33. Die Quadratur des Kreises

Die „Quadratur des Kreises" ist in den allgemeinen Sprachgebrauch übergegangen, man bezeichnet damit die Bewältigung einer fast unlösbaren Aufgabe. Für Mathematiker verbirgt sich hinter diesen Worten eine spannende Geschichte, die viele während eines Zeitraums von über 2000 Jahren faszinierte.

Alles begann im alten Griechenland, dort wurde die Geometrie durch die „Elemente" des Euklid auf ein belastbares Fundament gestellt. Viel Energie wurde in die Frage investiert, welche Größen man aus vorgegebenen Längen oder Winkeln konstruieren kann, wenn man als Hilfsmittel nur einen Zirkel und ein Lineal verwenden darf; diese heute etwas willkürlich erscheinende Einschränkung hing damit zusammen, dass man Gerade und Kreis als besonders vollkommen einschätzte.

Viele von uns haben in der Schulzeit derartige Konstruktionen kennen gelernt: Man kann Winkel halbieren, regelmäßige Sechsecke zeichnen, rechtwinklige Dreiecke über gegebener Hypotenuse unter Verwendung des Thaleskreises finden und vieles mehr.

Ein Problem schien aber prinzipiell schwieriger zu sein: Wie konstruiert man eine Länge a, so dass ein Quadrat mit dieser Seitenlänge genau den gleichen Flächeninhalt hat wie ein Kreis mit gegebenem Radius? Das ist das Problem der *Quadratur des Kreises*, das über mehr als zwei Jahrtausende allen Bemühungen trotzte. Eine Lösung wurde erst im Jahr 1882 gefunden, sie kam bemerkenswerterweise nicht aus der Geometrie, wie von den meisten erwartet wurde, sondern aus der Algebra.

Die Algebraiker hatten nämlich die Zahlen im Laufe der Jahrhunderte sehr genau erforscht und festgestellt, dass es unter ihnen in einem präzisierbaren Sinn „einfache" und „schwierige" gibt. Es war lange bekannt, dass mit Zirkel und Lineal nur „einfache" Zahlen konstruiert werden können und dass die Quadratur des Kreises dann nicht möglich ist, wenn irgend jemand nachweisen kann, dass die Kreiszahl π „schwierig" ist. Das wurde von vielen in Angriff genommen, der Mathematiker Lindemann konnte es wirklich beweisen. Sein Name wird für alle Zeiten mit diesem Ergebnis verknüpft sein: Anders als manchmal im täglichen Leben ist in der Mathematik die Quadratur des Kreises wirklich unmöglich. (Genaueres findet man in den Ergänzungen zu Beitrag 48.)

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Hier soll das Konstruieren etwas genauer unter die Lupe genommen werden. Gegeben sind also ein Blatt Papier, ein Zirkel und ein Lineal, und auf dem Papier ist eine Einheitsstrecke eingezeichnet. Es ist dann keine Kunst, eine Strecke der Länge Zwei zu konstruieren: Zeichne mit dem Lineal eine Gerade und trage darauf mit dem Zirkel zweimal die Einheitsstrecke ab. Mit der gleichen Idee sind die Zahlen $3, 4, 5, \ldots$, also alle natürlichen Zahlen zu konstruieren. Ebenso kann man auch aus schon bekannten Strecken deren Summe und – durch Abtragen in der anderen Richtung – die Differenz finden.

Nun kommen die Strahlensätze zum Einsatz. Wir betrachten zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen, sie werden von zwei Parallelen geschnitten (siehe Bild).

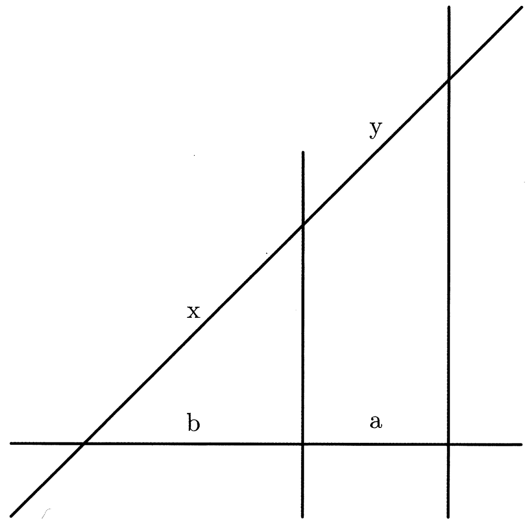

Abbildung 30: Dividieren mit den Strahlensätzen

Dann gilt aufgrund der Strahlensätze doch

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}.$$

Wenn man es dann so einrichtet, dass y die Einheitsstrecke ist und a und b schon konstruierte Längen sind, so hat x die Länge b/a. Kurz: Mit je zwei konstruierbaren Längen ist auch der Quotient konstruierbar. Das gilt auch für das Produkt, denn man kann ja auch a als Einheitsstrecke wählen und b und y vorschreiben: Dann ist $x = b \cdot y$.

