Differentialrechnung

Newton oder Leibniz? Newton und Leibniz ...

Inhaltsverzeichnis

1. Historisches

1.1. Tangenten- und Flächenproblem

Die Mathematik der Antike hat ihrer Nachwelt zwei klassische Probleme überliefert: das *Tangentenproblem* und das *Flächenproblem*.

- Die Konstruktion einer Tangente an einen Kreis ist relativ einfach. Sie versagt aber schon, wenn man versucht, eine Tangente an eine Ellipse zu konstruieren. Die griechischen Geometer hatten für die Ellipse ein neues Verfahren erdacht, das aber schon wieder bei einer anderen Kurve, der Parabel, versagte. Die Konstruktion der Parabeltangente liess sich nicht auf die Hyperbel übertragen; man musste also für jede Kurve eine ganz neue Konstruktion ersinnen. Wenn nur wenige Kurven bekannt sind, besteht kein Anlass, nach einer allgemeinen Methode zu suchen. Die Situation änderte sich aber schlagartig, als zu Beginn des 17. Jahrhunderts die analytische Koordinatengeometrie entstand und somit beliebig viele Kurven zu untersuchen waren. Jetzt wurde eine universelle Methode verlangt, die es ermöglicht, den Verlauf der Tangente für jede beliebige Kurve zu studieren.

- Das Flächenproblem bestand darin, den Inhalt einer durch Kurven begrenzten Fläche zu berechnen. Zu diesem Problem leistete vor allem Archimedes (287 – 212 v.u.Z) Hervorragendes. Seine Methode, die Exhaustionsmethode, bestand darin, die zu berechnende Fläche durch eine Folge von Flächen mit schon bekanntem Inhalt auszuschöpfen. Wenn man das Flächenproblem gelöst hat, fällt die Berechnung des Volumens eines Körpers nicht mehr so schwer. Viele spezielle Flächen und Körper konnten so durch teilweise raffinierte Zerlegungen berechnet werden. Aber es existierte noch keine universelle Methode.

2. Durchschnittliche Änderungsrate

Heraklit (535 – 475 v.u.Z) soll gesagt haben: „alles bewegt sich fort“; Aristoteles (384 – 322 v.u.Z) schrieb über Heraklit und seine Anhänger:

> „. . . diese aber sagen, dass alles andere im Werden und im Fluss sei.“

Nichts entgeht der Veränderung. Alles wächst oder schrumpft, erwärmt sich oder kühlt sich ab, wechselt die Stellung, die Farbe oder die Zusammensetzung. Die Fauna und die Flora liefern beliebig viele Beispiele, selbst Felsen dehnen sich in der Sonne aus und ziehen sich im Schatten zusammen. Körpergrösse, Körpertemperatur, Pulsfrequenz, Blutdruck sind einige Beispiele für — direkt auf den Menschen — bezogene Grössen, die sich mit der Zeit ändern.

Der Mathematik der Antike gelang es nicht, veränderliche Grössen mathematisch zu erfassen. Ihre Mathematik war, bis auf wenige Ausnahmen, eine feste und stillstehende Welt. Andererseits zeigt dies, dass es sehr schwer ist, einen Veränderungsprozess zu analysieren und das dahinterstehende Naturgesetz zu finden.

Erst im 16. und 17. Jahrhundert war die Zeit reif, den allgemeinen Begriff der veränderlichen Grösse in die Mathematik aufzunehmen. Was waren die Triebfedern für diese Entwicklung?

Für die Anwendungen der Mathematik standen Probleme der Geodäsie, der Astronomie, des Artilleriewesens, der Schifffahrt, des Kanalbaus, der maschinellen Ausrüstung von Manufakturen im Vordergrund. Insbesondere wurden beispielsweise gebraucht: Maschinen zur Wasserhaltung und Förderung in Bergwerken, Maschinen zur Textil- und Papierherstellung, Maschinen für den Tunnelbau, Schiffshebewerke, Kräne etc.. Die Uhren mussten enorm verbessert werden. Leonardo da Vinci machte sich sogar schon Gedanken über Flugmaschinen, Unterseeboote und Wagen, die ohne Zugtiere fahren konnten.

Die Mathematik sollte vor allem mechanische Bewegungsabläufe — Planetenbewegungen, Fallbewegungen, Bewegungen gegeneinander beweglicher Maschinenteile — erfassen und theoretisch beschreiben können.

Der neuen Mathematik des 16. und 17. Jahrhunderts gelang es, mit denselben Methoden sowohl das Tangentenproblem als auch das Flächenproblem, als auch die Bewegungsprobleme zu lösen! Sie konnte gleichzeitig die Verwandtschaft und die Gleichartigkeit all dieser Probleme aufzeigen. Auf diesen Lösungen aufbauend konnten weitere Probleme, die die naturwissenschaftliche Entwicklung immer weiter vorantrieben, bewältigt werden.

René Descartes (1596 – 1650) gelang es, die gegenseitige Abhängigkeit von veränderlichen Grössen — ausgedrückt durch eine Gleichung oder eine Funktion — in einem Koordinatensystem graphisch darzustellen. Weiterhin konnten die einzelnen Zustände einer Bewegung sichtbar gemacht und genau studiert werden. Es fehlte aber noch die klare Erfassung des Funktionsbegriffes und eine auf veränderliche Grössen zugeschnittene Rechentechnik. Der Funktionsbegriff erweist sich aus heutiger Sicht als fundamental, da durch ihn die gegenseitige Abhängigkeit der Grössen ausgedrückt werden kann.

In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts schufen dann Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) unabhängig voneinander etwas für die bisherige Mathematik völlig Neues, das die analytische Koordinatengeometrie von Descartes mit der von Archimedes stammenden Exhaustionsmethode verband.

Dieses neue Gebiet der Mathematik heisst heute Infinitesimalrechnung oder *Analysis* oder Differenzial- und Integralrechnung oder im englischen Sprachraum *Calculus*.

Die Differenzialrechnung, die das Tangentenproblem löst, bildet unter anderem die Grund-

Abbildung 1: Sir Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz

lage der mechanischen Bewegungen. Mit ihr kann beispielsweise der Physiker oder Techniker aus einer gegebenen Bahnkurve für jeden Zeitpunkt die augenblickliche Geschwindigkeit ermitteln. Später eroberte sich die Differenzialrechnung immer mehr Anwendungsgebiete; zum Beispiel ist sie für die heutigen Wirtschaftswissenschaften unentbehrlich geworden.

Mit der Integralrechnung, die das Flächenproblem löst, konnte man bald nach ihrer Entdeckung auch die Bogenlänge eines Kurvenstückes oder den Rauminhalt und die Oberfläche eines krummflächig begrenzten Körpers berechnen, aber auch viele physikalische Begriffe, wie zum Beispiel Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Arbeit etc. mathematisch erfassen. Als besonders nützlich erwies sich die Integralrechnung zu der Zeit, als die Kohle als Energiequelle die Arbeit des Menschen und des Lasttiers zu ersetzen begann. Mit ihr konnte man nämlich die Leistung und den Wirkungsgrad von Maschinen berechnen. Später wurde die Integralrechnung auch zur Grundlage der Chemie der Energiestoffe (Thermodynamik).

Die Infinitesimalrechnung erlaubt es, „Bewegungen abzustoppen“ und Augenblick für Augenblick zu analysieren. Sie ist neben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für die angewandten Naturwissenschaften auch heute noch der wichtigste Zweig der Mathematik. Jedes moderne Verkehrsmittel, jedes Fernsehgerät, jede grössere Brücke oder Maschine in einer Fabrik, aber auch leider jede Atombombe wäre ohne Infinitesimalrechnung nicht denkbar.

Vom 17. Jahrhundert an ist es ein typisches mathematisches Problem, aufgrund einiger Daten oder Gleichungen eine Funktion zu finden, die verschiedene Bedingungen zu erfüllen hat. Die Theorie der Funktionen (Potenzreihenentwicklung) und die Lösungen der entsprechenden Gleichungen (Differenzial- und Integralgleichungen) waren entscheidend für die Entwicklung der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik. Mit der Zeit traten immer kompliziertere Funktionen, praktischen oder theoretischen Ursprungs, auf. Statt einer Funktion mit einer Variablen waren mehrere Funktionen mit mehreren Variablen und sie verbindende Differenzial- oder Integralgleichungen zu betrachten. Beispielsweise sind in der Hydrodynamik sich räumlich ausdehnende Gase oder Flüssigkeiten zu betrachten: Druck, Dichte und drei Geschwindigkeitskomponenten sind von Ort und Zeit abhängig, was ein System von fünf Funktionen mit vier Variablen ergibt.

Wenn es gelingt, die Parameter einer veränderlichen Situation in Gleichungen auszudrücken, kann man rein theoretisch und ohne Experimente mit der Infinitesimalrechnung die Naturgesetze herausfinden, denen die Parameter unterliegen.

Bergamini schreibt in seinem Buch „Die Mathematik“:

> „Die zu berechnenden Veränderungen können so dramatisch sein wie die steigende Geschwindigkeit einer Rakete nach dem Start oder so sanft wie die unterschiedlichen Steigungen einer modernen Bergstrasse. Sie können so sichtbar sein wie die gewonnenen Pfunde auf einer einst schmalen Taille, aber auch so unsichtbar wie der Phasenwechsel in einem Stromkabel. Hörbar können sie sein wie das Crescendo einer Beethoven-Symphonie oder so schweigend wie die Wasserkraft hinter einem Damm. Sie sind jedenfalls berechenbar.“

3. Momentane Änderungsrate

Bei einer veränderlichen Situation ist nicht nur der augenblickliche Zustand von Interesse; vielmehr interessiert oft, mit welcher Geschwindigkeit sich die Situation ändert. Für die Wettervorhersage ist nicht allein die Grösse des Luftdrucks wichtig, sondern vor allem, wie stark der Druck je Stunde steigt oder fällt. Für den Wirtschaftswissenschaftler ist neben dem Marktpreis eines Produktes von besonderer Wichtigkeit, wie schnell sich der Preis mit der Zeit ändert (Teuerungsrate). Für den Chemiker ist interessant, wie sich die Reaktionsgeschwindigkeit eines von der Temperatur abhängigen chemischen Prozesses verändert, wenn man die Temperatur um einige Grade absenkt bzw. erhöht.

Die Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz kann diese und ähnliche Fragen mit zwei neuen Verfahren, der Differenziation und der Integration, beantworten.

Wir betrachten eine beliebige, zeitlich veränderliche Situation, deren einzelne Zustände durch die Funktion

$$f : t \mapsto f(t)$$

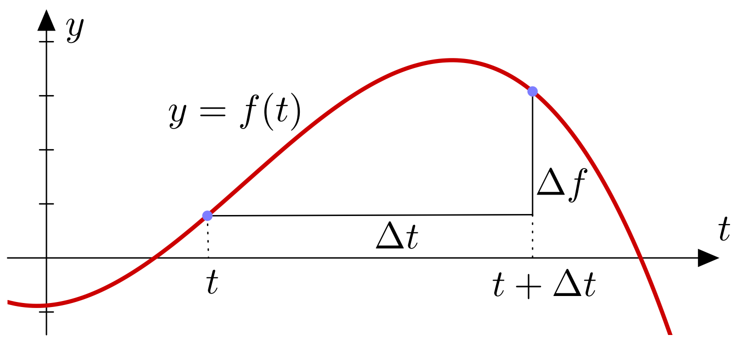


Abbildung 2: durchschnittliche Steigung $\frac{\Delta f}{\Delta t}$

beschrieben werden können. Man kann relativ einfach eine *durchschnittliche* Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes angeben, indem man die zu zwei bestimmten Zeitpunkten t_1 und t_2 gebildete Differenz der zugehörigen Funktionswerte $f(t_1)$ und $f(t_2)$ durch die Zeitspanne dividiert.

$$\overline{v} = \frac{\text{Änderung von } f(t)}{\text{Änderung von } t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Mit der Differenziation kann man jedoch die *momentane* Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zu einem beliebigen Zeitpunkt t berechnen.

