Planimetrie

Rund um Ecken

Inhaltsverzeichnis

1. Kontrollfragen zur Planimetrie

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Ist die Aussage richtig, dann versuche sie zu begründen. Ist die Aussage falsch, dann gib ein Gegenbeispiel.

1. Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt
2. Die Summe eines Winkels α und seines Stufenwinkels beträgt 180°.
3. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°
4. Der 90°-Winkel kann konstruiert werden.
5. Der 15°-Winkel kann konstruiert werden.
6. Wird hintereinander an zwei verschiedenen Achsen gespiegelt, so erhält man eine Verschiebung.
7. Eine Punktspiegelung entspricht einer Drehung um 180°.
8. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen.
9. Die Innenwinkelsumme eines n-Ecks berechnet sich nach der Formel
$$2^{n-3} \cdot 180°.$$
10. Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks liegt im Innern des Dreiecks.
11. Halbieren sich die Diagonalen im einem Viereck, und besitzt das Viereck mindestens einen rechten Winkel, so handelt es sich um ein Rechteck.
12. Ein Parallelogramm ist ein spezielles Trapez.
13. Ein Rhombus besitzt gleich viele Symmetrieachsen wie ein gleichseitiges Dreieck.
14. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ($\gamma = 90°$) ist
$$A = \frac{ab}{2}$$
15. Die Mittelsenkrechte einer Sehne eines Kreises geht durch den Mittelpunkt des Kreises.
16. Der Kreisbogen eines Kreises ist proportional zu seinem Zentriwinkel.
17. Der Flächeninhalt eines Kreises ist proportional zu seinem Radius.

18. Die Mittellinie eines Trapezes ABCD mit den parallelen Seiten a und c hat die Länge

$$m = \frac{a + c}{2}$$

19. Die Peripheriewinkel über einer Sehne sind alle gleich gross und halb so gross wie ihr Zentriwinkel.

20. Der Satz des Thales ist eine direkte Folgerung aus der oben genannten Feststellung.

2. Konstruieren

2.1. Konventionen

- Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal durchzuführen.
- Nicht konstruierbare Winkel misst man mit dem Geo-Dreieck (zB. 20°)
- Zu Geometrieaufgaben gehören im Allgemeinen eine Skizze und ein kurzer Konstruktionsbericht.

Übung 21. Konstruiere Dreiecke aus folgenden Angaben:

(a) $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$, $c = 7\,\mathrm{cm}$

(b) $c = 5\,\mathrm{cm}$, $a = 8\,\mathrm{cm}$, $\beta = 40°$

(c) $a = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$

(d) $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 55°$

(e) $a = 7\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 55°$

(f) $a = 9\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 55°$

(g) $a = 5\,\mathrm{cm}$, $b = 7\,\mathrm{cm}$, $h_c = 4\,\mathrm{cm}$

(h) $\alpha = 60°$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $r = 3\,\mathrm{cm}$

(i) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $w_\beta = 4\,\mathrm{cm}$

(j) $s_a = 9\,\mathrm{cm}$, $s_b = 6\,\mathrm{cm}$, $a = 5\,\mathrm{cm}$

(k) $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$, $\rho = 3\,\mathrm{cm}$

(l) $\alpha = 50°$, $w_\alpha = 7\,\mathrm{cm}$, $\rho = 2\,\mathrm{cm}$

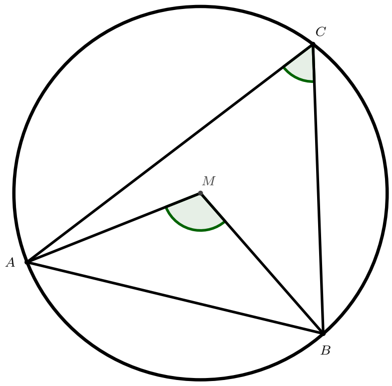


Abbildung 1: Peripheriewinkelsatz

3. Winkel am Kreis

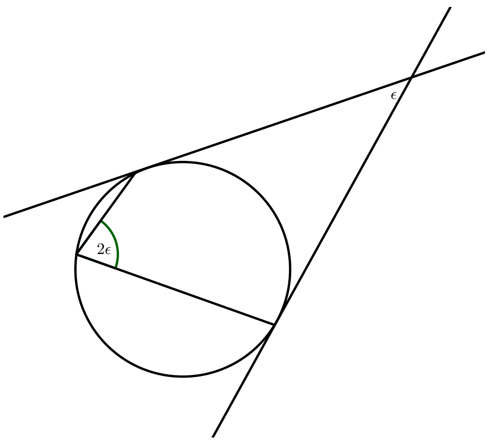
Es gilt bekanntlich folgender

Satz 1. *Der Peripheriewinkel über einer Sehne $\overline{AB}$ ist halb so gross wie der zugehörige Zentriwinkel.*