Fasst man die bisherigen Überlegungen zusammen, so kann man sagen, dass die Verknüpfung schon bekannter Strecken mit Hilfe der Symbole „$+$, $-$, $\cdot$, $:$" immer wieder zu konstruierbaren Strecken führt.

Es gibt aber noch weitere Möglichkeiten, denn man darf auch Wurzeln ziehen. Um das einzusehen, betrachten wir das folgende rechtwinklige Dreieck. Es ist bekannt, dass das Quadrat der Höhe das Produkt aus den Hypotenusenabschnitten ist: $h^2 = p \cdot q$.

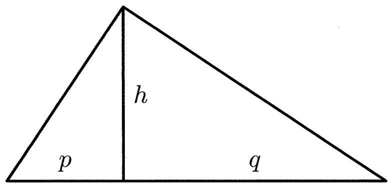

Abbildung 31: Im rechtwinkligen Dreieck ist $h^2 = p \cdot q$

Wenn also p und q schon konstruiert sind, so richte man es so ein, dass p und q gerade die Hypotenusenabschnitte in einem rechtwinkligen Dreieck sind.

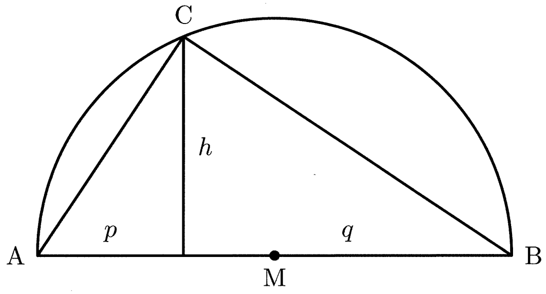

Abbildung 32: Wurzelziehen mit dem Satz von Thales

Das geht nach dem Satz von Thales, man muss nur den Halbkreis über einer Strecke AB mit der Länge $p+q$ mit der Senkrechten, die durch den Fußpunkt von h geht, schneiden. Am Schnittpunkt C der Senkrechten mit dem Halbkreis entsteht nach dem Satz von Thales der rechte Winkel ACB. Damit ist eine Zahl h so gefunden, dass $h^2 = p{\cdot}q$ gilt. Anders ausgedrückt: h ist die Wurzel aus $p{\cdot}q$. Wenn insbesondere p die Einheitsstrecke ist, haben wir so die Wurzel aus q konstruiert.

Wenn man alles, was wir bereits wissen, kombiniert, sind schon sehr komplizierte Zahlen konstruierbar: Alles, was man unter Verwendung der Symbole n, $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{\cdot}$ aufschreiben kann (wobei n eine natürliche Zahl sein soll), zum Beispiel die Zahl

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{5}} + 6\,.$$

Da die Wurzel der Wurzel die vierte Wurzel ist, machen auch vierte (und entsprechend achte, sechzehnte usw.) Wurzeln keine Schwierigkeit. Das Verfahren scheint beliebig komplizierte Zahlen produzieren zu können, warum sollte nicht die Zahl π dabei sein? Eventuell durch eine Kombination von $n, +, -, \cdot, :, \sqrt{\cdot}$, für die man zum Aufschreiben ein gigantisch großes Stück Papier braucht? Durch das Ergebnis

von Lindemann ist das aber ausgeschlossen, denn alle konstruierten Zahlen sind wesentlich „einfacher“ als die Kreiszahl π.

Konstruktionen: *nur* mit Zirkel und Lineal

Die Bedingung „nur mit Zirkel und Lineal“ ist sehr genau zu lesen. Wenn man zum Beispiel zulässt, dass auf dem Lineal irgendwelche Markierungen angebracht sind, sieht alles schon ganz anders aus. Um den Unterschied zu illustrieren, soll gezeigt werden, wie man mit einem Lineal mit zwei Markierungen einen Winkel stets in drei gleiche Teile teilen kann. Unter Einhaltung der strengen Spielregeln (*nur* Zirkel und Lineal) ist das – wie man mit algebraischen Methoden streng beweisen kann – nicht möglich[39].

Um die Konstruktion zu erläutern, betrachten wir irgendeinen Winkel CBA. (Der ist im nachstehenden Bild zu sehen. Wie üblich werden Winkel durch drei Punkte definiert, der mittlere gibt die Position des Winkels an.)

