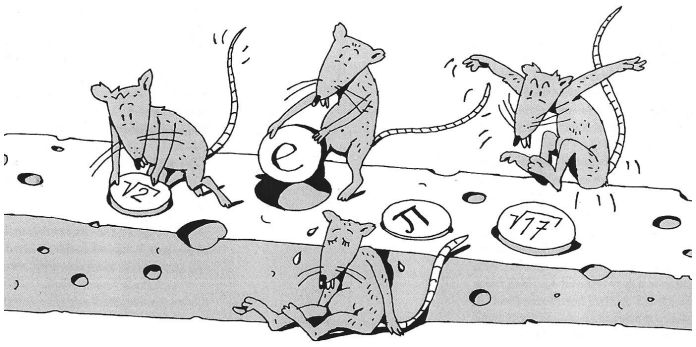


Zahlen

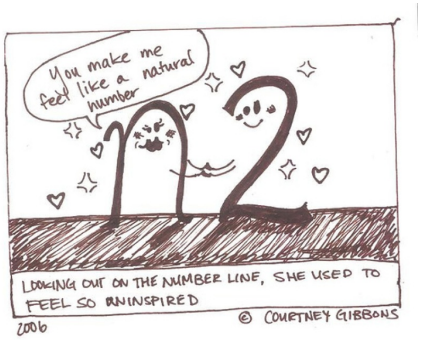
I like primes!

Inhaltsverzeichnis

1. Natürliche Zahlen

1.1. Historisches

> Alles ist Zahl.



Diese kurze, prägnante Aussage stammt von Pythagoras, dem berühmten griechischen Philosophen und Mathematiker, der um 550 v.u.Z. gelebt hat.
Die meisten schriftlichen Zeugnisse über Pythagoras und seine Anhänger gehen auf Darstellungen zurück, die mehr als 800 Jahre nach seinem Tod geschrieben und reichlich ausgeschmückt worden sind. Pythagoras gehört deshalb zu den rätselhaftesten Persönlichkeiten der Antike. Immerhin gilt seine Existenz als gesichert.
In jungen Jahren soll er sich auf Anraten von Thales (624 – 546 v.u.Z.) auf eine langjährige Studienreise nach Ägypten begeben haben, um dort die vorhandenen Wissensschätze zu studieren; vielleicht war er auch in Babylon. Der Zusammenhang der pythagoräischen Arithmetik mit der babylonischen legt jedenfalls eine solche Vermutung nahe. Um 530 v.u.Z. taucht er in Unterinitialen auf und gründet in Crotone eine einflussreiche religiös-philosophische Schule, deren Mitglieder eine enge Gemeinschaft bildeten und auf eine genau geregelte, bescheidene Lebensweise achteten. Nach Pythagoras sollte das menschliche Leben geordnet und harmonisch sein, wie es die Zahlenverhältnisse in der Natur offenbarten. Dieses Zahlenverständnis kommt im Satz „Alles ist Zahl“ treffend zum Ausdruck und verdeutlicht, dass er und seine Schüler — die nach ihm benannten Pythagoreer — die Zahlen als eine, die gesamte Natur konstruierende Kraft betrachteten.
Kulturgeschichtlich blieben die Pythagoreer und ihre Schule bis weit über den Tod ihres Begründers bedeutsam. Sie prägten die Mathematik für Jahrhunderte.

> Die natürlichen Zahlen hat Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk.

Dieses Zitat stammt von Leopold Kronecker (1823–1891), ein Zahlentheoretiker und Analytiker. Er war einflussreicher Wegbegleiter des mathematischen Konstruktivimus, der nur mathematische Gegenstände gelten liess, deren Existenz durch explizite Konstruktion gesichert werden konnte. Sein Versuch, die Mathematik nur auf Grundlage der natürlichen Zahlen zu definieren, führte insbesondere zum Konflikt mit Cantor und dessen Mengenlehre, die dieser weitestgehend unkonstruktivistisch untersuchte. Kronecker war überzeugt, dass mit der Mengenlehre für die Analysis nichts zu gewinnen war. Cantors Arbeiten erregten den Widerspruch zahlreicher Mathematiker.

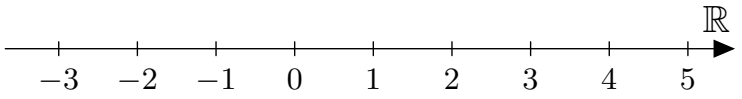
1.2. Die Menge der natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind die seit Alters her beim Zählen verwendeten Zahlen. Mit ihnen kann man eine Menge durchnummerieren. Die natürlichen Zahlen haben einen Anfang, die 1, aber kein Ende. Es gibt demnach unendlich viele dieser Zahlen. Ausserdem hat sich herausgestellt, dass die Menge $\mathbb{N}$ die kleinste Menge ist, die unendlich viele Elemente enthält (CANTOR, Mengenlehre). Das Symbol für Unendlich ist eine liegende Acht,

$$\infty.$$

Bemerkung. Achtung, ∞ selber ist keine Zahl!

Auf $\mathbb{N}$ können die Grundoperationen Addition und Multiplikation abgeschlossen durchgeführt werden, d.h. dass auch das Ergebnis einer solchen Operation wieder eine natürliche Zahl ist. Man sagt auch, die natürlichen Zahlen sind ABGESCHLOSSEN bezüglich der Addition und Multiplikation.
Die Null gehört im Allgemeinen nicht zu den natürlichen Zahlen. Häufig wird $\mathbb{N}$ aber mit der Zahl Null erweitert, und man schreibt $\mathbb{N}_0$.
Zur Darstellung der natürlichen Zahlen eignet sich oft der ZAHLENSTRAHL.



Obwohl schon seit Jahrtausenden mit Zahlen gerechnet wurde, gelang eine saubere Fundierung der natürlichen Zahlen erst im 19. Jahrhundert. Es hatte sich bis zu jenem Zeitpunkt einfach nicht aufgedrängt, nach den Grundlagen allen Rechens zu fragen. Erst als versucht wurde, den Rahmen, in dem man sich bislang bewegt hatte, zu erweitern, um das Unendliche in den Griff zu bekommen, und man sich dabei in Widersprüche verwickelte, wurde klar, dass nur eine Klärung des Fundaments der natürlichen Zahlen diese Ungereimtheiten aus der Welt schaffen konnte. Die durch diese Verunsicherung herauf beschworene Grundlagenkrise bedrohte die Mathematik existenziell. Denn eines der wichtigsten Postulate der Mathematik war gefährdet: Die *Widerspruchsfreiheit*. Denn auf ein Haus mit trügerischem Fundament lässt sich nicht verlässlich bauen und mit einem Einsturz musste früher oder später gerechnet werden. Der wegweisendste Beitrag stammt zweifelsohne von Cantor, dem die Einbindung des ∞ in ein erweitertes mathematisches Gedankengebäude gelang. Er schuf mit der Mengenlehre ein Fundament, in dem einerseits die natürlichen Zahlen sicher eingebettet sind, aber auch der Begriff des Unendlichen nicht mit ihnen in Konflikt oder Widerspruch gerät.

1.3. ggT und kgV

Primfaktorzerlegungen spielen auch beim Bestimmen des ggT (grösster gemeinsamer Teiler) und des kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) zweier natürlicher Zahlen a und b eine wichtige Rolle.

Übung 1 (gcd and lcm)**.** Bestimme das kgV und den ggT der Zahlen 153900 und 180600.

1.4. Euklid'scher Algorithmus

Um den ggT zweier Zahlen a und b zu finden, gelangt man häufig mit dem Euklid'schen Algorithmus am schnellsten zum Ziel. Als Beispiel betrachten wir nochmals die beiden Zahlen 153900 und 180600, dividieren zuerst die grössere durch die kleinere und bestimmen danach den Rest, der entsteht. In einem zweiten Schritt wird die kleinere Zahl durch den erhaltenen Rest geteilt und der dadurch resultierende neue Rest bestimmt, etc.... Zwischen dem ggT und dem kgV besteht der folgende Zusammenhang.

Satz 1.1: Produktsatz

$$a \cdot b = \text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b)$$

Beweis. Bestätige die Richtigkeit des Satzes durch ein selbst gewähltes Beispiel. □

Übung 2 (Euklid'scher Algorithmus)**.** Bestimme den ggT und das kgV der Zahlen 5544 und 4410 mit dem euklidschen Algorithmus und dem letzten Satz.

1.5. Primzahlen

Unter den natürlichen Zahlen finden sich solche, die jedem Divisionsversuch mit einem natürlichen Divisor, der kleiner als die Zahl selbst und grösser als 1 ist, widerstehen. Solche, in diesem Sinne teilerlose Zahlen werden Primzahlen genannt.

Definition 1.1: Primzahl

Eine Zahl, die genau zwei verschiedene, natürliche Teiler hat, heisst Primzahl.

Somit gehören die Zahlen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

zu den Primzahlen.

Bemerkung. Beachten Sie, dass 1 per Definition keine Primzahl ist!

Primzahlen sind die Bausteine der natürlichen Zahlen. Dies besagt der folgende und zugleich verblüffende Satz, den ich gerne als Satz der DNA der natürlichen Zahlen bezeichne.

Satz 1.2: DNA der Zahlen

Jede natürlich Zahl grösser 1 lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Beweis. Der Beweis erfordert tiefere Kenntnisse in Mathematik. □

Übung 3 (Primfaktorzerlegung)**.** Zerlege die Zahlen 234600 und 7571 in ihre Primfaktoren.

1.5.1. Etwas Zahlentheorie

Als Bausteine der Zahlen scheinen die Primzahlen offensichtlich wichtig zu sein. Dies bemerkten schon die Griechen. Sie machten sich deshalb auf die Suche nach ihnen und stellten vermutlich als erste die Frage nach deren Anzahl und deren Verteilung.

1.5.2. Sieb von Eratosthenes

Der alexandrinische Bibliothekar, Mathematiker und Geograph Eratosthenes (276 – 194 v.u.Z.), der als erster einen ausgezeichneten Wert für den Umfang der Erde ermittelt hat, kannte bereits ein einfaches Verfahren, um die Primzahlen schrittweise aus der Reihe der natürlichen Zahlen heraus zu filtern (Sieb des Eratosthenes). Um aber von einer grossen Zahl zu entscheiden, ob es sich um eine Primzahl handelt oder nicht, ist dieses Vorgehen nicht geeignet, da es hoffnungslos langsam ist. Es stellt sich hier also die Frage, ob es nicht praktikablere Wege gibt, Primzahlen zu erkennen.
Betrachten wir die Primzahlen des ersten Hunderts etwas genauer:

> 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Auffallend ist die scheinbare Gesetzlosigkeit ihrer Verteilung. Es gibt solche, die sich als Paar um eine einzige Zahl gruppieren, wie zum Beispiel 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31, 59 und 61. Die von einem solchen Primzahlzwilling eingeschlossene Zahl besitzt immer viele Teiler; auf jeden Fall den Teiler 6.

Übung 4 (Primzahlzwillinge)**.** Beweise obige Aussage.

Die Lücke, das heisst die Anzahl der nichtprimen Zahlen zwischen zwei Primzahlen, ist in der Reihe der natürlichen Zahlen ganz verschieden gross. Je weiter in der Zahlenreihe fortgeschritten wird, um so grössere, derartige Lücken — nebst den kleinsten — treten auf.

1.5.3. Dichte von Primzahlen

Deutlich ist, dass die Häufigkeit der Primzahlen im allgemeinen mit wachsenden Zahlenwerten abnimmt. Aber auch diese Gesetzmässigkeit wird durchbrochen. So finden wir in den ersten Hunderter-Blöcken die folgende Anzahl Primzahlen:

1 bis 100	101 bis 200	201 bis 300
25	21	16
301 bis 400	401 bis 500	501 bis 600
16	17	14
601 bis 700	701 bis 800	801 bis 900
16	14	15
901 bis 1000		
14		

Das erste Tausend weist somit 168 Primzahlen auf, was etwa einem Sechstel aller natürlichen Zahlen dieses Intervalls entspricht. In den ersten 3000 finden sich etwa ein Siebtel, und unter den ersten 10000 treffen wir auf rund einen Achtel. Die Dichte nimmt also scheinbar ab. Ist die Menge der Primzahlen also eine endliche? Oder etwas anders formuliert:

Gibt es eine grösste Primzahl?

Der *indirekte* Beweis der Antwort auf diese Frage, lieferte schon Euklid[1]
Obwohl über sein Leben nur sehr wenig bekannt ist, ist es in erster Linie das Verdienst Euklids, dass wir heute ein recht umfassendes Wissen der griechischen Mathematik haben. Er schrieb an der Bibliothek in Alexandrien, dem neuen, auf Initiative Alexander des Grossen (356 − 323 v.u.Z.) erstellten intellektuellen Zentrum, sein epochales, dreizehn Bände umfassendes Werk *Die Elemente*, das die gesamte Mathematik jener Zeit umfasst. Die Elemente haben die Jahrtausende fast in ihrer Gänze überdauert und sind bis heute das nach der Bibel meist verlegte Werk! Euklids Beitrag erschöpfte sich aber nicht nur in der systematischen Wiedergabe der griechischen Mathematik. Der Beweis des Satzes, dass unendlich viele Primzahlen existieren, ist vermutlich euklidschen Ursprungs und bis heute ein wunderbares Beispiel logischer Eleganz. Dieser Beweis ist ein Lehrstück griechischen und mathematischen Denkens und logischen Schlussfolgerns, der an Eleganz seinesgleichen sucht.

Übung 5 (unendlich viele Primzahlen)**.** Beweise, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

[1] griechischer Mathematiker um 350 v.u.Z..

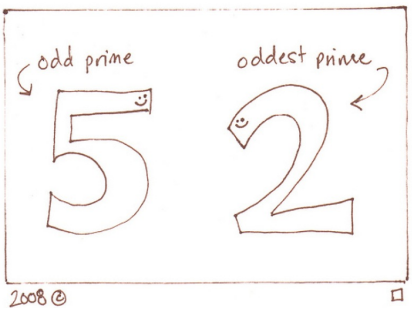


Abbildung 1: Seltsamste Primzahl

1.5.4. Die Goldbach'sche Vermutung

Die Faszination, die den Primzahlen innewohnt, ist unter anderem auch der Leichtigkeit zuzuschreiben, mit der einfache Aussagen über sie gemacht werden können, ohne zu wissen, ob sie wahr sind oder nicht. Ein Beispiel dafür ist die Goldbach'sche Vermutung, wonach jede gerade, natürliche Zahl grösser als 3 die Summe zweier Primzahlen ist. Also zum Beispiel

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5$$

etc. Manche geraden Zahlen lassen sich sogar auf mehrere Arten als Summe zweier Primzahlen darstellen. Beispielsweise ist

$$20 = 7 + 13 = 3 + 17$$

Es wird vermutet, dass die Goldbach-Vermutung wahr ist, aber bewiesen wurde sie bis heute nicht.
Genau so wenig ist die Frage beantwortet, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt oder nicht. Man vermutet es zwar, aber ein Beweis steht noch aus.

1.5.5. Der grosse Satz von Fermat

Ein vor rund 20 Jahren gelöstes zahlentheoretisches Problem, das sogar in der Presse seinen Niederschlag fand, ist der grosse Satz von Fermat.

Satz 1.3: Grosser Fermat'scher Satz

Für ganzzahlige positive Werte von x, y, z und $n > 2$ ist die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

nie erfüllbar.

