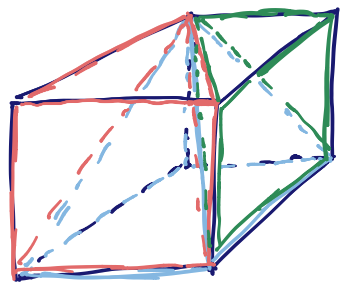
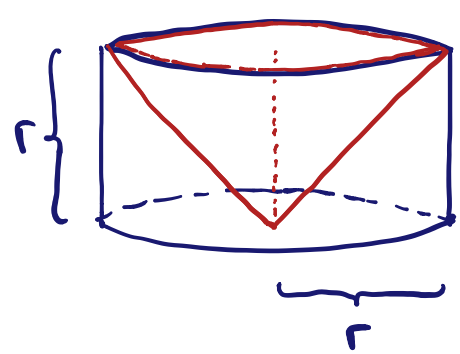
Flächen und Volumen



Also folgt mit Ähnlichkeit und dem Prinzip von Cavalieri, dass das Volumen einer hier skizzierten Pyramide $\frac{1}{3}$ des Würfelvolumens beinhalten muss.

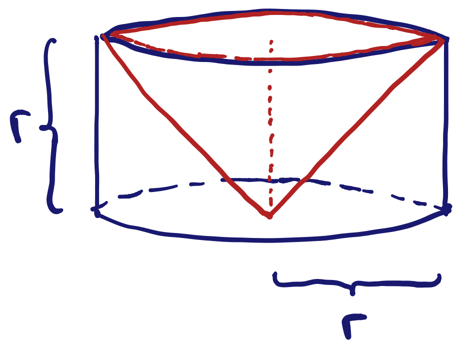
$$\boxed{V_p = \frac{1}{3} k^3}$$

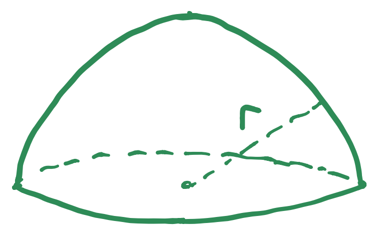
Zylinder mit ausgefrästem Kegel



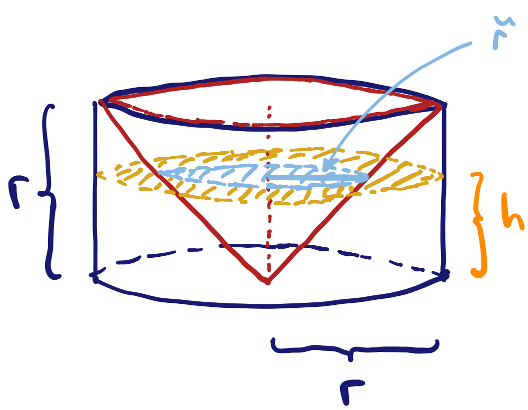
Diesen vergleicht man mit einer entsprechenden Halbkugel und rechnet.
Visuell sieht es ansprechend aus. "Unten" hat man in beiden Figuren einen vollen Kreis und "oben" ist die Fläche 0. Das könnte

klappen...





Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt auf der Höhe h und vergleichen die Flächen:

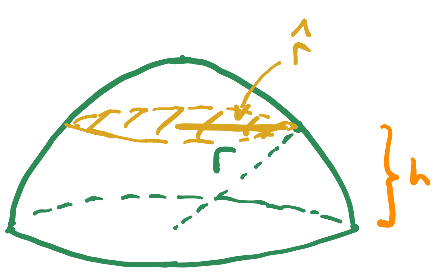


Wir müssen $\tilde r$ bestimmen, um die hellblaue Fläche ausrechnen zu können. Aus der Figur entnehmen wir sofort:

$$\tilde r = h.$$

Damit hat das Kreisband die Fläche:

$$\begin{aligned} A(h) &= \pi r^2 - \pi h^2 \\ &= \pi(r^2 - h^2) \end{aligned}$$



Bei der Halbkugel ist nach Pythagoras: $\hat r = \sqrt{r^2 - h^2}$

Damit gilt für die schraffierte Kreisfläche: $F(h) = \pi \hat r^2$

$$= \pi(r^2 - h^2)$$

Also sind die Flächen auf jeder Höhe h gleich und wir wenden das Prinzip von Cavalieri an:

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel} = \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 r$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

Damit gilt für das Volumen einer Kugel: $\boxed{V_k = \frac{4}{3}\pi r^3}$ $\square$