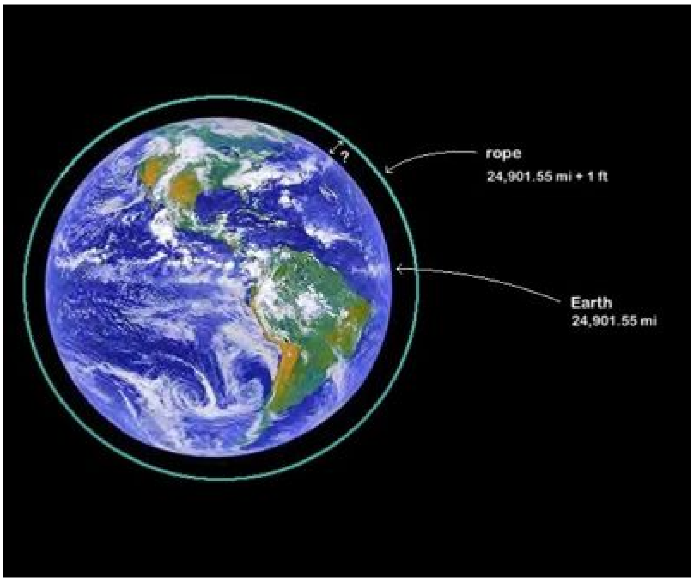


Lineare Funktionen und Optimierung

. . . und der Differenzenquotient

gym fms | LERBERMATT

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionen

1.1. Grundlagen

Aus dem Alltag kennen Sie graphische Darstellungen von Funktionen. Zum Beispiel wird in den Nachrichten der SMI (Swiss Market Index) häufig als Graph illustriert.

Beispiel 1.1.1.

Jedem Datum wird ein bestimmter Index zugeordnet.

In der Mathematik versteht man unter einer Funktion folgendes.

Definition 1.1: Funktion

Eine Funktion ist eine Zuordnung, bei der jedem Element x einer Menge $\mathbb{D}$ eindeutig ein Element y einer Menge $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Man schreibt:

$$y = f(x)$$

(sprich:„y gleich f von x“)

Anschaulich stellt man eine Funktion mit Mengendiagrammen dar.

Definition 1.2: Argument

Die Menge $\mathbb{D}$ nennt man Definitionsmenge. Ein Element $x \in \mathbb{D}$ heisst Argument von f oder neudeutsch input. x wird auch als unabhängige Variable bezeichnet.

Definition 1.3: Funktionswert

Die Menge $\mathbb{W}$ nennt man Wertemenge oder Bildmenge von f. Ein Element $y \in \mathbb{W}$ heisst Funktionswert oder neudeutsch output. y wird auch häufig als abhängige Variable bezeichnet.

Beispiel 1.1.2. Beim SMI ordnet die Funktion f jedem Monat x genau eine Quote y zu.

Beispiel 1.1.3. Das Quadrieren ist eine Funktion. Jeder reellen Zahl x wird ihr Quadrat

$$y = x^2$$

zugeordnet.

1.2. Darstellungen

Will man beispielsweise als Funktion das Quadrieren — hier am Beispiel der Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ — darstellen, so kann dies auf verschiedene Arten geschehen:

- Schreibweise konkret mit Funktionswerte: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$
- Darstellung als Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

- Darstellung als Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^2, \quad \mathbb{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

- graphische Darstellung in einem Koordinatensystem:

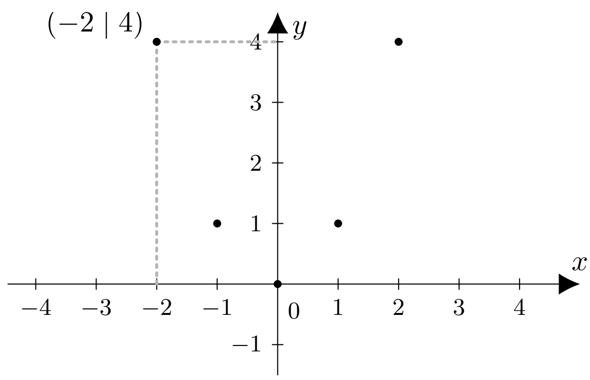


Abbildung 1: Graphische Darstellung im Koordinatensystem

1.3. Graph einer Funktion

Definition 1.4: Geordnetes Paar

Ein Paar $(x \mid y)$ heisst geordnet, wenn die Reihenfolge von x und y wesentlich ist.

Definition 1.5: Graph

Sei $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}$ eine Funktion. Die Menge aller geordneten Paare

$$G_f = \{(x \mid f(x)) \mid x \in \mathbb{D}\}$$

heisst Graph von f.

1.4. Einschränkungen des Definitionsbereichs einer Funktion

Für manche Beschreibungen von alltäglichen Zusammenhängen, die als Funktionen beschrieben werden, ist die Anpassung der Definitionsmenge der entsprechenden Funktion sinnvoll. Im Folgenden wird der Einfluss der Definitionsmenge auf die Funktion bzw. ihren Graphen veranschaulicht.

Beispiel 1.4.1. Wir betrachten den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2$$

für verschiedene Definitionsmengen.

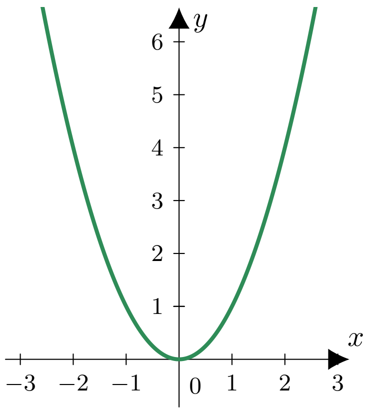


Abbildung 2: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

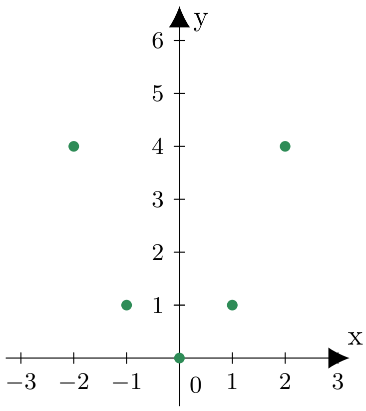


Abbildung 3: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

Übung 1.1.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -x + 2.$$

a) Berechne $f(1), f(0)$ und $f(-1)$.

b) Zeichne den Graphen für

   i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   ii) und für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

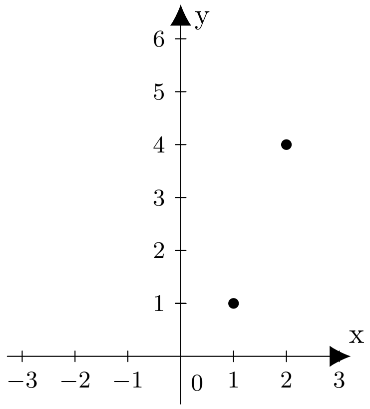


Abbildung 4: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Übung 1.2.

Sei $f(x) = x^3$. Berechne einige Funktionswerte und skizziere den Graphen.

Übung 1.3.

