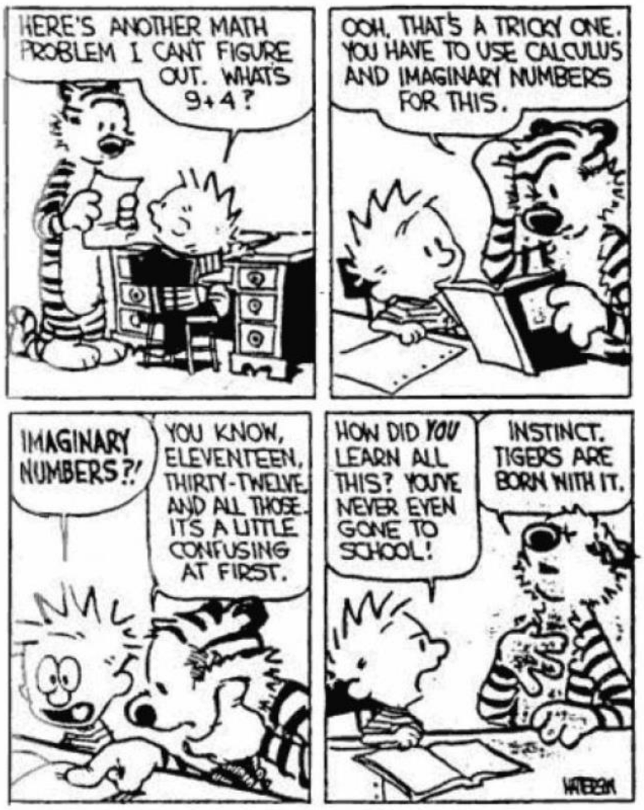
Zusammenfassung zum GF Mathematik



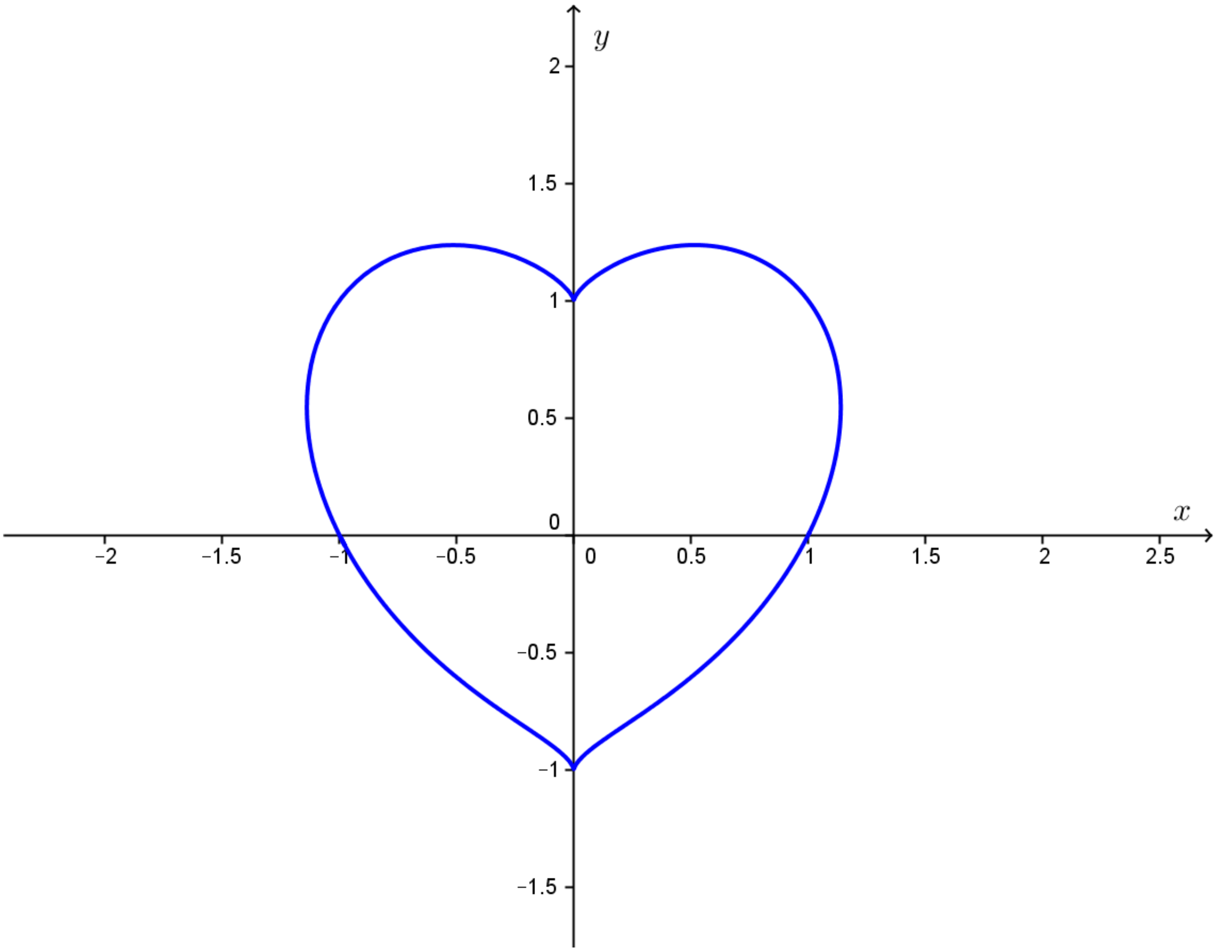
Nicolas Schalch, 15b

Prima

Gymnasium Köniz-Lerbermatt

Inhalt

Funktionen



Definition Funktion

Eine Funktion *f* ist eine Abbildung, die jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element aus der Zahlenmenge zuordnet.

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$$

Funktionen sind in der Mathematik, aber auch in den Naturwissenschaften von grosser Bedeutung, denn sie stellen eine Abhängigkeit zwischen verschiedenen Grössen dar.

Inversfunktion

Eine Funktion *f* ordnet jedem *x*-Wert einen klaren *y*-Wert zu. Der umgekehrte Fall ist eine Inversfunktion f^{-1}, welche jedem *y*-Wert einer Funktion einen *x*-Wert zuordnet. Um die Inversfunktion zu berechnen, wird die Funktion als Gleichung aufgeschrieben und nach *x* aufgelöst. Hier ein Beispiel einer linearen Funktion:

$$f(x) = 2x - 3$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 1.5$$

Bei den quadratischen Funktionen funktioniert dies auch aber da muss der Bereich eingeschränkt und ev. faktorisiert werden. Hier folgt auch ein Beispiel.

$$f(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$y + 1 = x^2 - 2x$$

$$y + 2 = x^2 - 2x + 1$$

$$y + 2 = (x - 1)^2$$

$$1 \pm \sqrt{y + 2} = x$$

$$f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{x + 2}$$

Durchschnittliche Änderungsrate

Da Funktionen Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Grössen darstellen, ist es von grosser Bedeutung, die Änderungsrate der Funktion zu kennen. Zum Beispiel wie sich der Preis einer Aktie verändert oder die Geschwindigkeit eines fallenden Objektes. Der Quotient:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan \alpha = m$$

gibt die durchschnittliche Änderung über dem Intervall $[x_1, x_2]$ an. Mit diesem Quotienten wird auch die Steigung einer linearen Funktion berechnet und ist gleich dem Tangens des Steigungswinkel α. Da Zähler und Nenner jeweils Differenzen sind, heisst der Bruch Differenzenquotient.
Wenn nun Δx gegen Null strebt, geht auch $\Delta f(x)$ gegen Null. Der Wert des Differenzenquotienten muss aber nicht zwangsläufig gegen Null gehen. Dieser erreicht (hoffentlich) einen Grenzwert. Dieser Grenzwert, falls existierend, ist die momentane Änderung des Funktionswertes bei x.

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Dieser Grenzwert ist der Differenzialquotient und führt zur Differenzialrechnung, auf diese hier aber nicht eingegangen wird.

Funktionstypen

Lineare Funktionen

Eine Lineare Funktion ist eine Funktion, die durch zwei Punkte definiert ist und wie eine Linie aussieht. Sie hat folgende allgemeine Funktionsgleichung:

$$f(x) = mx + b$$

Wobei m für die Steigung steht und b für den y-Achsenabschnitt. Wenn man zwei Punkte hat, geht man folgendermassen vor um die Funktionsgleichung zu bestimmen. Man hat zwei Punkte gegeben: $A = (1|2)$ und $B = (3|3)$.

Man bestimmt mit dem Differenzenquotienten die Steigung m:

$$m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + b$$

Jetzt wird der y-Achsenabschnitt berechnet. Dabei wird ein Punkt in die bereits vorhandene Funktionsgleichung eingesetzt. Hier Punkt A.

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + b$$

$$4 = b$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$$

Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion wird auch eine Parabel genannt. Geometrisch ist sie definiert durch eine Leitlinie und einen Brennpunkt. Dabei werden alle Punkte, die vom Brennpunkt und der Leitlinie denselben Abstand haben markiert. Diese Punkte würden eine Parabel ergeben. Der Brennpunkt ist der Punkt, in den alle parallel zur y-Achse einfallenden Strahlen reflektiert werden. Eine Parabel hat zwei Funktionsgleichungen. Entweder die Normalform:

$$ax^2 + bx + c$$

Oder die Scheitelform, wobei $S = (u|v)$ gilt:

$$a(x-u)^2 + v$$

Der Scheitel *S* einer Parabel ist der höchste bzw. tiefste Punkt der Parabel, in anderen Worten eine Extremalstelle. Welche Form ist nun praktischer? Normalform oder Scheitelform? Eine quadratische Funktion kann mit beiden Methoden dargestellt werden. Es gibt ein kleiner Trick, wie man schnell die Normalform in die Scheitelform umrechnen kann. Dies ist vor allem dann ein Vorteil, wenn man schnell wissen will, wo sich der Scheitel befindet, um die Parabel von Hand zu zeichnen. Die Scheitelform ist auch praktisch, wenn man eine Parabel vor sich hat, denn dann kann man sofort die Scheitelform ohne grosses Rechnen ermitteln. Als Beispiel wird die quadratische Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x + 3$$

betrachtet. Es gibt mehrere Möglichkeiten ans Ziel zu kommen. Man könnte quadratisch ergänzen, dies wäre allerdings etwas mühsam. Stattdessen kann einfach die Geometrie der Parabel betrachtet werden[1]. Daraus folgt, dass die Parabelöffnung a gleich bleibt und dass der x-Wert des Scheitels:

$$u = x_s = -\frac{b}{2a} = 16$$

Und der y-Wert des Scheitels ergibt sich, wenn man den x-Wert des Scheitels in die Funktion einsetzt:

$$v = y_s = f(x_s) = -61$$

Somit ist die Scheitelform:

$$\frac{1}{4}(x-16)^2 - 61$$

Es gäbe eine coolere Variante diesen Scheitel zu berechnen, nämlich mittels Kurvendiskussion. Dabei wird die Extremalstelle der Funktion berechnet.

$$f' = \frac{1}{2}x - 8 = 0$$

$$x = 16$$

Jetzt haben wir den x-Wert[2] und würden den in die Funktion einsetzen und bekämen 61. So rechnet man von der Normalform in die Scheitelform um. Um von der Scheitelform zur Normalform zu kommen, muss man ausmultiplizieren. Somit überprüfen wir die vorher erhaltene Lösung:

$$\frac{1}{4}(x-16)^2 - 61$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 8x + 3$$

Damit stimmt die vorher getestete Methode.

[1] Die Lösung für die Bestimmung des x-Wertes des Scheitels kommt aus der Zauberformel, bei der einfach angeschaut wird, wann die Parabel nur eine Lösung hätte.

[2] Eigentlich müsste man hier noch schauen, ob die zweite Ableitung nicht Null ist. Da $f'' = \frac{1}{2}$ ist, existiert diese Lösung. Interessant zu wissen wäre noch, ob der Scheitel das Minimum oder Maximum der Parabel ist. Eigentlich müsste man den erhaltenen Wert in die zweite Ableitung einsetzten um herauszufinden, ob es ein Maxima oder ein Minima ist. Da die zweite Ableitung aber eine Konstante ist, muss die Parabelöffnung a betrachtet werden. Da a positiv ist, ist die Funktion gegen oben offen und folglich ein Minimum. Wäre die Parabel gegen unten offen, sprich a negativ, dann wäre es ein Maximum.

Brennpunkt und Leitlinie

Als Beispiel wird eine Parabel angeschaut, die ihren Scheitel S im Punkt $(0|0)$ hat. Die Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

Dann wird

$$ax^2 = \frac{1}{4p}x^2$$

gesetzt und nach p aufgelöst.

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4p}x^2$$

$$p = 1$$

Aber was heisst jetzt das nun? p stellt den Abstand vom Scheitel zum Brennpunkt dar. Also muss dem y-Wert des Scheitels den Faktor p addiert werden.

$$B = (u|v + p)$$

Im Beispiel wäre der Brennpunkt folglich $B = (0|1)$. Um die Leitlinie zu finden muss man den gleichen Abstand p runter wie man vorhin zum Brennpunkt gegangen ist.

$$f(x) = v - p$$

Im Beispiel würde sich somit:

$$f(x) = -1$$

ergeben. Abbildung 1 veranschaulicht die Funktion und man kann erkennen, dass die Angaben stimmen.

Wenn man die Nullstellen einer Parabel rausfinden möchte, ist die Normalform praktischer. Im Folgenden wird eine Zauberformel hergeleitet, die sofort eine, zwei oder keine (reelle) Lösung liefert. Zur Herleitung wird die quadratische Ergänzung gebraucht.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wenn man in dieser Formel die Faktoren a,b und c einsetzt, kommen sofort die Nullstellen raus. Der Ausdruck:

$$D = b^2 - 4ac$$

ist die Diskriminante. Diese heisst so, weil sie sofort angibt wie viele Lösungen, sprich Nullstellen, die jeweilige Parabel hat. Es gibt drei Fälle:

$$D < 0 \rightarrow keine\ (reelle)\ Lösung$$

$$D = 0 \rightarrow eine\ \ Lösung\colon\ -\frac{b}{2a}$$

$$D > 0 \rightarrow zwei\ \ Lösungen\colon \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}\ ;\ \frac{-b - \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

Diese Formel kann auch bei biquadratischen Gleichungen gebraucht werden. Hierzu ein Beispiel:

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

Nun wird $x^2 = z$ gesetzt. Somit erhält man eine quadratische Gleichung, die mit der Zauberformel gelöst wird.

$$z^2 - 6z + 8 = 0$$

Wenn man nun diese Werte in den Taschenrechner eingibt, kommen die Lösungen

$$z_1 = 2\ und\ \ z_2 = 4$$

raus. Jetzt wird wieder $x^2 = z$ gesetzt und nach x aufgelöst.

$$2 = x^2\ \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$4 = x^2\ \rightarrow\ x = \pm 2$$

Als Abschluss wird diskutiert, wie man aus drei gegebenen Punkte eine quadratische Funktionsgleichung generieren kann.

Gegeben seien die Punkte: $A = (1000|95)$, $B = (1400|182)$ und $C = (1800|206)$. Da man weiss, dass die Funktionsgleichung nach der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ aussieht, können drei Gleichungen aufgestellt werden:

$$95 = a \cdot 1000^2 + b \cdot 1000 + c$$

$$182 = a \cdot 1400^2 + b \cdot 1400 + c$$

$$206 = a \cdot 1800^2 + b \cdot 1800 + c$$

Jetzt kann man diese drei Gleichungen in der Matrix auf dem Taschenrechner eingeben und diese mit der Funktion „rref“ von ihm lösen lassen.

$$A = \begin{pmatrix} 10^6 & 1000 & 1 & 95 \\ 1400^2 & 1400 & 1 & 182 \\ 1800^2 & 1800 & 1 & 206 \end{pmatrix}$$

$$rref([A])$$

Nach kurzer Zeit bekommt man drei Lösungen:

$$a = -1.968 \cdot 10^{-4}$$

$$b = 0.69$$

$$c = -398.12$$

Daraus folgt:

$$f(x) = -1.968 \cdot 10^{-4} x^2 + 0.69x - 398.12$$

Anwendungen von solchen quadratischen Funktionen sind Radarempfang, Scheinwerfer,...

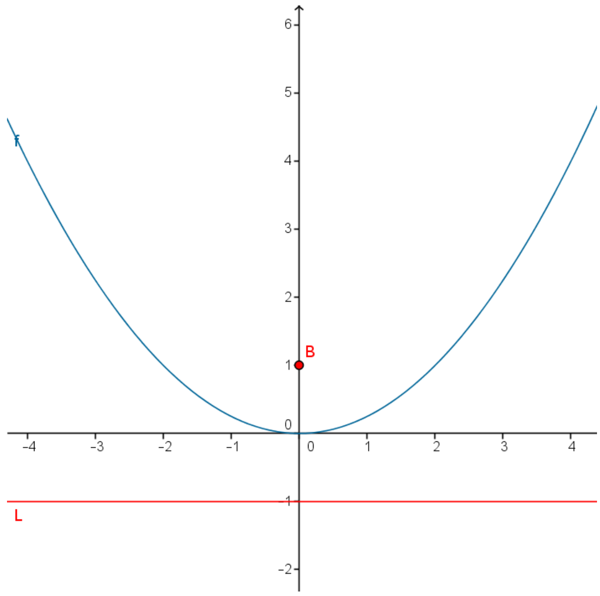


Abbildung 1 zeigt das Beispiel mit der Leitlinie und dem Brennpunkt.

Trigonometrie

Rechtwinkliges Dreieck

Die Begriffe Hypotenuse, Gegen- und Ankathete sollten bekannt sein. Im rechtwinkligen Dreieck gibt es die wichtigen Formeln Sinus, Cosinus und Tangens, die wie folgt definiert sind:

$$\sin(\alpha) = \frac{g}{h}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{g}{a}$$

Diese Formeln kann man sich gut mit dem Spruch:

***G**ugel**h**opf! **A**h**a**! **G**eht **a**uch!*

merken.

Wichtige Werte, welche man im Kopf haben sollte, sind in Abbildung 2 veranschaulicht.

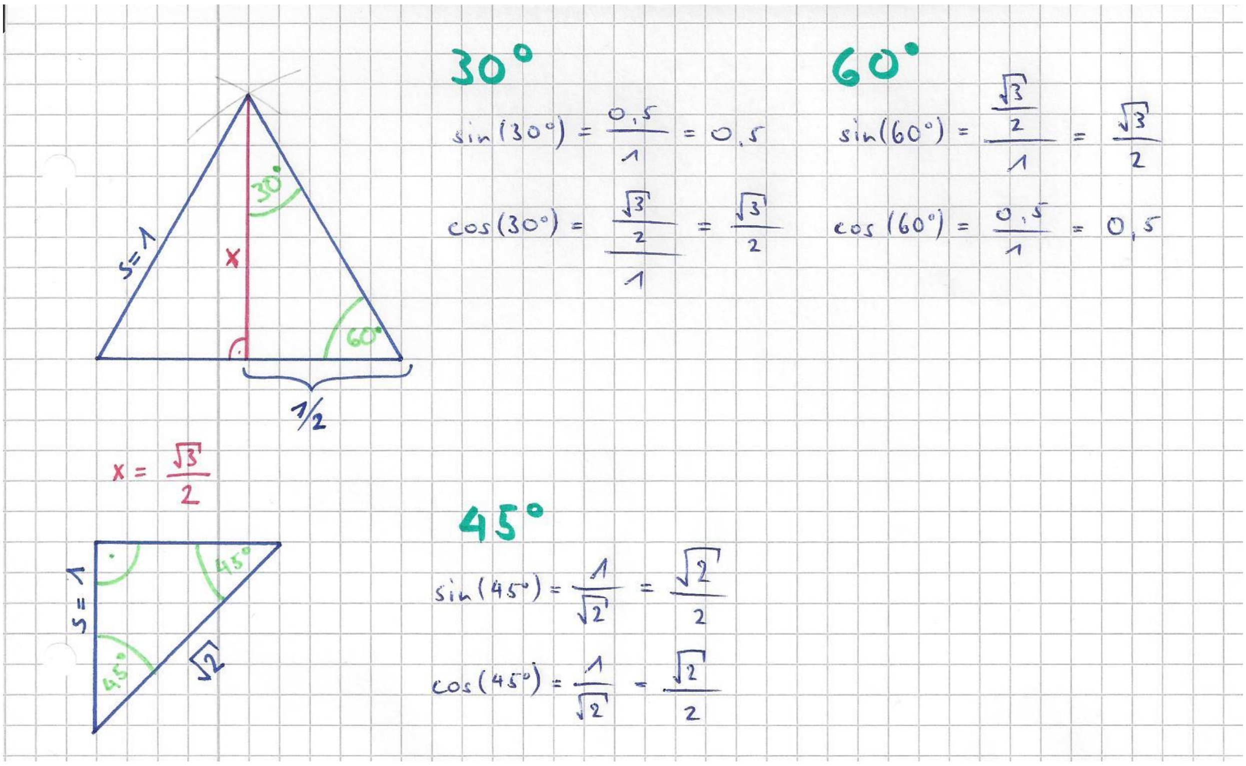


Abbildung 2 zeigt die Berechnungen zu den wichtigen Werten.

Im rechtwinkligen Dreieck herrschen spezielle Formeln und Zusammenhänge.

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Beweis

$$\sin(\alpha) = \frac{g}{h} \rightarrow g = h \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{h} \rightarrow a = h \cdot \cos(\alpha)$$

Mit Pythagoras ergibt dies:

$$h^2 = g^2 + a^2$$

$$h^2 = h^2 sin^2(\alpha) + h^2 cos^2(\alpha)$$

Nun kann durch h^2 dividiert werden und man erhält den vorher behaupteten Term.

$$1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

q.e.d

Ein anderer Zusammenhang ist:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Beweis

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{g}{h}}{\frac{a}{h}} = \frac{g}{h} \cdot \frac{h}{a} = \frac{g}{a} = \tan(\alpha)$$

q.e.d

Allgemeines Dreieck

Im allgemeinen Dreieck gibt es ein paar Formeln, die man beherrschen sollte. Hier folgen die Wichtigsten:

Sinussatz (Umkreisradius)

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

Der Sinussatz wird aus folgenden Formeln hergeleitet:

$$A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin(\alpha)$$

$$A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin(\gamma)$$

$$A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin(\beta)$$

Ferner gilt auch:

$$r = \frac{abc}{4A}$$

Wobei r als Umkreisradius angeschaut wird.

Für die Fläche gilt:

$$A = \frac{a^2 \sin(\beta)\sin(\gamma)}{2\sin(\alpha)}$$

Auch aus dieser Formel lassen sich durch zyklische Vertauschung zwei andere gewinnen.

Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen werden mit dem Bogenmass dargestellt. Das Bogenmass gibt auch einen Winkel an. Mit folgender Formel wird umgerechnet:

$$arc\ \alpha = \frac{2\pi\alpha}{360}$$

Wobei $2\pi = 360°$.

So sehen die Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens aus:

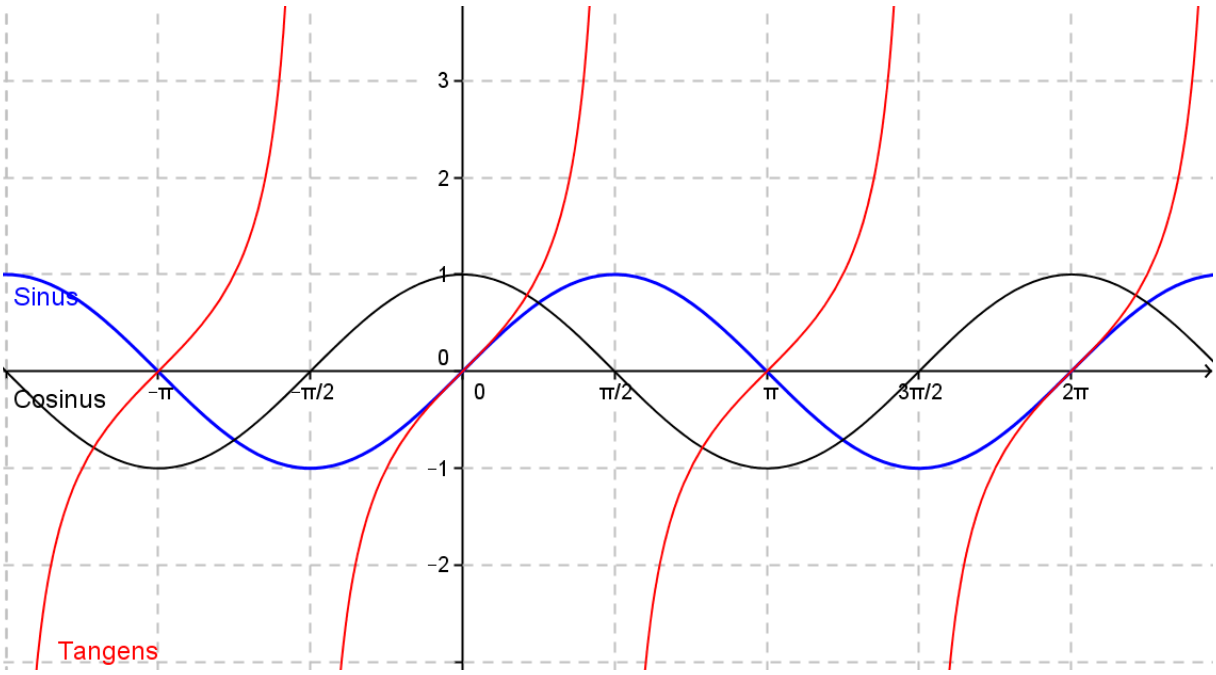


Abbildung 3 zeigt die drei trigonometrischen Funktionen.

Aus der Abbildung lässt sich schliessen, dass der Tangens bei $\pi/2$ nicht definiert ist. Des Weiteren auch, dass der Cosinus ein verschobener Sinus ist. Es gilt:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Solche trigonometrische Funktionen haben viele Anwendungsbereiche. Man kann damit die Tageslänge modellieren, den Wechselstrom oder elektromagnetische Wellen. In der Quantenphysik spielen Wellen auch eine grosse Rolle.

Eine grosse Hilfe um sich vorstellen zu können, wie diese Werte der trigonometrischen Funktionen zustande kommen, ist, dass man sich einen Einheitskreis zeichnet, wie in Abbildung 4 gezeigt. Man kann dann schön sehen, wie die Schwingung der Werte zustande kommt.

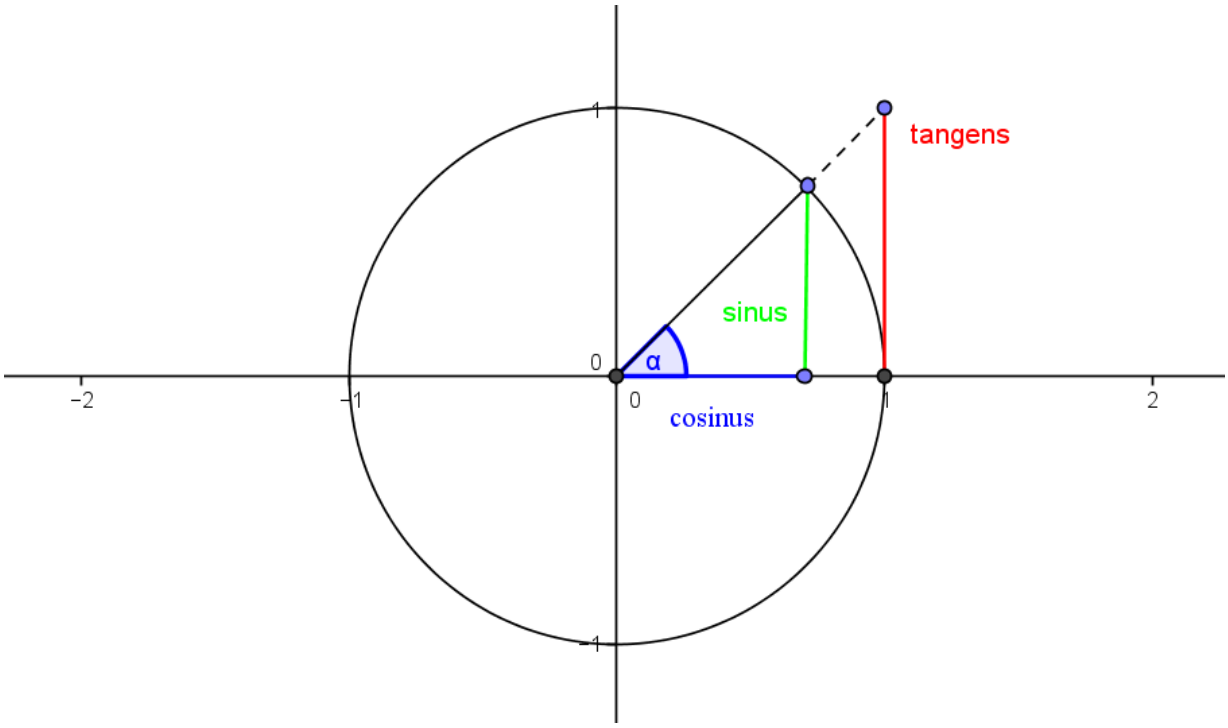


Abbildung 4 zeigt einen Einheitskreis, bei dem eine Umdrehung gleich 2π ist.

Man kann den Sinus bzw. den Cosinus verschieben bzw. stauchen oder strecken. Im Folgenden wird dies an einem Sinus erläutert, da der Cosinus wie vorhin gesehen ein verschobener Sinus ist. Ziel ist, wenn man einen Sinus hat, dessen Funktionsgleichung ermitteln zu können. Als Beispiel dient der Graph aus Abbildung 5.

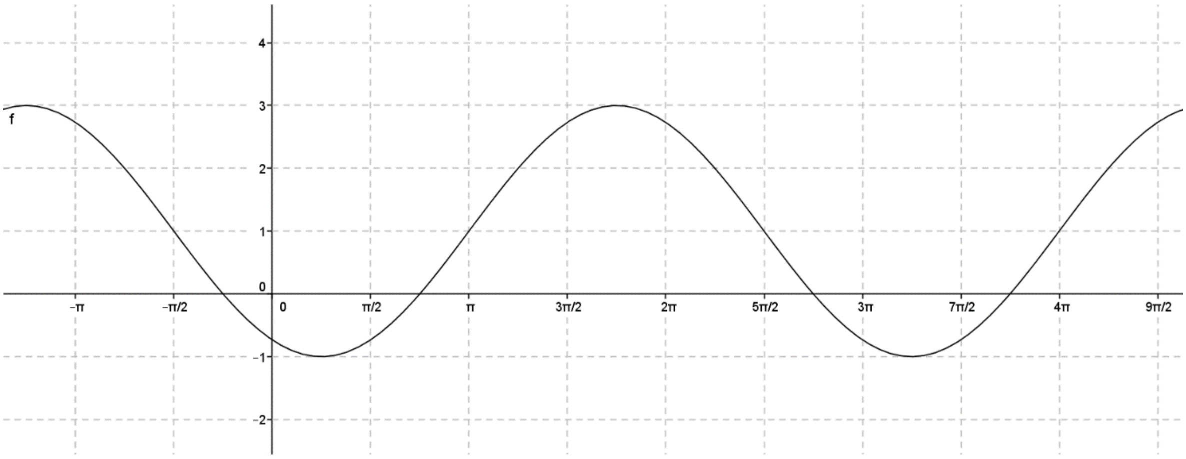


Abbildung 5 zeigt einen angepassten Sinus, bei dem die Funktionsgleichung ermittelt wird.

Man geht von einem Sinus aus.

- Mittellage (Verschiebung in y-Richtung)

$$d = \frac{(höchster\ Wert + kleinster\ Wert)}{2}$$

Im Beispiel wäre dies:

$$d = \frac{\big(3 + (-1)\big)}{2} = 1$$

$$\sin(x) + 1$$

- Amplitude (Streckung)
  Distanz von der Mittellage bis zum höchsten Punkt oder:

$$a = \frac{(höchster\ Wert - kleinster\ Wert)}{2}$$

Im Beispiel wäre dies:

$$a = \frac{\big(3 - (-1)\big)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$2 \cdot \sin(x) + 1$$

- Frequenz
  Bei der Frequenz rechnet man 2π durch die Periodenlänge oder wenn der Graph abbricht durch die Anzahl der x-Achse. Die Periodenlänge ist eine Schwingung.
  Im Beispiel wäre dies:
  $$b = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$
  $$2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 1$$
- Verschiebung in x-Richtung
  Im Beispiel wäre dies:
  $$c = \pi$$
  Somit ergibt sich für die Funktionsgleichung:
  $$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}(x - \pi)\right) + 1$$

Im Allgemeinen gilt für eine Sinusschwingung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$

Wenn man zum Beispiel drei Punkte gegeben hat und man muss eine Funktionsgleichung herausfinden, zeichnet man den Graphen und bestimmt die Funktionsgleichung mit diesem „Rezept".

Potenzfunktionen

Exkurs: Rechenregeln für die Potenzen

Aus der Algebra gelten ein paar wichtige Gesetze.

- $a^2 \cdot a^4 = a^6$

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

- $a^3 : a^2 = a$

$$\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

- $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$

$$\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

- $a^3 : b^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

$$\boldsymbol{a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

- $(a^2)^3 = a^6$

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Wenn nichts vor dem a steht, dann steht eine 1 als Zähler. Wenn aber zum Beispiel $5a^{-n}$ steht, dann steht die 5 als Zähler: $\frac{5}{a^n}$.

- a^0 oder a^{-0} ist immer 1

- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

- $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

$$\boldsymbol{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}}$$

Diese Regel ist praktisch, um Inversfunktionen von Funktionen zu finden, bei denen ein Bruch im Exponent steht.
Wenn bei den letzten beiden Punkten noch eine Zahl vor dem a steht, bleibt diese einfach vor dem Wurzelterm stehen.

Potenzfunktionen
Funktionen der Form:

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

heissen Potenzfunktionen.

Wurzelfunktionen
Funktionen der Form:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

heissen Wurzelfunktionen.

Ganzrationale Funktionen
Weiter oben wurden die linearen und die quadratischen Funktionen behandelt. Diese sind Spezialfälle der ganzrationalen Funktionen n-ten Grades (Polynomfunktionen).
Eine Funktion der Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad n \in \mathbb{N},\ \ a \in \mathbb{Q}$$

heisst ganzrationale Funktion vom Grade n, wenn n eine natürliche Zahl ist, a_0, a_1,…, a_n rationale Zahlen sind und natürlich $a_0 \neq 0$ gilt.
Damit ergibt sich für $n = 1$ eine lineare Funktion:

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

Für $n = 2$ ergäbe sich eine quadratische Funktion.

Sobald ganzrationale Funktionen dritten Grades auftauchen, wird es sofort komplizierter die Nullstellen zu berechnen. Dabei wird die Polynomdivision gebraucht. Im nächsten Beispiel wird dies dargestellt.

$$f(x) = x^3 - 2.65x^2 - 4.495x + 9.61$$

Um die Nullstellen dieser Funktion berechnen zu können, wird die Funktion in den Taschenrechner eingegeben und dort unter „Tableset“ eine Nullstelle gesucht. Man findet $x_1 = -2$. Jetzt wird die Polynomdivision durchgeführt.

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2.65x^2 - 4.495x + 9.61) : (x + 2) = x^2 - 4.65x + 4.805 \\
-(x^3 +\ 2x) \\
\qquad -4.65x^2 - 4.495x + 9.61 \\
\quad -(-4.65x^2 - 9.3x) \\
\qquad\qquad\qquad 4.805x + 9.61 \\
\qquad\qquad\quad -(4.805x + 9.61) \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0
\end{array}$$

Danach wird der quadratische Term mit der Zauberformel durch den Taschenrechner gelöst und man erhält die Lösungen:

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 3.1$$

$$x_3 = 1.55$$

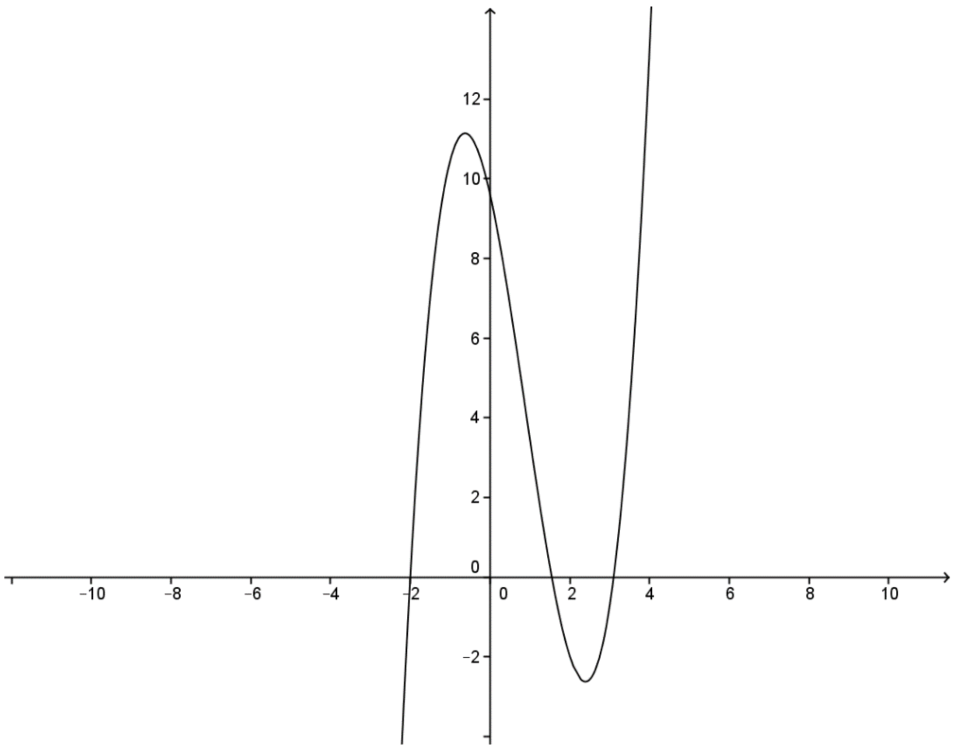


Abbildung 6 zeigt die Funktion dritten Grades, bei der die Nullstellen berechnet wurden. Man kann der Abbildung approximativ entnehmen, dass die Nullstellen, die berechnet wurden, stimmen.

Gebrochenrationale Funktionen

Eine Funktion der Form:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit $Z(x)$ und $N(x) \neq 0$ ganzrationalen Funktionen heisst gebrochenrational. Eine Solche Funktion hat auch Nullstellen, aber sie hat noch zwei weitere Kennzeichen, nämlich die Asymptote und die Polstelle. Um die Nullstelle herauszufinden, wird der Zähler gleich Null gesetzt und aufgelöst. Um die Polstelle herauszufinden, wird der Nenner gleich Null gestellt und aufgelöst. Die Asymptote ist der Wert, an der sich die Funktion nähert. Er wird mehr erraten als berechnet. An der Funktion:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{W} \setminus \{2\}$$

wird das Ganze erläutert.

Nullstelle(n):

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Polstelle(n):

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

Asymptote:

$$\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} = 0$$

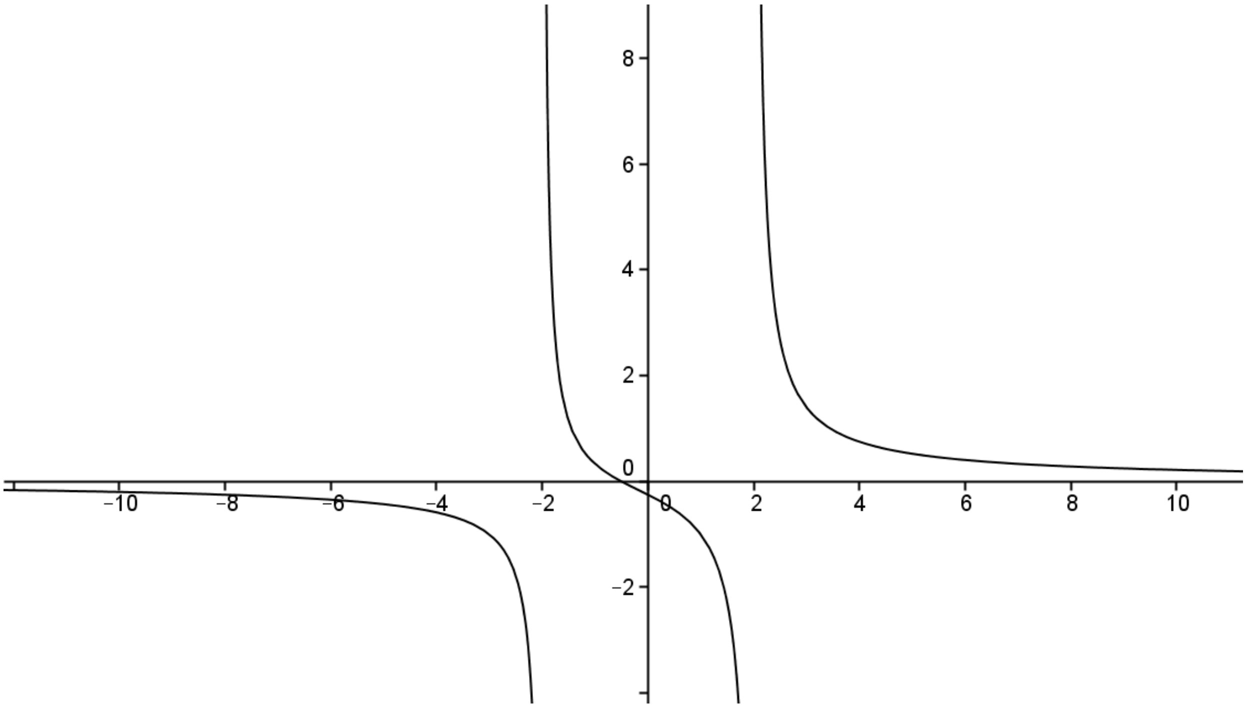


Abbildung 7 zeigt die gebrochenrationale Funktion aus dem Beispiel. Man kann der Abbildung die berechneten Werte erahnen.

Exponentialfunktionen

Eine Funktion der Form:

$$f(x) = b^x \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

heisst Exponentialfunktion.

Exponentialfunktionen eignen sich gut, um eine Verbreitung oder einen Zerfall, welche Zeitabhängig sind, zu beschreiben. Dabei wird die Funktionsgleichung folgendermassen angepasst:

$$f(x) = ab^t$$

Wobei das a als Startwert dient und b der Wachstumsfaktor darstellt. Durch Werte wird die konkrete Funktion bestimmt.
Der radioaktive Zerfallsprozess wird hier etwas genauer erläutert. Man hat zum Zeitpunkt t_0 eine bestimmte Menge N_0 radioaktives Material. Man benutzt die Halbwertszeit[3] als Ansatzpunkt.

$$N\left(T_{1/2}\right) = \frac{1}{2}N_0$$

Wenn zweimal die Halbwertszeit vorbei ist, hat man noch die Hälfte der Hälfte, sprich einen Viertel des Ausgangmaterials.

$$N\left(2T_{1/2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot N_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 N_0 = \frac{1}{4}N_0$$

Das heisst, man sollte herausfinden, welcher Bruchteil der Halbwertszeit zum Zeitpunkt t abgelaufen ist. Dies erreicht man mit dem Exponenten $\frac{t}{T_{1/2}}$. Damit lautet die allgemeine Funktion für das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Oder etwas schöner:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Eigentlich hätte man hier eine Differenzialgleichung lösen müssen, welche die Lösung:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

ergeben hätte. Auf diese Lösung wird hier nicht näher eingegangen.
Anwendungen haben Exponentialfunktionen im radioaktiven Zerfall, wie oben gesehen, Bakterienwachstum oder Schneeballsysteme. Eine etwas berühmtere Anwendung ist der Zins.

[3] Die Halbwertszeit ist die Zeit, bei der nur noch die Hälfte des Ausgangsmaterials vorhanden ist, sprich die Hälfte ist zerfallen.

Zinsformel

Jeder kennt ihn und möchte einen möglichst hohen Zinssatz P haben. Die Formel für das Kapital K nach n Jahren mit dem Startkapital K_0 lautet:

$$K_n = K_0(1+P)^n$$

Beispiel: $K_0 = 1000$, $n = 8$ und $P = 1.5\%$

$$K_8 = 1000(1+0.015)^8 = 1126.50$$

Der Mathematiker Leonard Euler hat sich dann überlegt, wie sich der Zins verhalten würde, wenn man ihn zum Beispiel pro Monat berechnen würde, mit nur einem Zwölftel des Zinssatzes und danach aufsummieren würde. Dies heisst unterjährige Verzinsung. Wenn wie jetzt die jährige mit der unterjährigen Verzinsung vergleichen kommt folgendes raus:

$$K_{12\cdot\frac{1}{12}} = 100\left(1+\frac{0.01}{12}\right)^{12} = 101.00459\ldots$$

$$K_1 = 100(1+0.01) = 101$$

Somit wäre eine unterjährige Verzinsung für den Kunden besser. Euler hat sich dann allgemein überlegt, ob es eine höchste Schranke bei bestimmtem Zinssatz gibt, die man nicht überschreiten kann, auch wenn man noch so kleine Zeitintervalle macht. Dafür hat er ein Jahr in m Abschnitte unterteilt:

$$K_{m\cdot\frac{1}{m}} = K_0 \cdot \left(1+\frac{P}{m}\right)^m$$

Dabei hat er festgestellt, dass die obere Schranke bei:

$$K_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{P}{m}\right)^m = K_0 \cdot e^P$$

liegt. Aus den Berechnungen geht hervor, dass auch wenn man ein Jahr in unendlich kleine Abschnitte zerlegt und der Zinssatz 100% ist, man nicht über die Schranke von:

$$K_1 = eK_0$$

kommt.