FERMAT[2] selbst hinterliess auf dem Blattrand einer Manuskriptseite die Notiz:

> Wenn n eine Zahl grösser als 2 bedeutet, so gibt es keine positiven ganzen Zahlen a, b und c, so dass $a^n + b^n = c^n$ wäre. Ich habe dafür einen wahrhaft wundervollen Beweis gefunden, der aber auf diesem Rande keinen Platz findet!

Angesichts der Komplexität des kürzlich gefundenen Beweises (er umfasst mehr als 200 Seiten und greift auf tief schürfende mathematische Sätze zurück) ist aber — bei allem Respekt gegenüber dem ausserordentlichen Talent Fermats — eine gewisse Skepsis an dessen „Randnotiz“ angebracht.

Bemerkung. Für $n = 2$ entspricht die oben genannte Gleichung dem Satz des Pythagoras, und der hat natürlich Lösungen. Man spricht in diesem Zusammenhang von PYTHAGORÄISCHEN ZAHLENTRIPELN.

1.5.6. Fermat'sche Zahlen

Der Zahlentheoretiker FERMAT irrte hingegen sicher als er behauptete, dass jede Zahl der Form

$$2^a + 1$$

dann eine Primzahl darstelle, wenn a selbst eine Zweierpotenz sei. Und in der Tat, für $a = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ und 2^4 ergeben sich entsprechend die Primzahlen $3, 5, 17, 257$ und 65537. Dass die Formel aber bereits für $a = 2^5$ eine Zahl liefert, die nicht mehr prim ist, war Fermat merkwürdigerweise entgangen. Der grosse Basler Mathematiker LEONARD EULER[3] deckte den Fehler 1739 auf, indem er zeigen konnte, dass

$$2^{32} + 1 = 4294967297$$

durch 641 teilbar ist. Dass die von Fermat kreierten Zahlen

$$2^{2^n} + 1$$

mit $n \in \mathbb{N}$, die so genannten FERMAT'SCHEN ZAHLEN, dennoch interessante Eigenschaften und verblüffende Zusammenhänge — unter anderem zur Geometrie — aufweisen, stellte ein anderer grosser Mathematiker fest. Im Jahre 1796 befasste sich CARL FRIEDRICH GAUSS[4], damals 19-jährig, mit dem alten, in die klassische Zeit Euklids zurückführenden Problem der Konstruktion der regulären Polygone mit Zirkel und Lineal. In seinem berühmten Werk *disquisitiones arithmeticae* legte Gauss die allgemeine Lösung der Aufgabe dar. Bis anhin verstand man lediglich die regulären 3-, 4- und 5-Ecke zu konstruieren. Da sich die Winkelhalbierung mit Zirkel und Lineal durchführen lässt, so waren auch das 2^n-Eck, das $(3 \cdot 2^n)$-Eck und das $(5 \cdot 2^n)$-Eck konstruierbar. Damit

[2] französischer Mathematiker (1601–1665)
[3] schweizer Mathematiker (1707–1783)
[4] deutscher Mathematiker (1777–1855)

hatte es aber während mehr als 2000 Jahren sein Bewenden gehabt. Der junge Gauss vermochte nun als erster zu zeigen, dass alle regulären Vielecke, deren Seitenzahl p prim ist, dann und nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, wenn p von der Form $2^{2^n}+1$ ist. Dieses p gehört also, wie bereits erwähnt, zu den Fermat'schen Zahlen. Das 17-Eck soll heute seinen Grabstein zieren.

1.5.7. Mersenne'sche Zahlen

Die grösste heute bekannte Primzahl ist die Mersenne'sche Zahl

$$2^{43112609}-1$$

(Stand August 09). Eine Zahl, die aus über 12.9 Millionen Ziffern besteht! MERSENNE[5] vermutete, dass unter den Zahlen 2^p-1 mit p prim, den so genannten MERSENNE'SCHEN ZAHLEN, vermehrt Primzahlen auftreten würden. In der Tat finden sich unter den ersten sieben Mersenne'schen Zahlen sechs Primzahlen. Doch seine Hypothese stellte sich als Trugschluss heraus. Man weiss nicht einmal, ob es sogar nur endlich viele Mersenne'sche Primzahlen gibt. Die Zahl $2^{43112609}-1$, die etwa 2 500 000-ste Mersenne'sche Zahl, ist nämlich erst die (vermutlich) 47-ste Mersenne'sche Primzahl.

Übung 6 (grösste bekannte Primzahl)**.** Mache dir ein Bild von der Grösse dieser Zahl, $2^{43112609}-1$, indem du die Dicke des Stapels A4-Blätter abschätzt, auf denen diese Zahl geschrieben stünde.

1.5.8. Ausblick

Die Suche nach schnellen Verfahren zum Auffinden von Primzahlen dauert bis zum heutigen Tag an; und das nicht nur auf Grund des Reizes, den sie seit jeher auf die Menschen ausgeübt haben. Über zweitausend Jahre lang wusste man keinen praktischen Nutzen aus dem Wissen über die Primzahlen zu ziehen. Dies änderte sich allerdings schlagartig mit dem Aufkommen des elektronischen Datenverkehrs, als Primzahlen zum Verschlüsseln von Informationen eine zentrale Rolle zu spielen begannen (Kryptographie).
Die Güte einer Geheimsprache besteht einerseits darin, Botschaften ohne grossen Aufwand in Geheimschrift umschreiben (chiffrieren) zu können, andererseits darin, die Schwierigkeit für Uneingeweihte eine geheime Botschaft zu knacken (dechiffrieren), ins Unermessliche zu steigern. Solch asymmetrische Eigenschaften trifft man beim Rechnen mit Primzahlen an:

> Es ist relativ einfach, das Produkt von zwei grossen Primzahlen zu berechnen,
> aber nahezu unmöglich, dieses Produkt wieder in seine Faktoren zu zerlegen.

Das Verschlüsseln einer Botschaft läuft heute tatsächlich auf die Multiplikation zweier sehr grosser Primzahlen hinaus, während das Entschlüsseln im Wesentlichen aus dem Faktorisieren dieses Produkts besteht (ohne Kenntnis einer der beiden Faktoren ein praktisch aussichtsloses Unterfangen).

[5] französischer Mathematiker (1588–1648)

Bis heute hat man noch keinen schnellen Algorithmus zur Faktorisierung eines Produkts zweier grosser Zahlen gefunden. Ja, man weiss sogar nicht einmal, ob ein solcher überhaupt existiert. Gelänge es aber, einen Algorithmus zu finden, der eine schnelle Faktorzerlegung einer Zahl ermöglichen würde, so wöre unsere auf Diskretion und Geheimhaltung bedachte Kommunikationsgesellschaft nicht mehr in ihrer aktuellen Form denkbar. Denn alle Systeme, die auf Transaktionen sensibler Daten angewiesen sind — wie Kreditkarten-, Telekommunikations- und nachrichtendienstliche System —, werden durch Primzahlprodukte geschützt.

1.6. Spielereien

Übung 7 (Primzahlformeln)**.** Wir suchen eine Formel für Primzahlen. Was taugen die folgenden Formeln? Dabei steht p für eine Primzahl und n für eine natürliche Zahl.

$z = p^2 + 1$	$z = p^2 + 2$
$z = 2^p - 1$	$z = 2^p + 1$
$z = n^2 - 79n + 1601$	$z = p^2 + 4$
$z = p^2 + 3$	$z = n^2 - n + 41$

Übung 8 (Goldbach)**.** Wähle 10 gerade Zahlen zwischen 3 und 1000. Versuche jeder dieser Zahlen als Summe von zwei Primzahlen darzustellen.
Die berühmte Goldbach'sche Vermutung, formuliert 1742 in einem Brief an Leonhard Euler:

> Jede gerade Zahl grösser als zwei lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. Einerseits ist jede zweite Zahl gerade, andererseits sind die Primzahlen immer dünner gesät, das heisst, der durchschnittliche Abstand zwischen zwei benachbarten Primzahlen wird immer grösser; trotzdem soll jede zweite Zahl Summe von nur zwei Primzahlen sein? Diese Vermutung könnte sich eines Tages als wahr oder falsch erweisen — oder als unentscheidbar.
> (aus Baseux, Pierre: Die Welt als Roulette, rororo 9707, 1995)

Übung 9 (Zwillinge und Drillinge)**.** Sind p und $p + 2$ beides Primzahlen, so sprechen wir von Primzahlzwillingen.

(a) Suche einige Primzahlzwillinge. Wie viele gibt es?

(b) Zeige, dass die zwischen Primzahlzwillingen eingeklemmte Zahl sicher durch 6 teilbar ist.

(c) Suche Primzahldrillinge p, $p + 2$, $p + 4$. Wie viele gibt es?

Übung 10 (Primzahllücken)**.** Es gibt Primzahllücken beliebiger Grösse.

(a) Betrachte die Zahl

$$z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$$

und deren Nachfolger $6! + 1$, $6! + 2$, $6! + 3$,.... Welche Nachfolger von z sind keine Primzahlen?

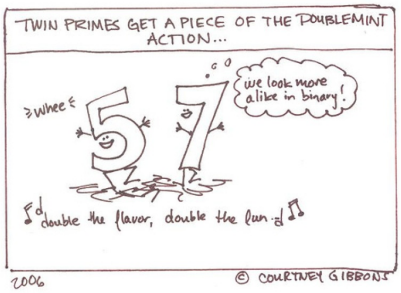


Abbildung 2: Primzahlzwillinge

(b) Betrachte die Zahl 50! und 10001! mit deren Nachfolgern. Welche Nachfolger sind sicher keine Primzahlen?

(c) $n! + 1$ kann prim sein oder nicht. Suche Beispiele für beide Fälle.

Übung 11 (Zickade)**.** Überleben per Primzahl (*Die Zeit*, 2.Mai 2002):

> Eine Zikade in Amerika vermehrt sich alle 13 oder 17 Jahre. Dann verkrümelt sie sich als Larve wieder exakt 13 oder 17 Jahre unter die Erde. Forscher des Max-Planck-Instituts für molekulare Physiologie in Dortmund haben das Rätsel gelöst. Sie entwickelten ein Jäger-Beute-Modell, in dem nur Lebenszyklen, deren Länge eine Primzahl von Jahren ist, stabil sind. Der Vorteil für die Zikade: Sie trifft selten auf Fressfeinde, die beispielsweise alle zwei, drei, vier oder sechs Jahre erscheinen.

Übung 12 (teilen)**.** Eine dreistellige Zahl wird zweimal hintereinander geschrieben, so dass eine sechsstellige Zahl entsteht. Diese Zahl wird anschliessend der Reihe nach durch 7, durch 11 und durch 13 dividiert.

Übung 13 (Vierfache)**.** Zeige, dass die Summe von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen niemals ein Vielfaches von 4 sein kann.

Übung 14 (Vierersumme)**.** Vier aufeinander folgende natürliche Zahlen sollen miteinander multipliziert und zum Produkt 1 addiert werden.

(a) Stelle einige konkrete Berechnungen an.

(b) Stelle eine Vermutung auf.

(c) Versuche, diese Vermutung zu beweisen.

Übung 15 (Quadratzahlen)**.** Suche Quadratzahlen, welche bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen. Solltest du keine derartige Zahl finden, so versuche zu beweisen, dass es keine Quadratzahl gibt, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lässt.

Übung 16 (Ziffer)**.** Auf welche Ziffer endet der Wert der Zahl

$$z = 17^4 + 12^8$$

Übung 17 (Fünfeckzahlen)**.** Dreieckszahlen können an regulären Dreiecken veranschaulicht werden, Quadratzahlen an Quadraten und Fünfeckzahlen an regulären Fünfecken.

(a) Bestimme die Folge dieser Fünfeckzahlen. Wie lautet die n-te Fünfeckzahl F_n?

(b) Stimmt die Aussage:

$$D_n + F_n = Q_n$$

Übung 18 (vollkommene Zahlen)**.** Eine VOLLKOMMENE ZAHL ist eine Zahl, deren echte Teiler summiert plus 1 der Zahl selbst entspricht. Die kleinste dieser Zahlen ist 6. Bis heute kennt man erst 30 vollkommene Zahlen

(a) Welches ist die nächst grössere?

(b) Welche der folgenden Zahlen sind vollkommen?

100, 252, 496, 2310, 4568, 7007, 8128, 11111, 142857.

(c) Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Mersenne'schen Primzahlen und den vollkommenen Zahlen. Stelle eine Vermutung auf.

(d) Finde weitere Eigenschaften dieser Zahlen?

Übung 19 (Erdös)**.** Erdös, geboren 1913, bewies als 17-jähriger, dass zwischen den Zahlen n und $2n$ immer mindestens eine Primzahl liegt. (Somit ist auch gezeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.)

2. Die ganzen Zahlen

2.1. Die negativen Zahlen

Ein Biologe, ein Physiker und ein Mathematiker beobachten einen Lift, in den zwei Personen einsteigen. Nach einiger Zeit steigen die beiden und noch eine weitere Person aus dem Lift wieder aus. Die Wissenschaftler machen dazu verschiedene Aussagen:

Der Biologe: Natürliche Vermehrung!

Der Physiker: Messfehler!

Der Mathematiker: Wenn jetzt jemand in den Lift steigt, dann ist er wieder leer.

2.1.1. Historisches

In unserer westlichen, von der griechischen Denkweise durchdrungenen Welt bestand lange Zeit kein Anlass, die negativen Zahlen einzuführen. Solche Zahlen können in der Natur nicht gefunden werden. Zahlen dienten bis ins späte Mittelalter in Europa lediglich dazu, Abmessungen (Längen, Flächen- und Volumeninhalte) oder eine Anzahl von Gegenständen anzugeben.
Die Verwendung von negativen Zahlen ist zuerst in Indien nachweisbar (um 700 n.u.Z.) und lief mit der Entwicklung des neuen, indisch-arabischen Zahlsystems einher, das dem in Europa verwendeten römischen weit überlegen war. Der indische Mathematiker und Astronom Brahmagupta (598-630) erkannte als einer der ersten das Wechselspiel von Zahlzeichen, indem er Regeln für das Teilen von Zahlen aufstellte: „Positiv geteilt durch positiv oder negativ geteilt durch negativ gibt positiv. Positiv geteilt durch negativ oder negativ geteilt durch positiv gibt negativ.“Das könnte als Ursprung dessen bezeichnet werden, was wir heute *Algebra* nennen.
Der griechische Mathematiker Diophant (zwischen 100 v.u.Z. und 350 n.u.Z.) untersuchte zwar in seinem Werk *Arithmetica* die Lösungen von Gleichungen. Eine Gleichung der Art

$$4x + 20 = 0$$

bezeichnete er aber als absurd. Diese Ansicht war in Europa noch lange Zeit verbreitet und machte nur langsam der Bereitschaft Platz, negative Zahlen wenigstens als Hilfsmittel für Zwischenresultate zu tolerieren. Als Lösungen wurden negative Zahlen nicht anerkannt oder als „fingierte“ Lösung bezeichnet: Negative Lösungen von Gleichungen wurden als bedeutungslos angeschaut.
Erst Fibonacci (1180-1241) erlaubte in seiner Finanzmathematik negative Zahlen und interpretierte sie korrekterweise als Schulden. Den Durchbruch erlebten die negativen

Zahlen aber erst mit der systematischen Behandlung von Gleichungen im 17. Jahrhundert!

