q}{C}$$

für einen parallel geschalteten Kondensator. Da der Strom die Änderung der Ladung pro Zeit darstellt,

$$\dot{Q} = -I,$$

folgt

$$\dot{Q} = -\frac{Q}{RC}.$$

Übung 33. Wie würdest du das negative Vorzeichen motivieren?

Als Lösung mit $Q(0) = Q_0$ erhält man

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Bringt man noch eine Spule ins Spiel, so kann man die Radioübertragung mit AM oder FM plausibel, d.h. mathematisch, beschreiben. Falls ich noch Zeit habe und das Thema nicht in Physik breit getreten wurde, erzähle ich zu einem späteren Zeitpunkt ein bisschen mehr.

4 Taylor-Reihe

Übung 34. Betrachte das Polynom n -ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Notiere $f^{(k)}(0)$ für $k \in \{0, \dots, n\}$.

Daraus schliesst man, dass die Funktion f in der Form

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + \frac{f'(0)}{1!} x + f(0)$$

dargestellt werden kann. Das heisst, dass sich die Funktion global durch die lokale Eigenschaft „Ableitung bei $x = 0$ “ eindeutig festlegen lässt. Da fast jede Funktion näherungsweise als Reihe dargestellt werden kann, definiert man

Definition 6. Sei f eine bei $x = 0$ definierte und beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann heisst das Polynom

$$T(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

MacLaurin-Reihe. Soll nicht zwangsläufig um $x = 0$ entwickelt werden, so spricht man allgemein von der **Taylor-Reihe**.

Übung 35. Steht jede Taylorreihe einer Funktion f die Funktion auch selber dar? In andern Worten, konvergiert die Taylorreihe von f gegen f ?

Beispiel 4. Wir betrachten einige Funktionen und deren Taylorentwicklung um $x = 0$.

(a) Für $f(x) = \sin(x)$ erhalten wir die bereits bekannte Darstellung

$$T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Es scheint so, als ob $\sin(x)$ als Taylorreihe darstellbar wäre.

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ wird zu

$$T(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

was wir aus der Theorie über Folgen & Reihen kennen. Damit kann aber die Taylorentwicklung höchstens für $-1 < x < 1$ gegen f konvergieren.

(c) Betrachten wir $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$ mit seiner stetigen Fortsetzung $f(0) = 0$, erhalten wir

$$T(x) = 0.$$

Daher wird also f nur in $x = 0$ durch ihre Taylorreihe approximiert.

Definition 7. Eine Funktion f heisst **analytisch**, falls sie in jedem Punkt durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt werden kann.

Zu den analytischen Funktionen gehören die Polynome, die trigonometrischen und Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen, sowie die aus ihnen durch Grundrechenarten erzeugten Funktionen.

Übung 36. Bestimme die Taylorreihen um $x = 0$ der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \ln(1+x)$

Für die Taylorentwicklung in einem Punkt $x_0 \neq 0$ einer Funktion f findet man

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

oder kurz

$$T_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Damit kann f stückweise durch eine Taylorentwicklung an verschiedenen Stellen x_0 gut approximiert werden.

Bemerkung. In vielen Belangen der Naturwissenschaften reicht ein Taylorpolynom recht niedrigen Grades zur Approximation von f in einer gewählten Umgebung.

Übung 37. Bestimme die Taylorentwicklung bei x_0 von

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Berechne dazu zuerst $f^{(k)}(x)$. Notiere dann $T_{x_0}(x)$ in geschlossener Form und explizite die ersten drei Summanden. Berechne anschliessend Näherungen für z.B. $x_0 = -2, 0, 2, \dots$

4.1 Rechnen mit Potenzreihen

Schaut man sich die ersten vier nichtverschwindenden Terme der MacLaurin-Reihe von $\sin(x^2)$ an, so stellt man sich die Frage, ob diese Funktion nicht einfacher zu entwickeln wäre.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x^2) \\ f'(x) &= 2x \cos(x^2) \\ f''(x) &= 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2) \\ f'''(x) &= -8x^3 \cos(x^2) - 12x \sin(x^2) \\ f^{(4)}(x) &= 16x^4 \sin(x^2) - 48x^2 \cos(x^2) - 12 \sin(x^2) \end{aligned}$$

Somit $T(x) = x^2 + \dots$ und die weiteren Terme sind mühsam zu bestimmen. Einfacher geht es aber mit folgendem Satz.

Satz 4.0. *Innerhalb des Konvergenzradius dürfen Potenzreihen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, gliedweise differenziert und integriert und in den Potenzreihen substituiert werden.*

Beispiel 5.

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

Beispiel 6.

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) \\&= x - \left(\frac{1}{2!1!} + \frac{1}{3!} \right) x^3 + \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{4!1!} + \frac{1}{3!2!} \right) x^5 - \dots \\&\stackrel{*}{=} x - \frac{4}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 - \frac{64}{7!} x^7 + \dots \\&= \frac{1}{2} \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots \right) \\&= \frac{1}{2} \sin(2x)\end{aligned}$$

Wir begründen noch die Umformung bei *:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k)! \cdot 1!} + \frac{1}{(2k-1)! \cdot 2!} + \dots + \frac{1}{(k+1)!k!} \\&= \frac{1 + (2k+1) + \frac{(2k+1)2k}{2!} + \dots + \frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}}{(2k+1)!} \\&= \frac{\binom{2k+1}{0} + \binom{2k+1}{1} + \dots + \binom{2k+1}{k+1}}{(2k+1)!} \\&= \frac{2^{2k+1}/2}{(2k+1)!} \\&= \frac{2^{2k}}{(2k+1)!}\end{aligned}$$

Übung 38. Gib die ersten 4 nicht verschwindenden Terme der MacLaurin-Reihe für

(a) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

(b) $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

(c) $h(x) = \ln(x)$

Ist eine Funktion f durch ihre Taylorreihe darstellbar, so kann auf beiden Seiten der Gleichung abgeleitet oder integriert werden. Damit erhält man neue Beziehungen.

Beispiel 7. Sei

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

dann folgt bei Ableitung die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte „Warten-auf-einen-Erfolg-Wahrscheinlichkeit“

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

Integriert man, so erscheint

$$\int f dx = -\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

Bemerkung. Als Zückerchen erhält man Näherungen für Stammfunktionen nicht geschlossen integrierbaren Funktionen wie zum Beispiel

$$\int e^{x^2} dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots\right) dx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \dots$$

Nun ist auch klar, dass sich Taylorreihen eignen, um numerische Lösungen von Differentialgleichungen zu finden. Wir verfolgen

Beispiel 8. Betrachte

$$y'' = y - x^3$$

mit den Anfangsbedingungen $f(0) = a_0 = 0$ und $f'(0) = a_1 = 6$. Wir wählen als Ansatz eine Potenzreihe

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

mit zweiter Ableitung

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots$$

Daraus erhalten wir

$$y - x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + (a_3 - 1)x^3 + \dots$$

Es folgt

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_0, & a_3 &= \frac{1}{6}a_1, \\ a_4 &= \frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0, & a_5 &= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6}a_1 - 1\right) \end{aligned}$$

also

$$y = 6x + x^3.$$

Übung 39. Löse folgende Differentialgleichungen mit einem Potenzreihenansatz unter der Annahme, dass $x(t)$ bzw. $y(x)$ als Taylorreihe darstellbar ist.