Die Zinsformel wird allgemein für exponentielles Wachstum mit konstantem Prozentsatz gebraucht.

Logarithmusfunktionen

Wenn man den Teil über die Exponentialfunktionen liest, könnte man sich fragen, wie denn hier die Inversfunktion aussehen würde. Da die Exponentialfunktionen monoton fallen oder steigen, je nachdem wie die Basis gewählt ist, müsste es eine Inversfunktion geben. Diese wird Logarithmusfunktion zur Basis b genannt und mit $\log_b$ bezeichnet.

Unter dem Logarithmus von y zur Basis b, geschrieben

$$\log_b y$$

versteht man diejenige Zahl, welche als Exponent der Basis b den Wert y ergibt. Mathematisch wird dies so notiert:

$$x = \log_b y \quad \leftrightarrow \quad b^x = y$$

y nennt man den Numerus und b Basis des Logarithmus. Anders ausgedrückt kann man auch sagen den Logarithmus von y zur Basis b finden, ist gleichwertig mit der Beantwortung der Frage: „b hoch was gibt y?“

Im Taschenrechner muss man den Term $x = \log_b y$ anders eingeben, nämlich so:

$$b^x = y \quad \rightarrow \quad \frac{\log(y)}{\log(b)} = x$$

Wichtig zu beachten ist, dass jeder Logarithmus ein Exponent ist.

Da als Basis des Logarithmus oft eine der Zahlen 2, e oder 10 vorkommt, gelten folgende kurze Schreibweisen:

- $\log_{10} x = \log x$ (Zehnerlogarithmus)
- $\log_e x = \ln x$ (Logarithmus Naturalis)
- $\log_2 x = lb\ x$ (Logarithmus dualis)

Es gibt ein paar wichtige Sätze :

- $\log_b (u \cdot v) = \log_b u + \log_b v$
- $\log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
- $\log_b u^n = n \cdot \log_b u$

e^x und $ln\ x$

Jede Exponentialfunktion mit der Basis b lässt sich in eine Form mit der Basis e umschreiben. Dies ist in dem Zusammenhang wichtig, weil so das Ableiten viel einfacher ist, wenn man zum Beispiel die momentane Änderung von einer Bakterienkolonie wissen will.

$$a \cdot b^x \rightarrow a \cdot e^{\ln b \cdot x}$$

Die Euler'sche Zahl ist wie folgt definiert:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281 \ldots$$

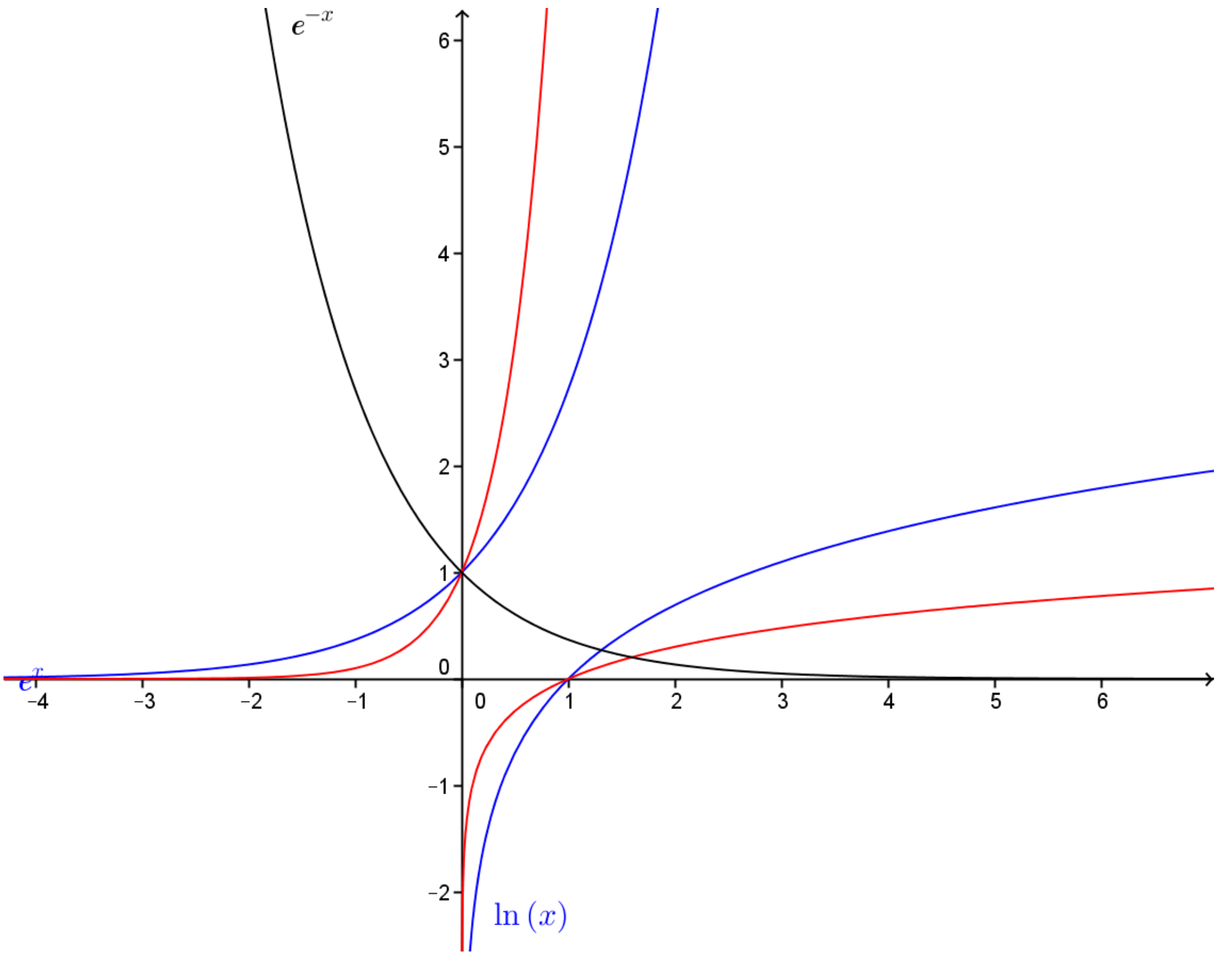
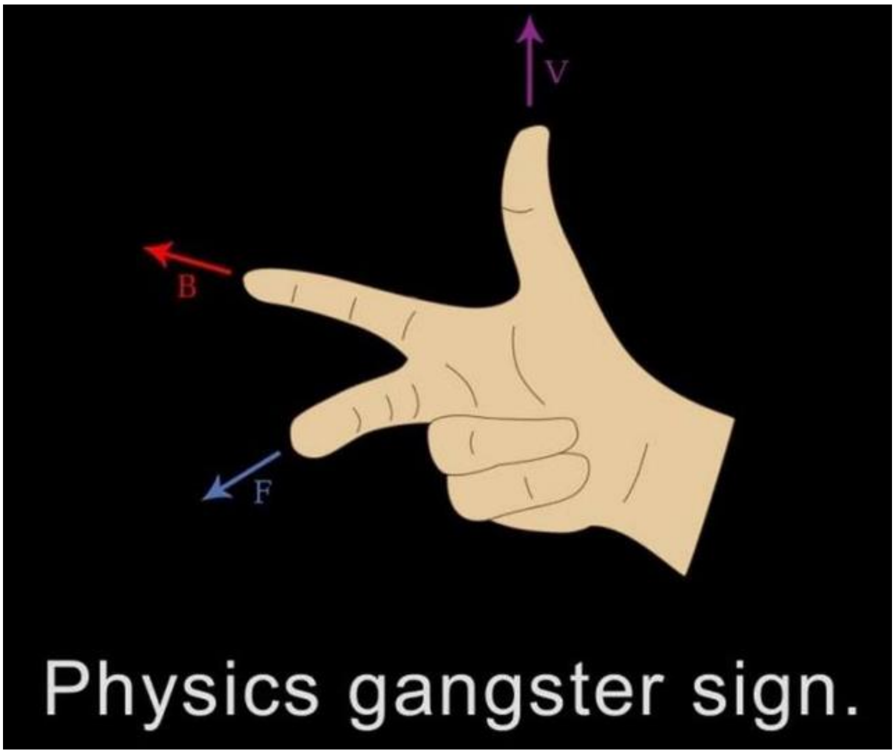


Abbildung 8 zeigt die wichtigsten Exponentialfunktionen mit ihren Inversfunktionen. Man kann gut entnehmen, wie jede Exponentialfunktion durch den Punkt $(0|1)$ *geht und jeder Logarithmus durch den Punkt* $(1|0)$.

Abschliessend ist noch anzumerken, dass das Bild auf der Titelseite keine Funktion ist, sondern eine Relation mit folgender Gleichung:

$$x^6 + 3x^4y^2 - 3x^4 + 3x^2y^4 - x^2y^3 - 6x^2y^2 + 3x^2 + y^6 - 3y^4 + 3y^2 = 1$$

Vektoren



Definition

Ein Vektor ist eine gerichtete Grösse, die sich aus zwei Bestandteilen zusammensetzt:

$$Vektor = Richtung + Länge$$

Ungerichtete Grössen werden als Skalare bezeichnet. Die Kraft wäre zum Beispiel ein Vektor, die Energie eines Systems hingegen ein Skalar.

Darstellung eines Vektors

Man kann Vektoren sowohl zeichnerisch als auch mit Hilfe von Zahlen darstellen. Zeichnerisch benutzt man dazu einen Pfeil, wie in Abbildung 9 gezeigt.

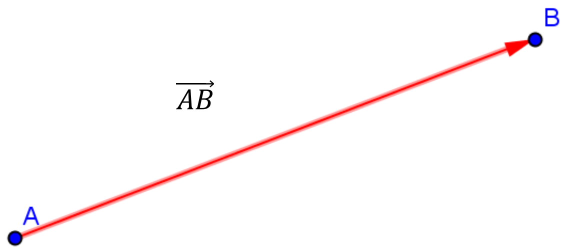


Abbildung 9 zeigt einen zweidimensionalen Vektor.

Wenn man einen Vektor **a** mit Hilfe von Zahlen darstellen will, gibt man seine drei Komponenten a_x , a_y und a_z im kartesischen Koordinatensystem an. Mit dieser Darstellung wird ein Vektor üblicherweise wie folgt angegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Wenn bei einer Rechnung die Richtung des Vektors keine Rolle spielt, reicht es mit seinem Betrag beziehungsweise mit der Länge zu arbeiten. Der Betrag wird folgendermassen berechnet:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Diese Formel kann leicht mit Pythagoras bewiesen bzw. hergeleitet werden, denn sie ist nichts anderes als eine dreidimensionale Erweiterung des Satzes von Pythagoras.

Was passiert nun, wenn man zwei Punkte hat und man möchte einen Vektor „basteln“, der diese beiden Punkte verbindet? Dies wird an einem Beispiel erläutert:

Punkt O: $(0|0|0)$

Punkt P: $(1|1|1)$

$$\overrightarrow{OP} = P - O = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung 10 zeigt eine Abbildung des Beispiels.

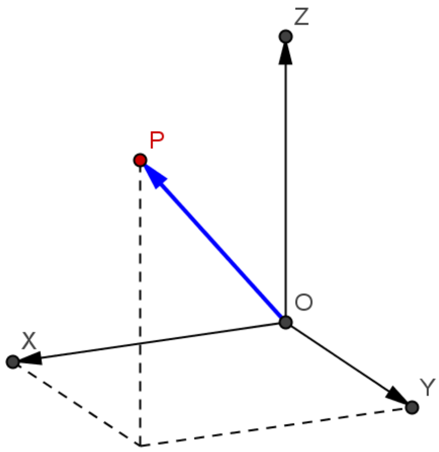


Abbildung 10 zeigt das vorherige Beispiel graphisch.

Operationen mit Vektoren

Addition und Subtraktion

Wie Zahlen und physikalische Grössen können Vektoren addiert oder subtrahiert werden. Allerdings muss man beachten, dass man einen Vektor nicht mit einer Zahl addieren oder subtrahieren kann. Man kann ja auch nicht Äpfel und Birnen addieren. Man kann Vektoren zeichnerisch oder rechnerisch addieren.
Bei einer Addition wird Komponentenweise addiert:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}=\vec{c}$$

Die Subtraktion erfolgt analog.

Multiplikation

Logischerweise kann man Vektoren auch miteinander multiplizieren. Hier wird die Situation allerdings etwas komplizierter, denn man kann Vektoren mit einer Zahl, sprich einem Skalar oder mit einem anderen Vektoren multiplizieren. Wenn zwei Vektoren multipliziert werden:

- Kann eine Zahl rauskommen. In diesem Fall spricht man von dem Skalarprodukt.
- Oder ein neuer Vektor ergibt sich. Hier spricht man vom Vektorprodukt oder Kreuzprodukt.

S-Multiplikation

Hier wird jede Komponente eines Vektors mit einem Skalar multipliziert. Das Ergebnis ist ein Vektor, der die gleiche Richtung hat, aber gestaucht oder gestreckt wurde.

$$n\cdot\vec{a}=n\cdot\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} na_x \\ na_y \\ na_z \end{pmatrix}$$

Eine solche Operation kann auch den Vektor drehen, falls n negativ gewählt wird.

Das Skalarprodukt

Beim Skalarprodukt werden wie vorhin angetönt zwei Vektoren so miteinander multipliziert, dass ein Skalar entsteht, sprich eine Zahl. Das Skalarprodukt lautet:

$$S = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Das Skalarprodukt besitzt folgende wichtige Eigenschaften:

- Das Skalarprodukt ist kommutativ
  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
- Mit Hilfe des Skalarproduktes lässt sich der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen. Es gilt:

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

  Dieser Ausdruck kann via Cosinussatz hergeleitet werden und ergibt nach φ aufgelöst:

  $$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

  Daraus folgt, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren genau dann Null ist, wenn sie senkrecht aufeinander stehen:

  Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit der Bedingung $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} = \vec{0}$ gilt:

  $$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

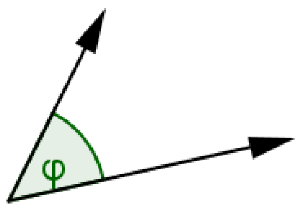


Abbildung 11 zeigt ein Schema des Skalarproduktes.

Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt ist eine andere Art der Multiplikation, bei der ein neuer Vektor entsteht. Man schreibt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Definition

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \vec{c}$$

Das Vektorprodukt hat ein paar interessante Eigenschaften:

- Das Vektorprodukt steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Der Betrag des neuen Vektors bzw. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist gleich die Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgestellten Parallelogramms. Wenn man die Fläche eines Dreiecks berechnen will, hat dividiert man die erhaltene Fläche noch durch zwei.

  Ferner gilt noch:

  $$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

  Wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

- Das Vektorprodukt ist null, wenn die beiden Vektoren parallel zueinander sind.

- Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ.

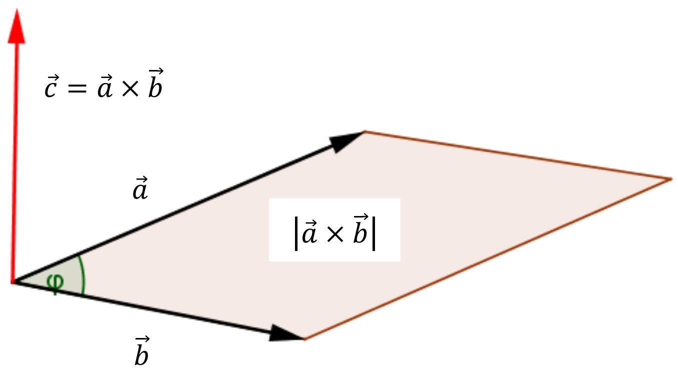


Abbildung 12 veranschaulicht das Vektorprodukt.

Das Vektorprodukt spielt in der Physik eine grosse Rolle. Unter anderem sind das Drehmoment, die Winkelgeschwindigkeit und die Lorentzkraft, welche im Titelbild dargestellt ist, als Kreuzprodukt definiert.

Gerade

Eine Gerade ist durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und einen Richtungsvektor $\vec{r}$ definiert.

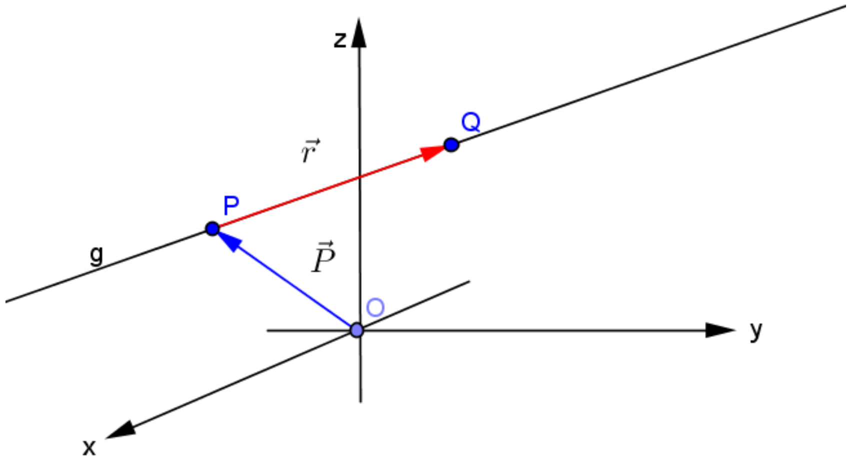


Abbildung 13 zeigt eine Gerade.

Man nennt:

$$g\colon\ \vec{P} + t\vec{r}$$

Eine Parameterdarstellung der Geraden g. $\vec{P}$ ist der Stützvektor und $\vec{r}$ den Richtungsvektor von g.

Koordinatenform einer Ebene

Definition

Die Darstellung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

heisst Koordinatenform oder Koordinatengleichung der Ebene. Eine Ebene kann durch drei Punkte oder einem Stützvektor und zwei sogenannte Spannvektoren definiert werden.
Die Koordinatenform ist nach J. Wassmer die beste Form eine Ebene darzustellen, denn man kann sofort überprüfen, ob sich ein Punkt in der Ebene befindet, indem man den Punkt in die Gleichung einsetzt. Wenn man wissen möchte, wo die Ebene die jeweiligen Achsen des kartesischen Koordinatensystems schneidet, setzt man die beiden anderen Parameter gleich null und löse die Gleichung auf. Ferner kann der Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene schnell bestimmt werden, indem die Parameterform der Gerade in die Koordinatenform eingesetzt wird.

Ein wichtiger Satz ist folgender:

Ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

ein Normalvektor einer Ebene $\vec{E}$, so gilt die oben beschriebene Form. Der Normalvektor ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.

Abstand Punkt-Ebene

Für den Abstand eines Punktes $P = (x|y|z)$ im Raum von einer Ebene E gilt:

$$d = \left|\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

Die Herleitung wird hier nicht durchgeführt.

Wichtiges Beispiel zur Koordinatenform

Finde die Koordinatenform der Ebene durch $A = (7|2|3|); B = (4|11|2|)$ und $C = (9|9|9)$.

Man bildet die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 \\ 16 \\ -39 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 61x + 16y - 39z + D = 0$$

$A \in E$

$$427 + 32 - 117 + D = 0$$

$$D = -342$$

$$\Rightarrow 61x + 16y - 39z - 342 = 0$$

Folgen und Reihen

Definition Zahlenfolge

Eine Folge ist eine Funktion deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen, oder eine Teilmenge davon, ist.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Eine Zahlenfolge ist eine Folge, die nur aus Zahlen besteht. Die einzelnen Zahlen jeder Folge nennt man Glieder. Es ist naheliegend, dass jedem Glied eine feste Position zugeordnet ist. Schreibweise:

$$f(k) = a_k$$

Wobei das k für die Position steht.

Beschreibungen von Folgen

Rekursive Definition

Bei der rekursiven Definition einer Folge ergibt sich das *k*-te Glied aus den vorherigen Gliedern mit Hilfe einer Rekursionsvorschrift. Bei dieser Definition müssen dann auch so viele Glieder explizite angegeben werden, wie die Rekursionsvorschrift „zum Starten" benötigt. Als Beispiel wird die Fibonacci-Folge betrachtet, die wie folgt lautet:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad \ldots$$

Diese Folge kann nun rekursiv wie folgt beschreiben werden:

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$$

Explizite Definition

Bei der expliziten Definition einer Folge erhält man ein beliebiges Glied sofort aus der Funktionsvorschrift, indem man direkt einsetzt. Als Beispiel dient wieder die Fibonacci-Folge. Aus der Matrizenrechnung kann die explizite Definition hergeleitet werden, die

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

lautet.

Die Partialsumme einer Folge

Häufig ist interessant zu wissen, wie die Summe der Glieder einer Folge lautet.

Definition

Die *n*-te Partialsumme der ersten n oder aller Glieder einer Folge ist die Summe:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Arithmetische Folgen

Definition

Eine arithmetische Folge ist eine Zahlenfolge, deren Glieder mit folgender rekursiven Formel berechnet werden können:

$$a_{k+1} = a_k + d$$

Wobei *d* immer konstant bleibt. Dies bedeutet, dass die Glieder immer um einen festen Bestandteil zunehmen. Anders ausgedrückt wäre eine arithmetische Folge eine diskrete affine Funktion. Der Name kommt daher, dass jedes Glied gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Nachbarglieder ist:

$$a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2}$$

Ein Beispiel einer arithmetischen Folge wäre die Folge der geraden Zahlen:

$$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad \ldots$$

Formeln

Für diesen Funktionstyp gibt es bestimmte Formeln. Die explizite Definition lautet:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

Die *n*-te Partialsumme lautet:

$$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Diese Formel ist der „Gauss Trick“.

