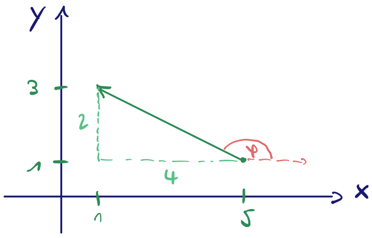
Länge und Richtung

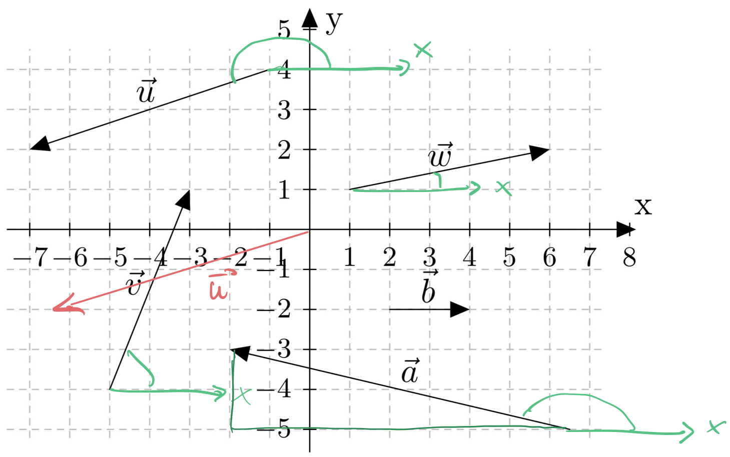


Länge: $\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Richtung: $\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx 180° - 26.6°$

$= 153.4°$

Betrag und Richtung



z.B. $\vec{a}$:

Länge: $\sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{68}$

$= 2\sqrt{17} \approx 8.1$

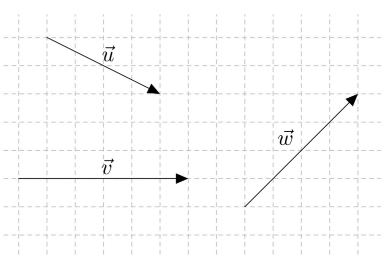
Richtung:

$\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{2}{8}\right)$

$\approx 180° - 14° = 166°$

Pfeilchen zeichnen

Übung 5 (Pfeilchen zeichnen)**.** Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$.



Konstruiere

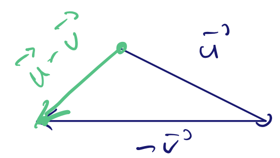
(a) $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$

(b) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + 0.5\vec{w}$

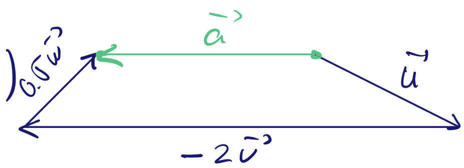
(c) $\vec{b} = 3\vec{u} + 1.5\vec{v} - 4\vec{w}$

(d) $\vec{c}$ so, dass $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{c} = \vec{w}$ gilt.

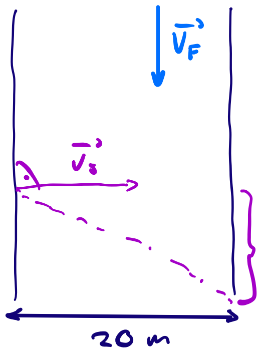
a)



b)



Ab in die Aare!



$|\vec{v_F}| = 1.2\,m/s$

$|\vec{v_s}| = 1.5\,m/s$

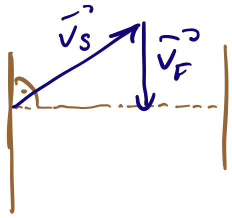
Schnellster Weg

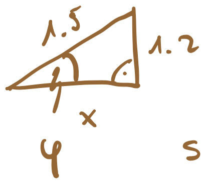
$$v = \frac{s}{t} \iff t = \frac{s}{v} = \frac{20}{1.5} = \underline{\underline{13\tfrac{1}{3}\ \text{sek}}}$$

$$\Updownarrow$$

Abdrift

$$s = v \cdot t = 1.2 \cdot 13\tfrac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{40}{3} = \underline{\underline{16\ m}}$$



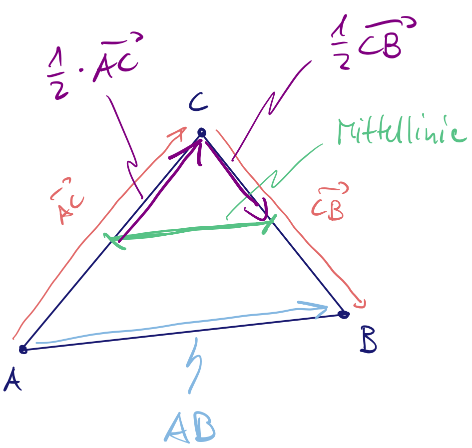


$$\sin(\varphi) = \frac{1.2}{1.5} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{1.2}{1.5}\right) \approx \underline{\underline{53^\circ}}$$

$$x = \sqrt{1.5^2 - 1.2^2} = \underline{\underline{0.9\ m/s}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{20}{0.9} \approx \underline{\underline{22\tfrac{2}{9}\ \text{sek}}}$$