(a) $\dot{x} = \alpha x$

(b) $\dot{x} = gt$

(c) $\dot{x} = k\sqrt{x}$

(d) $y'' = \frac{6y-2}{x^2} + 6x^2$

(e) $y = xy' - x^2$ mit $y_0 = 0$

4.2 Komplexe Exponentialfunktion

Mit Hilfe der Taylorentwicklung für

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

müsste

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

gelten. Und damit, man kann es nicht oft genug notieren,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Via

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \operatorname{cis} b$$

erahnt man, dass die Ableitungsregeln für Exponentialfunktionen im Komplexen erhalten bleiben.

4.3 Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke

Taylorentwicklungen können bei Grenzwert-Problemen helfen, wenn die direkte Berechnung auf Ausdrücke der Art

$$\frac{0}{0} \quad \text{oder} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

führt.

Beispiel 9.


$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \dots = 1$$

Übung 40. Bestimme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}.$$

Allgemein ist diese Verfahrensweise bekannt unter dem Namen „Regel von de L'Hospital“. ■

Satz 4.0 (Bernoulli-De L'Hospital). Sei


$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$$

mit n, z differenzierbar und $n(x_0) = z(x_0) = 0$ oder beide für $x \rightarrow x_0$ bestimmt divergent. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{z(x)}{n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{z'(x)}{n'(x)}.$$

Beweis. Übung. Notiere die Taylorentwicklung von n und z bei x_0 , falls $n(x_0) = z(x_0) = 0$. Für $n(x_0) = \pm\infty = z(x_0)$ betrachte man

$$f(x) = \frac{1/z(x)}{1/n(x)}.$$

□

Übung 41. Bestimme

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$
- (b) die Ableitung von e^x mit Taylor
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ (Tipp: Schreibe als e -Funktion)
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x-1)}{e^x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \ln x$
- (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

5 Bogenlänge

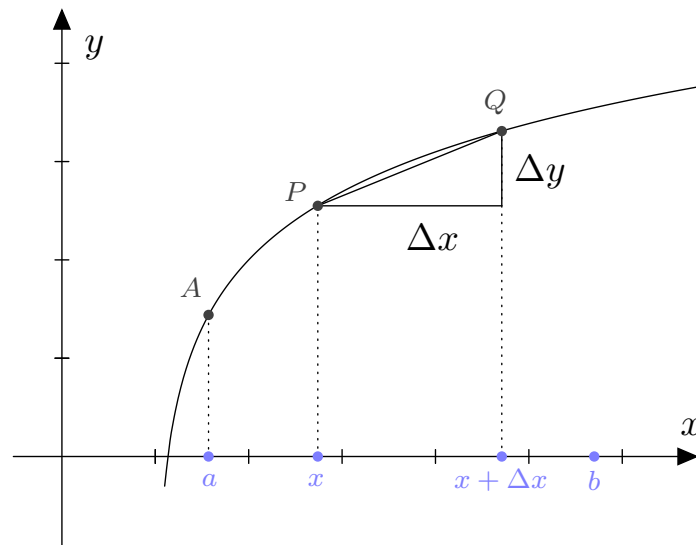
Zur Herleitung der Formel betrachten wir den Graphen einer im Intervall $[a, b]$ differenzierbaren Funktion f . Sei $L_a(x)$ die Länge des Bogens von der Stelle a bis zur Stelle x ; betrachte auch Abbildung 6 auf Seite 33.

Dann ist $\hat{A}Q = L_a(x + \Delta x)$ und $\hat{P}Q = \hat{A}Q - \hat{A}P = L_a(x + \Delta x) - L_a(x)$. Aus der Graphik erkennt man $\overline{PQ} \leq \hat{P}Q$. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgt

$$\overline{PQ} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right)} = \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

Daraus folgt

$$\Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \leq L_a(x + \Delta x) - L_a(x)$$

Abbildung 6: Illustration der Bogenlänge einer Funktion f

und nach Division mit Δx

$$\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \leq \frac{L_a(x + \Delta x) - L_a(x)}{\Delta x}.$$

Nun lassen wir Q gegen P gehen:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} = f'(x)^2$$

und

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{L_a(x + \Delta x) - L_a(x)}{\Delta x} = L'_a(x)$$

wobei nun Gleichheit für die Längen gilt, $\overline{PQ} = \hat{PQ}$. Nun muss man noch eine Stammfunktion für $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ finden, dann haben wir auch $L_a(x)$. Somit folgt für die Bogenlänge entlang f von a nach b

$$L_a(b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Bemerkung. An f muss zusätzlich zur Differenzierbarkeit auf (a, b) auch noch die Stetigkeit der Ableitung vorausgesetzt werden.

6 Schwingungen

6.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Für die Auslenkung eines Massenpunktes m gilt nach dem Hook'schen Gesetz

$$F = -k_0 x$$

wobei k_0 die Federkonstante bezeichnet. Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$\begin{aligned} ma &= -k_0 x \\ m\ddot{x} &= -k_0 x \end{aligned}$$

was wir mit $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}$ in der Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

schreiben. Als Lösungsansatz wählen wir

$$x(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Abbildung 7: Schwingungen

Eingesetzt ergibt dies $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ und damit

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0.$$

Wir erhalten also die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{i\omega_0 t} \\ x_2(t) &= C_2 e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned}$$

die für $\omega_0 \neq 0$ linear unabhängig sind. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist dann eine Linearkombination

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Da $x(t)$ eine *reelle* Funktion sein muss, impliziert das für komplexe Konstanten $C_1 = C_2^*$. Wir setzen $C_1 = a + ib$ und $C_2 = a - ib$ und erhalten mit der Euler'schen Formel die allgemeine Lösung

$$x(t) = 2a \cos(\omega_0 t) - 2b \sin(\omega_0 t)$$

oder kürzer

$$x(t) = k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t).$$

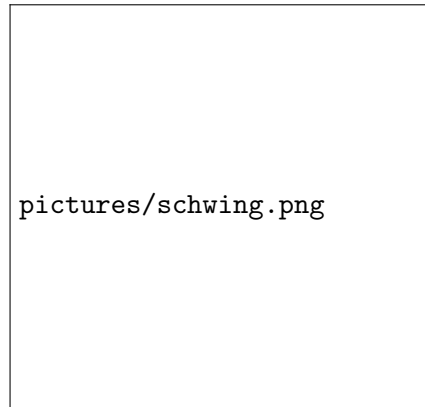
Unter Kenntnis des Additionstheorems

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

lässt sich k_1 als $x_0 \sin \varphi$ und k_2 als $x_0 \cos \varphi$ auffassen, was

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

liefert.