Geometrische Folgen

Definition

Eine geometrische Folge ist eine Zahlenfolge, deren Glieder mit folgender rekursiven Formel berechnet werden können:

$$a_k = a_{k-1} \cdot q$$

Wobei *q* immer konstant bleibt. Dies bedeutet, dass die Glieder um den Faktor q zunehmen. In anderen Worten ist eine geometrische Folge eine diskrete Exponentialfunktion. Der Name kommt daher, dass jedes Glied durch das geometrische Mittel der Beträge der beiden Nachbarglieder beschrieben werden kann:

$$a_k = \sqrt{|a_{k+1} \cdot a_{k-1}|}$$

Formeln

Die explizite Definition lautet:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

Die *n*-te Partialsumme:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Herleitung:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

Nun wird diese Gleichung mit q multipliziert.

$$s_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$$

Nun wird $s_n q$ von s_n subtrahiert.

$$s_n - s_n q = a_1 - a_1 q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Wichtiger Satz

Eine geometrische Reihe konvergiert, falls $-1 < q < 1$. Der Wert dieser Zahl beträgt:

$$s = \frac{a_1}{1-q}$$

Dies folgt unmittelbar aus obiger Formel. Wenn q kleiner als 1 ist und dann noch hoch etwas Grosses gerechnet wird, dann wird das Resultat unendlich klein und q^n fällt weg.

Reihen

Definition

Unter einer Reihe versteht man die unendliche Summe einer Zahlenfolge. In der Physik kann man mit einer Reihe Funktionen beziehungsweise Funktionswerte gut darstellen. Des Weiteren kann man mit einem Potenzreihenansatz Differentialgleichungen lösen.

Konvergenz

Definition

Eine Folge $< a_k >$ heisst konvergent gegen den Grenzwert *g*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)\ so, \qquad dass\ |a_k - g| < \varepsilon \quad \forall k > N(\varepsilon)$$

Auf Deutsch: Eine Folge $< a_k >$ heisst konvergent gegen den Grenzwert *g*, wenn zu jeder noch so kleinen ε-Umgebung von g eine Nummer $N(\varepsilon)$ so existiert, dass alle Glieder a_k mit $k > N(\varepsilon)$ in dieser Umgebung liegen.

In anderen Worten: Sie geben mir ein beliebiges noch so kleines Epsilon, aber grösser als Null, und ich finde eine Stichzahl *N*, bei welcher der Abstand $|a_k - g|$ kleiner ist als Epsilon.

Beispiel

Es folgt ein rechnerisches Beispiel auf der nächsten Seite. An dieser Stelle wäre noch anzumerken, dass man mit dieser Methode auch feststellen kann, ab welchem Index n die n-te Partialsumme um weniger als einen festen Prozentsatz ε vom eigentlichen Wert der Reihe abweicht, vorausgesetzt man betrachtet eine konvergierende geometrische Folge.

$$|s - s_n| < \varepsilon$$

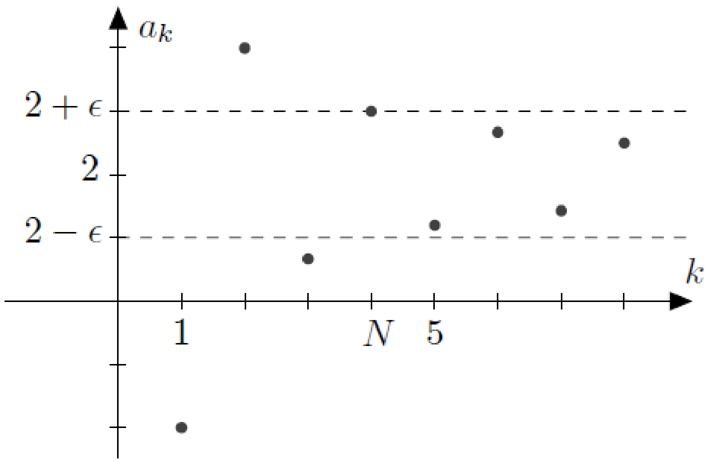


Abbildung 14 veranschaulicht die Epsilonumgebung.

Die Zahlenfolge

$$a_k = 2 + (-1)^k \cdot \frac{4}{k}$$

Wird angeschaut. Es wird versucht den Grenzwert zu ermitteln. Dieser ist:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = g = 2$$

Danach wird Epsilon bestimmt. Im Beispiel wäre dieses 1. Abbildung 14 zeigt die Situation. Jetzt wird die Gleichung aufgestellt:

$$\left|2 + (-1)^k \cdot \frac{4}{k} - 2\right| < 1$$

Die 2 heben sich gegenseitig auf und da der Betrag genommen wird, kann der Term $(-1)^k$ weggelassen werden.

$$\frac{4}{k} < 1$$

$$4 < k$$

Das heisst, dass ab der Nummer *N*=4 alle Glieder in der gewählten Umgebung liegen. Wird nun ε beliebig gewählt, kann die davon abhängige Stichzahl sofort berechnet werden:

$$\frac{4}{N} < \varepsilon$$

$$\frac{4}{\varepsilon} < N$$

Wichtige Beispiele von Folgen und Reihen

Zenon'sches Paradoxon

Der Zenon, den ein jeder kennt,

war zu Elea einst Dozent.

. . .

Schildkröten sind uns hierzuland

als plump und langsam wohl bekannt.

Achill, so schliess ich, weil ich hell,

läuft sicherlich zehnmal so schnell.

Je nun, er rennt, so denk ich mir,

mal um die Wette mit dem Tier.

Zehn Meter Vorsprung geb' er bloss;

dies Zugeständnis scheint nicht gross.

Die Glocke tönt, der Kampf fängt an,

nun, gute Kröte, halt' Dich ran!

Zehn Meter läuft Achilles heiter;

die Kröte ist 'nen Meter weiter.

Auch diesen läuft Achill in Eil;

die Kröte läuft den zehnten Teil.

Auch dieses Stück durchmisst Achill,

doch ach, das Vieh steht auch nicht still;

sie ist trotz allem etwas weiter;

Achilles ist schon nicht mehr heiter.

So wiederholt sich stets dies Spiel,

und nimmer kommt der Held zum Ziel.

Nimmt er der Kröte alten Ort, schwupp!

ist sie auch schon wieder fort.

Er kommt in Wut bis zur Ekstase;

die Kröte dreht ihm eine Nase.

Sie bleibt ihm stets ein Stück voraus;

Achilles schleicht geknickt nach Haus;

die Kröte aber triumphiert

und wird mit Orden dekoriert.

Zenon sagt, er unterteile eine endliche Zeitspanne in unendlich viele Teilabschnitte. Der Fehler liegt darin, dass er nur die unendlich vielen Teilabschnitte der Zeitspanne anschaut und dann hat er schon recht, dass die Schildkröte immer etwas weiter ist. Berücksichtigt man aber, dass die Summe dieser Zeitspanne, welche in unendlich viele Teilabschnitte geteilt wurde, endlich ist, hat Zenon unrecht und wie man sich denken kann, gewinnt Achilles das Rennen.

Sierpinski-Teppich

Bei einer Variante des Sierpinski-Teppichs, dem sogenannten Sierpinski-Dreieck, werden in einem gleichseitigen Dreieck jeweils alle Seiten halbiert, die Seitenmitten zu einem Dreieck verbunden, und letzteres entfernt. So fährt man immer fort.

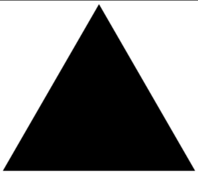
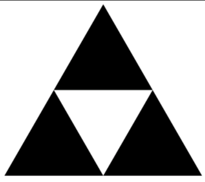
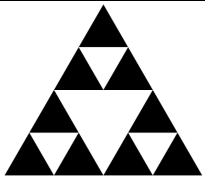
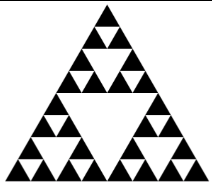
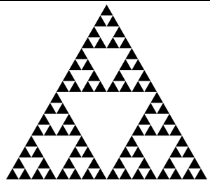
Iteration 0	Iteration 1	Iteration2	Iteration 3	Iteration 4
				

Tabelle 1 zeigt das Sierpinski-Dreieck bis zur 4-ten Iteration.

Interessant wäre zu wissen wie sich die Fläche verhält. Aus der Tabelle kann man argumentativ begründen, dass die Fläche gegen Null gehen wird, doch ausschlaggebend für diese Argumentation ist, dass die Fläche genug schnell gegen Null geht und dies lässt sich nur mathematisch begründen.

Hier die Rechnung:

Die Fläche bei der 0-ten Iteration beträgt:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

Nach der ersten Iteration beträgt die Fläche noch:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 - \frac{\sqrt{3}}{16} s^2$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{16} \right) s^2 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} s^2$$

Nach der zweiten Iteration beträgt die Fläche noch:

$$A_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} s^2 - \frac{3}{16} A_0 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} s^2 - \frac{3}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$$

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} s^2 - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{64} s^2 = \left(\frac{12 \cdot \sqrt{3}}{64} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{64} \right) s^2$$

$$= \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{64} s^2$$

Wie man den Resultaten entnehmen kann, handelt es sich hier um eine geometrische Zahlenfolge mit $q = \frac{3}{4}$. Folglich geht die Fläche gegen Null, denn man erhält hier eine diskret abfallende Exponentialfunktion.

Koch’sche Schneeflocke

Eine Koch’sche Schneeflocke entsteht von links nach rechts. Vergleiche

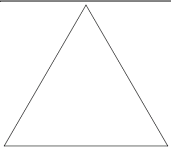
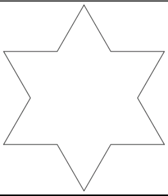
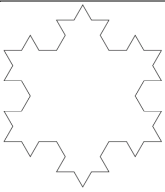
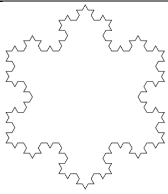
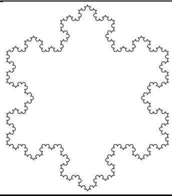
Iteration 0	Iteration 1	Iteration 2	Iteration 3	Iteration 4
				

Tabelle 2 zeigt die Entstehung einer Koch'schen Schnneflocke.

Man möchte untersuchen, wie sich der Umfang beziehungsweise die Fläche verhalten. Vom Schiff aus würde man hier sagen, dass der Umfang und die Fläche immer weiter zunehmen werden. Hier folgen die Berechnungen.

Umfang

Der Umfang beträgt bei der 0-ten Iteration:

$$U_0 = 3s$$

Nach der ersten Iteration beträgt dieser: Hier wird eine Vereinfachung durchgeführt. Man betrachtet nur die Koch’sche Kurve und multipliziert dann das Resultat mit 3, damit man auf das gewünschte Resultat kommt.

$$U_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} s$$

Nach der zweiten Iteration beträgt der Umfang:

$$U_2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{9} s + \frac{4}{3} s\right) = 3s \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{12}{9}\right) = 3s \cdot \frac{16}{9} = 3s \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Somit ergibt sich eine geometrische Zahlenfoge mit $q < 1$ und folglich wächst der Umfang exponentiell.

$$U_k = 3s \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

Fläche

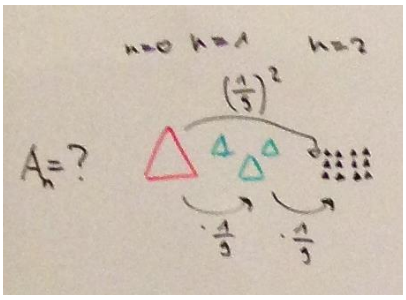


Abbildung 15 zeigt die Flächenstücke, welche hinzukommen.

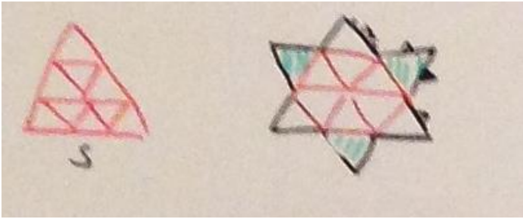


Abbildung 16 zeigt die Koch'sche Schneeflocke, mit Farbe als Hilfe.

Die Idee ist nun, dass man zuerst anschaut, wie sich die Fläche, der hinzukommenden Stücke verhält, danach wie viele dazukommen. Sobald eine Formel für vorher Erwähntes gefunden wird, kann man diese Flächenstücke addieren und kommt (hoffentlich) auf eine geometrische Reihe.

Aus Abbildung 15 sieht man, dass die Fläche der hinzukommenden Stücke immer um den Faktor $\frac{1}{9}$ abnimmt. Da kann man schon eine Formel aufschreiben:

$$A_{Dreiecke\ hinzu} = \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot A_0$$

Jetzt muss aber noch berücksichtigt werden, dass die Anzahl der Dreiecke immer zunimmt. Somit kann man die Flächenzunahme gesamthaft so beschreiben:

$$\Delta A = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot A_0$$

Jetzt muss man die Reihe dieser Zahlenfolge finden.

$$A_{ges} = A_0 \cdot \left(1 + 3 \cdot 4^0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 3 \cdot 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + A_n\right)$$

$$A_{ges} = A_0 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + 4^0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + A_n\right)$$

$$A_{ges} = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 4^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + A_n\right)$$

$$A_{ges} = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + \boxed{\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3} + \cdots +\right)$$

Man kann nun erkennen, dass es sich bei dem Rechteck um eine geometrische Zahlenfolge handelt, die wie folgt lauten würde:

$$a_k = 1 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

Daraus kann man nun die n-te Partialsumme nehmen:

$$A_{ges} = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Jetzt wäre der Anfangswert 1 zu viel, folglich muss man den abziehen. Zusätzlich kann man statt die n-te Partialsumme direkt die Summe notieren, da $n \to \infty$ geht.

$$A_{ges} = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{9}\right)^0 + s\right)$$

Da $|q| < 1$ gilt, konvergiert die Reihe gegen einen Wert.

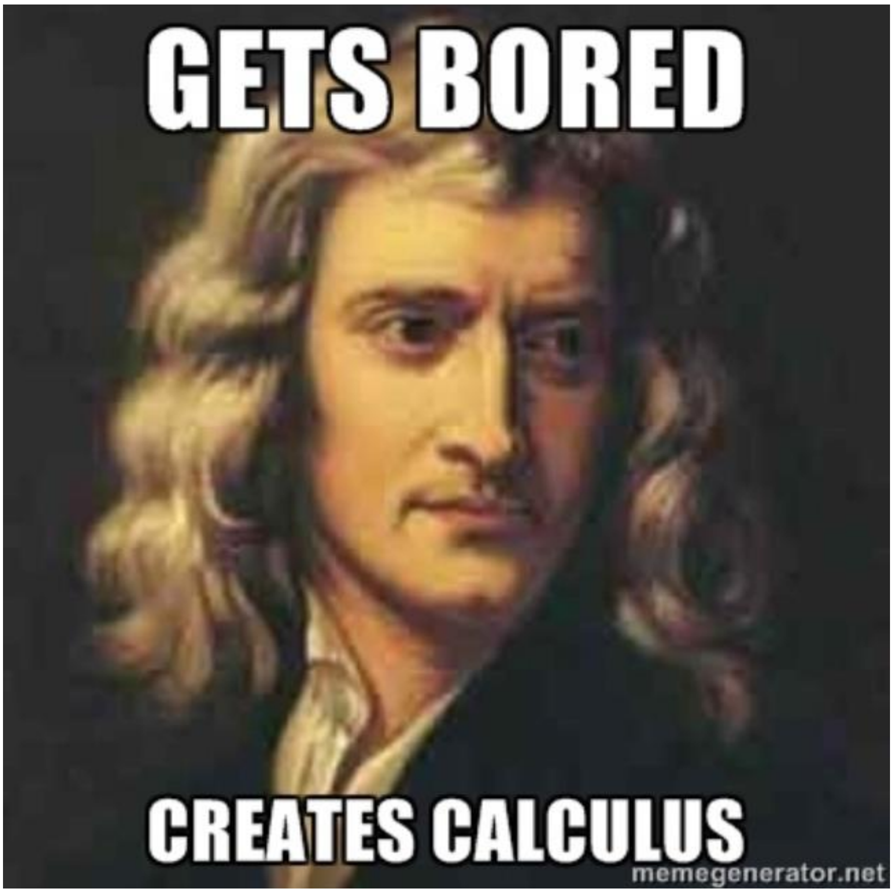
$$A_{ges} = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{9}\right)}\right) = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{5}\right) = A_0 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{15} = A_0 \cdot \frac{8}{5}$$

$$\boldsymbol{A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \cdot \frac{8}{5}}$$

Aus den Berechnungen geht hervor, dass der Umfang diskret exponentiell zunimmt, die Fläche hingegen begrenzt ist. Man kann sich dies so vorstellen, dass man einen Kreis um die Schneeflocke zeichnen kann, der die Schneeflocke auch nach beliebig vielen Iterationen noch umschliessen würde.

Die Koch'sche Schneeflocke ist ein Fraktal. Es ist eines der ältesten und bekanntesten. Ein Fraktal ist etwas, das sich bis extrem klein immer wiederholt und nie endet.

Differenzial- und Integralrechnung



Differenzialrechnung

Das Tangenten- und Flächenproblem aus der Antike war der Ansatzpunkt für die Differenzial- und Integralrechnung. Bei dem Tangentenproblem geht es darum, eine Tangente[4] an einer Kurve zu konstruieren. Wie man sich leicht erdenken kann, ist dies an einem Kreis relativ einfach, bei einer Parabel oder einem Ellipsoid sind schon ganz andere Methoden notwendig. Daraus folgt, dass man für jede verschiedene Kurve eine andere Methode brauchte. Da in der Antike nicht sehr viele Kurven bekannt waren, bestand kein Anlass eine allgemeine Methode zu finden. Zu Beginn des Barocks, sprich um 1600, änderte sich dies schlagartig mit der Entstehung der analytischen Koordinatengeometrie, weil nun beliebig viele Kurven vorhanden waren. Jetzt wurde ein allgemeines Verfahren gebraucht, welches die Untersuchung des Verlaufes einer Tangente für jede beliebige Kurve ermöglicht.
Das Flächenproblem bestand darin, den Inhalt einer durch Kurven begrenzten Fläche zu berechnen. In der Antike wurde dies mittels raffinierter Zerlegungen gelöst. Nichtsdestotrotz existierte keine allgemeine Methode.

Kurzum, die Mathematik der Antike war statisch. Dies bedeutet, dass sie nicht in der Lage war, veränderliche Grössen zu beschreiben. Berücksichtigt man dies, wird klar, dass es schwierig bis unmöglich ist, einen veränderlichen Prozess zu analysieren und daraus induktiv ein Naturgesetz zu eruieren.

Erst im 16. und 17. Jahrhundert veränderte sich die Mathematik, indem sie den allgemeinen Begriff der veränderlichen Grösse aufnahm. Ziel war nun, vor allem mechanische Bewegungsabläufe zu erfassen und theoretisch beschreiben zu können.

Dieser neuen Mathematik gelang es, mit denselben Methoden sowohl das Tangentenproblem als auch das Flächenproblem sowie die Bewegungsprobleme zu lösen. Des Weiteren zeigte sie die Verwandtschaft dieser Probleme. René Descartes (1596-1650) legte mit der Einführung von Funktionen den Grundstein für die Beschreibung veränderlicher Grössen. In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts erschufen Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) gleichzeitig ein neues Gebiet der Mathematik. Heutzutage heisst dieses Gebiet auf Deutsch Infinitesimalrechnung, Analysis oder Differenzial- und Integralrechnung. Im Englischen spricht man von Calculus.

Die Differenzialrechnung löst das Tangentenproblem und die Integralrechnung das Flächenproblem. Weiter spielt die Analysis in der Physik eine enorm wichtige Rolle. Die aus der Analysis hervorgehenden Differenzial- und Integralgleichungen haben den enormen Fortschritt der Naturwissenschaften bewirkt. Den Chemiker interessiert, wie sich die Reaktionsgeschwindigkeit eines von der Temperatur abhängigen chemischen Prozesses verändert, wenn man die Temperatur um einige Grade erhöht beziehungsweise absenkt, während der Physiker verzweifelt nach einer Funktion sucht, die das Elektron im Wasserstoffatom beschreibt.

Diese mathematische Revolution ermöglichte ein Jahrhundert später die industrielle Revolution.

[4] Eine Tangente ist eine Gerade, welche eine Kurve nur an einem Punkt berührt.

Übergang Differenzenquotient in Differenzialquotient

Da Funktionen Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Grössen darstellen, ist es von grosser Bedeutung, die Änderungsrate der Funktion zu kennen. Zum Beispiel wie sich der Preis einer Aktie verändert oder die Geschwindigkeit eines fallenden Objektes. Der Quotient:

$$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = m = \tan\alpha$$

gibt die *durchschnittliche* Änderung über dem Intervall $[t_1, t_2]$ an. Mit diesem Quotienten wird auch die Steigung einer linearen Funktion berechnet, folglich kann dieser Wert als Tangens des Steigungswinkels α interpretiert werden. Da Zähler und Nenner jeweils Differenzen sind, heisst der Bruch Differenzenquotient.
Wenn nun Δt gegen Null strebt, geht auch $\Delta f(t)$ gegen Null. Der Wert des Differenzenquotienten muss aber nicht zwangsläufig gegen Null gehen. Dieser erreicht (hoffentlich) einen Grenzwert. Dieser Grenzwert, falls existierend, ist die *momentane* Änderung des Funktionswertes bei t.

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

Dieser Grenzwert ist der Differenzialquotient und führt zur Differenzialrechnung. $f'(t)$ ist die Tangentensteigung von f im Punkt t. Der Arcustangens dieser Steigung ist der Steigungswinkel von f im Punkt t. Abbildung 17 zeigt die Situation.