Gegeben sei die Funktion
$$s(t) = 20 - 5t^2.$$

a) Berechne $s(-1), s(0)$ und $s(1)$.

b) Wann gilt $s(t) = 0$?

c) Bestimme

   i) $s(2) - s(1)$

   ii) $\frac{s(3)-s(1)}{3-1}$

   iii) $\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$

d) Berechne allgemein für beliebiges t den Quotienten
$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$
und überlege dir, welchen Wert dieser Quotient für $h \to 0$ annehmen müsste.

Übung 1.4.

Man weiss von einer Funktion vom Typ
$$N(t) = a \cdot b^t,$$

dass sie die Werte $N(0) = 10$ und $N(2) = 6.4$ annimmt.

a) Bestimme die Parameter a und b.

b) Berechne $N(1)$ und $N(-2)$.

c) Skizziere den Graphen.

d) Bestimme

   i) $\frac{N(2)-N(0)}{2}$

   ii) $\frac{N(3)-N(1)}{2}$

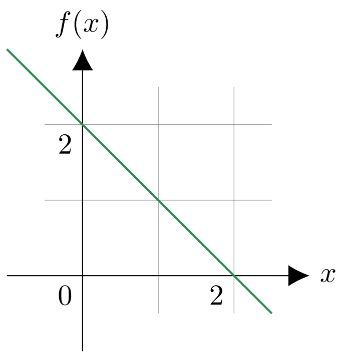
   iii) $\frac{N(t+h)-N(t)}{h}$

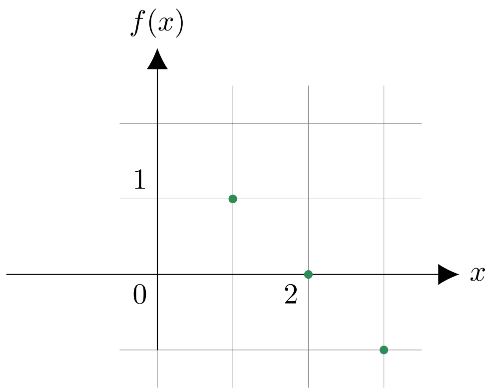
1.5. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 1.4

a) $f(1) = 1, f(0) = 2$ und $f(-1) = 3$.

b) i) Für $x \in \mathbb{R}$:

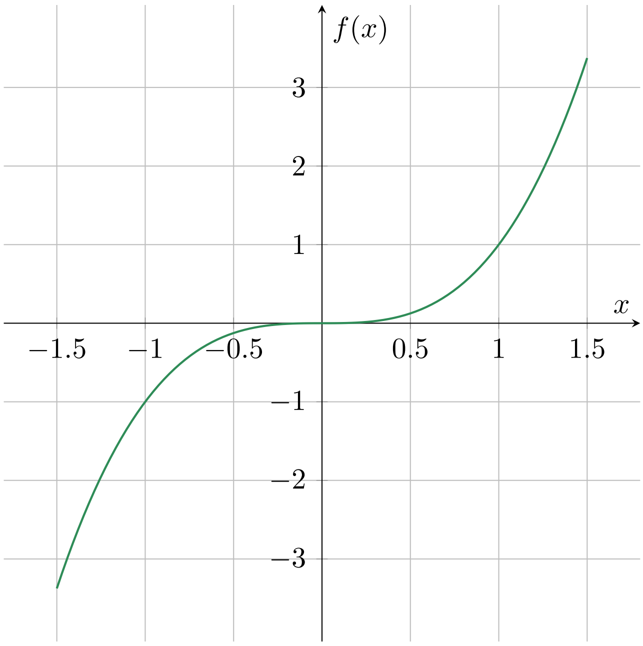




ii)

Notizen zu Übung 1.4

Bekanntlich sind meine Favoriten $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(-1) = -1$. Ferner berechne ich noch $f(2) = 8$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$. Der Plot sieht so aus:



Notizen zu Übung 1.4

a) $s(-1) = 20 - 5 \cdot (-1)^2 = 15$, $s(0) = 20$, $s(1) = 15$.

b) $20 - 5t^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$

c) $s(2) - s(1) = 0 - 15 = -15$, $\frac{s(3)-s(1)}{3-1} = \frac{-25-15}{2} = -20$, und

$$\frac{s(1+h) - s(1)}{h} = \frac{20 - 5(1+h)^2 - 15}{h} = \frac{20 - (5 + 10h + 5h^2) - 15}{h} = \frac{-10h - 5h^2}{h}$$
$$= -10 - 5h$$

d)

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{20 - 5(t+h)^2 - (20 - 5t^2)}{h} = \frac{20 - 5t^2 - 10th - 5h^2 - 20 + 5t^2}{h}$$
$$= \frac{-10th - 5h^2}{h} = -10t - 5h$$

Der Quotient strebt für $h \to 0$ gegen $-10t$.

Notizen zu Übung 1.4

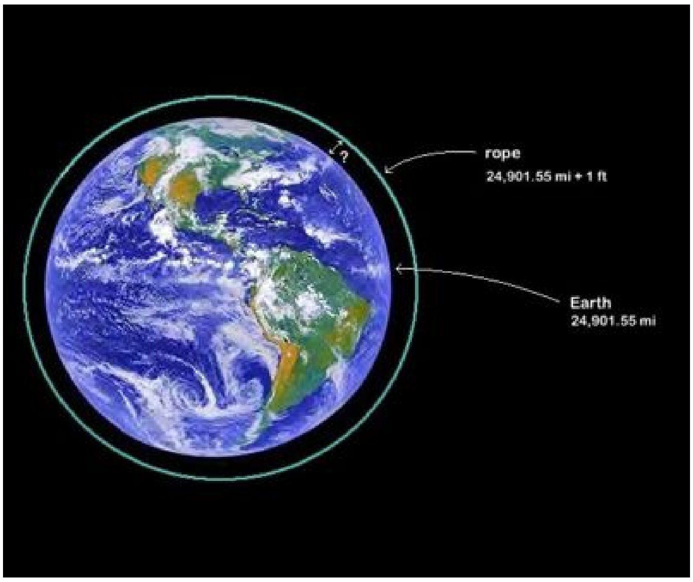
a) Wegen $N(0) = 10 = a$ und daraus $N(2) = 10b^2 = 6.4 \Leftrightarrow b^2 = 0.64 \Leftrightarrow b = \pm 0.8$. b wird positiv gewählt wegen der Definitheit.

b) $N(1) = 10 \cdot 0.8^1 = 8$ und $N(-2) = 10 \cdot 0.8^{-2} = 10 \cdot 64 = 640$.

c) Deine Skizze vergleichst du mit `geogebra.org`.

d) Exemplarisch $\frac{N(2)-N(0)}{2} = \frac{6.4-10}{2} = -1.8$ und $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = \frac{10 \cdot 0.8^t (0.8^h - 1)}{h}$

2. Proportionalität



Wir betrachten eine spezielle Menge von Funktionen, die Proportionalitäten und umgekehrten Proportionalitäten.

Definition 2.1: Proportionalität

Eine Funktion der Form

$$f(x) = mx \quad m \in \mathbb{R}$$

heisst Proportionalität. Der Parameter m heisst Proportionalitätskonstante oder Proportionalitätsfaktor.