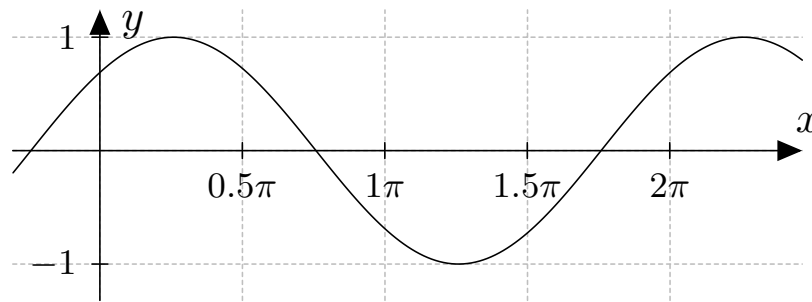


Abbildung 8: Freie ungedämpfte Schwingung

6.2 Freie gedämpfte Schwingung

Wie im vorangegangenen Kapitel betrachten wir eine Federschwingung; jetzt aber gedämpft durch eine Kraft, die wir proportional zur Geschwindigkeit des Massenpunktes annehmen. Dies beobachtet man zum Beispiel bei einer laminaren Strömung eines Mediums um den schwingenden Körper. Die Bewegungsgleichung lautet jetzt

$$ma = -k_0x - \beta\dot{x}.$$

Umschreiben:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + k_0x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k_0}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

mit $\frac{\beta}{m} = 2k$ und $\frac{k_0}{m} = \omega_0^2$. Im Falle $k \geq 0$ und $\omega_0^2 \geq 0$ wählen wir den Lösungsansatz

$$x(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Eingesetzt ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}.$$

Wegen der Präsenz von zwei Variablen, k und ω_0 , müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden.

Fall 1 Ist $k > \omega_0$, so haben wir starke Dämpfung; der sogenannte *Kriechfall*. λ_1 und λ_2 sind somit reell und voneinander verschieden. Die Lösung in diesem Fall ist

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Für $k_1 = 20$, $k_2 = -20$, $\lambda_1 = -0.5$ und $\lambda_2 = -2.5$ ergibt sich folgendes Bild.

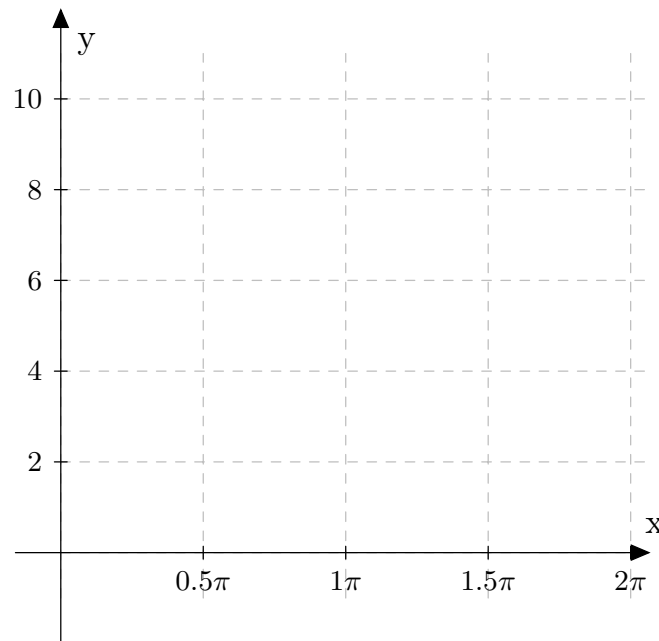


Abbildung 9: Freie gedämpfte Schwingung: Kriechfall

Fall 2 Mit $k = \omega_0$ erreicht man starke Dämpfung, der sogenannte *aperiodische Grenzfall*; $\lambda_1 = \lambda_2 = -k < 0$. Als Lösung erhalten wir damit

$$x(t) = k_1 e^{-kt} + k_2 t e^{-kt}.$$

Der Bewegungsablauf gleicht also dem vom Fall 1. In diesem Fall kommen schwingfähige Systeme am schnellsten zur Ruhe, was zum Beispiel bei der Konstruktion von Messgeräten/Zeigerinstrumenten erreicht werden will. Unten ist der Verlauf für $k_1 = 0, k_2 = 10$ und $k = -2.5$ illustriert.

Fall 3 Schwache Dämpfung, einen sogenannten *Schwingfall*, erhält man für $k < \omega_0$. Dabei sind λ_1 und λ_2 konjugiert komplexe Wurzeln, $\lambda_{1,2} = -k \pm \omega_1 i$ mit $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$. Die Lösung ist

$$x(t) = e^{-kt}(k_1 \cos(\omega_1 t) + k_2 \sin(\omega_1 t))$$

oder, ähnlich der Behandlung freier Schwingungen mittels Additionstheorem,

$$x(t) = A e^{-kt} \sin(\omega_1 t + \varphi),$$

mit $A^2 = k_1^2 + k_2^2$ und $\tan \varphi = \frac{k_1}{k_2}$. Dies ist die gedämpfte harmonische Schwingung; es folgt $T > T_0$.

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ zeigt, dass im Falle der gedämpften Schwingung die Kreisfrequenz ω_1 kleiner als die Kreisfrequenz ω_0 der freien Schwingung ist. Charakterisiert wird

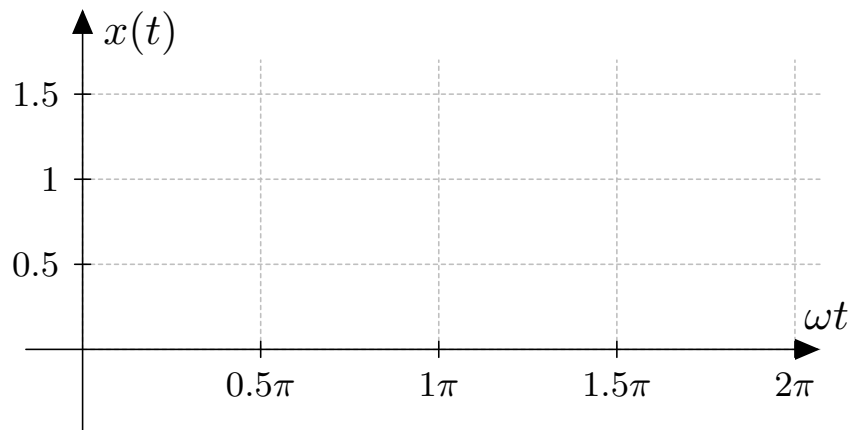


Abbildung 10: Freie gedämpfte Schwingung: aperiodischer Grenzfall

das Verhalten der gedämpften Schwingung durch das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender, gleichgerichteter Amplituden:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x(t_0)}{x(t_0 + T)} = e^{kT}$$

mit dem sogenannten logarithmischen Dekreten $\Lambda = kT$.