Man bezeichnet üblicherweise einen Zuwachs der Variablen t mit Δt und die entsprechende Änderung des Funktionswertes zwischen den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ mit Δf.

Da Zähler und Nenner jeweils Differenzen sind, heisst der Bruch Differenzenquotient. Jetzt braucht man nur zu verfolgen, was mit dem Bruch $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ geschieht, wenn Δt gegen Null strebt. Zu Beginn gibt der Differenzenquotient die durchschnittliche Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zwischen den Zeitpunkten t und $t+\Delta t$ an. Wenn nun Δt gegen Null strebt, so strebt Δf auch gegen Null. Der Wert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ muss dabei nicht unbedingt gegen Null streben. Der Differenzenquotient hat, falls Δt gegen Null strebt, (hoffentlich!) einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist, falls er existiert, die augenblickliche Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zum Zeitpunkt t. Man schreibt dafür

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

und nennt diesen Grenzwert **Differenzialquotient**.

Die Integration ist in gewisser Weise die Umkehrung der Differenziation, etwa in der Art, wie die Addition und Subtraktion oder Multiplikation und Division Umkehrungen voneinander sind. Bei der Integration sucht man eine Funktion, deren Differenzialquotient

$q(x)$ bekannt ist. Man nennt diese Funktion das Integral von $q(x)$ und schreibt

$$\int q(x)\,dx$$

(integrare: lat. wiederherstellen).

Kennt man zum Beispiel bei einer Autofahrt die zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit, so gibt der Differenzialquotient für einen bestimmten Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit an. Kennt man die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, so kann man mit Integration die zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten zurückgelegte Wegstrecke berechnen.

Die Differenziation hat lokalen Charakter, d.h. es genügt, die Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung einer bestimmten Stelle zu kennen, um die Änderungsgeschwindigkeit an dieser Stelle zahlenmässig zu berechnen. Bei der Integration hingegen ist die Funktion als Ganzes von Bedeutung; deshalb ist bei der Integration ein anderer Grenzprozess erforderlich.

Es mag vielleicht so aussehen, als ob Newton und Leibniz etwas Offensichtliches oder Selbstverständliches entdeckt hätten. Viele Wissenschaftler hatten sich vor ihnen mit den gleichen Problemen beschäftigt, aber keiner konnte die einzelnen Erfolge zu einem Neuen und Einheitlichen zusammenfügen. Differenziation und Integration konnten auf jede Art von veränderlichen Grössen, wenn sie nur durch eine Gleichung miteinander verbunden werden konnten, angewendet werden. Es zeigte sich, dass die Differenzialrechnung das Tangentenproblem und die Integralrechnung das Flächenproblem lösten. Tangenten- und Flächenproblem erwiesen sich als zwei Seiten derselben Münze. Nach der Entdeckung der Differenzial- und Integralrechnung steht nicht mehr das Einzelproblem im Vordergrund der Forschung, sondern die allgemeine Methode zur Erledigung ganzer Problemklassen. Das Einzelproblem wird zum Übungsbeispiel degradiert. Ein neues, mit den vorhandenen Methoden nicht lösbares Einzelproblem veranlasst den Ausbau der Methoden, so dass es wieder zum Übungsbeispiel wird. In der Mathematik wird so zuerst die grosse Entscheidung erkennbar, die auf anderen Gebieten erst 150 Jahre später augenfällig wird, die Abkehr vom Handwerk und der Einzelanfertigung zur Maschinenarbeit und Serienfabrikation.

Nach jahrelangen Experimenten und vielen theoretischen Anläufen konnte GALILEI 1585 die Gesetze des freien Falls aufstellen: Ein auf die Erde herabfallender Körper legt in der Zeit t den Weg

$$s(t) = 4.9t^2$$

zurück (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter); nach der Zeit t hat der Körper die Geschwindigkeit

$$v(t) = 9.8t$$

($v(t)$ in $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$); seine Beschleunigung ist zu jedem Zeitpunkt konstant, nämlich

$$9.8\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Mit der von NEWTON und LEIBNIZ entdeckten Infinitesimalrechnung braucht man nur die Ausgangsfunktion

$$s : t \mapsto s(t) = 4.9t^2$$

zu kennen. Die Geschwindigkeit ist die Änderung des Weges relativ zur Zeit, also der Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9(t + \Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t}$$

und damit

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 4.9 \cdot 2t + 4.9\Delta t = 9.8t.$$

Die Beschleunigung $a(t)$ ist die Veränderung der Geschwindigkeit relativ zur Zeit, also der Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9.8(t + \Delta t) - 9.8t}{\Delta t} = 9.8$$

Die Beschleunigung ändert sich nicht mehr mit der Zeit, sie ist konstant. Das hinter dem freien Fall stehende Naturgesetz, dass jeder frei fallende Körper mit der konstanten Beschleunigung von $9.8\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$ auf die Erde fällt, tritt klar und ohne grossen Aufwand ans Licht. Newtons Stolz und Freude über diese Entdeckung kann wohl nur derjenige nachempfinden, der eine ähnliche Entdeckung dieser Tragweite gemacht hat.

Noch heute wird NEWTON als der grösste Physiker und als einer der grössten Mathematiker bezeichnet. ALBERT EINSTEIN schrieb:

> „Für NEWTON war die Natur ein offenes Buch, dessen Buchstaben er mühelos lesen konnte.“

Newton selbst sagte:

> „Mir selbst kommt es vor, als wäre ich wie ein Knabe gewesen, der am Strand des Meeres spielt und sich damit vergnügt, hier und da einen glatteren Kiesel oder eine schönere Muschel zu finden, während der grosse Ozean der Wahrheit unentdeckt vor mir lag.“

An anderer Stelle erklärt er bescheiden, er habe nur deshalb weiterschauen können, weil er auf den Schultern von Riesen gestanden habe. Damit meinte er in erster Linie Archimedes (287 – 212 v.u.Z), Johannes Kepler (1571 – 1630), Galileo Galilei (1564 – 1642), Blaise Pascal (1623 – 1662), Pierre de Fermat (1601 – 1665), René Descartes (1596 – 1650).

Newtons wichtigster Lehrer war Isaac Barrow, der als erster erkannt hatte, dass das Tangentenproblem und Flächenproblem Umkehrungen voneinander waren. 1669 erhielt Newton mit 26 Jahren Barrows Lehrstuhl für Mathematik in Cambridge.

Schon als Student hatte Newton die Regeln der Differenziation und der Integration ausgearbeitet. Während 1665/1666 die Pest in London 30 000 Opfer forderte, verbrachte Newton auf dem Lande zwei schöpferische Jahre mit der Erforschung der Anwendungsmöglichkeiten seiner Fluxionsrechnung, wie er seine Version der Infinitesimalrechnung nannte. Seine Ergebnisse (Axiome, freier Fall, Planetenbewegung, Gravitation, Berechnung der Gezeiten, ...), die schon 1671 in einem druckfertigen Manuskript vorlagen, erschienen erst 1687 in seinem Buch „Philosophiae naturalis principia mathematica“, in dem die Bewegungsgesetze formuliert und damit die Grundlagen der Mechanik gelegt wurden. Erst durch Einstein wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Newton'sche Physik in einen noch tieferen Zusammenhang, den der Relativitätstheorie, eingebettet. Die physikalischen Ergebnisse seiner „Principia“ hat Newton durch seine Fluxionsrechnung gefunden, jedoch in klassischer geometrischer Weise dargestellt, damit seine Zeitgenossen überhaupt in der Lage waren, seine Herleitungen nachzuvollziehen.

Leibniz war nicht nur ein bedeutender Mathematiker. Er sprach schon mit 12 Jahren griechisch und lateinisch, war Philosoph, Historiker, Jurist und Diplomat. Er lieferte wesentliche Beiträge zur Mechanik, Biologie und theoretischen Logik; er gründete 1700 die Berliner Akademie der Wissenschaften, er war Erfinder einer Rechenmaschine, einer Universalsprache; er machte unzählige alchimistische Versuche, kümmerte sich um Wasserförderung in den Bergwerken, Seidenraupenzucht und technische Verbesserungen von Maschinen. Leibniz war ein Universalgenie! Im diametralen Gegensatz zu seinem Rivalen Newton, der 1705 geadelt und 1727 feierlich mit einem Staatsbegräbnis in der Londoner Westminster Abtei beigesetzt wurde, war Leibniz bei seinem Fürsten in Ungnade gefallen und starb einsam und völlig verarmt. Newton ist allen Briten durch sein Porträt auf der alten One Pound Note bekannt, während Leibniz in Deutschland kaum eine derartige Ehrung erfahren wird.

Christiaan Huygens, der bedeutendste Physiker, Astronom und Mathematiker der Generation vor Newton und Leibniz, führte Leibniz ab 1672 in die damalige wissenschaftliche Mathematik ein. 1675 gelingt Leibniz, unabhängig von Newton, die Entdeckung des „Calculus“, wie er seine Version der Infinitesimalrechnung nannte. Er veröffentlichte bereits ab 1684 seine Ergebnisse. Dies führte denn auch zu einem hässlichen Prioritätsstreit. Newton hatte die Probleme der Infinitesimalrechnung mehr von der Physik her gesehen, Leibniz Ausgangspunkt war eher das Tangentenproblem. Man kann auch hier nur die Freude erahnen, die sich bei der Entdeckung, dass sein Calculus auch das Flächenproblem löste, einstellte.

Die rasche Verbreitung der Leibniz'schen Methoden und ihrer weitgefächerten Anwendungen auf dem Kontinent ist vor allem seiner genialen Wahl der Bezeichnungen und Symbole zu verdanken. Sein Notationssystem

$$\frac{dy}{dx}$$

für den Differenzialquotienten,

$$\int y\,dx$$

für das Integral, wird noch heute so benutzt. Mit dieser Schreibweise war es möglich, Ergebnisse herzuleiten, ohne die tieferen Zusammenhänge zu verstehen. Selbstzufrieden meinten damals manche Wissenschaftler, jeden Vorgang in der Natur erklären zu können, weil das Infinitesimale als vollkommenes Abbild des Alls betrachtet werden könne. Man muss nur die entsprechenden Differenzial- und Integralgleichungen aufstellen und lösen. Leibniz glaubte, mit seinen Methoden in jedem noch so kleinen Stück einer Kurve ihr vollständiges Gesetz erkennen zu können. So leicht macht es uns die Natur nun doch nicht, da gerade in Naturprozessen der Zufall eine grosse Rolle spielt. Dennoch gab es schon Zeitgenossen von Newton und Leibniz, die bereits an den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung arbeiteten, um den Zufall mathematisch erfassen zu können. An der weiteren Entwicklung der Infinitesimalrechnung sind vor allem die Basler Mathematiker Jakob und Johann Bernoulli (1654 – 1705, 1667 – 1748) beteiligt. Von Johann Bernoulli stammt auch die Bezeichnung „Integral". Beide Brüder waren Anhänger Leibniz, aber Newton gegenüber eher feindlich gesinnt. So versuchten sie durch besonders schwere Aufgaben, Newton von der besseren Schreibweise Leibniz zu überzeugen. Bei einer dieser Aufgaben wurde nach der Kurve gefragt, auf der ein Körper in einer Vertikalebene unter dem Einfluss der Schwerkraft am schnellsten von einem höheren zu einem niedrigeren Punkt gelangt. Aber Newton löste dieses Problem nach einem arbeitsreichen Tag in einer Nacht und schickte seine Lösung anonym an Johann Bernoulli. Als dieser die Lösung sah, soll er spontan gesagt haben: „Ich erkenne den Löwen an der Pranke."