Beispiel 2.0.1. Die Menge der nötigen Zutaten für ein Rezept in Abhängigkeit der Anzahl Essenden ist eine Proportionalität. (Spätzle-Eintopf)

Satz 2.1: Charakteristik

Die zu einer Proportionalität f gehörenden Zahlenpaare haben denselben Quotienten.

Beweis. Sei $f(x) = mx$ eine Proportionalität. Dann gilt für beliebige Zahlenpaare

$$(x \mid y) = (x \mid mx)$$

und damit für den Quotienten

$$\frac{y}{x} = \frac{mx}{x} = m$$

$\square$

Beispiel 2.0.2. Der Schweredruck P unter Wasser ist proportional zur Tiefe h unter der Wasseroberfläche. Aus der Physik kennt man die Beziehung

$$P(h) = \rho_w g h$$

wobei ρ_w die Dichte von Wasser und g den Ortsfaktor bezeichnet. $P(h)$ ist eine Proportionalität mit Proportionalitätskonstante $\rho_w g$.

Bemerkung 2.0.1. Wenn für die Argumentation bloss wichtig ist, dass es sich um eine Proportionalität handelt und der Wert der Konstanten keine Rolle spielt, schreibt man kurz „$\sim$“. Im obigen Beispiel würde man kurz schreiben

$$P \sim h$$

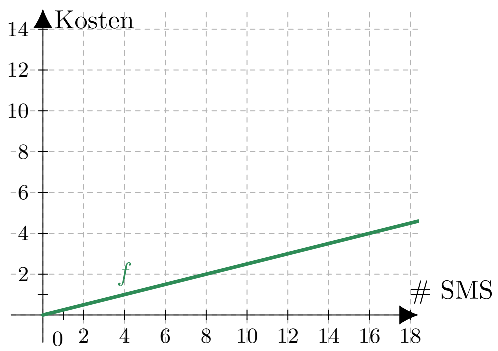
3. Lineare Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir die Menge der Proportionalitäten erweitern.

Beispiel 3.0.1. Für ein Handy-Abonnement zahlt man eine Grundgebühr von 10 Franken pro Monat. Jede SMS kostet den Abonnementen 25 Rappen. Wir stellen die anfallenden Kosten in Abhängigkeit der verschickten SMS dar. Dabei gehen wir schrittweise vor und wählen der Einfachheit halber als Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$.

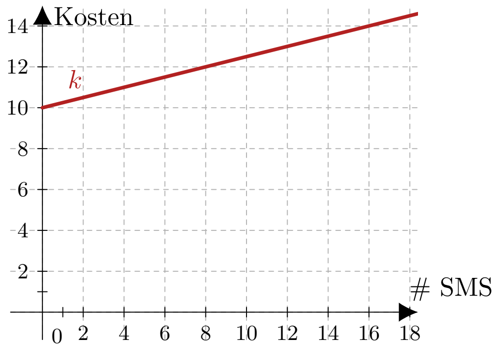
a) Würde man keine Grundgebühr zahlen, sondern nur die versendeten SMS, dann lautete die Kostenfunktion (Einheiten in Franken)

$$f(x) = 0.25x.$$



b) Mit Grundgebühr erhalten wir die Kostenfunktion

$$k(x) = 0.25x + 10$$



Im vorangegangenen Beispiel sieht man, dass die Addition der Grundgebühr eine Verschiebung des Graphen parallel zur y-Achse um 10 bewirkt:

$$k(x) = 0.25x + 10 = f(x) + 10$$

3.1. Mathematische Beschreibung

Definition 3.1: Lineare Funktion

Eine Funktion der Form

$$f(x) = mx + b \quad m, b \in \mathbb{R}$$

heisst linear. Den Parameter m nennt man Steigung, den Parameter b Ordinatenabschnitt oder y-Achsenabschnitt.

Satz 3.1: Gerade

Der Graph einer affinen Funktion

$$f(x) = mx + b$$

ist eine Gerade, die die y-Achse bei b schneidet.

Beweis. Dass der Graph eine Gerade ist überlegt man sich mit einem einfachen Ähnlichkeitsargument basierend auf der Steigung. Der y-Achsen-Schnittpunkt liegt wegen

$$f(0) = m \cdot 0 + b = b$$

im Punkt $(0 \mid b)$. □

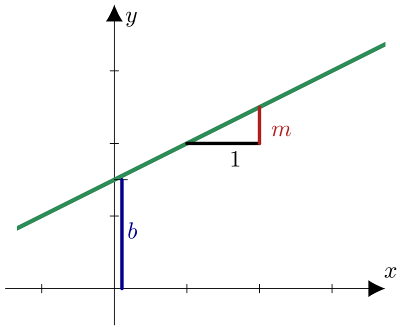


Abbildung 5: Steigung und y-Achsen-Abschnitt

Bemerkung 3.1.1. Weil der Graph einer affinen Funktion eine Gerade ist, reichen zwei Punkte um dessen Funktionsgleichung bestimmen zu können bzw. um dessen Graphen skizzieren zu können.

3.2. Funktionsgleichung aus zwei gegebenen Punkten bestimmen

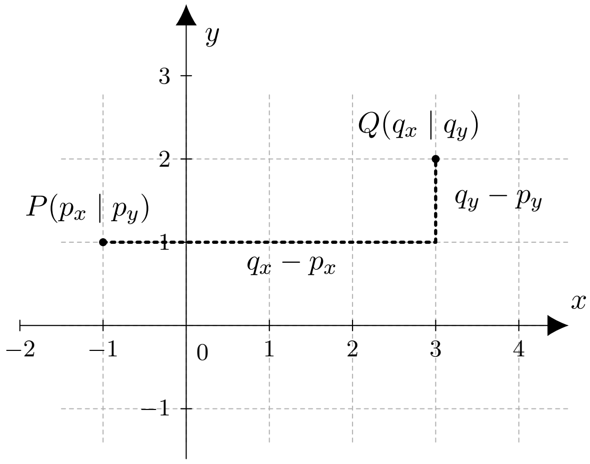
Beispiel 3.2.1. Wir bestimmen die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die Punkte $P = (-1 \mid 1)$ und $Q = (3 \mid 2)$ geht. Weil der Graph eine Gerade ist, muss ihre Funktionsgleichung die Form

$$f(x) = mx + b$$

haben.

Die Differenz der x-Werte der beiden Punkte ist $q_x - p_x = 3 - (-1) = 4$ und die der y-Werte $q_y - p_y = 2 - 1 = 1$. Daher ergibt sich für die Steigung

$$m = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Strecke horizontal}} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{1}{4}.$$



Also müssen wir nur noch den Parameter b bestimmen. Da sowohl P als auch Q Elemente des Graphen sind, erfüllen beide die gesuchte Funktionsgleichung. Man nimmt einen der beiden Punkte, z.B. P, setzt diesen ein und löst nach b auf:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}x + b && (m = \tfrac{1}{4} \text{ einsetzen}) \\
1 &= \frac{1}{4} \cdot (-1) + b && (\text{Punkt } P \text{ einsetzen}) \\
1 &= -\frac{1}{4} + b && (+\tfrac{1}{4}) \\
\frac{5}{4} &= b
\end{aligned}
$$

Die Funktionsgleichung der Geraden durch P und Q lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

4. Systeme von linearen Gleichungen

Beispiel 4.0.1. Wir vergleichen zwei Angebote der Anbieter „Klementine“ und „SwissPhone“.