6.3 Erzwungene Schwingung

Wir betrachten eine gedämpfte Schwingung, die periodisch mit der Kraft $F = ma_0 \cos(\omega t)$ angetrieben wird. Die Schwingungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos(\omega t).$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zur Lösung kommen wir wie gelernt

- (a) lösen der homogenen Gleichung
- (b) ergänzen der Lösung mit einer partikulären

Die homogene Differentialgleichung wurde im Kapitel zur freien, gedämpften Schwingung hergeleitet. Für geringe Dämpfung ergab sich — wenn wir nur den homogenen Teil benutzen —

$$x_{hom} = Ae^{-kt} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

mit $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

Um die allgemeine Lösung zu gewinnen, bleibt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bestimmen. Als Ausgangspunkt dafür nutzen wir eine

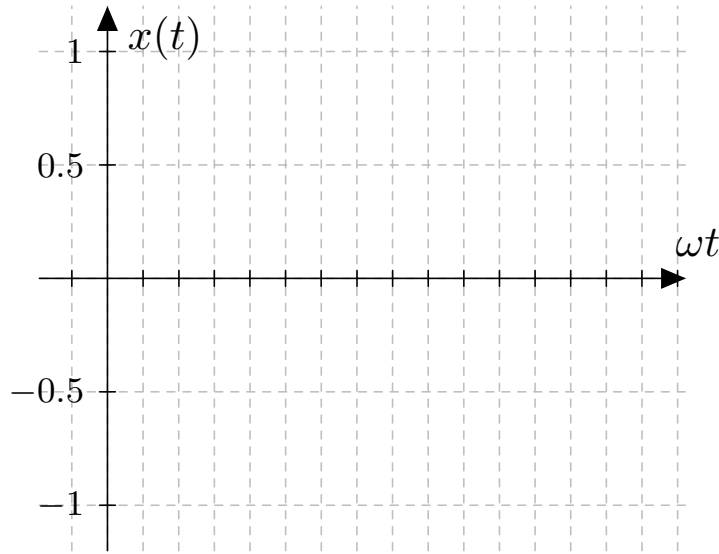


Abbildung 11: Gedämpfte harmonische Schwingung

experimentelle Beobachtung: Das System schwingt demnach immer mit der Erregerfrequenz ω , die Eigenfrequenz ω_1 spielt mit der Zeit keine Rolle. Daher wählen wir den Lösungsansatz

$$x_{part} = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t).$$

Wir kommen mit einer einfachen Rechnung zum Ziel, wenn wir einen komplexen Ansatz wählen. Wegen $a_0 \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(a_0 e^{i\omega t})$ wählen wir

$$x_{part} = C e^{i\omega t}.$$

Damit ergibt sich der komplexe Ansatz

$$-\omega^2 C e^{i\omega t} + 2ki\omega C e^{i\omega t} + \omega_0^2 C e^{i\omega t} = a_0 e^{i\omega t}.$$

Das heisst $C(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ik\omega) = a_0$. Zur Analyse unterscheidet man zwei Fälle — Klammersausdruck gleich oder ungleich 0.

Fall 1 Sei $\omega_0^2 - \omega^2 + 2ik\omega \neq 0$, das heisst $\operatorname{Re}(\omega_0^2 - \omega^2) \neq 0$ oder $\operatorname{Im}(2ik\omega) \neq 0$. Somit

$$C = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \cdot 2k\omega},$$

was komplex erweitert

$$C = \frac{a_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} - i \frac{2k\omega a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}$$

ergibt. Damit erhalten wir für unseren Ansatz

$$\operatorname{Re}(Ce^{i\omega t}) = \frac{a_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{2k\omega a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \sin(\omega t).$$

Eine weitere Vereinfachung mittels des Additionstheorems

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

kann vorgenommen werden, wenn man den Faktor

$$\frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}$$

ausklammert. Erst dann lässt sich die für die Winkelfunktion notwendige Bedingung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erfüllen. Es folgt

$$\operatorname{Re}(Ce^{i\omega t}) = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \cdot (\cos \alpha \cos(\omega t) - \sin \alpha \sin(\omega t))$$

mit

$$\cos \alpha = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}$$

und

$$\sin \alpha = -\frac{2k\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}.$$

Wir haben endlich

$$\begin{aligned} x_{part} &= \operatorname{Re}(Ce^{i\omega t}) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

mit $\tan \alpha = -\frac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ und damit für die Lösungsgesamtheit die allgemeine Lösung

$$x(t) = Ae^{-kt} \sin(\omega_1 t + \varphi) + \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \cos(\omega t + \alpha)$$

Bemerkung. Für grosse Zeiten strebt der Anteil der homogenen Lösung gegen Null. Das bedeutet, dass im stationären Zustand das Verhalten des Systems durch die partikuläre Lösung bestimmt ist.

Fall 2 Man erhält für $\omega_0^2 = \omega^2$ mit $k = 0$ Resonanz. Wegen des Anwachsens der Amplitude versucht man einen partikulären Ansatz mit Wachstum,

$$x_{part} = Cte^{i\omega_0 t}.$$

Nach Einsetzen folgt

$$2Ci\omega_0 = a_0$$

oder

$$C = -\frac{a_0}{2\omega_0}i.$$

Wir erhalten

$$x_{part} = \operatorname{Re}(Cte^{i\omega_0 t}) = \frac{a_0}{2\omega_0}t \sin(\omega_0 t)$$

und für die Lösungsgesamtheit

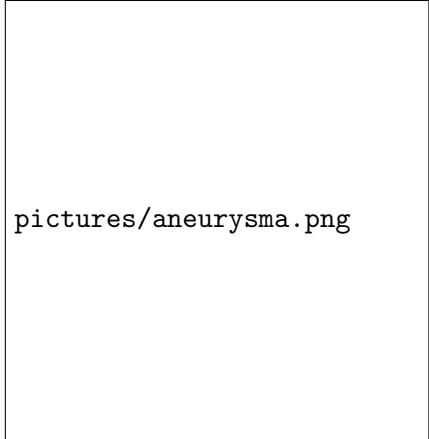
$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0}t \sin(\omega_0 t) + k_1 \cos(\omega_0 t) + k_2 \sin(\omega_0 t).$$

Bemerkung. Hier sorgt der partikuläre Lösungsanteil für grosse Ausschläge, die man im Resonanzfall erwartet.