Beweis Mittellinie



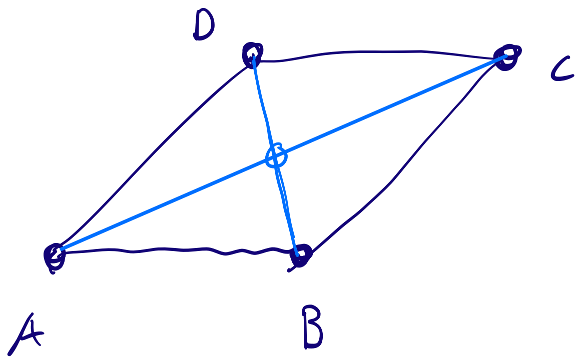
$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

$$\frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB}$$

d.h. die Mittellinie ist halb so lang und parallel zur entsprechenden Grundlinie. □

Beweis halbierte Diagonalen



Voraussetzung: 4-Eck und die beiden Diagonalen halbieren sich

Zeige: Dann muss es sich bei diesem Viereck um ein Parallelogramm handeln.

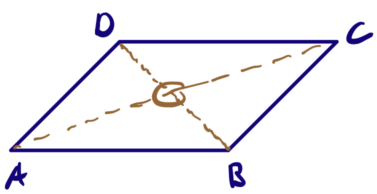
z.B. $\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB}$

$\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{AC} =$

$= \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{DB} = \vec{AB}$

also sind DC und AB parallel und gleich lang. $\square$

Parallelogramm – Eigenschaft



Parallelogramm (Voraussetzung)

z.z.: Diagonalen halbieren sich

Wir wissen, dass z.B. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

Es ist $\vec{AB} = x \cdot \vec{AC} + y \cdot \vec{DB}$ und

$\vec{DC} = (1-y) \cdot \vec{DB} + (1-x) \cdot \vec{AC}$

Somit $x \cdot \vec{AC} + y \cdot \vec{DB} = (1-x) \cdot \vec{AC} + (1-y) \cdot \vec{DB}$

$\Rightarrow \quad x = 1-x \quad$ und $\quad y = 1-y$

$2x = 1 \qquad 2y = 1$

$x = \frac{1}{2}$ $\qquad y = \frac{1}{2}$

D.h. die Diagonalen halbieren sich. $\square$

LASTWAGEN

$\vec{v}_1$: 15 km/h, 6t $\qquad$ $\vec{v}_2$: 45 km/h, 4t

Skript lesen! → Def Impuls und Satz Impulserhaltung

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{vor} = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underset{6+4}{10} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -180 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -180 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_x = -18, \quad v_y = 9$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{18^2 + 9^2} =$$

$\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{9}{18}\right) =$

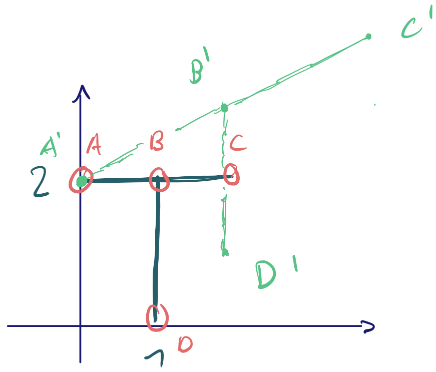
STERN

$\vec{v}_1$: $2 \cdot 10^4$, $2 \cdot 10^{30}$ $\qquad$ $\vec{v}_2$: $3 \cdot 10^4$, $5 \cdot 10^3$

$$\vec{p}_{vor} = 2 \cdot 10^{30} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{pmatrix} + 5 \cdot 10^{30} \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \cdot 10^{34} \\ 4 \cdot 10^{34} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{nach} = 7 \cdot 10^{30} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \overset{!}{=} 7 \cdot 10^{30} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2\frac{1}{7} \cdot 10^4 \\ \frac{4}{7} \cdot 10^4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}\text{ nachher}}$$

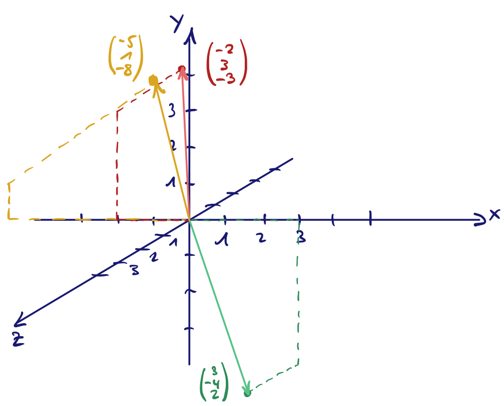
VERZERRE!



