- **Auf saubere Darstellung wird Wert gelegt. Der Lösungsweg muss ersichtlich sein. Alle Ausrechungen gehören auf das Lösungsblatt. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- **Zugelassene Hilfsmittel sind das Formelbuch *Formeln, Tabellen und Begriffe* mit handgeschriebenen Notizen sowie ein Taschenrechner (TI 82/83).**
- **Für die Note 6 werden 42 Punkte verlangt.**

Aufgabe 1 *(Differenzialgleichungssysteme, 12 Punkte: a)3, b)3, c)6)*

Bei einem „Warteschlangen-Problem“ für 1 Platz ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit P_0 bzw. P_1, dass 0 bzw. 1 Platz der Schlange besetzt ist, das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} P_0' &= -P_0 + 2P_1 \\ P_1' &= P_0 - 2P_1 \end{aligned}$$

(a) Zeige zuerst, dass die *Gesamtheit* aller Lösungen einer linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = k \cdot y(x)$$

von der Form $y(x) = c_0 \cdot e^{kx}$ ist.

(b) Begründe, dass für ein lineares Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung mit 2 Gleichungen

$$y_1' = ay_1 + by_2 \tag{1}$$
$$y_2' = cy_1 + dy_2 \tag{2}$$

ein Ansatz $y_1 = c_1 \cdot e^{\lambda t}, y_2 = c_2 \cdot e^{\lambda t}$ auf die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren führt.

(c) Löse anschliessend obiges Gleichungssystem für das Warteschlangenproblem unter der Bedingung, dass zu Beginn die Schlange leer ist.

Aufgabe 2 *(Affine Abbildungen, 12 Punkte: a)4, b)1, c)2, d)5)*

Gegeben sei die Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 2t-9 & -2 \\ -2t+14 & t+2 \end{pmatrix}$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Werte von t ist A singulär? Was bedeutet dies für die Abbildung? Bestimme für einen dieser t-Werte das Bild der xy-Ebene unter der Abbildung A.

(b) Bestimme t so, dass A symmetrisch wird.

(c) Sei $t = 4$. Bestimme die Funktionsgleichung des Bildes der Geraden $g : y = -2x + 1$.

(d) Zeige, dass es ein t gibt, so dass A eine Scherung ist.

Aufgabe 3 *(Wechselstromkreise, 12 Punkte: a)5, b)5, c)2)*

Ein ohmscher Widerstand $R = 15\,\Omega$, eine Spule mit Induktivität $L = 80\,\mathrm{mH}$ und ein Kondensator der Kapazität $C = 50\,\mu\mathrm{F}$ sind in Serie an eine Spannungsquelle geschaltet (siehe Abbildung 1), welche eine Wechselspannung gemäss $U(t) = \hat{U}\cos(\omega t)$ mit dem Scheitelwert $\hat{U} = 12\,\mathrm{V}$ liefert. Die Kreisfrequenz betrage $\omega = 450\,{}^{1}\!/\!{}_{\mathrm{s}}$.

(a) Berechne die Impedanz (Betrag und Phase) der Anordnung und den Scheitelwert $\hat{I}$ der Stromstärke.

(b) Zeige, dass dieser Stromkreis eine erzwungene gedämpfte Schwingung der Form

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0\cos(\omega t)$$

ausführt, indem du ausgehend von der Spannung über dem Kondensator eine Differentialgleichung herleitest.

(c) Betrachte nun den Schwingkreis ohne Widerstand, also $R = 0$. Bestimme, bei welcher Frequenz die Stromstärke im Stromkreis maximal wird.

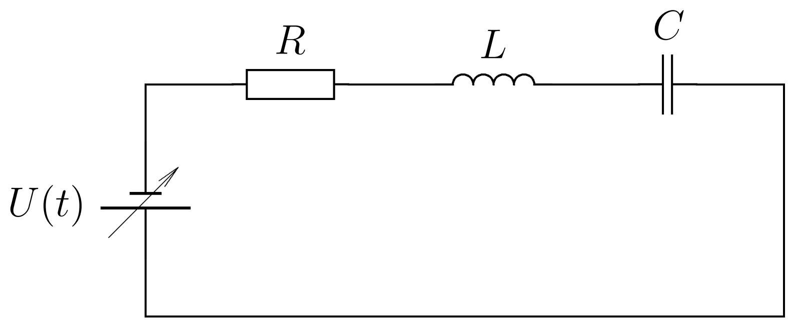

Abbildung 1: Schema des Stromkreises

Aufgabe 4 *(Komplexe Funktionen, 12 Punkte: a)2, b)2, c)3, d)3, e)2)*

Gegeben sei die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{2z - i}{z}.$$

(a) Bestimme die grösstmögliche Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und die Wertemenge $\mathbb{W}$ von f.

(b) Wie sieht das Bild k' des Kreises $k : |z| = 1$ aus?

(c) Wie sieht das Urbild h der imaginären Bildachse h' aus?

(d) Bestimme die Gleichung des Bildes g' der Geraden $g : (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0$.

(e) Stelle obige Bilder und Urbilder in zwei Gauss-Ebenen dar.