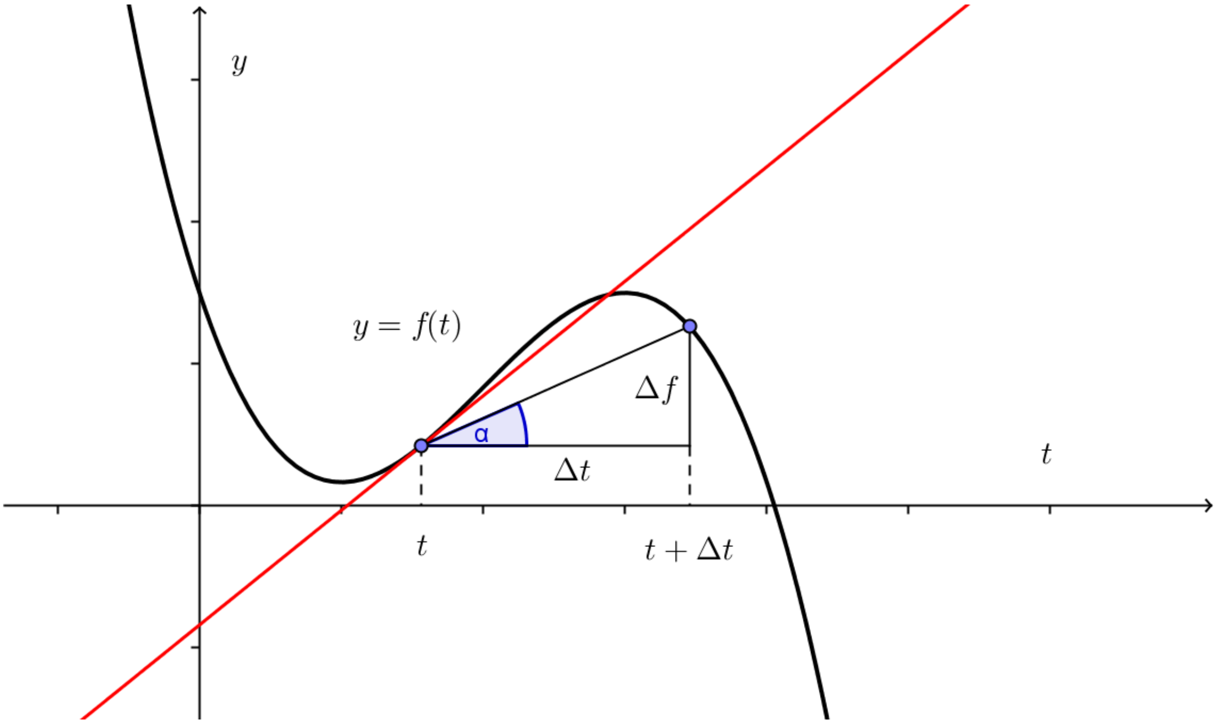


Abbildung 17 zeigt vorher Erklärtes graphisch dargestellt. Man kann das Steigungsdreieck von der durchschnittlichen Änderung gut erkennen und daneben die rote Tangente, welche die momentane Änderung repräsentiert. Aus diesem Bild ist klar ersichtlich, dass man mit dem Differenzenquotienten nicht die momentane Änderung bestimmen kann.

Definition

Die Steigung der Tangente bei t wird als Steigung des Graphen in t, also als momentanes Änderungsverhalten der Funktion f an der Stelle $\left(t \middle| f(t)\right)$.

Die Ableitung

Existiert für jedes x in einem Intervall der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df(x)}{dx}$$

So kann damit eine neue Funktion f' definiert werden. Diese Funktion f' nennt man Steigungsfunktion, weil jedem x eine Steigung zugeordnet wird. Durch f' wird das Änderungsverhalten der Ausgangsfunktion f charakterisiert. f' wird oft kurz als Ableitung von f bezeichnet.

Ableitungsregeln

Bei der Ableitung von Funktionen gibt es einige wichtige Rechenregeln, die im Folgenden vorgestellt werden.

1. Die Ableitung einer Konstante ergibt Null:

$$f(x)=a \Rightarrow \frac{df(x)}{dx}=f'(x)=0$$

Beweis trivial

2. Wenn die abzuleitende Funktion eine Konstante enthält, eine sogenannte multiplikative Konstante, kann man diese vor die Ableitung ziehen beziehungsweise stehen lassen:

$$\big(af(x)\big)'=\frac{d\big(af(x)\big)}{dx}=a\frac{df(x)}{dx}=a\cdot f'(x)$$

Beweis trivial

3. Bei der Ableitung einer Summe von Funktionen werden die Ableitungen der Einzelfunktionen addiert (Summenregel). In anderen Worten: Bei einer Summe von Funktionen darf man gliedweise ableiten:

$$\big(f(x)+g(x)\big)'=\frac{d(f(x)+g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$

Beweis

$$\big(f(x)+g(x)\big)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

Jetzt wird der Bruch in zwei Teile gespalten, denn es gilt, dass das Limit einer Summe, die Summe der verschiedenen Limits ist. Unter Verwendung dieser Information kommt man auf die obere Behauptung:

$$\big(f(x)+g(x)\big)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

Für eine Subtraktion erfolgt der Beweis analog.

4. Wenn die Funktion eine Potenz von x darstellt, besagt die Potenzregel: Bei der Ableitung verringert sich die Potenz um eins; gleichzeitig tritt die ursprüngliche Potenz als Faktor auf:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Beweis

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{-2}h^2 + \cdots - x^n}{h}$$

Nun kann man h kürzen bevor man den $limes$ nimmt und daraus ergibt sich:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

5. Ist die abzuleitende Funktion das Produkt zweier Funktionen, so gilt die Produktregel:

$$F'(x) = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \frac{d\left(f(x) \cdot g(x)\right)}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beweis

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Der Ausdruck muss zuerst etwas manipuliert werden, damit der Beweis zustande kommt. Im Zähler wird der Term $f(x+h)g(x)$ subtrahiert und addiert.

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

Hier muss beachtet werden, dass die beiden Terme in der Mitte platziert wurden und dass gesamthaft 0 addiert wurde. An dieser Stelle wird nun das Limit zerlegt, im ersten Bruch $f(x+h)$ und im zweiten $g(x)$ ausgeklammert:

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x)$$

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

6. Ist die abzuleitende Funktion ein Quotient zweier Funktionen, so gilt die Quotientenregel:

$$F'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

   Beweis: Man führt die Quotientenregel auf eine Produktregel zurück

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

7. Ein etwas spezieller Fall liegt vor, wenn zwei Funktionen ineinander verschachtelt sind, wie etwa in dieser Form:

$$F(x) = f\big(g(x)\big)$$

   In diesem Fall muss man die Kettenregel anwenden, die wie folgt lautet:

$$F'(x) = \left[f\big(g(x)\big)\right]' = \frac{d\left[f\big(g(x)\big)\right]}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) \cdot \frac{g(x)}{dx} = f'(x) \cdot g(x) \cdot g'(x)$$

   Da der Beweis der Kettenregel ziemlich umständlich ist, wird hier auf diesen verzichtet und diese wichtige Regel wird akzeptiert.

Dies sind die wichtigsten Regeln zum Ableiten. Es folgt ein Beispiel. Die erste Ableitung der Funktion:

$$f(x) = 3e^{-2x} \cdot \sin(x - \pi)$$

wird gesucht.

Die erste Ableitung lautet:

$$f'(x) = -6e^{-2x} \sin(x - \pi) + 3e^{-2x} \cos(x - \pi)$$

An dieser Stelle wäre noch anzumerken, dass man eine Funktion nicht nur einmal sondern mehrere Male ableiten kann. Dabei gelten die gleichen Regeln, die vorhin erklärt wurden.

Nabla und Delta: Zwei spezielle Ableitungen

Die erste dieser Ableitungen ist der Nabla-Operator ∇, der durch ein umgekehrtes Δ dargestellt wird und nach einem hebräischen Saiteninstrument benannt ist, das ungefähr gleich aussieht.
Die Definition des Nabla-Operators lautet in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Aus der Darstellung geht hervor, dass ∇ ein Vektor aus drei Komponenten ist. Seine x-Komponente ist die partielle Ableitung nach x, die y-Komponente diejenige nach y usw.

Der Laplace-Operator ist im Prinzip das Skalarprodukt zweier Nabla-Operatoren. Im dreidimensionalen Fall gilt:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Oft kann dieser Laplace-Operator auf eine Dimension reduziert werden, was die Berechnung massiv vereinfacht. Im eindimensionalen Fall gilt:

$$\Delta f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Weiter oben wurde der Begriff der partiellen Ableitung gebraucht. Diese wird nicht mit dem Symbol d angegeben, sondern mit einem geschwungenen ∂. Betrachten wir eine Funktion $f(x, y, z)$. Die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z)$$

Betrifft nur die Ableitung der Terme der Funktion nach x, die von x abhängen. Partielle Ableitungen implizieren, dass der Rest als konstant angesehen wird.

Ableitung wichtiger/spezieller Funktionen

Funktion	Erste Ableitung	Zweite Ableitung
$\boldsymbol{x^3}$	$3x^2$	$6x$
$\boldsymbol{x}$	1	0
$\boldsymbol{\sin x}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\boldsymbol{\cos x}$	$-\sin x$	$-\cos x$
$\boldsymbol{\ln x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\boldsymbol{e^x}$	e^x	e^x
$\boldsymbol{a^x}$	$\ln a \cdot e^{\ln a \cdot x}$	$(\ln a)^2 \cdot e^{\ln a \cdot x}$

Tabelle 3 zeigt eine Sammlung wichtiger Ableitungen.

Ableitung von Exponentialfunktionen

Aus Tabelle 3 geht hervor, dass die erste Ableitung der Funktion e^x wieder e^x ergibt. Auf den Beweis wird hier nicht eigegangen. Daraus folgt, dass wenn man eine beliebige Exponentialfunktion ableiten muss, es ratsam ist, diese mit der Basis e zu umschreiben, damit man diese danach bequem mit der Kettenregel ableiten kann. An dieser Stelle möchte ich meinen Mathematiklehrer zitieren:

$$\boldsymbol{Es\ gibt\ nur\ eine\ Basis\ und\ das\ ist\ e}!$$

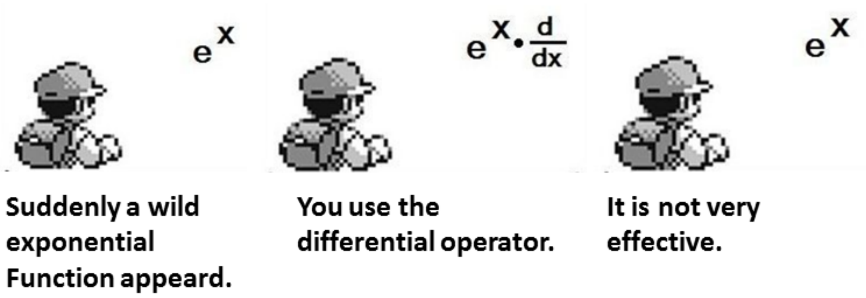


Abbildung 18 veranschaulicht Mario versus e^x.

Stetigkeit

Mittels der Differenzialrechnung kann der Begriff der Stetigkeit verbessert beziehungsweise präzisiert werden. In der Tertia galt: „Eine Funktion, die in einem Zug gezeichnet werden kann, ist stetig“. Jetzt: „Falls f differenzierbar ist, ist f stetig“.

Beweis

Da f differenzierbar ist, existiert der Differenzialquotient. Da sowohl Zähler als Nenner gegen Null streben, folgt:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Jeder Wert geht geschmeidig von einem zum anderen.

Achtung! Die Umkehrung gilt nicht.

Kurvendiskussion

Im folgenden Kapitel werden zuerst ein paar Begriffe eingeführt, bevor sie an einer Funktion erklärt werden.

Extrema

Der Punkt $\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ heisst relatives Minimum oder Tiefpunkt, falls

$$f(x) > f(x_0)$$

für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.

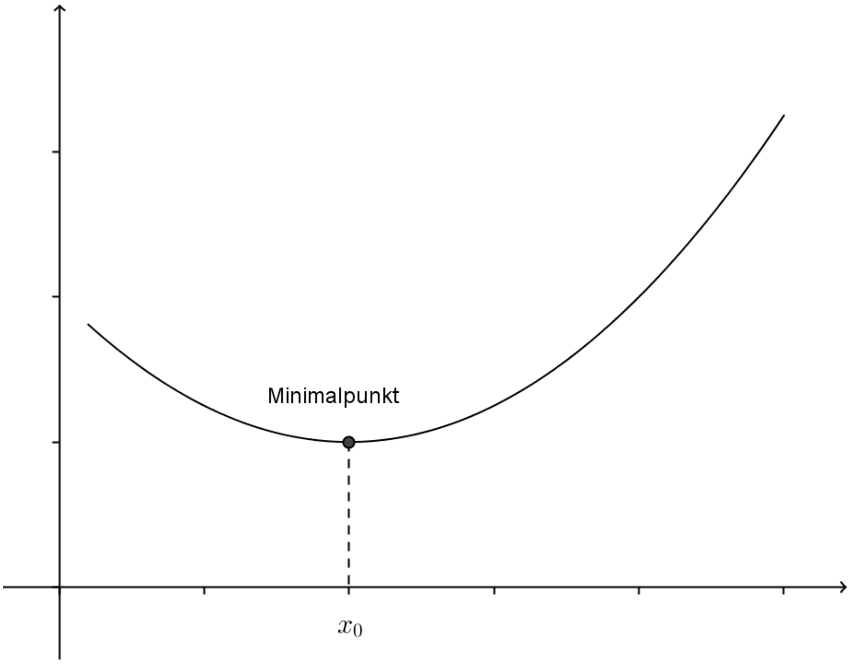


Abbildung 19 zeigt ein Beispiel eines relativen Minimums.

Der Punkt $\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ heisst relatives Maximum oder Hochpunkt, falls

$$f(x) < f(x_0)$$

für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.

Wie man diese Punkt rechnerisch findet, beschreiben folgende Sätze.

Satz

Hat die Funktion f im Punkt x_0 ein relatives Minimum oder Maximum, dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Satz

Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt und folglich erhält man ein Minimum.
Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist der Graph dort rechtsgekrümmt und folglich erhält man ein Maximum.

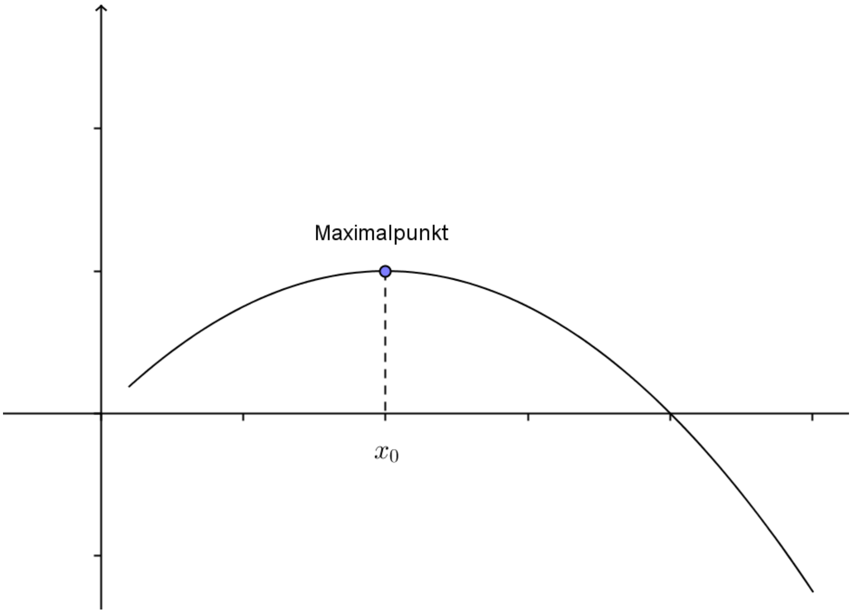


Abbildung 20 zeigt ein relatives Minimum.

Wendepunkte

Man spricht von einem Wendepunkt von f an der Stelle x_0, wenn

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

Man nennt einen Punkt $\left(x_0 \middle| f(x_0)\right)$ Terrassenpunkt oder Sattelpunkt von f, falls

$$f'(x_0) = 0,\; f''(x_0) = 0 \;\; \text{und} \;\; f'''(x_0) \neq 0$$

Beispiel 1

Die Funktion aus Abbildung 21 wird auf Nullstell(en), Extremalstell(en) und Wendepunkt(e) untersucht. Die Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = xe^{2x}$$

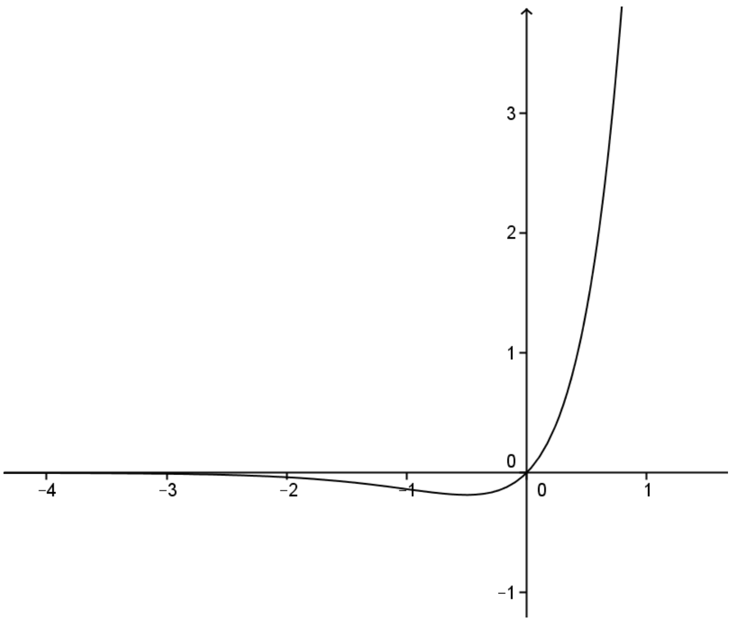


Abbildung 21 zeigt die Funktion aus Beispiel 1.

Nullstellen

$$f(x) = 0$$

$$xe^{2x} = 0$$

Daraus ergibt sich, dass die einzige Nullstelle sich bei $x = 0$ befindet.

Extrema

$$f'(x) = e^{2x}(1 + 2x) = 0$$

Nun kann durch e^{2x} dividiert werden.

$$1 + 2x = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Damit hat die Funktion eine Extremalstelle bei $x = -\frac{1}{2}$. Da

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$$

gilt, handelt es sich um ein Minimum.

Wendepunkte

$$f''(x) = 4e^{2x}(1+x) = 0$$

Nun kann durch $4e^{2x}$ dividiert werden.

$$(1+x) = 0$$

$$x = -1$$

Da $f'''(x) \neq 0$ ist, existiert dieser Wendepunkt. Wird nun der Graph aus Abbildung 21 zur Überprüfung betrachtet, folgt, dass die Berechnungen stimmen.

Beispiel 2

Hier wird eine andere, etwas kompliziertere Kurve betrachtet. Abbildung 22 veranschaulicht die Funktion fünften Grades, welche auf Nullstell(en), Extremalstell(en) und Wendepunkt(e) untersucht wird. Die Funktionsgleichung lautet wie folgt:

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 2x$$

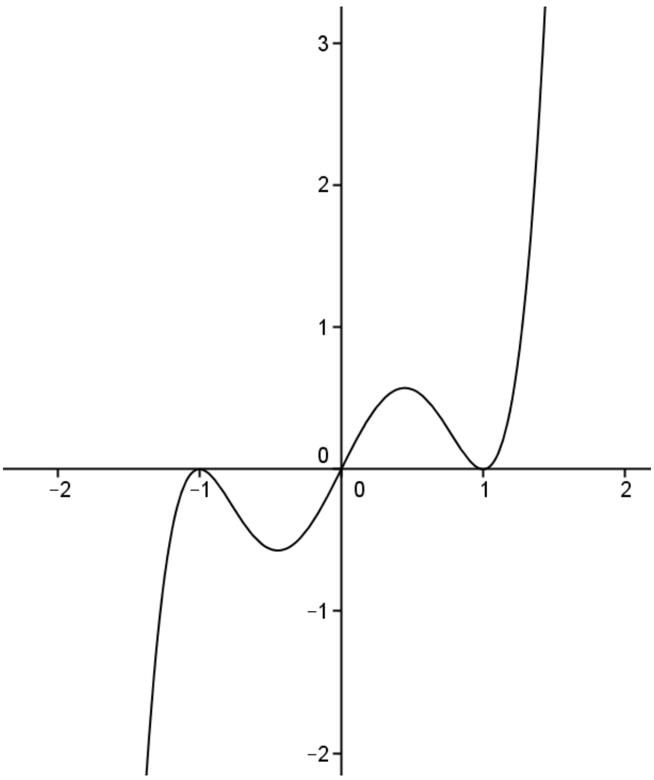


Abbildung 22 zeigt den Graph der Funktion aus Beispiel 2.

Nullstellen

$$f(x) = 0$$

$$2x^5 - 4x^3 + 2x = 0$$

Jetzt wird x ausgeklammert.

$$x \cdot (2x^4 - 4x^2 + 2) = 0$$

Folglich ist eine Nullstelle bei $x_1 = 0$.

$$2x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, welche durch eine Substitution leicht lösbar ist. Für die Substitution wird $t = x^2$ gewählt:

$$2t^2 - 4t + 2 = 0$$

Dieser Term wird mit der Zauberformel gelöst:

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = 1$$

Nun wird die Resubstitution durchgeführt:

$$t = x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = -1$$

Extrema

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$10x^4 - 12x^2 + 2 = 0$$

Es handelt sich wieder um eine biquadratische Gleichung. Somit wird eine Substitution durchgeführt mit $t = x^2$:

$$10t^2 - 12t + 2 = 0$$

Eingesetzt in der Zauberformel ergibt dies:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{20}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 1 \quad \text{und} \quad t_2 = \tfrac{1}{5}$$

Resubstitution

$$t = x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -1$$

$$t = x^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \sqrt{\tfrac{1}{5}} \quad \text{und} \quad x_4 = -\sqrt{\tfrac{1}{5}}$$

Die Extremalstellen der Funktion wären gefunden. Ferner kann die Ableitungsfunktion faktorisiert werden:

$$f'(x) = (x^2 - 1) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5}\right)$$

Aber welche Extremalstellen sind Minima oder Maxima?

$$f''(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \text{ Minimalstelle}$$

$$f''(x_2) < 0 \quad \Rightarrow \text{ Maximalstelle}$$

$$f''(x_3) < 0 \quad \Rightarrow \text{ Maximalstelle}$$

$$f''(x_4) > 0 \quad \Rightarrow \text{ Minimalstelle}$$

Wendepunkte

$$f''(x) = 40x^3 - 24x$$

$$f''(x) = 0$$

$$40x^3 - 24x = 0$$

x kann ausgeklammert werden.

$$x \cdot (40x^2 - 24) = 0$$

Daraus folgt, dass sich ein Wendepunkt bei $x_1 = 0$ befindet.

$$40x^2 - 24 = 0$$

$$40x^2 = 24$$

$$\Rightarrow \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{24}{40}} = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Da $f'''(x) = 120x^2 - 24x \neq 0$ gilt, existieren diese Wendepunkte. Nun kann man wieder den Graph aus Abbildung 22 zur Überprüfung anschauen. Dabei erkennt man, dass die Berechnungen stimmen.

Integralrechnung

Im vorherigen Kapitel war von der momentanen Änderung die Rede. Nun kann man sich die Frage stellen, wie man von der momentanen Änderung einer Grösse auf die Gesamtänderung schliessen kann. Es stellt sich heraus, dass die Gesamtänderung einer Grösse als Flächeninhalt unter der Kurve interpretiert werden kann. Folglich wird nach einer Methode gesucht, die den Flächeninhalt unter der Kurve berechnen kann.

