Quadratische Gleichungen

May 3, 2022

1 Quadratische Gleichungen

1.1 Recap Lineare Gleichungen

Wikipedia zu linearen Gleichungen

Unter einer lineare Gleichung verstehen wir eine Gleichung in einer Variablen x mit Parametern $m, q \in \mathbb{R}$ von der Form

$$mx + q = 0.$$

Eine kurzes, kommentiertes Recap gibts hier auf meinem Kanal gym math.

Man kann solch eine Gleichung geometrisch als Funktion $y = mx + q$ interpretieren, von deren Graphen man den Schnittpunkt mit der x-Achse, eine sogenannte **Nullstelle**, sucht. Erinnere dich daran, dass der Graph eine Gerade ist.

Übung : Wie viele Lösungen hat eine lineare Gleichung?

Noch eine Bemerkung, die fernab vom Thema scheint: Bitte unterscheidet immer zwischen *Gleichung umformen* und *Terme umformen* . Bei Gleichungen muss auf beiden Seiten dieselbe Operation angewandt werden. Und zwar so, als stünde die komplete Seite jeweils in Klammern. Bei Termumformungen werden auf einen Ausdruck/Term algebraische Rechenregeln angewandt.

1.2 Was ist eine quadratische Gleichung?

Wie der Name bereits vermuten lässt geht es a) um Gleichungen und b) in diesen taucht ein Quadrat auf. Letzteres bezieht sich natürlich auf die Variable, oft x genannt. Neu ist also, dass wir nicht bloss einen uns bereits bekannten linearen Zusammenhang vom Typ $mx + q = 0$ haben, sondern möglicherweise üppiger

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dabei ist der Parameter $a \neq 0$, sonst wäre die Gleichung ja linear. b und c hingegen dürfen durchaus den Wert 0 annehmen. Also haben wir bis auf die kleine Ausnahme kompakt formuliert: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

Auch in diesem Fall kann es für Überlegungen nützlich sein, die quadratische Gleichung als quadratische Funktion zu betrachten, von der man Nullstellen sucht.

1.2.1 Der Graph einer quadratischen Funktion

Wie sieht der Graph einer quadratischen Funktion aus? Sicher ist er keine Gerade.

Übung : Skizziere die Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[-3, 3]$. Rechne ein paar Werte aus.

Übung : Skizziere die Funktion $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$.

Übung : Kannst du die Nullstellen von f und g algebraisch aufzeigen?

Man sieht, dass der Graph einer quadratischen Funktion "gebogen" ist; man nennt solch eine Form **Parabel**. Mehr möchte ich zur Zeit nicht dazu sagen, da dies nur vom eigentlichen Thema ablenken würde. Wir schauen uns diesen wichtigen Typ detaillierter im gym2 an.

Übung : Wie viele Lösungen kann eine quadratische Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

haben?

1.2.2 Das sagt Wikipedia zu quadratischen Gleichungen.

Wikipedia zu quadratische Gleichungen

1.3 Wo tauchen quadratische Gleichungen auf?

Typischerweise findet man oft in Näherungslösungen physikalischer Probleme die Form von Parabeln. Betrachte zum Beispiel die Wurfbahn eines Balles oder einen Springbrunnen.

Übung : Ein Ball wird in die Luft geworfen. Seine Höhe h kann man zu sinnvollen Zeitpunkten t via

$$h(t) = 10t - 5t^2$$

berechnen.

- Skizziere den Graphen der Funktion h.
- Wie lange fliegt der Ball durch die Luft?
- Wann erreicht er seinen höchsten Punkt? Auf welcher Höhe ist dieser höchste Punkt?

