Zahlen & Rechnen

I like $\mathbb{P}$

Inhaltsverzeichnis

1. Mengenlehre

1.1. Historisches zur Mengenlehre

Die Mengenlehre kann als Fundament der gesamten modernen Mathematik aufgefasst werden. Ihre Begriffe und Sprachelemente sind heute für die Formulierung mathematischer Probleme unentbehrlich geworden. Das Kapitel zu den Relationen und Funktionen wird zeigen, dass neue Begriffe mit den Mitteln, die die Mengenlehre zur Verfügung stellt, sehr einfach definiert werden können. Damit werden Sie einen tieferen Einblick in die Relationen- und Funktionenlehre erhalten.

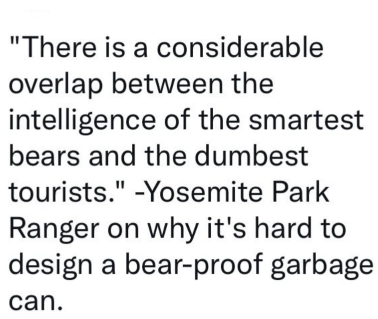


Abbildung 1: Schnittmenge

Die axiomatische Mengenlehre ist ein relativ neuer mathematischer Gegenstand. Die wichtigsten Grundbegriffe gehen auf den deutschen Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) zurück. Seine erste mengentheoretische Arbeit erschien 1874. Erst später aber erkannte man das Potenzial dieser Theorie. Nach einem Ausspruch von David Hilbert, einem bedeutenden deutschen Mathematiker (1862–1943), schuf Cantor mit seiner Mengenlehre

> „. . . einen der fruchtreichsten und kräftigsten Wissenszweig der Mathematik, ein Paradies, aus dem uns niemand soll vertreiben kännen.“

Erst der Student der Mathematik wird sich mit Grenzen und Problemen der axiomatischen Mengenlehre auseinandersetzen dürfen; auf der Stufe Mittelschule beschäftigt man sich nur mit der *naiven Mengenlehre*.

1.2. Definition der Menge nach Cantor

Unsere Sprache enthält viele Ausdrücke zur Bezeichnung von Mengen. Biologen verwenden Kategorien wie Ordnung, Familie, Gattung, um Pflanzen und Tiere, die gewisse Gemeinsamkeiten aufweisen, zusammenzufassen. Wirtschaftswissenschaftler unterteilen die Bevölkerung in verschiedene soziale Klassen. Psychologen befassen sich mit Batterien von Tests, Ärzte mit Syndromen. Alle diese Ausdrücke, wie Ansammlung, Kategorie, Klasse etc. haben eine gewisse gemeinsame Bedeutung. Die Mathematiker ihrerseits bevorzugen die Bezeichnung Menge.

Definition 1.1: Menge

Unter einer *Menge* versteht man jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Bemerkung. Es ist empfehlenswert, eine *leere Menge* zu definieren. Die *leere Menge* $\{\} = \emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.

Es gibt zwei Mäglichkeiten, eine Menge hinzuschreiben:

- die *aufzählende* Form
- die *beschreibende* Form

Definition 1.2: Element

Die Objekte einer Menge nennt man *Elemente* der Menge.

Es seien $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ irgendwelche verschiedene Objekte. Diese Objekte lassen sich zu einer Menge $\mathbb{G}$ zusammenfassen. Elemente einer Menge werden in geschweifte Klammern gefasst. Man schreibt

$$\mathbb{G} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

Beispiel 1. Die Menge der fünf traditionellen Sinne

$$\mathbb{S} = \{\text{sehen}, \text{hären}, \text{riechen}, \text{schmecken}, \text{tasten}\}$$

Mengen bezeichnet man üblicherweise mit Grossbuchstaben, Elemente mit Kleinbuchstaben. Zur Veranschaulichung benutzt man meist sogenannte *Euler*- oder *Venndiagramme*.

Bemerkung. Um auszudrücken, ob ein Element zu einer Menge $\mathbb{G}$ gehärt oder nicht, benutzt man die Symbole $\in$ (sprich „ist Element von“, oder kurz „in“) bzw. $\notin$ (sprich „ist nicht Element von“, oder kurz „nicht in“).

Übung 1 (Menge oder nicht Menge, das ist hier die Frage)**.** Entscheide, ob es sich um eine Menge im mathematischen Sinn handelt. Begründe deine Antwort.

(a) Alle Primzahlen kleiner als 20.

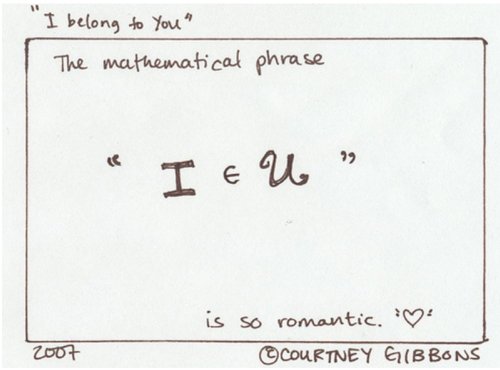


Abbildung 2: „ist Element von“

(b) Alle reichen Leute in der Schweiz.