A Numerische Verfahren

Um Lösungen zu Differentialgleichungen zu finden, Trajektorien und zeitabhängige Graphen zu plotten, sind wir auf die Hilfe von leistungsstarken Computern und Software angewiesen. Einige Packages, wie zum Beispiel **Mathematica**, liefern wenn immer möglich analytische Lösungen. Viele Probleme jedoch können nicht analytisch gelöst werden. Deshalb interessieren numerische Verfahren, die Näherungslösungen liefern. Diese wiederum sollten natürlich möglichst nahe an die exakte Lösung kommen.

Einige gewichtige Nachteile treten bei computergenerierten Lösungen auf, insbesondere falls die Lösungen numerisch berechnet werden. Mögliche Fehler sind



pictures/aneurysma.png

- Rundungsfehler, die mit steigender Anzahl Berechnungen zunehmen.
- Diskretisierungsfehler, verursacht durch die Einschränkung auf eine Teilmenge bzw. eine endliche Anzahl von Punkten.
- Durch das verwendete Näherungsverfahren verursachte Abweichungen von der exakten Lösung.

Es gibt zahlreiche numerische Verfahren zur Bestimmung von Ableitungen, Integralen, Summen etc. Wir wollen uns im Folgenden einen Auszug aus der Vielfalt der Verfahren anschauen und kurz auf deren Genauigkeit abschätzen.

A.1 Numerische Standardverfahren

Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f(t, y)$$

mit Startwert $y_0 = y(t_0)$ und wenden darauf die folgenden Verfahren an, um $y(t)$ über einem Zeitintervall $t_0 < t < T$ numerisch abzuschätzen.

Wir beginnen mit einer simplen Methode, dem Euler-Verfahren, um die grundsätzliche Idee eines Näherungsverfahrens zu erfassen und besprechen dann eine weit verbreitete Methode, das Runge-Kutta-Verfahren.

A.1.1 Das Euler-Verfahren

Klar ist, dass ein Computer nicht jeden Punkt einer Kurve berechnen kann, weil es ja unendlich viele davon gibt. Also beschränkt sich ein Näherungsverfahren immer auf eine diskrete Teilmenge. Euler's Methode beschreibt eine sehr einfache Annäherung an die Lösung einer Differentialgleichung für eine endliche Anzahl von Punkten. Die Teilschritte sind

1. Teile das betrachtete Intervall in N gleich grosse Abschnitte und setze für $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$t_n = t_0 + nh,$$

wobei $h = \frac{T-t_0}{N}$ die Schrittweite ist.

2. Ausgehend vom Punkt $(t_0 | y_0)$ auf der Kurve approximiert man $y_n = y(t_n)$. Eine Näherung für y_1 bestimmen wir via der Tangente durch $(t_0 | y_0)$ bis t_1 . Also

$$y_1 \approx y_0 + hf(t_0, y_0)$$

mit

$$y' = f(t_0, y_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}.$$

3. Bestimme so $y_2 \approx y_1 + f(t_1, y_1)$ und weiter y_3, \dots, y_n .

Allgemein beschrieben hat man das rekursive Schema

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

mit

$$t_{n+1} = t_n + h$$

für $0 \leq n \leq N-1$.

Beispiel 10. Wir bestimmen mit dem Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.2)$ der Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = y^2 + t$$

mit Startwert $y(0) = 1$.

Hier ist $f(t, y) = y^2 + t$. Für $n = 0$ ist

$$y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1.1.$$

Mit $n = 1$ erhalten wir

$$y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1.231.$$

Übung 42. Rechne y_1 und y_2 aus obigem Beispiel nach.

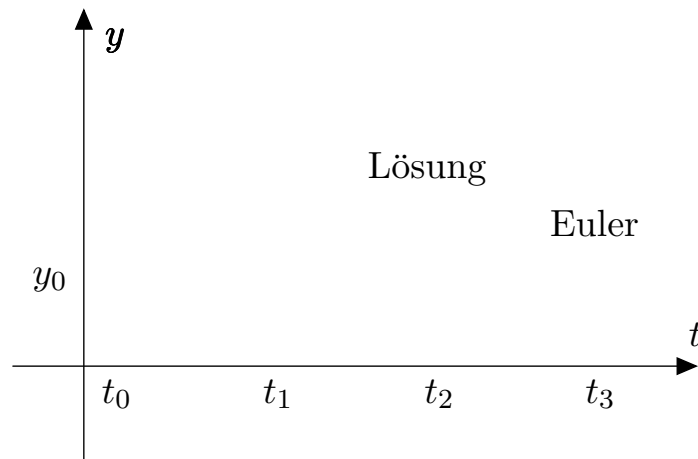


Abbildung 12: Das Euler-Verfahren

Vergleichen wir die Taylor-Entwicklung von

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy_n}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + \dots$$

mit der Euler-Methode, so sehen wir, dass letztere aus den ersten zwei Summanden besteht. Man sagt: Das Euler-Verfahren ist eine first-order Approximation. Nun versuchen wir aufgrund dieser Beobachtung den Fehler abzuschätzen und möglicherweise durch Anpassung der Schrittweite den Fehler zu kontrollieren.

Euler liefert den Näherungswert

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

und Taylor den wahren Wert

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta, y(\zeta_n))$$

wobei ζ_n zwischen t_n und t_{n+1} liegt. Subtrahieren wir Euler von Taylor erhalten wir den Fehlerterm

$$E_{n+1} = y(t_n) - y_n + h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)) + \frac{h^2}{2} f'(\zeta_n, y(\zeta_n)).$$

Man kann zeigen, dass dieser Fehlerterm durch

$$E_{n+1} \leq \frac{Dh}{2L} (e^{T-t_0} - 1)$$

nach oben beschränkt ist, wobei L eine obere Schranke für f und D eine obere Schranke für f' über dem Intervall $[t_0, T]$ ist und f gutmütig sowie $T = t_0 + (N - 1)h$.

Wegen $\lim_{h \rightarrow 0} E_{n+1} = 0$ liegt die Vermutung nahe, dass die Genauigkeit mit kleiner werdenden Schrittweite zunimmt; was auch bewiesen wurde. Aber, da eine kleinere Schrittweite mit mehr Berechnungen einhergeht, und der Computer dabei öfter Runden muss, nehmen diese Rundungsfehler zu. Um das beste Resultat zu erzielen sollten wir also ein Optimum für die Schrittweite finden, so dass die Kombination der beiden Fehler minimiert wird.