1.4 Lösungsmethoden

1.4.1 Einfache Typen — $b = 0$ oder $c = 0$

Solange in $ax^2 + bx + c = 0$ einer der Parameter b oder c gleich 0 ist, kann man die Gleichung direkt lösen oder faktorisieren und so die Lösungen bestimmen. Für die Beispiele oben findet man für

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}x^2 + 1 &= 0 \\
1 &= \frac{1}{4}x^2 \\
4 &= x^2 \\
x_{1,2} &= \pm 2
\end{aligned}$$

Du hast sicherlich bemerkt, dass ich nicht jede Umformung kommentiert habe. Sehe es als Übung an, die Umformungen zu notieren. Ferner darf man die Plus-Minus-Geschichte nicht vergessen. Technisch war das aber nicht allzu anspruchsvoll. Ich habe auch als Notation für die Lösungen $x_{1,2}$ verwendet, um anzudeuten, dass es zwei Lösungen sind.

$10t - 5t^2 = 0$ ist nicht schwieriger zu lösen:

$$\begin{aligned}
10t - 5t^2 &= 0 \\
5t(2 - t) &= 0
\end{aligned}$$

An dieser Stelle überlegt man sich, dass das Produkt auf der linken Seite genau dann 0 wird, sobald einer der Faktoren 0 ist. Also muss man de facto die beiden linearen Gleichungen $5t = 0$ und $2 - t = 0$ lösen. Offensichtlich folgt $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$.

1.4.2 Nicht so einfache Typen — alle Parameter ungleich 0

Sind aber alle Parameter nicht 0, dann kann die Situation oft verzwickt sein.

Ich werde im Folgenden für die Gleichung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

verschiedene Ansätze illustrieren. Wenn man eine quadratische Gleichung lösen muss, so empfehle ich sowieso diese von mir hier eingehaltene Reihenfolge der Lösungsansätze zu testen. Schliesslich sei noch vermerkt, dass in Schulbüchern — und auch bei mir in der Theorie — meist "schöne" Lösungen gefunden werden. Dies ist jedoch in der Praxis eher selten der Fall.

Nun zum Vorgehen:

1. Kann man die Gleichung leicht faktorisieren?

   Die Gleichung $(x-x_1)(x-x_2)=0$ hat offensichtlich die beiden Lösungen x_1 und x_2. Wegen $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$ versuche ich c so zu **faktorisieren**, dass die Addition der beiden Faktoren grad b ergibt. Gegebenenfalls muss noch das Vorzeichen angepasst werden. Diese Tatsache findet man etwa auch unter dem Begriff Satz von Vieta.

   In unserem Beispiel also gilt es 6 zu faktorisieren. Dies geht ganzzahlig durch $6=1\cdot 6=2\cdot 3$. Wegen dem negativen Vorzeichen von c muss ein Faktor positiv und der andere negativ sein. Nach kurzem Test sieht man -3 und 2, die multipliziert -6 und addiert -1 ergeben. Somit gilt $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ und via "Faktorüberlegung" sind die Lösungen der Gleichung also $x_1=3$ und $x_2=-2$.

2. Lösungsformel anwenden oder quadratisch ergänzen

Ich habe ein Video zur Einleitung in dieses Thema auf gym math Quadratische Gleichung bereit gestellt.

1.4.3 Quadratisch ergänzen

Das Ziel beim **quadratischen Ergänzen** ist es die Variable x als Binom zu formulieren. Danach kann man nämlich durch Wurzel ziehen nach x auflösen. Illustriert an unserem Beispiel würde ich wie folgt vorgehen. Vom Term x^2-x-6 interessiere ich mich erst mal nur für diejenigen Summenden, die die Variable halten, also x^2-x. Nun stelle ich mir die Frage, wie ein Binom aussehen muss, der diesen Term beinhaltet. Als Ansatz wähle ich $(x-?)^2$, denn damit hab ich schon mal das x^2. Wir wissen von den binomischen Formeln — insbesondere von $(x-b)^2=x^2-2bx+b^2$ —, dass wir b nun so wählen müssen, dass $-x$ als mittlerer Term raus kommt. Das heisst $b=\frac{1}{2}$. Nun ist $(x-\frac{1}{2})^2=x^2-x+\frac{1}{4}$, also ist $x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$. Dank diesem Prozedere können wir unsere Gleichung schreiben als:

$$(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6=0.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}(x-\frac{1}{2})^2-6\frac{1}{4}&=0\\(x-\frac{1}{2})^2&=6\frac{1}{4}\\x-\frac{1}{2}&=\pm 2.5\\x_{1,2}&=0.5\pm 2.5\end{aligned}$$

und damit die uns bekannten Lösungen 3 und -2.

