Vektoren

Raus in den 3D

Inhaltsverzeichnis

1. Grundbegriffe

Wenn man die Entwicklung der Mathematik betrachtet, so erkennt man, dass immer wieder neue Begriffe eingeführt werden mussten, weil die vorher verwendeten Begriffe für neue Probleme nicht mehr ausreichten. Oft wurden die Begriffe auch so gewählt, dass sich mit ihnen die bisherigen Probleme leichter bewältigen liessen. Ein typisches Beispiel dafür ist der Begriff des Vektors. Wer sich bereits etwas mit Vektoren auskennt, für den sei hier am Rande der QR-Code zum Video *Vektoren in 10 Minuten* angedacht.
In unserer Umwelt werden viele Grössen durch Angabe einer reellen Zahl und einer bestimmten Masseinheit beschrieben, z.B. $10\,\mathrm{s}$, $4.5\,\mathrm{m}^3$, $-5\,°\mathrm{C}$, $100\,\mathrm{g}$. Diese Grössen lassen sich jeweils auf einer Skala (von scalae, lat., Leiter), also durch Punkte auf einer Zahlengeraden, darstellen und heissen deshalb skalare Grössen.

Definition 1.1: Skalar

Ein **Skalar** ist eine reelle Zahl.

Die Geschwindigkeit hingegen ist ein Beispiel für eine Grösse, zu deren vollständiger Festlegung ausser einer Zahl noch die Angabe einer Richtung nötig ist. Die Existenz und Unabhängigkeit dieser beiden Elemente bei der Festsetzung lassen sich am Beispiel eines Schiffskapitäns, der mit verschiedenen seiner Untergebenen in Verbindung steht, erläutern: Er gibt dem ersten Maschinisten die Knotenzahl (z.B. $30\,\mathrm{Kn} = 30\,{}^{\mathrm{sm}}/_{\mathrm{h}}$ oder volle Kraft) bekannt, mit der er fahren, und dem Steuermann die Richtung (z.B. 5 Grad Backbord), welche er einhalten soll.
Auch eine Kraft wird erst durch Angabe von Betrag, Richtung und Angriffspunkt vollständig beschrieben.
Derartige Grössen, also Grössen, die durch Festlegung eines Betrags und einer Richtung vollständig bestimmt sind, werden vektorielle Grössen genannt und durch Pfeile (gerichtete Strecken) dargestellt.
Mathematisch werden sie durch Vektoren (vehere, lat., fahren) beschrieben. Man definiert:

Definition 1.2: Vektor

Unter einem **Vektor** versteht man eine Schar aus sämtlichen untereinander parallelen, gleichgerichteten und gleichlangen Strecken.

Damit ist ein Vektor eine unendliche Menge von gerichteten Strecken: Von jedem Punkt der Ebene bzw. des Raumes geht genau eine solche Strecke aus, wobei alle diese Strecken untereinander parallel und gleichgerichtet sind und die gleiche Länge haben.
In Abbildungen wird ein Vektor als eine Strecke mit Pfeilspitze gezeichnet, d.h. man zeichnet nicht die ganze Schar von gerichteten Strecken, die den Vektor darstellen, sondern nur eine dieser Strecken, einen sogenannten „**Repräsentanten**“.

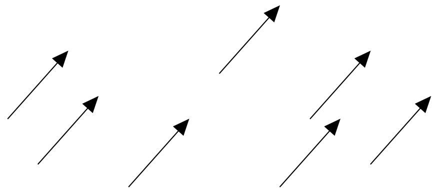


Abbildung 1: Vektor-Schar

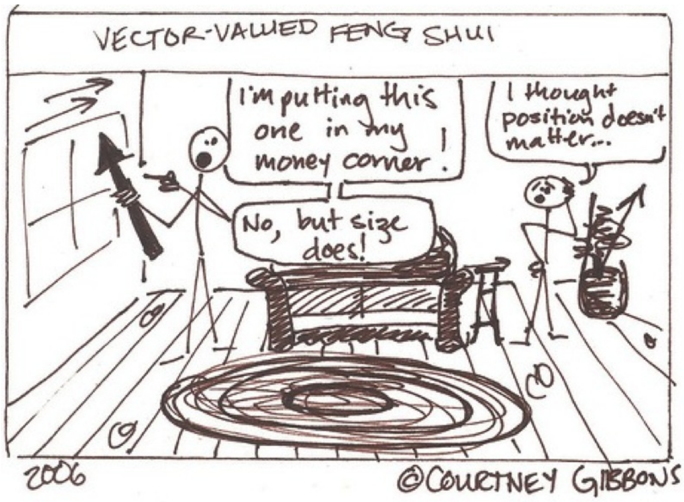


Abbildung 2: Repräsentant

Bemerkung. Eine ähnliche Situation liegt bei den Zahlen vor: Vergleiche die Brüche

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{-3}{-12}, \frac{90}{360}, \ldots$$

die durch Kürzen und Erweitern auseinander hervorgehen. Sie sind alle dem gleichen Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet. Jeder derartige Bruch kann als Repräsentant zur Angabe der rationalen Zahl 0.25 herangezogen werden.

Die Vektoren werden mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ oder mit $\vec{AB}, \vec{PQ}, \ldots$ (wobei der erste Buchstabe den Anfangspunkt, der zweite den Endpunkt angibt), bezeichnet. Der darüber gesetzte Pfeil deutet an, dass es sich um einen Vektor und nicht etwa „nur" um eine Strecke handelt.
Die *Länge* (der Betrag) eines Vektors schreibt man in der Form $|\vec{v}|$ (oder auch kurz als v) bzw. $\left|\vec{PQ}\right|$; für die Richtung verwendet man kein besonderes Zeichen. Man gibt zum Beispiel in der Ebene die *Richtung* als Winkel zwischen Vektor und positiver x-Achse an.

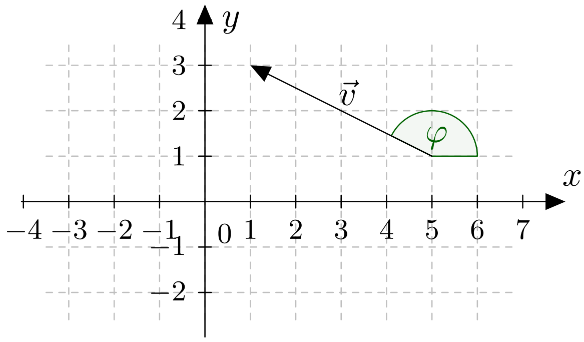


Abbildung 3: Betrag und Richtung

Übung 1 (Länge und Richtung)**.** Bestimme Länge und Richtung von $\vec{v}$ aus Abbildung 3 auf Seite 5.

Mit der blossen Definition von Vektoren hat man natürlich noch nicht viel erreicht. Entscheidend für die Einführung von Vektoren ist die Tatsache, dass man für sie Rechengesetze angeben und infolgedessen mit ihnen — ähnlich wie in der Arithmetik mit Zahlen oder in der Algebra mit Buchstaben — rechnen kann. Dies wird das Ziel der folgenden Kapitel sein.

Bemerkung. Um die algebraische Struktur, auf denen die einzuführenden Rechengesetze gelten, zu vervollständigen, lässt man Strecken der Länge Null zu, also Punkte. Obwohl für solche Strecken keine Richtung definiert ist, ist es zweckmässig, diese als Nullvektor $\vec{0}$ zu bezeichnen. Der Nullvektor hat den Betrag 0 und keine Richtung.

Oft ist es beim Rechnen mit Vektoren hilfreich, die Aufgabenstellung geometrisch zu interpretieren. So wie die Spiegelungen durch ein einziges geometrisches Objekt festgelegt werden — nämlich durch ein Symmetriezentrum, eine Symmetrieachse oder eine Symmetrieebene — wird auch die Translation durch ein einziges geometrisches Objekt festgelegt, nämlich durch einen Vektor $\vec{v}$.

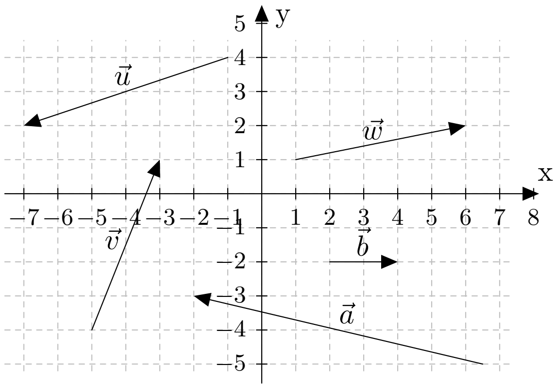
Bemerkung. Ein Vektor kann geometrisch als Translation aufgefasst werden, der den Anfangspunkt in den Endpunkt abbildet.