A.1.2 Das Runge-Kutta-Verfahren

One-step Algorithmen, die durchschnittliche Steigungen einer Funktion $f(t, y)$ in zwei oder mehreren Punkten über einem Intervall $[t_{n-1}, t_n]$ verwenden um y_n zu berechnen, heissen **Runge-Kutta Methoden**. Sie sind auch charakteristisch für sogenannte *predictor-corrector* Methoden, weil sie eine Vorhersage für folgende Werte geben und danach mit einer Serie von Gewichten diese Werte korrigieren.

Eine weit verbreitete Methode ist das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung (RK4). Es verwendet gewichtete durchschnittliche Steigungen um die Mittel- und Endpunkte von Teilintervallen. Algorithmisch formuliert

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3)\end{aligned}$$

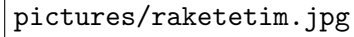
Eine weitere Runge-Kutta Methode mit einem einfacheren Prinzip der Mitteilung ist das **Heun's-Verfahren**. Wie das Euler-Verfahren ist es ein one-step Algorithmus, aber es ist genauer:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

mit

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\k_2 &= f(t_n + h, y_n + hk_1)\end{aligned}$$

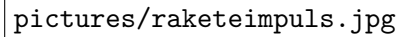
Übung 43. Zeichne eine Illustration zum Heun-Verfahren.



pictures/raketetm.jpg

B Ein Raketenmodell

Wir betrachten das klassische „Pfupfmodell“ einer Rakete der Masse m mit Geschwindigkeit v und verwenden den Impulserhaltungssatz. Also notieren wir jeweils den Impuls p vor und nach dem „Stoss“ und vergleichen.



pictures/raketeimpuls.jpg

Abbildung 13: Pfupf-Modell einer Rakete

Mit obiger Notation gilt:

$$p = (m - \Delta m) \cdot v' + \Delta m \cdot (v' - u)$$

und unmittelbar folgt für $p = mv$

$$mv = mv' - \Delta mu$$

wobei v' die Geschwindigkeit der Rakete nach dem Stoss und u die Ausströmgeschwindigkeit des Gases bezeichnet.

Davon hat man noch nicht viel. Berechnen wir vielleicht die Geschwindigkeit bzw. den Geschwindigkeitsverlauf der Rakete. Wir lösen

$$mv = mv' - \Delta mu$$

nach $v' - v$ und bezeichnen diese Differenz mit Δv ; explizit

$$\Delta v = \frac{\Delta mu}{m}.$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot u.$$

Auch das Vorzeichen kann plausibilisiert werden; anyway. Wir integrieren, um die Geschwindigkeit zu erhalten:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{m_0}^m -\frac{u}{m} dm.$$

Also gilt für die Geschwindigkeit der Rakete mit Anfangsmasse m_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m} \right).$$

Dieser Ausdruck wird auch **1. Raketengleichung** genannt. Sie gibt die Geschwindigkeit einer Rakete im Vakuum ohne Gravitationseinfluss an.

B.1 Analyse

B.1.1 Geschwindigkeitsverlauf

Wir zeichnen vorerst das v - t -Diagramm. Dazu müssen wir beachten, dass m auch von der Zeit abhängt, $m = m(t)$.

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right).$$

Nehmen wir einen zeitlich konstanten Gasausstoß μ an, so gilt für die Masse der Rakete zur Zeit t

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

und damit für die Geschwindigkeit

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right).$$

So, setzen wir $v_0 = 0$, $u = 2500$, $m_0 = 2200$ und $\mu = 2.5$ und schauen uns Abbildung ?? an.

Man sieht, dass die Rakete immer stärker beschleunigt. So lange, bis der Brennstoff aufgebraucht ist. Wie lange dauert das? Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir uns m_0 vor und schreiben

$$m_0 = m_{\text{leer}} + m_{\text{brenn}}.$$

Dabei ist natürlich zu beachten, dass m_{leer} inklusive Nutzlast aufzufassen ist. Ist zum Beispiel $m_{\text{leer}} = 200$, so erhält man für $m_{\text{brenn}} = \mu \cdot t_{\text{brenn}}$ die Brenndauer

$$t_{\text{brenn}} = \frac{m_{\text{brenn}}}{\mu}.$$

Für obige Werte hat man $t_{\text{brenn}} = 800$ Sekunden.

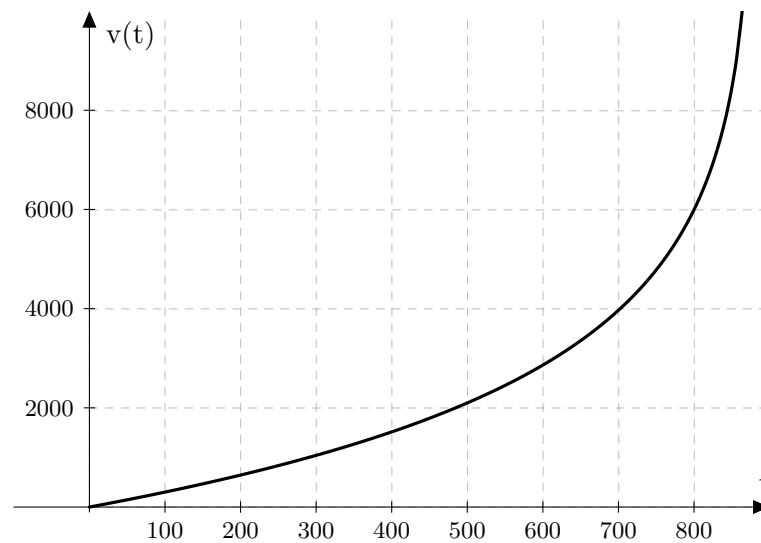


Abbildung 14: Geschwindigkeitsverlauf der Rakete

B.1.2 Brennschlussgeschwindigkeit

Von Interesse ist auch, welche Endgeschwindigkeit die Rakete erreicht. Wir setzen also im Geschwindigkeitsverlauf $m_0 = m_{\text{leer}}$, da ja kein Brennstoff mehr vorhanden ist. Numerisch ergibt sich

$$v_e = v_0 + u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}} \right) \approx 6000 \text{ m/s}$$

Man will die Endgeschwindigkeit optimieren. Sie ist proportional zur Ausströmgeschwindigkeit und hängt logarithmisch vom Verhältnis Masse beim Start zu Masse nach Brennschluss ab. Mehr Erkenntnis gibt unser Model nicht her.

