94. Komplexe Zahlen sind gar nicht so kompliziert, wie der Name suggeriert

Wenn man irgendeine der handelsüblichen Zahlen quadriert, so ist das Ergebnis positiv: 3 mal 3 ist 9, aber auch minus 4 mal minus 4 ist positiv, nämlich gleich 16. Deswegen ist nicht so ganz klar, wie man sich eine Zahl vorstellen soll, deren Quadrat negativ ist.

Das war auch für die Mathematiker ein harter Brocken, als sie sich vor einigen Jahrhunderten systematisch mit der Frage beschäftigten, ob man alle Gleichungen lösen kann. Die Lösung bestand aus einem weniger überraschenden und einem spektakulären Teil. So war es wenig verwunderlich, dass man mitunter zu neuen Zahlbereichen übergehen muss, um Gleichungen behandeln zu können, die mit dem bisherigen Wissen nicht lösbar sind.

Das kennen alle aus der Schule. Auch wenn man sogar das große Einmaleins beherrscht, findet man keine Zahl x, für die $x + 3 = 1$ gilt. Die richtige Lösung, nämlich $x = -2$, steht erst dann zur Verfügung, wenn man negative Zahlen kennen gelernt hat. Und die braucht man wirklich: Um auch mit Schulden rechnen zu können, bei negativen Temperaturen und bei vielen anderen Gelegenheiten.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den komplexen Zahlen. So, wie man zu den negativen Zahlen kommt, verschafft man sich einen Zahlbereich, in dem das Quadrat mancher Zahlen auch negativ sein kann. Das Ganze hat dann noch die wirklich überraschende Pointe, dass in diesem Bereich alle sinnvoll formulierbaren Probleme gelöst werden können. Es ist also nicht – wie man eigentlich erwarten würde – notwendig, bei immer neuen Problemen immer kompliziertere Zahlbereiche zu erfinden.

Das alles stellte sich im 18. und 19. Jahrhundert heraus. Seit dieser Zeit sind Mathematikern, Physikern und Ingenieuren die komplexen Zahlen so vertraut wie Laien die 3 und die 12. Komplexe Zahlen kann man sich als Punkte der Ebene vorstellen, im Prinzip verhalten sich diese Größen nicht komplizierter als die, mit denen wir alle tagtäglich zu tun haben.

Und wozu? Komplexe Zahlen sind für die Arbeit von Mathematikern, Ingenieuren und Physikern genau so unentbehrlich wie negative Zahlen für Finanzmathematiker.

Richtig ist allerdings, dass das Vertrautwerden mit ihnen nicht ganz einfach ist, da man sie bei den Problemen des Alltagslebens eigentlich nicht braucht. Es war wohl auch nicht glücklich, sie „komplex“ oder gar „imaginär“ zu nennen. Dadurch bekamen sie ungerechtfertigterweise ein etwas mystisches Image. Wer sich davon verwirren lässt, ist übrigens in guter Gesellschaft. Robert Musil hat in den „Verwirrungen des Zöglings Törleß“ diese Irritationen ganz gut beschrieben.

Verwirrungen ...

„Du, hast Du das vorhin verstanden?“
„Was?“
„Die Geschichte mit den imaginären Zahlen?“
„Ja, das ist doch gar nicht so schwer. Man muß nur feststellen, daß die Quadratwurzel aus negativ Eins die Rechnungseinheit ist.“
„Das ist es ja gerade: Die gibt es doch gar nicht ... “
„Ganz recht; aber warum sollte man nicht trotzdem versuchen, auch bei einer negativen Zahl die Operation des Quadratwurzelziehens anzuwenden?“
„Wie kann man das aber, wenn man bestimmt, ganz mathematisch bestimmt weiß, daß es unmöglich ist?“

(Aus: „Die Verwirrungen des Zöglings Törleß“ von Robert Musil.)