2.2. Die Geschichte der Null

Ein ähnlich schwieriger Stand wie die negativen Zahlen hatte die Zahl Null, die in Europa auf Ablehnung und Unverständnis stiess: Null wurde mit nichts gleichgesetzt.

Nachfolgend ist ein Artikel von Herbert Cerutti abgedruckt, der im Februar 2002 im NZZ-Folio *Total Digital* erschienen ist.

2.3. Die schwere Geburt der Null

Die Null wurde lange nach den anderen Zahlen erfunden. Die Römer kannten sie überhaupt nicht, die Babylonier konnten nicht mit ihr umgehen, erst die Inder erkannten das Potential dieser bizarren Zahl, die alleine nichts ist, aber anderen zur Grösse verhelfen kann.

Die Hälfte der elektronischen Datenverarbeitung und damit ein grosser Teil unseres modernen Lebens besteht aus Nullen. Das Darstellen des Alphabets und der Ziffern als Kombinationen von 0 und 1 hat sich für den geistig beschränkten Computer als am besten erwiesen: Das simple Ja oder Nein des binären Zahlensystems kann die Maschine ohne viel Werweissen verdauen. Dass dabei selbst ein kurzer Text zum fast endlosen Wurm aus Nullen und Einsen wird, kompensiert der Rechner mit Arbeitswut.
Dem Laien ist die in der Maschinensprache verborgene digitale Omnipräsenz der Null nicht bewusst. Die Null begegnet uns im Alltag jedoch auch unverhüllt. Da kostet eine Eigentumswohnung 630 000 Franken; für 7 500 000 Euro wird in Brüssel ein griechisches Strassenprojekt gesprochen. Ein Kraftwerk leistet 1 200 000 000 Watt; das im Elektronenmikroskop sichtbar gemachte Virus ist 0,000000025 Meter lang. Durch Eindampfen von beispielsweise neun Nullen zu 'Giga' oder 'Nano' lässt sich das Gewusel immerhin lesbarer machen.

Dass ein Übermass an Nullen schaden kann, zeigt der in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts in Deutschland diagnostizierte 'Null-Anfall', eine Krankheit, die während der Hyperinflation auftrat: Die Notwendigkeit, beim Bäcker für ein Brot Hunderte von Milliarden Mark hinzublättern und Briefmarken mit Heerscharen von Nullen aufzukleben, liess etliche Bürger die psychische Balance verlieren. Als häufiges Symptom zeigte sich bei den 'Null-Kranken' ein Zwang, endlose Reihen von Nullen zu schreiben.
Bei massvollem Gebrauch empfinden wir die Null indes als durchaus anständiges Mitglied der Ziffernfamilie. Dabei ist die Null alles andere als gewöhnlich. Schon die einfachsten Rechenoperationen enthüllen ihr bizarres Wesen. Addiert man zu irgendeiner Zahl null oder subtrahiert man sie davon, ändert sich überhaupt nichts. Wehe aber, man multipliziert mit null. Jetzt geht jede noch so stolze Zahl mit einem Schlag zugrunde und wird selber zur Null.
Und wem es einfallen sollte, eine Zahl durch null zu dividieren, wird von der

Mathematikerzunft als verrückt erklärt. Denn das Resultat der Division durch null müsste eine Zahl sein, die, mit null multipliziert, wiederum die Ausgangszahl ergibt. Da aber jede noch so exotische Zahl mit null multipliziert immer nur null und niemals eine von null verschiedene Zahl liefern kann, haben die Mathematiker das Teilen durch null kurzerhand verboten. Ein Gewitzter mag einwenden, man könnte doch wenigstens das Teilen von null durch null erlauben, denn dann gebe es als Lösung beispielsweise die Zahl 23, die mit null multipliziert tatsächlich zur Ausgangszahl Null zurückführt. 'Gut und recht, aber mathematisch trotzdem unanständig', erwidert der Zahlenmann. Denn da jede Zahl mit null multipliziert null ergibt, brächte ein erlaubtes Teilen von null durch null als Lösung den gesamten Zahlenkosmos - eine Beliebigkeit, die für den rechtschaffenen Mathematiker wohl noch schlimmer ist als das Fehlen einer Lösung.
Die Null kann also als Rechenpartner wirkungslos wie auch zerstörerisch sein und Unmögliches oder Beliebiges hervorbringen. Zur Venus mit fast grenzenloser Fruchtbarkeit wird das leere Rund, wenn man es ans Ende einer Zahl hängt. Aus 37 wird 370 und bald schon 370 000 000 000. Die Eigenschaft, an und für sich zwar wertlos zu sein, durch das Auftauchen an einem bestimmten Platz aber aus einer bescheidenen Zahl eine respektable Grösse und sogar einen Giganten zu machen, ist die wohl grösste Tugend der Null.
So selbstverständlich solcher rechnerische Nutzen uns heute erscheinen mag - der Weg der Null in die Welt war alles andere als leicht. Nicht nur bereitete ein Rechnen mit dem 'Nichts' philosophische Sorgen, das wechselhafte Gesicht der Null weckte mancherorts Misstrauen. So verlangt auch noch im dritten Jahrtausend nach Christus meine Bank, dass ich die 5030 Franken auf dem Check zusätzlich als 'fünftausendunddreissig' ausschreibe.

Eine Vorläuferin der Null schufen die babylonischen Mathematiker. Hier kannte man schon zu Beginn des 2. Jahrtausends v. Chr. eine Zahlenschrift aus Ziffern, deren Wert von der Position innerhalb der dargestellten Zahl abhing. Eine Konvention, die wir auch aus unserm Zehnersystem kennen, wo 324 selbstverständlich 3 Hunderter, 2 Zehner und 4 Einer bedeutet - und nicht etwa 3 plus 2 plus 4, also 9. Dass dies keineswegs so sein muss, zeigte die römische Zahlenwelt, die 3 Hunderter mit CCC, 2 Zehner mit XX und 4 Einer mit IV darstellte. Römisch C bedeutete also immer 100, wo immer das Zeichen in der Zahl auftauchte. Für grosse Zahlen wurde das römische Zahlensystem aber schwerfällig. So behalf man sich mit Zusatzzeichen, indem etwa ein waagrechter Strich über der Zahl das Tausendfache und ein unten offener Rahmen um die Zahl herum das Hunderttausendfache bedeuteten.
Die Babylonier kamen mit lediglich zwei Ziffern aus: Ein senkrechter Nagel bedeutete eins; ein nach rechts offener Winkel stand für die Zehn. So kombinierte man bis zu 5 Winkel mit bis zu 9 Nägeln und kam damit auf 59. Wollte man 60 schreiben, schrieb man wieder einen einzigen Nagel und meinte damit einen 'Sechziger'. Und hatte man mit 5 Winkeln und 9 Nägeln 59 Sechziger beisammen, kam für die Zahl 3600 (60 mal 60) wiederum der einzelne Nagel zum Zug. Damit hatten die Babylonier ein Positionssystem erfun-

den, welches den Ziffern je nach Stellung innerhalb der Zahl eine bestimmte Ordnung gab: von rechts her als 1. Ordnung die Einer, als 2. die Sechziger, als 3. Ordnung die Sechzigmalsechziger usw.
Ein solches Sechzigersystem anstelle des uns vertrauten Zehnersystems mag befremden. Aber auch wir pflegen das babylonische Erbe, wenn wir 5 Stunden, 32 Minuten und 19 Sekunden schreiben - insgesamt 19 939 Sekunden, dargestellt als 1., 2. und 3. Ordnung im Sechzigersystem. Und auch beim Winkelmessen geben wir uns babylonisch.
Hatte nun ein babylonischer Händler 62 zu schreiben, ritzte er für 60 einen Nagel in den weichen Ton der Schreibtafel und rechts davon nochmals zwei Nägel für 2. Um zu zeigen, was 60 war und was 2, liess er zwischen dem ersten und den beiden andern Nägeln eine kleine Lücke. Falls er aber 3602 meinte, musste der Abstand noch breiter sein, denn jetzt war deutlich zu machen, dass es keinen Sechziger gab und der erste Nagel ganz links vielmehr 60 mal 60 bedeutete.
Das Missverständnis war programmiert. Zerstreute oder nachlässige Schreiber vergassen oftmals einen Zwischenraum. Und wenn man zwei oder mehrere fehlende Ordnungen mit entsprechend breiter Lücke zu markieren hatte, waren Fehlinterpretationen fast unvermeidlich. Die babylonischen Gelehrten begegneten Unklarheiten mit zusätzlichen Kommentaren oder erkannten die Grössenordnung der Zahl aus dem Kontext heraus. Dies war im Sechzigersystem dank dem relativ grossen Sprung von einer Ordnung zur nächsten einfach. Denn dass der Bauer für das Tempelfest eher 5 als 5 mal 60 Schafe spendierte, war dem klerikalen Buchhalter klar.

Es dauerte fast weitere 2000 Jahre, bis ein unbekannter heller Kopf im Zweistromland auf den Gedanken kam, man könne doch das Fehlen einer Ordnung innerhalb der Zahl mit einem speziellen Zeichen markieren: Auf einer astronomischen Tafel aus Uruk stehen dort, wo zwischen dem 2 mal 3600 der 3. Ordnung und dem 15 der 1. Ordnung eine 2. Ordnung fehlt, als Platzhalter zwei schräg hochgestellte kleine Nägel, ähnlich einem Apostroph. Damit war eindeutig klar, dass 7215 (2 mal 3600 plus 15) und nicht etwa 135 (2 mal 60 plus 15) gemeint war - Babylon hatte die 'Null' erfunden. Die Tafel mit der Urnull gehört heute zur Sammlung des Louvre in Paris.
Nun gab es mit der Null ein Symbol für die Leerstelle, eine Marke für eine fehlende Ordnung innerhalb der Zahl. Diese frühe Null verstanden die Mathematiker aber noch keineswegs als leere Menge oder als 'Zahl Null', mit der sich auch rechnen liesse. So war der babylonische Buchhalter nach wie vor ratlos, wenn er zwei gleich grosse Mengen voneinander zu subtrahieren hatte. Und er notierte: '20 minus 20 . . . du weisst ja.' Ein anderer Schreiber zog sich mit der Bemerkung 'Das Korn ist ausgegangen' aus der Affäre, als bei der Abrechnung einer Getreideverteilung das Ergebnis null geworden war.

Die Null in ihrem ganzen mathematischen Reichtum schenkte Indien der Welt. In Nordindien entwickelten die Gelehrten im dritten Jahrhundert v. Chr. ein Zehnersystem, wobei man für die Ziffern 1 bis 9 abstrakte, graphische Zeichen schuf. Darin sind bereits unsere modernen Grundziffern zu erkennen. Unsere Ziffern heissen deshalb zu Un-

recht 'arabisch'. Die Araber hatten lediglich als Handelspartner der Inder deren Zahlensystem und Algebra kennen- und schätzengelernt und schliesslich ans christliche Abendland weitervermittelt. Allerdings reicherten die Araber das indische Wissen mit zahlreichen eigenen Erkenntnissen an; mit seinen Büchern über die indische Mathematik wurde Mohammed Ibn Musa al-Charismi um 800 n. Chr. zum Wegbereiter moderner Mathematik in Europa. Der Name des Autors wurde als alchoarismi und später algorithmus zum Synonym für das neue Rechnen.

Die Inder schufen für die Ziffern 1 bis 9 verschiedene Serien von Zeichen, je nachdem, ob sie Einer, Zehner, Hunderter, Tausender oder Zehntausender bezeichneten. Damit liessen sich Zahlen bis 99 999 darstellen - für die Astronomen mit ihrer Leidenschaft für grosse Zahlen nicht genug. Die Himmelsgucker griffen deshalb auf das Sanskrit, die Sprache der Gelehrten, zurück. Sie gaben den Grundziffern Namen (1, 2, 3, 4 . . . eka, dvi, tri, catur . . .), ordneten den Zehnerpotenzen ebenfalls Sanskritwörter zu (10, 100, 1000 . . . dasa, sata, sahasra . . .) und erweiterten mit Begriffen für sehr hohe Potenzen (etwa padma für 1 000 000 000) das Zahlensystem fast beliebig.

Eine Zahl wurde nun durch simples Aneinanderreihen der Namen, beginnend mit der kleinsten Ordnung, ausgedrückt: dvi eka sata ca tri sahasra (zwei, einhundert und dreitausend). Im 5. Jahrhundert n. Chr. hatten die indischen Mathematiker die geniale Idee, ihr Zahlensystem stark zu vereinfachen, indem sie fortan auf ein Erwähnen der Potenzen verzichteten. Dies konnte aber nur funktionieren, falls man fehlende Potenzen mit einem eigenen Wort anzeigte. Mit sunya für 'Leere' schufen die Inder ihre mathematische Null. Mit dvi sunya eka tri waren nun zwei Einer, kein Zehner, ein Hunderter und drei Tausender gemeint, also 3102. Damit hatten die Zahlenfreunde am Ganges sowohl ein Positionssystem als auch die Null erfunden - ein Fortschritt, der mit dem Buddhismus und dem Gewürz- und Elfenbeinhandel rasch nach Kambodscha zu den Khmer und bis nach Java getragen wurde.

Die Gelehrten Indiens liebten die Dichtkunst, und Astronomen kleideten ihre Zahlen in prachtvolle Versform. Für das Auswendiglernen nummerischer oder astronomischer Tabellen mag den Gelehrten der Rhythmus von Worten und Versen zwar nützlich gewesen sein, rechnen aber liess sich mit den Gedichten beim besten Willen nicht. So benutzte der indische Händler für das profane mathematische Tun den Abakus, das Rechenbrett. Dabei wurden Kieselsteine oder Marken in Kolonnen angeordnet und entsprechend den vier Grundrechenarten verschoben. War in einer Kolonne der Zehner, Hunderter usw. voll, erfolgte ein Übertrag zur nächsthöheren Kolonne. Dass sich damit auch mit grösseren Zahlen flink rechnen lässt, kann man noch immer im Fernen Osten oder in Russland bewundern.

Die Inder verwendeten als Abakus ein mit feinem Sand bestreutes Brett. Zur Abgrenzung der Kolonnen zog man senkrechte Linien, als Ziffern schrieb man 1 bis 9 in den Sand. Beim Rechnen wischte man dann laufend die alten Ziffern weg und schrieb das neue Ergebnis zwischen die Linien. Und wurde eine der Kolonnen null, blieb der Platz einfach leer.

Zu Beginn des 6. Jahrhunderts n. Chr.