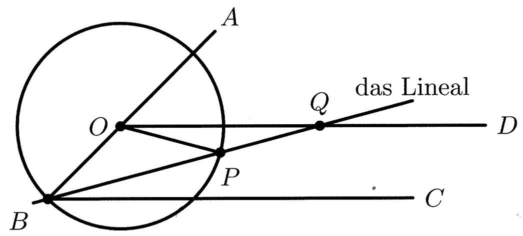

Abbildung 33: Eine Neusis-Konstruktion zur Dreiteilung des Winkels

Dieser Winkel soll in drei gleiche Teile zerlegt werden, und wir nehmen an, dass auf unserem Lineal zwei Markierungen P und Q angebracht sind. Als Erstes tragen wir die Länge PQ von B ausgehend auf dem Strahl BA ab. So entsteht der Punkt O, den wir als Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius PQ verwenden. Natürlich geht er durch B. Von O ausgehend, zeichnen wir eine Parallele zu BC. Das ergibt den Strahl OD.

Jetzt wird das Lineal eingesetzt. Wir legen es so, dass es erstens durch B geht, dass zweitens die Markierung P den Kreis trifft und drittens Q auf dem Strahl OD liegt (siehe Abbildung).

Im Grunde sind wir nun schon fertig. Wir behaupten, dass der Winkel POQ exakt ein Drittel des Ausgangswinkels CBA ist.

Für den Beweis wird es bequem sein, einen Namen für den Winkel POQ zu wählen: Wir wollen ihn α nennen. Zunächst stellen wir fest, dass auch der Winkel PQO gleich α ist. Im Dreieck OPQ sind nämlich die Seiten PO und PQ gleich lang

[39] Solche Konstruktionen – Zirkel und Lineal plus kleine Zusatzhilfen – wurden im 17. Jahrhundert unter dem Namen „Neusis-Konstruktionen“ sehr intensiv untersucht.

(nämlich beide gleich dem Kreisradius), und deswegen müssen die Winkel an den gleichlangen Seiten übereinstimmen.

Da die Summe aller Winkel im Dreieck OPQ gleich 180 Grad ist und wir zwei Winkel schon kennen, erhalten wir für den Winkel OPQ den Wert $180 - 2\alpha$. So folgt, dass der Winkel OPB gleich 2α sein muss, denn die Winkel OPB und OPQ ergänzen sich zu 180 Grad.

Auch das Dreieck BPO ist gleichschenklig: OP und OB sind gleich dem Kreisradius. Wir schließen wie eben, dass deswegen auch der Winkel OBP den Wert 2α haben muss.

Als letzten Beweisschritt beachten wir, dass der Winkel QBC gleich α ist. Dieser Winkel muss nämlich mit dem Winkel OQB übereinstimmen; beide Winkel sind ja Gegenwinkel, die beim Schnitt einer Geraden (dem Lineal) mit zwei parallelen Linien (den Strahlen BC und OD) entstehen. Insgesamt heißt das wirklich, dass der Winkel OBC, die Summe der Winkel QBC und OBQ, den Wert 3α hat. Das bedeutet, dass der Winkel POQ ein Drittel des Winkels CBO ist.

Die Kubatur der Kugel

Die „Quadratur des Kreises" ist, wie wir gesehen haben, bei Einhaltung der Spielregeln unmöglich. Im allgemeinen Sprachgebrauch ist aber manchmal auch dann von der Quadratur des Kreises die Rede, wenn es um eine besonders schwierige Aufgabe geht.

Bei den Koalitionsverhandlungen Ende des Jahres 2005 wollte die designierte Bundeskanzlerin Angela Merkel noch eins draufsetzen und sagte gegenüber der Presse, dass die Verhandlungen noch schwieriger seien als die Quadratur des Kreises, etwa so schwierig wie die „Kubatur der Kugel". Es darf unterstellt werden, dass sie das Problem meinte, eine Kugel in einen Würfel mit gleichem Volumen zu verwandeln. Da eine Kugel mit Radius r das Volumen $4 \cdot \pi \cdot r^3/3$ hat und zu einem Würfel mit Kantenlänge l das Volumen l^3 gehört, muss

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = l^3, \text{ d. h. } l = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi} \cdot r$$

gelten. Anders ausgedrückt: Die Kubatur der Kugel verlangt die Konstruktion von $\sqrt[3]{4 \cdot \pi/3}$.

Wenn das möglich wäre, so könnte man mit den weiter oben beschriebenen Verfahren auch π konstruieren, und damit wäre die Quadratur des Kreises kein Problem.

Umgekehrt gilt das aber nicht, denn mit Zirkel und Lineal können im Allgemeinen keine dritten Wurzeln konstruiert werden.

Fazit: Angela Merkel hat Recht. Die Kubatur der Kugel ist echt schwieriger als die Quadratur des Kreises. (Wobei man allerdings darüber streiten kann, wie sinnvoll diese Aussage ist, denn Quadratur und Kubatur sind beide unmöglich.)