Aus den zahlreichen Entdeckungen der Bernoullis sei hier nur noch die logarithmische Spirale erwähnt. Deren merkwürdige Eigenschaften beeindruckten Jakob Bernoulli so sehr, dass er sie als Motiv für sein Epitaph wählte. Auf seinem Epitaph, der noch heute im Kreuzgang des Basler Münsters zu sehen ist, steht das Epigramm: „Eadem mutata resurgo", das die unendliche Wiederkehr des Gleichen als Unsterblichkeitssymbol darstellen soll. Leider zeigt der Epitaph überhaupt nichts von der Schönheit einer logarithmischen Spirale, da die Figur eher einer archimedischen Spirale gleicht. Den wahren Durchbruch der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften und insbesondere der Mechanik aber erreichte der in Riehen geborene Leonhard Euler (1707 – 1783). 1979 wurde ihm zu Ehren die bis 1997 gebräuchliche 10-Franken Note gestaltet.

Auf der Vorderseite erkannte man eine Zeichnung des idealen „Zahn-Profils“ eines Zahnrades, eine von Eulers zahlreichen Entdeckungen. Den Hintergrund bildeten Diagramme, die EULER zur Darstellung logischer Schlüsse verwandte. Die drei Motive auf der Rückseite zeigten: Eine von Euler auf Grund von Berechnungen entworfene Wasserturbine, deren Grundidee noch heute bei modernen Turbinen in den Kohle- und Kernkraftwerken verwendet wird, ein Schema eines Strahlengangs durch ein System von Linsen, und eine Darstellung unseres Sonnensystems im Zusammenhang mit Eulers Mondtheorie, die die für die Schifffahrt wichtigen Tafeln der Mondbewegung enorm verbesserte. Eulers gesammelte Werke, die seit Jahrzehnten in Basel und Leningrad neu herausgegeben werden, umfassen bis jetzt etwa 100 Quartbände. Euler gilt als der letzte Mathematiker, der noch die gesamte „zeitgenössische“ Mathematik beherrschte. Zum Vergleich: Heute kennt ein guter Mathematiker höchstens 3% der gesamten Mathematik.

J.O. FLECKENSTEIN schreibt in seiner Broschüre „Johann und Jakob Bernoulli“:

> „Gleicht der Genius Leibniz einem abenteuerlichen Seemann, der durch die gefährlichen Wogen und Stürme der philosophischen Spekulation steuernd mit divinatorischer Sicherheit sein Schiff zur Landung in dem erahnten Neuland bringt, so gleicht das Talent der beiden Bernoulli der wagemutigen Pionierarbeit der ersten Eroberer nach der geglückten Landung. ... Johanns grösster Triumph wohl war, dass er einen noch Grösseren zum Schüler hatte: Den Genius Eulers, der das von den Pionieren eroberte Neuland der *Infinitesimalrechnung* zu üppiger Pracht kolonisieren sollte, ohne freilich die Giftpflanzen darinnen zu erkennen, die erst die kritische Sonde der Analytiker des 19. Jahrhunderts zutage förderte.“

Die nächste Generation warf NEWTON und LEIBNIZ vor, sie hätten aus einer Summe von Nichtsen ein Etwas geschaffen. Tatsächlich war es ja gelungen, durch Aufsummieren beliebig kleiner Grössen die kompliziertesten Flächen oder Volumina zu berechnen. JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813) meinte dazu:

> „Der Zustand der Mathematik ist wahrhaft beklagenswert, sie wimmelt von Widersprüchen und wenn sie trotzdem zu so grossen Erfolgen geführt hat, so liegt das nur daran, dass Gott in seiner Allmacht es so gefügt hat, dass sich die Fehler gegenseitig aufheben.“

Im 19. Jahrhundert waren es neben LAGRANGE vor allem PIERRE SIMON LAPLACE (1749 – 1823), ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752 – 1833), AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789 – 1864), CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855), BERNHARD RIEMANN (1826-1866) und KARL WEIERSTRASS (1815 – 1897), die eine strenge Begründung und einen weiteren Ausbau der Infinitesimalrechnung erreichten. Von diesen Analytikern stammt der Name „Analysis“.

Vor dieser kritischen Revision konnten nur wenige, ausserordentlich fähige Mathematiker

Abbildung 3: 10 DM Note: Carl Friedrich Gauss

mit der Infinitesimalrechnung umgehen, da sie unklar dargestellt wurde und teilweise mit Mystik behaftet war. Man brauchte ein instinktives und sicheres Gefühl für den richtigen Weg zur Lösung. Die Arbeiten der Analytiker des 19. Jahrhunderts haben gezeigt, dass die ganze Infinitesimalrechnung auf nur fünf grundsätzlichen, klaren mathematischen Ideen beruht:

- Funktion
- Behandlung des Krummen via Approximation wie Gerades
- Konvergenz und Grenzwert
- Differentiation
- Integration

Dadurch ist heute die Infinitesimalrechnung für jeden interessierten Menschen zugänglich geworden. Man darf aber nicht den Schluss ziehen, dass die Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert abgeschlossen worden wäre. Gegenwärtig werden in den verschiedenen Teilgebieten der Analysis jährlich mehr als 1000 Arbeiten veröffentlicht.

3.1. Der Differenzenquotient

Bei vielen funktionalen Zusammenhängen ist nicht nur interessant, welche Werte eine Funktion f annimmt und ob sie stetig ist, sondern auch, wie rasch bzw. stark die Funktionswerte $y = f(x)$ zu- oder abnehmen, wenn sich die x-Werte ändern. Der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gibt die durchschnittliche Änderung der Funktion f im Intervall $[x_0, x_0 + h]$ an. Mit ihm erhält man eine erste grobe Aussage über das Änderungsverhalten der Funktion f. Dieser Differenzenquotient kann je nach Funktion verschiedene Bedeutungen haben.

Beispiel 1. Bei einer ansteigenden Strasse wird der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha) = m.$$

Er entspricht also der durchschnittlichen Steigung des betrachteten Strassenstücks.

Übung 1. Berechne die durchschnittliche Steigung des Könizbergs (höchster Punkt 674 M.ü.M) in Prozent und berechne den Steigungswinkel, wenn die beiden Messungen horizontal 700 m auseinander liegen. Köniz liegt auf einer Höhe von 610 M.ü.M.

3.1.1. Anwendungen

Beispiel 2. Beim radioaktiven Zerfall verringert sich die Anzahl der radioaktiven Kerne allmählich. Dementsprechend nimmt die Strahlung jedes radioaktiven Präparats im Laufe der Zeit ab. Die Aktivität sinkt innerhalb der sogenannten **Halbwertszeit** auf die Hälfte ihres Ausgangswerts. Da radioaktive Materialen aufgrund ihrer ausgesendeten Strahlung leicht geortet werden können, dienen radioaktive Isotope in vielen Bereichen der Physik, Chemie, Biologie, Medizin und Technik als Indikatoren. Beispielsweise kann man mit Jod (J-131), das dem Organismus in geringer Menge zugeführt wird, Stoffwechselvorgänge verfolgen und allfällige Störungen feststellen. Das folgende Diagramm zeigt den Zerfall von J-131, dessen Halbwertszeit 8 Tage beträgt.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta N(t_0)}{\Delta t} = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

gibt in diesem Beispiel die durchschnittliche Zerfallsrate des radioaktiven Isotops an.

Übung 2. Berechne die durchschnittliche Zerfallsrate für Jod 131 in den Intervallen $[8, 16], [16, 24]$ und $[5, 13]$.

Übung 3. In den angewandten Wissenschaften, zum Beispiel Nationalökonomie, bezeichnet man den Zuwachs Δy einer Veränderlichen y pro Zeitperiode Δt als die durchschnittliche Wachstumsrate. Abbildung 5 zeigt die Wohnbevölkerung der Schweiz (in Mio.). Berechne die durchschnittliche Wachstumsrate, also den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, der Wohnbevölkerung der Schweiz in den Zeitperioden 1968-1972, 1972-1975 und 1977-1980.

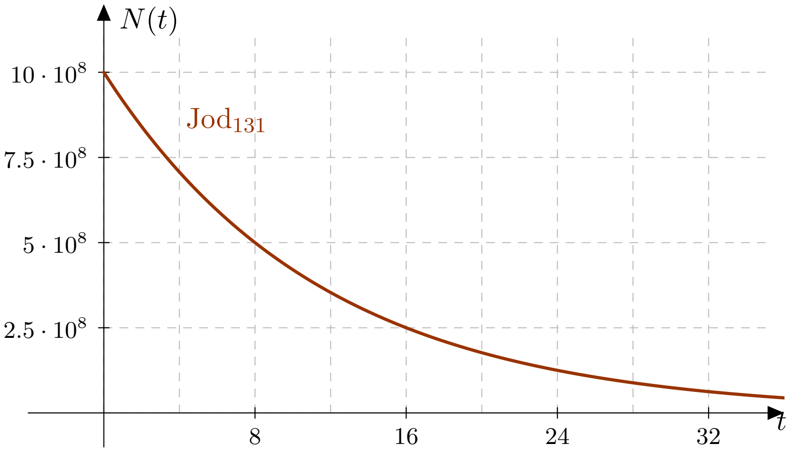


Abbildung 4: Zerfallsverlauf von Jod 131

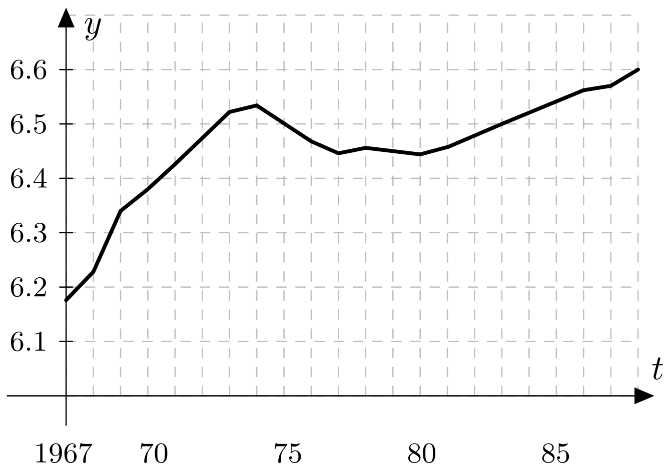


Abbildung 5: Wohnbevölkerung der Schweiz (in Mio.)

Übung 4. Berechne die durchschnittliche Steigung des Graphen der Funktion f im Intervall $[x_0, x_0 + h]$, und bestätige dein Ergebnis mit einer Skizze.

(a) $f(x) = x^2 + 5x - 8$ in $[1, 1.2]$

(b) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ in $[5, 7]$ und $[1, 3]$.

(c) $f(x) = \sin(x)$ in $[0, \pi/2]$

(d) $f(x) = \ln(x)$ in $[0.5, e]$

(e) $f(x) = e^{x/2}$ in $[-1, 1]$

(f) In welchem Intervall $[2, b]$ beträgt die durchschnittliche Steigung der Funktion aus (a) 12?

(g) In welchem Intervall $[a, 1]$ beträgt die durchschnittliche Steigung der Funktion aus (b) -2?

Übung 5. Eine neue Computeranlage für ein grösseres Unternehmen kostet 500000 CHF. Ihr Wert nach t Jahren beträgt etwa

$$W(t) = 500000 \cdot e^{-0.35t}.$$

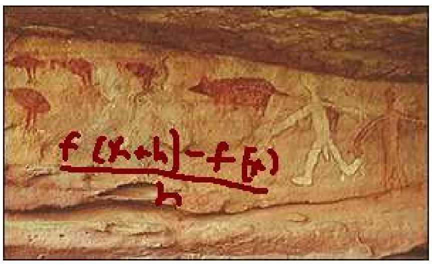
Berechne ihre durchschnittliche Wertänderung zwischen dem 2. und 5. Jahr.

Abschliessend zur Anwendung des Differenzenquotienten noch aus der Chemie folgendes

Beispiel 3. Bei chemischen Reaktionen gibt es keine einfache Methode, um die Reaktionsrate, d.h. die Geschwindigkeit, mit der die Reaktion abläuft, direkt zu messen. Üblicherweise misst man die Konzentration des Ausgangsmaterials oder des Endprodukts zu verschiedenen Zeitpunkten und liest dann aus einer graphischen Darstellung die Reaktionsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt ab.

