① $234600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23 \quad , \quad 7571 = 67 \cdot 113$

② $153900 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 19$

$180600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 43$

$\rightarrow \text{ggT} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \quad , \quad \text{kgV} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 43$

③ $5544 = 4410 \cdot 1 + 134$

$4410 = 134 \cdot 32 + 122$

$134 = 122 \cdot 1 + 12$

$122 = 12 \cdot 10 + 2$ ggT

$12 = 2 \cdot 6 + 0$

④ Für (3|5) gilt die Aussage "noch" nicht. Seien $k \in \mathbb{N}$ und

$$6k-2 \quad 6k-1 \quad 6k \quad 6k+1 \quad 6k+2 \quad 6k+3$$

$\forall k$ durchläuft man so alle $\mathbb{N}$ grösser gleich 4. Wegen

$$2(3k-1) \quad 6k-1 \quad 6k \quad 6k+1 \quad 2(3k+1) \quad 3(2k+1)$$

kommt als Primzahlzwilling nur $(6k-1 \mid 6k+1)$ in Frage.
Liegt also ein Primzahlzwilling vor, so liegt dazwischen die Zahl $6k$, welche offensichtlich durch 6 teilbar ist. $\square$

⑤ Indirekter Beweis: Es gebe endlich viele Primzahlen

$$\{2, 3, 5, 7, \dots, p\}$$

Somit gibt es eine grösste p.
Betrachte die Zahl $z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Da $z > p$ und p die grösste Primzahl ist, müsste sich z in Primfaktoren zerlegen lassen. Aber weder $2, 3, \dots, p$ teilen z. D.h. $\{2, 3, \dots, p\}$ enthält nicht alle Primzahlen: Widerspruch!

Also muss es unendlich viele Primzahlen geben. $\square$

(6) $2^{43112609}-1 \approx 3.2\cdot 10^{12978188}$ d.h man hat 12'978'189 Ziffern. Nimmt man 20 Blätter pro cm, also 40 Seiten, so hat ein Stapel die Höhe von 3.245 km.

(7) Man kennt bis heute keine Formel zur Beschreibung aller Primes.

(8) ...

(9) a) $(3|5)$, $(5|7)$, $(11|13)$. Es ist nicht bekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

b) siehe (4)

c) $(3|5|7)$ ist der einzige Drilling.

Betrachte dazu die Teilbarkeit durch 3. Ein weiterer Drilling $(k|k+2|k+4)$ müsste sicher $3\nmid k$ erfüllen. Hat k den Rest 1 bei Division durch 3, dann wäre aber $k+2$ durch 3 teilbar, also nicht prim. Hat k den Rest 2 bei Division durch 3, dann wäre $k+4$ durch 3 teilbar. Also ist $(3|5|7)$ der einzige Drilling. $\square$

(10) $z! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$, dann kann nur $z!+1$ prim sein.

(11) witzig

(12) Es ist $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$, was das "Phänomen" erklärt.

(13) Sei $k\in\mathbb{N}$. Betrachte $k+(k+1)+(k+2)+(k+3) = 4k+6$, was bei Division durch 4 den Rest 2 hat. $\square$

(14) Es resultiert stets eine Quadratzahl.

$k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+k)(k^2+5k+6)+1 =$

$= k^4+6k^3+11k^2+6k+1 = (k^2+3k+1)^2$ $\square$

(15) Sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachte $3k$ $3k+1$ $3k+2$ ($1^2=1$ und $2^2=4$)

$\rightarrow$ $(3k)^2 = 9k^2 \rightarrow$ Rest 0

$(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 \rightarrow$ Rest 1

$(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 \rightarrow$ Rest 1 $\square$

(16) $7^2 = 49$, $9^2 = 8\underline{1}$, $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $16^2 = 25\underline{6}$

$\rightarrow 1+6 = \underline{7}$

(17) $F_1 = 1$ $F_2 = 5$ $F_3 = 12$ $F_4 = 22$ $\rightarrow F_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$

b) $D_n = \frac{1}{2}m(m+1)$ (Gausstrick)

$Q_n = n^2$

Somit $D_n + F_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 2n^2 = 2Q_n$

(18) $6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$

b) 496, 8128

c) Ist M_n mersenne'sch, so ist $2^{n-1} \cdot M_n$ vollkommen. (Euklid)

d) Summe der Kehrwerte aller Teiler ist gleich 2.

(19) zur Kenntnisnahme