Die Grundlagen zur heutigen Vektorrechnung legten erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts fast gleichzeitig und doch völlig unabhängig voneinander der Schotte Sir William Rowan Hamilton (1805- 1865) und der Deutsche Hermann Günther Grassmann (1809-1877). Hamilton war ein eigenwilliges Genie, konnte bereits mit zehn Jahren Homer auswendig und erlernte in den nächsten Jahren dreizehn Sprachen. 1827 wurde er Professor der Astronomie an der Universität von Dublin, wo er bis zu seinem Tode blieb. 1845 führte er in einer Abhandlung den Begriff des Vektors erstmalig ein und baute ihn in seinen Werken über „Quaternionen“ weiter aus. Grassmann war Gymnasiallehrer für Mathematik in Stettin. Sein erstes Werk erschien 1844, wurde aber fast 18 Jahre lang nicht beachtet. Erst sein zweites Werk von 1862 brachte ihm den verdienten Durchbruch.

Heute gilt die Vektorrechnung in der Mathematik und ihren Anwendungen in den Naturwissenschaften als ein unentbehrliches Hilfsmittel. Als herausragendes Beispiel seien hier nur die vier Maxwell'schen Vektorgleichungen erwähnt, die für die Elektrodynamik ein ähnliches Axiomensystem wie die Newton'schen Grundgleichungen für die Mechanik bilden (James Clerk Maxwell, 1831-1879).

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Ladung ist Quelle des elektrischen Feldes)}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{(Es gibt keine magnetischen Monopole)}$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Änderung mag. Feld führt zu el. Wirbelfeld)}$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(el. Strom führt zu mag. Wirbelfeld)}$$

Übung 2 (Betrag und Richtung)**.** Berechne die Beträge und die Richtungen (Winkel φ zwischen Pfeil und x-Achse) der eingezeichneten Vektoren.



2. Grundoperationen mit Vektoren

Wir wollen uns zuerst mit der geometrischen Interpretation der Grundoperationen auseinandersetzen. Die algebraische Umsetzung ist dann „einfach“ durch Angabe von Definitionen zu erledigen, die die Geometrie repräsentieren.

2.1. Gegenvektor

Definition 2.1: Gegenvektor

Der Vektor, der zwar den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie $\vec{v}$ hat, wird mit $-\vec{v}$ bezeichnet und heisst **Gegenvektor** von $\vec{v}$.

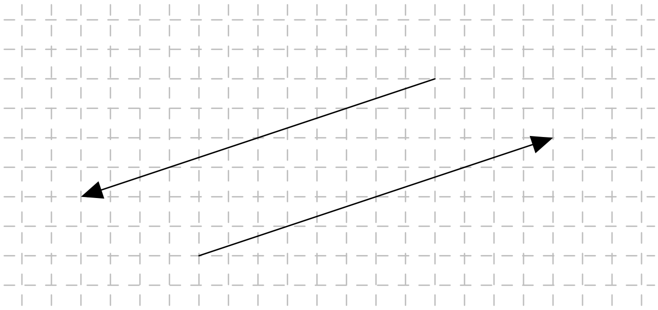


Abbildung 4: Vektor und Gegenvektor

2.2. S-Multiplikation

Analog definiert man die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar.

Definition 2.2: S-Multiplikation

Für $t \in \mathbb{R}$ ist $t \cdot \vec{a}$ ein Vektor mit dem $|t|$-fachen Betrag von $\vec{a}$:

$$|t\vec{a}| = |t|\,\vec{a}.$$

Diese Operation nennt man kurz **S-Multiplikation**.

- Falls $t > 0$ ist, hat $t\vec{a}$ dieselbe Richtung wie $\vec{a}$,
- Falls $t < 0$ ist, hat $t\vec{a}$ die entgegengesetzte Richtung von $\vec{a}$,
- falls $t = 0$ ist, ist $t\vec{a}$ der Nullvektor.

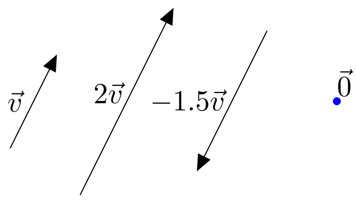


Abbildung 5: S-Multiplikation

Umgekehrt gilt

Satz 2.1: Satz zur Parallelität

Sind zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu ein und derselben Geraden parallel, so ist $\vec{w}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$, d.h.

$$\vec{w} = t\vec{v}$$

Beweis. trivial □

Definition 2.3: kollinear

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, für die

$$\vec{w} = t\vec{v}$$

gilt, heissen **kollinear**.

Definition 2.4: Einheitsvektor

Ein Vektor mit Betrag 1 heisst **Einheitsvektor**.

2.3. Addition und Subtraktion

Man legt fest

Definition 2.5: Addition

Die **Summe** $\vec{v} + \vec{w}$ zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der Vektor $\vec{u}$, den man durch „Aneinandersetzen“ von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ erhält.

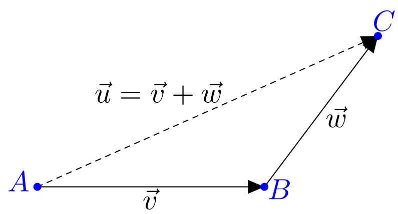


Abbildung 6: Vektoraddition

Der Summenvektor $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ hat seinen Anfangspunkt im Anfangspunkt des ersten Summanden und seinen Endpunkt im Endpunkt des zweiten Summanden:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Bemerkung. $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ entspricht der Diagonalen des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

Bemerkung. Mit dieser Definition erzielt man auch eine Übereinstimmung mit dem in der Physik experimentell nachgewiesenen „Kräfteparallelogramm“. Wenn an einem Körper die Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ am gleichen Punkt angreifen, dann können sie durch die *resultierende* Kraft $\vec{F_R}$ ersetzt werden, welche die *vektorielle* Summe der angreifenden Kräfte ist:

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

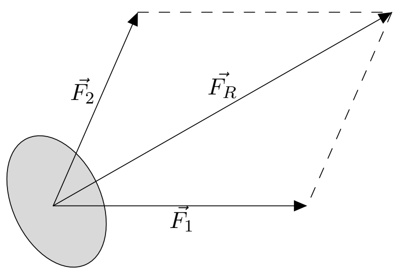


Abbildung 7: Kräfteparallelogramm

Definition 2.6: Subtraktion

Die **Subtraktion** wird auf die Addition zurückgeführt:

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$$

Man subtrahiert den Vektor $\vec{w}$ vom Vektor $\vec{v}$, indem man zu $\vec{v}$ den Gegenvektor von $\vec{w}$ addiert. Aus $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$ ergibt sich sofort $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$. Um die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$ zu erhalten, genügt es, die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ an einem Punkt P anzutragen und den Vektor aufzusuchen, der vom Endpunkt des Vektors $\vec{w}$ zum Endpunkt des Vektors $\vec{v}$ reicht.
Die folgenden Rechenregeln für die Vektoraddition und die S-Multiplikation lassen sich unmittelbar ableiten. Für $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- Kommutativität:
$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$
- Assoziativität:
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$
- Neutrales Element:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

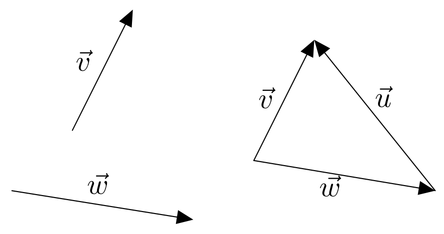
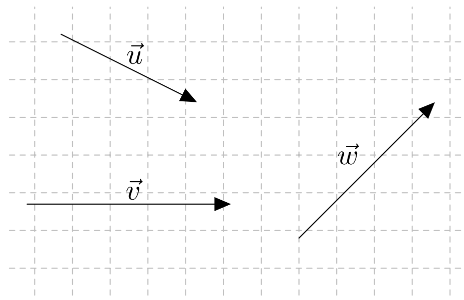


Abbildung 8: Subtraktion von Vektoren

- Inverse Elemente:
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$
- Ausklammerungsregel:
$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$
- S-Faktorisierung:
$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$
- Gemischte Assoziativität:
$$\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$$

Diese Regeln, die wir hier nicht einzeln beweisen, erlauben uns, mit Vektoren genau so zu rechnen, wie wir es von der Algebra her gewohnt sind.

Übung 3 (Pfeilchen zeichnen)**.** Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$.



Skizziere:

(a) $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$

(b) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + 0.5\vec{w}$

(c) $\vec{b} = 3\vec{u} + 1.5\vec{v} - 4\vec{w}$

(d) $\vec{c}$ so, dass $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{c} = \vec{w}$ gilt.

Übung 4 (Ab in die Aare!)**.** Ein Schwimmer ($v_s = 1.5\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$) will einen 20 m breiten Fluss ($v_F = 1.2\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$)

(a) auf kürzestem Wege,

(b) in kürzester Zeit

überqueren. Berechne jeweils die Dauer und zusätzlich

(a) den Vorhaltewinkel

(b) die Abdrift.