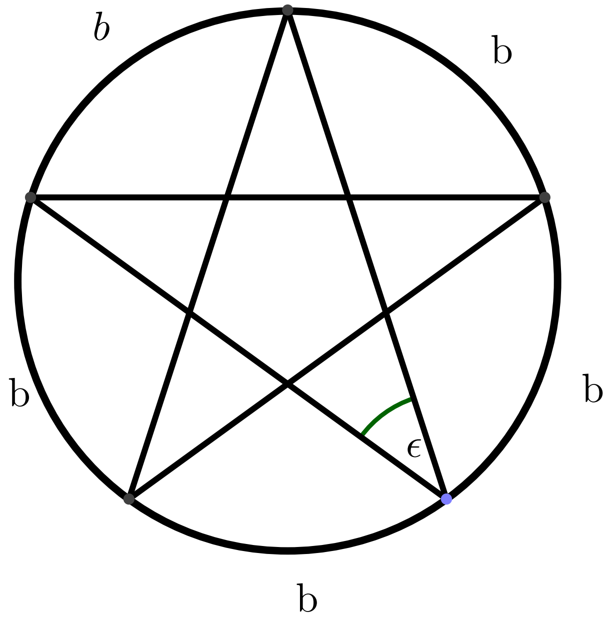
Beweis. Siehe Übungen □

Bemerkung. Aus dem Beweis folgt direkt, dass alle Peripheriewinkel über gleichem Bogen gleich gross sind.

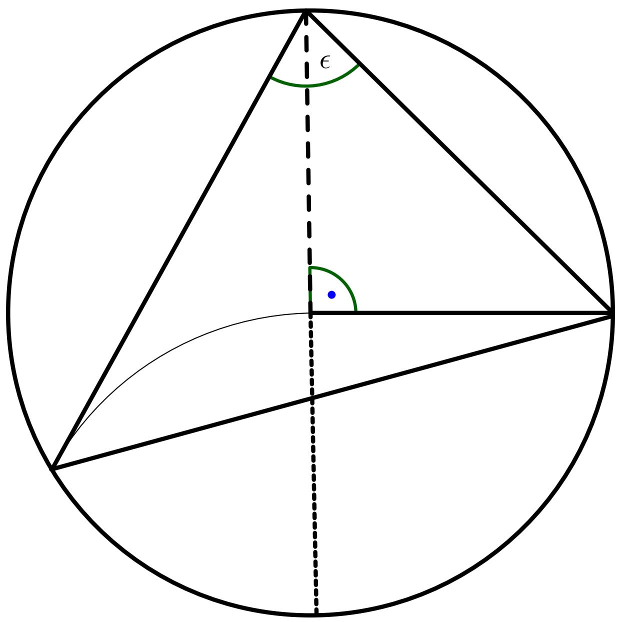
Übung 22. Berechne den Winkel ϵ:



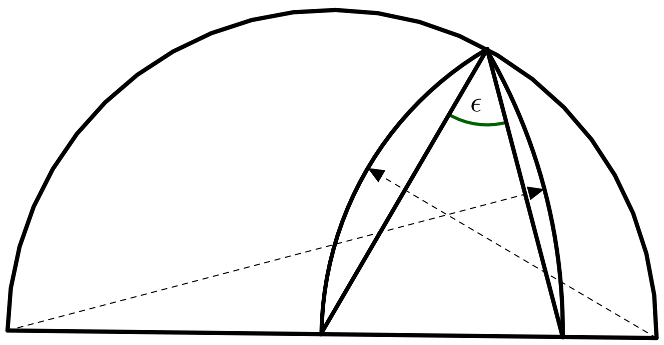
Übung 23. Berechne den Winkel ϵ:



Übung 24. Berechne den Winkel ϵ:



Übung 25. Berechne den Winkel ϵ:



Übung 26. Konstruiere ein Parallelogramm aus den Diagonalen $\overline{AC} = 5$ und $\overline{BD} = 8$ sowie dem Winkel $\beta = 50°$.