B.1.3 Nutzlasten

Will man Material in eine Umlaufbahn bringen, so muss man grosse Endgeschwindigkeiten erreichen können. Wir betrachten, wiederum für $v_0 = 0$, das Verhältnis von Endgeschwindigkeit zu Gasgeschwindigkeit:

$$\frac{v_e}{u} = \ln \left(\frac{m_0}{m_{\text{leer}}} \right) = \ln \left(1 + \frac{m_{\text{brenn}}}{m_{\text{leer}}} \right).$$

Also ist der Zusammenhang vom Typ

$$v_v = \ln(1 + m_v)$$

mit $v_v = \frac{v_e}{u}$ und $m_v = \frac{m_{\text{brenn}}}{m_{\text{leer}}}$ oder in der Anschauung in Abbildung ??.

Selbst bei einem Verhältnis von 50 von Brennstoff zu Leermasse erhält man nur eine 4mal so grosse Endgeschwindigkeit wie die Ausströmgeschwindigkeit.

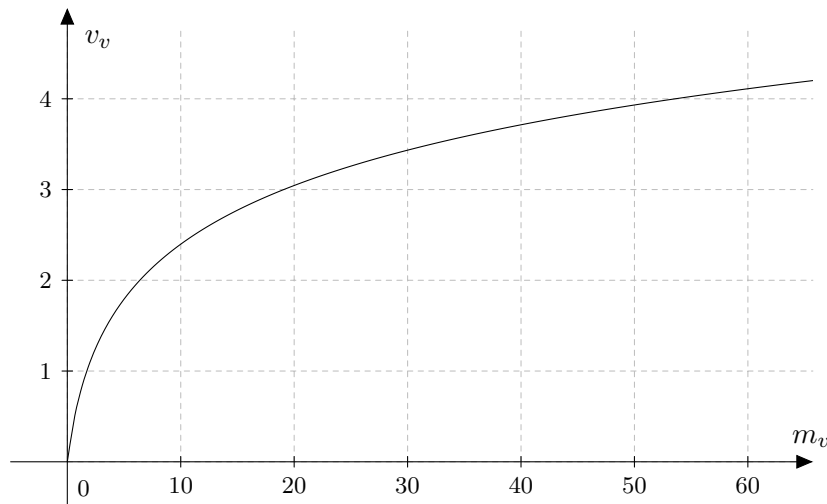


Abbildung 15: Verhältnisgleichung für Nutzlasten

Bemerkung. Es ist problematisch, grosse Nutzlasten auf hohe Endgeschwindigkeiten zu bringen.

Folgend einige Werte von Ausströmgeschwindigkeiten, die heute erreicht werden können:■

Feststoffrakete 2000 m/s

Flüssigbrennstoffrakete 3200 m/s

Hybride 4000 m/s

Nun, welche Geschwindigkeit muss eine Rakete erreichen, um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen — die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit? Mit Energieerhaltung

$$G \cdot \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

erhält man

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Um den Einflussbereich der Erde zu verlassen, muss eine Rakete eine Geschwindigkeit von 11.2 km/s erreichen.

Bemerkung. Die konstruktive Obergrenze für eine einstufige Rakete liegt bei $15 \div 1$, womit klar ist, dass man mit einer einstufigen Rakete die Fluchtgeschwindigkeit (auch 2. kosmische Geschwindigkeit) nicht erreichen kann.

B.2 Rakete unter konstantem Schwerkräfteinfluss

Für einen senkrechten Wurf nach oben gilt

$$v(t) = v_0 - gt$$

und somit für die Rakete

$$v(t) = u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) - gt.$$

Mit den Werten $u = 1000$, $m_0 = 1100$, $\mu = 10$, $g = 9.81$ berechnen wir noch die Brenndauer t' via

$$m_{brenn} = \mu t'$$

und finden $t' = 100$. Nach Brennschluss haben wir

$$v(t) = v_{brenn} - gt$$

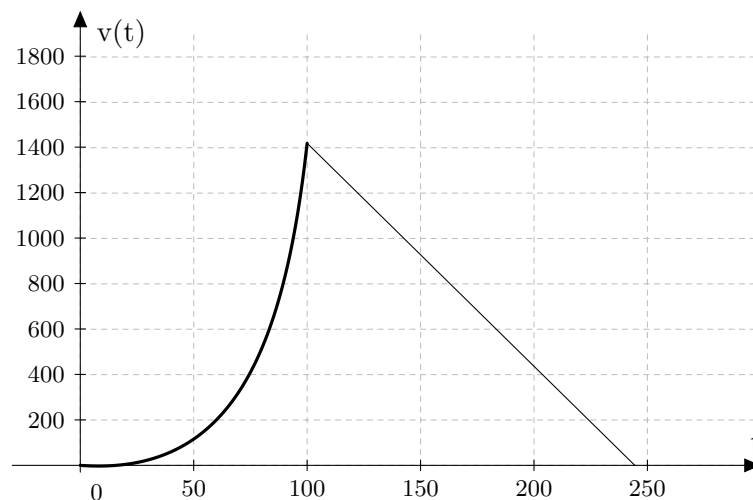
wobei v_{brenn} die Brennschlussgeschwindigkeit bezeichnet. Da dieser Geschwindigkeitsverlauf erst nach Brennschluss stattfindet, verschieben wir die Funktion um die Zeit t'

$$v_{nach}(t) = v(t') - g(t - t')$$

Insgesamt haben wir

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v(t) & t < t' \\ v_{nach}(t) & t \geq t' \end{cases}$$

Der Graph sieht folgendermassen aus:



Wie hoch steigt bei diesem Geschwindigkeitsverlauf die Rakete? Wir bestimmen den Steigungsverlauf als Integral über den Geschwindigkeitsverlauf:

$$s(t) = \int_0^t \tilde{v}(\tau) d\tau.$$

Vor Brennschluss haben wir

$$s(t) = \int \left[u \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) - gt \right] dt$$

und danach

$$s(t) = \int [v(t') - g(t - t')] dt.$$

Kompakt formuliert

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} -\frac{g}{2}t^2 + ut + u\left(t - \frac{m_0}{\mu}\right) \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) & t < t' \\ -\frac{g}{2}t^2 + (gt' + v(t'))t & t \geq t' \end{cases}$$

Bemerkung. Es gibt sicher schöner Modelle...