Übung : Als Repe, falls nötig, noch mal gym math Quadratische Ergänzung anschauen.

Übung : Alle Schritte oben gecheckt?

Übung : Finde zum Beispiel für obige h Funktion ihre Nullstellen mit der Methode des quadratischen Ergänzens.

1.4.4 Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Wir werden nun die Lösungsformel für eine beliebige quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

herleiten. Die Formel kann dann beispielsweise auch für die ganz einfachen Fälle von oben verwendet werden. Man ist aber damit oft behäbiger. Als Ausgangslage wollen wir die Form genau so, wie oben zentriert. Das heisst alles auf eine Seite und gleich 0 gesetzt. Um die Formel anzuwenden müssen wir dann einfach die Koeffizienten a, b und c ablesen, die wir in die Lösungsformel einsetzen und so die Lösungen berechnen.

Herleitung:

Wir starten also mit

$$ax^2 + bx + c = 0$$

und dividieren erstmal durch a, damit wir als Koeffizienten vor dem x^2 eine 1 kriegen. Dieser Schritt dient als Vorbereitung für die quadratische Ergänzung und ist legitim, da wir ja $a \neq 0$ voraussetzen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Übung : Wie sieht nun die quadratische Ergänzung der linken Seite aus?

Jawohl, wir müssen $(x + \frac{b}{2a})^2$ mit $-\frac{b^2}{4a^2}$ korrigieren und erhalten insgesamt

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Wir isolieren den Binom

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

und ziehen auf beiden Seiten die Wurzel

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Das lösen wir noch nach x auf und schreiben den Radikanden in einem Bruch

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Aus einem Quotienten darf ich separat die Wurzel ziehen, aus einer Subtraktion aber nicht. Da die Brüche der rechten Seite damit grad gleichnahmig sind, können wir sie addieren bzw. subtrahieren:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Um anzudeuten, dass wir 2 Lösungen kriegen können, habe ich auf der linken Seite die Notation angepasst. Voilà! Die **Lösungsformel für quadratische Gleichungen**

Falls man alle Schritte kommentiert haben möchte, so guckt man gym math Lösungsformel QuadrGl.

1.4.5 Bemerkungen zur Lösungsformel für quadratische Gleichungen

- Euch ist aufgefallen, dass man bloss die Koeffizienten a, b und c kennen muss, um mögliche Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu bestimmen.
- Wieso man obige Formel in der Literatur manchmal unter dem Namen *Zauberformel* oder *Mitternachtsformel* findet, erschliesst sich mir nicht. Diese Bezeichnungen sind meiner Ansicht nach an den Haaren herbei gezogen.
- Eine quadratische Gleichung kann keine, eine oder zwei Lösungen haben. Wieso? (*Übung*) Betrachte geometrische eine Parabel und überlege, wie viele Nullstellen möglich sind. Aber auch algebraisch kann die Anzahl Lösungen begründet werden. Ist nämlich der Term unter der Wurzel — in diesem Zusammenhang spricht man von der sogenannten **Diskriminante** — negativ, so hat man keine Lösung, da die Wurzel nicht definiert ist. Ist die Diskriminante gleich 0, dann gibt es eine Lösung, da ± 0 die beiden Lösungen $x_1 = x_2$ liefert. Ist die Diskriminante grösser als 0, so ergeben sich zwei verschiedene Lösungen.
- Eine Parabel hat einen höchsten oder tiefsten Punkt, den sogenannten **Scheitelpunkt** $S(x_s|y_s)$. Dieser liegt an der Stelle $x_s = -\frac{b}{2a}$, da er symmetrisch zwischen den beiden Nullstellen liegt. In dieser Schreibweise ist nämlich

  $$x_{1,2} = x_s \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

  Um die "Höhe", also den Funktionswert, des Scheitelpunkts $(x_s|y_s)$ zu berechnen, setzt man einfach den x-Wert in die Funktion ein: $y_s = f(x_s)$.