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{e_x} + 2\vec{e_y}$$
$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_x} + 2\vec{e_y}$$
$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e_x} + 2 \cdot \vec{e_y}$$
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_x} + 0 \cdot \vec{e_y}$$

$$\rightarrow \quad \vec{A'} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{B'} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{C'} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\vec{D'} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ORTSVEKTOR UND BETRAG



a) $$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{9+16+4} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9+9} = \underline{\underline{\sqrt{22}}}$$

b) $$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+1+64} = \sqrt{90} = \underline{\underline{3\sqrt{10}}}$$

BASISVEKTOREN

$$\vec{e_x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \vec{e_y} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \vec{e_z} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Juhuu, 30

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} - 0.5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}}} \quad , \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

PARALLEL?

$$3\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\21\\12\end{pmatrix} = \vec{w} \quad \rightarrow \underline{\underline{\text{parallel}}}$$

$$\text{b)} \quad -0.5\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} \neq \vec{w} \quad \rightarrow \underline{\underline{\text{nicht parallel}}}$$

PARALLEL EINRICHTEN

$$\text{a)} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-6\\15\end{pmatrix} \rightarrow 4\cdot v_x = w_x \rightarrow \vec{w} = 4\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\15\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}8\\-24\\60\end{pmatrix}}}$$

$$\text{b)} \quad \rightarrow \left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot v_y = w_y \rightarrow \left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\vec{v} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2/3\\2\\-5\end{pmatrix}}}$$

ZWISCHEN PUNKTEN

$$\text{a)} \quad P(10|-6|7),\ Q(2|-2|8) \rightarrow \vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}}} \rightarrow \vec{QP} = (-1)\cdot\vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}8\\-4\\-1\end{pmatrix}}}$$

$$\text{b)} \quad |\vec{PQ}| = \sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{81} = \underline{\underline{9}}$$

$$\text{c)} \quad \vec{PR} = R - P = \begin{pmatrix}x-10\\-1+6\\5-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-10\\5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow |\vec{PR}| = \sqrt{(x-10)^2+5^2+2^2} \stackrel{!}{=} 15$$

$$\begin{aligned}(x-10)^2+25+4 &= 225\\ x^2-20x+100+29 &= 225\\ x^2-20x-96 &= 0\\ (x-24)(x+4) &= 0\end{aligned} \quad \rightarrow x_1 = 24,\ x_2 = -4 \quad \rightarrow \underline{R(24|-1|5)}$$

UMFANG

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix},\ \vec{AC} = \begin{pmatrix}15\\36\end{pmatrix},\ \vec{BC} = \begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix} \rightarrow U = |\vec{AB}| + |\vec{AC}| + |\vec{BC}| = \sqrt{100} + \sqrt{1521} + \sqrt{1225}$$

$$= 10 + 19 + 35 = \underline{\underline{64}}$$

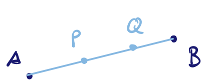
UND RÜCKWÄRTS

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} = Q - P \quad \text{und} \quad Q(-3|-5|2)$$

$$\rightarrow P = Q - \vec{PQ} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-7\\-3\\-4\end{pmatrix}}}$$

DRITTLE!

$$A(-9|15|-2),\ B(-12|-6|4)$$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-3\\-21\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AP} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix},\ \vec{AQ} = \begin{pmatrix}-2\\-14\\4\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Koords $\quad \vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

$\vec{Q} = \vec{A} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

Distanz

$P(x|0|0)$ mit $|\overrightarrow{AP}| = 2 \cdot |\overrightarrow{BP}|$

$\rightarrow \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x-15 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\sqrt{(x-12)^2 + 12^2 + 6^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-15)^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$(x-12)^2 + 12^2 + 6^2 = 4 \cdot [(x-15)^2 + 6^2 + 3^2]$$

$$x^2 - 24x + 144 + \cancel{144} + \cancel{36} = 4x^2 - 120x + 900 + \cancel{144} + \cancel{36}$$

$$0 = 3x^2 - 96x + 756 \quad \rightarrow \quad x_1 = 18, \ x_2 = 14$$

$\rightarrow$ Es gibt 2 Möglichkeiten: $P_1\underline{\underline{(18|0|0)}}$ und $P_2\underline{\underline{(14|0|0)}}$

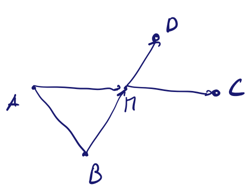
Mittelpunkt und Parallelogramm

a) $\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) ausprobieren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB}$

$\rightarrow$ d.h. die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind parallel und gleich lang. Dies impliziert den gleichen Fact für die beiden andern Seiten.

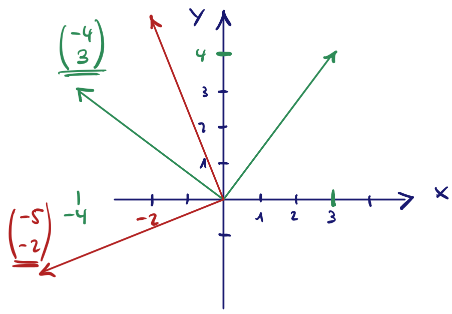
Parallelogramm erstellen

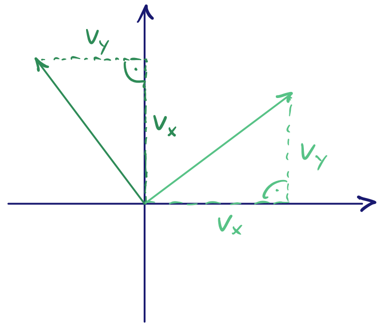


$\vec{C} = \vec{A} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}}}$

$\vec{D} = \vec{B} + 2\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

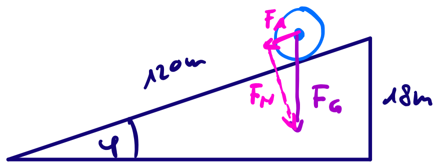
DREHE!



