Tartaglia und die Gleichung 3. Grades

„Vom Unlösbaren zum Unvorstellbaren"

Jorma Wassmer

Gymnasium Köniz-Lerbermatt

27. Januar 2014

Venedig
16. Jahrhundert

Die Aufforderung zum Duell

Steckbrief

Hiermit fordere ich, Antoniomaria Fior,
den Rechenmeister Niccolò Tartaglia
zum Duell heraus.

Der Herausgeforderte möge sich am
10. Januar 1535 a.D. bei Notar Zambelli
in der Foscarigasse melden.

Niccolò Tartaglia
1500 – 1557

- ursprünglich wohl Niccolò Fontana
- 1512 in Brescia schwer verwundet
  $\rightarrow$ stottert
- arbeitet als Rechenlehrer
- 1534 Umzug nach Venedig

Das Duell

Die Regeln

- 30 Aufgaben für den Kontrahenten
- 1 Monat Zeit
- Sieger ist, wer mehr Aufgaben korrekt lösen kann
- Preis: Ehre, 1 Abendessen für jede nicht gelöste Aufgabe

Mathematik zur Zeit Tartaglias

Euklid (4 v.u.Z.), , ,

Mathematik zur Zeit Tartaglias

Euklid (4 v.u.Z.), Al-Chwarizmi (9. Jh.), ,

Mathematik zur Zeit Tartaglias

Euklid (4 v.u.Z.), Al-Chwarizmi (9. Jh.), Fibonacci (13. Jh.),

Mathematik zur Zeit Tartaglias

Euklid (4 v.u.Z.), Al-Chwarizmi (9. Jh.), Fibonacci (13. Jh.), Pacioli (15. Jh.)

Die Aufgaben von Fior

Auszüge

5. Zwei Männer gründen eine Gesellschaft, wobei die beiden zusammen 900 Dukaten Kapital einbringen müssen, mit der Bedingung, dass der eine die Kubikwurzel des anderen einbringt. Ich frage, wie viel jeder in die besagte Gesellschaft einbringen muss?
12. Ein Juwelier verkauft zwei Schmuckstücke für zweitausend und neunhundert Dukaten, nämlich einen Diamanten und einen Rubin, und der Rubin wurde zur Kubikwurzel des Wertes des Diamanten verkauft. Ich frage, wie viel der Rubin wert war?
22. Es sind zwei gleichseitige Sechsecke, deren Flächen zusammen 27 Ellen ergeben, und das kleinere Sechseck ist die Kubikwurzel des grösseren. Ich frage nach der Fläche des kleineren.

Die Aufgaben von Fior

Algebraische Übersetzung

5.

$$x^3 + x = 900$$

12.

$$x^3 + x = 2900$$

22.

$$x^3 + x = 27$$

Die Aufgaben von Fior

Algebraische Übersetzung

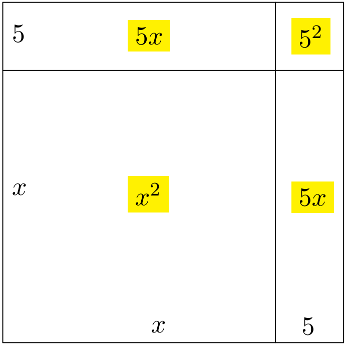
Die Aufgaben von Fior

Aufgaben sind alle vom Typ

$$x^3 + px = q$$

Al-Chwarizmis Gnomon

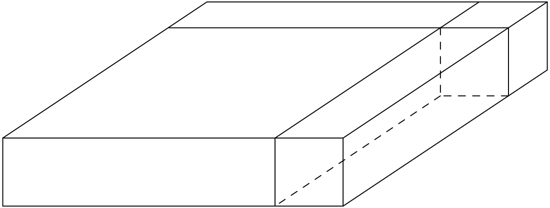
noch 21 Tage



$$
\begin{aligned}
x^2 + 10x &= 96 \\
x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x &= 96 \\
x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 25 &= 96 + 25 \\
(x+5)^2 &= 121 \\
x + 5 &= 11 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

