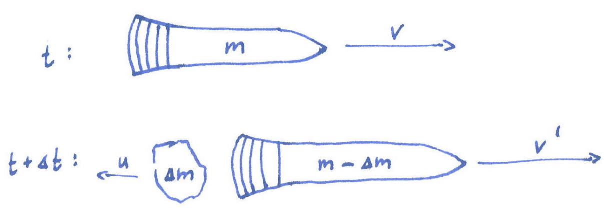
Raketengleichung

Angewandte Mathematik
Differenzialgleichungen
Raketengleichung
gymkl, WaJ

1 Modell

Wir betrachten das klassische „Pfupfmodel“ einer Rakete der Masse m mit Geschwindigkeit v und verwenden den Impulserhaltungssatz. Also notieren wir jeweils den Impuls p vor und nach dem „Stoss“ und vergleichen.



Mit obiger Notation gilt:

$$p = (m - \Delta m) \cdot v' + \Delta m \cdot (v' - u)$$

und unmittelbar folgt für $p = mv$

$$mv = mv' - \Delta m u$$

wobei v' die Geschwindigkeit der Rakete nach dem Stoss und u die Ausströmgeschwindigkeit des Gases bezeichnet.

Davon hat man noch nicht viel. Berechnen wir vielleicht die Geschwindigkeit bzw. den Geschwindigkeitsverlauf der Rakete. Wir lösen

$$mv = mv' - \Delta m u$$

nach $v' - v$ und bezeichnen diese Differenz mit Δv; explizit

$$\Delta v = \frac{\Delta m u}{m}.$$

Für $\Delta t \to 0$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot u.$$

Über das Vorzeichen lässt sich streiten; anyway. Wir integrieren, um die Geschwindigkeit zu erhalten:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{m_0}^{m} -\frac{u}{m}\, dm.$$

Also gilt für die Geschwindigkeit der Rakete mit Anfangsmasse m_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right).$$

Dieser Ausdruck wird auch **1. Raketengleichung** genannt. Sie gibt die Geschwindigkeit einer Rakete im Vakuum ohne Gravitationseinfluss an.

2 Analyse

2.1 Geschwindigkeitsverlauf

Wir zeichnen vorerst das v-t-Diagramm. Dazu müssen wir beachten, dass m auch von der Zeit abhängt, $m = m(t)$.

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right).$$

Nehmen wir einen zeitlich konstanten Gasausstoss μ an, so gilt für die Masse der Rakete zur Zeit t

$$m(t) = m_0 - \mu t$$

und damit für die Geschwindigkeit

$$v(t) = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right).$$

So, setzen wir $v_0 = 0$, $u = 2500$, $m_0 = 2200$ und $\mu = 2.5$ und schauen uns Abbildung 1 an.

Man sieht, dass die Rakete immer stärker beschleunigt. So lange, bis der Brennstoff aufgebraucht ist. Wie lange dauert das? Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir uns m_0 vor und schreiben

$$m_0 = m_{leer} + m_{brenn}.$$

Dabei ist natürlich zu beachten, dass m_{leer} inklusive Nutzlast aufzufassen ist. Ist zum Beispiel $m_{leer} = 200$, so erhält man für $m_{brenn} = \mu \cdot t_{brenn}$ die Brenndauer

$$t_{brenn} = \frac{m_{brenn}}{\mu}.$$

Für obige Werte hat man $t_{brenn} = 800$ Sekunden.