4. Der Differenzialquotient

4.1. Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate



In früheren Aufgaben wurde die durchschnittliche Änderung einer Grösse berechnet; beispielsweise die durchschnittliche Geschwindigkeit einer Rakete, wenn man das Weg-Zeit-Diagramm kennt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

wobei Δs die Höhendifferenz und Δt die Länge des zugehörigen Zeitintervalls ist. Wie gross ist aber die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt, zum Beispiel 15 s nach dem Start? Einen ersten, noch ungenauen Näherungswert für die gesuchte Momentangeschwindigkeit liefert sicher die

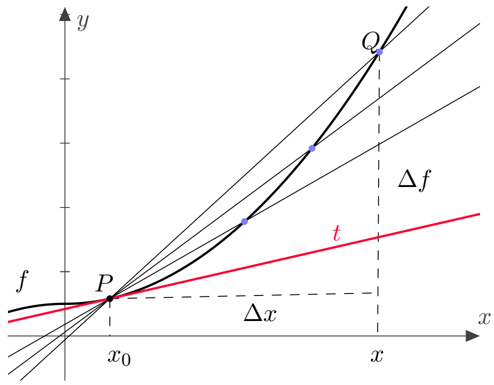


Abbildung 6: Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotient

mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[15, 20]$. Durch die Verkleinerung des Zeitintervalls kann die Genauigkeit verbessert werden (siehe Übung 1, Übungen zum Differenzenquotienten). Die entsprechende mathematische Formulierung lautet: Die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 ist der Grenzwert, gegen den die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ strebt, wenn t_1 gegen t_0 geht ($\Delta t \to 0$). In Formeln:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \bar{v} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

$s(t)$ bezeichne die bis zum Zeitpunkt t erreichte Höhe.

Übung 6. Fällt ein Körper aus der Ruhelage im freien Fall t Sekunden lang, so lässt sich der zurückgelegte Weg s (in Meter) annähernd durch

$$s(t) = 5t^2$$

berechnen.

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Zeitintervallen $[3, 3.5]$, $[3, 3.2]$, $[3, 3.1]$, $[3, 3.05]$. Wie gross ist die Momentangeschwindigkeit nach genau drei Sekunden?

4.2. Das Konzept

Eine beliebige Funktion f sei im betrachteten Intervall $[a, b]$ stetig. Mit der Steigung der Sekante lässt sich das Änderungsverhalten der Funktion, d.h. die Steigung, an einer beliebigen, aber festgehaltenen Stelle $x_0 \in [a, b]$ in einfacher Weise erklären. Will man nun das Änderungsverhalten der Funktion in x_0 exakt bestimmen, so ist dazu die Tangentensteigung im Punkt $P = (x_0 \mid f(x_0))$ zu berechnen.

Definition 1. Die Steigung der Tangente in P wird als **Steigung** des Graphen in P, also als momentanes Änderungsverhalten der Funktion f an einer Stelle x_0 bezeichnet.

Nachdem die Tangente im Punkt eines Graphen definiert ist, kann das Tangentenproblem rechnerisch formuliert werden. Es genügt, die Steigung der Tangente in P zu ermitteln, da die Stelle x_0 bzw. der Punkt P gegeben ist, womit die Lage der Tangente eindeutig bestimmt ist. Die Steigung der Tangente erhält man für $\Delta x \to 0$. Sie ist also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Falls dieser Grenzwert existiert, was ja keinesfalls sicher ist, da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen Null streben (x_0 ist eine Unbestimmtheitsstelle), nennt man diesen Grenzwert den **Differenzialquotient** von f an der Stelle x_0. Der Differenzialquotient ist der wichtigste Begriff der Differenzialrechnung. Mit ihm bewältigten Newton und Leibniz den Übergang von der antiken zur modernen Mathematik, da sie jetzt das momentane Änderungsverhalten einer Funktion bzw. die Steigung des Graphen an einer bestimmten Stelle x_0 rechnerisch untersuchen konnten. Sowohl der Name *Differenzialquotient* als auch die Schreibweise $\frac{df(x_0)}{dx}$ stammen von Leibniz.

Für die praktische Berechnung des Differenzialquotienten ersetzt man x durch $x_0 + h$ und lässt h gegen 0 streben. Der Differenzialquotient erhält dann die Form

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Übung 7. Vervollständige Tabelle 1 auf Seite 19 mit weiteren Beispielen für lokale Änderungsraten.

4.3. Überlegungen zur Existenz des Differenzialquotienten

Es ist ja keinesfalls sicher, ob der Differenzialquotient an einer bestimmten Stelle existiert, da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0 streben. Stetigkeit allein genügt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4. Die Funktion

$$f(x) = |sin(x)|$$

ist offensichtlich stetig, aber der Graph hat an den Stellen $x_n = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ keine eindeutigen Tangenten. Nähert man sich von $x < \pi$ her dem Punkt P, so erhält man die Tangente t_2, nähert man sich von $x > \pi$ her dem Punkt P, so erhält man die Tangente t_1.

x	$f(x)$	$\frac{df(x)}{dx}$
Abszisse	Ordinate	Graphensteigung
Zeit	Ort	
Zeit		Beschleunigung
Zeit	elektrische Ladung	
	Energie	Leistung
	chem. Konzentration	chem. Reaktionsgeschw.
Zeit		Wachstumsgeschwindigkeit
Zeit	Geldwert	

Tabelle 1: Interpretation des Differenzialquotienten

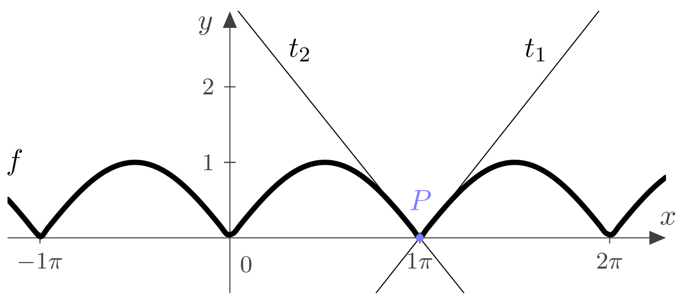


Abbildung 7: Beispiel einer stetigen, nicht überall differenzierbaren Funktion

Um eine eindeutige Tangente an einer Stelle x_0 zu erhalten, müssen die Sekanten von beiden Richtungen her gegen dieselbe Grenzlage streben, also die Steigungen der Sekanten gegen denselben Grenzwert streben. In andern Worten: Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert der Differenzenquotienten müssen gleich sein:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Nur dann darf man schreiben

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Definition 2. Existiert der Differenzenquotient von f an der Stelle x_0 und ist eindeutig, dann nennt man die Funktion f an der Stelle x_0 **differenzierbar**; die Grenzwertermittlung nennt man *Differenziation*.

Übung 8. Finde eine, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, stetige Funktion, die nur an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

Übung 9. Berechne den Differenzialquotienten der Funktion f an der Stelle x_0 und die Gleichung der Tangente im Punkt $P\,(x_0 \mid f(x_0))$. Überprüfe Ihr Ergebnis mit einer Skizze.

(a) $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$

(b) $f(x) = -x^3$ in $x_0 = -1$

(c) $f(x) = x^{-1}$ in $x_0 = 0.25$

Übung 10. Berechne die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 2$ für eine Bewegung mit

(a) $s(t) = t^2 + 3t$ (b) $s(t) = \sqrt{t}$

wenn t in Sekunden und $s(t)$ in Meter angegeben sind.

Übung 11. An welcher Stelle x_0 hat die Funktion f keine eindeutige Tangente?

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ 1-x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x > 1 \\ x & \text{falls } x \leq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

Übung 12. Zeige, dass eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion f an dieser Stelle auch stetig ist.

Bemerkung. Stetigkeit ist zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit

5. Die Ableitung

5.1. Definition

Existiert für jedes x in einem Intervall der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}$$

so kann damit eine neue Funktion f' definiert werden. Bei dieser Funktion f' wird jedem x aus dem Intervall genau eine reelle Zahl, nämlich $\frac{df(x)}{dx}$, zugeordnet.

Diese Funktion f' — die Symbolik stammt übrigens von Leonard Euler — nennt man Steigungsfunktion, weil jedem x eine Steigung zugeordnet wird. Durch f' wird das Änderungsverhalten der Ausgangsfunktion f charakterisiert. f' wird oft kurz als **Ableitung** von f bezeichnet.

Übung 13. Ermittle die Steigungsfunktion (die Ableitung) f' für

(a) die Geraden mit den Gleichungen $f(x) = x$, $f(x) = 2x - 3$,

(b) die Parabeln mit den Gleichungen $f(x) = x^2$, $f(x) = 3x^2 - 2$,

(c) die Hyperbeln mit der Gleichung $f(x) = \frac{2}{x}$

(d) den Parabelast mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x}$,

und die Steigungen in den Punkten $P\,(3\,|\,?)$ und $Q\,(-2\,|\,?)$.

Übung 14. Vervollständige die Tabelle 2 auf Seite 22.

$f(x) =$	$f'(x) =$
x^4	
x^3	
x^2	
x	
x^0	
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	
$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$	

Tabelle 2: Wichtige Ableitungen

5.2. Ableitungsregeln

Die vorherigen Aufgaben waren teilweise Beispiele für die folgenden allgemeinen Differenziationsregeln. Die beiden Funktionen f und g seien im betrachteten Intervall differenzierbar.
Dann gelten:

- Eine konstante Funktion hat die Ableitung 0.

$$(c)' = 0$$

- Ein konstanter Summand fällt bei der Differenziation weg.

$$(f(x) + c)' = f'(x)$$

- Ein konstanter Faktor bleibt bei der Differenziation erhalten.

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

- Eine Summe von Funktionen darf man gliedweise differenzieren.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Übung 15. Beweise die vier Regeln mittels

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Übung 16. Differenziere die Funktionen

(a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

(b) $5x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x - 7$

(c) $\frac{2}{x} - 3x$

(d) $\sqrt{x} - 10x - (4x)^2$

Übung 17. Für die Masse M (in g) von Glukose bei einem Stoffwechselexperiment in Abhängigkeit der Zeit t (in h) gilt:

$$M(t) = 4.5 - 0.03t^2.$$

(a) Wie gross ist die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten beiden Stunden?

(b) Berechne die momentane Änderungsrate für $t = 0$ und $t = 2$.

Übung 18. The size of a slowly growing bacteria culture is approximately given by

$$N(t) = N_0 + 52t + 2t^2$$

(time t in hours). Find the growth rate at $t = 5\,\mathrm{h}$.

Übung 19. Differenziere die Funktion V, deren Funktionswerte das Volumen einer Kugel mit dem Radius r angeben. Was fällt auf?

Übung 20. Dans une mine on extrait en t heures ($0 \leq t \leq 12$) de travail à peu près

$$C(t) = 40t + t^2 - \frac{1}{15}t^3$$

de charbon (en tonnes). Indiquez la quantité extraite aprés la 5$^{\text{ème}}$ heure dès le début de la journée.

Übung 21. Die Tragseile einer Hängebrücke sind an den Pfeilern befestigt, die 250 m auseinander stehen, und hängen in Form einer Parabel, deren tiefster Punkt 50 m unter den Aufhängungspunkten liegt. Ermittle den Winkel zwischen Seil und Pfeiler.