In der Integralrechnung geht es darum, eine Funktion $F(x)$ zu finden, derer Ableitung gerade $f(x)$ entspricht. Die symbolische Schreibweise $\int f(x)\,dx$ geht auf Leibniz zurück und erinnert an das Wort Summe, lateinisch „fumma“, daher das Zeichen.

Die Stammfunktion

$S(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$ im Intervall I, wenn $\frac{dS}{dx} = f$ für alle $x \in I$. Kurzum:

$S(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$, wenn diese abgeleitet f ergibt. Um die Stammfunktion zu finden, muss man sich fragen, welche Funktion abgeleitet f ergibt?

Für den Zusammenhang Funktion-Stammfunktion wird ein spezielles Symbol verwendet, man schreibt:

$$\int f(x)\ dx = S(x) + c$$

Das dx gibt an, nach welcher Variable integriert werden soll. Das Wort integrieren kommt vom lateinischen „integrare“, was wiederherstellen heisst. Das c ist die Integrationskonstante und darf bei einem unbestimmten Integral nicht vergessen werden.

Das bestimmte Integral

Wie am Anfang gesagt, ist das Ziel der Integration von der momentanen Änderung einer Grösse auf die globale Änderung zurückzuschliessen und diese Änderung kann als Fläche unter einer Kurve interpretiert werden. Angenommen man möchte die Fläche unter dem Graphen[5] der Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[0|1]$ bestimmen. Man approximiert den gesuchten Flächeninhalt mit n Rechtecken der Breite $\frac{1}{n}$, welche dem Flächenstück eingeschoben werden. Damit erhält man die Untersumme, die in Abbildung 23 dargestellt wird.

$$U_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$U_n = \frac{1}{n^3} \cdot (1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Das bedeutet, dass der Flächeninhalt mindestens einen Drittel beträgt. Nun wird der Flächeninhalt mit Rechtecken angenähert, die den Graphen vollständig enthalten. Dies ist die Obersumme, welche in Abbildung 24 gezeigt ist.

[5] Hier spricht man immer von der Fläche zwischen der Kurve beziehungsweise der Funktion und der x-Achse.

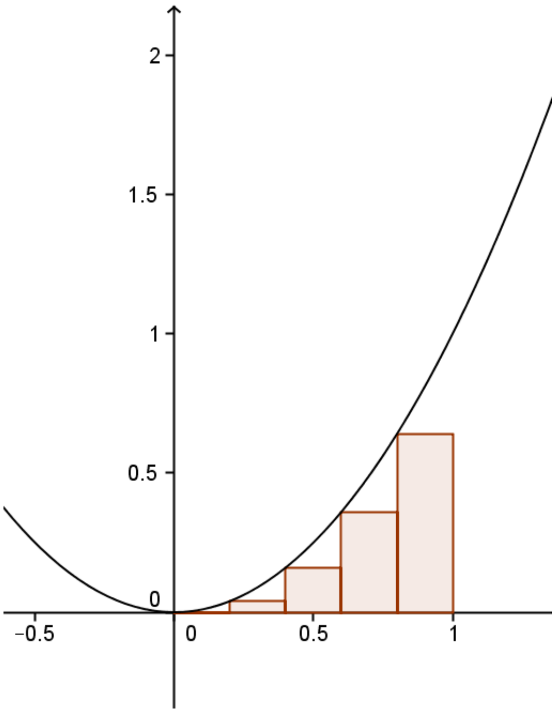


Abbildung 23 zeigt die Untersumme der Funktion aus dem Beispiel.

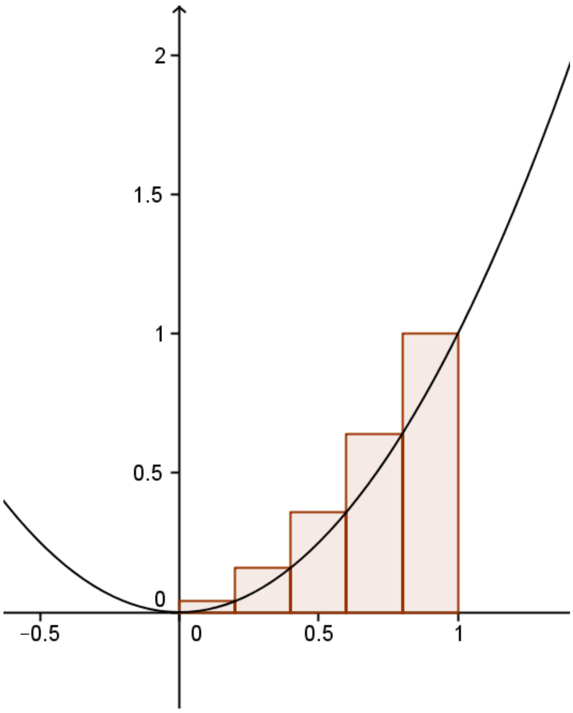


Abbildung 24 zeigt die Obersumme der Funktion aus dem Beispiel

$$O_n = U_n + \frac{1}{n} \cdot 1^2$$

$$\lim_{n \to \infty} O_n = \frac{1}{3}$$

Das heisst, dass die Fläche höchstens einen Drittel beträgt. Folglich kann man nun sagen, dass die eingeschlossene Fläche genau eine Drittel beträgt.

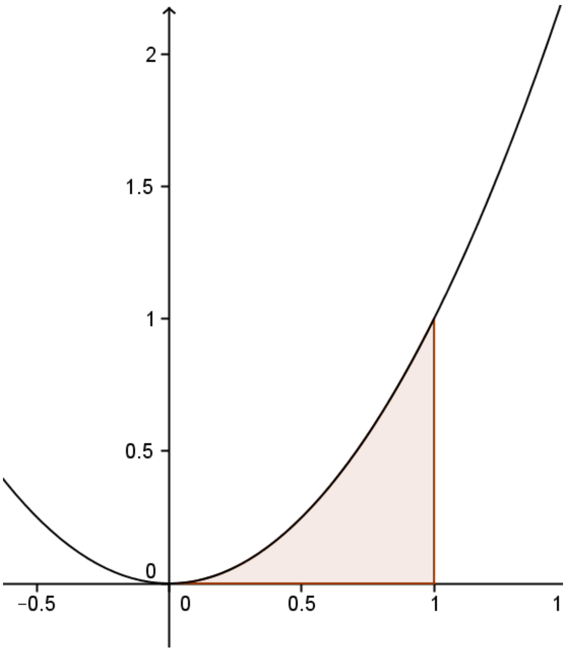


Abbildung 25 zeigt die eingeschlossene Fläche über dem Intervall $[0|1]$ der Funktion $f(x) = x^2$.

Dieser Umweg über die Unter- und Obersumme ist ziemlich mühsam. Mit dem bestimmten Integral kann dies viel schneller erreicht werden.

Ein bestimmtes Integral ist die Differenz der Werte einer integrierbaren Funktion für zwei gegebene Punkte:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [S(x)]_a^b = S(b) - S(a)$$

Der Wert des bestimmten Integrals entspricht der Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen den Punkten a und b. Diese Fläche kann wie vorhin gesehen, wie folgt angenähert werden:

$$A = \sum \Delta f(x)\Delta x$$

Die Berechnungen von A wird umso genauer sein, je kleiner Δx ist, beziehungsweise je mehr Rechtecke berücksichtigt werden. Macht man Δx infinitesimal klein und steigert gleichzeitig die Zahl der Rechtecke in geeigneter Weise ins Unendliche, sprich man führt den Übergang $\Delta x \to dx$ durch, so erhält man:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Nun wird das Beispiel $f(x) = x^2$ überprüft.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Es folgt ein weiteres Beispiel. Man habe zwei Funktionen, wie in Abbildung 26 auf der nächsten Seite veranschaulicht, und möchte die Fläche berechnen, welche sich zwischen den zwei Funktionen befindet. Die Funktionen lauten:

$$f(x) = 9 - x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x + 3$$

Zuerst muss man die Integrationsgrenzen a und b bestimmen. Um diese bestimmen zu können, werden die Funktionen gleichgesetzt.

$$9 - x^2 = x + 3$$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

Einsetzen in die Zauberformel gibt:

$$\Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 2$$

$$A = \int_{-3}^{2} (9 - x^2)\,dx - \int_{-3}^{2} (x + 3)\,dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{2} - \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6}$$

Somit beträgt die Fläche, welche zwischen den Graphen eingeschlossen ist $20\frac{5}{6}$.

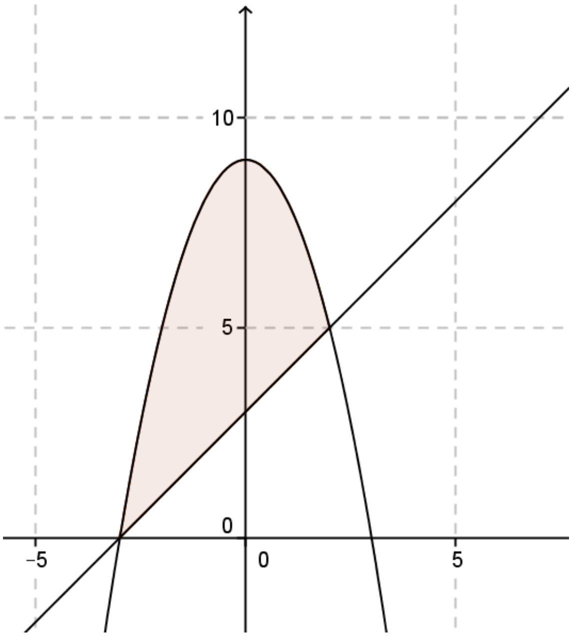


Abbildung 26 zeigt die zu berechnende Fläche.

Hier folgt ein anderes Beispiel. Ein wasserführender Stollen hat einen parabolischen Querschnitt mit 4.0m Sohlenbreite und 3.8m Scheitelhöhe. Wie viel m^3 Wasser kann der Stollen in einer Sekunde führen, wenn das Wasser höchstens mit einer Geschwindigkeit von 3.5 $^{m}/_{s}$ bis $\frac{3}{4}$ der Scheitelhöhe fliessen darf? Die Situation ist in Abbildung 27 graphisch dargestellt.

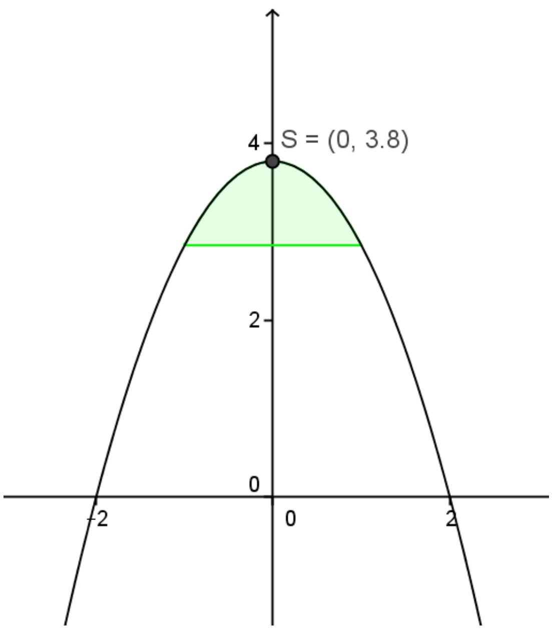


Abbildung 27 zeigt den Stollen aus dem Beispiel.

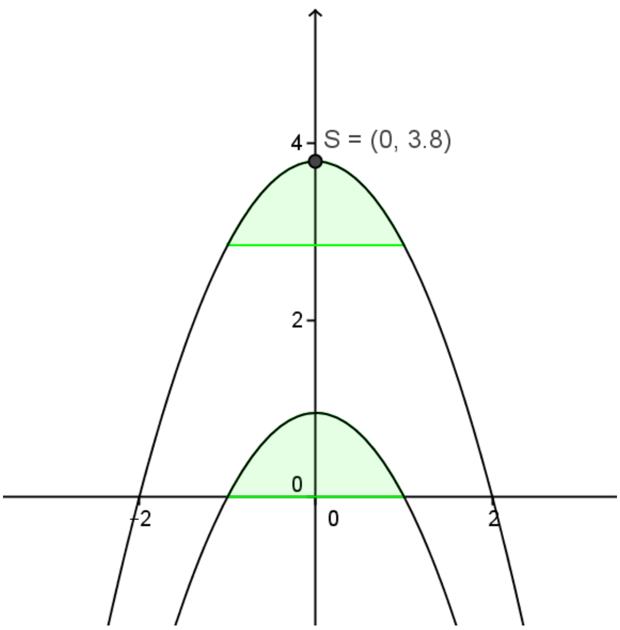


Abbildung 28 zeigt wie die grüne Fläche berechnet wird.

Zuerst wird die Funktionsgleichung aufgestellt, welche den Stollen beschreibt. Da sie eine Parabel ist, muss sie wie folgt aussehen:

$$f(x) = ax^2 + 3.8$$

Um a herauszufinden, wird der Punkt $(2|0)$ eingesetzt:

$$0 = 4a + 3.8$$

Daraus folgt, dass $a = -0.95$ beträgt und folglich erhalten wir folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = -0.95x^2 + 3.8$$

Die Idee ist nun, die gesamte Fläche im Intervall $[-2|2]$ zu berechnen, welches sich unter dem Graphen befindet, und danach den grünen Teil davon abzuziehen.

$$\int_{-2}^{2} -0.95x^2 + 3.8\, dx = \left[-\frac{19}{60}x^3 + 3.8x\right]_{-2}^{2} = 10.1\overline{3}\, m^2$$

Man könnte nun die grüne Fläche herunternehmen (siehe Abbildung 28), eine neue Funktionsgleichung generieren, danach die grüne Fläche berechnen und diese dann von den erhaltenen $10.1\overline{3}\, m^2$ subtrahieren. Die Parabelöffnung a bleibt gleich, nur die Verschiebung in y-Richtung nimmt ab und wird auf 0.95 reduziert. Die Funktion lautet nun:

$$g(x) = -0.95x^2 + 0.95$$

Um die Integrationsgrenzen zu kennen, braucht man die Nullstellen von $g(x)$.

$$-0.95x^2 + 0.95 = 0$$

Nach dem Einsetzen in die Zauberformel kommen die Nullstellen $x_1 = -1 \quad x_2 = 1$ raus. Jetzt wird die Funktion über diesen Grenzen integriert, um die Fläche zu berechnen.

$$\int_{-1}^{1} -0.95x^2 + 0.95\, dx = \left[-\frac{19}{60}x^3 + 0.95x\right]_{-1}^{1} = 1.2\overline{6}\, m^2$$

Jetzt wird die erhaltene Fläche von der Gesamtfläche subtrahiert.

$$10.1\overline{3}\, m^2 - 1.2\overline{6}\, m^2 = 8.9\, m^2 = A$$

Nun kann die Kontinuitätsgleichung gebraucht werden, um zu berechnen wieviel Wasser bei einer konstanten Geschwindigkeit in einer Sekunde durch diesen Stollen fliesst.

$$\Phi = Av = 31.15\, \frac{m^3}{s}$$

Der Wasserfluss durch diese geschlossene Fläche beträgt somit $31.15\, \frac{m^3}{s}$.

Das Rotationsvolumen

Man stelle sich vor, der Graph einer stetigen Funktion würde über dem Intervall $[a|b]$ um die x-Achse rotieren. Die Querschnittsfläche an der Stelle x des so entstehenden Rotationskörpers ist identisch mit der Fläche eines Kreises mit dem Radius $f(x)$.

$$Q(x) = \pi[f(x)]^2$$

Für das Volumen dessen gilt folglich:

$$V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \; dx$$

Um dies etwas konkreter zu erläutern, folgen zwei Beispiele. Beim ersten handelt es sich um eine Kugel mit $r = 2$, wie in Abbildung 29 veranschaulicht.

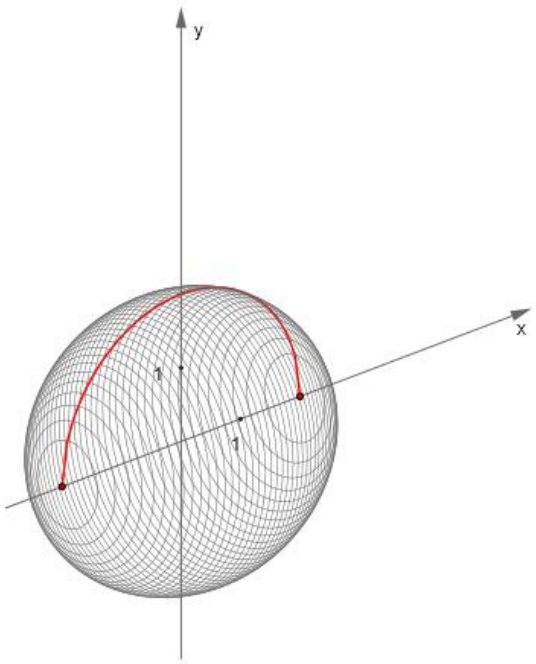


Abbildung 29 zeigt die Kugel. Die rote Kurve stellt den Graphen der Funktion dar.

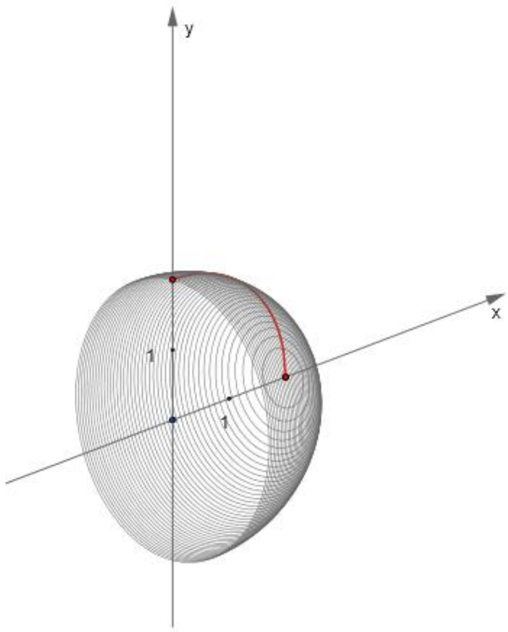


Abbildung 30 zeigt die Hälfte der Kugel.

Ziel ist, nun via Integralrechnung das Volumen zu berechnen. Zuerst wird die Funktionsgleichung aufgestellt.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Da r^2 bekannt ist, kann dieser eingesetzt werden.

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Jetzt wird die Funktion in die Formel eingesetzt. Danach wird ein kleiner Trick gebraucht, damit man weniger rechnen muss. Da die Kugel symmetrisch ist, kann man die Hälfte des Volumens berechnen und dieses danach verdoppeln, um das ganze Volumen zu erhalten (siehe Abbildung 30).

$$V(x) = \pi \int_{-2}^{2} \left[\sqrt{4-x^2}\right]^2 dx = 2\pi \int_{0}^{2} (4-x^2)\, dx = 2\pi \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$V(x) = 2\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 33.51$$

Damit beträgt das Volumen des Rotationskörpers beziehungsweise der Kugel aus Abbildung 29 33.51.

Das zweite Beispiel ist etwas spannender. Ziel ist es das Volumen eines Fasses zu berechnen. Ein Fass wird sehr gut durch ein zwischen zwei Grenzen um die x-Achse rotierendes Parabelstück beschrieben. Ein Fass hat eine Höhe von einem Meter, der Durchmesser der Boden- beziehungsweise Deckfläche beträgt 50 cm und sein grösster Durchmesser beträgt 75 cm.
Die Situation ist in Abbildung 31 und Abbildung 32 gezeigt.

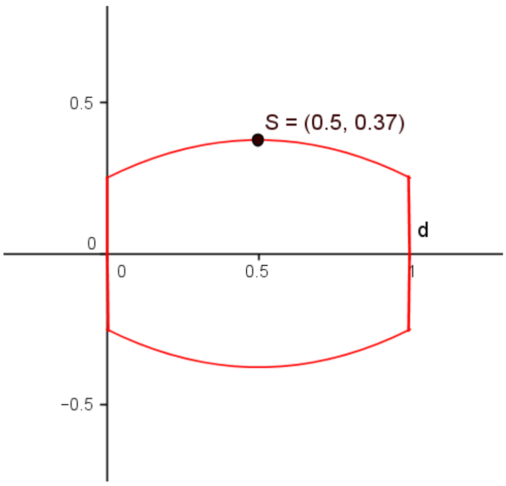


Abbildung 31 zeigt das Fass von der Seite.

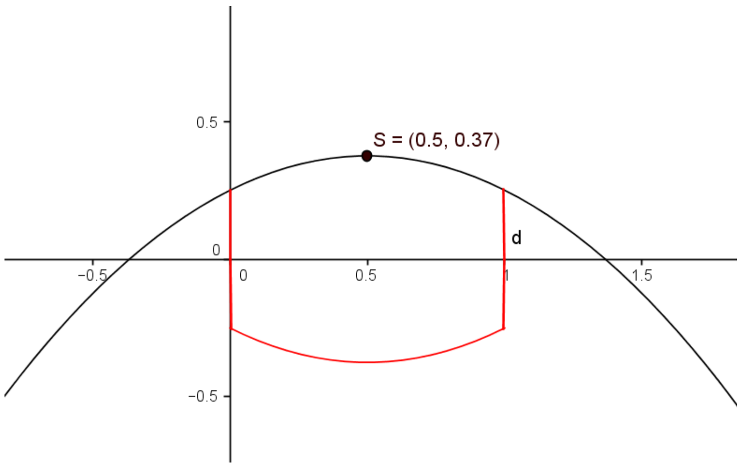


Abbildung 32 zeigt die Parabel, welche das Fass sehr genau beschreibt.

Vorerst wird die Funktionsgleichung der Parabel bestimmt.

$$f(x) = a(x-0.5)^2 + 0.375$$

Nun wird der Punkt $[1|0.25]$ eingesetzt, um a zu berechnen.

$$0.25 = 0.25a + 0.375$$

$$-0.5 = a$$

$$\Rightarrow \; f(x) = -\frac{1}{2}(x-0.5)^2 + 0.375 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Jetzt wird via Rotationsvolumen das Volumen des Fasses bestimmt. Da das Fass 1m hoch ist, sind die Integrationsgrenzen 0 und 1.

$$V(x) = \pi \int_0^1 \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right]^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 0.25x^4 - 0.5x^3 + 0.25x + 0.0625\, dx = \pi\, [0.05x^5 - 0.125x^4 + 0.125x^2 + 0.0625x]_0^1$$

$$V(x) = 0.1125\pi = 0.35\, m^3$$

Somit beträgt das Volumen des Fasses $0.35\ m^3$.