A. Auftrag zum Satz von Pythagoras

A.1. Ziel

Jede Schülerin und jeder Schüler der Quarta g muss einen Beweis des Satzes von Pythagoras auf eine A4-Seite darstellen und diesen Beweis in einem 5-minütigen Kurzreferat der Klasse präsentieren.

Viele Beweise verwenden Zeichnungen. Es geht darum, diese Zeichnungen so zu kommentieren, dass der Beweis klar und einsichtig wird. Wichtig ist, dass der Vortragende den Beweis und die Argumente verstanden hat.

A.2. Vorgehen

Auf der Website `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml` sind in englischer Sprache 68 von über 300 Beweisen aufgeführt. Jede Schülerin wählt einen dieser Beweise und klärt bei mir ab, ob dieser Beweis wählbar und noch nicht besetzt ist. Für fast alle diese Beweise gibt es †bersetzungen (siehe Quellen).

A.3. Präsentation

Die Präsentationen finden in den Wochen vom 13. Mai 2011 bis 31.05.2011 statt. Pro Lektion können höchstens zwei Präsentationen stattfinden, in einer Doppellektion höchstens drei.

A.4. Rahmenbedingungen

A.4.1. Abgabetermin

Die A4-Seite muss spätestens 3 Tage vor der Präsentation mir persönlich überreicht werden. Die Seite wird von mir kopiert und den Mitlernenden verteilt werden. Bei rechtzeitiger Bestellung kann eine Folie hergestellt werden.

A.4.2. Zielpublikum

Das Zielpublikum ist Ihre Klasse.

A.5. Beurteilung

A.5.1. Handout

- Ist der Beweis korrekt dargestellt?
- Ist die Sprache korrekt?
- Ist die Argumentation klar und vollständig?
- Wurden die zeitlichen Vorgaben eingehalten?

A.5.2. Präsentation

- Ist die Sprache verständlich?
- Wird das Argument klar?
- Wird bei der Präsentation abgelesen?
- Wird die Zeit eingehalten?

A.6. Nützliche Quellen

- http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
- http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Gut_Ref/Pythago/Pythagoras.html
- http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras
- google: „Pythagoras Beweise“ liefert eine Fülle weiterer hilfreicher Seiten.

Lösungen

1.) f, Parallelen haben keinen Schnittpunkt.

2.) f, 2α.

3.) ✓für Innenwinkelsumme. Zum Beweis verwendet man Scheitel- und Stufenwinkel.

4.) ✓, z.B. Mittelsenkrechte.

5.) ✓, $60°$ Winkel vierteln.

6.) f, z.B. Spiegelung an x- und y-Achse entspricht einer Drehung um $180°$ um den Ursprung.

7.) ✓, die Verbindung Urbild-Bild geht durch das Drehzentrum.

8.) ✓, Seitenverhältnisse sind invariant unter Kongruenz.

9.) f, $(n-2)\cdot 180°$; zum Beweis betrachte man n Teildreiecke und verwendet 3.).

10.) f, betrachte ein spitzwinkliges Dreieck.

11.) ✓, halbieren sich die Diagonalen, dann hat man ein Parallelogramm. Ein rechter Winkel
impliziert nun einen rechten Gegenwinkel, also hat man ein Rechteck.

12.) ✓, klar nach Definition.

13.) f, weniger.

14.) ✓, eine Kathete entspricht der Höhe.

15.) ✓, betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit Ecke Mittelpunkt Kreis und Schenkel Radius.

16.) ✓, $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ ist eine Proportionalität.

17.) f, es ist $A = \pi r^2$.

18.) ✓, umschliesse das Trapez mit einem Rechteck und rechne.

19.) ✓, zerlege das Umkreisdreieck in 3 Teildreiecke und rechne.

20.) ✓, für Zentriwinkel $180°$ folgt Peripheriewinkel $90°$.

22.) $36°$

23.) $36°$

24.) $75°$

25.) $45°$

Abbildungsverzeichnis