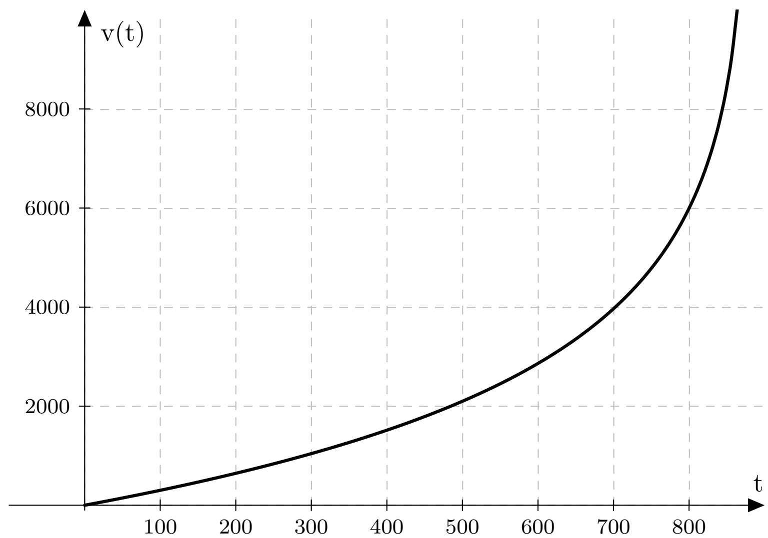


Abbildung 1: Geschwindigkeitsverlauf der Rakete

2.2 Brennschlussgeschwindigkeit

Von Interesse ist auch, welche Endgeschwindigkeit die Rakete erreicht. Wir setzen also im Geschwindigkeitsverlauf $m_0 = m_{leer}$, da ja kein Brennstoff mehr vorhanden ist. Numerisch ergibt sich

$$v_e = v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_{leer}}\right) \approx 6000\,\mathrm{m/s}$$

Man will die Endgeschwindigkeit optimieren. Sie ist proportional zur Ausströmgeschwindigkeit und hängt logarithmisch vom Verhältnis Masse beim Start zu Masse nach Brennschluss ab. Mehr Erkenntnis gibt unser Model nicht her.

2.3 Nutzlasten

Will man Material in eine Umlaufbahn bringen, so muss man grosse Endgeschwindigkeiten erreichen können. Wir betrachten, wiederum für $v_0 = 0$, das Verhältnis von Endgeschwindigkeit zu Gasgeschwindigkeit:

$$\frac{v_e}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_{leer}}\right) = \ln\left(1 + \frac{m_{brenn}}{m_{leer}}\right).$$

Also ist der Zusammenhang vom Typ

$$v_v = \ln(1 + m_v)$$

mit $v_v = \frac{v_e}{u}$ und $m_v = \frac{m_{brenn}}{m_{leer}}$ oder in der Anschauung in Abbildung 2.

Selbst bei einem Verhältnis von 50 von Brennstoff zu Leermasse erhält man nur eine 4mal so grosse Endgeschwindigkeit wie die Ausströmgeschwindigkeit.

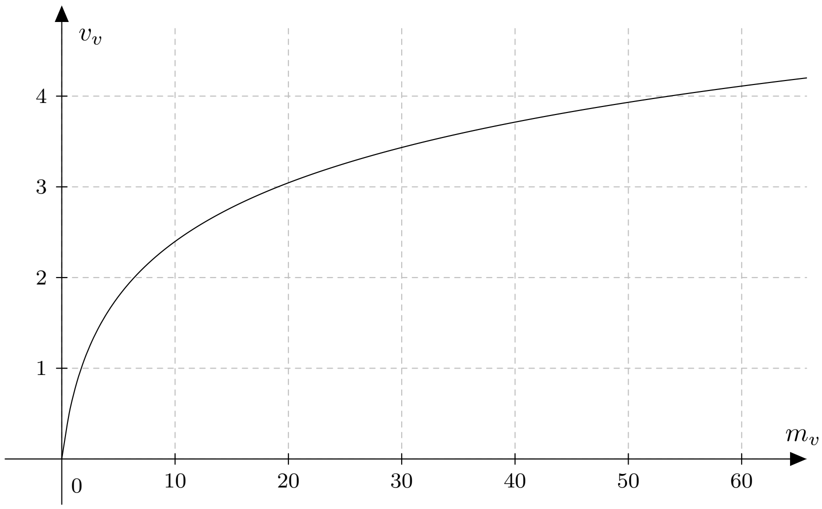


Abbildung 2: Verhältnisgleichung

Bemerkung. Es ist problematisch, grosse Nutzlasten auf hohe Endgeschwindigkeiten zu bringen.