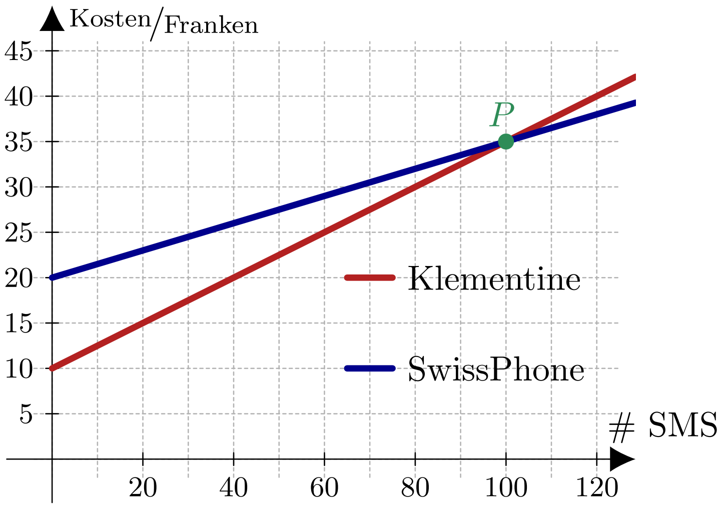
- Klementine bietet ein Abo mit einer Grundgebühr von 10 Franken und jede SMS 25 Rappen an.
- SwissPhone offeriert eine Grundgebühr von 20 Franken und jede SMS 15 Rappen.

Wir schätzen Anzahl SMS, die wir pro Monat verschicken, und vergleichen die beiden Anbieter. Für Klementine haben wir die Kostenfunktion

$$k_K(x) = 0.25x + 10$$

und für SwissPhone

$$k_S(x) = 0.15x + 20$$



Wir sehen, dass ab einer gewissen Anzahl SMS der ursprünglich teurere Anbieter SwissPhone billiger ist als Klementine. Deshalb wollen wir die Anzahl SMS bestimmen, für den die Kosten bei beiden Anbietern gleich ausfallen. In andern Worten: Wir bestimmen denjenigen x-Wert, für den

$$k_K(x) = k_S(x)$$

gilt. Dies ist der Schnittpunkt P. Wir erhalten

$$\begin{aligned} k_K(x) &= k_S(x) && \text{(Bedingung Schnittpunkt)} \\ 0.25x + 10 &= 0.15x + 20 && (-0.15x - 10) \\ 0.1x &= 10 && (\cdot 10) \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Für 100 verschickte SMS pro Monat sind beide Anbieter gleich teuer; die Kosten betragen dann

$$k_K(100) = 0.25 \cdot 100 + 10 = 35\,\text{Franken}.$$

Das heisst, ab 101 verschickten SMS pro Monat ist SwissPhone billiger.

In der vorangegangenen Aufgabe lag das Kernproblem darin, für beide Funktionen ein Paar $(x \mid y)$ zu bestimmen, dass beide Funktionsgleichungen gleichzeitig erfüllt. Im Folgenden werden Methoden vorgestellt, wie man solche Lösungen berechnen kann.

4.1. Systeme mit 2 linearen Gleichungen und 2 Unbekannten

Gleichungen, die zusammen betrachtet werden sollen, nennt man ein System von Gleichungen. Eine Gleichung heisst linear, wenn jede Variable separat mit dem Exponenten 1 vorkommt.

Beispiel 4.1.1. Eine lineare Gleichung ist zum Beispiel

$$x + 2y + \sqrt{3}z = 5^3$$

Hingegen sind

$$x + y^2 + \sqrt{z} = 5^3$$

und

$$x + yz = 5^3$$

keine linearen Gleichungen.

Beispiel 4.1.2. Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$
$$y - x = -5 \tag{2}$$

Es gibt nun verschiedene Methoden, die Lösung $(x \mid y)$ dieses Systems zu berechnen. Bevor wir aber die Lösung bestimmen, überlegen wir uns, wie viele Lösungen für ein beliebiges System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten existieren können. Wir können annehmen, dass in beiden Gleichungen beide Variablen x und y auftauchen. Ansonsten würden wir einfach diejenige mit nur einer Unbekannten nehmen, nach dieser auflösen, in die andere einsetzen und hätten nun bloss noch eine Gleichung mit einer Unbekannten. Wenn beide Variablen vorkommen, löst man beide Gleichungen nach y auf und kann sie als affine Funktionen interpretieren:

$$y = -2x + 1 \tag{1'}$$
$$y = x - 5 \tag{2'}$$

Da die Lösungen den Schnittpunkten der beiden zugehörigen Geraden entsprechen, können drei Fälle eintreten:

- Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- Die Geraden sind Parallel und verschieden.
- Die Geraden fallen zusammen.

Daher kann es eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen geben.

4.2. Lösungsmethoden

4.2.1. Gleichsetzungsmethode

Um unser Gleichungssystem

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$
$$y - x = -5 \tag{2}$$

zu lösen, können wir beide Gleichungen separat nach einer der beiden Variablen auflösen, zum Beispiel nach y:

$$y = -2x + 1 \tag{1'}$$
$$y = x - 5 \tag{2'}$$

Anschliessend setzt man die beiden gleich und löst auf:

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= x - 5 && (+2x + 5) \\ 6 &= 3x && (\div 3) \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Die Lösung $x = 2$ setzt man nun in einer der beiden Gleichungen ein, um y zu bestimmen:

$$y = 2 - 5 = -3.$$

Das heisst, das Zahlenpaar $(2 \mid -3)$ ist Lösung des Gleichungssystems $(1), (2)$.

4.2.2. Substitutionsmethode

Man wählt eine der beiden Gleichungen

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$
$$y - x = -5 \tag{2}$$

aus und löst diese, zum Beispiel (1), nach einer Variablen auf, hier nach y:

$$y = -2x + 1 \tag{1'}$$

Danach ersetzt man in der andern Gleichung die Variable durch den gewonnenen Term und löst auf:

$$\begin{aligned} y - x &= -5 && \text{(1') in (2)} \\ -2x + 1 - x &= -5 && (-1) \\ -3x &= -6 && (\div(-3)) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Schliesslich setzt man die Lösung $x = 2$ in eine der Gleichungen ein und erhält

$$y = -2 \cdot 2 + 1 = -3$$

also $(2 \mid -3)$ als Lösung.

4.2.3. Additionsmethode

Bei dieser Methode addiert man beide Gleichungen miteinander oder subtrahiert eine Gleichung von der andern.

Ich demonstriere die Methode auf zwei Arten. Beim Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + 2x &= 1 && (1) \\ y - x &= -5 && (2) \end{aligned}$$

kann ich direkt (2) von (1) subtrahieren.

$$3x = 6 \qquad (2) - (1)$$

und erhalte $x = 2$ und daraus $y = -3$.