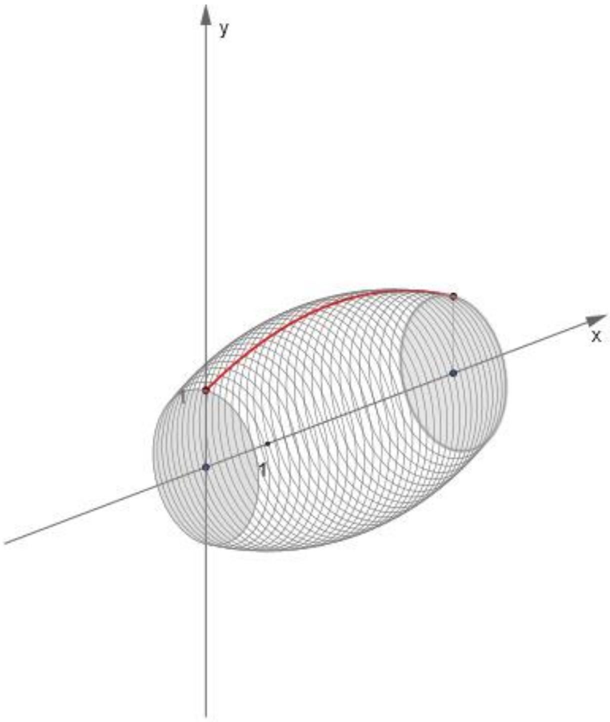


Abbildung 33 zeigt den soeben berechneten Rotationskörper. Es ist zu beachten, dass aus Darstellungsgründen das Fass hier etwas grösser ist als im Beispiel, aber die Verhältnisse sind dieselben.

Verschiedene Sprachen

Da die Differenzial- und Integralrechnung eine wichtige Rolle spielt, ist meines Erachtens wichtig, die wichtigsten Begriffe in verschiedenen Sprachen zu wissen.

Auf Deutsch sagt man Differenzial- und Integralrechnung, auf Englisch Calculus und im französischen spricht man vom calcul différentiel et intégral.

Wenn man auf Deutsch sagt: Wir werden die erste Ableitung bestimmen, heisst es auf Englisch „we are going to calculate the first derivative“ und auf Französisch „nous allons calculer la dérivée première“. Der deutsche Satz: „Wir integrieren diese Funktion“, heisst auf Englisch „we integrate this function“ und auf Französich „nous calculons l’intégrale de cette fonction.“

Beispiele aus der Physik

Von Galileo Galilei über Isaac Newton sowie James Maxwell zu Niels Bohr und Erwin Schrödinger anhand ein paar Beispiele

Ein hüpfender Gummiball wird betrachtet. Bei jedem Hüpfer komme er 40% weniger hoch als beim vorherigen und die Starthöhe betrage 1.5 m. Die Idee ist nun, dass man diese Aufgabe zuerst diskret löst, sprich als Folge anschaut, und erst danach eine Differenzialgleichung formuliert, welche diese Bewegung kontinuierlich beschreibt.

Diskret handelt es sich um eine geometrische Folge mit folgender expliziter Definition:

$$a_k = 0.9 \cdot 0.6^{k-1}$$

Interessant zu wissen wäre nun, wann der Ball ruht, denn intuitiv wird einem wohl schnell klar, dass dieser nicht unendlich weiterhüpfen kann. Der Ansatz ist das Fallgesetz von Galileo Galilei:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Nun schaut man wie sich die Fallzeiten diskret verändern, unter der Annahme dass $a = g$.

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_0}{g}} = 0.55\ s$$

$$t_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (0.6) \cdot s_0}{g}} = 0.85\ s$$

$$t_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (0.6) \cdot s_1}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (0.6)^2 \cdot s_0}{g}} = 0.66\ s$$

Aus den Berechnungen geht hervor, dass man es hier wieder mit einer geometrischen Reihe zu tun hat. Wenn man nun alle Fallzeiten aufsummieren würde, bekäme man die Zeitdauer der gesamten Hüpfbewegung.

$$T = \frac{t_2}{1-q} + t_1 = 4.3\ s$$

Jetzt wird die Situation kontinuierlich angeschaut. Gesucht ist eine Gleichung, welche diesen Hüpf-Verlauf beschreibt. Da man weiss, dass die Abnahme proportional zum vorherigen Hüpfer ist, kommt man auf folgende Beziehung:

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \xi \cdot y(t)$$

Nun werden die Δ infinitesimal klein und man erhält eine Differenzialgleichung[6].

[6] Einfach formuliert ist eine Differenzialgleichung eine Gleichung, welche eine Ableitung beinhaltet.

$$\frac{dy(t)}{dt} = \xi \cdot y(t)$$

Diese Gleichung wird nun nach den „gewöhnlichen“ Regeln gelöst. Zuerst alle y auf die eine Seite und der Rest auf die andere. Um die d wegzubekommen wird über dem Intervall $t_0 = 0$ und t integriert.

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y(t)} \cdot dy(t) = \xi \int_{t_0}^{t} 1 \cdot dt$$

Nachdem die Grenzen eingesetzt wurden, kommt folgender Term raus:

$$\ln \frac{y}{y_0} = \xi t$$

$$y(t) = 1.5 \cdot \exp(\xi t)$$

Aus den Nebenbedingungen findet man ξ leicht heraus. Die Bedingung ist, dass der erste Hüpfer $0.9\ m$ hoch ist.

$$0.9 = 1.5 \cdot \exp(\xi)$$

$$\ln(0.6) = \xi$$

Abbildung 34 illustriert sehr schön die beiden Lösungswege.

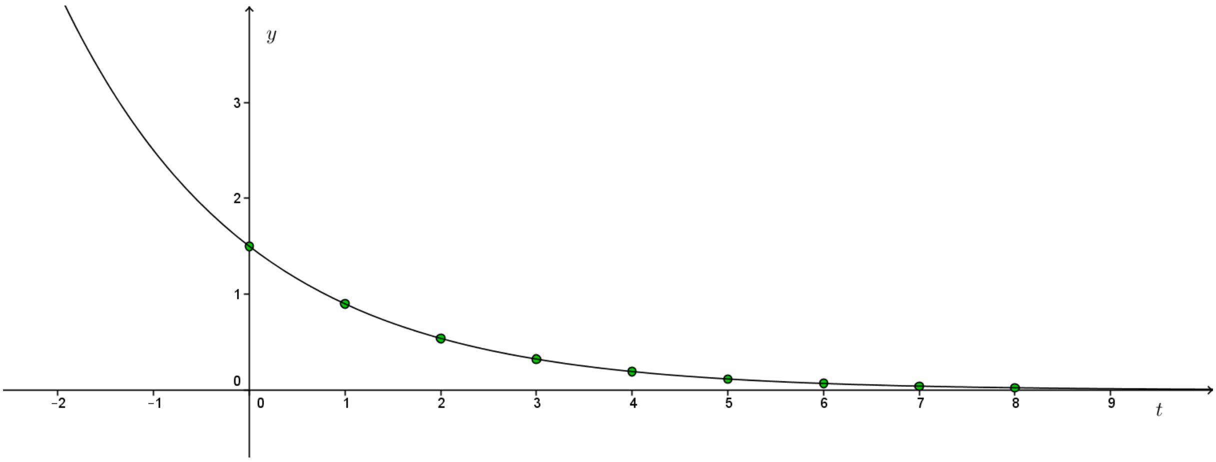


Abbildung 34 zeigt die Ergebnisse. Die grünen Punkte beschreiben die diskrete Lösung als geometrische Folge. Der Graph ist die Lösung der Differenzialgleichung und folglich die kontinuierliche Lösung.

Solch diskrete und kontinuierliche Lösungswege sind miteinander verwandt. Der Vorteil der diskreten Vorgehensweise ist, dass man jetzt hier genau sagen kann, wann der Ball ruht, was bei der kontinuierlichen Lösung theoretisch nie passiert. Am Ende des Tages muss jeder selber wissen, welche Methode für ihn am besten geeignet ist und er am angebrachtesten findet. Ob er in die Welt der Differenzengleichungen und Iterationen oder der Differenzialgleichungen und Funktionen einsteigen will.

Strecke-Geschwindigkeit-Beschleunigung

Abbildung 35 wird betrachtet, welche eine Weg-Zeit-Kurve darstellt. Wenn man sich nun die Frage stellt, wie gross die Geschwindigkeit nach Δt ist, würde man intuitiv an die Definition: Geschwindigkeit ist die Strecke pro Zeit, denken. Aus der Abbildung geht aber hervor, dass man diese Frage nicht so einfach lösen kann. Benutzt man nämlich die obere Definition der Geschwindigkeit, berechnet man nur die Durchschnittsgeschwindigkeit.

$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

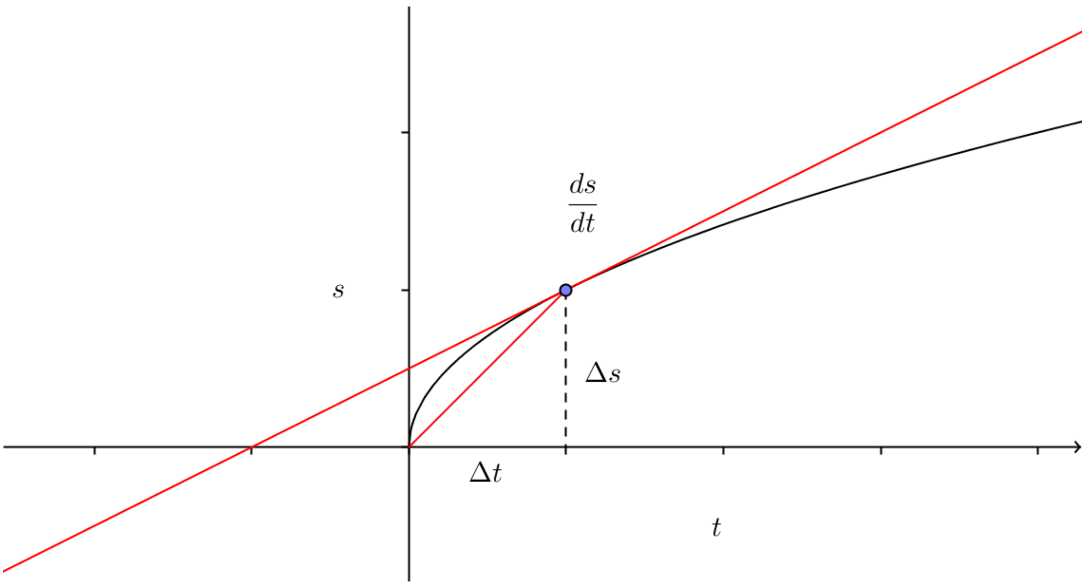


Abbildung 35 zeigt die Verwendung von Ableitungen.

Dieser Wert gibt aber nur, wie vorhin schon gesagt, die Durchschnittsgeschwindigkeit über einem bestimmten Zeitintervall an. In der Physik ist man aber an der momentanen Geschwindigkeit interessiert, die ein Körper zu einer bestimmten Zeit hat. Die Idee ist nun das Zeitintervall Δt möglichst klein zu machen, am besten Infinitesimal klein.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

In diesem Fall ist die Geschwindigkeit nicht länger durch das Steigungsdreieck $\Delta s / \Delta t$ bestimmt, sondern durch die Tangente ds/dt an der Weg-Zeit-Kurve in dem Punkt, an dem man interessiert ist.

Galileo Galilei hat sich intensiv mit Fallbewegungen auseinandergesetzt. Um auf sein allgemeines Fallgesetz zu schliessen, musste er zahlreiche Versuche durchführen. Er fand heraus, dass für die Strecke eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit folgende Formel gilt:

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

Wenn man nun die Geschwindigkeit bestimmen möchte, muss man diese Funktion ableiten.

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v(t) = at$$

In der Physik ist es üblich eine Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt darzustellen. Wenn man nun die momentane Änderung der Geschwindigkeit wissen möchte, bestimmt man wieder die Ableitung.

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = a$$

Wenn man nun den umgekehrten Prozess durchführen möchte, sprich von einer Geschwindigkeit wissen, welchen Weg man zurückgelegt hat, wird die Funktion $v(t)$ integriert.

$$s(t) = \int v(t)\ dt = \int at\ dt = \frac{1}{2}at^2 + s_0$$

Das zweite Axiom von Newton ist eigentlich eine Differenzialgleichung. Zur Erinnerung: Das zweite Axiom von Newton stellt die Gesamtkraft in einem System dar. Die Kraft ist die momentane Änderung des Impulses.

$$F_{tot} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

Da Newton's Axiome nur für konstante Massen[7] gelten, kann die Masse vor die Ableitung gezogen werden und man erhält das bekannte:

$$F_{tot} = m \cdot \frac{dv}{dt} = ma = m\ddot{s} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

[7] Für kleine Objekte, schnelle Geschwindigkeiten oder starke Gravitationsfelder gilt dieses Gesetz nicht mehr beziehungsweise nur approximativ. In solchen Fällen braucht es kompliziertere Gesetze.

Das physikalische Pendel

Ein langer, dünner und homogener Stab der Masse m und der Länge l wird an einem Punkt befestigt und schwingt danach um den Drehpunkt. Nun wird die Bewegung studiert. Bei der zu beschreibenden Bewegung reicht es offensichtlich, die Winkelauslenkung φ zu jedem Zeitpunkt t anzugeben, folglich ist $\varphi(t)$ gesucht. Die Situation ist in Abbildung 36 veranschaulicht.

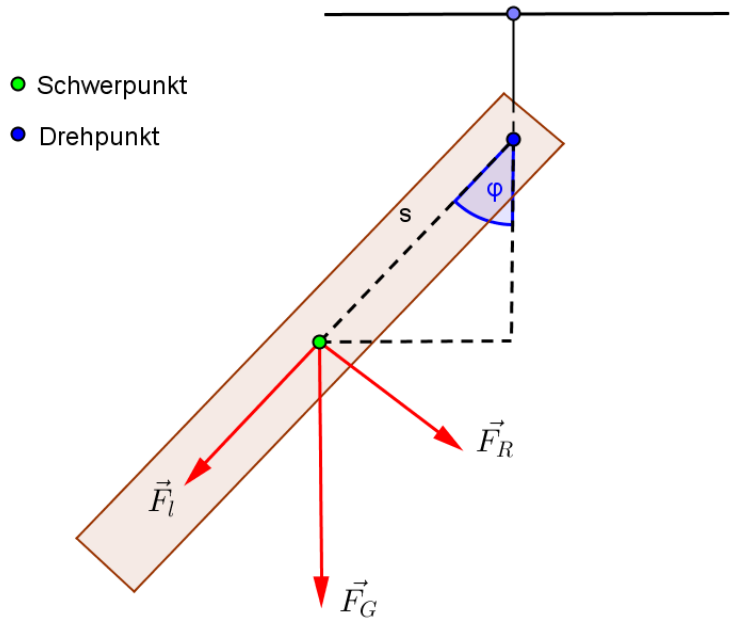


Abbildung 36 zeigt ein physikalisches Pendel.

Die Gravitationskraft kann in zwei Komponenten aufgespalten werden. Von Interesse ist die rücktreibende Kraft $\vec{F}_R$, welche aus trigonometrischen Gründen $-mgs \cdot \sin\varphi$ lautet (Das Minus kommt daher, weil die Kraft rücktreibend ist, sprich in Gegenrichtung der Geschwindigkeit wirkt). In diesem Beispiel kann das zweite Axiom von Newton nicht gebraucht werden, um die Gesamtkraft des Systems darzustellen. Da es hier um eine Rotationsbewegung eines starren Körpers geht, muss das Analoge der Kraft bei Drehbewegungen gebraucht werden, nämlich das Drehmoment. Damit erhält man folgende Gleichung.

$$M = J\ddot{\varphi} = -mgs \cdot \sin\varphi$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Um diese zu lösen, braucht man das Trägheitsmoment des langen, homogenen, dünnen Stabes. Dieses kann mittels Linienintegral wie folgt berechnet werden:

$$\sum_i \rho \Delta l_i = J$$

$$J = \int_{Körper} r^2\, dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho r^2\, dr = \left[\frac{1}{3}\rho r^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \left[\frac{1}{3}\frac{m}{l}r^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12}ml^2$$

Das Trägheitsmoment, auf den Schwerpunkt bezogen, lautet $\frac{1}{12}ml^2$. Da der Stab aber nicht um den Schwerpunkt rotiert, muss man den Satz von Steiner berücksichtigen. Somit beträgt das gesamte Trägheitsmoment:

$$J = J_s + ms^2$$

Jetzt wird dies in die Ausgangsgleichung wieder eingesetzt.

$$(J_s + ms^2) \cdot \ddot{\varphi} = -mgs \cdot \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgs}{(J_s + ms^2)} \cdot \sin\varphi$$

An dieser Stelle mache ich eine kleine Vereinfachung. Da für kleine Winkel $\sin\varphi \approx \varphi$ gilt, wird dies angewendet. Des Weiteren definiert man den Term $\frac{mgs}{(J_s+ms^2)} = \omega_0^2$, wobei Omega für die Kreis-frequenz steht.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Diese Gleichung kann gelöst werden.

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Wobei:

φ_0 für die maximale Amplitude steht, sprich die grösste Auslenkung.
α für die Phasenverschiebung

Die komplexe Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_0 \cdot \exp\big(i(\omega_0 t + \alpha)\big)$$

Jetzt kann man sich noch die Frage stellen, wie lange eine Schwingung dauert.

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{mgs}{(J_s + ms^2)}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(J_s + ms^2)}{mgs}}$$

Ein letzter interessanter Aspekt wäre die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt t zu kennen. Die Tangentialbeschleunigung ist ja bekanntlich die Winkelbeschleunigung mit dem Radius multipliziert.

$$a_T = \ddot{\varphi}(t) \cdot r = -r\omega_0^2\varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Man darf aber in diesem Fall nicht vernachlässigen, dass es auch eine Zentripetalbeschleunigung gibt.

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \frac{\big(r \cdot \dot{\varphi}(t)\big)^2}{r} = r\omega_0^2\varphi_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

Die Gesamtbeschleunigung ist die Summe der Vektoren von Tangentialbeschleunigung und Zentripetalbeschleunigung, sprich in unserem Fall die Addition von Tangential- und Zentripetalbeschleunigung.

$$a(t) = a_T + a_Z = r\omega_0^2\varphi_0 \cdot (\varphi_0\sin^2(\omega_0 t + \alpha) - \cos(\omega_0 t + \alpha))$$

Somit wäre das ungedämpfte physikalische Pendel gelöst. Abschliessend ist noch anzumerken, dass das physikalische Pendel oder Brettpendel dem mathematischen Pendel sehr ähnelt. Der Unterschied ist, dass man hier nicht von einem Massenpunkt ausgehen kann.

Die Frage stellt sich nun, wie man mathematisch das gedämpfte physikalische Pendel beschreiben würde[8]. Die Ausgangsgleichung lautet nun folgendermassen:

$$J\ddot{\varphi} = -mgs \cdot \sin\varphi - \beta\dot{\varphi}$$

Der Term $-\beta\dot{\varphi}$ berücksichtigt die Reibung. Eigentlich lautet die allgemeine Formel für die Reibung:

$$\overrightarrow{F_R} = -C_1 \cdot v - C_2 \cdot v^2$$

Der erste Term dominiert für kleine Geschwindigkeiten und der zweite für grosse. Da die Vereinfachung $\sin\varphi \approx \varphi$ vorgenommen wird, stimmt die Gleichung nur für kleine Winkel. Folglich wird die Geschwindigkeit tief sein, also kann ich den zweiten Term $-C_2 \cdot v^2$ weggelassen.

$$J\ddot{\varphi} = -mgs\varphi - \beta\dot{\varphi}$$

Wenn man in der Gleichung $\omega_0^2 = \frac{3g}{2l}$ und $\gamma = \frac{\beta}{J}$ einsetzt, kommt folgende homogene Differenzialgleichung zustande[9]:

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

welche nun zu lösen ist. An dieser Stelle wird von der reellen in die komplexe Ebene gewechselt. Dann lautet die Gleichung:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + \gamma\dot{\tilde{\varphi}} + \omega_0^2\tilde{\varphi} = 0$$

Zum lösen dieser Gleichung wählt man den Ansatz:

$$\tilde{\varphi}(t) = A \cdot \exp\big(i(\delta t + \alpha)\big)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Differenzialgleichung ein, erhält man:

$$(-\delta^2 + \gamma i\delta + \omega_0^2) \cdot \tilde{\varphi}(t) = 0$$

Hier handelt es sich um eine Gleichung, welche einen imaginären und einen reellen Teil hat. Damit diese Gleichung erfüllt ist, müssen sowohl Real- als auch Imaginärteil 0 sein.

Man könnte sagen, man setzt $\tilde{\varphi}(t) = 0$, doch dann würde sich der lineare Fall einstellen, sprich das Pendel würde stillstehen. Oder $\delta = 0$, doch im Ansatz kann man schon erahnen, dass δ etwas mit der Kreisfrequenz zu tun hat, somit ergibt auch dieser Schritt keinen Sinn. Wenn man $\gamma = 0$ setzen würde, dann hätte man keine Reibung.

Folglich muss δ komplex sein und folgende Form haben:

$$\delta = a + ib$$

Setzt man dies in

$$(-\delta^2 + \gamma i\delta + \omega_0^2) \cdot \tilde{\varphi}(t) = 0$$

ein, folgt, dass

$$a^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \qquad b = \frac{\gamma}{2}$$

gilt.

[8] Hier ist gemeint, dass die Reibung bis zu einem gewissen Grad berücksichtigt wird.
[9] $\omega_0^2 = \frac{3g}{2l}$ gilt nur unter folgenden Umständen: $s \approx \frac{l}{2}$.

Kehrt man nun zu $\tilde{\varphi}(t)$ zurück, kann man unter Berücksichtigung, dass δ komplex ist, folgendes feststellen:

$$\tilde{\varphi}(t) = A \cdot \exp\big(i(at + ibt + \alpha)\big) = A \cdot \exp(-bt) \cdot \exp\big(i(at + \alpha)\big)$$

Das Erstaunliche ist, dass man eine mit der Zeit exponentiell abnehmende Amplitude erhält mit der mittleren Lebensdauer von $\tau = \frac{2}{\gamma}$. Des Weiteren stellt man auch fest, dass $a = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$.

Nun kann man die komplexe Funktion notieren, welche diese gedämpfte Schwingung beschreibt:

$$\tilde{\varphi}(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \cdot \exp\left(i\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot t + \alpha\right)\right)$$

Und die reelle Funktion:

$$\varphi(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot t + \alpha\right)$$

Somit wäre dieses gedämpfte physikalische Pendel gelöst.