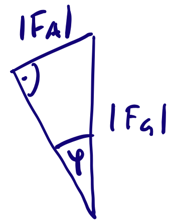


$$\vec{V}_{rot} = \begin{pmatrix} -V_y \\ V_x \end{pmatrix}$$

KEIL ERFORDERLICH?



$$\sin(\varphi) = \frac{18}{120} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{3}{20}\right)$$



$|F_G| = 42\text{ kN} \qquad \vec{F_G} = \vec{F_A} + \vec{F_N}$

$$\sin(\varphi) = \frac{|F_A|}{|F_G|}$$

$$|F_A| = |F_G| \cdot \sin(\varphi) = 42'000 \cdot \frac{3}{20} = \underline{\underline{6'300\text{ N}}}$$

WINKEL BESTIMMEN

a) $\begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\12\\4\end{pmatrix} = (-6)\cdot(-3) + 8\cdot 12 + 0\cdot 4 = 18 + 96 + 0 = \underline{\underline{114}}$

$\left|\begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{100} = 10 \quad , \quad \left|\begin{pmatrix}-3\\12\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{169} = 13 \qquad \rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{114}{10 \cdot 13}\right) \approx \underline{\underline{28.7°}}$

b) $\left|\begin{pmatrix}-3\\12\\4\end{pmatrix}\right| = 13 \quad , \quad \vec{e_x} \cdot \begin{pmatrix}-3\\12\\4\end{pmatrix} = -3 \quad , \quad \vec{e_y} \cdot \begin{pmatrix}-3\\12\\4\end{pmatrix} = 12 \quad \ldots \qquad |\vec{e_x}| = 1 \quad \ldots$

$\varphi_x = \arccos\left(\frac{-3}{13}\right) \approx \underline{\underline{103.3°}} \quad , \quad \varphi_y = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) \approx \underline{\underline{22.6°}} \quad , \quad \varphi_z = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx \underline{\underline{72.1°}}$

KOORDINATENACHSEN

$\vec{e_x} \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = \underline{\underline{0}} \quad , \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad , \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$

UMKEHRUNG

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

z.B. mit Satz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 28 + 3u_y + 8u_z \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = -35 + 20u_y + 9u_z \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

aus (1): $3u_y = -28 - 8u_z$

$$u_y = \frac{-28 - 8u_z}{3}$$

in (2): $-35 + 20 \cdot \frac{-28 - 8u_z}{3} + 9u_z = 0 \qquad / \cdot 3$

$$-105 + 20(-28 - 8u_z) + 27u_z = 0$$

$$-665 - 133u_z = 0 \qquad / + 133u_z$$

$$-665 = 133u_z \qquad / : 133$$

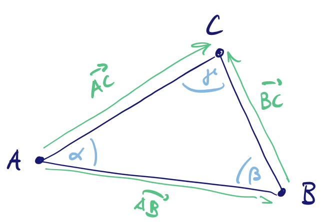
$$-5 = u_z \quad \Rightarrow \quad u_y = \frac{-28 - 8 \cdot (-5)}{3} = 4 \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

ANWENDUNG AUF DREIECKE IM RAUM

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 6 - 2 - 4 = \underline{\underline{0}}$$

NOCH EIN DREIECK IM RAUM

$A(2|1|-3)$, $B(-3|0|1)$, $C(7|-19|-1)$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AB}| = \sqrt{42}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AC}| = \sqrt{429}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{465}$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}\right) \qquad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -25 + 20 + 8 = 3$$

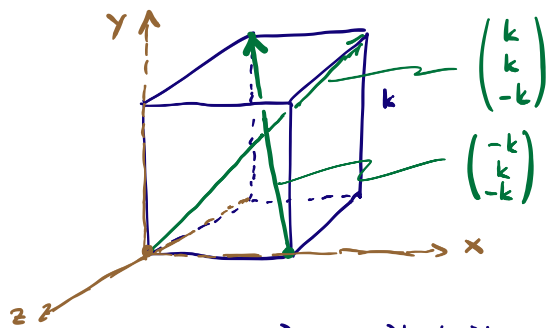
$$= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{429}}\right) \approx \underline{\underline{88.7^\circ}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\quad}\right) \qquad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 50 - 19 + 8 = 39$$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}\right)$ $\qquad \vec{BA}\cdot\vec{BC} = \ldots = 39$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{465}}\right) \approx \underline{\underline{73.8^\circ}} \qquad \rightarrow \gamma = 180^\circ - 88.7^\circ - 73.8^\circ = \underline{\underline{17.5^\circ}}$$