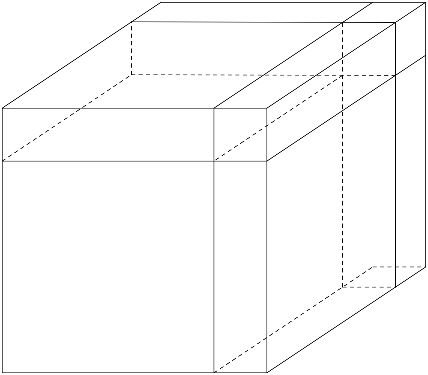
Regiomontans Gnomon

noch 17 Tage



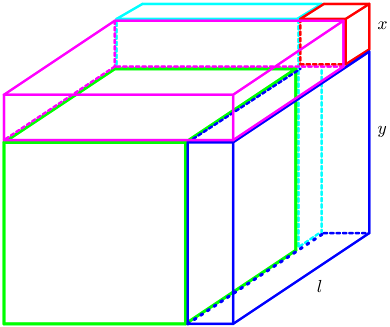
Tartaglias Gnomon

noch 16 Tage



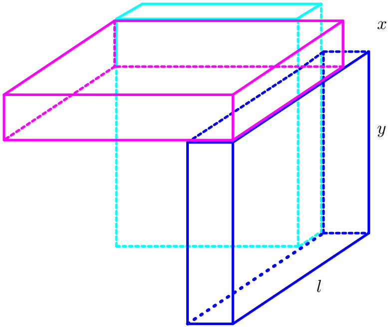
Tartaglias Gnomon

noch 8 Tage



Wir haben $x^3 + px = q$.

Tartaglias Gnomon
noch 8 Tage

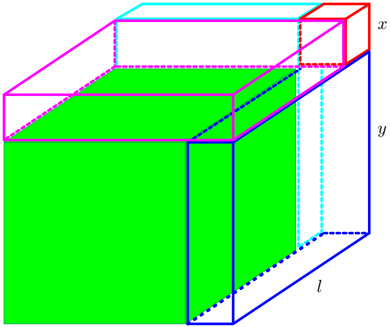


Wir haben $x^3 + px = q$.
Setze

$$px = 3lyx, y = \frac{p}{3l}.$$

Tartaglias Gnomon

noch 8 Tage



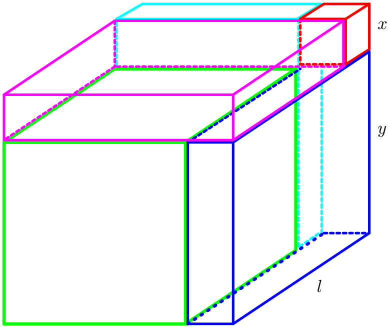
Wir haben $x^3 + px = q$.
Setze

$$px = 3lyx, y = \frac{p}{3l}.$$

Es gilt auch $l^3 - y^3 = q$.

Tartaglias Gnomon

noch 8 Tage



Wir haben $x^3 + px = q$.
Setze

$$px = 3lyx, y = \frac{p}{3l}.$$

Es gilt auch $l^3 - y^3 = q$.
Damit

$$l^3 - \left(\frac{p}{3l}\right)^3 = q$$
$$l^6 - ql^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$
$$u^2 - qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Tartaglias Gnomon

noch 8 Tage

Mit Zauberformel:

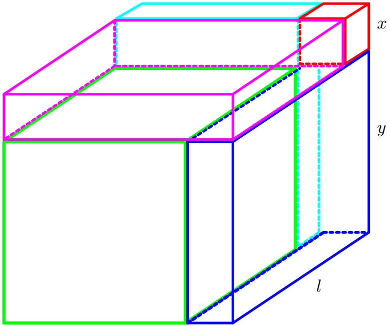
$$u = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Wegen der Geometrie

$$u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Wegen $u = l^3$ hat man

$$l = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$



Tartaglias Gnomon

noch 7 Tage

Einsetzen von

$$l = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

in $y^3 = l^3 - q$ ergibt

$$y = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Aus $x = l - y$ folgt

Formel von Cardano

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Allgemeine kubische Gleichung