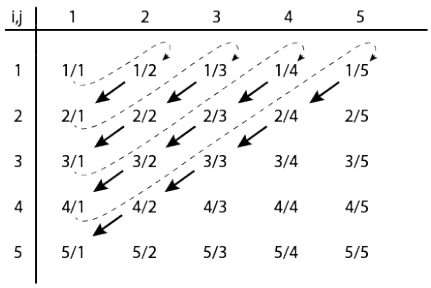
kamen in Nordindien die Kaufleute auf die Idee, das Grundkonzept der Zahlenlyrik der Gelehrten - das Positionssystem und die Null - für das tägliche Geschäft zu nutzen. Man verzichtete beim Abakus auf die Spalten und gab den Ziffern je nach Position innerhalb der Zahlendarstellung die entsprechende Zehnerpotenz. Und wo 'Leere' zu markieren war, schrieb man einen Punkt und später einen kleinen Kreis: die Ziffer Null, wie wir sie noch heute kennen, war geboren. Die Schönheit der neuen Ziffer entzückte wiederum den Poeten, und Biharilal schrieb an eine Frau: 'Der Punkt auf Ihrer Stirn vermehrt Ihre Schönheit zehnfach - wie der Null-Punkt eine Zahl verzehnfacht.'
So weit waren im Prinzip schon die Babylonier gekommen. Aber während man sich in Mesopotamien fortan auf den Gebrauch der Null als Platzhalter innerhalb der Zahlendarstellung beschränkte, erkannten die Inder rasch das enorme Potential der Null als Zahl und leere Menge. Schon 628 n. Chr. präsentierte der Astronom Brahmagupta in seinem mathematischen Werk, wie man die fünf Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung nicht nur auf 'Güter' (positive Zahlen), sondern auch auf 'Schulden' (negative Zahlen) und auf 'das Nichts' (die Zahl Null) anwendet. So wurde, in strenger Logik, etwa eine Schuld, abgezogen vom Nichts, zum Guthaben oder ein Guthaben, abgezogen vom Nichts, zur Schuld. In kosmischer Grosszügigkeit wagte sich Brahmagupta sogar an das Teilen durch Null: 'Dividiert man irgendeine Zahl durch das Nichts, wird Unendlichkeit.' Damit hatte Indien der Welt die Algebra geschenkt. Der Weg für weitere Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs war frei; Naturwissenschaft und Technik hatten eine solide mathematische Basis. Wer nun glaubt, die östliche Weisheit sei in der Alten Welt freudig begrüsst worden, kennt die mittelalterlichen Köpfe nicht. Zwar lernte der französische Mönch Gerbert d'Aurillac um das Jahr 970 auf einem Bildungsurlaub in Andalusien von arabischen Lehrmeistern die indische Zahlenschrift und das entsprechende Rechnen. Beim Versuch aber, die geniale Methode auch im christlichen Europa einzuführen, stiess der Kleriker auf geschlossenen Widerstand. Zwar akzeptierte man auf dem Abakus anstelle der einzelnen Kieselsteine Rechenmarken aus Horn mit den 'arabischen' Ziffern 1 bis 9. Doch von der Null oder einem Rechnen damit wollte man nichts wissen. Erzkonservative setzten auf die neuen Hornplättchen lieber die römischen Ziffern I bis IX, um ja nicht mit den 'teuflischen Zeichen der Araber' in Berührung zu kommen.
Erst der Mathematiker Leonardo Fibonacci aus Pisa, der schon als Schulkind mit seinem handeltreibenden Vater ins muslimische Nordafrika gereist war, überzeugte im 13. Jahrhundert die Kaufleute vom grossen Nutzen der indoarabischen Rechenkunst. Denn mit den negativen Zahlen und der Null liessen sich in den Büchern endlich auch Schulden und Verluste mathematisch sauber aufrechnen. In Florenz allerdings traute man der Sache weiterhin nicht. Per Gesetz wurde 1299 kurzerhand das Verwenden arabischer Zahlen in Verträgen und offiziellen Dokumenten verboten. Die Massnahme hatte immerhin einen handfesten Grund: In der Zeit vor der Erfindung der Druckkunst war die Angst vor Fälschungen gross. So praktisch arabische Ziffern zum Rechnen waren, an die

Zahl liess sich leicht eine weitere Ziffer hängen, oder Fälscher machten hurtig eine 6 oder 9 aus der 0.
Es war ebenfalls Fibonacci, der aus dem arabischen Wort as-sifr (die Leere) den lateinischen Namen zefirum kreierte, woraus sich schliesslich zero entwickelte. Aus as-sifr entstand auch das lateinische cifra und später das französische chiffre und unsere Ziffer, wobei man den ursprünglichen Begriff für null generell auf alle arabischen Ziffern ausdehnte.

So nützlich die indisch-arabische Mathematik für Europas Kaufleute gewesen sein mag, ihrer breiten Einführung setzte sich nicht zuletzt die Kirche entgegen. Denn der Algorithmus, das Schreiben arabischer Ziffern mit der Feder, war selbst vom einfachen Volk erlernbar, während der Umgang mit dem Abakus doch eher dem Berufsrechner, oft ein Geistlicher, vorbehalten war. Während Jahrhunderten tobte zwischen den 'Algoristen' und den 'Abakisten' ein ideologischer Kampf. Den definitiven Durchbruch schaffte die indische Erfindung erst mit der Französischen Revolution, als mit der Verbannung des Abakus aus Schule und Verwaltung endlich der Weg für die 'demokratische' Arithmetik frei wurde.

3. Rationale Zahlen

3.1. Normalbrüche



In der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kann die Division nicht immer ausgeführt werden.

Beispiel 1. Die Rechnung $8 \div 2$ liefert zwar wieder ein Element aus $\mathbb{Z}$ als Lösung (nämlich 4), aber $8 \div 3$ ist in $\mathbb{Z}$ nicht mehr lösbar, denn $\frac{8}{3} = 2.\overline{6} \notin \mathbb{Z}$. Wir suchen deshalb eine möglichst einfache Menge, welche die ganzen Zahlen enthält und welche die Division uneingeschränkt zulässt (ausser der Division durch 0, natürlich!). Dies wird durch die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}$$

gewährleistet. Dabei wird p als Zähler und q als Nenner des *Normalbruchs* $\frac{p}{q}$ bezeichnet.

3.2. Historisches

Im Gegensatz zu den ganzen Zahlen tauchen die Bruchzahlen in der Geschichte schon sehr früh auf. Die ältesten wurden in summerischen und ägyptischen Texten gefunden. Die Ägypter kannten und benutzten sogenannte STAMMBRÜCHE, also Brüche, deren Zähler 1 ist. Diese Stammbrüche wurden durch ein Oval über einer Zahl dargestellt. Alle anderen Brüche wurden als Summe von verschiedenen Stammbrüchen geschrieben.

Übung 20 (Stammbrüche)**.** Stelle den Bruch $\frac{3}{4}$ auf mindestens zwei verschiedene Arten als Summe von *verschiedenen* Stammbrüchen dar.

Die Wiege unserer heutigen Bruchschreibweise liegt — genau wie die der natürlichen Zahlen — in Indien. Sie schrieben Brüche, wie wir heute, mit Zähler und Nenner, aber noch ohne Bruchstrich. Diesen fügten erst die Araber zur besseren Gliederung hinzu. Als sich im Spätmittelalter die indisch-arabische Zahlschrift in Europa durchzusetzen begann, gewann auch die indische Bruchdarstellung und das Rechnen in ihr bei uns an Bedeutung. Den Anstoss zu dieser Entwicklung gab das 1202 erschienene Buch *Liber Abaci* von FIBONACCI. Er lehrte Kaufleuten, Geldwechslern und Buchhaltern das kaufmännische Rechnen mit indisch-arabischen Zahlen und Brüchen.

3.3. Dezimalbrüche

Die Bruchzahl, als NORMALBRUCH dargestellt, passt nicht so recht in das Bild einer Zahl. Sie besteht nämlich aus zwei Zahlen (Zähler und Nenner), was ihre Schreibweise mehrdeutig macht und deshalb zusätzliche Operationen wie Kürzen und Erweitern erfordert. Im Übrigen hat sie nichts mit einer Stellenschreibweise zu tun.

Der holländische Ingenieur Simon Stevin (1548-1620) schlug deshalb vor, auf die Zähler-Nenner-Schreibweise zu verzichten und nur noch sogenannte Dezimalbrüche zuzulassen. Er propagierte damit im Endeffekt ein „Bruchrechnen“ mit ausschliesslich Zehnerpotenzen im Nenner (aus heutiger Sicht, aufgrund des vorherrschenden Zehnersystems naheliegend, damals aber revolutionär), obwohl er die Bruchschreibweise eigentlich nicht mehr benutzte. Seine Schreibweise erwies sich allerdings als zu unhandlich. Er verwendete noch keinen Dezimalpunkt sondern ergänzte die Nachkommaziffern durch entsprechende, eingekreiste Exponenten: 24.538 schrieb Stevin als $24\textcircled{0}5\textcircled{1}3\textcircled{2}8$. Die heutige Dezimalbruchschreibweise mit dem Dezimalpunkt kam schliesslich zu Beginn des 17. Jahrhunderts in Gebrauch.
Um dem Rechnen mit Normalbrüchen ihre Bedeutung und Verankerung in der Gesellschaft zu entziehen, regte Stevin an, sämtliche nicht-dezimalen Münz- und Massbeziehungen durch dezimale zu ersetzen und damit dem Wirrwarr in Europa ein Ende zu setzen. Dieser Vorschlag wurde zuerst in Frankreich im Zuge der Französischen Revolution verwirklicht. Im 19. Jahrhundert folgten die übrigen europäischen Staaten. Im englischsprachigen Raum ist die Umstellung allerdings bis heute noch nicht abgeschlossen.
Dezimalbrüche können in zwei Kategorien eingeteilt werden: Dezimalbrüche

- mit periodischer Dezimalbruchentwicklung (z.B. 1.5 oder $3.5\overline{12}$)
- ohne periodische Dezimalbruchentwicklung (z.B. $0.10100100010\ldots$)

Bemerkung. Dezimalbrüche mit abbrechender Dezimalbruchentwicklung können unter der Menge Dezimalbrüche mit periodischer Dezimalbruchentwicklung subsummiert werden. Zum Beispiel kann der abbrechende Dezimalbruch 1.5 auch als periodischer geschrieben werden, nämlich...

Satz 3.1: Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

eder Normalbruch lässt sich in Form eines periodischen Dezimalbruchs schreiben, und umgekehrt.

Um diesen Satz zu beweisen muss man zwei Dinge tun: Man muss zeigen, dass

- jeder Normalbruch in ein periodischer Dezimalbruch und
- jeder periodische Dezimalbruch in ein Normalbruch umgewandelt werden kann.

Im Folgenden soll das Verfahren zur Umwandlung an ein paar Beispielen erläutert werden.

3.4. Gedanken zu rationalen Zahlen

Übung 21 (abbrechende rationale Zahlen)**.** Wie muss der Nenner eines Bruches beschaffen sein, damit die Dezimalbruchdarstellung abbrechend ist?

Übung 22 (Periodenlänge)**.** Behauptung: Die Periodenlänge eines Bruches

$$\frac{1}{q}$$

wird nie länger als $q - 1$.

(a) Warum ist dem so? Rechne Beispiele durch.

(b) Betrachte die Periodenlängen von $\frac{1}{p}$ (p prim). Kannst du diese Behauptung noch etwas präzisieren?

Übung 23 (ein Siebtel)**.** Die Periode von

$$\frac{1}{7}$$

ist 142857. Multipliziere diese Zahl mit $2, 3, \ldots$.

(a) Was erkennst du? Kannst du dieses Muster erklären?

(b) Bei der Multiplikation mit 7 verschwindet dieses Muster. Warum?

Übung 24 (Kamele)**.** Eine Anekdote:

> Ein alter Araber bestimmte vor seinem Tode, dass sein ältester Sohn die Hälfte, der zweite ein Drittel und der jüngste den neunten Teil seiner Kamele erben sollte. Da er 17 Kamele hinterliess, konnten sich die Söhne nicht einigen und baten einen zufällig auf seinem Kamel daherreitenden Weisen um Rat. Nach kurzem Nachdenken lieh dieser den dreien sein Kamel; jeder konnte sich nun — ohne Kamele zerteilen zu müssen — seinen testamentarisch bestimmten Anteil nehmen, und der Weise ritt auf seinem Kamel weiter, um anderswo Probleme lösen zu helfen.

(a) Erkläre den Sachverhalt mathematisch.

(b) Formuliere ein mögliches Testament für vier Söhne und 17 Kamele.

(c) Stammbrüche sind Brüche, in deren Zähler die 1 steht. Wieviele Möglichkeiten gibt es die 1 additiv in drei Stammbrüche zu zerlegen?

(d) Wie viele Möglichkeiten gibt es die 1 additiv in vier Stammbrüche zu zerlegen? Wie gehst du vor?

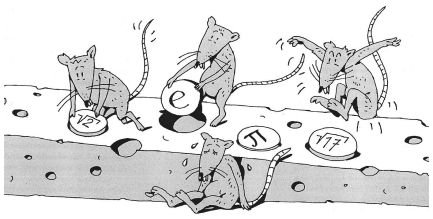


Abbildung 3: irrats

4. Reelle Zahlen

4.1. Historisches

Es scheint, als sei die Zahlengerade durch die „überall dicht“ liegenden rationalen Zahlen lückenlos besetzt, da sich zwischen zwei noch so nahe beieinander liegenden rationalen Zahlen immer noch unendlich viele andere rationale Zahlen befinden. Diese Ansicht ist falsch! Es gibt noch Lücken, sogar mehr als einem lieb ist.

4.2. Die Entdeckung der irrationalen Zahlen

In der goldenen Ära Griechenlands (bis ca. 400 v.u.Z.) galten unter den Gelehrten die natürlichen Zahlen und die Lehre ihrer Verhältnisse als das Mass aller Dinge. Das Numerische war den Pythagoräern ein Symbol für die wahre Bedeutung der Welt. Das ging soweit, dass sie — fast schon sektiererisch — einem mystischen Glauben am Sinn der Zahl selbst anhingen. Die Entdeckung von inkommensurablen Längen bedrohte deshalb ihr Bild einer auf ganzzahligen Verhältnissen beruhenden Welt und riss eine grosse Kluft zwischen die Arithmetik, die diese seltsamen *irrationalen Zahlen* erschaffen konnte, und die Geometrie, die sie nicht messen konnte. Eine dieser Zahlen, die nicht durch ein Verhältnis zweier Zahlen ausgedrückt werden kann, ist $\sqrt{2}$.

Beweis. Indirekter Beweis. □

Diesen Einbruch ihrer auf Harmonie bedachten Denkweise versuchte die Bruderschaft der Pythagoräer mit allen Mitteln geheim zu halten. So soll Hippasos, ein Pythagoras-Schüler, im Meer ertränkt worden sein, weil er mit Aussenstehenden über die Inkommensurabilität gesprochen hatte. Der Verbreitung der Hiobsbotschaft, Zahlen entdeckt zu haben, die der Vorstellung und Philosophie der Griechen zuwider liefen, konnte aber nicht mehr Einhalt geboten werden. Der Niedergang des goldenen Zeitalters Griechenlands (ca. 400 v.u.Z.) ging mit der Verunsicherung einher, die diese neuen irrationalen Zahlen mit sich gebracht hatten.
Die irrationalen Zahlen können, da sie nicht messbar sind, nicht durch einen Bruch, das heisst also auch nicht durch einen (endlichen oder unendlichen periodischen) Dezimalbruch beschrieben werden. Es muss sich also um unendliche nichtperiodische Dezimal-

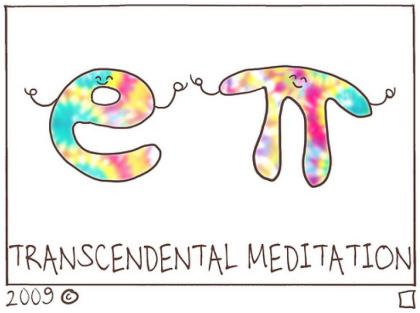


Abbildung 4: e und π sind transzendent.

brüche handeln. Sie bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die Menge der *reellen Zahlen*, $\mathbb{R}$.
Neben den Wurzelzahlen

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.73205\ldots$$

etc. gehören Zahlen wie Pi

$$\pi = 3.14159\ldots$$

die Euler'sche Zahl

$$e = 2.71828\ldots$$

und die Zahl des goldenen Schnitts

$$\phi = 1.61803\ldots$$

zu den berühmtesten irrationalen Zahlen des Altertums.