RLC-Stromkreis

Abbildung 37 zeigt einen RLC-Stromkreis, welcher mit einer Batterie betrieben wird. Mittels der dritten Maxwellgleichung können die Spannungen über die jeweiligen Komponenten berechnet werden.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Daraus folgt folgende Gleichung:

$$RI + 0 + \frac{Q}{C} - U_0 = -L\frac{dI}{dt}$$

Nach einer kurzen Umformung mit der Substitution $\gamma = \frac{R}{L}$ und $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ kommt folgender Term heraus:

$$\ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_0}{L}$$

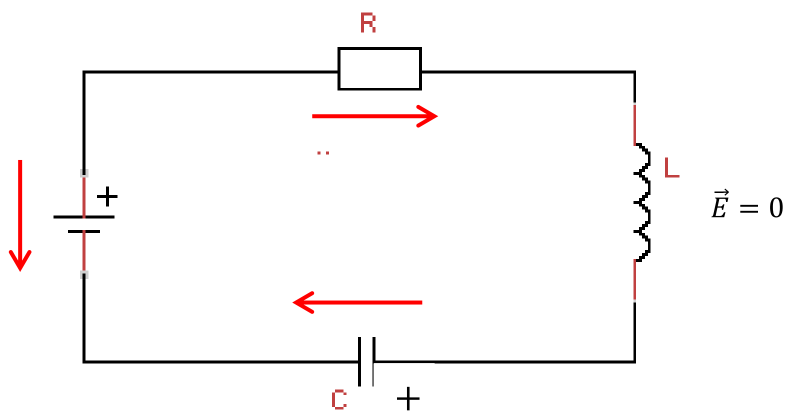


Abbildung 37 zeigt den RLC-Stromkreis. Die roten Pfeile stellen den Vektor des elektrischen Feldes über der jeweiligen Komponente dar.

Ziel ist es nun diese lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung zu lösen um die Funktion $Q(t)$ herauszubekommen. Falls die Gleichung so aussehen würde:

$$\ddot{Q} + \gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$$

Wäre die Lösung:

$$Q(t) = Q_1 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot t + \alpha\right)$$

Da die Gleichung aber etwas anders aussieht, stimmt diese Lösung nicht. Ein Mathematiker würde hier die Differenzialgleichung mit ach und krach durchlösen während ein Physiker die Gegebenheiten etwas genauer untersucht. Der Unterschied zwischen der letzten Gleichung für das physikalische Pendel und dieser hier ist, dass die vorherige homogen war. Bei der vorherigen stand das Pendel aber auch bei $x = 0$, als die Schwingung ausgeklungen war, wobei hier ein geladener Kondensator vorhanden sein würde.

Folglich lautet die Lösung dieser Differenzialgleichung.

$$Q(t) = Q_1 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \cdot \cos(\omega t + \alpha) + Q_{max}$$

Wobei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ gilt. Q_1 und α ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Zur Zeit $t = 0$ hat es keine Ladung auf dem Kondensator und es fliesst kein Strom. Verwendet man diese Anfangs-bedingungen und nimmt an, dass $\omega \approx \omega_0$ gilt, kommt man auf folgende Lösung:

$$Q(t) = -Q_{max} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \cdot t + \alpha\right) + Q_{max}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen

James Clerk Maxwell (1831-1879) gilt als der berühmteste theoretische Physiker des 19. Jahrhunderts. Er konnte mit seinen 4 Gleichungen 1864 die Elektrizität mit dem Magnetismus zum Elektromagnetismus vereinigen. Seine Arbeiten zum Elektromagnetismus besitzen den gleichen Stellenwert wie die Newton'schen Gesetze in der Mechanik. Im Rahmen der klassischen Physik sind sie auch heute noch gültig und unverzichtbar.

Die Gleichungen lauten wie folgt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\phi_M}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum I_A + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \mu_0 \sum I_A + \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{d\phi_E}{dt}$$

Maxwell konnte aufgrund dieser Gleichungen die elektromagnetischen Wellen voraussagen. Denn betrachtet man diese Gleichungen im Vakuum, kommt man darauf, dass sie die Wellengleichung erfüllen.

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{B}$$

Wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Maxwellgleichungen können nicht deduktiv hergeleitet werden. Es sind Gleichungen, welche bestimmte gemessene Sachverhalte beschreiben. Die Maxwellgleichungen beschreiben elektromagnetische Wellen, sprich das Licht. Da Licht als Welle oder als Photonen angesehen werden kann, in der Fachsprache spricht man von Welle-Teilchen-Dualismus, wurden diese Gleichungen für Teilchen mit einer Ruhemasse angepasst. Diese Gleichungen sind als Schrödinger-Gleichungen bekannt.

Das Wasserstoffatom

Wasserstoffatome bestehen aus einem einzelnen Proton, um das ein einzelnes Elektron kreist. Abbildung 38 illustriert dies sehr schön.

In der Quantenmechanik werden die meisten Situationen durch die sogenannte Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$H\psi = E\psi$$

Hier handelt es sich um die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung. Diese Gleichung hat in der Quantenmechanik eine herausragende Bedeutung. Sie wird oft als „zweites Axiom von Newton“ in der Quantenphysik zitiert. Wenn man diese fünf Zeichen anschaut, könnte man denken, sie seien eigentlich nicht sehr kompliziert. Diese Aussage ist aber bei weitem falsch. Das H steht für den Hamilton-Operator. In der Quantenmechanik werden die Messgrössen in Form von Operatoren dargestellt. Der Hamilton-Operator stellt die Gesamtenergie eines quantenmechanischen Systems dar. Er lautet wie folgt:

$$H\psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi(r) + V(r)\psi(r)$$

Wobei:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi(r)$ die kinetische Energie der Teilchen innerhalb des Systems beschreibt.

$V(r)$ beschreibt die potentielle Energie, falls ein Potential vorhanden ist sowie im Fall mehrerer Teilchen die Wechselwirkung zwischen ihnen.

Folglich lautet die Schrödinger-Gleichung auch folgendermassen:

$$H\psi(r) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\psi(r) + V(r)\psi(r) = E\psi(r)$$

Die Wellenfunktion $\psi(r)$ beschreibt den quantenmechanischen Zustand eines Systems. Kennt man $\psi(r)$, so lassen sich alle weiter beobachtbaren Grössen daraus herleiten. E ist der Energieeigenwert.

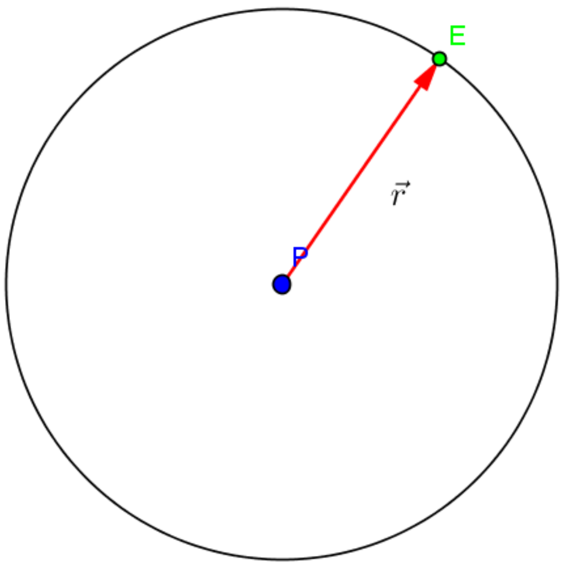


Abbildung 38 zeigt ein zweidimensionales Bild des Wasserstoffatoms.

Ziel ist es nun die Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom aufzustellen, diese nach diversen Vereinfachungen zu lösen mit dem Ziel den Erwartungswert für den Radius zu berechnen.

Man setzt sofort voraus, dass der Radius des Protons und den Mittelpunkt 0 ist. Des Weiteren verwendet man das CGS-System (Zentimeter-Gramm-Sekunde). Mit diesen Vereinfachungen lautet die Schrödinger-Gleichung:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_e^2\,\psi(\vec{r}_e) - \frac{e^2}{|\vec{r}_e|}\psi(\vec{r}_e) = E\psi(\vec{r}_e)$$

Um diese Gleichung zu lösen, müssen aber noch ein paar andere Vereinfachungen gemacht werden. Man wechselt zu Schwerpunktkoordinaten. Der Schwerpunkt des Systems Proton-Elektron befinde sich an folgendem Ort:

$$\vec{R} = \frac{m_e\vec{r}_e + m_p\vec{r}_p}{m_e + m_p}$$

Der Vektor zwischen Elektron und Proton lautet:

$$\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$$

Verwendet man noch den Begriff der reduzierten Masse:

$$m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p},$$

kommt man mit Hilfe der Algebra auf folgenden Zusammenhang:

$$\frac{1}{m_e}\nabla_e^2 + \frac{1}{m_p}\nabla_p^2 = \frac{1}{M}\nabla_{\vec{R}}^2 + \frac{1}{m}\nabla_{\vec{r}}^2$$

Fasst man all dies zusammen, kommt folgende Schrödinger-Gleichung zustande:

$$\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla_{\vec{R}}^2\,\psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{r}}^2\,\psi(\vec{R},\vec{r}) - \frac{e^2}{|\vec{r}|}\psi(\vec{R},\vec{r}) = E\psi(\vec{R},\vec{r})$$

Diese Gleichung enthält nun Variablen, welche nur von $\vec{R}$ oder $\vec{r}$ abhängen. An dieser Stelle wird die Methode der Separation gewählt. Für die Wellenfunktion gilt:

$$\psi(\vec{R},\vec{r}) = \psi(\vec{R})\psi(\vec{r})$$

Setzt man dies nun in die obige Gleichung ein und teilt durch $\psi(\vec{R})\psi(\vec{r})$, ist die Gleichung separiert und man erhält zwei Gleichungen, welche entweder von $\vec{R}$ oder $\vec{r}$ abhängen:

$$\frac{-\hbar^2}{2M\psi(\vec{R})}\nabla_{\vec{R}}^2\,\psi(\vec{R}) = E_{\vec{R}}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m\,\psi(\vec{r})}\nabla_{\vec{r}}^2\,\psi(\vec{r}) - \frac{e^2}{|\vec{r}|}\psi(\vec{r}) = E_{\vec{r}}$$

Wobei die Gesamtenergie $E = E_{\vec{R}} + E_{\vec{r}}$ beträgt. Jetzt muss man diese beiden Gleichungen lösen. Da $\psi(\vec{R}) \approx 1$ ist, vernachlässigt man diesen Term. Die tatsächliche Wirkung beruht auf $\psi(\vec{r})$, da diese Funktion die Wellenfunktion des Teilchens ist und nicht des Massenschwerpunktes.

Die zu lösende Schrödinger-Gleichung lautet:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{r}}^2\,\psi(\vec{r})-\frac{e^2}{|\vec{r}|}\psi(\vec{r})=E_{\vec{r}}\psi(\vec{r})$$

Diese Gleichung kann man in einen radialen und einen winkelabhängigen Teil aufspalten:

$$\psi(\vec{r})=R_{nl}(r)\cdot Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Der winkelabhängige Teil besteht aus Kugelfunktionen und ist folglich bekannt. Da man hier in Kugelkoordinaten rechnet, geht der radiale Anteil der Schrödinger-Gleichung in:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\,[r\,R_{nl}\,(r)]+l(l+1)\frac{\hbar^2}{2mr^2}[r\,R_{nl}\,(r)]-\frac{e^2}{r}[r\,R_{nl}\,(r)]=E[r\,R_{nl}\,(r)]$$

Bei der Lösung dieser Gleichung, muss man zwei Fälle betrachten. Eine Lösung für kleine r und eine Lösung für grosse. Die Zusammenfügung dieser beiden Fälle wird die vollständige Lösung ergeben.

Lösung für kleine r

Für kleine r muss der Radialteil der Funktion Null anstreben.

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\,[r\,R_{nl}\,(r)]+l(l+1)\frac{\hbar^2}{2mr^2}[r\,R_{nl}\,(r)]=0$$

Multipliziert man mit $\frac{2m}{\hbar^2}$ erhält man:

$$-\frac{d^2}{dr^2}\,[r\,R_{nl}\,(r)]+\frac{l(l+1)}{r^2}[r\,R_{nl}\,(r)]=0$$

Diese Gleichung kann man mit sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen lösen. In diesem Fall wäre die Lösung proportional zu:

$$R_{nl}(r)\sim Ar^l+Br^{-l-1}$$

Da diese Lösung für kleine r verschwinden muss, folgt, dass $B=0$ gilt, denn sonst würde die Lösung nicht konvergieren sondern divergieren. A wird 1 gesetzt.

$$R_{nl}(r)\sim r^l$$

Lösung für grosse r

Für grosse r geht $\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{r}}^2\,\psi(\vec{r})-\frac{e^2}{|\vec{r}|}\psi(\vec{r})=E_{\vec{r}}\psi(\vec{r})$ über in:

$$\frac{d^2}{dr^2}\,[r\,R_{nl}\,(r)]+\frac{2mE}{\hbar^2}[r\,R_{nl}\,(r)]=0$$

Mit $E<0$ werden die Lösungen auf gebundene Zustände beschränkt. Die Lösung dieser Gleichung ist proportional zu:

$$R_{nl}(r)\sim Ae^{-\lambda r}+Be^{\lambda r}$$

Wobei

$$\lambda=\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

An dieser Stelle muss man nun wieder beachten, dass der zweite Term divergieren würde und folglich $B = 0$ gelten muss. A wird wieder 1 gewählt.

$$R_{nl}(r) \sim e^{-\lambda r}$$

Nun müssen die beiden Lösungen zusammengebracht werden. Tut man dies, erhält man:

$$R_{nl}(r) \sim r^l f(r) e^{-\lambda r},$$

wobei $f(r)$ bis jetzt noch unbestimmt ist. Um diese Funktion zu bestimmen, wird eine etwas längere Substitution durchgeführt. Obere Lösung wird in die Schrödinger-Gleichung eingesetzt.

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\left[r\,R_{nl}\,(r)\right] + l(l+1)\frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[r\,R_{nl}\,(r)\right] - \frac{e^2}{r}\left[r\,R_{nl}\,(r)\right] = E\left[r\,R_{nl}\,(r)\right]$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^2}{dr^2}f(r) + 2\left[\frac{l(l+1)}{r} - \lambda\right]\frac{d}{dr}f(r) + 2\left[\frac{\frac{me^2}{\hbar^2} - \lambda(l+1)}{r}\right]f(r) = 0$$

Diese Differenzialgleichung ist ziemlich kompliziert. Deswegen wird ein Potenzreihenansatz verwendet, um diese Gleichung zu lösen.

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$$

Setzt man diese Gleichung in die obere ein, so folgt nach langer Rechnung:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k(k+2l+1)a_k r^{k-2} + 2\left(\frac{me^2}{\hbar^2} - \lambda(k+l+1)\right)a_{k-1}r^{k-1}\right] = 0$$

Nun werden die r^k angepasst und diese wegdividiert. Da jeder Term dieser Summe null sein muss, können diese einander gleichgestellt werden.

$$k(k+2l+1)a_k = 2\left(\lambda(k+l) - \frac{me^2}{\hbar^2}\right)a_{k-1}$$

Somit wäre eine Rekursionsformel für obere Gleichung gefunden. Mithilfe von einem Koeffizienten kann man also auf den nächsten schliessen. Betrachtet man das Verhältnis von $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ und nimmt den $limes$ davon, kommt man zu einem interessanten Resultat.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{2\lambda}{k}$$

Dies ähnelt der Entwicklung von e^x.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^4}{k!} \quad \rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{1}{k}$$

Folglich gilt:

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = e^{2\lambda r}$$

Setzt man nun $f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = e^{2\lambda r}$ in $R_{nl}(r) \sim r^l f(r) e^{-\lambda t}$ ein, erhält man folgende Gleichung:

$$R_{nl}(r) \sim r^l e^{\lambda r}$$

Diese Lösung würde aber gegen unendlich streben, falls r gegen unendlich ginge. Deshalb ist diese Lösung nicht ganz korrekt. Die Lösung dieser Gleichung muss noch endlich gemacht werden. Die Idee ist nun die Reihe ab einer gewissen Zahl N abbrechen zu lassen. N ist die radiale Quantenzahl.

$$f(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

Wenn a_{N+1} null sein soll, muss der Faktor, mit dem a_{k-1} multipliziert wird, für $k = N + 1$ null ergeben.

$$2\left(\lambda(N + 1 + l) - \frac{me^2}{\hbar^2}\right) = 0$$

Führt man nun die Hauptquantenzahl $n = N + 1 + l$ ein, wird das Ganze quantisiert.

$$n\lambda - \frac{me^2}{\hbar^2} = 0$$

Wobei n nur ganzzahlige Werte annehmen darf.

Energiewerte

Da $\lambda = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$, sind die erlaubten Energiewerte auch quantisiert. Die Energie hängt also offenbar von der Hauptquantenzahl ab. Setzt man λ in die obere Gleichung ein, erhält man für die Energie:

$$E_n = \frac{-me^4}{2n^2\hbar^2}$$

Setzt man den Bohr'schen Radius ein $r_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$, wird der Term etwas schlanker.

$$E_n = \frac{-me^4}{2n^2\hbar^2} = \frac{-e^2}{2r_0} \frac{1}{n^2}$$

Die Energiewerte sind negativ, weil das Elektron ungebunden ist.

Lösung der radialen Schrödinger-Gleichung

Die Lösung

$$R_{nl}(r) \sim r^l e^{-\lambda r} \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

stimmt, bis auf eine multiplikative Konstante, welche von der Hauptquantenzahl n und der Drehimpulsquantenzahl abhängt.

$$R_{nl}(r) = A_{nl}\, r^l e^{-\lambda r} \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

A_{nl} wird durch Normierung von $R_{nl}(r)$ herausgefunden.

Einfachheitshalber wird $R_{10}(r)$ berechnet. Das heisst, dass die Hauptquantenzahl 1 und die Drehimpulsquantenzahl 0 gewählt werden. Daraus folgt:

$$R_{10}(r) = A_{10}\, r^l e^{-\lambda r} \sum_{k=0}^{0} a_k r^k$$

Somit fällt einiges weg, $\sum_{k=0}^{0} a_k r^k$ wird zu a_0 und r^l zu 1.

$$R_{10}(r) = A_{10}\, e^{-\lambda r} a_0$$

Setzt man λ ein, ergibt sich:

$$R_{10}(r) = A_{10} \exp\left(\frac{-r}{n r_0}\right) a_0$$

Um A_{10} und a_0 herauszufinden, muss $\psi_{100}(r, \theta, \phi)$ normiert werden, was so viel heisst, wie $|\psi_{100}(r, \theta, \phi)|^2 d^3 r$ über den gesamten Raum zu integrieren und das Ergebnis gleich 1 zu setzen. Da Kugelkoordinaten gewählt wurden, muss nur der radiale Teil integriert und gleich 1 gesetzt werden.

$$\int_0^\infty r^2 |R_{10}(r)|^2 \, dr = 1$$

$$A_{10}{}^2 a_0{}^2 \int_0^\infty r^2 \, \exp\left(\frac{-2r}{n r_0}\right) dr$$

In der Formelsammlung findet man:

$$\int_0^\infty \exp(-ax)\, x^n \, dr = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Unter Verwendung dieses Satzes kommt folgender Term raus :

$$1 = A_{10}{}^2 a_0{}^2 \int_0^\infty r^2 \, \exp\left(\frac{-2r}{n r_0}\right) dr = A_{10}{}^2 a_0{}^2 \frac{r_0{}^3}{4}$$

Folglich gilt:

$$A_{10}a_0 = \frac{2}{{r_0}^{3/2}}$$

Da A_{10} nur dazu diente das Ergebnis zu normieren, wird diese Konstante gleich 1 gesetzt. Daher ist $a_0 = \frac{2}{{r_0}^{3/2}}$. Schlussendlich erhält man für $R_{10}(r) = A_{10}\exp\left(\frac{-r}{nr_0}\right)a_0$ den folgenden Ausdruck:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{{r_0}^{3/2}} \cdot e^{\frac{-r}{r_0}}$$

Da $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta,\phi)$ gilt, kann die Wellenfunktion in all ihrer Schönheit hingeschrieben werden.

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{2}{{r_0}^{3/2}} \cdot e^{\frac{-r}{r_0}}\,Y_{00}(\theta,\phi)$$

Wobei $Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$.

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{2}{{r_0}^{3/2}}e^{\frac{-r}{r_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Im Internet findet man als allgemeine Lösung für die Wellenfunktion von Wasserstoff folgenden Term:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \frac{\left(\frac{2}{nr_0}\right)^{3/2}[(n-l-1)!]^{1/2}}{[2n(n+1)!]^{1/2}}e^{\frac{-r}{nr_0}}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)^{l}\;L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)\,Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Dabei sind $L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)$ die zugeordneten Laguerre-Polynome.

Eine wichtige Frage bleibt aber noch offen. Nämlich, wo ist die grösste Wahrscheinlichkeit, dass man das Elektron findet? Als Abschluss wird der Erwartungswert $\langle r\rangle$ berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Elektron in einer Kugelschale mit einem Radius von r bis $r + dr$ befindet, lautet:

$$|R_{10}(r)|^2\,r^2\,dr$$

Damit folgt für den Erwartungswert:

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r|R_{10}(r)|^2\,r^2\,dr = \int_0^\infty r^3|R_{10}(r)|^2\,dr = \frac{3}{2}\cdot r_0$$

Aus den Berechnungen geht hervor, dass für den 1s-Zustand Niels Bohr extrem nahe am korrekten Wert war. Der korrekte Wert wäre $7.95 \cdot 10^{-11}$ m.

Diese Berechnungen zum Wasserstoffatom sind aber „nur“ approximativ, denn ein paar Vereinfachungen wurden getroffen. Erstens ist die Schrödinger-Gleichung eine nichtrelativistische Näherung und enthält nicht den Spin. Zweitens wurde die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung genommen, doch nach kurzer Überlegung wird einem wohl klar, dass dieses Problem sehr wohl zeitabhängig ist. Letztlich wurden die Wechselwirkungen zwischen Proton und Elektron vernachlässigt.

Schlusswort

Abschliessend möchte ich anmerken, dass diese Zusammenfassung auf den Dossiers meines Mathematiklehrers, Herrn Jorma Wassmer, basiert. Deswegen stammen nicht alle Formulierungen aus meiner Feder, doch das Meiste wurde umformuliert.

Den letzten Teil aus „Beispiele aus der Physik" konnte ich nicht ohne weiteres. Dafür musste ich zwei Bücher, welche mir vertiefte Kenntnisse in der Quantenmechanik brachten, lesen und viel im Internet recherchieren. Daher muss sich ein Gymnasiast keine Sorgen machen, falls er diesen Teil nicht nachvollziehen kann, denn dieser Stoff gehört nicht zum Maturitätsprogramm.