Nachname: **Vorname:**

- Zugelassenes Hilfsmittel ist ein Taschenrechner (TI 82 o.ä.) und die gelbe Formelsammlung.
- Die Darstellung fliesst in die Bewertung ein. Blosse Resultate ergeben keine Punkte.

Aufgabe 1 *18 Punkte*

Sei

$$P \cdot \mathrm{d}x + Q \cdot \mathrm{d}y = 0$$

mit $P = P(x,y) = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$, $Q = Q(x,y) = \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ und $y = y(x)$.

(a) Bestimme $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$; vereinfache.

(b) Begründe mit (a), dass $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{-3xy}{r^5}$ wobei $r := \sqrt{x^2+y^2}$.

(c) Zeige, dass $H(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ eine Stammfunktion von $h(x) = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ ist.

(d) Bestimme nun $\int P(x,y)\,\mathrm{d}x$ und $\int Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(e) Zeige, dass das Potenzial $F(x,y) = -\frac{1}{r} =: F(r)$ ist.

(f) Bestimme die Gleichung der Niveaulinien $y_k(x)$ von $F(x,y)$.

(g) Berechne den Gradienten von $F(x,y)$, $\vec{S} := \vec{\nabla} F(x,y)$.

(h) Berechne die Divergenz von $\vec{S}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$.

(i) Berechne die Rotation von $\vec{S}$, $\vec{\nabla} \times \vec{S}$.

Aufgabe 2 *(11 Punkte: 1,1,3,2,4)*

Die logistische Funktion

$$f_r(x) = rx(1-x)$$

mit $x \in [0,1]$ und $r \in [0,4]$ wollen wir noch einmal Revue passieren lassen.

(a) Berechne den Scheitelpunkt der Parabel $f_r(x)$.

(b) Berechne die Ableitung $f_r'(x)$.

(c) Berechne $f_r^{(2)}(x)$ und notiere dann $f_r^{(2)}(x) - x$ sortiert nach Potenzen von x.

(d) Multipliziere $(-rx^2 + (r-1)x) \cdot (-r^3x^2 + (r^2+r^3)x - (r^2+r))$ aus und sortiere nach Potenzen von x.

(e) Bestimme alle Nullstellen des Polynoms aus (d). Vereinfache soweit wie möglich.

Aufgabe 3 *8 Punkte*

Löse

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 \cdot y(t) = 0$$

mit dem Ansatz $y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$.

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*

Rechne die ersten vier Iterationen von $z_{k+1} = z_k^2 + c$ mit $z_0 = 0$ für $c = -1, -\frac{1}{2}, i$ und $-1+0.1i$ und „rate“, wie der jeweilige Orbit für $k \to \infty$ aussieht.