Bemerkung. Die reellen Zahlen werden manchmal auch in zwei andere Mengen aufgeteilt: In die algebraischen, die als Nullstellen von Polynomen aufgefasst werden können, also im Wesentlichen Wurzelausdrücke, und in die transzendenten Zahlen, das sind alle anderen. Während zu Ersteren die Zahl $\sqrt{2}$ und die des goldenen Schnitts ϕ gehören, sind die Zahlen π und e transzendente Zahlen. Dieser Nachweis ist erst etwa 140 Jahre alt.

5. Dies & Das zu Zahlenmengen

Übung 25 (Klassifizieren)**.** Zu welcher kleinstmöglichen Zahlenmenge ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) gehören die folgenden Zahlen?

(a) -5

(b) $4.\overline{7}$

(c) $-\frac{5}{3}$

(d) $5.155155515555\ldots$

(e) $\sqrt{121}$

(f) $\frac{15}{5}$

(g) 0

(h) $-0.38\overline{27}$

Übung 26 (wahr oder falsch)**.** Sind diese Aussagen wahr oder falsch? Finde Beispiele oder Gegenbeispiele.

(a) Alle Differenzen von zwei natürlichen Zahlen sind natürliche Zahlen.

(b) Es gibt Quotienten von zwei natürlichen Zahlen, die irrational sind.

(c) Alle Quotienten von zwei rationalen Zahlen sind rationale Zahlen.

(d) Alle Wurzeln aus natürlichen Zahlen sind irrationale Zahlen.

(e) Es gibt irrationale Zahlen, deren 1000faches eine rationale Zahl ist.

(f) Das Quadrat einer irrationalen Zahl ist eine irrationale Zahl.

(g) Es gibt Wurzeln aus negativen ganzen Zahlen, die rationale Zahlen sind.

Übung 27 (wahr oder falsch 2)**.** Sind diese Aussagen wahr oder falsch? Begründe.

(a) Es gibt unendlich viele Zahlen zwischen 0.1 und $\frac{1}{9}$.

(b) 1.8 und $\sqrt{1.8}$ liegen beide zwischen 2 und $\sqrt{2}$.

(c) $(1+\sqrt{2})$ ist eine irrationale Zahl, deren Quadrat irrational bleibt.

(d) Es gibt unendlich viele irrationale Zahlen, deren Quadrat irrational bleibt.

(e) Es gibt unendlich viele Zahlen, deren Wurzel grösser als die Zahl selbst ist.

(f) Es gibt unendlich viele Zahlen, deren Wurzel gleich der Zahl selbst ist.

(g) Es gibt unendlich viele Zahlen, deren Wurzel kleiner als die Zahl selbst ist.

Übung 28 ($0.9999\ldots$)**.** Ist die Zahl $0.99999999\cdots = 0.\overline{9}$ gleich 1? Begründe deine Antwort.

Übung 29 (Zahl auf Reise)**.** Eine Zahl geht auf Reisen…

(a) Ergänze die Tabelle. Berechne auch den Term und vereinfache jeweils.

(b) Wähle andere Ausgangszahlen. Überprüfe, ob die Reise immer durch die gleichen Zahlenmengen geht.

(c) Nimm die Reise mit einer beliebigen natürlichen Zahl in Angriff. Die Reise soll möglichst lange innerhalb der natürlichen Zahlen verlaufen.

Vorschrift	Zahl	Zahlenmengen	Term
Denk dir eine Primzahl	7	$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	x
Dividiere durch 4	1.75	$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	$\frac{x}{4}$
Ziehe die Wurzel	1.32...	$\mathbb{R}$	
Addiere 1	2.32...		
Quadriere			
Subtrahiere die Wurzel deiner Anfangszahl			
Verdopple			
Subtrahiere die Hälfte der Anfangszahl			
Ziehe die Wurzel	1.4142...		

Übung 30 (Pie)**.** Eine ganz besondere Zahl ist π — der Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1. Heute sind 1 241 100 000 000 Stellen von π bekannt. Hier sind die ersten paar davon wiedergegeben.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781
64062862089986280348253421170679821480865132823066470938446095505822 31
72535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881 09
75665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610454326 64
82133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153 64
36789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959 19
53092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227 93
81830119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609 43 ...

6. Zahlensysteme

6.1. Erste Spuren von Zahlendarstellungen

Es ist nicht genau bekannt, seit wann die Menschen Zahlen benutzen. Die ersten Darstellungen von Zahlen waren wahrscheinlich Striche. Das älteste bekannte Beispiel ist ein Knochen eines Wolfes, in dem 55 tiefe Kerben eingeritzt sind. Diese Darstellung wird heute noch gerne auf Bierdeckeln oder für einfache Zählaufgaben, beispielsweise beim Jassen, verwendet. Man spricht hier von einem *unären* Zahlensystem, weil alle Zahlen mit nur einem Zeichen (Strich) dargestellt werden. Der Übersicht wegen fasst man häufig fünf Striche zusammen, indem der fünfte Strich quer über die vier Einzelstriche gelegt wird.

Übung 31. Weshalb fasst man just fünf Striche zu einem Bündel zusammen?

6.2. Zahlen in Ägypten (ca. 3000 v. Chr.)

Die Ägypter entwickelten ein eigenes Zahlensystem mit unterschiedlichen Zeichen für die Zahlen $1, 10, 100, 1000, \ldots, 10^6$. Dies ist ein sogenanntes *Additionssystem* zur Basis 10,

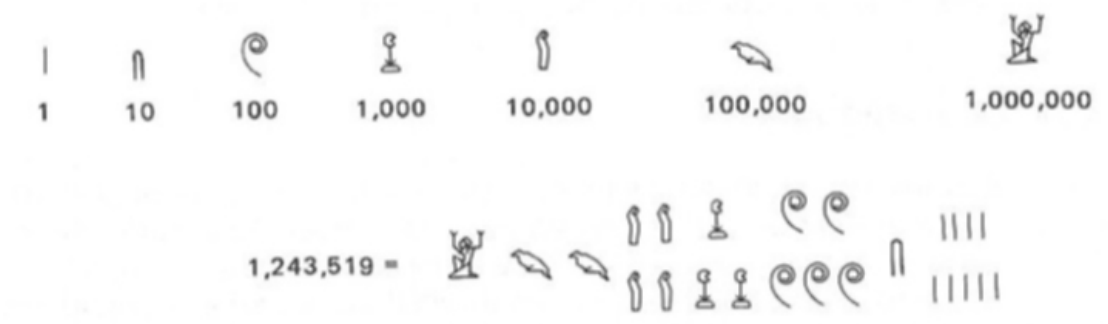


Abbildung 5: Ägyptische Zahlen

wobei jede Zehnerpotenz $(10^0, \ldots, 10^6)$ ein eigenes Zeichen hat und die Zahl die Summe der Werte ihrer Ziffern ist. Übrigens, die Ägypter waren vermutlich auch die Ersten, welche Zeichen für Brüche einführten.

Übung 32. Übersetze folgende Zahlen ins „Ägyptische“:

(a) 2300654 (b) 44629

Übung 33. Finde Zahlen, die in der ägyptischen Schreibweise mehr Zeichen benötigen als in unserer Schreibweise. Finde auch Zahlen, die bei den Ägyptern kürzer geschrieben wurden.

Übung 34. Beschreibe Vor- und Nachteile der ägyptischen Zahlenschreibweise gegenüber unserem heutigen System.

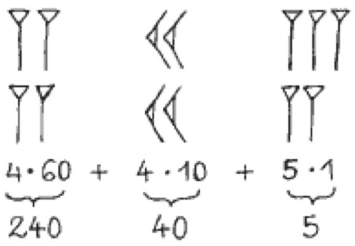
6.3. Zahlen in Babylonien (ca. 2000 v. Chr.)

Abbildung 6: Babylonische Rechentafel und Sternkarte

Die Babylonier verwendeten als eines der ersten Völker ein sogenanntes *Positionssystem*. Der Wert eines Zeichens hängt auch von dessen Position ab. Während wir heute in unserem Dezimalsystem (Basis 10) die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ verwenden, brauchten die Babylonier in ihrem Sechzigersystem 59 Ziffern. Ein Zeichen für die Null, das „Nichts“, gab es damals noch nicht.

Übung 35. Finde eine Darstellung der Zahlzeichen der Babylonier, und schreibe das Wesentliche dieser Darstellung auf, so dass du mit deinen Notizen jede Zahl in Babylonisch schreiben kannst.

Abschliessend noch ein Beispiel, wie diese Zeichen verwendet werden.



Übung 36. Übersetze folgende Zahlen ins „Babylonische“:
(a) 2381 (b) 829

6.4. Zahlen in Indien und Arabien

Die Ziffern, wie wir sie heute verwenden, haben ihren Ursprung in Indien und Arabien. Sie wurden unter anderem durch Kaufleute wie Fibonacci im 13. Jahrhundert nach Europa gebracht, konnten sich aber erst später gegen die römischen Zahlen durchsetzen.
Eine grossartige Leistung des menschlichen Geistes stellt die Erfindung der Zahl Null dar. Für die Menschen war es lange Zeit unvorstellbar, ein Zeichen für „Nichts“ zu gebrauchen. Bei Positionssystemen ist ein Zeichen für Null als Platzhalter aber unentbehrlich. Ohne die Null könnte zum Beispiel 12 mehrere Bedeutungen haben: $12, 102, 120, 1200, \ldots$.

Abbildung 7: Evolution von den indischen bis zu den heutigen arabischen Ziffern

Übung 37. Notiere die römischen Zahlzeichen, und finde Regeln zur Bildung von Zahlen in der römischen Schreibweise.

Übung 38. Schreibe 2022 mit römischen Zahlzeichen. Ferner, werden die Gesetze zur Bildung von Zahlen in römischer Schreibweise eingehalten, so gibt es eine grösste Zahl in dieser Schreibweise. Welche Zahl ist dies?

Übung 39. Stelle ein magisches Quadrat mit römischen Zahlen her.

6.5. Zahlensysteme

Ein Zahlensystem wird zur Darstellung von Zahlen verwendet. Eine Zahl wird dabei nach den Regeln des Zahlensystems als Folge von Ziffern dargestellt. Man unterscheidet im Wesentlichen zwischen Additionssystemen und Stellenwertsystemen (Positionssystemen).

6.5.1. Additionssysteme

In einem Additionssystem wird eine Zahl als Summe der Werte ihrer Ziffern dargestellt. Dabei spielt die Position der einzelnen Ziffern keine Rolle.

Übung 40. Nenne zwei Additionssysteme.

Abbildung 8: Magisches Quadrat am Tor der Familia Sagrada

6.5.2. Positionssysteme

In einem Positionssystem bestimmt die Stelle (Position) den Wert der jeweiligen Ziffer. Die „niederwertigste“ Position steht dabei im Allgemeinen rechts.
Ein Stellenwertsystem hat eine Basis b. Jede Zifferposition hat einen Wert, der einer Potenz der Basis entspricht. Für die k-te Position hat man einen Wert von b^{k-1}.
Die Berechnung des Zahlenwertes erfolgt durch Multiplikation der einzelnen Ziffern z_i mit den zugehörigen Stellenwerten b_i und Summation dieser Produkte:

$$\text{Zahlenwert} = z_n \cdot b^n + \cdots + z_i \cdot b^i + \cdots + z_0 \cdot b^0.$$

Beispiel 2. Unter der Zahl 1257 im üblichen Dezimalsystem (d.h. die Basis ist 10) verstehen wir den Wert

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 1257.$$

Übung 41. Nenne ein Positionssystem ausser das Dezimalsystem.

Bei einigen Naturvölkern sind auch noch Zahlensysteme zu anderen Basen gefunden worden. Vergleichsweise weit verbreitet ist das System zur Basis 20. Bei diesen Völkern werden in der Regel zum Zählen neben den Fingern auch noch die Füsse verwendet.
Mit der Beschränkung des niedrigsten Exponenten auf 0 kann man nur ganze Zahlen darstellen. Lässt man auch negative Exponenten zu, kann man auch rationale Zahlen in einem Stellenwertsystem schreiben, wobei der Übergang vom nichtnegativen zum negativen Exponenten durch ein Trennzeichen markiert wird, beispielsweise ein Komma:

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 121,47$$

Übung 42. Die Idee des Positionssystems mit einer bestimmten Basis wird auch beim Binärsystem (Basis 2) verwendet. Computer stellen Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1 dar und zwar als magnetische Polung oder elektrisches Signal (Nord oder Süd bzw. Plus oder Minus). Die binäre Zahl 1011 entspricht der Dezimalzahl

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11.$$

Stelle die Dezimalzahlen von 1 bis 20 im Binärsystem dar. Beschreibe dein Vorgehen.

Übung 43. Verwandle folgende Binärzahlen in Dezimalzahlen

$$1 \qquad 11 \qquad 111 \qquad 1111 \qquad \ldots$$

und

$$10 \qquad 100 \qquad 1000 \qquad 10000 \qquad \ldots$$

Übung 44. Finde für die Dezimalzahl 34 die Binärschreibweise.

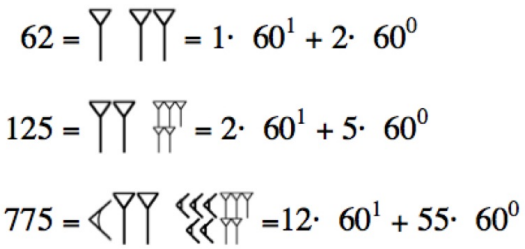
6.6. Das Sexagesimalsystem

6.6.1. Historisches

Von den Kulturvölkern ist mir nur von den Sumerern und Babyloniern bekannt, dass sie ein Stellenwertsystem benutzten. Das Wissen um den Vorteil eines Stellenwertsystems ging danach wieder verloren, so dass weder die Griechen noch die Römer ein solches Zahlensystem verwendeten. In diesem Kontext sei erneut auf die praktischen Vorteile eines Stellenwertsystems hingewiesen, zum Beispiel im kaufmönnischen Bereich. Die Verachtung der Griechen für eine anwendungsorientierte Mathematik mag erklären, warum dieses so erfindungsreiche Volk keine Anstalten machte, sein kompliziertes, alphabetisches System durch ein Stellenwertsystem zu ersetzen. Im Folgenden wollen wir auf das babylonische Zahlensystem eingehen, da es bis heute in unserem Alltag präsent ist.

6.6.2. Das babylonische Zahlensystem

Das babylonische Zahlensystem ist ein Stellenwertsystem zur Basis 60, mit dem beliebig grosse, aber auch beliebig kleine Zahlen systematisch dargestellt werden können. Die Babylonier benutzten eine Keilschrift, die durch das Eindrücken von Griffeln in Tontafeln entstand. Hier die ersten 59 Zahlen. Jede dieser oben aufgeführten Zahlen ist als eine Ziffer zu interpretieren. Erst bei Zahlen über 59 wird naturgemäss die nächste Stelle benutzt. Sie wird, wie auch bei unserem Dezimalsystem, nach links eingerückt.