1.4.6 Unsere Beispielgleichung mit der Lösungsformel gelöst

Abschliessend testen wir noch die berechnete Formel, obwohl wir sicher sind, keine Fehler gemacht zu haben.

Zu lösen ist

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Die Gleichung ist bereits gleich 0 gesetzt und wir lesen $a = 1$, $b = -1$ und $c = -6$ ab. Wir setzen ein

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

und folgern $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ und $x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.

Nun heisst's wieder üben, üben, üben,...

Suche verschiedene Übungen im Internet. Eine üppige Adresse zum selbständigen Arbeiten findet man hier.

1.5 Biquadratische Gleichungen

1.5.1 Was ist eine biquadratische Gleichung?

Bi heisst 2. Vielleicht kennt ihr das vom Wort Binärsystem oder Binom? In der Mathematik verstehen wir unter einer **biquadratischen Gleichung** eine polynomiale Gleichung vom Grad 4, in der nur gerade Exponenten in der Variablen auftauchen. Also haben wir es allgemein mit einer Gleichung vom Typ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

zu tun.

Der Grad 4 rührt daher, dass wir ein Quadrat vom Quadrat, eben ein **Biquadrat**, haben:

$$(x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4$$

Die Koeffizienten a, b und c haben den gleichen Definitionsbereich wie oben. Jedoch gilt selbstverständlich die Lösungsformel nicht bzw. liefert im Allgemeinen keine brauchbaren Resultate. Mit einem kleinen Kniff — einer Variablensubstitution — kann man aber eine biquadratische Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückführen, um dann mit Hilfe der oben hergeleiteten Methoden die Lösungen für die zugehörige biquadratische Gleichung zu finden.

1.5.2 Wie löst man biquadratische Gleichungen?

Betrachten wir beispielsweise die biquadratische Gleichung

$$2x^4 - 3x^2 - 20 = 0.$$

Die Strategie sieht wie folgt aus und der Kniff kommt sogleich. Da $x^4 = (x^2)^2$ ein Biquadrat ist, liefert die Substitution $z := x^2$ wegen $x^4 = (x^2)^2 = z^2$ die *quadratische* Gleichung

$$2z^2 - 3z - 20 = 0,$$

welche wir mit den oben erarbeiteten Methoden lösen können. Natürlich lösen wir nach z und nicht nach x. Aber die Substitutionsgleichung $z = x^2$ lässt sich ja weiter verarbeiten. Dabei handelt es sich wiederum um eine quadratische Gleichung und wir werden da die Lösungen für x finden. Damit sind wir dann fertig.

In der Tat: Die substituierte Gleichung $2z^2 - 3z - 20 = 0$ hat die Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Das heisst unser x^2 hat zwei Möglichkeiten:

- entweder ist $x^2 = 4$
- oder $x^2 = -2.5$

Im Allgemein kann also eine biquadratische Gleichung bis zu 4 Lösungen haben. Hier aber hat $x^2 = -2.5$ keine Lösung und es bleibt $x^2 = 4$. Daraus kriegen wir die Lösungen

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2.$$

Testen wir $x_2 = -2$ in unserem Ausgangsproblem:

$$2 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^2 - 20 = 2 \cdot 16 - 3 \cdot 4 - 20 = 32 - 12 - 20 = 0$$

und freuen uns.

Übungen : Eine Menge Übungen mit Lösungen findet ihr auf dieser Site von Arndt-Bruenner.