Übung 22. Nach dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetz wird einer Flüssigkeit, die durch ein Rohr mit der Länge L und dem Durchmesser $2r$ fliesst, ein Strömungswiderstand W entgegengesetzt. (Analogie zum elektrischen Widerstand) Für konstantes L und konstante Viskosität (Zähigkeitskoeffizient der Flüssigkeit) η gilt:

$$W(r) = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

Dieses Gesetz spielt in der Physiologie des Blutkreislaufs eine wichtige Rolle. Verengt sich der Kapillarenradius auf die Hälfte, so ist für das gleiche durchfliessende Volumen pro Zeiteinheit ein 16-facher Druckunterschied nötig (Hochdruck). Berechne die momentane Änderungsrate des Widerstandes bezüglich r, wenn

(a) Wasser mit der Viskosität $\eta = 10^{-3}\,\mathrm{kg/ms}$ durch ein 60 cm langes und 10 cm dickes Rohr fliesst

(b) arterielles Blut (Viskosität $2.7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/ms}$) durch eine weite arterielle Kapillare fliesst. ($r = 6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$, $L = 0.02\,\mathrm{m}$)

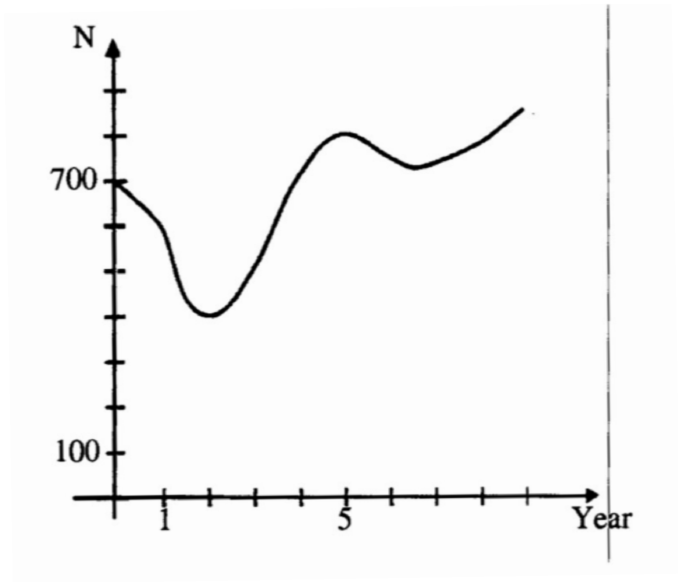


Abbildung 8: Wildbestand über 10 Jahre

Übung 23. Am Oktoberfest in München sind in einem grossen Fass Bier anfänglich 2000 Liter Bier. Der Inhalt $V(t)$ des Fasses lässt sich in Abhängigkeit der Zeit t in Minuten durch

$$V(t) = 2000 - \frac{5}{48}t^2 + \frac{1}{3456}t^3$$

beschreiben.

(a) Zeige, dass das Fass nach vier Stunden leer ist.

(b) Wie viel Liter Bier fliessen genau 30 Minuten nach dem Anstich des Fasses in die Humpen?

(c) Wann ist das Fest auf seinem „Höhepunkt"?

Übung 24. The number of deer in a forest t years after beginning of a population study is shown by the graph in figure 8 on page 25.

(a) Over which of the following time intervals did the population of deer decline at an average rate of 50 deer per year? [0, 1], [1,2], [1,3], [1,4], [5,6]

(b) When was the population of deer increasing most rapidly?

(c) Approximately how fast was the population of deer increasing or decreasing 1.5 years after the study began?

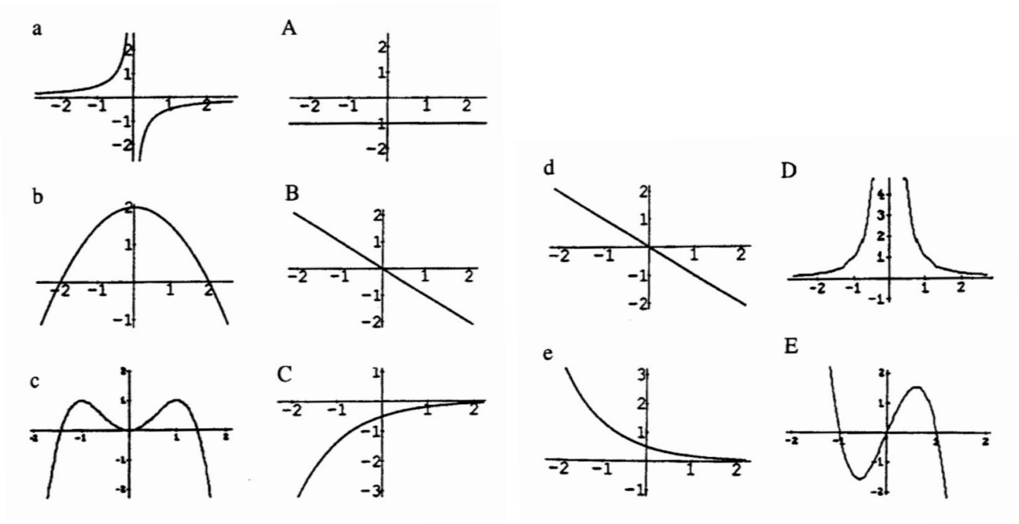


Abbildung 9: Graphen und ihre Ableitungsgraphen

Übung 25. Match the five functions a – e given in figure 9 on page 26 with their derivatives A – E. Explain your reasoning.

6. Ableitungsregeln

Wollte man die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin^3(x)$$

oder

$$g(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^3 - 2}$$

mittels dem Differenzialquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

berechnen, so wäre dies sicher ein mühsames Unterfangen. Mit einigen weiteren Differenziationsregeln lassen sich die nötigen Rechnungen erheblich vereinfachen.

6.1. Produkt- und Quotientenregel

Aus

$$f(x) = x^5 = x^2 \cdot x^3$$

und daraus

$$f'(x) = 5x^4 \neq 2x \cdot 3x^2$$

erkennt man, dass die Ableitung eines Produkts nicht so einfach wie bei der Summe berechnet werden kann. Sowohl für das Produkt als auch den Quotienten von Funktionen bedarf es einer besonderen Regel.

Satz 1 (Die Produktregel)**.** *Sind f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch ihr Produkt an dieser Stelle differenzierbar. Der Differenzialquotient von $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ lautet:*

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Satz 2 (Die Reziprokregel)**.** *Ist g an der Stelle x differenzierbar und $g(x)0$, so ist auch $1/g$ an dieser Stelle differenzierbar. Der Differenzialquotient von $F(x) = 1/g(x)$ lautet:*

$$F'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Satz 3 (Die Quotientenregel)**.** *Sind f und g an der Stelle x differenzierbar und $g(x)0$, so ist auch ihr Quotient f/g an dieser Stelle differenzierbar. Der Differenzialquotient von $F(x) = f(x)/g(x)$ lautet:*

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis der Produktregel.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \\ &\quad + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \end{aligned}$$

Da f an der Stelle x nach Voraussetzung differenzierbar ist, also dort sicher auch stetig, gilt $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Und daraus erhält man bereits:

$$F'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

□

Übung 26. Beweise die Reziprokregel.

Übung 27. Beweise die Quotientenregel indem du

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

setzt und die Produkt- und Reziprokregel benutzt.

Übung 28. Ermittle die Definitionsmenge und die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 4)$

(b) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)(2x^5 + x^4 - 3x)$

(c) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 5x^{-3}$

(d) $f(t) = (1 + \frac{1}{t})(1 - \frac{1}{t^2})$

(e) $f(x) = \sqrt{7x} - 5x + 3x^{-1} + \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{5}x^{-5}$

(f) $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$

(g) $f(s) = \frac{4+s}{4-s}$

(h) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$

(i) $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$

(j) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

(k) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-7x+12}$

(l) $f(u) = \frac{u+1}{\sqrt{u}}$

(m) $f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$

(n) $f(x) = \frac{2x^4-3x^2+4}{x^4-13x^2+36}$

Übung 29. Berechne im Punkt $P\,(3\,|\,?)$ die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Berechne anschliessend die Gleichung der Normalen im Punkt P. In welchem Punkt hat der Graph eine zur ersten Winkelhalbierenden parallele Tangente?

Übung 30. Beweise mit vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

> Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$.

6.2. Verkettung von Funktionen

Die wichtigste Regel für die Differenziation bezieht sich auf zusammengesetzte Funktionen:

$$F(x) = g(f(x)),$$

oder auch etwa in der Form

$$F(x) = g(u) \quad \text{mit} \quad u = f(x)$$

notiert. Zusammengesetzte Funktionen werden auch *verkettete Funktionen* genannt.

Beispiel 5. Die Funktion

$$F(x) = \sin(3x)$$

kann als Verkettung mit

$$g(u) = \sin(u) \quad \text{und} \quad f(x) = 3x$$

interpretiert werden.

In der Mathematik ist die Schreibweise

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{(sprich: g Ring f)}$$

üblich; insbesondere dann, wenn die Funktionen ohne Argument notiert werden. Beachten Sie, dass $g \circ f$ bedeutet, dass zuerst f und dann g ausgeführt wird. Die Reihenfolge ist also von rechts nach links zu lesen.

Übung 31. Ermittle die aus f und g zusammengesetzte Funktion

$$F = g \circ f$$

mit dem Funktionsterm $F(x) = g(f(x))$ und kontrolliere dein Ergebnis mit $x = a$.

(a) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = (x-3)^2 + 5$, $x = 3$.

(b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + x^{-2}$, $x = 1$.

(c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x = 2$.

6.3. Die Kettenregel

Satz 4 (Die Kettenregel)**.** *Sind f an der Stelle x und g an der Stelle $f(x)$ differenzierbar, so ist auch ihre Verkettung $F = g \circ f$ mit $F(x) = g(f(x))$ in x differenzierbar. Der*

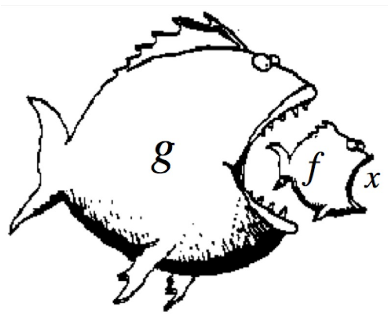


Abbildung 10: Verkettung von Funktionen: hier $g(f(x))$

Differenzialquotient von $F(x) = g(f(x))$ lautet:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Bemerkung. Man nennt g die äussere, f die innere Funktion und entsprechend $g'(f(x))$ die äussere und $f'(x)$ die innere Ableitung.

Beispiele. Für $F(x) = (10x^2 - 7x + 3)^{100}$ ist $g(u) = u^{100}$ und $f(x) = 10x^2 - 7x + 3$, also

$$F'(x) = 100(10x^2 - 7x + 3)^{99} \cdot (20x - 7).$$

Für $f(x) = \sqrt{5x^7 + 3x^2 + 256}$ ist $g(u) = \sqrt{u}$ und $h(x) = 5x^7 + 3x^2 + 256$, damit

$$f'(x) = \frac{35x^6 + 6x}{2\sqrt{5x^7 + 3x^2 + 256}}.$$

Beweis der Kettenregel. Es sei $u = f(x)$, $f(x+h) = f(x) + h*$, $h * 0$. Aus der Stetigkeit von f folgt: für $h \to 0$ gilt auch $h* \to 0$. So ergibt sich

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h*) - g(u)}{h*} \cdot \frac{h*}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h*) - g(u)}{h*} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= g'(u) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Bemerkung. Dieser Beweis für die Kettenregel ist nur für Funktionen korrekt, für die $f(x+h) \to f(x)$ falls $h \to 0$. Diese Bedingung ist im allgemeinen erfüllt; jedoch zum Beispiel für konstante Funktionen nicht, die aber wegen $(c)' = 0$ nicht die Anwendung der Kettenregel erfordern.

□

Übung 32. Ermittle die Definitionsmenge und die Ableitung der Funktionen:

(a) $f(x) = (4x^3 - 2x)^5$

(b) $f(x) = (x^2 + x^{-1})^4$

(c) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^{-3}$

(d) $f(t) = \sqrt{1+t^2}$

(e) $f(t) = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^2$

(f) $f(u) = \frac{1}{\sqrt{25-u^2}}$

(g) $f(x) = \left((5x^2+1)^2 + (x^2-4)^{-2}\right)^3$

Übung 33. Wegen eines Defektes musste die Kläranlage eines Dorfes für einige Stunden abgestellt werden. Die Abwasser wurden in dieser Zeit ungeklärt in den nahen See geleitet. $f(t)$ sei ein Mass für die Sauerstoffmenge, die sich t Tage nach dem Zwischenfall im Seewasser befindet. Wasserproben ergaben

$$f(t) = 500\left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{(t+10)^2}\right).$$

Wie ändert sich die Sauerstoffmenge am 5. bzw. am 15. Tag nach dem Vorfall?