Übung 5 (Beweis Mittellinie)**.** Zeige, dass die Mittellinie eines Dreiecks halb so lang wie die Grundlinie und parallel zu dieser ist.

Übung 6 (Beweis halbierte Diagonalen)**.** Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist es ein Parallelogramm?!

Ein ausserordentlich nützlicher Satz lässt sich über nicht kollineare Vektoren formulieren:

Satz 2.2: Satz zur linearen Abhängigkeit

Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht kollinear und

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \vec{0},$$

dann muss $\lambda = 0$ *und* $\mu = 0$ sein.

Beweis. Es seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht kollinear abhängig und $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \vec{0}$. OEdA $\lambda \neq 0$, dann gälte $\vec{v} = -\frac{\mu}{\lambda}\vec{w}$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht kollinear sind. Analog geht man für μ vor. □

Die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ lässt sich geometrisch veranschaulichen, wenn man die Diagonale des von $\lambda\vec{v}$ und $\mu\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms betrachtet. Diese Diagonale entspricht nur dann dem Nullvektor, wenn $\lambda = 0$ und zugleich $\mu = 0$ wird.

Definition 2.7: lineare Unabhängigkeit

Man nennt zwei nicht kollineare Vektoren **linear unabhängig**.

Bemerkung. Mit Satz 2 lassen sich sehr elegant bekannte Sätze aus der Elementargeometrie beweisen.

Übung 7 (Parallelogramm-Eigenschaft)**.** Zeige, dass sich in einem Parallelogramm die Diagonalen halbieren.

3. Vektoren im Koordinatensystem

Wir wollen in diesem Kapitel zunächst nur ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrundelegen; am Ende des Kapitels soll dann — für Interessierte — kurz auf affine Koordinatensysteme eingegangen werden. Durch Parallelverschiebung kann man „Pfeile", die ja Vektoren repräsentieren, so verschieben, dass ihre Anfangspunkte auf den Ursprung 0 eines rechtwinkligen Koordinatensystems zu liegen kommen. Diese an einen festen Ort gebundenen Repräsentanten nennt man **Ortsvektoren**.
Die Einheitsvektoren $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ in Richtung der x-Achse bzw. y-Achse werden Basisvektoren genannt; denn sie bilden eine Basis und erlauben uns, einen beliebigen Ortsvektor $\vec{v}$ der xy-Ebene zu „zerlegen". Die Vektoren $\lambda\vec{e_x}$ und $\mu\vec{e_y}$ der Zerlegung von $\vec{v}$ nennt

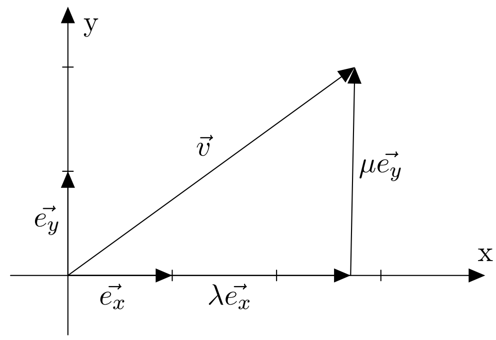


Abbildung 9: Zerlegung in Basisvektoren: $\vec{v} = \lambda\vec{e_x} + \mu\vec{e_y}$

man die vektoriellen Komponenten von $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$. Die Koeffizienten λ und μ in der Zerlegung des Vektors

$$\vec{v} = \lambda\vec{e_x} + \mu\vec{e_y}$$

nennt man die skalaren Komponenten, oder einfacher, die **Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$.

Bemerkung. Will man Punktkoordinaten und Vektorkoordinaten voneinander unterscheiden, so kann man Punktkoordinaten nebeneinander, zum Beispiel $P\,(-3\,|\,4)$, und Vektorkoordinaten untereinander schreiben; exemplarisch

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Theoretisch ist es aber nicht nötig, Punkt und Vektor zu unterscheiden. Wir identifizieren einen Punkt einfach mit dem entsprechenden Ortsvektor. Aus dem Kontext geht jeweils klar hervor, ob man mit Punkten oder Vektoren arbeitet. Ich werde beide Schreibweisen je nach Praktikabilität anwenden.

Definition 3.1: Vektorschreibweise

Statt $\vec{v} = x \cdot \vec{e_x} + y \cdot \vec{e_y}$ schreibt man kürzer:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Satz 3.1: Länge

Für die Länge von $\vec{v} = (x \,|\, y)$ gilt

$$v = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Beweis. Der Satz folgt direkt aus Pythagoras und $|\vec{e_x}| = |\vec{e_y}| = 1$. □

4. Anwendungen

4.1. Impuls

Multipliziert man die skalare Grösse m (Masse) mit der vektoriellen Grösse $\vec{v}$ (Geschwindigkeit), so erhält man mit dieser S-Multiplikation den Impuls $\vec{p}$.
Der Impuls ist eine vektorielle Grösse mit der Richtung der Geschwindigkeit:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Satz 4.1: Impulserhaltung

Die vektorielle Summe der Impulse eines abgeschlossenen Systems ist zeitlich konstant.

Anders ausgedrückt: Die Summe der Impulse vor einer Kollision ist gleich der Summe der Impulse nach der Kollision.

Übung 8 (Lastwagen)**.** Ein 6 t schwerer Lastwagen, der mit 15 $^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ in Richtung Norden fährt, kollidiert mit einem 4 t schweren Lastwagen, der mit 45 $^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ in Richtung Westen fährt. Mit welcher Geschwindigkeit und in welcher Richtung bewegen sich die beiden Lastwagen nach der Kollision, wenn sie miteinander verbunden bleiben?

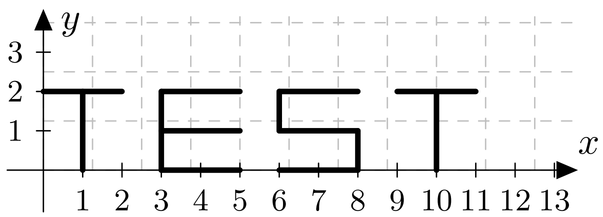
Übung 9 (Stern)**.** Ein Stern mit der Masse $m_1 = 2 \cdot 10^{30}$ kg bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v_1} = 2 \cdot 10^4$ $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. Dabei kollidiert er mit einem zweiten Stern ($m_2 = 5 \cdot 10^{30}$ kg, $\vec{v_2} = 3 \cdot 10^4$ $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$). Ihre Bahnen bilden einen rechten Winkel. Nach der Kollision bilden die beiden Sterne einen neuen Stern. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich dieser Stern?

4.2. Computerschriften

Ohne Mathematik könnten keine Computergraphiken erzeugt werden. Schon ein wenig Vektorgeometrie hilft bei der Erstellung von guten Computergraphiken, vor allem, wenn sie auf dem Bildschirm bewegt werden sollen. Hier soll nur ein einfaches Beispiel vorgestellt werden.

Bei nahezu allen PC-Textverarbeitungs-Programmen können Schriften vergrössert, verkleinert, verzerrt und gedreht werden. Die Vorgehensweise beim Verändern einer Schrift hängt davon ab, ob die einzelnen Buchstaben punktorientiert oder vektororientiert sind. Bei punktorientierten Schriften müssen die einzelnen Buchstaben in allen Grössen gezeichnet und danach im Computer implementiert werden. Der Benutzer kann nur die Schriftgrössen verwenden, die in seinem Computer vorhanden sind. Bei den vektororientierten Schriften sind die einzelnen Buchstaben aus Streckenzügen und Kurvenbögen zusammengesetzt. Die einzelnen Strecken und Bögen sind durch Anfangs- und Endpunkt bzw. durch Radius und Zentriwinkel definiert und sind auch so im Computer gespeichert. Wird eine vektororientierte Schrift verzerrt oder in der Grösse verändert, so berechnet das Programm aus den Grunddaten sofort die neuen Strecken und Bögen, aus denen die einzelnen Buchstaben aufgebaut sind. Mit den Grunddaten werden also in Echtzeit beliebig andere Schriften erstellt; darüber hinaus wird für eine Schrift viel weniger Speicherplatz im Computer benötigt. Vektororientierte Schriften werden vor allem im CAD-Bereich eingesetzt; punktorientierte Schriften sind eher in den Textverarbeitungsprogrammen anzutreffen.

Mit verschiedenen Basisvektoren im $\mathbb{R}^2$ lässt sich das Schrägbild einer vektororientierten Schrift berechnen. Als Beispiel wählen wir das Wort `TEST`. Die einzelnen Buchstaben sind durch Strecken definiert, deren Anfangs- und Endpunkte im Koordinatensystem wie in der Figur festgelegt werden können:



Führt man statt der Basisvektoren $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ die neuen Basisvektoren $\vec{e_x}'$ und $\vec{e_y}'$ ein, so erhalten wir ein neues affines Koordinatensystem.

Es sei $P\,(x_0\,|\,y_0)$ Anfangs- oder Endpunkt einer Strecke eines Buchstabens; x_0 und y_0 sind die Koordinaten bzgl. $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$, x_0' und y_0' sind die Koordinaten bzgl. $\vec{e_x}'$ und $\vec{e_y}'$. P' ist Bildpunkt von P.

Im alten Koordinatensystem gilt

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = x_0\vec{e_x} + y_0\vec{e_y}$$

und im neuen Koordinatensystem

$$P' = \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = x_0\vec{e_x}' + y_0\vec{e_y}'$$

Übung 10 (Verzerre!)**.** Berechne die neuen Koordinaten für den Buchstaben `T`, falls

$$\vec{e_x}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e_y}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und zeichne das neue Schriftbild von `TEST`.

4.3. Darstellung im 3D-Koordinatensystem

Bislang haben wir nur Vektoren in der Ebene angeschaut. Analoge Überlegungen gelten für den Raum, was uns einen echten Mehrwert gegenüber der ebenen Geometrie bringt. Um einen Punkt oder einen Vektor im Raum zu beschreiben, braucht man 3 Koordinaten,

$$\vec{v} = x \cdot \vec{e_x} + y \cdot \vec{e_y} + z \cdot \vec{e_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

„Tiefe, Breite und Höhe“.

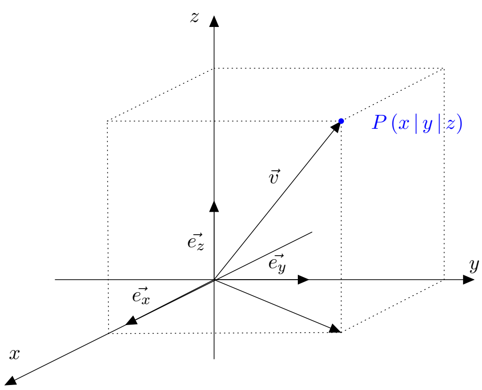


Abbildung 10: Vektoren im Raum

Satz 4.2: Länge im 3D

Für die Länge von $\vec{v} = (x\,|\,y\,|\,z)$ gilt $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Beweis. Wende zwei mal Pythagoras an. □

Übung 11 (Ortsvektor und Betrag)**.** Stelle die Vektoren

(a)
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$
als Ortsvektoren dar und berechne jeweils den Betrag.

(b) Verfahre ebenso mit dem Vektor, der seinen Anfangspunkt in P und seinen Endpunkt in Q hat für
$$P\,(3\,|\,4\,|\,5)\,,Q\,(-2\,|\,5\,|\,-3)$$

Übung 12 (Basisvektoren)**.** Wie lauten die Koordinaten der Basisvektoren $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ im Raum?

5. Algebra der Vektoroperationen

5.1. Addition und S-Multiplikation

Wenn man die Koordinaten von Vektoren kennt, können die S-Multiplikation und die Vektoraddition sehr einfach ausgeführt werden. Für einen Skalar $t \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} &= t \cdot (v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}) = \\ &= t v_x \vec{e_x} + t v_y \vec{e_y} + t v_z \vec{e_z} = \begin{pmatrix} t v_x \\ t v_y \\ t v_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und für die Addition
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Die Vektoraddition und S-Multiplikation erfolgt also ganz einfach komponentenweise.

Beispiele.
$$3\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Übung 13 (Juhuu, 3D)**.** Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechne die Koordinaten des Vektors

$$\vec{a} = \vec{v} + 2\vec{w} - 0.5\vec{u}$$

Wie lang ist $\vec{a}$?

Übung 14 (parallel?)**.** Sind die Vektoren kollinear?

(a)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Übung 15 (parallel einrichten)**.** Ermittle die Koordinaten von $\vec{w}$ so, dass

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und $\vec{w}$ kollinear sind.

(a) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (b) $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$

5.2. Vektoren zwischen zwei Punkten

Durch zwei Punkte $P\,(p_x\,|\,p_y\,|\,p_z)$ bzw. $Q\,(q_x\,|\,q_y\,|\,q_z)$ ist ein Vektor $\vec{PQ}$ bestimmt.
Aus der Figur entnimmt man

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \end{pmatrix}$$

Übung 16 (Zwischen Punkten)**.**

(a) Wie lautet der Vektor mit Anfangspunkt $P\,(10\,|\,-6\,|\,7)$ und Endpunkt $Q\,(2\,|\,-2\,|\,8)$? Wie lautet der Vektor $\vec{QP}$?

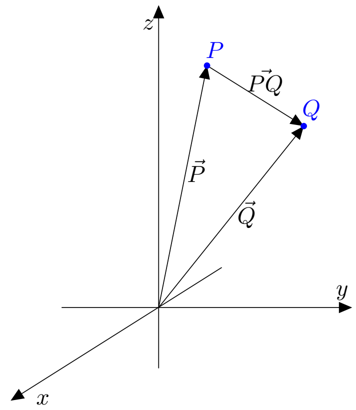


Abbildung 11: Vektor zwischen zwei Punkten

(b) Wie lang ist die Stecke $\overline{PQ}$?

(c) Ermittle die positive x-Koordinate von $R\,(x\,|\,-1\,|\,5)$ so, dass die Strecke $\overline{PR}$ gerade 15 Einheiten beträgt.

Übung 17 (Umfang)**.** Berechne den Umfang des Dreiecks mit den Ecken

$$A\,(2\,|\,-6)\,,B\,(-4\,|\,2)\,,C\,(17\,|\,30)$$

Übung 18 (und rückwärts)**.** $Q\,(-3\,|\,-5\,|\,2)$ ist der Endpunkt des Vektors $\vec{PQ} = (4\,|\,-2\,|\,6)$. Welche Koordinaten hat der Anfangspunkt?

Übung 19 (Drittle!)**.** Die beiden Punkte P und Q sollen die Strecke mit dem Anfangspunkt $A\,(-9\,|\,15\,|\,-2)$ und dem Endpunkt $B\,(-12\,|\,-6\,|\,4)$ in drei gleiche Teile teilen. Ermittle die Koordinaten von P und Q.

Übung 20 (Distanz)**.** Welche Punkte auf der x-Achse $P\,(x\,|\,0\,|\,0)$ haben von dem Punkt $A\,(12\,|\,12\,|\,-6)$ die doppelte Entfernung wie von dem Punkt $B\,(15\,|\,6\,|\,3)$?

Übung 21 (Mittelpunkt und Parallelogramm)**.**

(a) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ für $A\,(2\,|\,-5)$ und $B\,(-6\,|\,7)$?

(b) Zeige, dass die vier Punkte $A\,(5\,|\,-2\,|\,4)$, $B\,(21\,|\,2\,|\,-11)$, $C\,(7\,|\,6\,|\,-10)$, $D\,(-9\,|\,2\,|\,5)$ ein Parallelogramm bilden. Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt der Diagonalen?

Übung 22 (Parallelogramm erstellen)**.** Von einem Parallelogramm kennt man die Ecken $A\,(3\,|\,-2\,|\,5)$, $B\,(7\,|\,5\,|\,10)$ und den Schnittpunkt der Diagonalen $M\,(5\,|\,4\,|\,6)$. Gesucht sind die Ecken C und D.

Übung 23 (Drehe!)**.** Zeichne in ein Koordinatensystem als Ortsvektor den Vektor $\vec{v} =$

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

Wie lauten die Koordinaten des Vektors, der durch Drehung von $\vec{v}$ um seinen Anfangspunkt innerhalb der xy-Ebene um 90° entsteht?

Übung 24 (Drehe allgemein!)**.** Wie lauten die Koordinaten des Vektors, der durch Drehung von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

um seinen Anfangspunkt innerhalb der xy-Ebene um den Winkel φ im positiven Sinne entsteht?

6. Produkte

6.1. Das Skalarprodukt

Es ist zweckmässig eine Verknüpfung zweier vektorieller Grössen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einzuführen, so dass das Ergebnis ein Skalar ist. Offensichtlich wird das Ergebnis vom Winkel gebildet durch $\vec{v}$ und $\vec{w}$ abhängen. Wünschenswert wäre also eine Formel, mit der man den Winkel zwischen zwei Vektoren direkt berechnen kann.

Übung 25 (Herleitung Zwischenwinkel)**.** Zeichne ein beliebiges Dreieck und wähle zwei Seiten als $\vec{v}$ bzw. $\vec{w}$. Drücke die dritte Seite als Differenz dieser beiden Vektoren aus und formuliere mit allen dreien den Cosinussatz. Vereinfache danach und löse nach dem Winkel auf.

Bemerkung. Diese Herleitung liefert also die gesuchte Formel, aus der der Zwischenwinkel zweier Vektoren berechnet werden kann. Ferner taucht bei der Herleitung der Term

$$v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

auf. Da dieser Ausdruck in der Vektorrechnung häufig auftritt und Anwendung in den Naturwissenschaften findet, hat man eine kürzere Schreibweise eingeführt und ihm einen Namen gegeben.

Definition 6.1: Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist definiert durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Bemerkung. Mit Freude stellen wir fest, dass die verrichtete Arbeit mit dem Skalarprodukt ohne Trigonometrie und Berechnung des Zwischenwinkels bestimmt werden kann. Es gilt nämlich

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in kompakter Form angeben. Es gilt

Satz 6.1: Zwischenwinkel

Für den Zwischenwinkel φ zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\ \vec{w}\ |}\right)$$

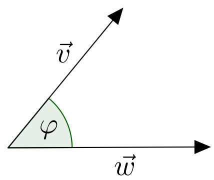


Abbildung 12: Schema des Skalarprodukts

Beweis. Siehe Übung 25. □

Bemerkung. Der Punkt als Multiplikationszeichen ist natürlich immer sinngemäss zu interpretieren: Steht er zwischen zwei Vektoren, so meint man die Skalarmultiplikation, steht er zwischen zwei reellen Zahlen, dann handelt es sich um die übliche Multiplikation.

Übung 26 (Winkel bestimmen)**.** Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel von

(a)

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und den Basisvektoren } \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$$

6.1.1. Orthogonalität

Man kann das Skalarprodukt auch folgendermassen definieren

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \;=\; |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi).$$

Dies veranschaulicht die wichtigste Anwendung des Skalarprodukts überhaupt. Sind zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit positiver Länge gegeben, dann ist ihr Skalarprodukt genau dann gleich 0, wenn sie senkrecht aufeinander stehen. Man sagt dann $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind zueinander *orthogonal* und schreibt kurz $\vec{v} \perp \vec{w}$. Es gilt also

Satz 6.2: Orthogonalität

Für $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $\vec{w} \neq \vec{0}$ gilt:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Beweis. Übung □

Übung 27 (Koordinatenachsen)**.** Zeige, dass die x-, y- und z-Achse eines Koordinatensystems paarweise senkrecht aufeinander stehen.

6.1.2. Eigenschaften des Skalarprodukts

Satz 6.3: Eigenschaften des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

- Kommutativität:
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$
- Gemischtes Assoziativgesetz:
$$(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w})$$
- Distributivität:
$$\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{c}) = (\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{c})$$

für alle $\vec{v}, \vec{w}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Übung 28 (Umkehrung)**.** Der Vektor $\vec{u}$ soll auf den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht stehen. Berechne u_y und u_z.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Übung 29 (Anwendung auf Dreiecke im Raum)**.** Zeige, dass die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Übung 30 (Noch ein Dreieck im Raum)**.** Berechne die Winkel des Dreiecks mit den Ecken

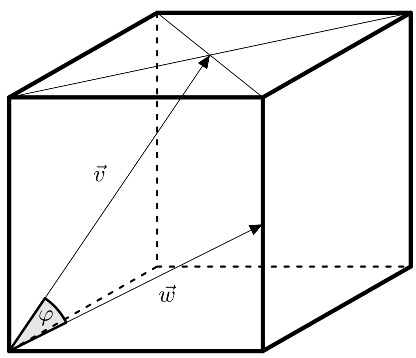
$$A\,(2\,|\,1\,|\,-3)\,,\; B\,(-3\,|\,0\,|\,1)\; \text{ und } C\,(7\,|\,-19\,|\,-1)$$

Übung 31 (Würfel)**.** Berechne vektoriell den Winkel zwischen zwei Raumdiagonalen eines Würfels.

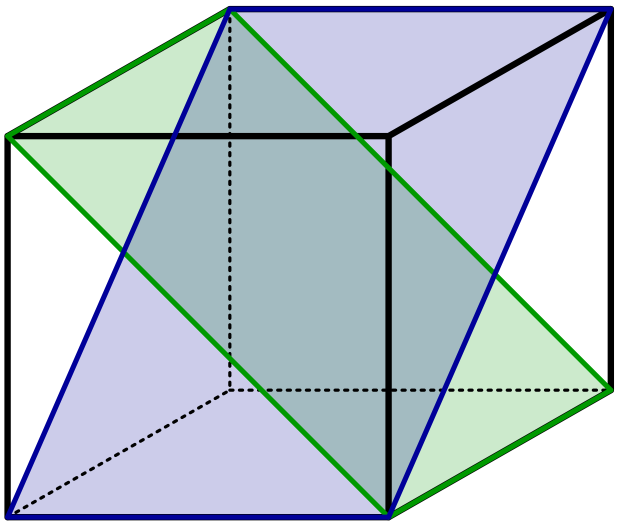
Übung 32 (Geodätische)**.** Ein Flugzeug fliegt vom Punkt (45°N | 0°W) längs des 45°-Breitenkreises zum Punkt (45°N | 75°W). Wir zeigen, dass der Weg längs eines Grosskreises kürzer ist. Ein Grosskreis ist ein Kreis auf der Kugel mit Mittelpunkt im Kugelmittelpunkt.

Bemerkung. Es gilt allgemein, dass die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche längs des Grosskreises verläuft, der durch diese beiden Punkte geht.

Übung 33 (Würfel 2)**.** Berechne den Winkel φ, den die beiden im unten skizzierten Würfel eingezeichneten Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einschliessen. $\vec{w}$ endet in der Kantenmitte und die Kantenlänge sei k.



Übung 34 (Diagonalebenen)**.** Berechne den Winkel, den die beiden im unten stehenden Würfel skizzierten ebenen Flächen einschliessen. Zeichne die Schnittgerade der beiden Ebenen ein.



6.2. Das Vektorprodukt

Die Suche nach dem Zwischenwinkel zweier Vektoren hat uns zum Skalarprodukt geführt. Nun betrachten wir das folgende Problem: Zu gegebenen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist ein Vektor $\vec{u}$ gesucht, der sowohl auf $\vec{v}$ als auch auf $\vec{w}$ senkrecht steht.
Eine spezielle Lösung des Problems ergibt

Definition 6.2: Vektorprodukt

Der Vektor

$$\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$

heisst das **Vektorprodukt** von $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

Übung 35 (Vektorprodukt)**.** Zeige, dass $\vec{u}$ tatsächlich auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht steht.

Bemerkung. Das Vektorprodukt hat seinen Namen, weil sein Ergebnis, im Gegensatz zum Skalarprodukt, wieder ein Vektor ist.

Bemerkung. Um zu eruieren, welche Orientierung das Vektorprodukt hat, verwendet man die Dreifinger-Regel. Man nimmt die rechte Hand: Der Zeigefinger zeige in Richtung des Vektors $\vec{v}$ und der Mittelfinger in Richtung $\vec{w}$. Zeigefinger und Mittelfinger liegen dabei in einer Ebene mit der Handfläche. Der Daumen zeigt sodann in Richtung $\vec{v} \times \vec{w}$.

Übung 36 (Rechtssystem)**.** Bestimme für die Einheitsvektoren $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ und $\vec{e_z}$ die Vektorprodukte:

$$\vec{e_x} \times \vec{e_y}, \vec{e_y} \times \vec{e_x}, \vec{e_x} \times \vec{e_z}, \vec{e_z} \times \vec{e_x}, \vec{e_y} \times \vec{e_z}, \vec{e_z} \times \vec{e_y}$$

Übung 37 (Flächenformel)**.** Berechne mit Hilfe des Skalarproduktes den Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Bestätige anschliessend

$$|\vec{u}| = |\vec{v} \times \vec{w}| = v \cdot w \cdot \sin\varphi,$$

wobei v und w die kurze Schreibweise für den Betrag des entsprechenden Vektors ist.

(a)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Man kann allgemein durch eine einfache, aber lange Rechnung zeigen:

Satz 6.4: Parallelogrammfläche

Falls φ der Zwischenwinkel der beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist, gilt:

$$|\vec{u}| = |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\varphi$$

Bemerkung. Der vorhergehende Satz besagt, dass die Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms gleich dem Betrag des Vektorprodukts von $\vec{v}$ mit $\vec{w}$ ist.

Übung 38 (Parallelogrammfläche)**.** Zeichne ein Bild zu diesem Satz.

Satz 6.5: Rechenregeln zum Vektorprodukt

Für das Vektorprodukt gelten folgende Rechenregeln

- Antikommutativität:
$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$
- Distributivität
$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

Beweis. Übung. Man gehe über die Definition des Vektorprodukts. □

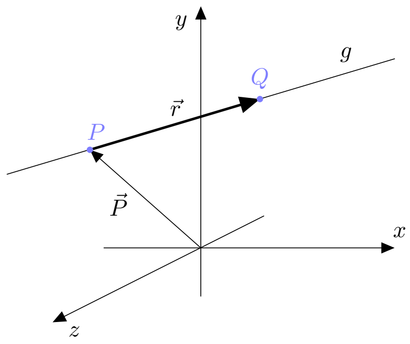


Abbildung 13: Parameterdarstellung der Geraden g

7. Geraden

Eine Gerade g ist durch zwei Punkte oder durch einen Punkt $P\,(p_x\,|\,p_y\,|\,p_z)$ und einen Richtungsvektor $\vec{r}$ bestimmt.

Übung 39 (Konzept einer Strecke)**.** Die Eckpunkte eines Würfels haben die Koordinaten

$$(0\,|\,0\,|\,0)\,,(3\,|\,0\,|\,0)\,,(3\,|\,3\,|\,0)\,,(0\,|\,3\,|\,0)\,,$$
$$(0\,|\,0\,|\,3)\,,(3\,|\,0\,|\,3)\,,(3\,|\,3\,|\,3)\,,(0\,|\,3\,|\,3)\,.$$

Kann man vom Punkt $P = (4\,|\,2\,|\,2)$ aus den Punkt $Q = (1\,|\,4\,|\,5)$ sehen?

Für einen beliebigen Punkt Q auf der Geraden ist $\vec{PQ}$ kollinear zu $\vec{r}$, d.h.

$$\vec{PQ} = \vec{r}$$

Somit lässt sich jeder Punkt auf der Geraden g als Ortsvektor

$$\vec{g} = \vec{P} + t\vec{r}$$

mit einem bestimmten t darstellen. Durchläuft t alle reellen Werte, so wird damit die ganze Gerade g erzeugt.

Definition 7.1: Gerade

Man nennt

$$g_t = \left\{\vec{P} + t\vec{r}\,|\,t \in \mathbb{R}\right\}$$

Parameterdarstellung der Geraden g.
$\vec{P}$ heisst **Stützvektor** und $\vec{r}$ **Richtungsvektor** von g.

Obwohl es sich bei einer Geraden um eine Punktmenge handelt, lasse ich oft die Mengenschreibweise fallen und verwende kürzere Notationen; eigentlich zu unrecht.

Übung 40 (Finesse)**.** Wieso spricht von einer und nicht von der Parameterdarstellung von g?

Bemerkung. Oft lässt man den Zusatz $(t \in \mathbb{R})$ weg, wenn der Parameter t ganz $\mathbb{R}$ durchlaufen soll.

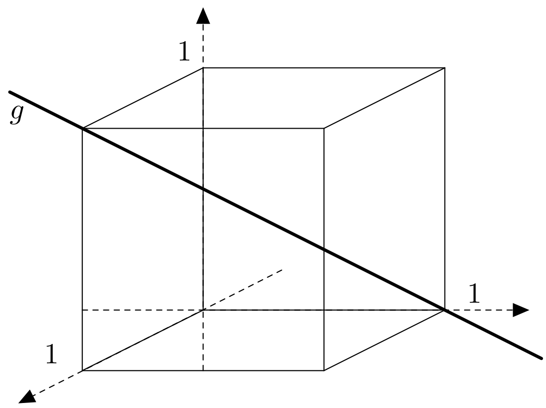
Übung 41 (Punkte auf der Geraden)**.** Markiere in Abbildung 13 auf Seite 25 den Punkt auf g_t für $t = 0, 1, \frac{1}{2}, -0.5, \pi$

Übung 42 (Parameter)**.** Beschreibe geometrisch die Menge

$$g_t = \vec{P} + t\vec{r} \quad (t \in [0,1])$$

Übung 43 (Parameterdarstellungen)**.** Gib zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Geraden durch die Punkte $P\,(5\,|\,2\,|\,3)$ und $Q\,(4\,|\,5\,|\,6)$.

Übung 44 (Parameterdarstellungen 2)**.** Ermittle eine Parameterdarstellung der Geraden g.



Übung 45 (Relative Lage)**.** Ermittle die gegenseitige Lage der Geraden

(a)

$$g_t = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } h_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$g_t = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } h_t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$g_t = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(d)

$$g_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h_t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und gegebenenfalls ihren Schnittpunkt.

Übung 46 (Abstände)**.** Auf der Geraden

$$g_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

soll vom Punkt $A\,(2\,|\,3\,|\,0)$ aus in beiden Richtungen eine Strecke der Länge 6 abgetragen werden. Wie lauten die Koordinaten der entsprechenden Endpunkte?

Übung 47 (Parameter einschränken)**.** Was stellt die Vektorgleichung

(a) $g_t = \vec{P} + t^2\vec{r}, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $g_t = \vec{P} + \frac{1}{t}\vec{r}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(c) $g_t = s\vec{r} + (1-s)\vec{u}, \quad s \in [0, 1]$

(d) $g_t = \vec{P} + \sin(t)\vec{r}, \quad t \in \mathbb{R}$

dar?

Übung 48 (Abstand)**.** Welcher Punkt Q der Geraden

$$g_t = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat den kürzesten Abstand vom Punkt $R\,(3\,|\,0\,|\,0)$? Wie gross ist dieser Abstand?

Übung 49 (geradlinig, gleichförmig)**.** Ein Körper bewegt sich geradlinig und gleichförmig und ist für $t = 1$ in $P_1\,(5\,|\,-4\,|\,7)$ und für $t = 3$ in $P_3\,(1\,|\,2\,|\,4)$. Ermittle den konstanten Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, den Punkt, wo der Körper zur Zeit $t = 0$ war, und den Punkt, wo er sich zu einer beliebigen Zeit t befindet. Wann und wo erreicht er die xz-Ebene?

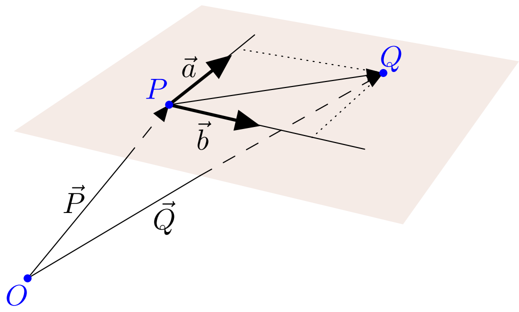


Abbildung 14: Parameterdarstellung der Ebene E

8. Ebenen im Raum

8.1. Parameterdarstellung der Ebene

Eine Ebene E ist bestimmt durch einen Punkt P und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Für jeden Punkt Q der Ebene liegt also der Vektor $\vec{PQ}$ in der Ebene und kann durch die beiden sogenannten Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausgedrückt werden:

$$\vec{PQ} = t\vec{a} + s\vec{b}$$

Lässt man s und t durch ganz $\mathbb{R}$ laufen, wird jeder Punkt in der Ebene erreicht; also die ganze Ebene erzeugt.

Definition 8.1: Ebene Parameterform

Die Darstellung

$$\vec{E} = \vec{P} + t\vec{a} + s\vec{b}$$

heisst **Parameterdarstellung** der Ebene. Den Vektor $\vec{P}$ nennt man **Stützvektor**. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen **Spannvektoren**.

Bemerkung. Die reellen Zahlen s, t heissen Parameter. Jedem Paar $(s\,|\,t) \in \mathbb{R}^2$ ist genau ein Punkt auf der Ebene zugeordnet; und umgekehrt gibt es zu jedem Punkt auf der Ebene genau ein Paar $(s\,|\,t) \in \mathbb{R}^2$.

Übung 50 (Bestimmte Punkte)**.** Markiere in Abbildung 14 auf Seite 28 die Punkte in der Ebene E, die den Paaren $(t\,|\,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entsprechen: $(1\,|\,0)\,,(1\,|\,1)\,,(0\,|\,1)\,,(0\,|\,0)$, $(-0.5\,|\,-0.5)$.

Übung 51 (Parameterform)**.** Wie lautet eine (naheliegende) Parameterdarstellung der Ebene, die durch die drei Punkte $A\,(2\,|\,0\,|\,3)\,, B\,(1\,|\,-1\,|\,5)\,, C\,(3\,|\,-2\,|\,0)$ bestimmt ist?

Übung 52 (Parameter einschränken)**.** Welches geometrische Gebilde wird durch ($t, s \in \mathbb{R}$)

(a) $\vec{E} = \vec{P} + t^2\vec{a} + s^2\vec{b}$

(b) $\vec{E} = \vec{P} + t^2\vec{a} + s\vec{b}$

(c) $\vec{E} = \vec{P} + t\vec{a} + \cos(\varphi)\vec{b}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$

dargestellt?

Übung 53 (Geraden)**.** Zeige, dass die Geraden

$$g_t : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h_s : \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sich schneiden. Welche Ebene ist durch diese Geraden bestimmt?

8.2. Koordinatenform der Ebene

Aus der Komponentenform der Parametergleichung erhält man durch Elimination der Parameter t und s eine Gleichung der Form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Beispiel 1. Sei

$$E : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die drei Komponentengleichungen lauten

$$x = 2 + t + 2s \tag{1}$$
$$y = 2 - 2t + 5s \tag{2}$$
$$z = 1 + 3t + 7s \tag{3}$$

Wir reduzieren auf 2 Gleichungen und eliminieren t mit (1)·2+(2) und (1)·3−(3)

$$2x + y = 6 + 9s \tag{4}$$
$$3x - z = 5 - s \tag{5}$$

s kriegt man beispielsweise mit (4)+(5)·9 weg

$$29x + y - 9z - 51 = 0$$

Definition 8.2: Ebene Koordinatengleichung

Die Darstellung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ heisst **Koordinatenform** oder **Koordinatengleichung** der Ebene.

Übung 54 (Koordinatenform, the hard way)**.** Bestimme zuerst eine Parameterform der Ebene, welche durch die Punkte $(3\,|\,0\,|\,0)$, $(0\,|\,5\,|\,0)$, $(0\,|\,0\,|\,2)$. Zeichne anschliessend einen Ausschnitt dieser Ebene in einem Koordinatensystem. Bestimme schliesslich eine Koordinatengleichung der Ebene und entscheide, ob der Punkt $T\,(-12\,|\,15\,|\,4)$ in der Ebene liegt.

Bemerkung. Bei Übung 54 erfährt man, wieso eine Koordinatendarstellung einer Ebene in der Anwendung bequemer als eine entsprechende Parameterdarstellung sein kann.

8.3. Normalenform einer Ebene

Als dritte Darstellungsform für Ebenen kann für gewisse Problemstellungen die sogenannte Normalenform nützlich sein. Dabei wird die Ebene durch einen Stützvektor und einen entsprechenden Normalenvektor — ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht — festgelegt. Der Normalenvektor bestimmt die relative Lage der Ebene im Raum; der Stützvektor die exakte Position.

Definition 8.3: Ebene Normalengleichung

Die Darstellung

$$E : \vec{n} \cdot (\vec{P} - \vec{x}) = 0$$

wobei $\vec{n}$ senkrecht auf E steht, P in der Ebene liegt und x ein beliebiger Punkt der Ebene ist, heisst **Normalenform** der Ebene E.

Die Umwandlung von Koordinatenform in Normalenform und vice versa ist sehr einfach, denn es gilt

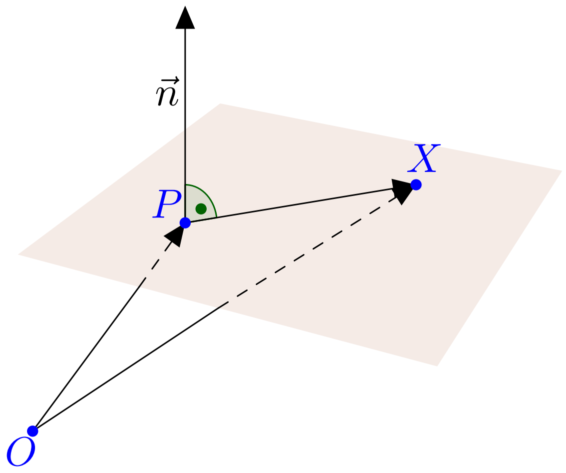


Abbildung 15: Normalenform der Ebene

Satz 8.1: Normalenvektor

Ist

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

eine Koordinatengleichung einer Ebene, dann ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor dieser Ebene.

Beweis. Zeige dies mit folgender Anleitung: Nimm zwei beliebige Punkte P_1, P_2 in der Ebene und verifiziere, dass

$$\vec{n} \cdot \vec{P_1P_2} = 0.$$

□

Und umgekehrt hat man

Satz 8.2: Normalenvektor in der Koordinatengleichung

Ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor einer Ebene E, so hat deren Koordinatengleichung die Form

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Bemerkung. Damit lässt sich relativ einfach die Koordinatengleichung einer Ebene aufstellen, von der man drei Punkte P, Q und R kennt. Denn $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ ist ein Normalenvektor dieser Ebene.

Übung 55 (Koordinatengleichung, the easy way)**.** Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene

(a) durch $P\,(2\,|\,2\,|\,-2)$, die parallel zur Ebene $x - 2y - 3z = 0$ liegt,

(b) durch $A\,(0\,|\,0\,|\,4)\,, B\,(2\,|\,0\,|\,-1)\,, C\,(4\,|\,5\,|\,0)$?

Übung 56 (Koordinatengleichung)**.** Stelle die Koordinatengleichung der Ebene durch $P\,(-6\,|\,10\,|\,16)$ auf, die normal zur Geraden

$$g : \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

steht.

Übung 57 (Durchstosspunkt)**.** Ermittle den Durchstosspunkt durch die Ebene E der Geraden g:

(a)

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_u : \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b)

$$E: 2x - y + 3z + 1 = 0$$
$$g_t: \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$E: 2x - y + 3z + 5 = 0$$
$$g_t: \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Übung 58 (sichtbar?)**.** Man denke sich das Dreieck $A\,(4\,|\,1\,|\,2)\,, B\,(2\,|\,6\,|\,3)\,, C\,(-3\,|\,2\,|\,4)$ als undurchsichtige Fläche und begründe rechnerisch, ob der Punkt $P\,(0\,|\,0\,|\,5)$ vom Punkt $Q\,(3\,|\,9\,|\,-1)$ aus sichtbar ist.

Übung 59 (Reflexion)**.** Ein Lichtstrahl, von $P\,(4\,|\,5\,|\,-1)$ herkommend mit Richtung $\vec{r} = (-2\,|\,1\,|\,0.5)$ wird an der xy-Ebene reflektiert. Wo trifft er auf die xy-Ebene? Wie sieht die Richtung des reflektierten Strahls aus?

Übung 60 (Pyramide)**.** Eine dreiseitige Pyramide hat die Grundfläche $A\,(-12\,|\,0\,|\,-2)$, $B\,(12\,|\,-12\,|\,-2)$, $C\,(0\,|\,12\,|\,-2)$ und die Spitze in $S\,(-4\,|\,4\,|\,6)$.

(a) Zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem.

(b) Berechne die Koordinaten des Zentrums und den Radius ihrer Inkugel.

A. Maturaaufgaben

Übung 61. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche kennt man den Grundkantenvektor $\overrightarrow{AB} = (5\,|\,0\,|\,0)$ sowie eine Komponente des zweiten Grundkantenvektors $\overrightarrow{AD} = (x\,|\,3\,|\,z)$.

(a) Berechnen Sie die fehlenden Komponenten x und z.

(b) Berechnen Sie die Diagonalvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$.

(c) Berechnen Sie den Seitenkantenvektor $\overrightarrow{AS}$ (S bezeichne die Pyramidenspitze), wenn die Hähe der Pyramide 10 beträgt.

(d) Wie gross ist das Volumen der Pyramide?

Übung 62. Von einer dreiseitigen Pyramide ABCS kennt man $\overrightarrow{AB} = (0\,|\,1\,|\,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2\,|\,1\,|\,0)$ und $\overrightarrow{AS} = (-2\,|\,0\,|\,2)$.

(a) Berechnen Sie die Winkel und den Flächeninhalt des Grundflächendreiecks ABC.

(b) Berechnen Sie den Winkel, den das Seitendreieck ABS mit dem Grundflächendreieck ABC einschliesst.

(c) Berechnen Sie Volumen und Höhe der Pyramide.

(d) Q sei derjenige Punkt der Seitenkante BS, für welchen der Flächeninhalt des Dreiecks ACQ minimal wird. Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AQ}$. (Anleitung: Setze $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BS}$)

Übung 63. Hier noch ein Video, aus dem der Aufgabentext und ein Lösungsvorschlag zur Vektoraufgabe der Mathematik Matur Serie 2013 entnommen werden kann.

B. Arbeit

Die Arbeit im physikalischen Sinn wird oft einfach durch „Kraft mal Weg“ angegeben. Beide Grössen sind vektoriell, $\vec{F}$ und $\vec{s}$. Wie die Figur zeigt, ist aber zur Berechnung der Arbeit W nur die vektorielle Komponente $\vec{F_s}$ der Kraft F in Richtung des Weges $\vec{s}$ zu berücksichtigen.
Benutzt man $F_s = F \cdot \cos\varphi$, so erhält man für die Arbeit

$$W = \vec{F_s} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\varphi$$

Merkwürdig ist, dass die Verknüpfung zweier vektorieller Grässen (Kraft, Weg) eine skalare Grösse (Arbeit) ergibt. Ferner bemerken wir, dass die Länge von $\vec{F_s}$ vom Winkel φ abhängt.

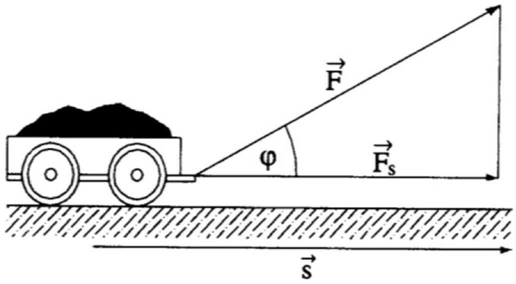


Abbildung 16: Arbeit ist „Kraft mal Weg“

C. Zerlegung eines Vektors

Die Zerlegung eines beliebigen Ortsvektors nach den Basisvektoren $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ im rechtwinkligen Koordinatensystem ist ein Spezialfall eines allgemeineren Sachverhalts. Insbesondere bei physikalischen Problemen muss man oft eine Kraft in zwei Teilkräfte, deren Richtungen vorgegeben sind, zerlegen.

Beispiele.

- Die Lampe einer Strassenbeleuchtung hängt an zwei Spannseilen. Die Gewichtskraft der Lampe wird in zwei Teilkräfte mit vorgeschriebenen Richtungen zerlegt.
- Eine Kugel mit der Gewichtskraft $\vec{F_G}$ bindet sich auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. $\vec{F_G}$ lässt sich in die beiden Teilkräfte Hangabtriebskraft $\vec{F_H}$ und Normalkraft $\vec{F_N}$ zerlegen.

Übung 64 (Keil erforderlich?)**.** Eine 120 m lange Strasse steigt um 18 m an; auf ihr steht ein 42 kN schwerer Lastzug. Welche Kraft ist erforderlich, um ein Abwärtsrollen zu verhindern?

D. Realistische Darstellungen mit dem Computer

Wer kennt sie nicht, die Computergraphiken und -animationen in den Videoclips, in der Werbung, in kommerziellen und wissenschaftlichen Filmen, . . . ?

- In einem Werbespot der Firma General Motors wird ein Sportwagen vom Typ Pontiac Fiero Bauteil für Bauteil über den Wolken montiert.
- Für das Weltraum-Epos „The Last Starfighter“ wurden im Computer — ohne Modelle oder Zeichentrick-Vorlagen — 27 Minuten Schlachtgetümmel und Sternreisen komponiert.
- Die Digital Effects Studios in New York bauten im Computer einen Strassenzug Manhattans der 30er Jahre nach, in dem der Betrachter mit naturgetreu wechselnden Perspektiven zwischen Wolkenkratzern wandeln kann.

Abbildung 17: Polygonmodell eines Kopfs

- Am MIT wurde ein Computer-Trickfilm entwickelt, in dem ein nahezu lichtschnelles Raumschiff den Studenten die Tücken relativistischer Raumfahrt demonstriert.

Um wirklichkeitsgetreue Abbildungen zu erhalten, muss man die verschiedensten Dinge beachten wie zum Beispiel die Richtung des einfallenden Lichts, die Oberflächenbeschaffenheit der darzustellenden Körper, deren Lichtdurchlässigkeit etc. In Wirklichkeit sind sehr wenige Flächen einfarbig. Oft beeinflussen Schattierungen, Spiegelbilder und durchscheinende Bilder das Ergebnis. Mit einfachen und komplizierten Algorithmen kann man heute schon sehr realistische Bilder erstellen. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie eine Tiefenwirkung durch die verschiedenen Begrenzungsflächen eines Körpers mit einer einfachen Idee erzeugt werden kann.

Wir gehen davon aus, dass der darzustellende Körper von einer Lichtquelle, die sich der Einfachheit halber im Unendlichen befindet, beleuchtet wird. Die Lichtstrahlen treffen auf die verschiedenen Begrenzungsflächen des Körpers auf und werden nach dem Reflexionsgesetz (Einfallswinkel=Ausfallswinkel) reflektiert.

Man nimmt nun an, dass die Helligkeit einer Fläche nur durch den Einfallswinkel φ bestimmt wird. In der Informatik benutzt man die *Lambert'sche Regel*, die besagt, dass der Anteil des jeweils reflektierten Lichts gleich dem Cosinus des Einfallswinkels φ ist. Wenn L die Intensität der Lichtquelle ist, so berechnet sich die Helligkeit H der darzustellenden Fläche durch

$$H(\varphi) = k \cdot L \cdot \cos(\varphi)$$

wobei k eine Materialkonstante ist. k nimmt Werte zwischen 0 und 1 an und gibt den Prozentsatz des reflektierten Lichts an.

Mit Hilfe dieser einfachen Methode kann man mit verhältnismässig wenig Rechenaufwand schon erstaunlich gute Bilder erstellen.

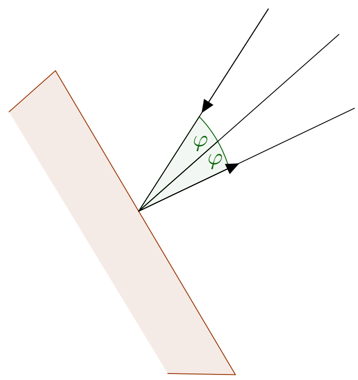
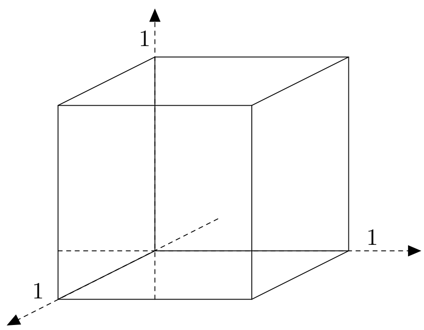


Abbildung 18: Lichtreflexion an glatter Oberfläche

Übung 65 (Lambert)**.** Der abgebildete Würfel wird aus der Richtung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bestrahlt. Berechne für $k = 0.5$ und $L = 1$ die Helligkeiten, mit der die drei beleuchteten Würfelflächen eingefärbt werden sollen. Färbe die drei Flächen mit drei verschiedenen Grautönen ein.



Auf den Körper wirke im Punkt P eine Kraft $\vec{F}$ wie in Abbildung 19 auf Seite 38 skizziert. Für die Berechnung des Drehmoments M benötigt man nicht die Entfernung $r = \overline{OP}$, sondern den Abstand $a = r \cdot \sin\varphi$ der Wirkungslinie der Kraft vom Drehpunkt O:

$$M = a \cdot F = r \cdot F \cdot \sin\varphi$$

Physikalische Experimente zeigen:

- die Drehachse steht senkrecht zur Ebene, die durch $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannt wird,

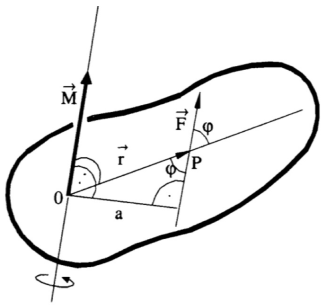


Abbildung 19: Drehmoment $\vec{M}$

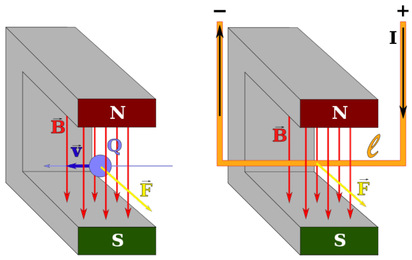


Abbildung 20: Lorentzkraft $\vec{F}$

- die Drehrichtung wird durch $\vec{r}$ und $\vec{F}$ so bestimmt, dass ein rechtshändiges System vorliegt ($\vec{r}$: Daumen, $\vec{F}$: Zeigefinger, Drehrichtung: Mittelfinger der rechten Hand).

Man schreibt dafür:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(lies: „r Kreuz F“)

Beispiel 2. Eine nützliche Anwendung zeigt sich in der Elektrotechnik zur Bestimmung der Richtung der Lorentzkraft. Es gilt nämlich

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}),$$

wobei Q für die Ladung, $\vec{v}$ für die Geschwindigkeit der Ladung und $\vec{B}$ für das Magnetfeld steht. Der ausgestreckte rechte Zeigefinger folgt der technischen Stromrichtung, also der Bewegungsrichtung von positiv geladenen Ladungsträgern bzw. der entgegengesetzten Bewegungsrichtung negativer Ladungsträger. Der ausgestreckte rechte Mittelfinger folgt der Richtung der Magnetfeldlinien, also der Richtung, in die sich der Nordpol eines Probemagneten ausrichtet. Der rechte Daumen zeigt nun in die Wirkungsrichtung der Lorentzkraft.

Abbildungsverzeichnis