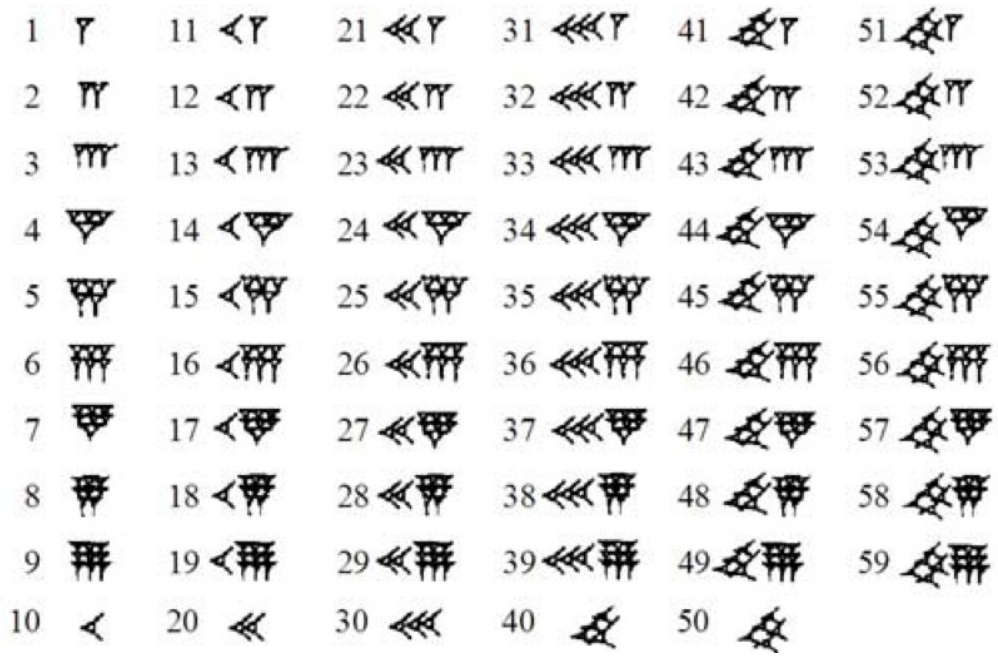
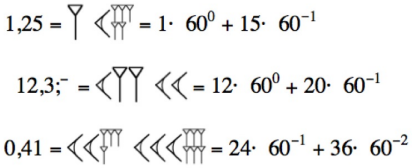


Abbildung 9: Babylonische Zahlen von 1 bis 59

Genauso interessant ist, dass die Babylonier ihr Stellenwertsystem auch für Nachkommazahlen nutzten. Dabei kam ihnen die vielfältige Teilbarkeit der Zahl 60 zugute — dies war vermutlich auch der Grund, weshalb das Sexagesimalsystem überhaupt eingeführt wurde. Ein Zeichen für das „Komma“ war nicht vorhanden, so dass die Zuordnung der Stellen zu den 60-er Potenzen nicht eindeutig war. Welche Position z.B. die 60^0-Stelle hat, musste aus dem Kontext erraten werden.



6.6.3. Ein Beispiel

Eine genaue Untersuchung des Objekts aus Abbildung 10 auf Seite 36 fördert folgendes Schriftbild zu Tage, das in Abbildung 11 auf Seite 36 deutlicher zu erkennen ist.
Es zeigt sich, dass man ein sinnvolles Ergebnis kriegt, wenn man die erste „1“ mit $1 \cdot 60^0$ identifiziert. Wir erhalten so für die erste Zeile

$$1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$$

Abbildung 10: Babylonische Tontafel, 7289 v.Chr.

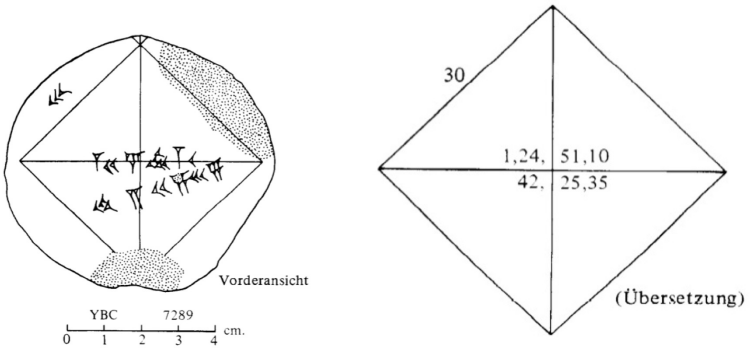


Abbildung 11: Schema und Übersetzung der Zahlen

Übung 45. Welche Zahl wird hier vermutlich beschrieben? Berechnen Sie die restlichen auf der Tafel verteilten Zahlen und interpretieren Sie.

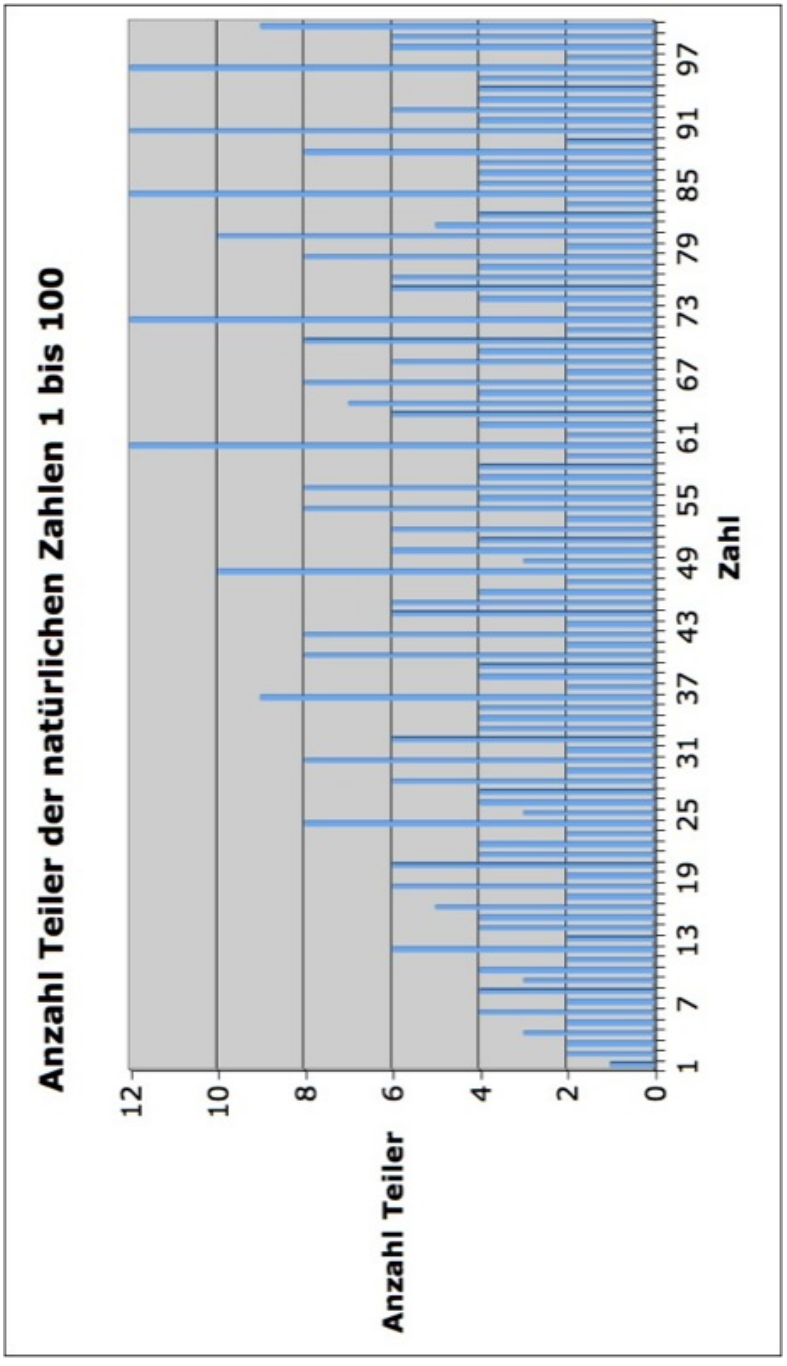


Abbildung 12: Anzahl Teiler der ersten hundert natürlichen Zahlen

6.7. Das Binärsystem

6.7.1. Einleitung

Wie könnte eine Codierung von Zeichen im Computer realisiert werden? Der Computer arbeitet mit elektrischem Strom. Das heisst er kann lediglich die beiden Zustände „Strom an“ und „Strom aus“ unterscheiden. Man codiert 1 für den ersten und 0 für den zweiten Zustand. Die Information, die durch den Strom in einer Leitung codiert ist, heisst *ein Bit* (binary digit). So lassen sich bloss zwei Zeichen codieren. Kombiniert man aber zwei Leitungen, lassen sich nun vier Zustände unterscheiden:

Leitung 1	Leitung 2
0	0
0	1
1	0
1	1

Übung 46. Stelle eine Tabelle für drei Leitungen auf.

Dies reicht natürlich für unsere Zwecke noch nicht.

Frage. Wie viele Leitungen braucht man, um alle Buchstaben des Alphabets codieren zu können?

In der Informatik ist es üblich, acht Leitungen zur Speicherung von Informationen zusammenzufassen. Insgesamt lassen sich damit $2^8 = 256$ verschiedene Zeichen darstellen. Man spricht bei dieser Bündelung von acht Leitungen vom Informationsgehalt ein *Byte*.

Bemerkung. Früher rechnete man noch in Kilobyte, was ca. 1000 Bytes entspricht. Kilo wurde in diesem Zusammenhang nicht wie üblich für den Wert Tausend verwendet, sondern für $2^{10} = 1024 \approx 1000$. Deshalb ist zum Beispiel ein Megabyte = 1024 Kilobyte.

Nun zur nächsten Frage: Wie rechnet der Computer mit diesen Binärzahlen? Dabei gehen wir hier aber nicht auf die Frage ein, wie diese Rechnungen technisch realisiert werden, sondern betrachten nur die algebraischen Aspekte des Rechnens mit Binärzahlen.

6.7.2. Rechnen im Binärsystem

Die Addition von Binärzahlen funktioniert prinzipiell genau so, wie die Addition von Dezimalzahlen.

Übung 47. Addiere schriftlich die Binärzahlen 1001011 und 101011.

Werden mehrere Binärzahlen addiert, kann der Übertrag natürlich auch grösser als 1 werden.

Übung 48. Addiere schriftlich die Binärzahlen 1001011, 101011 und 101011.

Übung 49. Berechne folgende Aufgaben, indem du alle Summanden ins Binärsystem überführst, darin addierst und das Ergebnis schliesslich ins Dezimalsystem zurück übersetzt. Kontrolliere mit der dezimalen Rechnung.

(a) $35 + 17$

(b) $119 + 31$

(c) $63 + 63 + 1$

6.7.3. Negative Zahlen

Schauen wir vierstellige Binärzahlen, sogenannte *Nibbles*, an. Insgesamt können mit einem Nibble 16 verschiedene Zahlen dargestellt werden. Was passiert nun bei fortlaufender Addition von 1 ausgehend von der Zahl 0?

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} \ldots \xrightarrow{+1} 14 \xrightarrow{+1} 15 \xrightarrow{+1} ???$$

Wir können diese Additionskette als Zyklus auffassen, wenn wir die binäre Vierstelligkeit nicht verlassen wollen. Addieren wir nun zur Zahl $1111_{(2)}$ die 1, so erhalten wir $(1)0000_{(2)}$, also die Zahl 0 mit einem Überlauf. Wenn Addieren gleichzusetzen mit um eins im Uhrzeigersinn verschieben ist, dann sollte man Subtrahieren mit der Umkehrung definieren.

Übung 50. Zeichne den Nibbles-Zyklus. Welche Binärzahl repräsentiert $-7_{(10)}$? Addiere $-7_{(10)} + 7_{(10)}$.

Die Frage, die bleibt ist: Welcher Zahl entspricht die $1000_{(2)}$? Es könnte -8 oder $+8$ bedeuten. Man löst dieses Dilemma, indem man einfach ein Vorzeichenbit einführt. Somit können wir also mit einem Nibble die Zahlen -8 bis 7 darstellen.

Übung 51. Welche Zahlen kann man analog mit einer 8-Bit-Darstellung erzeugen?

Übung 52. Suche durch Ausprobieren zur 8-Bit-Zahl 57 die -57. Hint: Notiere die schriftliche Addition mit Ergebnis (1)00000000.

Genau diesen Zusammenhang kann man zur Berechnung der Darstellung einer negativen Zahl im Binärsystem verwenden:

- Ist eine Zahl gegeben, so bildet man zuerst das sogenannte Einerkomplement, indem man einfach jedes der 8 Bit „kippt“.
- Danach addiert man noch 1 zum Einerkomplement.

Beispiel 3. Wir betrachten die Zahl $23 = 00010111_{(2)}$. Durch Kippen erhält man 11101000. 1 addieren bringt $11101001 = -23$.

Übung 53. Berechne mit Hilfe dieser Konstruktion die Binärdarstellungen von

(a) -17 (b) -118 (c) -126

Übung 54. Bestimme den Wert des Bytes $10111101_{(2)}$ im Dezimalsystem.

Wir sind nun in der Lage, die Subtraktion im Binärsystem zu lösen, indem wir sie auf die Addition zurückführen.

$$\begin{aligned} 127 - 19 &= 127 + (-19) \\ &= 0111\,1111_{(2)} + 1110\,1101_{(2)} \\ &= (1)0110\,1100_{(2)} \\ &= 108 \end{aligned}$$

Übung 55. Prüfe durch Rechnung obiges Beispiel. Berechne danach im Binärsystem

(a) $115 - 48$ (c) $98 - 33 - 65$

(b) $77 - 76$ (d) $16 - 29$

6.7.4. Multiplikation

Neben der Addition und Subtraktion von Binärzahlen spielt die Multiplikation von Binärzahlen eine wesentliche Rolle. Wir kennen ein Verfahren in den Dezimalzahlen, welches wir direkt auf das Binärsystem anwenden können. Jedoch liegt dabei der Schwerpunkt auf dem Addieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4. Wir berechnen das Produkt von $0000\,1001_{(2)}$ und $0010\,0111_{(2)}$. Dezimal erhalten wir $9 \cdot 23 = 207$. Binär

Übung 56. Rechne!

Bei der Multiplikation entstehen so bis zu acht Summanden, die anschliessend addiert werden müssen, dagegen ist die Multiplikation sehr einfach. Ferner sieht man nun im Ergebnis zwei Bytes aneinander gereiht. Dabei haben wir Glück und das zweite Byte bleibt mit Nullen gefüllt, so dass unser Resultat wieder in ein Byte hinein passt. Es könnte ja auch sein, dass das vordere Byte benötigt wird, nämlich dann, wenn das Ergebnis grösser als 255 ist. Man spricht beim vorderen Ergebnisbyte vom *High-Byte*, beim hinteren vom *Low-Byte*.

Übung 57. Berechne

(a) $17 \cdot 15$ (b) $7 \cdot 31$ (c) $53 \cdot 37$

Übung 58. Vergleiche das Binärsystem mit dem Hexadezimalsystem. Beschreibe, wie man ohne grossen Rechenaufwand Zahlen im Hexadezimalsystem ins Binärsystem umwandeln kann.