Übung 34. A company finds that its costs are related to the amount spent on training programs by

$$T(x) = \frac{1000+50x}{x+1},$$

where $T(x)$ is costs in thousands of dollars when x is hundred dollars spent on training. Comment a) $T'(9)$, b) $T'(19)$.

Übung 35. L.L.Thurston entwickelte 1930 eine Formel für die Berechnung der Zeiteinheiten T, die man braucht, um n Dinge (z.B. Vokabeln) auswendig zu lernen:

$$T(n) = \frac{c}{k} n\sqrt{n-a},$$

wobei a, c, k empirisch ermittelte Konstanten sind.

Berechne für den Fall $a = c = 2, k = 30$, wobei T die Einheit Minuten hat,

(a) $T(60)$ und $T(120)$,

(b) $T'(11)$ und $T'(27)$ und interpretieren Sie.

Übung 36. Einem Patienten wird eine kleine Menge radioaktives Calcium in die Blutbahn gespritzt. Während einigen Tagen wird das verbliebene Calcium im Blut gemessen mit dem Ergebnis, dass nach t Tagen noch

$$C(t) = 0.5(2t+1)^{-0.5}\ \mathrm{mg/cm^3}$$

vorhanden sind. Berechne die lokale Änderungsrate nach a) 0, b) 6, c) 7.5 Tagen.

6.4. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Übung 37. Vermute aufgrund einer Zeichnung, welche Gestalt die Steigungsfunktion der Sinusfunktion hat.

Übung 38. Leite die Ableitungsfunktion von

$$f(x) = \tan(x)$$

her.

Übung 39. Find the domain and the derivate of

(a) $f(x) = \sin x + 2\cos x$

(b) $f(x) = x \sin x + \cos x$

(c) $f(x) = \frac{1}{1+\cos x}$

(d) $f(u) = \tan^2 u$

(e) $f(t) = \frac{t^2}{\sin t}$

(f) $f(\varphi) = \frac{1}{2}a^2 \sin\varphi$

(g) $f(x) = \sin(4x)$

(h) $f(t) = \sqrt{\cos t}$

(i) $f(u) = \cos^2 u$

(j) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

(k) $f(\varphi) = \cos(a\sqrt{\varphi})$

(l) $f(t) = \tan^3 5t$

(m) $f(x) = x^2\cos(4x)$

(n) $f(x) = x^{-2}\sin(4x)$

Übung 40. Der Ort $x(t)$ eines Kolbens kann beschrieben werden durch

$$x(t) = \cos 20\pi t + \sqrt{25 - \sin^2 20\pi t}, \quad t \text{ in } s$$

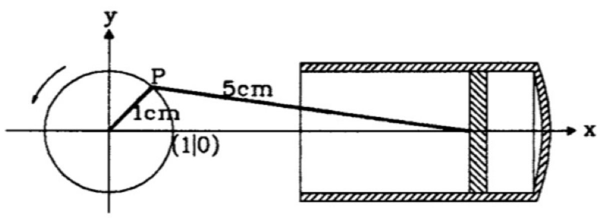


Abbildung 11: Schema des Kolben

Wie schnell bewegt sich der Kolben zu den Zeiten $t = \frac{1}{40}$ und $t = \frac{1}{20}$ Sekunden?

Übung 41.

(a) Wo und unter welchem Winkel (Schnittwinkel der Tangenten im Schnittpunkt) schneiden sich die Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$?

(b) Wo haben die Graphen die gleiche Steigung im Intervall $[0, 2\pi]$?

6.5. Die Ableitung der Exponentialfunktion

Übung 42. Versuche einen Graphen zu zeichnen, dessen Funktionswert an jeder Stelle x mit seiner Ableitung übereinstimmt; d.h. in jedem Punkt x soll der y-Wert gleich der Steigung des Graphen sein.

Um die Ableitung der Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ zu bestimmen, muss man den Grenzwert

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

untersuchen.

Übung 43. Überzeuge dich davon, dass obiger Grenzwert gleich

$$e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

ist.

Berechnet man Näherungswerte für den Grenzwert (kleine h) mit dem Taschenrechner, so drängt sich die Vermutung

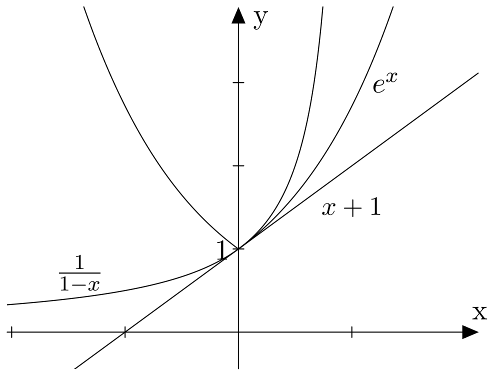
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

auf. Dies würde bedeuten, dass die Ableitung der e-Funktion just wieder die e-Funktion ist:

$$(e^x)' \stackrel{?}{=} e^x$$

Wir müssen uns an dieser Stelle mit einer anschaulichen Herleitung begnügen: Für $h < 1$ gilt

$$1 + h \leq e^h \leq \frac{1}{1 - h}$$



also

$$h \leq e^h - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}$$

Es folgt für $h > 0$

$$1 \leq \frac{e^h - 1}{h} \leq \frac{1}{1-h}, \text{ also } \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

und für $h < 0$

$$1 \geq \frac{e^h - 1}{h} \geq \frac{1}{1-h}, \text{ also } \lim_{h \uparrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Insgesamt

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Satz 5. *Die Exponentialfunktion* $\exp(x) = e^x$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}$ *differenzierbar und es gilt*

$$(e^x)' = e^x$$

Bemerkung. Für einen exakten Beweis im mathematischen Sinn müsste man zunächst die folgenden Eigenschaften zeigen:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- $< \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n >$ ist für $n > |x|$ monoton wachsend

also gilt $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

Mit Hilfe der Bernoulli'schen Ungleichung erhält man dann die beiden Ungleichungen

$$1 + x = 1 + n\frac{x}{n} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x,$$

also $1 + x \leq e^x$ und, wenn man x durch $-x$ ersetzt, $1 - x \leq e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Aus der zweiten Ungleichung ergibt sich für $1 - x > 0$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

Damit gilt für $x < 1$

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

6.6. Die Ableitung der Logarithmusfunktion

Für die Herleitung erinnern wir uns an die Inversfunktion der Exponentialfunktion e^x, den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$. Allgemein gilt für eine Funktion f und ihre Inverse f^{-1}:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Wenden wir diese Beziehung auf exp und ln an — und berücksichtigen, dass ln nur für positive Argumente definiert ist — haben wir

$$e^{\ln(x)} = x$$

Beide Seiten der Gleichung abgeleitet ergibt:

$$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1$$

und daraus folgt unmittelbar

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Satz 6. *Die Logarithmusfunktion* $\ln(x)$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}^+$ *differenzierbar und es gilt*

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Übung 44. Ermittle die Definitionsmenge und die Ableitung der Funktion

(a) $x \mapsto 7\ln(x)$

(b) $x \mapsto (\ln(x))^2$

(c) $x \mapsto \ln(x-5)$

(d) $x \mapsto \ln(\ln(x))$

(e) $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

(f) $x \mapsto \ln(\sin(x))$

(g) $x \mapsto 3e^x$

(h) $x \mapsto e^{3x}$

(i) $t \mapsto 6e^{-5t+2}$

(j) $t \mapsto e^{2t^4-1}$

(k) $t \mapsto \sqrt{t}e^{\sqrt{t}}$

(l) $\zeta \mapsto e^{-\zeta^2}\ln(\zeta)$

Übung 45. Bei einem Experiment mit gleicher Anzahl Männchen und Weibchen einer bestimmten Insektenart wurde die Anzahl $N(T)$ Paarungen in Abhängigkeit der Temperatur T (in ¡Celsius) beobachtet. Es ergab sich der Funktionsterm

$$N(T) = (0.1T + 1) \cdot \ln(\sqrt{T})$$

Berechne die Anzahl Paarungen und die lokale Änderungsrate für 15¡C.

Übung 46. Ein Tank enthält $1000\,\mathrm{m}^3$ Gas bei einem Druck von 5 bar. Wie ändert sich bei konstanter Temperatur das Volumen V, wenn der Druck sich pro Stunde um 0.05 bar ändert?

Hinweis: Nach dem Gesetz von Boyle-Mariotte ist pV konstant, also $V(t) = \frac{5000}{p(t)}$; die Einheit von t sei Stunden.

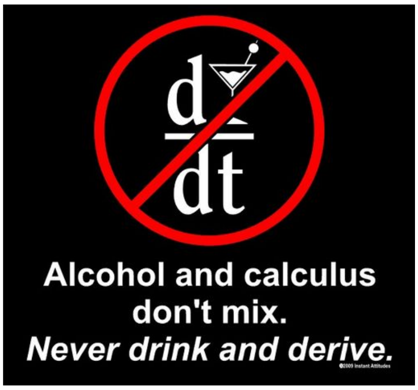
Übung 47. Amerikanische Soziologen haben herausgefunden, dass die Kriminalitätsrate durch die Temperatur beeinflusst wird. In einer mittleren Stadt mit 100000 Einwohnern kann die Anzahl der Verbrechen pro Monat durch den Funktionsterm

$$K(T) = 0.1(T - 60)^2 + 100$$

angegeben werden, wobei T die durchschnittliche monatliche Temperatur in Fahrenheit ist. Die durchschnittliche Temperatur im Mai war 76¡F, am Ende des Monats stieg die Temperatur um 8 ¡F pro Monat. Wie schnell wuchs die Kriminalitätsrate Ende Mai?

7. Graphenanalyse

7.1. Ganzrationale Funktionen



Zur mathematischen Beschreibung vieler Probleme können ganzrationale Funktionen verwendet werden, weil sich viele Probleme exakt — oder zumindest hinreichend gut — mit solchen Funktionen beschreiben lassen.

Definition 3. Eine Funktion f heisst **ganzrational**, wenn sie sich als Summe von Potenzen mit natürlichen Exponenten und rationalen Koeffizienten darstellen lässt:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$\text{mit } a_i \in \mathbb{Q} \text{ für } \{0, 1, \ldots, n\} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Der grösste auftretende Exponent n nennt man den **Grad** von f.

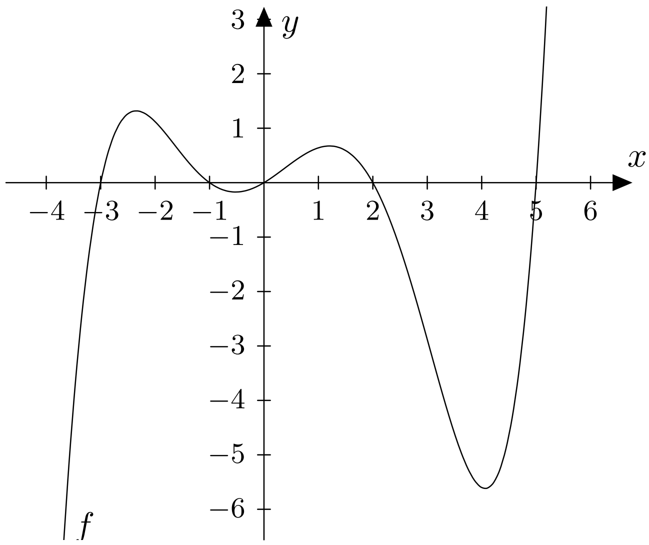


Abbildung 12: Ganzrationale Funktion 5-ten Grades

Bemerkung. Es ist klar, dass ganzrationale Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, überall differenzierbar und somit auch überall stetig sind.

Folgender Satz ist zentral für das Finden passender ganzrationaler Funktionen.