Will ich aber gleiche Koeffizienten vor dem x, dann multipliziere ich die Gleichung (2) mit 2.

$$\begin{aligned} y + 2x &= 1 && (1) \\ 2y - 2x &= -10 && (2 \cdot (2)) \end{aligned}$$

und addiere die beiden Gleichungen.

$$3y = -9 \qquad (1)+(2)$$

Das heisst $y = -3$ und erhält unmittelbar $x = 2$.

Bemerkung 4.2.1. Die oben aufgeführten Methoden sind auch auf Systeme von n linearen Gleichungen mit n Lösungsvariablen anwendbar. Dabei wird jeweils pro eine Ausführung eine Variable eliminiert. So kann man sukzessive die Anzahl Variablen und Gleichungen reduzieren, bis schliesslich eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, die man löst. Danach können rückwärts schrittweise alle vorhandenen Variablen berechnet werden.

4.3. Systeme von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten

Ziel ist es, bei jeder Kombination von Gleichungen aus dem System eine Variable zu eliminieren.

Beispiel 4.3.1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -5 && (1)\\ 3x - 5y + 2z &= 4 && (2)\\ 4x + y - 2z &= 5 && (3) \end{aligned}$$

Ich wähle die Additionsmethode. Die Additionen $(2)+(3)$ und $(1)+2\cdot(2)$ vereinfachen das System auf 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 7x - 4y &= 9 && (4)\\ 8x - 7y &= 3 && (5) \end{aligned}$$

und z ist eliminiert. Für das weitere Vorgehen wähle ich erneut die Additionsmethode und präpariere die Gleichungen so, dass y eliminiert werden kann. $7\cdot(4)$ und $4\cdot(5)$ liefert

$$\begin{aligned} 49x - 28y &= 63 && (4')\\ 32x - 28y &= 12 && (5') \end{aligned}$$

und $(4') - (5')$ liefert noch eine Gleichung mit einer Unbekannten.

$$\begin{aligned} 17x &= 51 && (\div 17)\\ x &= 3 && (6) \end{aligned}$$

Nun setzt man $x = 3$ ein um die Werte für y und z zu erhalten.

$$\begin{aligned} 21 - 4y &= 9 && (6) \text{ in } (4) \\ 12 &= 4y && (\div 4) \\ 3 &= y && (7) \end{aligned}$$

Wir kennen $x = 3$ und $y = 3$ und berechnen z mit Gleichung (1).

$$\begin{aligned} 6 + 9 - 4z &= -5 && (6) \text{ und } (7) \text{ in } (1) \\ 20 &= 4z && (\div 4) \\ 5 &= z && (8) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung $(3 \mid 3 \mid 5)$.

Bemerkung 4.3.1. Die Form der obigen Lösung, $(x \mid y \mid z)$, heisst Tripel.

Übung 4.1.

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1.4 && (3) \\ 3x - 2y - z &= 1.2 && (4) \\ 5x + 4y + 3z &= 1.4 && (5) \end{aligned}$$

4.4. Regeln zum Lösen von Gleichungssystemen

Beim Lösen von n Gleichungen mit n Unbekannten geht man wie folgt vor:

1. Reduktion

   a) Aus dem Ausgangssystem stellt man mittels Koeffizienten- oder Substitutionsmethode ein Gleichungssystem von $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten her.

   b) Auf analoge Weise bestimmt man daraus ein Gleichungssystem von $n - 2$ Gleichungen mit $n - 2$ Unbekannten und fährt so fort, bis man

   c) eine Gleichung mit einer Unbekannten hat.

2. Lösungen

   1. Man löst die erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten.

   2. Man setzt die im 1. Schritt erhaltene Lösung in eine Gleichung mit 2 Unbekannten ein und fährt so fort, bis man

   n. die n. Unbekannte bestimmt hat.

3. Kontrolle

Übung 4.2.

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x + 4y - z = 6 \tag{6}$$
$$y + 4z - u = 10 \tag{7}$$
$$-x + z + 4u = 18 \tag{8}$$
$$4x - y + u = 6 \tag{9}$$

4.5. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 4.2

$$(1) + 4(2) : 14x - 5y = 6.2 \tag{10}$$
$$3(2) + (3) : 14x - 2y = 5 \tag{11}$$

Subtrahieren bringt $-3y = 1.2 \Leftrightarrow y = -0.4$. Damit ergeben sich $x = 0.3$ und $z = 0.5$.

Notizen zu Übung 4.2

$$(9) + (11) : 4x + 4z = 16 \tag{12}$$
$$4(9) + (10) : -x + 4y + 17z = 58 \tag{13}$$
$$(8) : x + 4y - z = 6 \tag{14}$$

$$-(13) + (14) : 2x - 18z = -52 \tag{15}$$

$(12) - 2(15) : 40z = 120 \Leftrightarrow z = 3$. Somit $x = 1$, $y = 2$ und $u = 4$

A. Weitere Kommentare und Übungen zu linearen Funktionen und Gleichungen

A.1. Begriffe und Beispiele

Eine lineare Gleichung ist eine Gleichung, in der die gesuchte Variable x nur in der ersten Potenz vorkommt. Die Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

hingegen ist *keine* linear Gleichung, da x in der Potenz 2 vorkommt. Die Gleichungen

$$\frac{2}{x} - 1 = 0$$

und

$$3\sqrt{x} - 4 = 2$$

sind ebenfalls keine lineare Gleichungen.

Wie lassen sich lineare Gleichungen lösen? Immer nach dem selben Prinzip: "Bringe x auf die eine Seite, und die Zahlen auf die andere Seite des Gleichheitszeichen."

Beispiel A.1.1. Die Gleichung

$$3x - 4 = 0$$

kann wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 0 && (+4) \\ 3x &= 4 && (\div 3) \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Beispiel A.1.2. Die Variabel x ist auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen:

$$0.5x - 3 = 2x + 1$$

Wiederum, bringe alle x auf die eine Seite, und alle Zahlen auf die andere Seite des Gleichheitszeichen:

$$\begin{aligned} 0.5x - 3 &= 2x + 1 && (-2x) \\ -1.5x - 3 &= 1 && (+3) \\ -1.5x &= 4 && (\div -1.5) \\ x &= \frac{4}{-1.5} = -2.\overline{6} \end{aligned}$$

Beispiel A.1.3. Wir lösen nun die Gleichung

$$3x + 0.5x = x(3 + 0.5) = x \cdot 3.5 = 3.5x$$

$$\begin{aligned}
0.5x - 3 + 4x + 5 &= 2.4x + 1 - 3x + 2 - 6x \\
4.5x + 2 &= -6.6x + 3 && (+6.6x) \\
11.1x + 2 &= 3 && (-2) \\
11.1x &= 1 && (\div 11.1) \\
x &= \frac{1}{11.1} = \frac{10}{111}
\end{aligned}$$

Beispiel A.1.4. Und noch ein letztes Beispiel:

$$\begin{aligned}
2x^2 + 4x - 3 &= 2 - x + 2x^2 && (-2x^2) \\
4x - 3 &= 2 - x && (+x) \\
5x - 3 &= 2 && (+3) \\
5x &= 5 && (\div 5) \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Beispiel A.1.5. Und ein allerletztes Beispiel:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} - 3 &= && (+3) \\
\frac{4}{x} &= 5 && (\cdot x) \\
4 &= 5x && (\div 5) \\
\frac{4}{5} &= x
\end{aligned}$$

Beachte, dass wir schon im ersten Schritt beide Seiten mit x multiplizieren könnten:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} - 3 &= 2 && (\cdot x) \\
x \cdot (\frac{4}{x} - 3) &= 2x \\
4 - 3x &= 2x && (+3x) \\
4 &= 5x && (\div 5) \\
\frac{4}{5} &= x
\end{aligned}$$

A.2. Übungen

Übung A.1.