7. Modulo

Modulare Arithmetik — rechnen mit Resten — ist ein nützliches Werkzeug der Zahlentheorie. Insbesondere kann man damit Informationen über Lösungen bestimmter Gleichungen gewinnen oder Unlösbarkeit zeigen.

7.1. Ein erstes Beispiel

Wir wissen, dass die Menge $\mathbb{Z}$ in zwei Klassen aufgespalten werden kann.

- die geraden Zahlen:
$$\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$$
- die ungeraden Zahlen:
$$\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$$

Nun können wir gewisse Verallgemeinerungen über die Gesetzmässigkeiten dieser Zahlen formulieren; in Abhängigkeit ihrer Zugehörigkeit zu einer der beiden Klassen. Beispielsweise ist die Summe zweier gerader Zahlen wieder gerade. Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade. Die Summe zweier ungeraden Zahlen ist gerade. Das Produkt zweier gerader Zahlen ist gerade, usw.

7.2. Motivation

Die modulare Arithmetik lässt uns diese Aussagen elegant formulieren und liefert auch eine formalisierte Sprache, um etwas komplexere Zusammenhänge einzusehen. Im obigen Beispiel ist der sogenannte *Modulus* gleich 2. Der Modulus kann als Anzahl der Klassen betrachtet werden, in die unsere Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ aufgeteilt wird. Ferner entspricht der Modulus auch der Differenz von irgend zwei aufeinander folgenden Zahlen einer Klasse.

Jetzt legen wir für jede der beiden Klassen ein Symbol fest. Wir schreiben 0 für die Klasse aller geraden Zahlen und 1 für die Klasse aller ungeraden Zahlen[6]. Die Bezeichnung erfolgte willkürlich; wir hätten auch 2 und 1, oder -32 und 177 wählen können. 0 und 1 sind aber die üblichen Bezeichnungen. Die Aussage

> Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

wird wie folgt schlank geschrieben:

$$0 + 0 \equiv 0 \mod 2$$

Hier bezeichnet das Symbol $\equiv$ nicht Gleichheit, sondern *Kongruenz*. $\mod 2$ bedeutet, dass unser Modulus 2 ist. Obige Aussage liest man: „Null plus Null ist kongruent Null Modulo Zwei“. Die Aussage, dass die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist, schreibt sich

$$0 + 1 \equiv 1 \mod 2.$$

Diese Beispiele sind trivial. Wie aber schreiben wir, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist?

$$1 + 1 \equiv 0 \mod 2$$

Plötzlich sind die Symbole $\equiv$ und $\mod 2$ sehr wichtig!
Analoge Aussagen erhält man für die Multiplikation:

$$0 \cdot 0 \equiv 0 \mod 2$$
$$0 \cdot 1 \equiv 0 \mod 2$$
$$1 \cdot 1 \equiv 1 \mod 2$$

Damit haben wir ein Zahlensystem mit einer Addition und einer Multiplikation kreiert, das bloss die „Zahlen“ mit Ziffern 0 und 1 enthält.

7.3. Anwendungsbeispiele

Welche Anwendungen hat ein solches Zahlensystem? Nun, wegen den sechs oben formulierten Eigenschaften lässt sich jede Rechnung in $\mathbb{Z}$ übersetzen in $\mathbb{Z}$ Modulo 2; man schreibt kurz $\mathbb{Z}_2$. Das bedeutet, dass jegliche Gleichung mit Addition und Multiplikation, beispielsweise

$$12 \cdot 43 + 65 \cdot 78 = 5586,$$

sich als Kongruenz

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \equiv 0 \mod 2$$

übersichtlich schreiben lässt. Damit sieht man ohne grossen Rechenaufwand, dass das Resultat gerade sein muss.
Sinnvollere Anwendungen der Modulo Arithmetik ergeben sich beim Lösen von Gleichungen.

[6] Präziser müsste man zum Beispiel $\overline{0}$ für die Klasse der geraden Zahlen schreiben, weil 0 ja ein Element der Klasse der geraden Zahlen ist. Falls der Kontext aber klar ist, lässt man die umständlichere Schreibweise fallen.

Beispiel 5. Angenommen wir möchten die Lösungen der Gleichung

$$3a - 3 = 12$$

bestimmen. Natürlich könnten wir diese Gleichung nach a auflösen. Oft ist man aber in der Mathematik bloss daran interessiert, ob eine Gleichung eine Lösung hat; der exakte Wert der Lösung ist häufig irrelevant. Und, falls es eine Lösung gibt, möchte man wissen, ob diese eindeutig ist oder nicht. Betrachten wir die Gleichung Modulo 2 erhalten wir

$$1a + 1 \equiv 0 \mod 2$$

oder

$$a \equiv -1 \equiv 1 \mod 2.$$

Das bedeutet, dass eine Lösung der Gleichung $3a - 3 = 12$ ungerade sein muss.

Bemerkung. Da sich jede Lösung einer ganzzahligen Gleichung auf eine Lösung Modulo 2 reduziert, folgt:

> Gibt es keine Lösung Modulo 2, so gibt es keine Lösung der ganzzahligen Gleichung.

Beispiel 6. Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine Lösung von

$$2x - 3 = 12.$$

Das bedeutet

$$0 \cdot a + 1 \equiv 0 \mod 2$$

also

$$1 \equiv 0 \mod 2.$$

Dies ist ein Widerspruch, weil 0 und 1 verschiedene Zahlen Modulo 2 sind (keine gerade Zahl ist ungerade und umgekehrt). Deshalb hat die Gleichung $2x - 3 = 12$ keine ganzzahlige Lösung.

Beispiel 7. Betrachten wir abschliessend noch das Gleichungssystem

$$6a - 5b = 4 \tag{1}$$
$$2a + 3b = 3 \tag{2}$$

Modulo zwei haben wir

$$0 + 1b \equiv 0 \mod 2 \tag{3}$$
$$0 + 1b \equiv 1 \mod 2 \tag{4}$$

Das bedeutet, dass b sowohl gerade als auch ungerade sein müsste, was natürlich ein Widerspruch in sich ist. Deshalb hat obiges Gleichungssystem keine ganzzahligen Lösungen. Beachten Sie, dass wir für diese Feststellung keine Information über a gebraucht haben.

Wie gesehen kann man mit Modularer Arithmetik oft einfach zeigen, dass eine Gleichung oder ein Gleichungssystem keine Lösung hat. Ohne Modulo hätten wir zuerst alle Lösungen bestimmen müssen und danach schauen, ob es dabei ganzzahlige Lösungen gibt.

7.4. Definition und weitere Beispiele

Selbverständlich kann man auch Modulo m, $m \in \mathbb{N}$, rechnen. Wir definieren

Definition 7.1: Modulo

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heissen *kongruent Modulo* m, falls eine $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $a - b = k \cdot m$. Man schreibt

$$a \equiv b \mod m.$$

Beispiel 8. 5 und 8 sind kongruent Modulo 3, denn es gilt $5 - 8 = -1 \cdot 3$.

Bemerkung. Die Bedingung $a - b = km$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist äquivalent zu m teilt $a - b$.

Wir betrachten ganze Zahlen Modulo 3. Klar ist, dass alle Vielfachen von 3, $3n$, kongruent Modulo 3 sind, da jede Differenz zweier solcher Zahlen durch 3 teilbar ist. Analog sind alle Zahlen der Form $3n+1$ und alle Zahlen der Form $3n+2$ kongruent Modulo 3, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \cdots \equiv -6 \equiv -3 \equiv 0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv 9 \ldots \mod 3 \\ \cdots \equiv -7 \equiv -4 \equiv -1 \equiv 2 \equiv 5 \equiv 8 \ldots \mod 3 \\ \cdots \equiv -8 \equiv -5 \equiv -2 \equiv 1 \equiv 4 \equiv 7 \ldots \mod 3 \end{aligned}$$

Wie steht es mit $m = 1$? Da jede Differenz von zwei Zahlen durch 1 teilbar ist, ist dieser Fall nicht besonders interessant.

7.5. Die Uhr

Ein alltäglicher Fall ist der Modulus 12, und er gibt uns ein leicht verständliches Schema, um Modulare Arithmetik zu verstehen. Man nennt den Fall $m = 12$ auch die „Uhr-Arithmetik“.

Beispiel 9. Wenn es 07:00 Uhr ist, welche Zeit haben wir in 25 Stunden. Da $25 \equiv 1 \mod 12$ können wir einfach 1 zu 7 addieren:

$$7 + 25 \equiv 7 + 1 \equiv 8 \mod 12.$$

Also 08:00 Uhr. Dies ist formal der Vorgang, der sich in unseren Köpfen abspielt, wenn wir obige Frage beantworten. Die 12 Ziffern 1 bis 12 repräsentieren die Uhrzeit (manchmal verwendet man auch $12 = 0$ um zwischen Mittag und Mitternacht zu unterscheiden). Man hat also die Klassen

$$12n, 12n + 1, 12n + 2, \ldots, 12n + 10, 12n + 11$$

Die Sekunden und Minuten auf der Uhr sind auch modular, nämlich Modulo 60.

7.6. Rechenregeln

Die Grundlage für folgende Rechenregeln ($a, b \in \mathbb{Z}$ und $m, n \in \mathbb{N}$) mit Moduln bildet

Satz 7.1: Modulare Aequivalenz

$$a \equiv b \mod m \quad \Leftrightarrow \quad a - b \equiv 0 \mod m \Leftrightarrow: \quad m \,|\, (a - b)$$

Die restlichen Sätze, inklusive die Äquivalenzeigenschaften, folgen unmittelbar.

Satz 7.2: Additon mod

$$a \equiv b \mod m \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + c \mod m$$

Satz 7.3: Multiplikation mod

$$a \equiv b \mod m \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bc \mod m$$

Satz 7.4: Potenz mod

$$a \equiv b \mod m \quad \Rightarrow \quad a^n \equiv b^n \mod m$$

Satz 7.5: Additivität mod

$$a \equiv b \mod m \text{ und } c \equiv d \mod m \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \mod m$$

Satz 7.6: Multiplikativität mod

$$a \equiv b \mod m \text{ und } c \equiv d \mod m \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bd \mod m$$

Satz 7.7: Chinese mod

$$\mathrm{ggT}(m, n) = 1, a \equiv b \mod m \text{ und } a \equiv b \mod n \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \mod mn$$

Satz 7.8: Primzahlprodukt

Ist p eine Primzahl, so gilt

$$ab \equiv 0 \mod p \quad \Rightarrow \quad a \equiv 0 \mod p \text{ oder } b \equiv 0 \mod p$$

Satz 7.9: Kürzungssatz

$$\text{ggT}(a, m) = 1 \text{ und } ab \equiv ac \mod m \quad \Rightarrow \quad b \equiv c \mod m$$

Übung 59 (Modulo)**.** Gib konkrete Beispiele zu den Sätzen.

7.7. Eigenschaften der Kongruenz

Man zeigt einfach, dass für beliebige a, b, c und $m \neq 0$ folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- $a \equiv a \mod m$ (Reflexivität)
- Falls $a \equiv b \mod m$, dann gilt $b \equiv a \mod m$ (Symmetrie)
- Falls $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$, dann $a \equiv c \mod m$ (Transitivität)

Definition 7.2: Äquivalenzrelation

Eine Relation, die obige drei Bedingungen erfüllt, nennt man eine Äquivalenzrelation.
Die Äquivalenzrelation $\mod m$ teilt $\mathbb{Z}$ in m Äquivalenzklassen.

Man schreibt für die Äquivalenzklasse einer Zahl a etwa $[a]$, um zwischen Zahl und Klasse zu unterscheiden.
Mit dieser Notation lässt sich die Addition $\mod m$ schreiben als

$$[a + b] = [a] + [b].$$

Analog gilt

$$[a \cdot b] = [a] \cdot [b].$$

Beweis. Übung. Setze zum Beispiel $a = k_1 m + r_1$ und $b = k_2 m + r_2$ und berechne Summe und Produkt. □

Abbildung 13: The Mod Squad

Übung 60 (GlSys)**.** Zeige, dass das Gleichungssystem

$$11x - 5y = 7 \tag{5}$$
$$9x + 10y = -3 \tag{6}$$

keine ganzzahlige Lösung besitzt.

Übung 61 (GlSys schwieriger)**.** Zeige, dass das Gleichungssystem

$$24x - 5y = 10 \tag{7}$$
$$11x - 9y = 13 \tag{8}$$

keine ganzzahlige Lösung besitzt.

Übung 62 (Pythagoras)**.** Zeige, dass für $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit

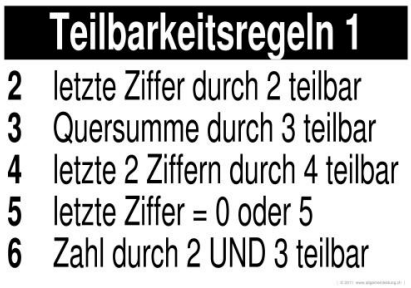
$$x^2 + y^2 = z^2$$

mindestens eine der Zahlen durch 2, mindestens eine durch 3 und mindestens eine durch 5 teilbar ist.

Übung 63 (Kubisch)**.** Zeige, dass für $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit

$$x^3 + y^3 = z^3$$

mindestens eine durch 7 teilbar ist.



8. Teilbarkeit

8.1. Teilbarkeit durch 3

Es gilt

Satz 8.1: Teilbarkeit durch 3

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn es ihre Quersumme ist.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ im Dezimalsystem als

$$n = a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$$

geschrieben, so ist explizit

$$n = a_0 + 10 \cdot a_1 + \dots + 10^r \cdot a_r.$$

Modulo 3 ist jetzt $10 \equiv 1 \mod 3$, also $[10] = [1]$. Damit ist

$$\begin{aligned}[n] &= [a_0 + 10 \cdot a_1 + \dots + 10^r \cdot a_r] \\ &= [a_0] + [10] \cdot [a_1] + \dots + [10]^r \cdot [a_r] \\ &= [a_0] + [a_1] + \dots + [a_r] \\ &= [a_0 + a_1 + \dots + a_r]\end{aligned}$$

das heisst, die Zahl n ist Modulo 3 gleich ihrer Quersumme. Insbesondere ist n genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme dies ist. □

8.2. Teilbarkeit durch 11

Mit der Überlegung aus dem vorigen Beispiel lässt sich rasch eine Bedingung für die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 herleiten. Es ist $10 \equiv -1 \mod 11$, also ist analog zur obigen Rechnung für eine Dezimalzahl

$$n \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^r a_r \mod 11.$$

Auf der rechten Seite steht hier die alternierende Quersumme. Eine Zahl ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn es ihre alternierende Quersumme ist

Beispiel 10. 12375 ist durch 11 teilbar, denn

$$5 - 7 + 3 - 2 + 1 = 0.$$

8.3. Teilbarkeit im Hexadezimalsystem

Übung 64 (Hexa-Teilbarkeit)**.** Überlege dir Teilbarkeitsregeln im Hexadezimalsystem. Betrachte dazu die Teilbarkeit einer Hexadezimalzahl durch 3, 5 und 17.