Satz 7. *Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen und $n-1$ Horizontaltangenten.*

Beweis. Für den Beweis der Anzahl Nullstellen braucht man den Fundamentalsatz der Algebra, auf den wir hier aus Zeitgründen verzichten. Der Beweis für die Anzahl Horizontaltangenten ist einfach, wenn man sich den Grad der Ableitungsfunktion anschaut und an die Bedingung für die Existenz von Horizontaltangenten denkt. $\square$

7.2. Symmetrie

Wir unterscheiden zwei Arten von Symmetrien, die bei Graphen von Funktionen auftauchen können. Diese Charakterisierungen gelten für Funktionen allgemein, nicht bloss für ganzrationale Funktionen.

7.2.1. Achsialsymmetrie bezüglich y-Achse

Satz 8. *Der Graph einer Funktion f ist genau dann achsialsymmetrisch zur y-Achse, wenn*

$$f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt.

Beweis. Man veranschauliche sich den Sachverhalt an einem kleinen Bildchen. $\square$

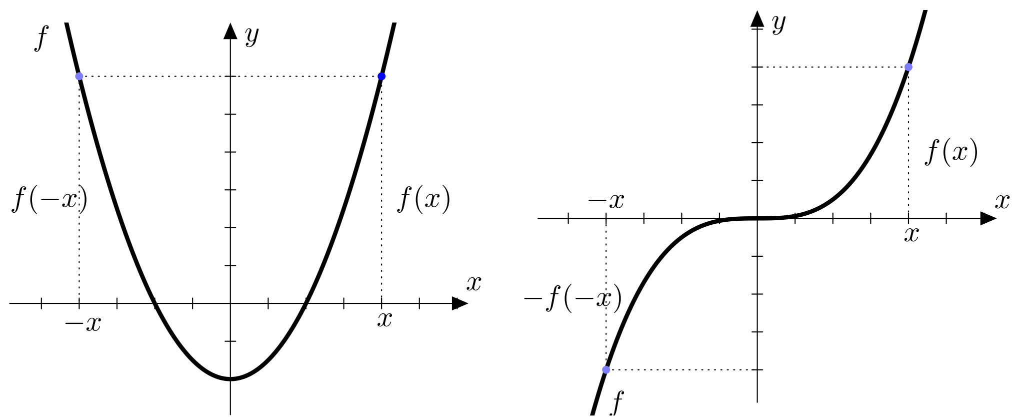


Abbildung 13: Achsensymmetrie bezüglich y-Achse, Zentralsymmetrie zu Ursprung

7.2.2. Zentralsymmetrie bezüglich Ursprung

Satz 9. *Der Graph einer Funktion f ist genau dann zentralsymmetrisch zum Ursprung, wenn*

$$-f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt.

Beweis. Man veranschauliche sich den Sachverhalt ebenfalls an einem kleinen Bildchen. $\square$

Um das qualitative Verhalten einer Funktion besser zu verstehen, lohnt es sich, ihren Graphen zu betrachten. Dazu müsste man die Werte aus einer umfangreichen Wertetabelle in ein Koordinatensystem übertragen. In vielen Fällen kann man den Graphen schnell skizzieren, wenn man nur einige markante Punkte des Graphen kennt und untersucht, wie sich die Funktionswerte verhalten, falls die x-Werte gegen ∞ bzw. $-\infty$ streben.

Bemerkung. In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, dass die Funktion f in ihrer Definitionsmenge mindestens zweimal stetig differenzierbar ist.

7.3. Steigen und Fallen

Die erste Ableitung f gibt bekanntlich die Steigung der Tangente an den Graphen in entsprechenden Punkten an.

Bemerkung. Ist

$$f'(x_0) > 0$$

dann steigt der Graph in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0, wenn x_0 zunimmt.

Bemerkung. Ist

$$f'(x_0) < 0$$

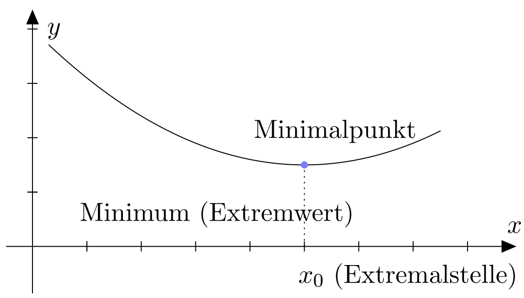
dann fällt der Graph in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0, wenn x_0 zunimmt.

7.4. Extrema

Definition 4. Der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heisst **relatives Minimum** oder Tiefpunkt, falls

$$f(x) > f(x_0)$$

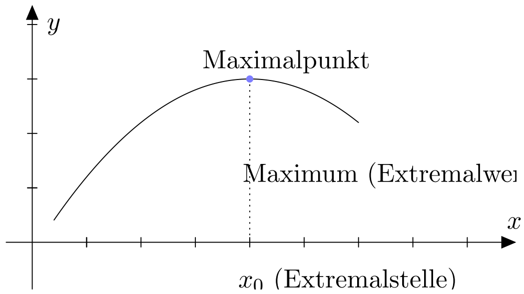
für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.



$(x_0|f(x_0))$ heisst *relatives Maximum* oder Hochpunkt, falls

$$f(x) < f(x_0)$$

für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.



Wie man diese Punkte rechnerisch findet, beschreiben die folgenden beiden Sätze.

Satz 10. *Hat die Funktion f im Punkt x_0 ein relatives Minimum oder Maximum, dann gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beachten Sie, dass diese Bedingung für eine Extremalstelle notwendig, aber nicht hinreichend, ist. Um zu entscheiden, ob sich im Punkt x_0 ein Minimum oder Maximum befindet, hilft der folgende

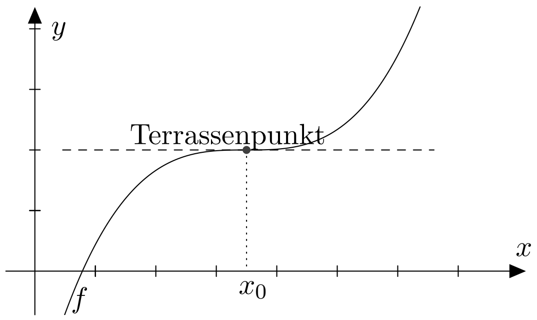
Satz 11. *Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt. Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.*

Zusammengefasst heisst dies, dass wenn f ein Minimum in x_0 hat, dort $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, und wenn f ein Maximum in x_0 hat, dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

7.5. Wendepunkte

Das letzte Resultat wirft die Frage auf, wie ein Punkt x_0 von f interpretiert werden soll, falls dort $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist. Wenn wir uns daran erinnern, dass die erste Ableitung einer Funktion die Steigung und die zweite Ableitung die Krümmung in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 angibt, dann bedeutet $f''(x_0) = 0$ also, dass dort der Graph von f keine Krümmung besitzt.

Definition 5. Man nennt einen Punkt $(x_0|f(x_0))$ **Terrassenpunkt** von f, falls $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.



Schliesslich will ich noch einen letzten Begriff zur Kurvendiskussion einführen, den sogenannten *Wendepunkt*. Man spricht dann von einem Wendepunkt von f an der Stelle x_0, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Bemerkung. Ein Terrassenpunkt ist also ein spezieller Wendepunkt, nämlich ein Wendepunkt mit Horizontaltangente.

7.6. Überblick

- Hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, dann gilt

$$f'(x_0) = 0$$

- Hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, dann gilt

$$f''(x_0) = 0$$

- Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, und zwar
  - ein Maximum, falls
  $$f''(x_0) < 0$$
  - ein Minimum, falls
  $$f''(x_0) > 0$$

- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f''' \neq 0$, dann hat f einen Wendepunkt in x_0.

Bemerkung. Die Umkehrung dieser Sätze gilt nicht.

Übung 48. Überprüfe obige Aussage anhand einfacher Gegenbeispiele. Betrachte

$$f(x) = x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4$$

in $x_0 = 0$.

Übung 49. Führe dir vor Augen, dass der Name Terrassenpunkt anschaulich ist, indem du zeigst, dass $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ einen Terrassenpunkt besitzt; eine Zeichnung ist obligatorisch. Anschliessend überzeugst du dich am Beispiel der Funktion $g(x) = x^4$, dass die Bedingung $f'''(x_0) \neq 0$ Sinn macht, um einen Terrassenpunkt zu definieren.

Übung 50. Zeige, dass eine beliebige quadratische Funktion keinen Wendepunkt hat.

Übung 51. Bestimme die Nullstellen, Symmetrie, Extrema und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

Übung 52. Gib dir eine ganzrationale Funktion vor und untersuche diese nach Nullstellen, Symmetrie, Extrema und Wendepunkte. Überprüfe deine Berechnungen anhand des Graphen deiner Funktion auf dem Taschenrechner.

Übung 53. Zeichne die Sinusfunktion

$$f(x) = \sin x$$

im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Gib danach für f Nullstellen, Symmetrie, Extrema und Wendepunkte auf dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ an. Zeichne mit einer andern Farbe ins gleiche Koordinatensystem die erste und zweite Ableitung von f ein.

Übung 54. Wie viele

(a) Extremalpunkte

(b) Wendepunkte

kann eine ganzrationale Funktion n-ten Grades höchstens haben?

Übung 55. Die Vermehrungsrate von Drosophila melanogaster ist stark fallend, wenn die Populationsdichte zunimmt. Es seien x die Anzahl Fliegen pro Flasche und $f(x)$ die Anzahl Nachkommen eines Weibchens pro Tag. Empirisch wurde gefunden, dass

$$f(x) = 34.53 \cdot e^{-0.018x} x^{-0.658}$$

Berechne $f(20)$ und $f'(20)$ und interpretiere die Ergebnisse.

Übung 56. Die Funktion

$$g(x) = e^{-x^2}$$

spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine beherrschende Rolle im Zusammenhang mit der Normal- oder Gauss'schen Verteilung. Ermittle

(a) Definitions- und Wertemenge,

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

(c) Maxima und Minima,

(d) Wendepunkte des Graphen.

(e) Skizzieren Sie den glockenförmigen Graphen von f mit den Informationen aus dieser Übung.

(f) Zeige, dass g symmetrisch zur y-Achse ist.

8. Extremwertaufgaben

Bei der Evolution haben sich alle Funktionen eines Organismus, soweit sie wesentlich zum Überleben sind, optimal entwickelt. Die dazu nötige Energie sollte nach Möglichkeit minimal sein. Blätter und Pflanzen sollten möglichst viel Sonnenlicht erhalten, die Wurzeln sollten mit möglichst vielen lebenswichtigen Mineralien Kontakt haben. Wild lebende Tiere müssen sich möglichst gut gegen ihre Feinde schützen können und gute Nahrungsbeschaffer sein. Die Empfindlichkeit eines Organismus bezüglich Krankheiten sollte auf ein Minimum reduziert werden.

So wie bei den obigen Beispielen aus der Natur begegnet man in unserer Umwelt sehr oft gewissen Grö§en, die entweder zu minimieren (Kosten, Zeiten, Kraftaufwand,...) oder zu maximieren (Gewinne, Ausnutzung, Nutzeffekt,...) sind. Handelt es sich dabei um mehrere Variablen, die durch lineare Ungleichungen miteinander verbunden sind, so konnten diese Aufgaben mathematisch mit der linearen Optimierung gelöst werden. Im folgenden lässt sich der reale Zusammenhang durch eine differenzierbare

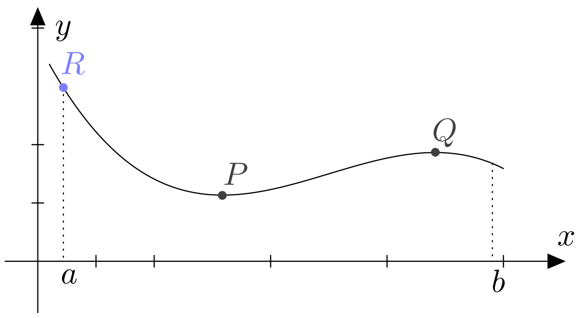


Abbildung 14: Randextremwert

Funktion mit nur einer Variablen beschreiben. Die Differenzialrechnung liefert dann mit ihren Methoden der Extremwertermittlung die Lösung des gestellten Problems. Mit dem folgenden 6 Punkte-Plan lassen sich alle einschlägigen Extremwertaufgaben lösen:

1. Welche Grösse soll minimal oder maximal werden?
2. Fertige eine Skizze an und stelle die Grösse aus 1. als Funktion von Variablen dar.
3. Ist diese Funktion von mehr als einer Variablen abhängig, so berücksichtige die Nebenbedingungen (Angaben aus der Aufgabenstellung, Formeln, etc.), um die Zielfunktion f mit nur noch einer Variablen zu erhalten, $f(x)$
4. Berechne die möglichen Extremalstellen x_E aus $f'(x) = 0$.
5. Entscheide, welche Art von Extremum vorliegt (Minimum, Maximum, Randextremum).
6. Formuliere einen Antwortsatz.