Folgend einige Werte von Ausströmgeschwindigkeiten, die heute erreicht werden können:

Feststoffrakete 2000 m/s

Flüssigbrennstoffrakete 3200 m/s

Hybride 4000 m/s

Nun, welche Geschwindigkeit muss eine Rakete erreichen, um das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen — die sogenannte Fluchtgeschwindigkeit? Mit Energieerhaltung

$$G \cdot \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m v_2^2$$

erhält man

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Um den Einflussbereich der Erde zu verlassen, muss eine Rakete eine Geschwindigkeit von 11.2 km/s erreichen.

Bemerkung. Die konstruktive Obergrenze für eine einstufige Rakete liegt bei $15 \div 1$, womit klar ist, dass man mit einer einstufigen Rakete die Fluchtgeschwindigkeit (auch 2. kosmische Geschwindigkeit) nicht erreichen kann.

2.4 Rakete unter Schwerkrafteinfluss (g sonst)

Für einen senkrechten Wurf nach oben gilt

$$v(t) = v_0 - gt$$

und somit für die Rakete

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) - gt.$$

Mit den Werten $u = 1000$, $m_0 = 1100$, $\mu = 10$, $g = 9.81$ berechnen wir noch die Brenndauer t' via

$$m_{brenn} = \mu t'$$

und finden $t' = 100$. Nach Brennschluss haben wir

$$v(t) = v_{brenn} - gt$$

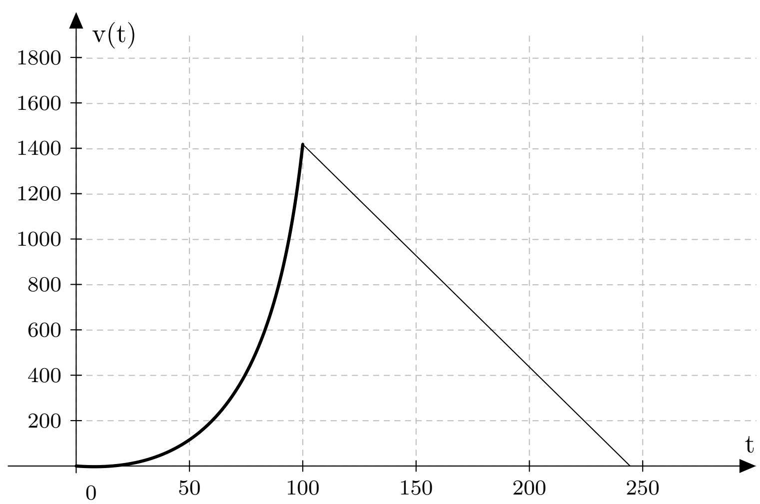
wobei v_{brenn} die Brennschlussgeschwindigkeit bezeichnet. Da dieser Geschwindigkeitsverlauf erst nach Brennschluss stattfindet, verschieben wir die Funktion um die Zeit t'

$$v_{nach}(t) = v(t') - g(t - t')$$

Insgesamt haben wir

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v(t) & t < t' \\ v_{nach}(t) & t \geq t' \end{cases}$$

Der Graph sieht folgendermassen aus:



Wie hoch steigt bei diesem Geschwindigkeitsverlauf die Rakete? Wir bestimmen den Steigungsverlauf als Integral über den Geschwindigkeitsverlauf:

$$s(t) = \int_0^t \tilde{v}(\tau)\, d\tau.$$

Raketengleichung

Vor Brennschluss haben wir

$$s(t) = \int \left[u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) - gt \right] \, dt$$

und danach

$$s(t) = \int \left[v(t') - g(t - t') \right] \, dt.$$

Kompakt formuliert

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} -\frac{g}{2}t^2 + ut + u(t - \frac{m_0}{\mu}) \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t} \right) & t < t' \\ -\frac{g}{2}t^2 + (gt' + v(t'))t & t \geq t' \end{cases}$$

Bemerkung. Ein paar Dinge gefallen mir an diesem Model nicht.