Falls linear, löse die Gleichung nach x auf.

a) $6x - 10 = x - 5$

b) $-x - 2 = x + 3$

c) $3 - 4x = 5 - 2x - 16$

d) $15x - 73 - 24x = 59 - 16 + 20x$

e) $56x - 43 - 52 - 19x = 7 - 72x - 56x + 165x - 112$

f) $92 - 13x - x^2 = 52 - 3x - x^2$

g) $14 - (10 - x) = 0$

h) $14 - (x - 15) = 2 - (6x + 13)$

i) $5(4x + 9) - 6(2x - 5) = 75$

j) $10 - 6(x - 14) = 20 - 3(2x - 25)$

k) $(15x - 3)^2 = x(225x - 15)$

l) $(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x - 3)$

m) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2$

n) $x^2 - 3x + 14 = x(x + 7)$

o) $(2x - 3)^2 = (2x + 3)^2 + 12$

p) $\frac{x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$

q) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3}$

r) $\frac{3}{x} + 1 = 2$

s) $\frac{7}{x} - 4 = \frac{2}{x} + 2$

t) $\frac{2}{x} + x = x + 7$

Übung A.2.

Finde die Gleichung und löse sie.

a) Die Summe fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist 960. Finde diese Zahlen.

b) Die Differenz zweier natürlichen Zahlen ist 3, die Differenz der Quadrate 381. Finde diese Zahlen.

c) Eine Treppe in den ersten Stock hat 22 Stufen. Würde jede Stufenhöhe um $1.6cm$ erhöht, bräuchte es nur 20 Stufen. Wie hoch sind die Treppenstufen?

d) Ein Baum hat die Höhe $2.5m$ ist irgendwo in der Mitte gebrochen, und zwar so, dass der obere Teil nun den Boden $50cm$ entfernt vom Stamm berührt. Auf welche Höhe ist die Bruchstelle des Baums?

e) Ein Zug mit Geschwindigkeit $72km/h$ verlässt den Bahnhof A um $15:00$ und fährt Richtung Bahnhof B. Um $15:15$ fährt ein andere Zug mit Geschwindigkeit $88km/h$ vom Bahnhof B in Richtung A. Die Distanz zwischen A und B betrage $120km$. Wann kreuzen sich die Züge?

f) Hahnen 1 füllt den Pool in 1 Stunde, Hahnen 2 in 2 Stunden, Hahnen 3 in 3 Stunden, und Hahnen 4 in 4 Stunden. Wie lange dauert es den Pool zu füllen, wenn alle Hahnen gleichzeitig aufgedreht werden?

A.3. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung A.2

a) $6x - 10 = x - 5 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

b) $-x - 2 = x + 3 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -2.5$

c) $3 - 4x = 5 - 2x - 16 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$

d) $15x - 73 - 24x = 59 - 16 + 20x \Leftrightarrow -29x = 116 \Leftrightarrow x = -4$

e) $56x - 43 - 52 - 19x = 7 - 72x - 56x + 165x - 112 \Leftrightarrow 0 = 10(?) \Leftrightarrow \textit{no solution}$

f) $92 - 13x - 4x^2 = 52 - 3x - 4x^2 \Leftrightarrow 10x = 40 \Leftrightarrow x = 4$

g) $14 - (10 - x) = 0 \Leftrightarrow 4 + x = 0 \Leftrightarrow x = -4$

h) $14 - (x - 15) = 2 - (6x + 13) \Leftrightarrow -x + 29 = -6x - 11 \Leftrightarrow 5x = -40 \Leftrightarrow x = -8$

i) $5(4x + 9) - 6(2x - 5) = 75 \Leftrightarrow 20x + 45 - 12x + 30 = 75 \Leftrightarrow\Leftrightarrow 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

j) $10 - 6(x - 14) = 20 - 3(2x - 25) \Leftrightarrow 10 - 6x + 84 = 20 - 6x + 75 \Leftrightarrow 94 = 95(?) \Leftrightarrow \textit{no solution}$

k) $(15x - 3)^2 = x(225x - 15) \Leftrightarrow 225x^2 - 90x + 9 = 225x^2 - 15x \Leftrightarrow 75x = 9 \Leftrightarrow x = 0.12$

l) $(x-5)(x-2) = (x-4)(x-3) \Leftrightarrow x^2-7x+10 = x^2-7x+12 \Leftrightarrow 10 = 12(?) \Leftrightarrow \textit{no solution}$

m) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 4x = 24x = 6$

n) $x^2 - 3x + 14 = x(x + 7) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 14 = x^2 + 7x \Leftrightarrow 10x = 14 \Leftrightarrow x = 1.4$

o) $(2x - 3)^2 = (2x + 3)^2 + 12 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 12x + 9 + 12 \Leftrightarrow -24x = 12 \Leftrightarrow x = -0.5$

p) $\frac{x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{x}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x}{6} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{3x-6x-2x}{12} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{-5x}{12} = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{12}{25} = 0.48$

q) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3} \Leftrightarrow x + 3 = \frac{5(2x-8)}{3} \Leftrightarrow 3(x + 3) = 5(2x - 8) \Leftrightarrow 3x + 9 = 10x - 40 \Leftrightarrow 7x = 49 \Leftrightarrow x = 7$

r) $\frac{3}{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$

s) $\frac{7}{x} - 4 = \frac{2}{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{5}{x} = 6 \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow x = 0.8\overline{3}$

t) $\frac{2}{x} + x = x + 7 \Leftrightarrow 2 + x^2 = x^2 + 7x \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$

Notizen zu Übung A.2

a) Es sei x die kleinste dieser Zahlen. Die fünf Zahlen sind also x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$. Die Summe ist 960, also

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 960,$$

was wir vereinfachen zu

$$5x + 10 = 960.$$

Die Lösung ist

$$x = \frac{950}{5} = 190$$

Kontrolle: $190 + 191 + 192 + 193 + 194 = 960$

b) Es sei x die kleinere der zwei Zahlen. Die grössere Zahl ist also $x+3$, da die Differenz 3 sein muss. Wir erhalten die Gleichung

$$(x+3)^2 - x^2 = 381$$

Um sie zu lösen, zuerst ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - x^2 &= 381 \\ x^2 + 6x + 9 - x^2 &= 381 && (-9) \\ 6x &= 372 && (\div 6) \\ x &= \frac{372}{6} = 62 \end{aligned}$$

Kontrolle: $65^2 - 62^2 = 381$.