Bemerkung. Bei manchen Aufgaben kommen **Randextrema** vor: Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 14 erreicht im Punkte R die Funktion ihr globales Maximum (Randextremum). Im Punkt Q erreicht sie ein lokales Maximum, während sie in P sowohl ein globales als auch ein lokales Minimum erreicht.

Übung 57. Für normalgewichtige Schweizer (0% Übergewicht, 0% Untergewicht) beträgt die Lebenserwartung 72.3 Jahre. Diese Zahl beruht auf Erfahrungen aus den Jahren 1978-1983. Durch Untersuchungen an Männern mit $x\%$ Unter- bzw. Übergewicht ergab sich die für das Intervall $-20\% \leq x\% \leq 20\%$ gültige Lebenserwartungsfunktion

$$L(x) = 72 - 0.035x^2 - 0.7x$$

Wann ist die Lebenserwartung maximal? Wie hoch ist sie?

Übung 58. Zerlege die Zahl 144 so in zwei Summanden, dass

(a) ihr Produkt möglichst gross,

(b) die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

Übung 59. Zeichne in einem Koordinatensystem die Parabel mit der Gleichung

$$y = 6 - \frac{x^2}{4}$$

Dem Abschnitt der Parabel, der oberhalb der x-Achse liegt, ist ein Rechteck mit möglichst grossem

(a) Inhalt,

(b) Umfang

einzubeschreiben.

Übung 60. Ein Auto beansprucht in einem Tunnel mindestens einen Strassenabschnitt der Länge $L + s_R + s_B$, wobei L der durchschnittlichen Länge eines Autos, $s_R = tv$ dem Reaktionsweg, $s_B = \frac{v^2}{2a}$ dem Bremsweg, also $s_R + s_B$ dem Anhalteweg entsprechen. (a: Bremsverzögerung, t: Reaktionszeit, v: Momentangeschwindigkeit) Ein Stau vor dem Tunnel kann am schnellsten abgebaut werden, wenn ein maximaler Autodurchfluss im Tunnel erzeugt wird. Der Autodurchfluss D wird durch die Anzahl Autos, die pro Stunde maximal in den Tunnel einfahren können, definiert:

$$D = \frac{3600v}{L + tv + \frac{v^2}{2a}}$$

(a) Für welche Geschwindigkeit wird dieser Durchfluss maximal? Wie viele Autos können pro Stunde in den Tunnel einfahren? (Realistische Werte: $L = 5\,\mathrm{m}, a = 5\,{}^{\mathrm{m}}/{}_{\mathrm{s}^2}, t = 1.2\,\mathrm{s}$)

Hinweis: Statt des Maximums von D kann einfacher das Minimum von $\frac{1}{D}$ ermittelt werden.

(b) Wie ändert sich das Resultat, wenn die Reaktionszeit sich ändert, die Fahrzeuglänge sich vergrössert, gute Bremsen ($a = 8\,{}^{\mathrm{m}}/{}_{\mathrm{s}^2}$) vorhanden sind?

Übung 61. Ein Heizkessel besteht aus einem Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel. Er soll 2000 Liter fassen und möglichst wenig Wärme abstrahlen.

Übung 62. In welcher Entfernung muss man hinter einem Mädchen mit auffallend schönen Beinen hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter dem grösstmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Höhe des Rocksaumes über dem Erdboden sei dabei 60 cm und die Augenhöhe 178 cm.

(Rellich, ein Göttinger Mathematikprofessor, kommentierte diese von ihm gestellte Aufgabe so: „Der Trost dabei ist, dass die gesuchte Entfernung nicht unendlich ist, und die Moral, dass sie nicht Null ist.“)

Übung 63. Eine kreiszylinderförmige Büchse hat den Inhalt 1 l. Welche Abmessungen hat diese Büchse, wenn ihre Oberfläche, bestehend aus Mantel und Grundfläche, minimal werden soll?

Übung 64. Der Marktpreis für ein Buch, von dem x Exemplare hergestellt werden sollen, wird durch

$$p(x) = 2500 - \frac{x}{10}$$

angegeben. Die Kosten des Verlegers betragen

$$K(x) = 4000 + 6x + 0.00084x^2$$

Dem Autor wurde eine Umsatzbeteiligung von 20% zugesprochen. Welche Preis-Mengen-Lösung bevorzugt der Verleger (Gewinnmaximierung), welche der Autor (Umsatzmaximierung)? Diskutiere den Unterschied.

Übung 65. Die Funktion

$$f(t) = c\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

mit $c > 0, b > a > 0, t \geq 0$ wird gebraucht, um die Konzentration einer Drogeninjektion in die Blutbahn in Abhängigkeit der Zeit t zu beschreiben.

(a) Überprüfe den Funktionsterm für $t = 0$ und zeige, dass $f(t) > 0$ für $t > 0$ ist.

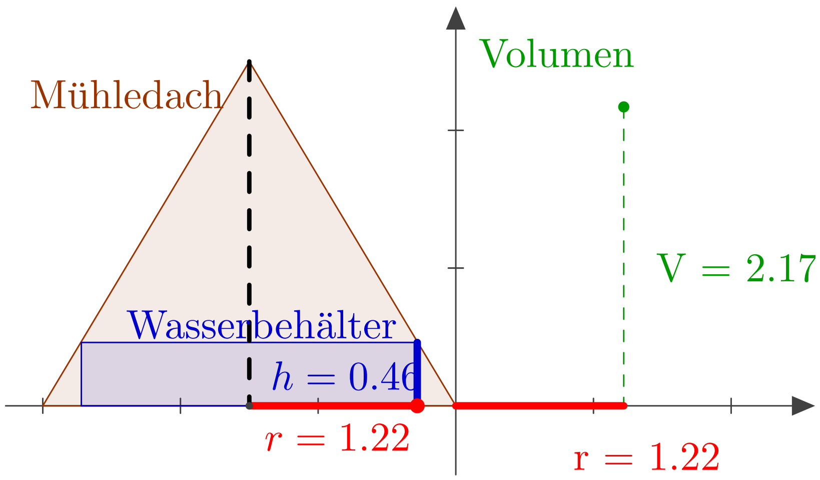
(b) Zu welchem Zeitpunkt (in Abhängigkeit der drei Parameter a, b und c) erreicht die Konzentration ihr Maximum?

Übung 66. Durch die Funktionen vom Typ

$$f(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$

mit $t > 0$ lassen sich Schwingungen beschreiben, die durch nicht zu starke Reibung abgebremst werden. Der Faktor $A\sin(\omega t)$ entspricht der ungedämpften Schwingung, während der Faktor $e{-}\alpha t$ mit der positiven Konstanten α für die Abnahme der Amplitude sorgt. Berechne das erste Maximum und das erste Minimum der Funktion, falls $A = 1$, $a = 0.3$ und $\omega = 2$.

Übung 67. In einer alten Mühle soll ein Kaffee eröffnet werden. Den zylinderförmigen Wassertank, der im kegelförmigen Dach untergebracht wird, will man so bauen, dass sein Volumen möglichst gross wird. Der Durchmesser des Dachs beträgt 3 m und die Höhe 2.5 m. Wie müssen die Abmessungen des Tanks gewählt werden und welches Volumen fasst er?



A. Klassiker Tetrapack

Übung 68. Abschliessend zu Extremalaufgaben wollen wir untersuchen, ob die Liter-Milchbeutel optimale Abmessungen haben, das heisst bei zur Verfügung stehendem Verpackungsmaterial den grösstmöglichen Volumeninhalt aufweisen. Wir werden dabei auf ein Ergebnis stossen, dass uns auf den ersten Blick erstaunen mag.

B. Mathematik und Wirtschaft

Die in den Wirtschaftswissenschaften häufig benutzten Funktionen sind

- Kostenfunktion $K(x)$
- Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$
- Preisfunktion $p(x)$
- Erlösfunktion $E(x) = x \cdot p(x)$
- Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$
- Angebotsfunktion $p_A(x)$
- Nachfragefunktion $p_N(x)$

Verändert man eine Produktion von x_0 Einheiten auf x_1 Einheiten, so entsteht ein Kostenzuwachs ΔK. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x_1) - K(x_0)}{x_1 - x_0}$$

entspricht dem durchschnittlichen Kostenzuwachs. Wenn die Funktion K differenzierbar ist, gibt der differenzialquotient

$$K'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h}$$

die Grenzkosten, auch marginale Kosten genannt, bei der Produktion von x_0 Einheiten an.Durch $K'(x_0)$ erhält man die Produktionskosten für eine zusätzliche Einheit, wenn schon x_0 Einheiten produziert werden. In ganz ähnlicher Weise sind marginaler Preis, Grenzerlös, Grenznutzen oder Grenzneigung zum Konsum durch Differenzialquotienten definiert. Beispielsweise gibt

$$\frac{dG(x_0)}{dx}$$

in erster Näherung an, um wie viele Einheiten sich der Gewinn verändert, wenn die unabhängige Variable, die Ausbringung eines Gutes, sich um eine Einheit, von x_0 auf $x_0 + 1$, verändert.

Übung 69. Die Herstellungskosten für x ME einer Ware ist gegeben durch die Funktion

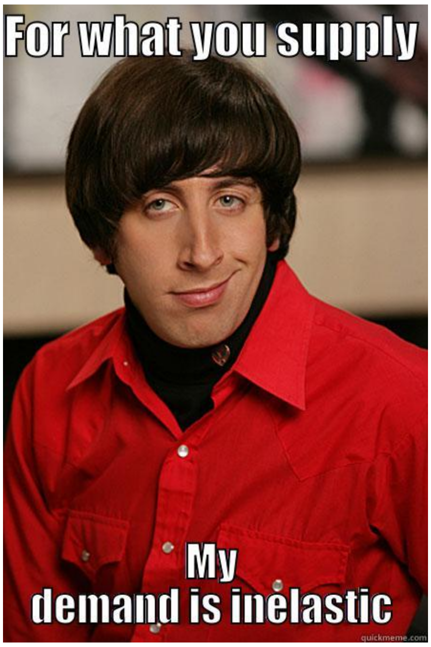
$$K(x) = 0.02(x - 8)^3 + 12$$

$0 < x < 18$, $K(x)$ in GE. Die Grenzkostenfunktion gibt bekanntlich an, wie eine Änderung der Produktionsmenge auf die Kosten wirkt. Der Hersteller interessiert sich auch für die Ableitung der Umkehrfunktion. Was gibt sie an? Bezeichnen Sie die Umkehrfunktion von K mit S und berechnen Sie den Funktionsterm von S; berechnen Sie $S'(17)$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Übung 70. According to classical economic theory, the demand for a commodity in a free market decreases as the price x increases. Suppose that the number $D(x)$ of transistor radios people are willing to buy per week in a given city at a price x \$ is given by

$$D(x) = \frac{50000}{(x+5)^2}$$

$5 < x < 15$. Find $D'(x)$, the rate of change of demand with respect to price change. Find $D'(5)$ and $D'(10)$ and interpret.



Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis