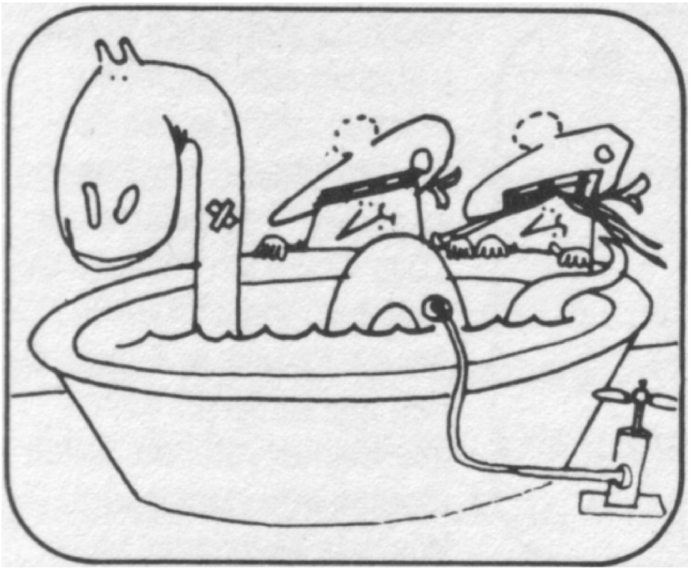


Gleichungen

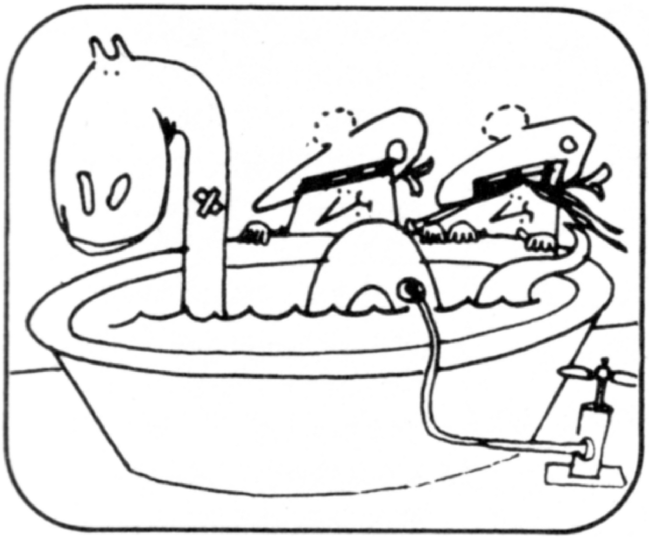
Wie gross ist Nessy?

Inhaltsverzeichnis

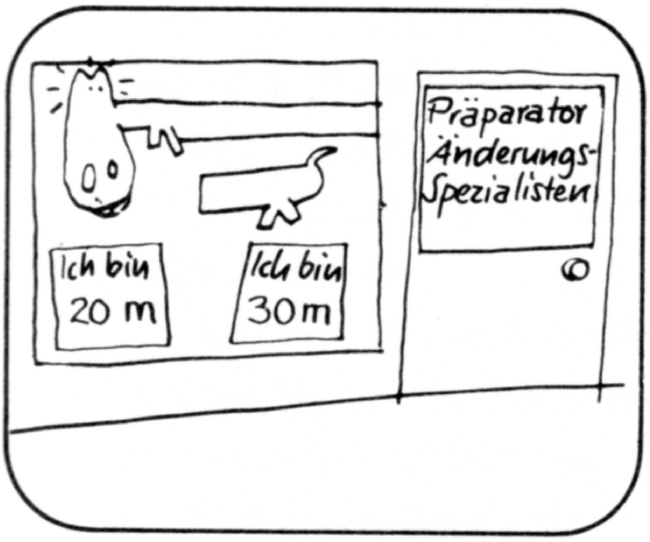
1 Aussageformen

Wie man lineare Gleichungen löst, wissen Sie schon. Aber was ist eine Gleichung eigentlich? Was tun wir beim Lösen einer Gleichung genau und warum tun wir es? Wo tauchen plötzlich ungeahnte Probleme auf? Letztlich geht es dabei auch darum, den Weg für andere Arten von Gleichungen zu ebnen, die wir noch nicht kennen.

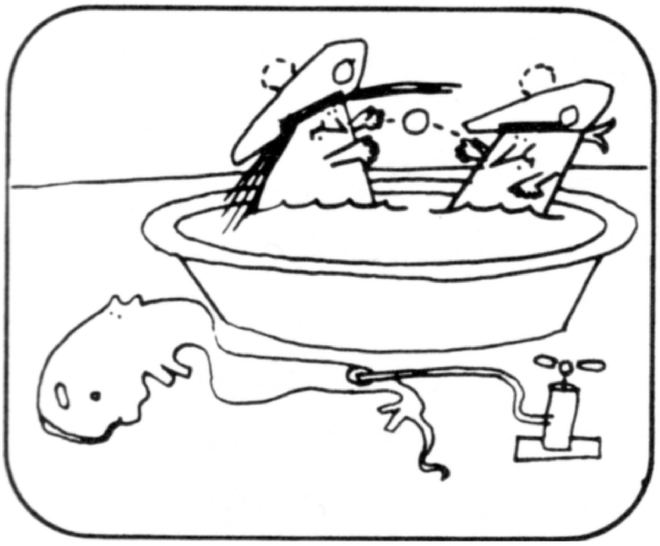
1.1 Das Monster von Loch Ness



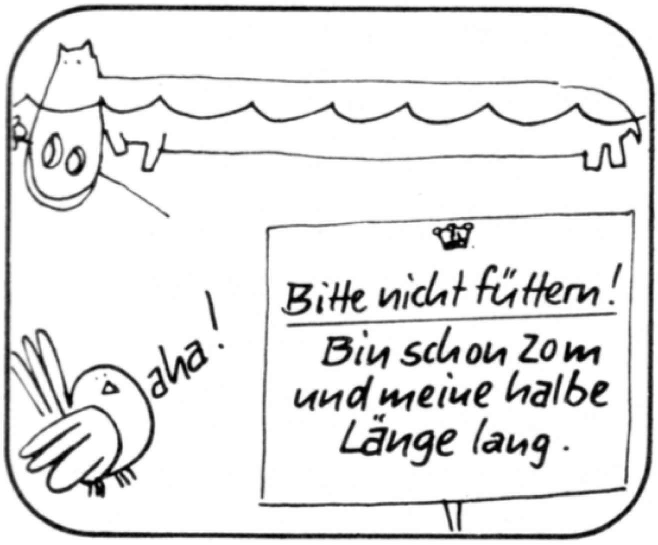
Klaus: „Wenn das Monster von Loch Ness 20 Meter und seine halbe Länge lang ist, wie lang ist es dann?“



Gaby: „Mal sehen, 20 plus die Hälfte von 20 ist 30. Also ist es 30 Meter lang.“



Klaus: „Aber Gaby, du enttäuschst mich! Du hast dir selbst widersprochen. Wie kann es gleichzeitig 20 und 30 Meter lang sein?"



Gaby: „Recht hast du! Der einzige Fall, in dem dieser Satz überhaupt einen Sinn hat, ist der, daß die Gesamtlänge des Monsters die Summe aus 20 Metern plus seiner halben Länge ist. Nun ist die Antwort leicht." Können Sie herausfinden, wie lang das Monster ist?

Wenn die Gesamtlänge des Monsters 20 m und seine halbe Länge ist, müssen die erwähnten 20 m die andere halbe Länge sein. Wenn 20 m die halbe Länge sind, dann ist die ganze 40 m: Das Monster ist 40 m lang.

Auf diese Idee muss man allerdings zuerst kommen. Viele Probleme sind schwerer zu durchschauen. Dann hilft oft eine Gleichung weiter.

Beim Aufstellen der Gleichung gehen wir wie folgt vor:

Was ist eigentlich gefragt? Die Länge des Monsters. Weil sie gefragt und somit unbekannt ist, bezeichnen wir sie mit einer Variablen (d.h. Unbekannten), z.B.:

$$x\text{: Länge des Monsters}$$

Dann übersetzen wir das Rätsel in eine Gleichung: Die Länge des Monsters (x) ist ($=$) 20 m und ($+$) seine halbe Länge ($\frac{x}{2}$) lang:

$$x = 20\,\mathrm{m} + \frac{x}{2}$$

Wenn wir in dieser Gleichung $x = 40\mathrm{m}$ einsetzen, stimmt sie tatsächlich:

$$40\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m} + \frac{40\,\mathrm{m}}{2}$$

Gaby hat zunächst vermutet, das Monster könnte 30 m lang sein, was sich aber als falsch erwiesen hat. Tatsächlich stimmt die Gleichung nicht, wenn wir $x = 30\,\mathrm{m}$ einsetzen:

$$30\,\mathrm{m} \neq 20\,\mathrm{m} + \frac{30\,\mathrm{m}}{2}$$

1.2 Was ist eine Gleichung eigentlich?

Betrachten wir zunächst folgende "Gleichungen":

$$\begin{aligned} 40\,\mathrm{m} &= 20\,\mathrm{m} + \frac{40\,\mathrm{m}}{2} \\ 30\,\mathrm{m} &= 20\,\mathrm{m} + \frac{30\,\mathrm{m}}{2} \end{aligned}$$

Diese beiden "Gleichungen" sind Aussagen. Die erste ist wahr, die zweite falsch. Trotzdem sind beide Aussagen.

Definition 1.1: Aussage

Eine *Aussage* ist ein Satz, von dem eindeutig entschieden werden kann, ob er wahr oder falsch ist.

Vergleichen wir das mit unserer Loch-Ness-Gleichung:

$$x = 20\,\mathrm{m} + \frac{x}{2}$$

Hier kommt die Variable x vor. Die Variable x kann grundsätzlich für irgendeinen Wert stehen. D.h. für x können irgendwelche Werte eingesetzt werden. Wenn wir das tun, wird aus der Gleichung eine Aussage: Wenn wir $x = 40\,\mathrm{m}$ einsetzen, wird sie zu einer wahren Aussage, für $x = 30\,\mathrm{m}$ zu einer falschen.

Definition 1.2: Aussageform

Eine Gleichung ist eine Aussage*form*, die eine oder mehrere Variablen enthält. Wenn wir für diese Variablen irgendwelche Zahlen einsetzen, wird die Gleichung zu einer (wahren oder falschen) Aussage.

Für die meisten x wird die Gleichung allerdings zu einer falschen Aussage.

Definition 1.3: Lösung

Ein x, für das die Gleichung zu einer wahren Aussage wird, nennen wir eine *Lösung* der Gleichung.

Von den Beispielen her, die Ihnen bisher begegnet sind, sind Sie sich wohl gewohnt, dass eine Gleichung immer genau eine Lösung hat. Es ist aber durchaus möglich, dass eine Gleichung keine oder mehrere Lösungen hat.

Definition 1.4: Lösungsmenge

Die Menge aller Lösungen einer Gleichung nennen wir die *Lösungsmenge* L.

Die Loch-Ness-Gleichung hat nur eine Lösung. Sie können es probieren: Sie werden keine weitere Lösung finden. Also ist die Lösungsmenge:

$$L = \{40\,\mathrm{m}\}$$

1.3 Lösung durch Umformen der Gleichung

Im Loch-Ness-Beispiel haben wir die Lösung schon am Anfang gefunden. Diese Lösung haben wir in die Gleichung eingesetzt und festgestellt, dass dadurch tatsächlich eine wahre Aussage entsteht. Doch was tun wir, wenn wir die Lösung der Gleichung nicht erraten können? Sollen wir alle möglichen Zahlen für x einsetzen, bis wir die Lösung(en) gefunden haben? Das kann ewig dauern. (Und das ist eindeutig zu lange.) Stattdessen können wir die Gleichung umformen, wobei wir bei jedem Schritt auf beiden Seiten dieselbe Operation durchführen:

Gehen wir also nochmals von unserer Gleichung aus:

$$x = 20\,\mathrm{m} + \frac{x}{2}$$

Zunächst subtrahieren wir beidseits $\frac{x}{2}$:

$$\frac{x}{2} = 20\,\mathrm{m}$$

Dann multiplizieren wir beidseits mit 2:

$$x = 40\,\mathrm{m}$$

Die Länge des Monsters (x) ist offensichtlich 40 m. Tatsächlich stimmt das mit der Lösung überein, die wir schon vorher gefunden haben.

2 Äquivalenzumformungen

Bei den Umformungen in Abschnitt 1.3 haben wir am Schluss eine Gleichung erhalten, deren Lösung wir leicht erraten können. Wir wollen aber nicht die Lösung der letzten Gleichung finden, sondern jene der ersten. Der Clou besteht nun darin, dass die Lösungsmenge beim Umformen nicht verändert wird.

Bei den Umformungen in Abschnitt 1.3 war das der Fall. Tatsächlich hat die Gleichung

$$\frac{x}{2} = 20\,\mathrm{m}\ ,$$

die wir durch Umformung aus der ursprünglichen erhalten haben, ebenfalls die Lösungsmenge $L = \{40\,\mathrm{m}\}$. Weil bei den Umformungen die Lösungsmenge nicht verändert worden ist, können wir von der Lösung der letzten Gleichung auf jene der ursprünglichen Gleichung schliessen. Und das ist es ja, was wir letztlich suchen.

Definition 2.1: Äquivalenz

Wenn zwei Gleichungen dieselbe Lösungsmenge haben, nennen wir sie *äquivalent*.

Wir schreiben dann:

$$x = 20\,\mathrm{m} + \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = 20\,\mathrm{m}$$

Der Doppelpfeil bedeutet, dass aus der ersten Gleichung die zweite folgt ($\Rightarrow$), und umgekehrt ($\Leftarrow$): Wenn für ein bestimmtes x die erste Gleichung wahr (d.h. x eine Lösung) ist, gilt das auch für die zweite — und umgekehrt. Dann sind beide Lösungsmengen gleich.

Alle Gleichungen unserer Rechnung in Abschnitt 1.3 sind äquivalent, d.h. sie haben dieselbe Lösungsmenge, nämlich $L = \{40\,\mathrm{m}\}$. Die Umformungen haben also die Lösungsmenge nicht verändert.

Definition 2.2: Äquivalenzumformung

Eine Umformung, welche die Lösungsmenge unverändert lässt, d.h. eine Gleichung in eine äquivalente überführt, nennen wir *Äquivalenzumformung*.

Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe tun, erhalten wir dann nicht immer eine äquivalente Gleichung? Nein. Dazu einige Beispiele und Gegenbeispiele:

- Addition mit derselben Zahl:

$$\begin{array}{rrcll} & x-5 & = & 2 \quad \mid +5 & L=\{7\} \\ \Leftrightarrow & x & = & 7 & L=\{7\} \end{array}$$

- Division durch dieselbe Zahl ($\neq 0$):

$$\begin{array}{rrcll} & 2x & = & 8 \quad \mid :2 & L=\{4\} \\ \Leftrightarrow & x & = & 4 & L=\{4\} \end{array}$$

- Multiplikation mit derselben Zahl ($\neq 0$)

$$\begin{array}{rrcll} & -\frac{x}{3}-4 & = & 0 \quad \mid \cdot(-3) & L=\{-12\} \\ \Leftrightarrow & x+12 & = & 0 & L=\{-12\} \end{array}$$

- Multiplikation mit 0:*

$$\begin{array}{rrcll} & 4x & = & 6 \quad \mid \cdot 0 & L=\{\frac{3}{2}\} \\ \not\Leftrightarrow & 0 & = & 0 & L=\mathbb{R} \end{array}$$

  In der zweiten Gleichung kommt x gar nicht vor. Deshalb ist es egal, was x ist. Die Gleichung ist für alle möglichen x wahr.

- Quadrieren

$$\begin{array}{rrcll} & x & = & 2 \quad \mid (\,)^2 & L=\{2\} \\ \not\Leftrightarrow & x^2 & = & 4 & L=\{-2;2\} \end{array}$$

Satz 2.1: Einige Äquivalenzumformungen

Allgemein können wir sagen: Äquivalenzumformungen sind (unter anderem):

- Beidseits dieselbe Zahl oder denselben Term addieren[a]:

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad A+C=B+C$$

* $\not\Leftrightarrow$ bedeutet ‘nicht äquivalent’.

- Beidseits dieselbe Zahl $\neq 0$ oder denselben Term $\neq 0$ multiplizieren oder dividieren (d.h. $C \neq 0$):

$$\begin{aligned} A = B &\quad\Leftrightarrow\quad A \cdot C = B \cdot C \\ A = B &\quad\Leftrightarrow\quad \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \end{aligned}$$

[a] Wenn $C < 0$ ist, ergibt sich daraus eine Subtraktion.

3 Grundmenge

Angenommen, das Rätsel hätte so gelautet: „Das Monster von Loch Ness ist 20m und seine doppelte Länge lang.“ Dann hätten wir folgende Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned} x &= 20\,\mathrm{m} + 2x \\ -x &= 20\,\mathrm{m} \\ x &= -20\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Das Monster wäre −20m lang. Aber es kann doch keine negative Länge haben! Von der Frage her sind nur positive Längen zugelassen.[†] Für x kommen somit nur positive Zahlen in Frage. Mit negativen brauchen wir's gar nicht zu probieren. Wenn wir bei der Umformung dann doch zu einer negativen Lösung kommen, dann wird sie disqualifiziert. Sie ist *keine* Lösung des Problems.

Es gibt also manchmal nur eine eingeschränkte Menge von Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen.[‡] Diese Menge nennen wir *Grundmenge*.

Die Grundmenge ist die Menge aller Zahlen, die für x in Frage kommen.

Wenn x z.B. eine Personenzahl ist, dann ist die Grundmenge noch stärker eingeschränkt[§]: Die Grundmenge sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Als Lösungen kommen nur Elemente aus der Grundmenge G in Frage. Deshalb muss L eine Teilmenge von G sein:

$$L \subset G$$

[†] Vielleicht wäre eine negative Länge für ein Monster genau das Richtige. Wenn wir aber von einem real existierenden Monster ausgehen, dann muss es auch eine positive Länge haben. Ob die Länge Null auch zugelassen sein soll, darüber kann man sich streiten. Die Länge Null würde bedeuten, dass das Monster eben doch nicht existiert.

[‡] Das sieht man der Gleichung selbst nicht mehr an.

[§] sofern keine Brutalitäten zugelassen sind

4 Lineare Gleichungen

Wir wollen uns zunächst nur mit linearen Gleichungen beschäftigen. Linear sind Gleichungen, in welchen die gesuchte Variable (z.B. x) nur in der ersten Potenz vorkommt. Beispiele und Gegenbeispiele:

- lineare Gleichung:
$$3x - 5 = -7$$

Folgende Gleichungen sind nicht linear:

- quadratische Gleichung:
$$5x^2 + 2x - 8 = 0$$
Das x kommt im Quadrat vor.

- Wurzelgleichung:
$$5\sqrt{9x + 1} + 8x = 15$$
Das x kommt unter der Wurzel vor.

- Exponentialgleichung:
$$5^{4x-3} = 16$$
Das x erscheint im Exponenten.

4.1 Lösungsstrategie für lineare Gleichungen

Fassen wir zusammen: Die Gleichung wird (durch Äquivalenzumformungen) in eine äquivalente Gleichung umgeformt, deren Lösungsmenge leicht zu erkennen ist. Die Ausgangsgleichung hat dann dieselbe Lösungsmenge. Das Problem ist gelöst. Bei linearen Gleichungen gehen wir im Einzelnen so vor:

1. soweit nötig Klammern beseitigen (ausmultiplizieren) und vereinfachen
2. alle Summanden mit x auf eine Seite bringen und alle Summanden ohne x auf die andere
3. x ausklammern
4. durch den mit x multiplizierten Faktor dividieren
5. evtl. Lösung durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung testen (und Zugehörigkeit zur Grundmenge überprüfen)

6. evtl. Lösungsmenge aufschreiben[¶]

Übrigens werden wir nicht jedesmal den Äquivalenzpfeil ($\Leftrightarrow$) schreiben, wenn zwei Gleichungen äquivalent sind, so wie wir's in den Beispielen von Abschnitt 2 getan haben. Wenn wir eine Gleichung umformen, schreiben wir die neuen Gleichungen in der Regel einfach untereinander, in der Meinung, dass sie alle äquivalent zur Ausgangsgleichung sind.

5 Algebra

Das Auflösen von Gleichungen (und Gleichungssystemen, wie wir es später kennen lernen werden) wird als *Algebra* bezeichnet. Dieser Begriff stammt aus dem Titel des arabischen Buches Kital al-mukhtasar fi hisab *al-dschebr* w'al-mukabalah von Mohammed Ibn Musa Al Chwarismi (ca. 780–846), was frei übersetzt Zusammenfassendes Buch über das richtige Anordnen sowie das Ausgleichen bedeutet. Darin geht es um das Lösen von Gleichungen. In diesem Zusammenhang heisst *al-dschebr* soviel wie an die richtige Stelle bringen, was sich auf Zahlen und Variablen bezieht. Das illustriert die Pionierrolle der Araber auf dem Gebiet der Algebra.

In der modernen Mathematik wird der Begriff Algebra allerdings in einem viel umfassenderen Sinn verwendet. In der modernen Algebra wird nicht nur mit Zahlen (und Variablen, die dafür stehen), sondern auch mit Mengen von anderen mathematischen Objekten operiert.

Übungen

1. Welche Gleichungen sind linear?

   (a) $x^2 + 5x = 10$

   (b) $(x-1)5 = 37x + 1$

   (c) $\sqrt{2}\,x = 11x - 8$

   (d) $2^x = 9x - 24$

   (e) $(x-3)(8-x) = 9 + 6x$

   (f) $\sqrt{x-28} = 15$

   (g) $x + 21 - x^5 = 0$

   (h) $x = 4$

2. Welche Gleichungspaare sind äquivalent und welche nicht?

   a) $x - 7 = 7$ $\qquad$ $3 - x = -11$

[¶]Wenn die Lösungsmenge klar ist, kann dieser Schritt weggelassen werden.

b) $4x = -8$	$0 = 2 + x$
c) $\frac{x}{3} = -2$	$-2x = 3$
d) $2x - x = x$	$3 = 3$
e) $2 = 1 - x$	$x = 2 - 1$
f) $2x = \frac{2}{3}$	$x = 3$
g) $2x - 2 = 2(x - 1)$	$x = 1$
h) $3x - 3x = 0$	$x = 0$
i) $-3x = 0$	$9x^2 = 0$

3. Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an, wenn die Grundmenge jeweils $\mathbb{N}^*$ (natürliche Zahlen ohne Null), $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen) bzw. $\mathbb{R}$ (alle reellen Zahlen) ist.

   a) $x + 9 = 4$

   b) $3 - x = -5$

   c) $2x - 1 = 4$

4. Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an. Die Grundmenge sei immer $\mathbb{R}$.

(a) $\frac{3}{4}x + 15 = 51$

(b) $5x - 16 = 19 - 2x$

(c) $0.8x + 3 - 0.6x = 1.2x - 0.6 - 1.6x$

(d) $10x - (6 + 4x) = 18 + 5x$

(e) $105 - 72x - 53 - 69$
$= 55x + 43x - 23 - 170x + 6$

(f) $56x - 43 - 52 - 19x$
$= 7 - 72x - 56x + 165x - 112$

(g) $7(3x - 6) + 5(x - 3) = 11 - 4(17 - x)$

(h) $57 - 2(x + 21) = 23 - 2(x + 4)$

(i) $40 - [3(2x - 4) - 2(2x - 3)]$
$= 60 - 2(x + 5) - 4$

(j) $\frac{18 - 2x}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}x$

(k) $\frac{12 + 3x}{5} - 3 = \frac{7 - x}{3} - 2$

(l) $5 + \frac{1}{2}(11x - 37) = 3x + \frac{2}{5}(x + 3)$

(m) $\frac{3(x - 6)}{4} + 15 + \frac{2(x - 3)}{3}$
$= 25 + \frac{x - 1}{2} - \frac{x + 13}{5}$

(n) $\frac{3x + 5}{7} - \left(\frac{x + 2}{3} - 1\right)$
$= \frac{x + 5}{3} - \frac{x - 4}{2}$

(o) $(x + 1)(4x - 3) = 2(x + 1)(2x + 3)$

(p) $(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x - 3)$

(q) $(7x - 5)(7 - 3x) - (6 - 5x)(3x - 7)$
$= (3x - 7)(7 - 2x)$

(r) $3(x + 1)(x + 4) = (3x + 6)(x + 3)$

(s) $(x - 3)(2x - 5) - 4(x - 2)$
$= 2(x - 1)^2 - 12$

(t) $2x^2 - (x + 3)(x - 3) = (x + 1)^2 - 2x + 8$

(u) $(8 - 3x)^2 + (5 - 4x)^2 - 6$
$= (9 - 5x)^2 + 20x - 4$

Lösungen

1. a) nein, quadratisch, c) nein, Wurzel, d) nein, Exponentialgleichung, e) nein, quadratisch, f) neine Wurzelgleichung, g) nein, Gleichung vom Grad 5,

2. a) $x - 7 = 7 \Leftrightarrow 3 - x = -11$
   Für beide Gleichungen ist $L = \{14\}$

   b) $4x = -8 \Leftrightarrow 0 = 2 + x$
   Für beide Gleichungen ist $L = \{-2\}$

   c) $\frac{x}{3} = -2 \not\Leftrightarrow -2x = 3$
   1. Gleichung: $L_1 = \{-6\}$; 2. Gleichung: $L_2 = \{-\frac{3}{2}\}$. (Um von der ersten zur zweiten zu gelangen, wurde die 3 multipliziert; die -2 hingegen wurde rechts dividiert, links aber multipliziert.)

d) $2x - x = x \Leftrightarrow 3 = 3$
Für beide Gleichungen ist $L = \mathbb{R}$. (Für jedes x sind beide Gleichungen erfüllt.)

e) $2 = 1 - x \not\Leftrightarrow x = 2 - 1$
1. Gleichung: $L_1 = \{-1\}$; 2. Gleichung: $L_2 = \{1\}$ (Wenn in der 1. Gleichung die 1 subtrahiert wird, so steht rechts noch $-x$ und nicht x.)

f) $2x = \dfrac{2}{3} \not\Leftrightarrow x = 3$
1. Gleichung: $L_1 = \{\frac{1}{3}\}$; 2. Gleichung: $L_2 = \{3\}$. (Wenn in der ersten Gleichung die 2 dividiert wird, so steht rechts $\frac{1}{3}$ und nicht 3.)

g) $2x - 2 = 2(x - 1) \not\Leftrightarrow x = 1$
1. Gleichung: $L_1 = \mathbb{R}$; 2. Gl.: $L_2 = \{1\}$

h) $3x - 3x = 0 \not\Leftrightarrow x = 0$
1. Gleichung: $L_1 = \mathbb{R}$; 2. Gl.: $L_2 = \{0\}$

i) $-3x = 0 \Leftrightarrow 9x^2 = 0$ Für beide Gleichungen ist $L = \{0\}$. (Wenn wir die rechte Gleichung durch 9 dividieren, erhalten wir $x^2 = 0$. Zwar hat z.B. die Gleichung $x^2 = 1$ zwei Lösungen ($L = \{-1; +1\}$), aber $x^2 = 0$ ist nur für 0 erfüllt, da $-0 = +0$ ist.)

3. a) $x + 9 = 4$:
$G = \mathbb{N}^*$: $L = \{\}$
$G = \mathbb{Z}$ und $G = \mathbb{R}$: $L = \{-5\}$

b) $3 - x = -5$:
für alle drei Grundmengen: $L = \{8\}$

c) $2x - 1 = 4$:
$G = \mathbb{N}^*$ und $G = \mathbb{Z}$: $L = \{\}$
$G = \mathbb{R}$: $L = \{\frac{5}{2}\}$

4. a) $\dfrac{3}{4}x + 15 = 51$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x &= 36 \\ x &= \frac{4}{3} \cdot 36 = 48 \ \rightarrow\ L = \underline{\underline{\{48\}}} \end{aligned}$$

b) $5x - 16 = 19 - 2x$

$$\begin{aligned} 5x &= 35 - 2x \\ 7x &= 35 \\ x &= 5 \ \rightarrow\ L = \underline{\underline{\{5\}}} \end{aligned}$$

c) $0.8x + 3 - 0.6x = 1.2x - 0.6 - 1.6x$

$$\begin{aligned} 0.2x + 3 &= -0.4x - 0.6 \\ 0.6x + 3 &= -0.6 \\ 0.6x &= -3.6 \\ x &= -6 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{-6\}}} \end{aligned}$$

d) $10x - (6 + 4x) = 18 + 5x$

$$\begin{aligned} 10x - 6 - 4x &= 18 + 5x \\ 6x - 6 &= 18 + 5x \\ x - 6 &= 18 \\ x &= 24 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{24\}}} \end{aligned}$$

e) $105 - 72x - 53 - 69$
$= 55x + 43x - 23 - 170x + 6$

$$-72x - 17 = -72x - 17$$

Diese Gleichung ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Deshalb ist $L = \underline{\underline{\mathbb{R}}}$.

f) $56x - 43 - 52 - 19x$
$= 7 - 72x - 56x + 165x - 112$

$$\begin{aligned} 37x - 95 &= 37x - 105 \\ 37x &= 37x - 10 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für kein x erfüllt. Deshalb ist $L = \underline{\underline{\{\}}}$.

g) $7(3x - 6) + 5(x - 3) = 11 - 4(17 - x)$

$$\begin{aligned} 21x - 42 + 5x - 15 &= 11 - 68 + 4x \\ 26x - 57 &= 4x - 57 \\ 26x &= 4x \\ 22x &= 0 \\ x &= 0 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{0\}}} \end{aligned}$$

Beachten Sie: $L \neq \{\}$ Null ist auch eine Zahl, d.h. ein Element von Zahlenmengen . . .!

h) $57 - 2(x + 21) = 23 - 2(x + 4)$

$$\begin{aligned} 57 - 2x - 42 &= 23 - 2x - 8 \\ 15 - 2x &= 15 - 2x \\ L &= \underline{\underline{\mathbb{R}}} \end{aligned}$$

i) $40 - [3(2x-4) - 2(2x-3)]$
$= 60 - 2(x+5) - 4$

$$\begin{aligned} 40 - [6x - 12 - 4x + 6] &= 56 - 2x - 10 \\ 40 - [2x - 6] &= 46 - 2x \\ 40 - 2x + 6 &= 46 - 2x \\ 46 - 2x &= 46 - 2x \\ L &= \underline{\underline{\mathbb{R}}} \end{aligned}$$

j) $\frac{18-2x}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}x$
Wir multiplizieren beide Seiten mit dem Hauptnenner, d.h. mit 9. So fallen alle Nenner weg:

$$\begin{aligned} 18 - 2x - 2 \cdot 3 &= 2x \\ 12 - 2x &= 2x \\ 12 &= 4x \\ 3 &= x \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{3\}}} \end{aligned}$$

k) $\frac{12+3x}{5} - 3 = \frac{7-x}{3} - 2$

$$\begin{aligned} \frac{12+3x}{5} &= \frac{7-x}{3} + 1 \\ 3(12+3x) &= 5(7-x) + 15 \quad \mid \cdot 3 \cdot 5 \\ 36 + 9x &= 35 - 5x + 15 \\ 9x &= 14 - 5x \\ 14x &= 14 \\ x &= 1 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{1\}}} \end{aligned}$$

l) $5 + \frac{1}{2}(11x - 37) = 3x + \frac{2}{5}(x+3) \quad \mid \cdot 10$

$$\begin{aligned} 50 + 5(11x - 37) &= 30x + 4(x+3) \\ 50 + 55x - 185 &= 30x + 4x + 12 \\ 55x - 135 &= 34x + 12 \\ 55x &= 34x + 147 \\ 21x &= 147 \\ x &= 7 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{7\}}} \end{aligned}$$

m) $\dfrac{3(x-6)}{4} + 15 + \dfrac{2(x-3)}{3}$
$= 25 + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+13}{5}$

$$
\begin{aligned}
\frac{3(x-6)}{4} + \frac{2(x-3)}{3} & \\
&= 10 + \frac{x-1}{2} - \frac{x+13}{5} \quad | \cdot 60 \\
45(x-6) + 40(x-3) & \\
&= 600 + 30(x-1) - 12(x+13) \\
45x - 270 + 40x - 120 & \\
&= 600 + 30x - 30 - 12x - 156 \\
85x - 390 &= 414 + 18x \\
67x &= 804 \\
x &= 12 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{12\}}}
\end{aligned}
$$

n) $\dfrac{3x+5}{7} - \left(\dfrac{x+2}{3} - 1\right)$
$= \dfrac{x+5}{3} - \dfrac{x-4}{2}$

$$\frac{3x+5}{7} - \frac{x+2}{3} + 1 = \frac{x+5}{3} - \frac{x-4}{2}$$

$$\frac{3x+5}{7} + 1 = \frac{x+5+x+2)}{3} - \frac{x-4}{2} \quad | \cdot 42$$

$$
\begin{aligned}
6(3x+5) + 42 &= 14(2x+7) - 21(x-4) \\
18x + 30 + 42 &= 28x + 98 - 21x + 84 \\
18x + 72 &= 7x + 182 \\
11x &= 110 \\
x &= 10 \;\rightarrow\; L = \underline{\underline{\{10\}}}
\end{aligned}
$$

o) $(x+1)(4x-3) = 2(x+1)(2x+3)$ Wenn $x = -1$ ist, dann sind beide Seiten Null und somit ist die Gleichung erfüllt. $x = -1$ ist also eine Lösung der Gleichung.

Wenn $x \neq -1$ ist, dann können wir beidseits durch $(x+1)$ dividieren. (Wenn $x = -1$ ist, dürfen wir das nicht, weil wir dann durch 0 dividieren würden.)

$$
\begin{aligned}
4x - 3 &= 2(2x+3) \\
4x - 3 &= 4x + 6 \\
4x &= 4x + 9
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist für kein x erfüllt. Somit ist $x = -1$ die einzige Lösung: $L = \underline{\underline{\{-1\}}}$. (Zu diesem Ergebnis kommen wir letztlich auch, wenn wir die Ausgangsgleichung ausmultiplizieren und nach x auflösen ...)

p) $(x-5)(x-2) = (x-4)(x-3)$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 5x + 10 &= x^2 - 3x - 4x + 12 \\ -7x + 10 &= -7x + 12 \\ -7x &= -7x + 2 \\ L &= \underline{\underline{\{\}}} \end{aligned}$$

q) $(7x-5)(7-3x) - (6-5x)(3x-7)$
$= (3x-7)(7-2x)$

Der Faktor $(7-3x)$ kommt in jedem Summanden vor, wenn wir mit Hilfe des Vorzeichentricks einen Teil der Differenzen umkehren:

$$\begin{aligned} &(7x-5)(7-3x) + (6-5x)(7-3x) \\ &\qquad = (7-3x)(2x-7) \end{aligned}$$

Wenn $7 - 3x = 0$ ist, d.h. für $x = \frac{7}{3}$, sind alle Summanden Null und die Gleichung somit erfüllt. $x = \frac{7}{3}$ ist also eine Lösung. Wenn $7 - 3x \neq 0$ ist, dann können wir beide Seiten durch diesen Faktor dividieren:

$$\begin{aligned} 7x - 5 + 6 - 5x &= 2x - 7 \\ 2x + 1 &= 2x - 7 \\ 2x &= 2x - 8 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für kein x erfüllt. Somit ist $x = \frac{7}{3}$ die einzige Lösung: $L = \underline{\underline{\{\frac{7}{3}\}}}$.

r) $3(x+1)(x+4) = (3x+6)(x+3)$

$$\begin{aligned} 3(x^2 + 4x + x + 4) &= 3x^2 + 9x + 6x + 18 \\ 3x^2 + 15x + 12 &= 3x^2 + 15x + 18 \\ 15x &= 15x + 6 \\ L &= \underline{\underline{\{\}}} \end{aligned}$$

s) $(x-3)(2x-5)-4(x-2)$
$=2(x-1)^2-12$

$$\begin{aligned} 2x^2-5x-6x+15-4x+8 & \\ &= 2x^2-4x+2-12 \\ -15x+23 &= -4x-10 \\ 33 &= 11x \\ 3 &= x \;\rightarrow\; L=\underline{\underline{\{3\}}} \end{aligned}$$

t) $2x^2-(x+3)(x-3)=(x+1)^2-2x+8$

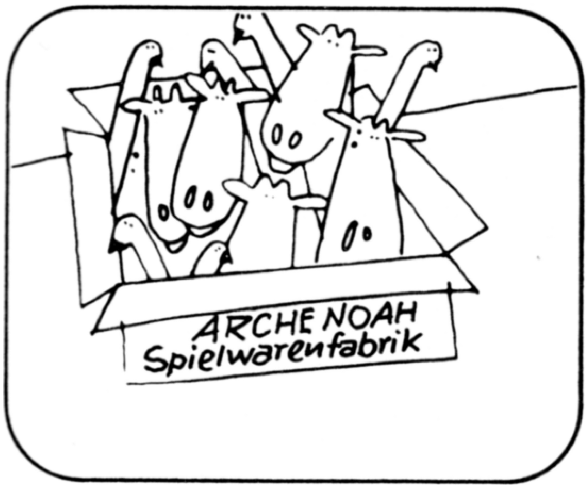
$$\begin{aligned} 2x^2-x^2+9 &= x^2+2x+1-2x+8 \\ x^2+9 &= x^2+9 \\ L &= \underline{\underline{\mathbb{R}}} \end{aligned}$$

u) $(8-3x)^2+(5-4x)^2-6$
$=(9-5x)^2+20x-4$

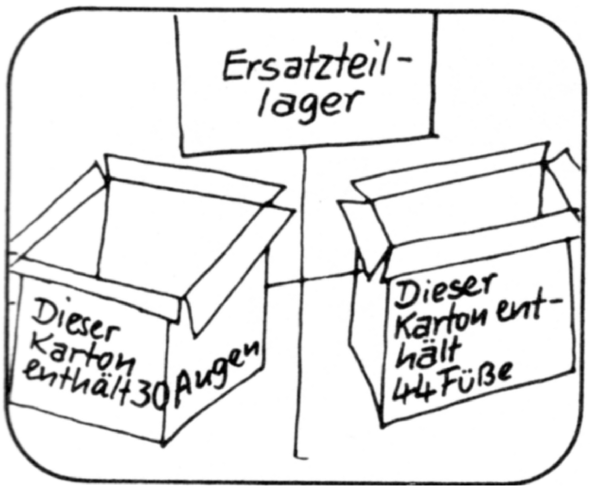
$$\begin{aligned} 64-48x+9x^2+25-40x+16x^2-6 & \\ =81-90x+25x^2+20x-4 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x^2-88x+83 &= 25x^2-70x+77 \\ 6 &= 18x \\ \frac{1}{3} &= x \;\rightarrow\; L=\underline{\underline{\{\tfrac{1}{3}\}}} \end{aligned}$$

6 Lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten

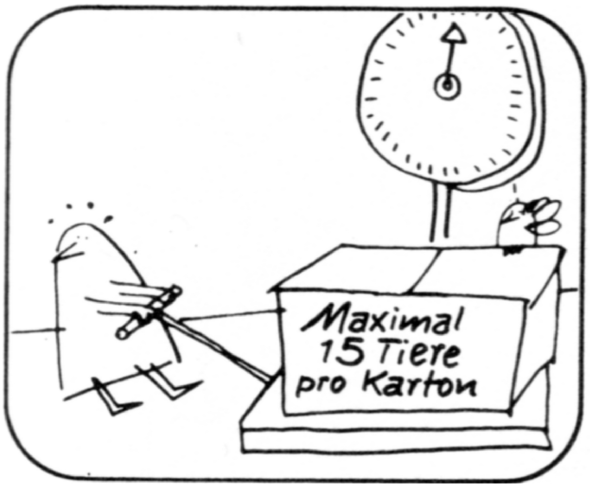


Ehe sie den Park verließen, besuchten Klaus und Gaby noch den Zoo. In einem Gehege sahen sie Giraffen und Strauße.



Als sie den Zoo verlassen hatten, sagte Klaus zu Gaby: „Hast du die Giraffen und die Strauße gezählt?“
Gaby: „Nein, wieviele waren es denn?“

Klaus: „Das sollst du raten. Zusammen hatten sie 30 Augen und 44 Beine.“



Gabys erstes aha! bescherte ihr die Erkenntnis, daß 30 Augen 15 Tiere bedeuteten.

Gaby: „Jetzt kann ich natürlich alle Möglichkeiten von 15 Giraffen und null Strauß bis zu 15 Straußen und null Giraffen probieren, aber es geht auch anders.

Klaus fragt, wieviele Strausse und wieviele Giraffen es hat. Dazu macht er zwei Aussagen:

- Es sind insgesamt 15 Tiere.
- Zusammen haben sie 44 Beine.

Diese beiden Aussagen können wir in die algebraische Sprache übersetzen. Dazu geben wir den gefragten Zahlen je einen Namen:

- x: Anzahl Strausse
- y: Anzahl Giraffen

Insgesamt sind es 15 Tiere, also gilt:

$$x + y = 15$$

Zusammen haben sie 44 Beine. Jeder Strauss hat zwei Beine; also haben alle Strausse zusammen $2x$ Beine. Jede Giraffe hat vier Beine; also haben alle Giraffen zusammen $4y$ Beine. Alle Beine zusammen:

$$2x + 4y = 44$$

Wir haben nun zwei Gleichungen. Diese beiden Gleichungen sind aber nicht unabhängig voneinander. D.h. es reicht nicht, wenn wir ein Paar $(x_1|y_1)$ finden, für das die erste Gleichung erfüllt ist, und ein anderes Paar $(x_2|y_2)$, für das die zweite Gleichung stimmt. Das Rätsel verlangt, dass für *eine* bestimmte Straussenzahl x und *eine* bestimmte Giraffenzahl y *beide* Bedingungen erfüllt sind. Beide Gleichungen gehören zusammen und müssen für dasselbe Paar $(x|y)$ erfüllt sein. Wir sprechen daher von einem *Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen.* Um deutlich zu machen, dass es sich um ein Gleichungssystem handelt, und nicht um zwei unabhängige Gleichungen, schreiben wir:

$$\left| \begin{array}{rcl} x + y & = & 15 \\ 2x + 4y & = & 44 \end{array} \right|$$

Manchmal lassen wir die beiden Striche links und rechts weg, wenn wir annehmen, es sei klar, dass es sich um ein Gleichungssystem handelt.

Doch wie finden wir das Paar x und y, für das beide Gleichungen erfüllt sind? Gaby schlägt vor, alle Möglichkeiten durchzuprobieren. Tun wir das! Wir probieren alle Möglichkeiten von null Strauss bis zu 15 Straussen, d.h. von $x = 0$ bis $x = 15$. Dazu machen wir uns die 1.

Wir sehen, dass für $x = 8$ und $y = 7$ beide Gleichungen, d.h. beide Bedingungen erfüllt sind. Die Antwort lautet also: Es sind 8 Strausse und 7 Giraffen. Tatsächlich: Das sind 15 Tiere und sie haben $8 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 44$ Beine.

6.1 Gemeinsame Lösung mit try and error suchen

In den ersten beiden Spalten von 1 sind alle Paare $(x|y)$ aufgelistet, für welche die erste Gleichung ($x + y = 15$) erfüllt ist. Das sind alle Möglichkeiten, für die es insgesamt 15 Tiere gibt. Alle diese Paare sind Lösungen der Gleichung. Zusammen bilden sie somit die Lösungsmenge der ersten Gleichung:

$$\begin{aligned} L_1 \quad = \quad & \{(0|15), (1|14), (2|13), (3|12), (4|11), \\ & (5|10), (6|9), (7|8), (8|7), (9|6), (10|5), \\ & (11|4), (12|3), (13|2), (14|1), (15|0)\} \end{aligned}$$

In den beiden anderen Kolonnen von 1) haben wir geprüft, für welches Paar $(x|y)$ die zweite Gleichung erfüllt ist. Wir könnten aber auch eine Tabelle aller Paare $(x|y)$ erstellen, für welche die zweite Gleichung erfüllt ist, für die es also 44 Beine gibt. Alle diese Paare würden dann die Lösungsmenge L_2 der zweiten Gleichung bilden. Dann könnten wir schauen, ob ein Paar in beiden Tabellen bzw. Lösungsmengen vorkommt. Dieses Paar würde beide Gleichungen erfüllen und wäre somit die Lösung des Gleichungssystems.

Wie finden wir am leichtesten alle Paare, welche die zweite Gleichung erfüllen? Für die erste war das einfach: Wir konnten zu jedem x sofort das zugehörige y berechnen. Wenn wir die zweite Gleichung nach y auflösen, können wir das hier auch tun:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 44 \\ 4y &= 44 - 2x \\ y &= 11 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir zu jeder Zahl von Straussen x die zugehörige Giraffen-Zahl y berechnen. Dabei müssen wir aber nur die geraden x einsetzen, denn sonst gibt es eine halbzahlige Giraffen-Zahl y, was natürlich nicht möglich ist. In 2 sind alle diese Paare $(x|y)$ aufgelistet, für welche die zweite Gleichung erfüllt ist.

Strausse x	Giraffen $y = 15 - x$	Beine $2x + 4y$	$2x + 4y$ $= 44$
0	15	60	f
1	14	58	f
2	13	56	f
3	12	54	f
4	11	52	f
5	10	50	f
6	9	48	f
7	8	46	f
8	7	44	$\surd$
9	6	42	f
10	5	40	f
11	4	38	f
12	3	36	f
13	2	34	f
14	1	32	f
15	0	30	f

Tabelle 1: Wir probieren alle Möglichkeiten von null Strauss und 15 Giraffen bis zu 15 Straussen und null Giraffen durch. Das y wählen wir dabei immer so, dass die erste Gleichung (die wir nach y aufgelöst haben) erfüllt ist. Wir berechnen dann die Anzahl Beine, die sich für das Paar $(x|y)$ ergeben und prüfen ob es 44 sind, d.h. ob die zweite Gleichung erfüllt ist. In der hintersten Spalte markieren wir dies mit f für "falsch" bzw. $\surd$ für "richtig".

Die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist somit:

$$\begin{aligned} L_2 \;=\; & \{(0|11),(2|10),(4|9),(6|8),(8|7),\\ & (10|6),(12|5),(14|4),(16|3),(18|2),\\ & (20|1),(22|0)\} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass ein Paar in 1 *und* in 2 vorkommt bzw. in beiden Lösungsmengen (L_1 und L_2), nämlich $x = 8$ und $y = 7$ bzw. $(x|y) = (8|7)$. Für dieses Paar sind beide Gleichungen erfüllt. Das ist tatsächlich auch die Lösung, die wir oben bereits gefunden haben.

Dabei haben wir die Schnittmenge[‖] der beiden Lösungsmengen L_1 und L_2 bestimmt und so die Lösungsmenge L des Gleichungssystems erhalten:

$$L = L_1 \cap L_2$$

Es hätte im Prinzip auch mehrere Paare geben können, die gemeinsam sind. Dann würde die Lösungsmenge aus mehreren Paaren bestehen.

6.2 Lösung graphisch suchen

Die Zahlenpaare $(x|y)$, die wir in den beiden Tabellen zusammengestellt haben, können wir auch als Punkte in ein Koordinatensystem eintragen und sie durch eine Linie verbinden. Das ist in 1 getan worden.

[‖]Die *Schnittmenge* zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die in beiden Mengen vorkommen. Sie wird wie folgt symbolisiert: $A \cap B$.

Strausse x	Giraffen $y = 11 - \frac{1}{2}x$
0	11
2	10
4	9
6	8
8	7
10	6
12	5
14	4
16	3
18	2
20	1
22	0

Tabelle 2: Hier sind alle Paare $(x|y)$ aufgelistet, für welche die zweite Gleichung erfüllt ist.

Wir sehen, dass sich für jede der beiden Gleichungen je eine Gerade ergibt, auf der die Punkte liegen. Klar: beide Gleichungen sind linear. Sie haben die Form

$$y = ax + b$$

nämlich:

$$\begin{aligned} y &= -x + 15 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 11 \end{aligned}$$

Beide sind die Funktionsgleichungen linearer Funktionen. Für die erste Gleichung ist die Steigung $a = -1$ und der y-Achsenabschnitt $b = 15$. Für die zweite Gleichung ist $a = -\frac{1}{2}$ und $b = 11$. Die beiden Geraden in 1 weisen tatsächlich diese Eigenschaften auf.

Für jeden Punkt einer Gerade ist jeweils die zugehörige Funktionsgleichung erfüllt. An einem Punkt schneiden sich die beiden Geraden. Für ihn sind beide Funktionsgleichungen

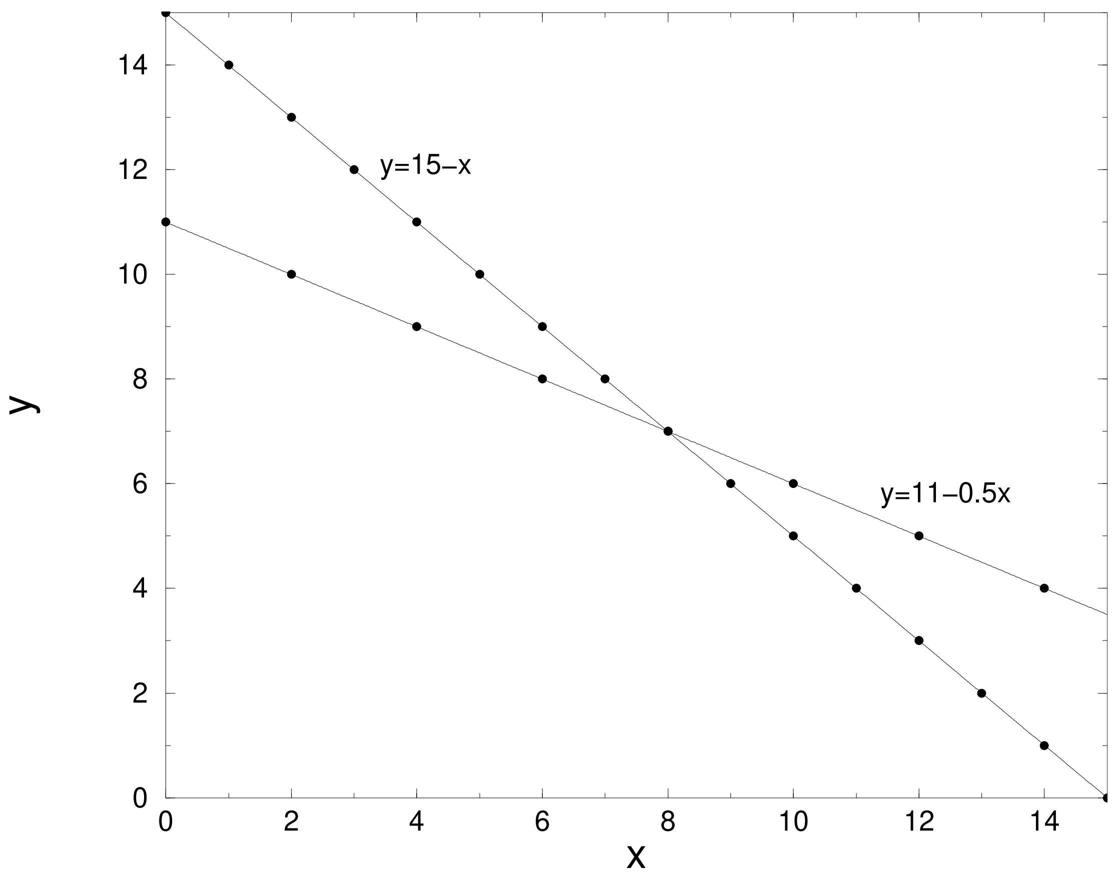


Abbildung 1: Im Koordinatensystem sind jeweils alle Punkte eingetragen, für welche die erste bzw. die zweite Gleichung erfüllt sind.

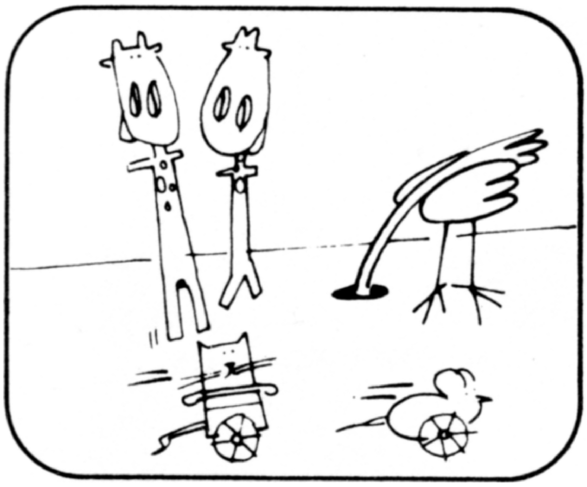
erfüllt. Er entspricht deshalb der Lösung des Gleichungssystems. Welcher Punkt ist es? Es ist $(x|y) = (8|7)$. Das ist genau das, was wir nun schon zweimal gefunden haben: Für $x = 8$ und $y = 7$ sind beide Gleichungen (d.h. das Gleichungssystem) erfüllt.

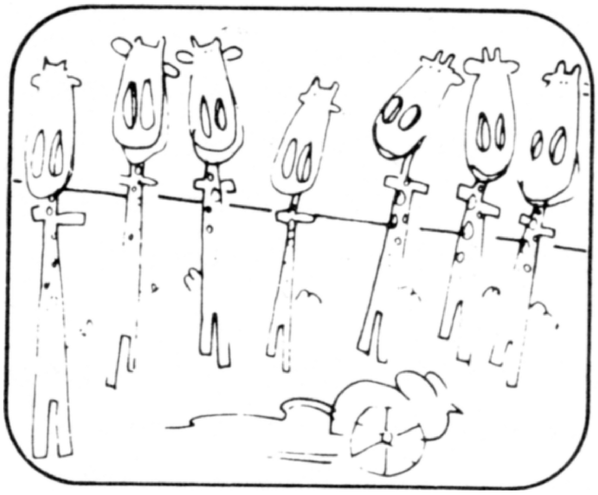
Dieser Schnittpunkt könnte allerdings auch so liegen, dass sich für x oder für y keine natürliche Zahl ergibt. Dann würde es keine Antwort geben, denn eine Anzahl von Tieren muss nun mal eine natürliche Zahl sein.

Wir können unser Problem also auch graphisch lösen. Jede Gleichung betrachten wir dann als Funktionsgleichung. Wenn wir die zugehörigen Graphen zeichnen, stellen wir alle Punkte dar, für welche die jeweiligen Gleichungen erfüllt sind. Im Schnittpunkt sind beide Gleichungen erfüllt. Dort liegt die Lösung des Gleichungssystems.

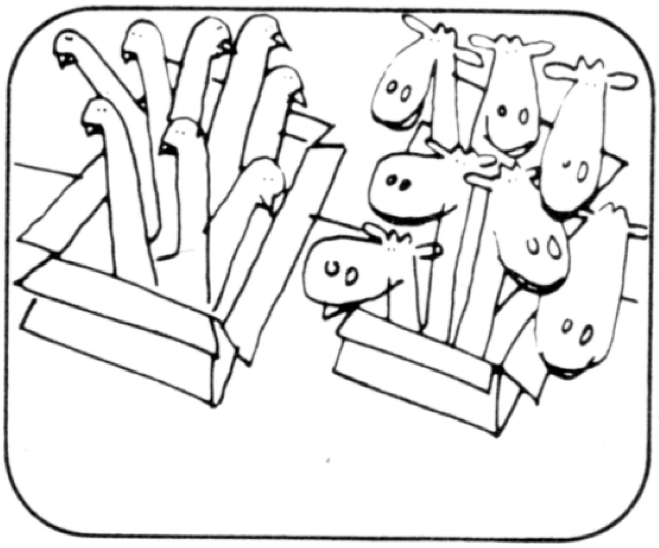
6.3 Lösung mit Cleverness suchen

Gaby hat noch eine Möglichkeit gefunden, das Problem zu lösen:





Du sagtest aber, es waren zusammen 44 Beine, demnach müssen 14 Giraffenbeine in der Luft hängen. Also waren es 7 Giraffen. Richtig?“



Klaus: „Richtig, und wenn es 7 Giraffen waren, dann waren zwangsläufig 8 Strauße im Gehege. Bravo!

Raffiniert! Aber wir werden wohl nicht immer eine so gute Idee haben, mit der wir das Problem lösen können. Andererseits ist das Durchprobieren aller Möglichkeiten mühsam. Und was ist, wenn x und y nicht Zahlen von Tieren sind, sondern Grössen, die grundsätzlich alle Zahlen als Werte annehmen können. Wir können doch nicht alle Zahlen durchprobieren! Dann bleibt uns noch die graphische Methode. Die würde immer noch funktionieren. Allerdings ist sie nicht beliebig genau. Deshalb lernen wir eine weitere Methode kennen: die algebraische.

6.4 Die algebraischen Methoden

Schreiben wir das Gleichungssystem, das wir bereits bearbeitet haben, nochmals auf:

$$\left| \begin{array}{rcl} x + y & = & 15 \\ 2x + 4y & = & 44 \end{array} \right|$$

Wenn wir an einer Gleichung eine Äquivalenzumformung durchführen, bleibt die Lösungsmenge dieser Gleichung gleich. Damit ändert aber auch die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht. Denn diese ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der Einzelgleichungen. Wir dürfen also die Einzelgleichungen wie bisher umformen, wobei die bereits bekannten Äquivalenzumformungen erlaubt sind. Tatsächlich haben wir das oben bereits getan.

6.4.1 Die Einsetzungsmethode

Wenn wir die erste Gleichung nach y auflösen, sieht das Gleichungssystem neu so aus:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 15 - x \\ 2x + 4y & = & 44 \end{array} \right|$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist immer noch dieselbe wie jene des ursprünglichen.

Die erste Gleichung sagt uns, dass y gleich $15-x$ ist. Wir können in der zweiten Gleichung also anstelle von y ebenso gut $15 - x$ schreiben, weil das dasselbe ist:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 15 - x \\ 2x + 4(15 - x) & = & 44 \end{array} \right|$$

Wir haben die erste Gleichung in die zweite *eingesetzt*. Dabei haben wir Klammern verwendet, damit das ganze y, d.h. $(15 - x)$ mit 4 multipliziert wird.

Mit diesem Trick haben wir in der unteren Gleichung y zum Verschwinden gebracht. Wir haben y *eliminiert*. Deshalb ist die zweite Gleichung zur einer gewöhnlichen linearen Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, nämlich x, geworden. Wie man aus einer solchen Gleichung die Lösung für x herausholt, wissen wir bereits:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 4(15 - x) & = & 44 \\ 2x + 60 - 4x & = & 44 \\ 60 - 2x & = & 44 \\ -2x & = & -16 \\ x & = & 8 \end{array}$$

Dabei haben wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt. Wir können deshalb anstelle der zweiten Gleichung auch die äquivalente Gleichung $x = 8$ hinschreiben. Somit haben wir folgendes Gleichungssystem erhalten, dessen Lösungsmenge immer noch gleich jener des ursprünglichen Systems ist:

$$\left| \begin{array}{lcl} y & = & 15 - x \\ x & = & 8 \end{array} \right|$$

Nun wissen wir, dass $x = 8$ ist. Das können wir seinerseits in die erste Gleichung einsetzen und finden so $y = 15 - 8 = 7$:

$$\left| \begin{array}{lcl} y & = & 7 \\ x & = & 8 \end{array} \right|$$

Bei unseren Umformungen haben wir die Lösungsmenge nie verändert. Die Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems ist somit ebenfalls $x = 8$ und $y = 7$. Es sind immer noch 8 Strausse und 7 Giraffen.

Diesmal haben wir die Lösung algebraisch gefunden. Diese Methode liefert uns immer das exakte Resultat, was die graphische Methode nicht leistet.

Einfache Aufgaben wie diese (mit den Straussen und Giraffen) haben wir übrigens bereits früher nur mit einer einzigen Gleichung gelöst. Im obigen Beispiel hätten wir uns gesagt, x sei die Zahl der Strausse. Dann ist $15-x$ die Zahl der Giraffen. Alle Strausse zusammen haben dann $2x$ Beine und die Giraffen $4(15 - x)$ Beine. Zusammen müssen das 44 Beine sein. Somit hätten wir dann die folgende Gleichung erhalten:

$$2x + 4(15 - x) = 44$$

Das ist genau die Gleichung, die wir weiter oben erhalten haben. Worin unterscheiden sich die beiden Lösungsvarianten, d.h. was macht es für einen Unterschied, ob wir ein Gleichungssystem oder direkt eine einzige Gleichung aufstellen?

- Gleichungssystem mit x und y: Die Giraffen-Zahl haben wir y genannt. Die gesamt Tier-Zahl haben wir mit der Gleichung $x + y = 15$ ausgedrückt. Diese Gleichung haben wir nach y aufgelöst ($y = 15 - x$) und in die andere Gleichung eingesetzt.

- Eine Gleichung mit x: Wir haben der Giraffen-Zahl keinen eigenen Namen gegeben. Stattdessen haben wir sie als $15 - x$ ausgedrückt. Das ist aber dasselbe wie $y\,(= 15 - x)$. Wir haben gewissermassen die eine Gleichung $y = 15 - x$ direkt in die andere Gleichung eingesetzt, allerdings ohne die Bezeichnung y zu verwenden.

Mit anderen Worten: eigentlich haben wir beide Male dasselbe getan, ausser dass wir in der Gleichungssystem-Variante für die Giraffen-Zahl einen eigenen Variablennamen gewählt haben.

Die Aufgaben, die sich uns stellen, sind aber nicht immer so einfach wie diese. Deshalb können wir nicht immer sofort eine einzige Gleichung aufstellen, in welche die andere Gleichung bereits eingesetzt ist.

6.4.2 Die Gleichsetzungsmethode

Bei der graphischen Methode haben wir ebenfalls Gleichungen verwendet, die zu den ursprünglichen äquivalent sind. Wir haben einfach die beiden Gleichungen nach y aufgelöst:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 15 - x \\ y & = & 11 - \frac{1}{2}x \end{array} \right|$$

Wir haben sie als Funktionsgleichungen betrachtet, die Graphen gezeichnet und den Schnittpunkt gesucht. Dort sind nämlich für ein und dasselbe x die zugehörigen y's gleich.

Wir können diese Methode auch algebraisch nachvollziehen. Wenn y in beiden Gleichungen dasselbe sein soll, müssen auch die rechten Seiten der Gleichungen gleich sein, weil sie ja beide gleich y sind:

$$15 - x = 11 - \frac{1}{2}x$$

Damit haben wir durch Gleichsetzen eine lineare Gleichung mit einer einzigen Unbekannten erhalten, von der wir wissen, wie man sie löst:

$$\begin{array}{rcl} 15 - x & = & 11 - \dfrac{1}{2}x \\ 15 & = & 11 + \dfrac{1}{2}x \\ 4 & = & \dfrac{1}{2}x \\ 8 & = & x \end{array}$$

Auf diese Weise haben wir x gefunden. Wie finden wir nun y? Ganz einfach: Wir haben ja zwei Gleichungen für y. Dort können wir x einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 15 - x = 15 - 8 = 7 \\ y & = & 11 - \dfrac{1}{2}x = 11 - \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 7 \end{array}$$

Wir haben beide Male $y = 7$ erhalten. Das muss natürlich so sein. Sonst wären ja die beiden Gleichungen gar nicht für dasselbe Paar $(x|y) = (8|7)$ erfüllt, und wir hätten es nicht mit einer Lösung des Gleichungssystems zu tun. Es reicht also, wenn wir x in eine der beiden Gleichungen einsetzen. Es sei denn, wir möchten kontrollieren, ob wir einen Fehler gemacht haben.

Diese Gleichsetzungsmethode ist eigentlich eine Spezialform der Einsetzungsmethode. Denn wir setzen ja das, was wir in der ersten Gleichung für y erhalten haben, in die zweite ein. Speziell ist nur, dass wir die zweite Gleichung auch nach y aufgelöst haben.

Betrachten wir noch ein Beispiel:

$$\left| \begin{array}{rcl} 28y - 9 & = & 7x + 15 \\ 28y - 9 & = & 31x - 5 \end{array} \right|$$

Die linke Seite ist für beide Gleichungen gleich. Deshalb müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Wir können sie deshalb gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 7x + 15 &= 31x - 5 \\ 15 &= 24x - 5 \\ 20 &= 24x \\ x &= \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

y erhalten wir, indem wir x in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen, z.B. in die erste:

$$\begin{aligned} 28y - 9 &= 7 \cdot \frac{5}{6} + 15 \\ 28y &= \frac{35}{6} + 24 = \frac{35}{6} + \frac{144}{6} = \frac{179}{6} \\ y &= \frac{179}{168} \end{aligned}$$

Wir können also nicht nur dann gleichsetzen, wenn beide Gleichungen nach einer Variablen (z.B. y) aufgelöst sind. Die Methode funktioniert immer, wenn beide Gleichungen eine Seite gemeinsam haben und auf der anderen Seite nur eine Variable steht.

6.4.3 Das Additionsverfahren

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, die Lösungen algebraisch zu finden. Beim Additionsverfahren werden gegebenenfalls die Gleichungen so multipliziert, dass beim anschliessenden Addieren bzw. Subtrahieren einer Gleichung von der andern eine Variable 0 ergibt. Es bleibt dann eine Gleichung mit nur einer Unbekannten übrig, die man leicht lösen kann. Natürlich würde man in folgendem Beispiel

$$\left| \begin{array}{rcl} y &=& 15 - x \\ y &=& 11 - \frac{1}{2}x \end{array} \right|$$

gleichsetzen. Ich möchte an dieser Stelle aber das Additionsverfahren demonstrieren und werde die Variable x eliminieren.

Aus der zweiten Gleichung folgt mit Multiplikation mit 2

$$2y = 22 - x.$$

Jetzt kann man von der ersten Gleichung die zweite subtrahieren

$$\left| \begin{array}{rcl} y &=& 15 - x \\ 2y &=& 22 - x \end{array} \right|$$

wobei $-x - (-x) = 0$ und erhält also

$$-y = -7$$

das heisst $y = 7$. Es folgt unmittelbar $x = 8$.

6.5 Verschiedene Fälle

Lösen wir nun folgendes Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} y+2 & = & 3x \\ 2y & = & 6x+1 \end{array} \right|$$

Dabei verwenden wir die Einsetzungsmethode. Zuerst lösen wir die erste Gleichung nach y auf:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 3x-2 \\ 2y & = & 6x+1 \end{array} \right|$$

Dann setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein und lösen diese:

$$\begin{array}{rcl} 2(3x-2) & = & 6x+1 \\ 6x-4 & = & 6x+1 \\ 6x & = & 6x+5 \\ x & = & x+\dfrac{5}{6} \end{array}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Wenn wir zu einer Zahl $\frac{5}{6}$ addieren, erhalten wir mehr als diese Zahl. Die Gleichung ist deshalb für kein x erfüllbar.**

Das betrachtete Gleichungssystem hat keine Lösung. Das können wir graphisch veranschaulichen. Dafür lösen wir beide Gleichungen nach y auf:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 3x-2 \\ y & = & 3x+\frac{1}{2} \end{array} \right|$$

Diese Gleichungen können wir als Funktionsgleichungen betrachten. In 2 sind die beiden Graphen gezeichnet.

Die beiden Geraden sind parallel. Das ist klar, denn beide haben die Steigung 3. Und Geraden mit gleicher Steigung sind nun mal parallel. Deshalb schneiden sie sich nicht. Und weil der Schnittpunkt die Lösung des Gleichungssystems wäre, gibt es keine Lösung.

Mit Hilfe der graphischen Methode wird klar, welche Möglichkeiten es für die Lösungsmenge eines Gleichungssystems gibt:

- Entweder schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt. Dann gibt es genau eine Lösung — nicht mehr und nicht weniger. Diese Lösung entspricht dem Schnittpunkt.

**Wir hätten in der zweitletzten Zeile auch auf beiden Seiten $6x$ subtrahieren können und hätten $0 = 5$ erhalten. Das ist eine falsche Aussage, unabhängig davon was x ist. Deshalb gibt es keine Lösung für x. Weil die erste Gleichung äquivalent zur Gleichung $0 = 5$ ist, hat auch sie keine Lösung.

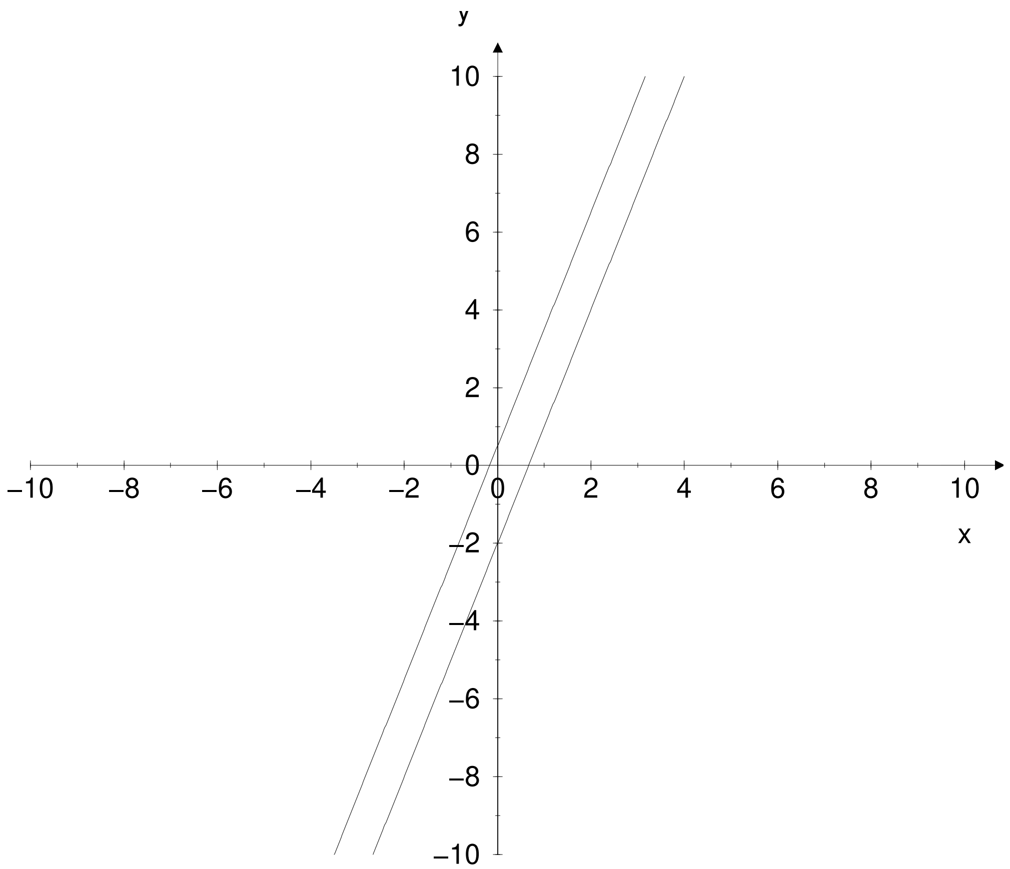


Abbildung 2: Die Graphen der Funktionen $y = 3x - 2$ und $y = 3x + \frac{1}{2}$ sind parallel, denn sie haben dieselbe Steigung.

- Die Geraden sind parallel. Dann gibt es keinen Schnittpunkt und somit keine Lösung.
- Die beiden Geraden liegen aufeinander, d.h. sie sind identisch. Dann gibt es unendlich viele Schnittpunkte und somit unendlich viele Lösungen.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2y - 4x & = & 6 \\ 6x & = & 3y - 9 \end{array} \right|$$

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf:

$$\begin{array}{rcl} 2y - 4x & = & 6 \\ 2y & = & 6 + 4x \\ y & = & 3 + 2x \end{array}$$

Dann setzen wir sie in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 6x &= 3(3+2x)-9 \\ 6x &= 9+6x-9 \\ 6x &= 6x \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für jedes x erfüllt. Zu jedem x können wir dann mit Hilfe der ersten Gleichung $y = 3 + 2x$ das zugehörige y berechnen. So erhalten wir unendlich viele Paare $(x|y)$, die alle Lösungen des Gleichungssystems sind. Die Lösungsmenge enthält also alle Paare $(x|y)$, die gemäss der Gleichung $y = 3 + 2x$ zusammenhängen:††

$$L = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{R}, y = 3 + 2x\}$$

Wir haben die erste Gleichung nach y aufgelöst. Wenn wir die zweite Gleichung ebenfalls nach y auflösen, sehen wir Folgendes:

$$\begin{aligned} 6x &= 3y-9 \\ 6x+9 &= 3y \\ 2x+3 &= y \end{aligned}$$

Das ist genau dieselbe (Funktions-)Gleichung wie die erste. Deshalb ergibt sich als Graph dieselbe Gerade. Weil beide Geraden identisch sind, gibt es unendlich viele Schnittpunkte und somit ebenso viele Lösungen. Definiert werden diese Schnittpunkte bzw. Lösungen durch die (Funktions-)Gleichung $y = 2x + 3$.

Die beiden Gleichungen dieses Systems sind äquivalent. D.h. sie haben dieselbe Lösungsmenge. Deshalb haben wir im Grunde nur eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Bereits in Abschnitt 6.1 haben wir gesehen, dass es in diesem Fall viele Lösungen gibt, da wir zu jedem x ein zugehöriges y finden, indem wir $y = 3 + 2x$ berechnen. Damit zwei Unbekannte eindeutig bestimmt sind, benötigen wir aber zwei Gleichungen, die wirklich verschieden sind.‡‡

Übungen

1. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme graphisch.

††Dabei verwenden wir die beschreibende Mengenschreibweise: Der Raum zwischen den geschweiften Klammern wird durch den senkrechten Strich in zwei Abschnitte unterteilt: Das Paar $(x|y)$ vor dem | steht für ein beliebiges Element der Menge. Hinter dem | stehen die Bedingungen, die jedes $(x|y)$-Paar erfüllen muss, damit es zur Menge gehört.

‡‡Allerdings ist es bei zwei verschiedenen Gleichungen auch möglich, dass es gar keine Lösung gibt, wie wir oben gesehen haben.

a)
$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & x+1 \\ y & = & -2x \end{array}\right|$$

b)
$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & 2x-2 \\ y & = & -\frac{1}{2}x+2 \end{array}\right|$$

c)
$$\left|\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right|$$

d)
$$\left|\begin{array}{rcl} 3x+4y & = & -6 \\ y & = & 3 \end{array}\right|$$

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit der Einsetzungsmethode:

a)
$$\left|\begin{array}{rcl} y-x & = & 12 \\ y & = & 2x+5 \end{array}\right|$$

b)
$$\left|\begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ x+3y & = & 10 \end{array}\right|$$

c)
$$\left|\begin{array}{rcl} x+y & = & 8 \\ 3x-2y & = & 14 \end{array}\right|$$

d)
$$\left|\begin{array}{rcl} x+y & = & 5(a+b) \\ y & = & x-a+b \end{array}\right|$$

3. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit der Gleichsetzungsmethode:

a)
$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & 5x-50 \\ y & = & -x+10 \end{array}\right|$$

b)
$$\left|\begin{array}{rcl} x & = & 2y+1 \\ x & = & 4y-3 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & 3x \\ 2y & = & 5x+3 \end{array}\right|$$

d)

$$\left|\begin{array}{rcl} 5y-2 & = & 3x-3 \\ 5y-2 & = & -4x+11 \end{array}\right|$$

e)

$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & ax+b \\ y & = & -ax-b \end{array}\right|$$

4. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme algebraisch:

a)

$$\left|\begin{array}{rcl} 200x & = & y \\ 10x+y & = & 21 \end{array}\right|$$

b)

$$\left|\begin{array}{rcl} x+y & = & 8.45 \\ x-y & = & 3.23 \end{array}\right|$$

c)

$$\left|\begin{array}{rcl} 0.1x+0.2y & = & 3 \\ 0.2x-0.1y & = & 1 \end{array}\right|$$

d)

$$\left|\begin{array}{rcl} 9x-2y & = & 31 \\ 7x+6y & = & 77 \end{array}\right|$$

e)

$$\left|\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 98 \\ 4x-y & = & 98 \end{array}\right|$$

f)

$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & 3x-11 \\ y & = & 13-5x \end{array}\right|$$

g)

$$\left|\begin{array}{rcl} 1200x+1500y & = & 27000 \\ 0.2x-0.1y & = & 1 \end{array}\right|$$

h)

$$\left|\begin{array}{rcl} y & = & 3x \\ 3x - y & = & 0 \end{array}\right|$$

i)

$$\left|\begin{array}{rcl} x + 3y & = & 1.1 \\ 3x + y & = & 0.9 \end{array}\right|$$

j)

$$\left|\begin{array}{rcl} y - 5x & = & 7 \\ y & = & 6 + 5x \end{array}\right|$$

k)

$$\left|\begin{array}{rcl} 5x & = & 1 - 3y \\ 5x & = & 3y + \frac{1}{4} \end{array}\right|$$

l)

$$\left|\begin{array}{rcl} \frac{x-7}{y-2} & = & \frac{1}{4} \\ \frac{x}{y} & = & \frac{5}{7} \end{array}\right|$$

m)

$$\left|\begin{array}{rcl} 5x - 3y & = & 6 \\ 4x & = & 2y + 6 \end{array}\right|$$

n)

$$\left|\begin{array}{rcl} 28y - 9 & = & 7x + 15 \\ 31x - 5 & = & 28y - 9 \end{array}\right|$$

o)

$$\left|\begin{array}{rcl} \frac{x+y}{x-y} & = & \frac{a+b}{a-b} \\ 3x - 2y & = & 3a - 2b \end{array}\right|$$

p)

$$\left|\begin{array}{rcl} x - 5y & = & 7 \\ x & = & 5y + 7 \end{array}\right|$$

q)

$$\left|\begin{array}{rcl} -4x + 6y & = & 5 \\ 6x - 9y & = & -8 \end{array}\right|$$

r)

$$\left| \begin{array}{rcl} ax + y & = & 1 \\ x + by & = & 1 \end{array} \right|$$

s)

$$\left| \begin{array}{rcl} mx + cy & = & a + b \\ mx & = & (a - c)y \end{array} \right|$$

t)

$$\left| \begin{array}{rcl} x - y & = & d \\ \frac{x-y}{2} + dx & = & d \end{array} \right|$$

5. Die Preise für das Auslegen von Bodenplatten zweier Firmen berechnen sich wie folgt:
   - Firma A: Grundpreis: 600Fr. Quadratmeterpreis: 105 $\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}$
   - Firma B: Grundpreis: 400Fr. Quadratmeterpreis: 115 $\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}$

   a) Geben Sie für beide Firmen die Funktionsgleichung an, mit der wir den Preis aus der Bodenfläche berechnen können.

   b) Zeichnen Sie die zugehörigen Funktionsgraphen (bis zu einer Fläche von $40\,\text{m}^2$ für beide Firmen in dasselbe Diagramm.

   c) In welchem Bereich ist Firma A bzw. Firma B billiger? (Lösung graphisch und algebraisch)

6. Zwei Züge starten genau um 12:00 Uhr in Bern und Zürich und fahren einander entgegen. Der Zug aus Zürich fährt 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, derjenige aus Bern nur 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Von Bern bis Zürich sind es 144 Bahnkilometer.

   a) Geben Sie für beide Züge die Funktionsgleichung an, mit der wir die Entfernung von Bern aus der Zeit seit dem Start berechnen können.

   b) Zeichnen Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für beide Züge ins selbe Diagramm.

   c) Wann und wie weit von Bern entfernt treffen sich die beiden Züge? (Lösung graphisch und algebraisch)

7. Lösen Sie folgende Aufgaben mithilfe von Gleichungssystemen:

a) Eine Firma verteilt ihre 57 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter auf zwölf Filialen. Wie viele Filialen erhalten fünf und wie viele nur vier Mitarbeiter/innen? Stellen Sie Gleichungen auf und lösen Sie sie.

b) Wir möchten ein Dach mit einer Fläche von $165\,\mathrm{m}^2$ mit einer möglichst grossflächigen Solaranlage bedecken, soweit das Budget von 28500 Franken reicht. Den Rest der Fläche bedecken wir mit normalen Ziegeln. Wie gross sind die Flächen, die wir mit Solarpanels bzw. mit Ziegeln bedecken können, wenn die Solarpanels (inkl. Installation) 242 Fr. pro m^2 kosten und die Ziegel 105 Fr. pro m^2?

c) Wir haben zwei Sorten Bodenplatten eingekauft. Von der teuereren sind es 165 Stück, von der billigeren 245. Insgesamt haben wir 5929 Franken und 50 Rappen dafür ausgegeben. Für die Buchhaltung müssen wir nun rekonstruieren, wie teuer die beiden Plattentypen pro Stück waren, weil wir es leider nirgends notiert haben und die Firma, von der wir die Platten gekauft haben, Betriebsferien hat. Immerhin können wir uns daran erinnern, dass die billigeren Platten pro Stück genau 5 Franken weniger gekostet haben als die teureren.

d) Eine Landwirtin besitzt zwei Klee-Gras-Mischungen:

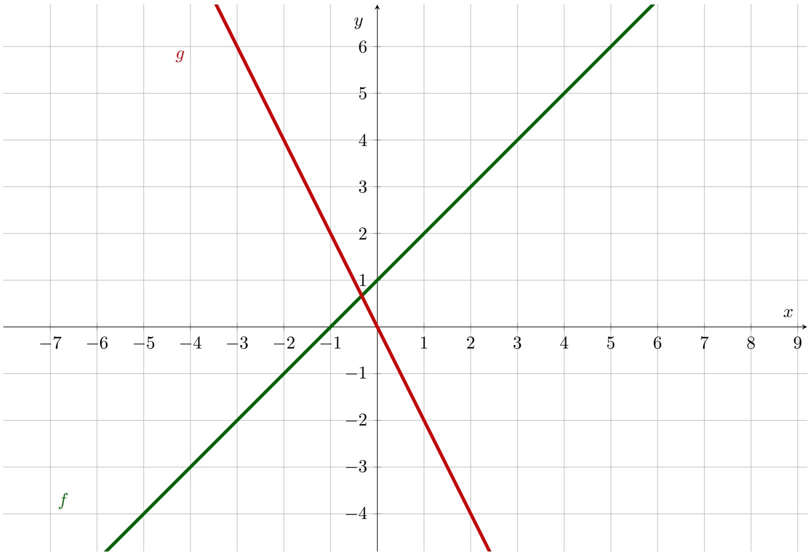
- Mischung 1: 50% Klee- und 50% Grassamen
- Mischung 2: 75% Klee- und 25% Grassamen

Sie muss 10kg Klee- und 8kg Grassamen säen. Wieviel von jeder Mischung muss sie nehmen?

e) Ein Turnverein macht einen Ausflug. Der Car kostet 368Fr. Auf die Reise gehen 15 Aktive und 13 Gäste. Die Gäste sollen 4Fr. weniger zahlen als die Aktiven. Wie hoch müssen die Preise für die Aktiven und die Gäste gewählt werden, damit die Carkosten gedeckt werden?

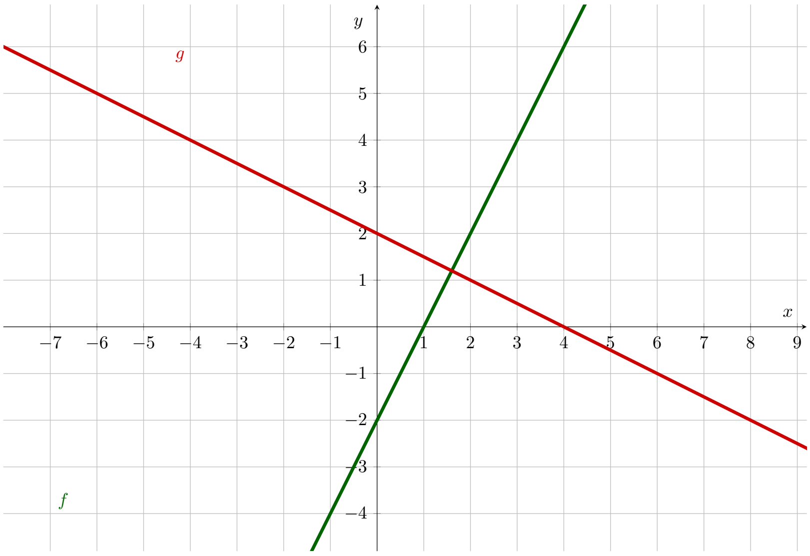
f) Ein Luftschiff legt bei Rückenwind in der Stunde 90.4km (gegenüber der Landschaft) zurück, gegen den Wind jedoch nur 65.2km. Wie gross sind die Windgeschwindigkeit und die Geschwindigkeit des Luftschiffs gegenüber der Luft.

Lösungen

1. 

a)

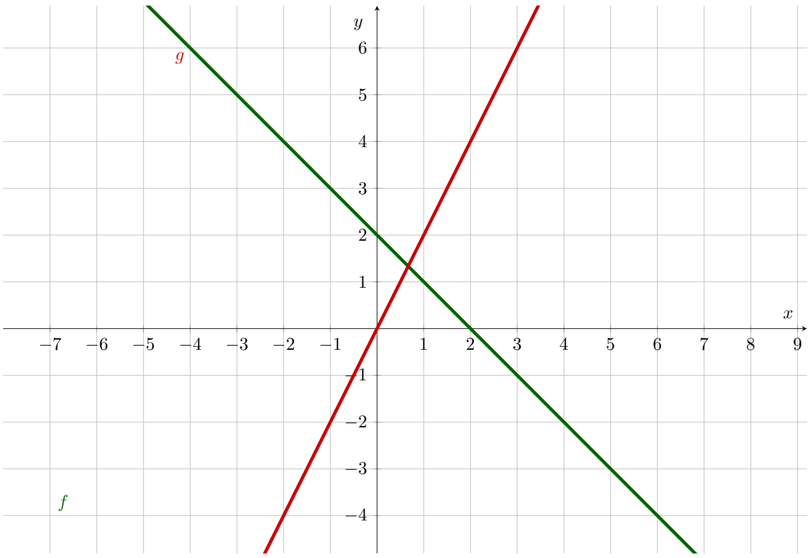
$$\underline{\underline{(x|y) = \left(-\frac{1}{3}|\frac{2}{3}\right)}}$$

b) 

$$\underline{\underline{(x|y) = (1.6|1.2)}}$$

c) Zuerst lösen wir beide Gleichungen nach y auf:

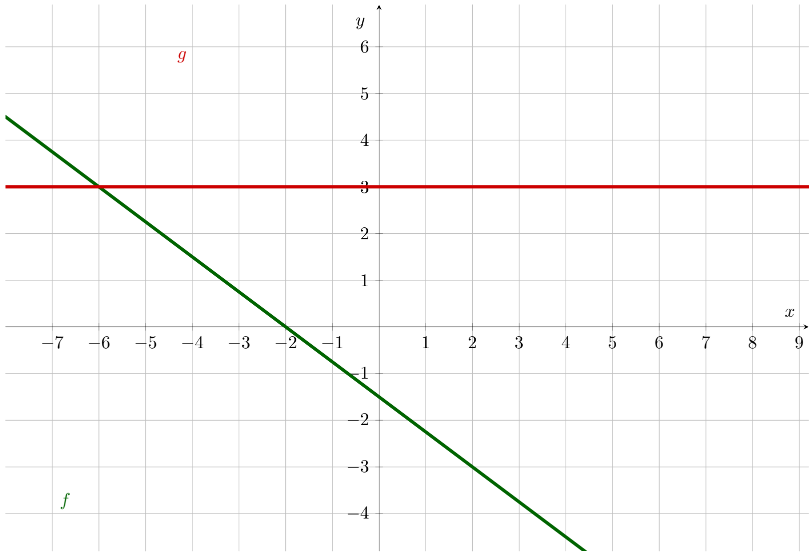
$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 2 - x \\ y & = & 2x \end{array} \right|$$



$$\underline{\underline{(x|y) = \left(\frac{2}{3}|\frac{4}{3}\right)}}$$

d) Die erste Gleichung müssen wir nach y auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \\ y & = & 3 \end{array} \right|$$



$$\underline{\underline{(x|y) = (-6|3)}}$$

2. a)

$$\left| \begin{array}{rcl} y - x & = & 12 \\ y & = & 2x + 5 \end{array} \right|$$

Die zweite Gleichung in die erste einsetzen und diese nach x auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5 - x & = & 12 \\ x & = & 7 \end{array}$$

x in die zweite Gleichung einsetzen:

$$y = 2 \cdot 7 + 5 = 19$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (7|19)}}$

b)

$$\left| \begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ x + 3y & = & 10 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung in die zweite einsetzen und diese nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 2y + 3y & = & 10 \\ 5y & = & 10 \\ y & = & 2 \end{array}$$

y in die erste Gleichung einsetzen:

$$x = 2 \cdot 2 = 4$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (4|2)}}$

c)

$$\left| \begin{array}{rcl} x + y &=& 8 \\ 3x - 2y &=& 14 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung z.B. nach x auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} x &=& 8 - y \\ 3x - 2y &=& 14 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung in die zweite einsetzen und diese nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 3(8 - y) - 2y &=& 14 \\ 24 - 3y - 2y &=& 14 \\ -5y &=& -10 \\ y &=& 2 \end{array}$$

y in die erste Gleichung ($x = 8 - y$) einsetzen:

$$x = 8 - 2 = 6$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (6|2)}}$

d)

$$\left| \begin{array}{rcl} x + y &=& 5(a + b) \\ y &=& x - a + b \end{array} \right|$$

Die zweite Gleichung in die erste einsetzen und diese nach x auflösen:

$$\begin{array}{rcl} x + x - a + b &=& 5(a + b) \\ 2x - a + b &=& 5a + 5b \\ 2x &=& 6a + 4b \\ x &=& 3a + 2b \end{array}$$

x in die zweite Gleichung einsetzen:

$$y = 3a + 2b - a + b = 2a + 3b$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (3a + 2b|2a + 3b)}}$

3. a)

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 5x - 50 \\ y & = & -x + 10 \end{array} \right|$$

Die rechten Seiten gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 5x - 50 & = & -x + 10 \\ 6x & = & 60 \\ x & = & 10 \end{array}$$

x z.B. in die erste Gleichung einsetzen:

$$y = 5 \cdot 10 - 50 = 0$$

Evtl. x zur Kontrolle in die zweite Gleichung einsetzen:

$$y = -10 + 10 = 0$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (10|0)}}$

b)

$$\left| \begin{array}{rcl} x & = & 2y + 1 \\ x & = & 4y - 3 \end{array} \right|$$

Die rechten Seiten gleichsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 2y + 1 & = & 4y - 3 \\ 4 & = & 2y \\ y & = & 2 \end{array}$$

y z.B. in die erste Gleichung einsetzen:

$$x = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Evtl. zur Kontrolle y in die zweite Gleichung einsetzen:

$$x = 4 \cdot 2 - 3 = 5$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (5|2)}}$

c)

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 3x \\ 2y & = & 5x + 3 \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung verdoppeln, damit die beiden linken Seiten gleich werden:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2y & = & 6x \\ 2y & = & 5x + 3 \end{array} \right|$$

Die rechten Seiten gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 6x &= 5x+3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

x in die ursprüngliche erste Gleichung einsetzen:

$$y = 3 \cdot 3 = 9$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (3|9)}}$

d)

$$\left| \begin{array}{rcl} 5y-2 &=& 3x-3 \\ 5y-2 &=& -4x+11 \end{array} \right|$$

Die beiden linken Seiten sind gleich. Auf den rechten Seiten steht nur die Variable x. Deshalb können wir die beiden rechten Seiten gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 3x-3 &= -4x+11 \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Wir setzen x z.B. in die erste Gleichung ein und lösen nach y auf:

$$\begin{aligned} 5y-2 &= 3 \cdot 2 - 3 = 3 \\ 5y &= 5 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (2|1)}}$

e)

$$\left| \begin{array}{rcl} y &=& ax+b \\ y &=& -ax-b \end{array} \right|$$

Beide rechten Seiten gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} ax+b &= -ax-b \\ 2ax &= -2b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

x z.B. in die erste Gleichung einsetzen:

$$y = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (-\frac{b}{a}|0)}}$ $(a \neq 0)$

4. a)

$$\left|\begin{array}{rcl} 200x & = & y \\ 10x+y & = & 21 \end{array}\right|$$

Einsetzungsmethode: Erste Gleichung in zweite einsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 10x+200x &= 21 \\ 210x &= 21 \\ x &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

x in die erste Gleichung einsetzen:

$$y = 200 \cdot \frac{1}{10} = 20$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (\frac{1}{10}|20)}}$

b)

$$\left|\begin{array}{rcl} x+y & = & 8.45 \\ x-y & = & 3.23 \end{array}\right|$$

Gleichsetzungsmethode: beide Gleichungen nach x auflösen:

$$\left|\begin{array}{rcl} x & = & 8.45-y \\ x & = & 3.23+y \end{array}\right|$$

gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 8.45-y &= 3.23+y \\ 5.22 &= 2y \\ 2.61 &= y \\ x &= 3.23+y = 5.84 \end{aligned}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (5.84|2.61)}}$

oder: Einsetzungsmethode: Zweite Gleichung nach x auflösen ($x = 3.23 + y$), in die erste einetzen ($3.23 + y + y = 8.45$) und nach y auflösen. Dann x mit der zweiten Gleichung ($x = 3.23 + y$) berechnen.

c)

$$\left|\begin{array}{rcl} 0.1x+0.2y & = & 3 \\ 0.2x-0.1y & = & 1 \end{array}\right|$$

Beide Gleichungen mit 10 multiplizieren, um die Dezimalbrüche loszuwerden:

$$\left|\begin{array}{rcl} x+2y & = & 30 \\ 2x-y & = & 10 \end{array}\right|$$

Einsetzungsmethode: erste Gleichung nach x auflösen:

$$x = 30 - 2y$$

und in die zweite Gleichunge einsetzen:

$$\begin{aligned} 2(30-2y) - y &= 10 \\ 60 - 4y - y &= 10 \\ -5y &= -50 \\ y &= 10 \\ x &= 30 - 2y = 10 \end{aligned}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (10|10)}}$

d)

$$\left| \begin{array}{rcl} 9x - 2y &=& 31 \\ 7x + 6y &=& 77 \end{array} \right|$$

Einsetzungsmethode: Erste Gleichung nach y auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{9x-31}{2} &=& y \\ 7x + 6y &=& 77 \end{array} \right|$$

Erste Gleichung in die zweite einsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 7x + 6 \cdot \frac{9x-31}{2} &= 77 \\ 7x + 27x - 93 &= 77 \\ 34x &= 170 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

x in die erste Gleichung einsetzen:

$$y = \frac{9 \cdot 5 - 31}{2} = 7$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (5|7)}}$

e)

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x + 3y &=& 98 \\ 4x - y &=& 98 \end{array} \right|$$

Einsetzungsverfahren: Zweite Gleichung nach y auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x + 3y &=& 98 \\ 4x - 98 &=& y \end{array} \right|$$

Zweite Gleichung in die erste einsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 2x + 3(4x - 98) &= 98 \\ 2x + 12x - 294 &= 98 \\ 14x &= 392 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

x in die zweite Gleichung einsetzen und y berechnen:

$$y = 4 \cdot 28 - 98 = 14$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (28|14)}}$

f)

$$\left| \begin{array}{rcl} y &=& 3x - 11 \\ y &=& 13 - 5x \end{array} \right|$$

Gleichsetzungsverfahren: Die beiden rechten Seiten gleichsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 3x - 11 &= 13 - 5x \\ 8x &= 24 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

x z.B. in die erste Gleichung einsetzen:

$$y = 3 \cdot 3 - 11 = -2$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (3|-2)}}$

g)

$$\left| \begin{array}{rcl} 1200x + 1500y &=& 27000 \\ 0.2x - 0.1y &=& 1 \end{array} \right|$$

Erste Gleichung durch 100 teilen (wird einfacher) und zweite Gleichung mit 10 multiplizieren, um die Dezimalbrüche loszuwerden:

$$\left| \begin{array}{rcl} 12x + 15y &=& 270 \\ 2x - y &=& 10 \end{array} \right|$$

Zweite Gleichung nach y auflösen:

$$\begin{aligned} -y &= 10 - 2x \\ y &= 2x - 10 \end{aligned}$$

In die erste Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 12x + 15(2x - 10) &= 270 \\ 12x + 30x - 150 &= 270 \\ 42x &= 420 \\ x &= 10 \\ y &= 2x - 10 = 10 \end{aligned}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (10|10)}}$

h)

$$\left| \begin{array}{rcl} y &=& 3x \\ 3x - y &=& 0 \end{array} \right|$$

Einsetzungsmethode: Erste Gleichung in die zweite einsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{aligned} 3x - 3x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für jedes x. Wenn wir die zweite Gleichung ebenfalls nach y auflösen ...

$$\left| \begin{array}{rcl} y &=& 3x \\ y &=& 3x \end{array} \right|$$

..., dann sehen wir, dass beide Gleichungen identisch sind. Alle Paare $(x|y)$, die nach der Gleichung $y = 3x$ zusammenhängen, sind also Lösungen des Gleichungssystems:

$$\underline{\underline{L = \{(x|y)|x \in \mathbb{R}, y = 3x\}}}$$

i)

$$\left| \begin{array}{rcl} x + 3y &=& 1.1 \\ 3x + y &=& 0.9 \end{array} \right|$$

Einsetzungsverfahren: Z.B. erste Gleichung nach x auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} x &=& 1.1 - 3y \\ 3x + y &=& 0.9 \end{array} \right|$$

Erste Gleichung in die zweite einsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{aligned} 3(1.1 - 3y) + y &= 0.9 \\ 3.3 - 9y + y &= 0.9 \\ -8y &= -2.4 \\ y &= 0.3 \end{aligned}$$

y in die erste Gleichung einsetzen und x berechnen:

$$x = 1.1 - 3 \cdot 0.3 = 0.2$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (0.2|0.3)}}$

j)

$$\left| \begin{array}{rcl} y - 5x & = & 7 \\ y & = & 6 + 5x \end{array} \right|$$

Einsetzungsverfahren: Zweite Gleichung in die erste einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} 6 + 5x - 5x & = & 7 \\ 6 & = & 7 \end{array}$$

Diese Gleichung ist für kein x erfüllbar. Somit gibt es auch kein zugehöriges y:

$$L = \{\}$$

Wenn wir die erste Gleichung nach y auflösen . . .

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 5x + 7 \\ y & = & 5x + 6 \end{array} \right|$$

. . . sehen wir, dass die zugehörigen Funktionsgraphen dieselbe Steigung (5) haben, aber nicht denselben y-Achsenabschnitt (7 bzw. 6). Es ergeben sich also zwei parallele Geraden (die nicht übereinstimmen). Deshalb gibt es keinen Schnittpunkt und somit keine Lösung: $\underline{\underline{L = \{\}}}$.

k)

$$\left| \begin{array}{rcl} 5x & = & 1 - 3y \\ 5x & = & 3y + \frac{1}{4} \end{array} \right|$$

Gleichsetzungsmethode: Die beiden rechten Seiten gleichsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} 1 - 3y & = & 3y + \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} & = & 6y \\ y & = & \dfrac{1}{8} \end{array}$$

y z.B. in die zweite Gleichung einsetzen und x berechnen:

$$\begin{array}{rcl} 5x & = & 3 \cdot \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8} \\ x & = & \dfrac{1}{8} \end{array}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (\frac{1}{8}|\frac{1}{8})}}$

l)

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{x-7}{y-2} & = & \frac{1}{4} \\ \frac{x}{y} & = & \frac{5}{7} \end{array} \right|$$

Wir multiplizieren jeweils auf beiden Seiten mit dem Hauptnenner:

$$\left| \begin{array}{rcl} 4(x-7) & = & y-2 \\ 7x & = & 5y \end{array} \right|$$

Wir lösen die erste Gleichung nach y auf:

$$\left| \begin{array}{rcl} 4x-26 & = & y \\ 7x & = & 5y \end{array} \right|$$

Dann setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein und lösen nach x auf:

$$\begin{array}{rcl} 7x & = & 5(4x-26) \\ 7x & = & 20x-130 \\ -13x & = & -130 \\ x & = & 10 \end{array}$$

Wir setzen x in die erste Gleichung ein und berechnen y:

$$y = 4 \cdot 10 - 26 = 14$$

In diesem Fall sollten wir das Resultat unbedingt durch Einsetzen testen. Denn wir müssen prüfen, ob keiner der Nenner in den Ausgangsgleichungen Null wird. Wäre das der Fall, so würde es sich bei den gefundenen x und y nicht um Lösungen handeln, da wir diese Zahlen gar nicht in die Ausgangsgleichungen einsetzen dürften. Das Einsetzen bestätigt jedoch die Lösungen: $\underline{\underline{(x|y) = (10|14)}}$.

m)

$$\left| \begin{array}{rcl} 5x-3y & = & 6 \\ 4x & = & 2y+6 \end{array} \right|$$

Einsetzungsmethode: Wir lösen die zweite Gleichung nach y auf:

$$\left| \begin{array}{rcl} 5x-3y & = & 6 \\ 2x-3 & = & y \end{array} \right|$$

Dann setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein und lösen nach x auf:

$$\begin{array}{rcl} 5x-3(2x-3) & = & 6 \\ 5x-6x+9 & = & 6 \\ -x & = & -3 \\ x & = & 3 \end{array}$$

x einsetzen in die zweite Gleichung und y berechnen:

$$y = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (3|3)}}$

n)

$$\left| \begin{array}{rcl} 28y - 9 & = & 7x + 15 \\ 31x - 5 & = & 28y - 9 \end{array} \right|$$

Gleichsetzungsmethode: Wir setzen die Seiten via-à-vis von $28y-9$ gleich und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} 7x + 15 &= 31x - 5 \\ 20 &= 24x \\ x &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

x z.B. in die erste Gleichung einsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{aligned} 28y - 9 &= 7 \cdot \frac{5}{6} + 15 \\ 28y &= \frac{35}{6} + 24 \\ 28y &= \frac{179}{6} \\ y &= \frac{179}{168} \end{aligned}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (\frac{5}{6}|\frac{179}{168})}}$

o)

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{x+y}{x-y} & = & \frac{a+b}{a-b} \\ 3x - 2y & = & 3a - 2b \end{array} \right|$$

Damit in der ersten Gleichung der Nenner nicht Null wird, muss $x \neq y$ sein.

Wir multiplizieren in der ersten Gleichung beiseits mit den beiden Nennern und vereinfachen:

$$\begin{aligned} (a-b)(x+y) &= (a+b)(x-y) \\ ax + ay - bx - by &= ax - ay + bx - by \\ 2ay &= 2bx \\ y &= \frac{b}{a}x \end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & \frac{b}{a}x \\ 3x - 2y & = & 3a - 2b \end{array} \right|$$

Die erste Gleichung setzen wir in die zweite ein und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} 3x - 2\frac{b}{a}x &= 3a - 2b \\ \left(3 - \frac{2b}{a}\right)x &= 3a - 2b \\ \frac{3a-2b}{a}x &= 3a - 2b \\ x &= a \end{aligned}$$

Wir setzen x in die erste Gleichung ein und erhalten so y:

$$y = \frac{b}{a}a = b$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (a|b)}}$ Allerdings muss $\underline{\underline{a \neq b}}$ sein, weil sonst $x = y$ ist. Dann wären beide Nenner in der ersten ursprünglichen Gleichung Null.

p)

$$\left| \begin{aligned} x - 5y &= 7 \\ x &= 5y + 7 \end{aligned} \right|$$

Die erste Gleichung nach x auflösen:

$$\left| \begin{aligned} x &= 5y + 7 \\ x &= 5y + 7 \end{aligned} \right|$$

Beide Gleichungen sind identisch. Es gibt unendlich viele Lösungen:

$$\underline{\underline{L = \{(x|y)|y \in \mathbb{R}, x = 5y + 7\}}}$$

q)

$$\left| \begin{aligned} -4x + 6y &= 5 \\ 6x - 9y &= -8 \end{aligned} \right|$$

Erste Gleichung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} -4x &= 5 - 6y \\ x &= -1.25 + 1.5y \end{aligned}$$

In die zweite Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} 6(-1.25 + 1.5y) - 9y &= -8 \\ -7.5 + 9y - 9y &= -8 \\ -7.5 &= -8 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Das gilt auch für das ganze Gleichungssystem: $\underline{\underline{L = \{\}}}$.

r)

$$\left|\begin{array}{rcl} ax+y & = & 1 \\ x+by & = & 1 \end{array}\right|$$

Die zweite Gleichung nach x auflösen:

$$\left|\begin{array}{rcl} ax+y & = & 1 \\ x & = & 1-by \end{array}\right|$$

Die zweite Gleichung in die erste einsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} a(1-by)+y & = & 1 \\ a-aby+y & = & 1 \\ (1-ab)y & = & 1-a \\ y & = & \frac{1-a}{1-ab} \end{array}$$

y in die zweite Gleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1-b\frac{1-a}{1-ab} = \frac{1-ab-b(1-a)}{1-ab} \\ & = & \frac{1-ab-b+ab}{1-ab} = \frac{1-b}{1-ab} \end{array}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (\frac{1-b}{1-ab}|\frac{1-a}{1-ab})}}$

s)

$$\left|\begin{array}{rcl} mx+cy & = & a+b \\ mx & = & (a-c)y \end{array}\right|$$

Zweite Gleichung (mx) in die erste einsetzen und nach y auflösen:

$$\begin{array}{rcl} (a-c)y+cy & = & a+b \\ (a-c+c)y & = & a+b \\ ay & = & a+b \\ y & = & \frac{a+b}{a} \end{array}$$

y in die zweite Gleichung einsetzen und nach x auflösen:

$$\begin{array}{rcl} mx & = & (a-c)\frac{a+b}{a} \\ x & = & \frac{(a-c)(a+b)}{am} \end{array}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (\frac{(a-c)(a+b)}{am}|\frac{a+b}{a})}}$

t)

$$\left| \begin{array}{rcl} x - y & = & d \\ \frac{x-y}{2} + dx & = & d \end{array} \right|$$

Erste Gleichung in die zweite einsetzen. Dann haben wir dort nämlich nur noch x:

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{2} + dx & = & d \\ dx & = & \frac{d}{2} \\ x & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

x in die erste Gleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} - y & = & d \\ \frac{1}{2} - d & = & y \end{array}$$

Lösung: $\underline{\underline{(x|y) = (\frac{1}{2}|\frac{1}{2} - d)}}$

5.
- Firma A: Grundpreis: $g_A = 600\text{Fr.}$ Quadratmeterpreis: $q_A = 105\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}$
- Firma B: Grundpreis: $g_B = 400\text{Fr.}$ Quadratmeterpreis: $q_B = 115\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}$

a) A ist die Fläche

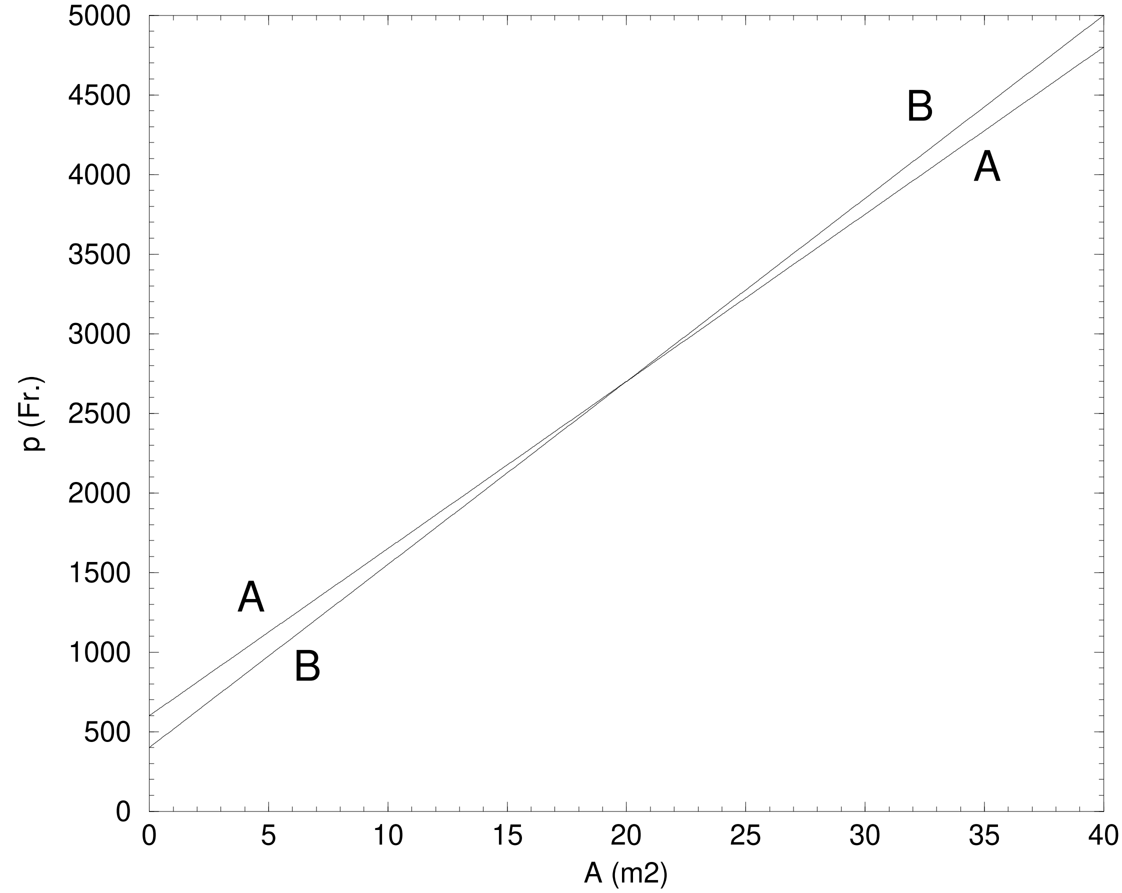
- Firma A: Preis: $\underline{\underline{p_A = g_A + q_A A}}$ oder $\underline{\underline{p_A = 600\text{Fr.} + 105\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2} A}}$
- Firma B: Preis: $\underline{\underline{p_B = g_B + q_B A}}$ oder $\underline{\underline{p_B = 400\text{Fr.} + 115\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2} A}}$

b)

c) Aus der Graphik lesen wir ab: Unterhalb von ungefähr $20\,\text{m}^2$ ist B billiger, oberhalb davon A.

Algebraisch: Für welche Fläche A ist der Preis gleich: $p_A = p_B = p$?

$$\left| \begin{array}{rcl} p & = & g_A + q_A A \\ p & = & g_B + q_B A \end{array} \right|$$



Gleichsetzungsmethode: Weil der Preis p gleich ist, sind auch die beiden rechten Seiten gleich:

$$\begin{aligned}
g_A + q_A A &= g_B + q_B A \\
q_A A - q_B A &= g_B - g_A \\
(q_A - q_B) A &= g_B - g_A \\
A &= \frac{g_B - g_A}{q_A - q_B} \\
A &= \frac{200\text{Fr.}}{10\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}} = 20\text{m}^2
\end{aligned}$$

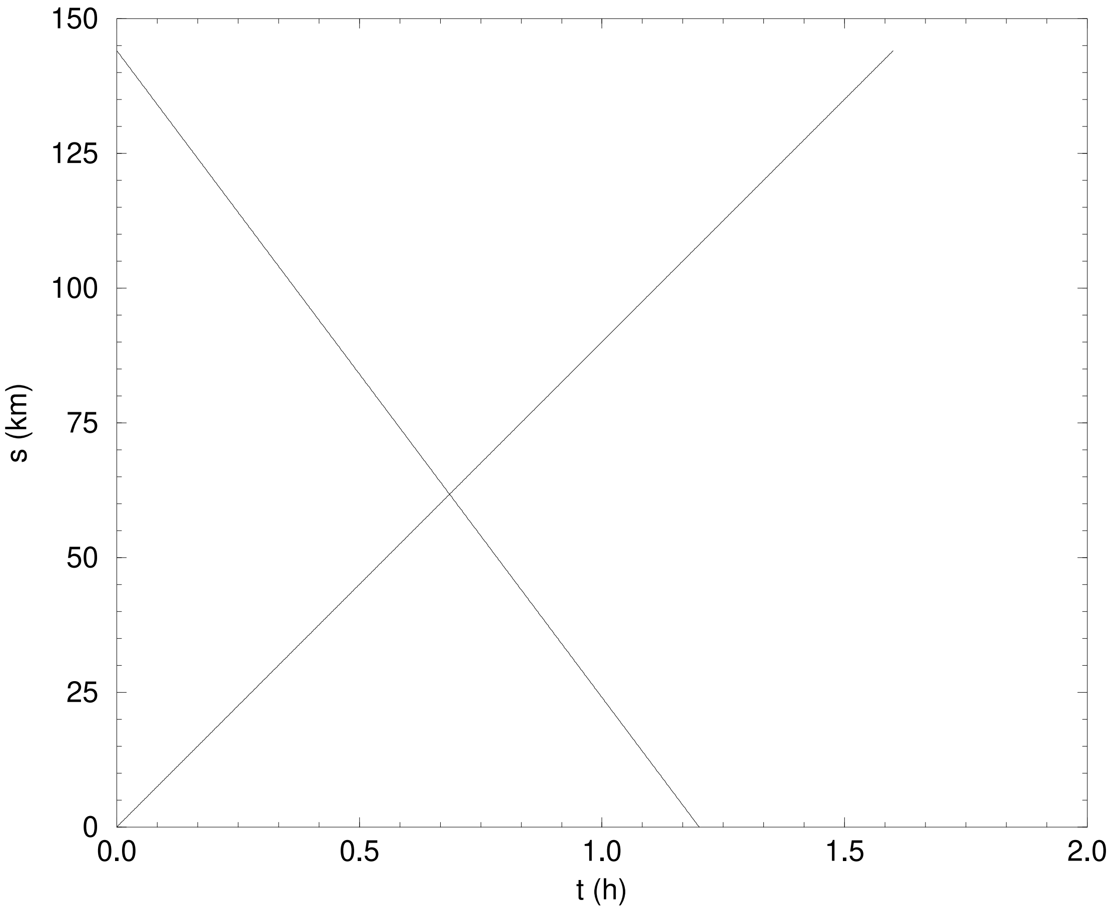
Die Grenze zwischen den beiden Bereichen liegt tatsächlich genau bei $20\,\text{m}^2$. Unterhalb von m^2 ist B billiger.

6. a) s: Distanz von Bern, t: Zeit nach 12:00 Uhr, $v_1 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $z =$ 144km

- Zug aus Bern: $\underline{\underline{s = v_1 t}}$ oder $\underline{\underline{s = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} t}}$

- Zug aus Zürich: $\underline{\underline{s = z - v_2 t}}$ oder $\underline{\underline{s = z - 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} t}}$

b)



c) Beide Züge treffen sich, wenn sie zur gleichen Zeit t am gleichen Ort s sind, d.h. im Schnittpunkt der beiden Geraden. Aus dem Weg-Zeit-Diagramm lesen wir heraus, dass das nach gut 40min (d.h. um ca. 12:40 Uhr) ungefähr 60km von Bern entfernt der Fall ist.

Algebraisch:

$$\left| \begin{array}{rcl} s & = & v_1 t \\ s & = & z - v_2 t \end{array} \right|$$

Gleichsetzungsmethode:

$$\begin{aligned} v_1 t &= z - v_2 t \\ v_1 t + v_2 t &= z \\ (v_1 + v_2) t &= z \\ t &= \frac{z}{v_1 + v_2} \\ t &= \frac{144\text{km}}{210\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0.69\text{h} = 41\text{min} \end{aligned}$$

Die Züge treffen sich nach $\underline{\underline{41\text{min}}}$, d.h. 12:41 Uhr. Wir setzen t in die erste Gleichung ein:

$$s = v_1 t = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.686\text{h} = 62\text{km}$$

Die Züge treffen sich $\underline{\underline{62\text{km}}}$ von Bern entfernt.

7. a)
- v: Zahl der Filialen, die vier Mitarbeiter/innen erhalten
- f: Zahl der Filialen, die fünf Mitarbeiter/innen erhalten

Die Filialen mit 4 Leuten haben zusammen $4v$ Mitarbeiter/innen, jene mit 5 haben $5f$ Angestellte. Zusammen müssen das 57 sein:

$$4v + 5f = 57$$

Insgesamt sind es 12 Filialen:

$$v + f = 12$$

Beide Bedingungen müssen erfüllt sein. D.h. beide Gleichungen bilden zusammen ein Gleichungssystem:

$$\left| \begin{aligned} 4v + 5f &= 57 \\ v + f &= 12 \end{aligned} \right|$$

Einsetzungsverfahren: Wir lösen die zweite Gleichung z.B. nach v auf:

$$\left| \begin{aligned} 4v + 5f &= 57 \\ v &= 12 - f \end{aligned} \right|$$

Die zweite Gleichung in die erste einsetzen und nach f auflösen:

$$\begin{aligned} 4(12 - f) + 5f &= 57 \\ 48 - 4f + 5f &= 57 \\ f &= 9 \end{aligned}$$

f einsetzen in $v = 12 - f$:

$$v = 12 - f = 3$$

$\underline{\underline{3}}$ Filialen erhalten vier Mitarbeiter/innen und $\underline{\underline{9}}$ erhalten fünf. (Diese Aufgabe könnte man auch ähnlich lösen wie **??**: Zuerst erhält jede Filiale 4 Leute. Die restlichen 9 Personen werden dann auf entsprechend viele 5er-Filialen verteilt.)

b) Dachfläche: $A = 165\text{m}^2$, Budget: $B = 28500\text{Fr.}$, Preis Solarpanels: $p_s = 242\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}$, Preis Ziegel: $p_z = 105\,\frac{\text{Fr.}}{\text{m}^2}$

Gesucht sind die Solarpanel-Fläche s und die Ziegel-Fläche z

- Gesamtfläche: $s + z = A$
- Kosten der Solarpanels: $p_s s$, Kosten der Ziegel: $p_z z$, zusammen ergibt sich das Gesamtbudget B:

$$p_s s + p_z z = B$$

Beide Gleichungen bilden zusammen ein Gleichungssystem, wobei wir die erste Gleichung bereits nach s auflösen:

$$\left| \begin{array}{rcl} s &=& A - z \\ p_s s + p_z z &=& B \end{array} \right|$$

Einsetzungsverfahren: Wir setzen die erste in die in die zweite Gleichung ein und lösen nach z auf:

$$\begin{array}{rcl} p_s(A - z) + p_z z &=& B \\ p_s A - p_s z + p_z z &=& B \\ (p_z - p_s)z &=& B - p_s A \\ z &=& \dfrac{B - p_s A}{p_z - p_s} \\ z &=& \underline{\underline{83.4\text{m}^2}} \end{array}$$

z in die erste Gleichung einsetzen:

$$s = A - z = \underline{\underline{81.6\text{m}^2}}$$

c) t: Preis der teuren Bodenplatten, b: Preis der billigen Bodenplatten. Eine Gleichunge erhalten wir, indem wir aufschreiben, wie die Gesamtkosten zustande kommen. Die andere drückt den Preisunterschied aus:

$$\left| \begin{array}{rcl} 165t + 245b &=& 5929.5\text{Fr.} \\ b &=& t - 5\text{Fr.} \end{array} \right|$$

Einsetzungsmethode: Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein und lösen nach t auf:

$$\begin{aligned} 165t + 245(t - 5\text{Fr.}) &= 5929.5\text{Fr.} \\ 165t + 245t - 1225\text{Fr.} &= 5929.5\text{Fr.} \\ 410t &= 7154.5\text{Fr.} \\ t &= 17.45\text{Fr.} \end{aligned}$$

t in die zweite Gleichung einsetzen:

$$b = t - 5\text{Fr.} = 12.45\text{Fr.}$$

Die Platten kosten pro Stück $\underline{\underline{12.45\text{Fr.}}}$ bzw. $\underline{\underline{17.45\text{Fr.}}}$

d) m_1: Menge Mischung 1, m_2: Menge Mischung 2

Aus den beiden Bedingungen, dass es 10kg Klee- und 8kg Grassamen sein sollen, ergibt sich je eine Gleichung:

$$\left| \begin{array}{rcl} 0.5m_1 + 0.75m_2 &=& 10\text{kg} \\ 0.5m_1 + 0.25m_2 &=& 8\text{kg} \end{array} \right|$$

Gleichsetzungsmethode:

$$\left| \begin{array}{rcl} 0.5m_1 &=& 10\text{kg} - 0.75m_2 \\ 0.5m_1 &=& 8\text{kg} - 0.25m_2 \end{array} \right|$$

gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 10\text{kg} - 0.75m_2 &= 8\text{kg} - 0.25m_2 \\ 2\text{kg} &= 0.5m_2 \\ 4\text{kg} &= m_2 \end{aligned}$$

In eine der obigen Gleichungen einsetzen:

$$\begin{aligned} 0.5m_1 &= 8\text{kg} - 0.25m_2 \\ 0.5m_1 &= 8\text{kg} - 0.25 \cdot 4\text{kg} \\ 0.5m_1 &= 7\text{kg} \\ m_1 &= 14\text{kg} \end{aligned}$$

e) a: Preis Aktive, g: Preis Gäste

$$\left| \begin{array}{rcl} 15a + 13g &=& 368\text{Fr.} \\ g = a - 4\text{Fr.} && \end{array} \right|$$

Zweite Gleichung in erste einsetzen und nach a auflösen:

$$\begin{aligned} 15a + 13(a - 4\text{Fr.}) &= 368\text{Fr.} \\ 15a + 13a - 52\text{Fr.} &= 368\text{Fr.} \\ 28a &= 420\text{Fr.} \\ a &= \underline{\underline{15\text{Fr.}}} \end{aligned}$$

a einsetzen in die zweite Gleichung:

$$g = a - 4\text{Fr.} = \underline{\underline{11\text{Fr.}}}$$

f) v_S: Geschwindigkeit des Luftschiffs gegenüber der Luft. v_W: Windgeschwindigkeit.

Wenn sich das Luftschiff mit v_S gegenüber der Luft bewegt und die Luft ihrerseits gegenüber der Landschaft mit v_W, dann fährt das Luftschiff gegenüber de Erde mit $v_S + v_W$. Das müssen $90.4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sein:

$$v_S + v_W = 90.4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Bei Gegenwind wird die Geschwindigkeit v_S des Luftschiffs hingegen um v_W reduziert:

$$v_S - v_W = 65.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zusammen bilden die beiden Gleichungen ein Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcl} v_S + v_W &=& 90.4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \\ v_S - v_W &=& 65.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array} \right|$$

Gleichsetzungsverfahren:

$$\left| \begin{array}{rcl} v_S &=& 90.4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - v_W \\ v_S &=& 65.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + v_W \end{array} \right|$$

gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 90.4\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - v_W &= 65.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + v_W \\ 25.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} &= 2v_W \\ 12.6\,\frac{\text{km}}{\text{h}} &= v_W \\ v_S &= 65.2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} + v_W = 77.8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

Wir sollten Mathematik auch in konkreten Situationen anwenden können. Solche Situationen simulieren die Textaufgaben. Auch wenn sie manchmal etwas künstlich sind, dienen sie uns dazu, an relativ einfachen Beispielen die Übersetzung einer konkreten Situation in die abstrakte Mathematik und wieder zurück zu üben. Reale Situationen sind oft komplizierter. Aber wir wollen ja nicht mit dem Kompliziertesten beginnen...
In diesem Kapitel lösen wir die Textaufgaben nach einem Schema mit vier Schritten. Dieses Schema wird an verschiedenen Beispielen erläutert. Bei einem Teil der Aufgaben leiten wir die Lösung als allgemeine Formel her (mit Hilfe von Parametern) und setzen die gegebenen Daten erst am Schluss ein.

7 Das Monster lässt Grüssen

Bereits in Kapitel 1 (Abschnitt 1.1) sind wir von einer Textaufgabe ausgegangen. Dort sind wir nach folgenden Schema vorgegangen:

1. Was ist gefragt? Die gefragte Grösse benennen wir mit einer Unbekannten. Sie ist die Lösungsvariable.

   $\rightarrow x$: Länge des Monsters

2. Welche Aussage macht der Text über diese Grösse? Diese Aussage wird in die algebraische Sprache, d.h. in eine Gleichung übersetzt. Allenfalls muss durch Überlegung eine Gleichheit gefunden werden; z.B. eine Grösse, die in zwei Situationen (z.B. vor- und nachher) gleich ist.

   $\rightarrow$ Die Länge des Monsters (x) ist ($=$) 20m und ($+$) seine halbe Länge ($\frac{x}{2}$) lang:

   $$x = 20\text{m} + \frac{x}{2}$$

3. Die Gleichung wird nach der Lösungsvariablen aufgelöst.

   $\rightarrow x = 40\text{m}$

4. Was bedeutet die Lösung? Kann sie stimmen? Gehört sie zur Grundmenge der Lösungsvariablen? (Z.B. darf eine Personenzahl nicht negativ sein.) Evtl. überprüfen wir die Lösung anhand Textes.

   $\rightarrow$ Das Monster ist 40m lang. Das kann durchaus sein. Test: Die Länge des Monsters, d.h. 40m, ist 20m und seine halbe Länge, d.h. 20m, lang. Stimmt!

Abbildungsverzeichnis