c) Zeichne die Situation! Die Gleichung ist wie folgt, wobei x die original Stufenhöhe ist:

$$20(x + 1.6) = 22x$$

Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} 20(x+1.6) &= 22x \\ 20x + 32 &= 22x && (-20x) \\ 32 &= 2x && (\div 2) \\ 16 &= x \end{aligned}$$

Die originale Stufenhöhe ist also 16 cm.

d) Zeichen die Situation! Es wird die folgenden Gleichung erhalten, wobei x die Höhe der Bruchstelle ist (in cm):

$$x^2 + 50^2 = (250 - x)^2$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} x^2 + 50^2 &= (250 - x)^2 & \\ x^2 + 2500 &= 250^2 - 500x + x^2 & (-x^2) \\ 2500 &= 62\,500 - 500x & (-62\,500) \\ -60\,000 &= -500x & (\div(-500)) \\ 120 &= x & \end{aligned}$$

Die Höhe der Bruchstelle ist $120\,\text{cm} = 1.2\,\text{m}$.

e) Zeichne die Situation, wobei t die Zeit in Stunden ist, die die vergangene Zeit seit $15:15$ misst. Die Gleichung ist $102 - 160t = 0$, und somit $t = \frac{102}{160} = 0.6375\,\text{h} = 38.25\,\text{min}$. Die Züge kreuzen sich also um $15:53$ and 15 seconds.

f) Das Volumen des Pools sein V. Wir haben dann

Hahnen 1	$\to$	$1\,h$ füllt V	$\to$		$\to$	$x\,h$ füllt $x \cdot V$
Hahnen 2	$\to$	$2\,h$ füllt V	$\to$	$1\,h$ füllt $\frac{1}{2}V$	$\to$	$x\,h$ füllt $\frac{x}{2} \cdot V$
Hahnen 3	$\to$	$3\,h$ füllt V	$\to$	$1\,h$ füllt $\frac{1}{3}V$	$\to$	$x\,h$ füllt $\frac{x}{3} \cdot V$
Hahnen 4	$\to$	$4\,h$ füllt V	$\to$	$1\,h$ füllt $\frac{1}{4}V$	$\to$	$x\,h$ füllt $\frac{x}{4} \cdot V$

Sind alle Hahnen offen, wie viel Wasser ist zur Zeit x im Pool? Genau

$$xV + \frac{x}{2}V + \frac{x}{3}V + \frac{x}{4}V.$$

Wir müssen nun x so bestimmen, dass der Pool voll ist, also

$$xV + \frac{x}{2}V + \frac{x}{3}V + \frac{x}{4}V = V.$$

Wir können V ausklammern und erhalten

$$V \cdot (x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}) = V \cdot 1$$

und die Gleichung zu lösen ist

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

Finde den gemeinsamen Nenner:

$$\begin{aligned}
x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} &= 1 \\
\frac{12x}{12} + \frac{6x}{2} + \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} &= 1 \\
\frac{12x + 6x + 4x + 3x}{12} &= 1 \quad | \cdot 12 \\
25x &= 12 \quad | : 25 \\
x &= \frac{12}{25} = 0.48
\end{aligned}$$

Es braucht also 0.48 Stunden, oder 28.8 Minuten.

B. Antiproportionalität

Definition 2.1: Umgekehrte Proportionalität

Eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{c}{x} \quad c \in \mathbb{R}$$

heisst Antiproportionalität oder umgekehrte Proportionalität.

Beispiel B.0.1. Teilt man einen Kuchen unter x Personen auf, so ist die Stückgrösse y in Abhängigkeit der Personen eine Antiproportionalität.

Satz 2.1: Charakteristik der umgekehrten Proportionalität

Die zu einer umgekehrten Proportionalität gehörenden Zahlenpaare sind Produktgleich.

Beweis. Ist $f(x) = \frac{c}{x}$ eine Antiproportionalität, so gilt für ein Zahlenpaar $(x \mid y)$

$$x \cdot y = x \cdot \frac{c}{x} = c$$

□

Satz 2.2: Hyperbel

Der Graph einer Antiproportionalität ist eine Hyperbel oder eine Teilmenge davon.

Beispiel B.0.2. Um ein Passwort zu knacken wird 1 Computer eingesetzt. Er braucht dafür ungefähr 8 Tage. Wenn 2 Computer parallel rechnen, brauchen sie dafür 4 Tage. Setzt man x Computer ein, dann brauchen sie dafür

$$y = \frac{8}{x}$$

Tage.

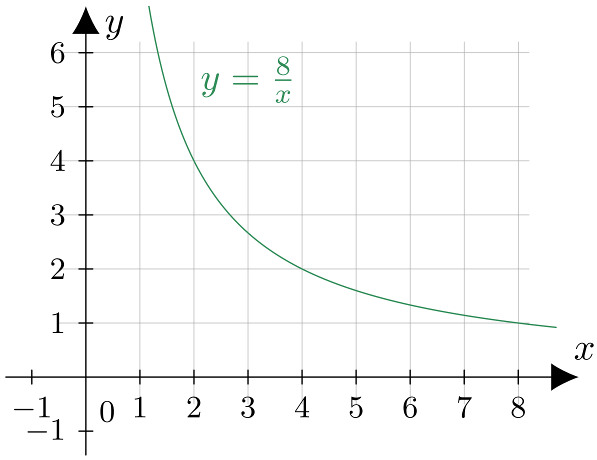


Abbildung 6: Antiproportionalität

C. Lineare Optimierung

C.1. Planungspolygone

Unter Optimierung versteht man die Festlegung eines bestimmten Programms, mit dessen Hilfe der günstigste Wert für ein vorgegebenes Ziel erreicht wird. Dabei spielen Restriktionen (Nebenbedingungen), die sich oft durch Ungleichungen ausdrücken lassen, eine wichtige Rolle.

Wir betrachten hier verhältnismässig einfache Probleme, die sich mit graphischen Methoden lösen lassen: Von einer Funktion Z (genannt Zielfunktion) werden extremale Werte bestimmt, wobei die Nebenbedingungen (lineare Ungleichungen) zu beachten sind. Diese Bedingungen ergeben, graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt, das sogenannte Planungspolygon.

Beispiel C.1.1. Eine Fabrik stellt die beiden Modelle „analog“ und „digital“ eines Taschenradios her. Jedes Radio der Analogausführung bringt einen Gewinn von Fr. 15.-, das der Digitalausführung Fr. 45.-. Die Tagesproduktion der Firma unterliegt den folgenden Einschränkungen: Von der Analogausführung können höchstens 1200, von der Digitalausführung höchstens 700, von beiden zusammen höchstens 1400 Stück hergestellt werden. In der Analogausführung wird eine Verstärkerstufe, in der Digitalausführung werden zwei Verstärkerstufen eingebaut. Pro Tag stehen aber höchstens 1800 Verstärkerstufen zur Verfügung.

Wie viele Analog- bzw. Digitalradios soll die Firma pro Tag herstellen, wenn ihr Gewinn möglichst gross sein soll? Werden die Anzahl der pro Tag hergestellten Analoggeräte mit x und die Anzahl der Digitalgeräte mit y bezeichnet, so können die erwähnten Nebenbedingungen (Restriktionen) als ein Ungleichungssystem formuliert werden:

$$x \leq 1200 \tag{16}$$
$$y \leq 700 \tag{17}$$
$$x + y \leq 1400 \tag{18}$$
$$x + 2y \leq 1800 \tag{19}$$

Ausserdem gelten noch die Bedingungen

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

da ja die Anzahlen x und y nicht negativ sein können.