Komplexe Zahlen: Das Wichtigste

Man kommt mit komplexen Zahlen ganz gut klar, wenn man die folgenden Tatsachen kennt:

1. Man kann sie sich in der Ebene vorstellen

Denken wir an einen Punkt in der Ebene, in die die üblichen Koordinatenachsen eingezeichnet sind. In dem nachfolgenden Bild ist der Punkt mit den Koordinaten $(2, 3)$ eingezeichnet.

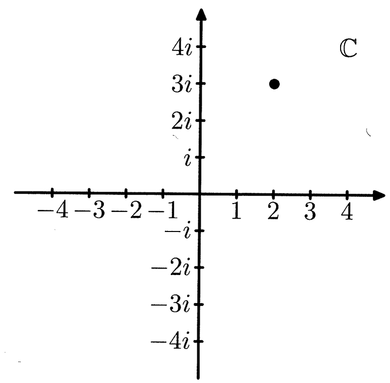

Abbildung 82: Die komplexe Zahlenebene

Und ab sofort sprechen wir nicht mehr von Punkten der Ebene, sondern von komplexen Zahlen. Für einen Punkt mit den Koordinaten (x, y) schreiben wir $x + y \cdot i$, eben ging es um die „Zahl“ $2+3\cdot i$. Das ist vielleicht ein bisschen mysteriös, aber es reicht, wenn Sie Punkte wie etwa $(12, 14)$ als Zahlen schreiben können (Ergebnis: $12 + 14 \cdot i$) und umgekehrt auf den Punkt zeigen können, der zu einer komplexen Zahl – etwa zu $3 + 2.5 \cdot i$ – gehört (Ergebnis: $(3, 2.5)$).

2. Man kann prima mit ihnen rechnen

Die *Addition* wird wie folgt erklärt. Um etwa $2+3\cdot i$ und $7+15\cdot i$ zu addieren, muss man nur die Nicht-i-Anteile und die i-Anteile gesondert zusammenzählen. Als Ergebnis erhält man hier $9+18\cdot i$, denn $2+7=9$ und $3+15=18$. Genauso ergibt sich $-9+5.5\cdot i$ als Summe aus $-6+3\cdot i$ und $-3+2.5\cdot i$, weitere Beispiele dürften sich erübrigen.

Für die *Multiplikation* muss man sich nur eine Faustregel merken: „Rechne mit den aus der Schule bekannten Regeln, und wenn Du auf einen Ausdruck der Form $i\cdot i$ triffst, ersetze ihn durch -1". Als Beispiel wollen wir $3+6\cdot i$ und $4-2\cdot i$ miteinander multiplizieren. Das „übliche" Ausrechnen führt auf $12-6\cdot i+24\cdot i-12\cdot i\cdot i$. Wegen des zweiten Teils der Faustregel ist $-12\cdot i\cdot i$ durch $-12\cdot(-1)$, also durch 12 zu ersetzen. Zusammen ergibt sich als Wert des Produkts die komplexe Zahl

$$12-6\cdot i+24\cdot i+12=24+18\cdot i.$$

Bemerkenswerterweise ist in diesem Zahlbereich das Produkt von i mit sich gleich -1, die Gleichung $z^2=-1$ hat also nun – anders als im Bereich der aus der Schule bekannten Zahlen – eine Lösung[85)].

3. Nun sind alle Gleichungen lösbar: lineare, quadratische, Gleichungen dritten Grades usw.

Das soll Folgendes bedeuten: Egal, was für eine komplizierte Gleichung beliebig hohen Grades wir vorgelegt bekommen, es gibt immer eine komplexe Zahl, die exakt dieser Gleichung genügt. Man weiß zum Beispiel, dass es garantiert eine Zahl der Form $z=x+y\cdot i$ gibt, so dass $z^{10}-4z^3+9.2z-\pi=0$ gilt. Diese Tatsache ist von überragender Bedeutung. Wenn zum Beispiel ein Ingenieur das Schwingungsverhalten eines Schaltkreises oder einer Riesenradarantenne untersucht, verraten ihm die Lösungen einer solchen Gleichung im Komplexen, ob sich das System aufschaukeln kann oder ob es stabil bleiben wird.