WÜRFEL



$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\varphi)$$

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \cos(\varphi)$$

$$\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right) = \varphi$$

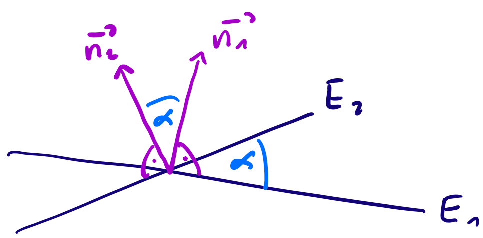
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -k \\ k \\ -k \end{pmatrix} = -k^2 + k^2 + k^2 = k^2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + k^2 + (-k)^2} = \sqrt{3k^2} = \sqrt{3}\,k = |\vec{w}|$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{k^2}{\sqrt{3}k\cdot\sqrt{3}k}\right) = \arccos\left(\frac{\cancel{k^2}}{3\cancel{k^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\approx \underline{\underline{70^\circ}}$$

DIAGONALEBENEN



grün $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}k\\k\\0\end{pmatrix}$

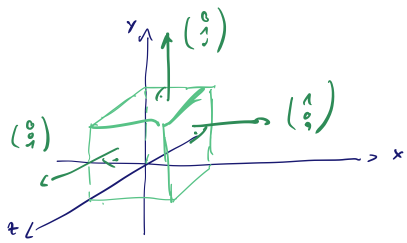
blau $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}0\\k\\k\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = \begin{pmatrix}k\\k\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\k\\k\end{pmatrix} = 0 + k^2 + 0 = k^2$$

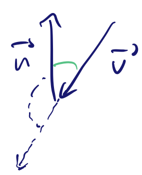
$$|\vec{n_1}| = \sqrt{k^2+k^2+0} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}k = |\vec{n_2}|$$

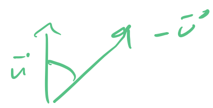
$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\cancel{k^2}}{2\cancel{k^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60°}}$$

LAMBERT



$\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}$





$\to -\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

front : $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 0\cdot3+0\cdot2\cdot1\cdot1 = 1 \quad \to \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$\to H(\varphi) = 0.5\cdot1\cdot\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right) = \underline{\frac{1}{2\sqrt{14}}} \approx 0.133$

dach : $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 2 \quad \to H(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{14}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{14}}}} \approx 0.267$

seite : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 3 \quad \to H(\varphi) = \underline{\underline{\frac{3}{2\sqrt{14}}}} \approx 0.401$

VEKTORPRODUKT

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}v_y w_z - v_z w_y\\ v_z w_x - v_x w_z\\ v_x w_y - v_y w_x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} = v_x(v_y w_z - v_z w_y) + v_y(v_z w_x - v_x w_z) + v_z(v_x w_y - v_y w_x) =$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$\vec{u}\cdot\vec{w}$ analog

Rechtssystem

$\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot0-0\cdot1\\0\cdot0-1\cdot0\\1\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{e_z}$ und/oder brauche die Rechte-Hand-Dreifinger-Regel

$\vec{e_y} \times \vec{e_x} = -\vec{e_z}$, $\vec{e_x} \times \vec{e_z} = -\vec{e_y}$, $\vec{e_z} \times \vec{e_x} = \vec{e_y}$, $\vec{e_y} \times \vec{e_z} = \vec{e_x}$, $\vec{e_z} \times \vec{e_y} = -\vec{e_x}$

Flächenformel

a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8-0\\0-6\\6+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-6\\10\end{pmatrix}$

$\rightarrow |\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{8^2+(-6)^2+10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx \underline{\underline{14.14}}$

Ferner: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$, $|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3$

Winkel: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3\cdot(-1) + 4\cdot2 + 0\cdot2 = 5$

$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{5\cdot3}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5°$

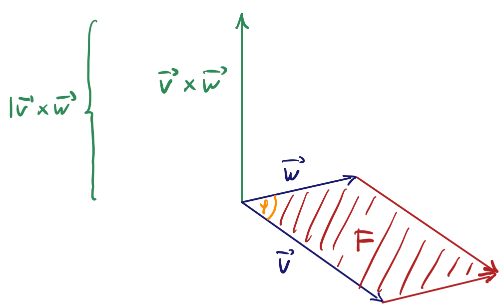
Fläche: $|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin(70.5°) \approx 5\cdot3\cdot0.94 = 14.14$ ✓

b) $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0-24-36 = -60$ $|\vec{v}| = \sqrt{49} = 7$, $|\vec{w}| = \sqrt{100} = 10$ $\rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{-60}{7\cdot10}\right) \approx 149°$

$\rightarrow |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin(149°) \approx 7\cdot10\cdot0.515 \approx 36.1$

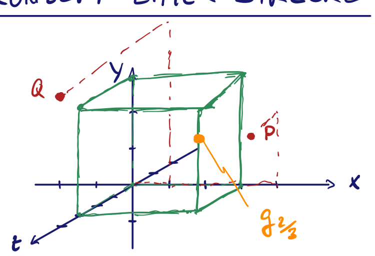
$\rightarrow \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18-48\\0+12\\16-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\12\\16\end{pmatrix}$ $\rightarrow \left|\begin{pmatrix}-30\\12\\16\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1300} \approx 36.1$ ✓