C Plots ausgewählter Lösungen

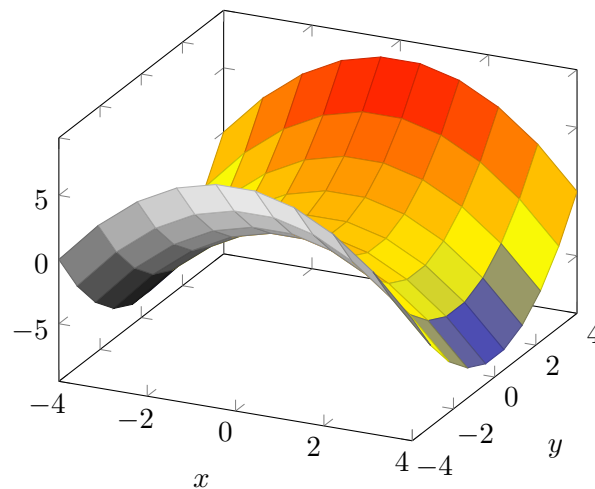


Abbildung 16: Potential $F(x, y) = -0.5x^2 + 0.5y^2$

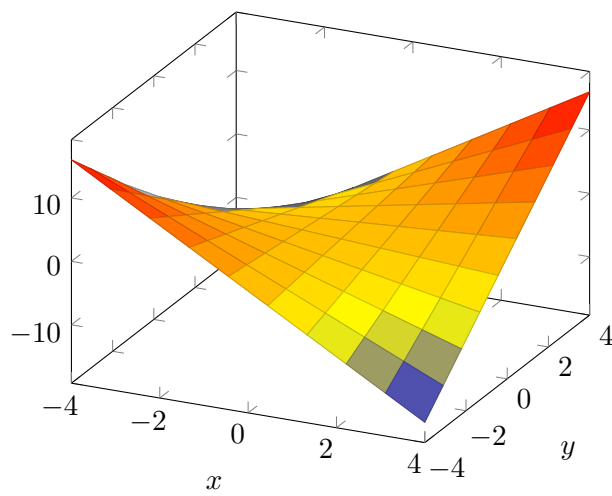


Abbildung 17: Potential $F(x, y) = xy$

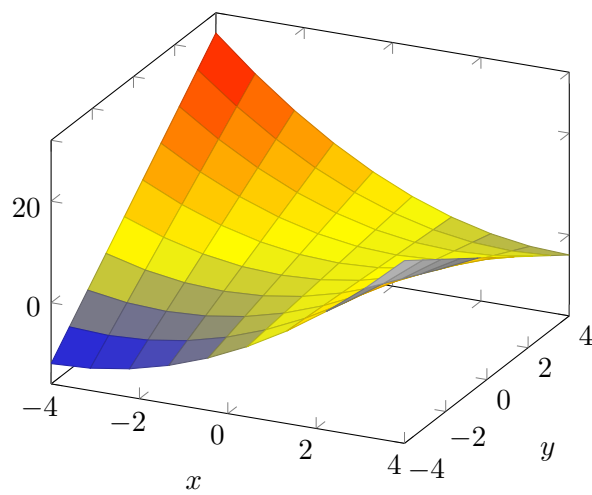


Abbildung 18: Potential $F(x, y) = 0.5x^2 - xy + y$

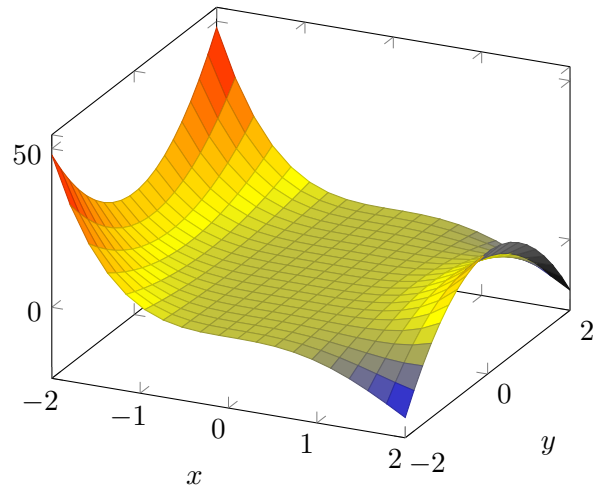


Abbildung 19: Potential $F(x, y) = x^4 + x^3y^2$

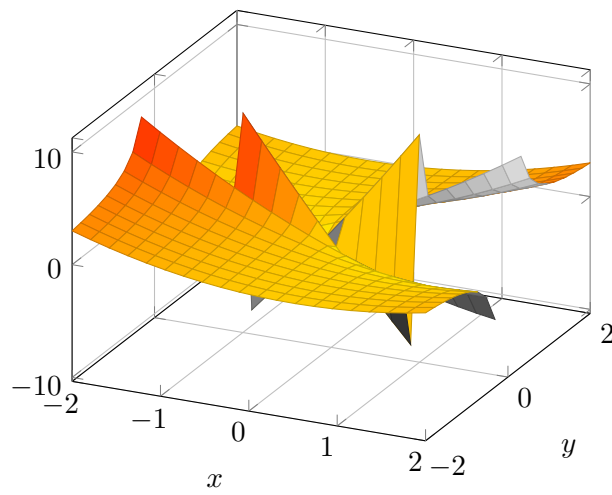


Abbildung 20: Potential $F(x, y) = 0.5x^2 + \frac{x}{y}$

Schwingende Saite als 1. Oberschwingung

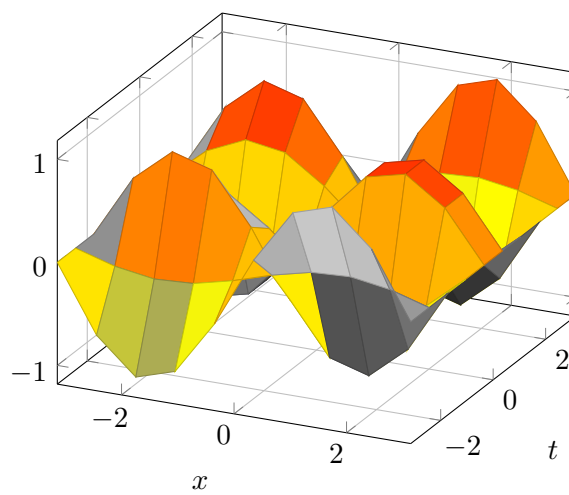


Abbildung 21: Potential $u(x, t) = \sin(x) \cdot \cos(2t)$ der schwingenden Saite

Abbildungsverzeichnis

1	Geige	5
2	Das mathematische Fadenpendel	6
3	Die Traktrix	14
4	First Law of Cartoon Physics	24
5	MacLaurin-Reihe von $\cos(x)$	27
6	Illustration der Bogenlänge einer Funktion f	33
7	Schwingungen	34
8	Freie ungedämpfte Schwingung	35
9	Freie gedämpfte Schwingung: Kriechfall	37
10	Freie gedämpfte Schwingung: aperiodischer Grenzfall	37
11	Gedämpfte harmonische Schwingung	38
12	Das Euler-Verfahren	43