Zunächst wird das **Planungspolygon**, die Lösungsmenge des Ungleichungssystems, erstellt:

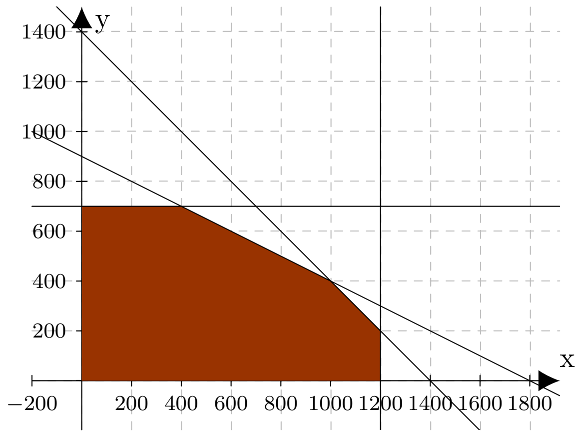


Abbildung 7: Planungspolygon

Für den Gewinn der Firma in Abhängigkeit von x und y hat man den Funktionsterm

$$G(x, y) = 15x + 45y.$$

G heisst **Zielfunktion** und ist eine affine Funktion mit 2 Variablen. Alle Paare $(x \mid y)$, die die obigen Bedingungen erfüllen, stellen zulässige Lösungen des Problems dar. Gesucht wird aber dasjenige Paar $(x \mid y)$ (x, y sind natürliche Zahlen), für das der Gewinn $G(x, y)$ maximal wird.

Durch Umformen des Zielfunktionsterms erhält man

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{G}{45}$$

eine affine Funktionsschar. Die entsprechende Graphen sind parallele Geraden mit den y-Achsenabschnitten $\frac{G}{45}$. Gesucht ist ein Punktepaar $(x \mid y)$, das einerseits das Ungleichungssystem erfüllt, und für das andererseits der y-Achsenabschnitt $\frac{G}{45}$ und damit auch G möglichst gross wird. Man erhält die Lösung $(x \mid y)$, indem man eine Gerade der Geradenschar, etwa die durch die Punkte $(0 \mid 100)$ und $(300 \mid 0)$, $m = -\frac{1}{3}$, auswählt, und sie solange längs der y-Achse nach oben verschiebt, bis sie mit der Begrenzungslinie des Planungspolygons nur noch einen Punkt oder eine Strecke gemeinsam hat. Wie aus der Zeichnung abzulesen ist, entpuppt sich das Paar $(400 \mid 700)$ als optimale Lösung des Problems. Die Firma erzielt einen maximalen Gewinn, wenn sie pro Tag 400 Analogradios und 700 Digitalradios herstellt. Den entsprechenden Gewinn berechnet man mit

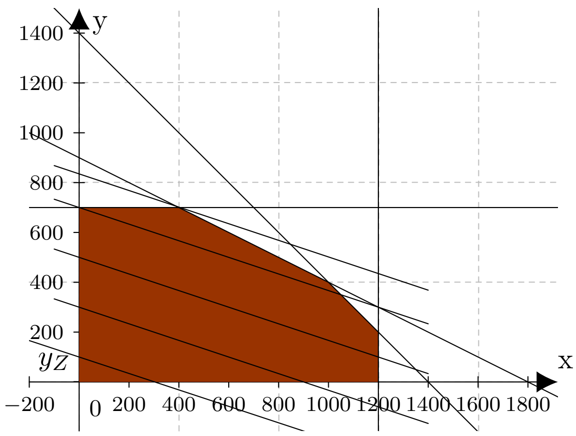


Abbildung 8: Zielgerade und Optimum

Hilfe der Zielfunktion:

$$G(400, 700) = 15 \cdot 400\,\text{Fr.} + 45 \cdot 700\,\text{Fr.} = 37\,500\,\text{Fr.}$$

Die optimale Lösung kann auch rechnerisch ermittelt werden, indem man den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden berechnet (Lösen eines Gleichungssystems mit 2 Unbekannten).

Übung C.1.

Ein landwirtschaftlicher Weidebetrieb hat sich auf die Haltung von Kühen und Jungvieh spezialisiert. In den Ställen des Betriebs können höchstens 70 Kühe und 500 Stück Jungvieh gehalten werden.

Für die Ernährung einer Kuh sind 0.25 ha, für ein Jungvieh 0.10 ha Weideland nötig. Insgesamt hat der Betrieb 50 ha Weideland.

Für die Pflege der Kühe und des Jungviehs stehen drei Arbeiter zur Verfügung, die insgesamt 8000 Arbeitsstunden im Jahr leisten. Für eine Kuh sind 100 Arbeitsstunden, für ein Stück Jungvieh 10 Arbeitsstunden je Jahr notwendig. Der Gewinn bei einer Kuh beträgt 400 Franken, bei einem Jungvieh 50 Franken im Jahr.

Wie viele Kühe und wie viel Stück Jungvieh muss der Betrieb halten, damit der Gesamtgewinn möglichst gross wird?

C.2. Regeln zum Lösen von Aufgaben zur linearen Optimierung

Eine Aufgabe zur linearen Optimierung löst man wie folgt:

1. Annahme:
   - Man stellt die gegebenen Daten tabellarisch dar
   - und definiert die Unbekannten.
2. Ungleichungen:
   - Man übersetzt die im Aufgabentext umschriebenen Bedingungen in die Formelsprache der Mathematik.
3. Planungspolygon:
   - Man stellt die Lösungen des Ungleichungssystems graphisch dar.

   Dabei verwendet man folgende Tatsachen:
   - Punkte, deren Koordinaten $(x \mid y)$ die Ungleichung $y > mx+b$ bzw. $y < mx+b$ erfüllen, bilden eine Halbebene, die oberhalb bzw. unterhalb des Graphen der Funktion $y = mx + b$ liegt.
   - Der mengentheoretische Durchschnitt aller Halbebenen, die sich aus den Ungleichungen ergeben, bilden das sogenannte Planungspolygon.
4. Zielfunktion:
   - Man drückt die Grösse z, die optimal werden soll, mit den Unbekannten aus.
   - Man löst die Gleichung nach y auf
   - und zeichnet den zugehörigen Graphen für ein frei wählbares z im gleichen Koordinatensystem wie das Planungspolygon ein.
5. Optimum:
   - Man untersucht, welche Parallele zur Zielgerade das Planungspolygon in mindestens einem Punkt P schneidet und ein optimales z liefert.
   - P ist der optimale Punkt; man berechnet seine Koordinaten.
   - Falls die Koordinaten von P nicht ganze Zahlen sind, die gesuchten Unbekannten jedoch ganzzahlig sein sollten, muss man die Umgebung von P in einer zusätzliche Skizze vergrössert darstellen, damit man gegebenenfalls richtig runden kann.
6. Antwort:

- Man liest die Aufgabenstellung erneut.
- Man beantwortet die gestellten Fragen mit einem Text.