Parallelogrammfläche



$F = |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\sin(\varphi)$

Konzept einer Strecke



Gerade g durch Q und P

$\rightarrow g_t : \vec{Q} + t\cdot\vec{QP} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Trifft die Gerade die Frontfläche mit $z = 3$? $(0 \le x, y \le 3)$

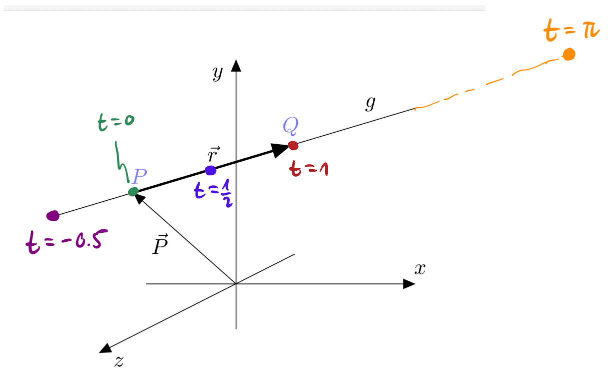
$\to\ 5 - 3t = 3 \iff 2 = 3t \iff t = \frac{2}{3} \quad \to\ g_{2/3}: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

d.h. die Kante verdeckt die Sicht.

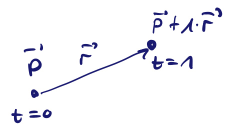
Finesse

Weil eine Gerade unendlich viele verschiedene Parameterform-Darstellungen hat (Stützvektor und Richtungsvektor).

Punkte auf der Geraden



Parameter

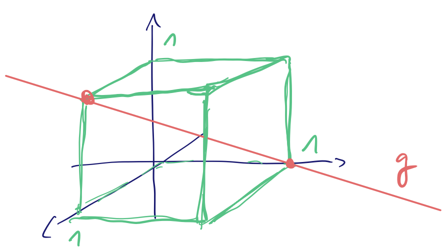


Strecke zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + \vec{r}$.

Parameterdarstellungen

z.B. $g_t: \vec{P} + t \cdot \vec{PQ}$ und $\vec{P} + t \cdot \vec{QP}$

Parameterdarstellungen 2



z.B. $g_t: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

oder $g_t: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder $g_t: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

Relative Lage

a) $g: \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \underset{0}{t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \underset{2}{s} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad s,t \in \mathbb{R}$

sicher nicht parallel, da $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ nicht kollinear, damit auch nicht identisch

Schnittpunkt? $\quad g: \begin{pmatrix} 6+4t \\ 1 \\ 3+5t \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} 2+2s \\ 1 \\ 9-3s \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 6+4t \\ 1 \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2s \\ 1 \\ 9-3s \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{aligned} 6+4t &= 2+2s \qquad (1) \\ 1 &= 1 \qquad \checkmark \\ 3+5t &= 9-3s \qquad (2) \end{aligned}$$

aus (1): $\quad 2s = 4+4t \qquad / :2$

$\qquad s = 2+2t$

in (2): $\quad 3+5t = 9-3(2+2t) \qquad /\,\text{TU}$

$\qquad 3+5t = 9-6-6t \qquad /\,\text{TU}$

$\qquad 3+5t = 3-6t \qquad / +6t-3$

$\qquad 11t = 0$

$\qquad t = 0 \quad \rightarrow \quad s = 2$

$\Rightarrow$ z.B. $\quad g: \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

oder $\quad h: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

b) wegen $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind die Richtungsvektoren parallel.

Ferner ist: $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\2\\3\end{pmatrix}$, also haben die Geraden einen Punkt gemeinsam.

D.h. insgesamt sind sie identisch.

c) $\begin{pmatrix}-5\\16\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$

parallel? → nein $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \neq \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} -5+2t &= 2+3s \quad &(1)\\ 16-3t &= 2-2s \quad &(2)\\ t &= 7+5s \quad &(3) \end{aligned}$$

→ (3) in (1):

$$\begin{aligned} -5+2\cdot(7+5s) &= 2+3s \\ -5+14+10s &= 2+3s \quad &/-3s\\ 9+7s &= 2 \quad &/-9\\ 7s &= -7 \quad &/:7\\ s &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow t = 7+5\cdot(-1) = \underline{\underline{2}}$

→ $\begin{pmatrix}-5\\16\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

d.h. die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $\underline{\underline{\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}}}$.

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\qquad g: \vec{p} + t\cdot\vec{r}$

Parallel? $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \neq \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

d.h. <u>nicht parallel</u>

Schnittpunkt?