Die allgemeine Lösbarkeit von Gleichungen ist der Hauptgrund für die Bedeutung der komplexen Zahlen. Vor etwa 200 Jahren wurde es vermutet, die ersten hieb- und stichfesten Beweise stammen von dem berühmten Carl-Friedrich Gauß[86)].

85) Es ist dabei $z^2=z\cdot z$, die üblichen Schreibweisen werden auch für komplexe Zahlen verwendet.
86) Vgl. Beitrag 25.

95. Der Grafiker Maurits Escher und die Unendlichkeit

Die Werke des holländischen Grafikers Maurits Cornelis Escher sind bei Kunstexperten nicht besonders hoch angesehen. Inwieweit das gerechtfertigt ist, kann hier nicht entschieden werden. Eschers Bilder sind aber unter verschiedenen Aspekten für die Mathematik interessant. Alle sind geometrischer Natur.

Der erste bezieht sich auf so genannte *Parkettierungen*. Das sind Zerlegungen der Ebene, bei denen sich ein Grundmuster immer und immer wiederholt. Man kann zum Beispiel ein Quadrat ausmalen und dieses Bild dann – wie auf einem unendlichen Schachbrett – in alle Richtungen verschieben. Damit es interessanter aussieht, könnte man jede zweite Kopie auf den Kopf stellen oder spiegeln. Statt von Quadraten könnte man auch von Rechtecken oder gleichseitigen Dreiecken ausgehen, es scheint eine Menge an Variationsmöglichkeiten zu geben.

Escher hat sich diesem Problem wie ein Mathematiker genähert: Wie viele wirklich verschiedene Möglichkeiten gibt es und wie kann man sie beschreiben? Obwohl er ein mathematischer Laie war, ist ihm eine vollständige Klassifizierung gelungen, alle Beispiele sind auch in seinen Grafiken verwirklicht worden. Die Mathematiker, die sich mit ähnlichen Problemen beschäftigt hatten, waren von seinen Ergebnissen beeindruckt.

Bemerkenswert ist auch Eschers Versuch, die Unendlichkeit darzustellen. Von den Parkettierungen der Ebene kann ja immer – und sei das Bild noch so groß – nur ein Teil dargestellt werden. Escher fand zwei Lösungen des Problems. Die erste besteht darin, von der Ebene zu einer anderen randlosen Fläche überzugehen: Er parkettierte einfach eine Kugeloberfläche, dadurch ergeben sich Muster, die unbegrenzt ineinander übergehen. Bei der zweiten Lösung machte sich Escher eine mathematische Entwicklung des 19. Jahrhunderts zunutze, die er durch den Mathematiker Coxeter kennen gelernt hatte. Gemeint sind nichteuklidische Geometrien, bei denen sich die Unendlichkeit in einer für uns endlichen Fläche modellieren lässt. So sind seine berühmten Schlangen- und Fischmotive entstanden.

Schließlich sind hier auch noch seine „unmöglichen" Bilder zu erwähnen, etwa die Treppen, die in sich geschlossen sind, aber immer nur aufwärts führen. Im Kleinen sehen sie ganz vernünftig aus, der Betrachter ist jedoch nicht in der Lage, aus den lokalen Eindrücken ein sinnvolles dreidimensionales Gebilde zusammenzusetzen.

Auch wenn man das Zusammenspiel von „lokal" und „global" mit mathematischen Methoden beschreiben kann, bleibt ein unerklärlicher Rest, für den die Wahrnehmenspsychologie zuständig ist. Beim Ansehen von Eschers Bildern wird deutlich, dass das Auge heimlich und meist unauffällig als Zensor arbeitet, der nur bereits vorverarbeitete Botschaften an das Bewusstsein schickt.