9. Rechnen Modulo 17

Nimmt man für das Modul eine Primzahl, so hat man eine Reihe von interessanten Besonderheiten. Wir nehmen als Primzahl 17. Man rechnet Modulo 17 wie üblich. So ist beispielsweise $13 + 8 = 21 \equiv 4 \mod 17$ oder $4 - 9 = -5 \equiv 12 \mod 17$. Ferner $5 \cdot 4 = 20 \equiv 3 \mod 17$ und $9 \cdot 2 = 18 \equiv 1 \mod 17$. Die letzte Kongruenz besagt, dass 9 dasselbe ist wie $\frac{1}{2}$ (Modulo 17).

9.1. Potenzen

Wir berechnen illustrativ alle Potenzen von 3 Modulo 17.

Übung 65. Vervollständige folgende Tabelle

n	0	1	2	3	4	5	6	7
3^n	1	3	9	10				

n	8	9	10	11	12	13	14	15
3^n								

Es fällt auf, dass jede Zahl ungleich 0 eine Potenz von 3 ist, also jeder mögliche, nichttriviale Rest taucht genau einmal auf. Ausserdem stellt man fest, dass

$$3^{16} \equiv 3 \cdot 6 = 18 \equiv 1 \mod 17.$$

Die Tatsache, dass alle Zahlen ausser 0 eine Potenz von 3 sind und ausserdem $3^{16} \equiv 1 \mod 17$, hat zur Folge, dass jede Zahl $a \not\equiv 0 \mod 17$ als 16-te Potenz den Wert 1 hat. Denn a ist eine Potenz von 3, also $a = 3^n$ und daher

$$a^{16} = (3^n)^{16} = (3^{16})^n \equiv 1^n = 1 \mod 17$$

Das bedeutet, es gilt auch

$$a^{17} = a, a^{33} = a, a^{49} = a, \ldots$$

und daraus erhält man

$$a = a^{33} = a^{3 \cdot 11} = (a^3)^{11}.$$

Bemerkung. Man zieht die dritte Wurzel, indem man mit 11 potenziert.

Übung 66 (Wurzeln)**.** Ziehe durch Potenzieren

(a) die siebte Wurzel aus $a^7 \mod 17$

(b) die fünfte Wurzel aus $a^5 \mod 17$

9.2. Kryptographie — eine erste Idee

Diese letztgenannten Beziehungen enthalten eine der Grundideen zur Verschlüsselung mittels Zahlentheorie. Benutzt man die 16 Zahlen von 1 bis 16 als (verkürztes) Alphabet, so kann man die Potenzierung mit 3 als Verschlüsselung und die Potenzierung mit 11 als Entschlüsselung benutzen.

Beispiel 11. Es gilt $a^{33} \equiv a \mod 17$. Wir wählen den Buchstaben c, den dritten im Alphabet, und verschlüsseln ihn durch $3^3 \equiv 10 \mod 17$, was einem K Ciphertext entspricht. Wir entschlüsseln durch $10^{11} \equiv 3 \mod 17$ und haben wieder den Klartext c.

Ein besonders angenehmer Aspekt dieses Verfahrens ist, dass man zur Ver- und Entschlüsselung dasselbe Verfahren benutzen (Potenzierung) und dass die Reihenfolge von Ver- und Entschlüsselung vertauscht werden kann. Dies eröffnet interessante Möglichkeiten in der Kryptographie. Die Anwendbarkeit des Verfahrens hängt nun entscheidend davon ab, ob und wie leicht man zum Verschlüsselungsexponenten 3 den Entschlüsselungsexponenten 11 ermitteln kann. Um Analysen von Verschlüsselungsmethoden zu erstellen und Aussagen über die Sicherheit einer Methode machen zu können, muss man sich gut in Modularer Arithmetik auskennen.

Abbildung 14: Barcode EAN 13

10. Barcode

Ein ähnliches System und Prüfverfahren existiert für die wohlbekannten Barcodes zum Beispiel auf Verpackungen.

Bezahlt man in einem Geschäft seine Ware, so wird der Preis in aller Regel nicht per Hand eingegeben. Vielmehr wird der Strichcode, der sich auf jedem Artikel befindet, eingescannt; und selbst wenn dies aufgrund technischer Probleme nicht funktioniert, gibt der Kassierer nicht den Preis, sondern die zum Strichcode gehörende Ziffernfolge ein — üblicherweise aus 13 Ziffern bestehend. Der Preis wird dann aus einer Datenbank ermittelt und in selbiger wird vermerkt, dass das Geschäft nun einen Artikel dieses Codes weniger im Sortiment hat. Wie erwähnt, manchmal funktioniert das Einscannen nicht, und eine solch lange Ziffernfolge abzutippen ist reichlich fehleranfällig. Im Falle eines Fehlers piepst die Kasse und der Kassierer gibt die Zahlenfolge noch mal ein. Wie kommt es, dass ein Fehler beim Eingeben immer auffällt?

Zunächst bedeutet es nur, dass der falsche Code nicht in der Datenbank vorkommt, was auf den ersten Blick nicht zu verwundern scheint, da der Code aus 13 Ziffern besteht. Nun werden diese Strichcodes aber nicht von den Geschäften vergeben, die die Ware verkaufen, sondern vom Hersteller — genauer, der Hersteller lässt sie bei einer zentralen Agentur eintragen.

Der in Europa gängigste Typ des Strichcodes war bis 2008 der EAN–13, was soviel wie European Article Number der Länge 13 bedeutet. Seit 2009 heisst er GTIN für Global Trade Item Number. Vergeben werden sie von mehreren Organisationen, und die ersten zwei bis drei Ziffern des Codes identifizieren im Wesentlichen das Land. Einige der folgenden Ziffern identifizieren der Hersteller, der wiederum weitere Ziffern zur Identifikation seines Produkts zur Verfügung hat. Es kann also sein, dass sich der Code für eine 100 g-Tafel Schokolade sehr wenig von dem für eine 400 g-Tafel unterscheidet — im Gegensatz zum Preis.

Man braucht also eine Idee, wie man Fehler bei der Eingabe mit hoher Wahrscheinlichkeit bemerken kann; und die Idee heisst Redundanz. Man hängt an den Teil des Codes, den man zur Identifikation des Produkts braucht, zusätzliche (redundante) Ziffern an, deren

einziger Sinn es ist, den Code fehlerresistenter zu machen. Dabei sollten möglichst wenig zusätzliche Ziffern eine möglichst hohe Sicherheit bieten. Weshalb und wie man das mit nur einer Ziffer erreichen kann — mit der sogenannten Prüfziffer — hat mit Modulo Arithmetik und Gruppen zu tun. Ähnliche Verfahren werden auch bei Kreditkarten, ISBN-Nummern, Seriennummer von Geldscheinen etc. verwendet.

11. Die alte ISBN-Nummer

11.1. Prüfziffern

Als ein kleines Beispiel beschreiben wir das alte ISBN-System. Dieses ist zwar nicht mehr ganz aktuell, aber für unsere Zwecke instruktiver als die inzwischen verwendete Variante. Jedem Buch ist eine zehnstellige ISBN-Nummer zugeordnet, die zur eindeutigen Identifikation dient. Von diesen 10 Ziffern sind die ersten 9 die eigentliche Information, die zehnte ist eine Prüfziffer. Diese soll eine gewisse Sicherheit zur Vermeidung von Tipp- und Übertragungsfehlern gewährleisten. Bezeichne

$$Y = a_1 a_2 a_3 \dots a_9 a_{10}$$

eine ISBN Nummer. Dabei ist $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ und

$$a_{10} \equiv a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 9a_9 = \sum_{i=1}^{9} i a_i \mod 11.$$

Dies ergibt einen Wert zwischen 0 und 10. Falls man 10 erhält schreibt man ein X.

Beispiel 12. Wir nehmen als Beispiel das Buch

P. Hartmann, *Mathematik für Informatiker*, Vieweg, 2003.

mit der (alten) ISBN-Nummer 3–8348–0096–1.

Frage. Testen Sie, ob die Prüfziffer korrekt ist.

Natürlich kann man nicht erwarten, dass so alle Fehler erkannt werden. Aber, wie Sie gleich sehen werden, schützt das Modul 11 vor den alltäglichen.

11.2. Ziffer fehlerhaft eingetippt

Geschieht der Fehler in der Prüfziffer selbst, dann ist der Fall klar. Wir können also den Fehler zwischen 1 und 9 annehmen und müssen zeigen, dass die Prüfziffer falsch ist. Sei also

$$Y' = a_1 \dots a_i' \dots a_{10}$$

die fehlerhafte ISBN mit dem Fehler an der i-ten Stelle, $1 \leq i \leq 9$. Die Prüfziffer wäre so

$$a_{10}' = \sum_{j \neq i} j a_j + i a_i' \mod 11$$

Wir haben aber a_{10} und es gilt

$$a_{10} - a_{10}' = i a_i - i a_i' = i(a_i - a_i') \mod 11$$

Wegen $a_i \neq a_i'$ ist $a_i - a_i' \neq 0$ und wegen $1 \leq i \leq 9$ auch $i \neq 0$. Daraus folgt mit einer nicht ganz trivialen Überlegung, dass $i(a_i - a_i') \not\equiv 0 \mod 11$. Dabei ist die Wahl des Moduls wichtig. Entscheidend für die letzte Folgerung ist, dass 11 eine Primzahl ist, denn für diese haben wir

Satz 11.1: Primfaktorsatz

ind p prim und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p|ab$, so gilt $p|a$ oder $p|b$.

Wir brauchen die Negation des obigen Satzes: Teilt p weder a noch b, dann teilt p auch nicht ab.

Beweisskizze. Wenn p weder a noch b teilt, dann kommt p nicht in der Primfaktorzerlegung von a und b vor, also auch nicht in der Primzahlzerlegung des Produkts ab. Das heisst p teilt ab nicht. □

Damit ist gezeigt, dass insbesondere für $p = 11$ der letzte Schritt gilt und damit die Prüfziffer der ISBN eine fehlerhafte Ziffer erkennt.

Bemerkung. All dies würde nicht funktionieren, wenn wir anstelle von 11 beispielsweise 10 als Modul verwendet hätten. Denn wegen $10 = 2 \cdot 5$, also $2 \cdot 5 \equiv 0 \mod 10$ würde etwa ein Fehler an der $i = 5$-ten Stelle nicht erkannt, wenn die fehlerhafte Ziffer um 2 von der korrekten Ziffer abweicht. Die Prüfziffer Modulo 10 bliebe unverändert.

Übung 67. Bestätige zuerst für die erste, korrekte ISBN-Nummer, dass die Prüfziffer Modulo 10 gleich 0 ist.

- 3–8348–0096–0
- 3–8346–0096–0

Zeige anschliessend, dass die zweite, vertippte Nummer dieselbe Prüfziffer ergibt und somit der Fehler nicht entdeckt wird. Schliesslich berechne man die Prüfziffer für die falsche ISBN $\mod 11$.

Bemerkung. Wie oben gesehen, ist also die Wahl des Moduls entscheidend. Bei 9 informationstragenden Ziffern braucht man also eine Primzahl grösser oder gleich 10, und 11 ist dafür die kleinstmögliche Wahl.

11.3. Zahlendreher

Die ISBN erkennt nicht nur einzelne fehlerhafte Ziffern, sondern auch den am häufigsten auftauchende Fehlertyp: das Vertauschen zweier aufeinanderfolgender Ziffern. In der Tat erkennt die Prüfziffer sogar Vertauschen von nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Ziffern, was zwar weniger vorkommt, aber für den folgenden Beweis ohne Mehraufwand mit einbezogen werden kann.
Sei

$$Y' = a_0 \dots a_{i-1} a_j a_{i+1} \dots a_{j-1} a_i a_{j+1} \dots a_{10}$$

eine falsche ISBN, die durch Vertauschen der i-ten mit der j-ten Ziffer entstand, $1 \leq i < j \leq 9$. Zwei Fälle lassen wir aussen vor. Erstens, dass die Prüfziffer eine der vertauschten

Ziffern ist (diesen Fall könnte man separat behandeln), und zweitens, dass die vertauschten Ziffern identisch sind, dann hätte ja der Verdreher keine Wirkung. Als Prüfziffer für Y' erhält man so

$$a'_{10} \equiv \sum_{k \neq i,j} k a_k + i a_j + j a_i \mod 11,$$

also

$$\begin{aligned} a_{10} - a'_{10} &= i a_i + j a_j - i a_j - j a_i \\ &= i(a_i - a_j) - j(a_i - a_j) \\ &= (i - j)(a_i - a_j). \end{aligned}$$

Wegen $-8 \leq i - j < 0$ und $0 < |a_i - a_j| \leq 9$ gilt wiederum $i - j \not\equiv 0 \mod 11$ und $a_i - a_j \not\equiv 0 \mod 11$. Daraus folgt analog zur fehlerhaften Ziffer $a_{10} - a'_{10} \not\equiv 0$. Die Prüfziffer ist also fehlerhaft, und der Zahlendreher wird erkannt.

Übung 68 (Zahlendreher)**.** Teste einen Zahlendreher anhand von 3–8348–0069–0.

A. Die Osterformel von Gauss

Die Gauss'sche Osterformel erlaubt die Berechnung des Osterdatums für ein gegebenes Jahr. Das Verfahren gilt allgemein für den Gregorianischen Kalender.

Bemerkung. In seltenen Fällen kann der Algorithmus im Gregorianischen Kalender den 26. April als spätesten Ostersonntag liefern. Die bei der Kalenderreform aufgestellte Zusatzbestimmung, dass der letzte mögliche Ostersonntag der 25. April ist, muss zusätzlich beachtet werden.

Nun zum Verfahren (div steht für eine ganzzahlige Division ohne Nachkommastellen):

$$\begin{aligned} a &= \text{Jahr} \mod 19 \\ b &= \text{Jahr} \mod 4 \\ c &= \text{Jahr} \mod 7 \\ k &= \text{Jahr} \operatorname{div} 100 \\ p &= (8k+13) \operatorname{div} 25 \\ q &= k \operatorname{div} 4 \\ M &= (15+k-p-q) \mod 30 \\ N &= (4+k-q) \mod 7 \\ d &= (19a+M) \mod 30 \\ e &= (2b+4c+6d+N) \mod 7 \end{aligned}$$

Mit den so bestimmten Variablen kann man nun das Osterdatum berechnen:

$$\text{Ostern} = (22+d+e)\text{ter März},$$

wobei der 32. März der 1. April ist etc.

Übung 69 (Gauss'sche Osterformel)**.** Berechne das Datum der nächsten Ostern.

B. Abschliessende Übungen

Übung 70 (Teilbarkeit durch 7)**.** Ist

$$222^{555} + 555^{222}$$

durch 7 teilbar?

Übung 71 (Äquivalenz)**.** Für welche Modul $m \in \mathbb{N}$ gilt $[7] = [1]$?

Übung 72 (variabel)**.** Zeige, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $100a + b$ durch 7 teilbar, dann ist es auch $a + 4b$.

Übung 73 (Gleichungen)**.** Löse die Gleichungen Modulo 7:

(a) $x^2 = 1$ (c) $3x + 5 = 1$

(b) $x^6 = 1$ (d) $2x - 1 = 15$

Übung 74 (natürliche Nachfolger)**.** Zeige, dass unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets genau eine gibt, die durch n teilbar ist.

Übung 75 (prim hoch 2)**.** Zeige, dass für jedes $p > 3$ prim $(p^2 - 1)$ durch 24 teilbar ist.
Hint: Zeige, dass $2, 3$ und 4 in der Faktorzerlegung von $p^2 - 1$ vorkommen.

Abbildungsverzeichnis