$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad 1-t = 3+2s \qquad (1)$$
$$2t = 1-s \qquad (2)$$
$$2+t = 3s \qquad (3)$$

$$(2): \quad 2t = 1-s \quad /+s$$
$$2t+s = 1 \quad /-2t$$
$$s = 1-2t$$

$$\text{in } (1): \quad 1-t = 3+2\cdot(1-2t)$$
$$1-t = 3+2-4t \quad /+4t$$
$$1+3t = 5 \quad /-1$$
$$3t = 4 \quad /:3$$
$$t = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad s = 1-2\cdot\frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$t=\tfrac{4}{3} \rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\8/3\\\underline{10/3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\8/3\\\underline{-15/3}\end{pmatrix}$$

d.h. es gibt keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind zueinander windschief.

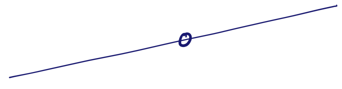
ABSTÄNDE

Der Richtungsvektor hat die Länge $\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$. Daher lauten die Koordinaten der Punkte $g_{-2}: \begin{pmatrix}0\\-1\\\underline{4}\end{pmatrix}$ und $g_2: \begin{pmatrix}5\\7\\\underline{-4}\end{pmatrix}$

PARAMETER EINSCHRÄNKEN

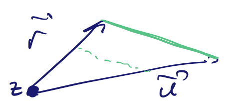
a) Strahl in Richtung $\vec{r}$, da $t^2 \in \mathbb{R}_0^+$

b)



gelochte Gerade (bei $\vec{P}$), da $\frac{1}{t} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

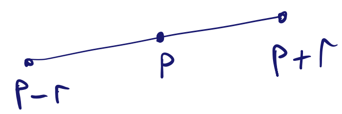
c) Strecke zwischen $\vec{r}$ und $\vec{u}$



(Ähnlichkeit)

d) Strecke zwischen $\vec{p} - \vec{r}$ und $\vec{p} + \vec{r}$

da $\sin(t) \in [-1, 1]$ $\forall t \in \mathbb{R}$



ABSTAND

g: $t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$ R(3|0|0)

$\to \vec{RG} = \begin{pmatrix}t-3\\t\\t\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{RG}| = \sqrt{(t-3)^2+t^2+t^2} = \sqrt{3t^2-6t+9}$

min $\sqrt{}$ $\to$ min Radikand $3t^2-6t+9$

Ist eine Parabel $\to$ Scheitelpunkt $\to$ $t_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 3} = 1$

$\Rightarrow P_{min} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}$

GERADLINIG GLEICHFÖRMIG

$t=1$ $P_1(5|-4|7)$, $t=3$ $P_3(1|2|4)$

$\to g_t$: $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{P_1P_3}$, dann hat man den Geschwindigkeits-Vektor pro Sekunde

$\to \vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix}$

$\to$ Ich würde jetzt den Stützvektor zum Zeitpunkt $t=0$ wählen:

$\to \vec{p}_0 = \vec{p}_1 - \vec{r} = \begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix}}}$

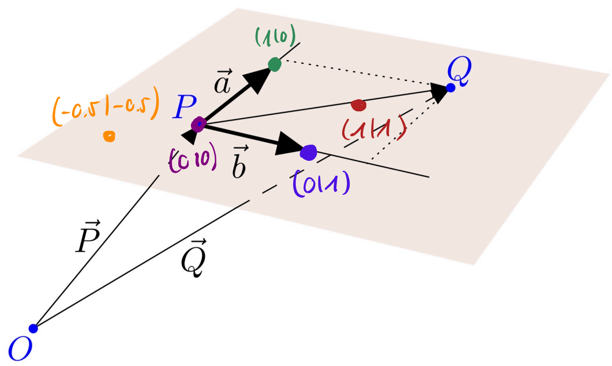
$\Rightarrow g_t: \underline{\underline{\begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix}}}$

xz-Ebene $\to$ $y=0$ $\to$ $-7+3t=0$

$3t = 7$

$t = 7/3$ $\to$ $g_{7/3}: \begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix} + \frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-3/2\end{pmatrix}$

Bestimmte Punkte

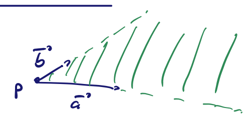


Parameterform

z.B. $\vec{A} + t\cdot\vec{AB} + s\cdot\vec{AC} \quad = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

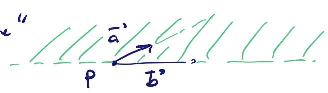
Parameter einschränken

a) 'Viertelebene'

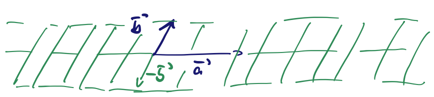


da , $s^2, t^2 \geq 0$

b) "Halbebene"



c) "Band"



da $-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$

Geraden

$g \cap h: \quad \begin{pmatrix}3-4t\\1+t\\5+3t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+2s\\-1+3s\\4-s\end{pmatrix}$

$\overset{(y)}{\Rightarrow} \quad 1+t = -1+3s$

$t = -2+3s \quad \overset{(x)}{\Rightarrow} \quad 3-4(-2+3s) = 4+2s$

$3+8-12s = 4+2s$

$7 = 14s$

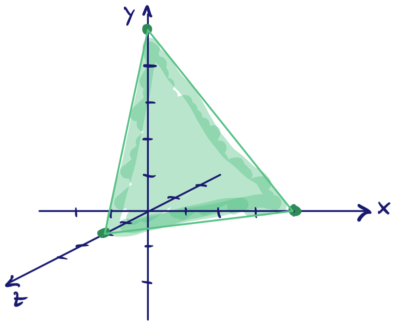
$s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