Freude herrscht

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Allgemeine kubische Gleichung

Freude herrscht

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Substitution mit $x = y - \frac{b}{3}$

Allgemeine kubische Gleichung

Freude herrscht

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Substitution mit $x = y - \frac{b}{3}$ ergibt eine kubische Gleichung „fior'schen“Typs:

$$y^3 - \frac{b^2 - 3c}{3} y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d \right) = 0.$$

Anwendung der Formel
Ziehen von Kubikwurzeln?

$$x^3 + 2x = 12$$

Cardano sagt:

$$x = \sqrt[3]{6 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}} + \sqrt[3]{6 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

Berechnung von $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$

Zitat von Tartaglia

…man muss die besagte 10 so in zwei Teile zerlegen, dass der eine von diesen eine Kubikzahl ist und der andere in drei gleiche Teile ohne Brüche geteilt werden kann, und um sie zu finden, subtrahiere ich von der besagten 10 jede von den in der besagten 10 enthaltenen Kubikzahlen, das sind 1 und 8, und schaue, welche von ihnen mir einen Rest gibt, der (wie gesagt) in drei gleiche Teile teilbar ist, und wir werden finden, dass es die 1 ist und nicht die 8. Nun sage ich, dass die Kubikwurzel aus 1, welche ebenfalls 1 ist, der kleinere Teil der besagten binomischen Kubikwurzel ist, und der andere Teil ist die Quadratwurzel aus dem Ergebnis, das herauskommt, wenn man den dritten Teil des obengenannten Restes durch den besagten kleineren Teil dividiert, das heisst, wenn man die besagte Kubikzahl 1 von 10 subtrahiert hat, bleibt 9, von welcher 9 man ihren dritten Teil nimmt, welcher 3 ist, und diesen dividieren wir durch die Kubikwurzel aus unserer Kubikzahl 1, welche ebenfalls 1 ist; aus der besagten Division wird sich ebenfalls 3 ergeben, und die Quadratwurzel aus 3 wird der grössere Teil unseres Wurzelbinoms sein, das heisst, die Kubikwurzel aus $\sqrt{108}+10$ wird gleich $\sqrt{3}+1$ sein, qed.

Berechnung von Kubikwurzeln
Näherungsverfahren

Die Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = a$ und damit eine Nullstelle des Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - a.$$

- Regula Falsi
- Bisektionsverfahren
- Sekantenverfahren
- Newtonverfahren

Bombellis wilder Gedanke

Entstehung

Vorüberlegung

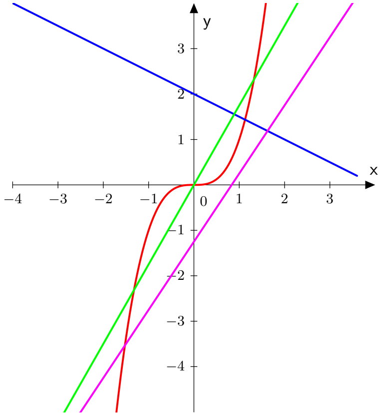
Jede kubische Gleichung des „Fior'schen Typs“ kann in die Form

$$x^3 = mx + b$$

gebracht werden. Graphisch führt diese Gleichung auf ein Schnittproblem.

Bombellis wilder Gedanke

Illustration



Es gibt immer einen Schnittpunkt!
Also hat eine kubische Gleichung immer eine (reelle) Lösung!

Rafael Bombelli

L'Algebra, 1572

$$x^3 = 15x + 4$$

Rafael Bombelli

L’Algebra, 1572

$$x^3 = 15x + 4$$

Cardano liefert

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Rafael Bombelli

L'Algebra, 1572

$$x^3 = 15x + 4$$

Cardano liefert

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}}$$

Rafael Bombelli

L'Algebra, 1572

$$x^3 = 15x + 4$$

Cardano liefert

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \cdot \sqrt{-1}}$$

Bombelli vermutet $\sqrt[3]{2 + 11 \cdot \sqrt{-1}} = 2 + n \cdot \sqrt{-1}$.