Check (z-Koordinate würde reichen: $\begin{pmatrix}3-4\cdot(-\frac{1}{2})\\1-\frac{1}{2}\\5+3\cdot(-\frac{1}{2})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+2\cdot\frac{1}{2}\\-1+3\cdot\frac{1}{2}\\4-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ✓ $\quad \Rightarrow \underline{S(5|0.5|3.5)}$

Ebene: $\underline{\begin{pmatrix}5\\0.5\\3.5\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}}$

Koordinatenform, the hard way

z.B. $\underline{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}}$



Koordinatengleichung: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10-0 \\ 0+6 \\ 0+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 10x + 6y + 15z + D = 0$

$(3|0|0) \in E: \quad 10 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + D = 0$

$D = -30$

$\Rightarrow E: \underline{\underline{10x + 6y + 15z - 30 = 0}}$

$T \in E\,?$ $\rightarrow$ $10 \cdot (-12) + 6 \cdot 15 + 15 \cdot 4 - 30 = -120 + 90 + 60 - 30 = 0$, d.h. $\underline{\underline{T \in E}}$.

KOORDINATENGLEICHUNG THE EASY WAY

a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $E: x - 2y - 3z + D = 0$, $P \in E: 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) + D = 0$ $\Leftrightarrow$ $D = -4$

$E: \underline{\underline{x - 2y - 3z - 4 = 0}}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+25 \\ -20+8 \\ 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $E: 25x - 12y + 10z + D = 0$

$\rightarrow$ $25 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 10 \cdot 4 + D = 0$ $\Leftrightarrow$ $D = -40$ $\rightarrow$ $E: \underline{\underline{25x - 12y + 10z - 40 = 0}}$

KOORDINATENGLEICHUNG

$\rightarrow$ $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $E: -2x + y + 2z + D = 0$, $P \in E: -2 \cdot (-6) + 10 + 2 \cdot 16 + D = 0$ $\Leftrightarrow$ $D = -54$

$E: \underline{\underline{-2x + y + 2z - 54 = 0}}$

DURCHSTOSSPUNKT

a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-8 \\ -20-9 \\ 6+35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -29 \\ 41 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $E: 13 \cdot 1 - 29 \cdot 2 + 41 \cdot 6 + D = 0$ $\Leftrightarrow$ $D = -201$

$\rightarrow$ $E: 13x - 29y + 41z - 201 = 0$ $\rightarrow$ $g \cap E: \quad 13(6-4u) - 29 \cdot (4+3u) + 41(-5+7u) - 201 = 0$

$\Leftrightarrow$ $148u - 444 = 0$ $\Leftrightarrow$ $u = 3$

$\rightarrow$ $g_3: \underline{\underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}}}$

b) $2(3+2t) - (-4-t) + 3(-1+t) + 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $8 + 8t = 0$ $\Leftrightarrow$ $t = -1$ $\rightarrow$ $g_{-1}: \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}}$

c) $2(3+2t) - (5+t) + 3 \cdot (-t) + 5 = 0$ $\Leftrightarrow$ $6 = 0$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{kein}}}$ Schnittpunkt

REFLEXION

$P(4|5|-1)$, $\vec{r} = (-2|1|0.5)$

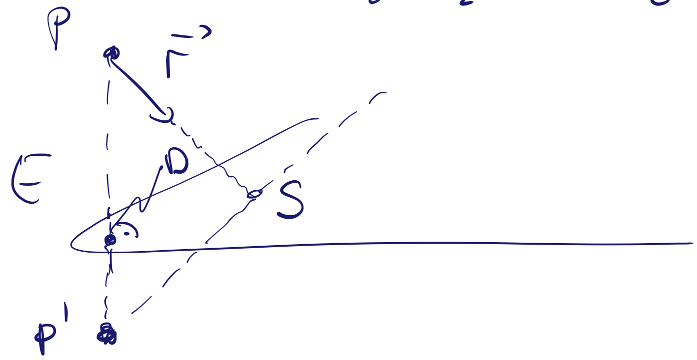
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$

xy - Ebene $\rightarrow$ $z = 0$ (Koordinatengleichung)

$\rightarrow$ Lichtstrahl : $\ell : \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0.5\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $\ell \cap E :$ $-1 + 0.5t = 0$

$t = 2$ $\rightarrow$ $\underline{S = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}}$



P'? $\rightarrow$ $g : \vec{P} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$g \cap E :$ $-1 + t = 0$

$t = 1$ $\Rightarrow$ $P' = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$

Richtung reflektierter Strahl $\overrightarrow{P'S} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix}}}$

Zusatz : Abstand P von E ?

$\rightarrow$ senkrecht messen $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$g \cap E = D = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $|\overrightarrow{PD}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = \underline{1}$