(c) Die Menge der Patienten eines Spitals.

(d) Die Bremer Stadtmusikanten aus dem gleichnamigen Märchen.

Übung 2 (explizit)**.** Schreibe die folgenden Mengen explizit auf. Benutze mäglicherweise Hilfsmittel (Atlas, google, …)

(a) Die Menge der Primzahlen kleiner als 30

(b) Die Menge der Staaten auf dem australischen Kontinent

(c) Die Menge natürlicher Satelliten der Erde

Übung 3 (in Worten)**.** Gib eine Beschreibung in Worten der folgenden Mengen an und füge jeweils ein weiteres Element hinzu:

(a) $\{a, e, i, o, \quad \}$

(b) $\{1972, 1976, 1980, \quad \}$

(c) $\{2, 4, 8, 16, 32, \quad \}$

Übung 4 (Mississippi)**.** Schreibe als Menge:

(a) die Buchstaben im Wort Mississippi

(b) Grossbuchstaben mit einem Symmetriezentrum

Übung 5 (in or not in...)**.** Es sei $\mathbb{A}$ die Menge der Konsonanten, $\mathbb{B}$ die Menge der Vielfachen von 5 und

$$\mathbb{C} = \{\, x \mid (x-5)(x+3)(x-2) = 0 \,\}$$

Setze das richtige Zeichen ($\in$ oder $\notin$).

(a) $d \quad \mathbb{A}$

(b) $5 \quad \mathbb{C}$

(c) $99 \quad \mathbb{B}$

Übung 6 (aufzählen)**.** Es seien

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \{1,3,5,7,9\} \\ \mathbb{B} &= \{1,3,4,5,8\} \\ \mathbb{C} &= \{1,3\} \\ \mathbb{D} &= \{2,4,6\} \end{aligned}$$

Schreibe folgende Mengen in aufzählender Form:

(a) $\{\, x \mid x \in \mathbb{A}, x \in \mathbb{B} \,\}$

(b) $\{\, x \mid x \in \mathbb{A}, x \in \mathbb{B}, x \notin \mathbb{C} \,\}$

1.3. Historisches zu Zahlen

Die Zahl und das Zählen haben im Leben der Menschen schon immer eine wichtige Rolle gespielt. Beim Zählen benutzte der Mensch die Finger, wie dies heute noch Naturvölker oder Kinder tun. Dies spiegelt sich auch in den alten Zahlenzeichen wieder. Häufig waren dies Striche oder Kerben. Alte Kulturvölker wie die Babylonier, Ägypter oder Römer schufen bestimmte Symbole für die Zahlen $1, 5, 10, 100, 1000$ u.a. und bildeten damit durch Aneinanderreihen die übrigen natürlichen Zahlen.

In den ersten Jahrhunderten n.u.Z. gingen bei den Indern aus den Anfangsbuchstaben der Zahlwörter vermutlich jene Zeichen für die Zahlen 1 bis 9 hervor, aus denen sich später unsere Ziffern $1, 2, 3, \ldots, 9$ entwickelten. Die Inder gaben diesen

Ziffern einen Stellenwert und erfanden für eine leere Stelle ein besonderes Zeichen, die Null. Ein Stellenwertsystem und ein Zeichen für die Null hatten lange vor den Indern auch schon die Babylonier. Bei ihnen war 60 die Grundzahl (Sexagesimalsystem). Nach und nach wurden die natürlichen Zahlen erweitert. Die Inder kannten negative Zahlen für Schulden. Die Griechen entdeckten, das Wurzeln nicht immer als Bruch dargestellt werden können.

Hier werden folgend übliche Bezeichnungen und Notationen betreffend Zahlenmengen aufgeführt. Als Highlight soll die Existenz von irrationalen Zahlen anhand eines klassischen Beispiels illustriert werden.

1.4. Bezeichnungen

Die Menge der *natürlichen Zahlen* wird mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

abgekürzt.

Bei der Subtraktion von $3 - 3$ oder $4 - 5$ treten Schwierigkeiten auf, denn die Ergebnisse sind nicht mehr in den natürlichen Zahlen enthalten. Deshalb werden den natürlichen Zahlen bei Bedarf die Null

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

hinzugefügt, oder, wie im zweiten Fall, auch die negativen Zahlen. Man erhält so die Menge der *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Bei der Behandlung nichttrivialer Divisionen, wie etwa $2 \div 3$, entsteht ein weiteres Mal das Bedürfnis, das Zahlensystem zu erweitern. Zur Menge der ganzen Zahlen kommen die Brüche hinzu. Damit erhält man die Menge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

In dieser Zahlenmenge kännen die vier Grundoperationen $+, -, \cdot, \div$ uneingeschränkt durchgeführt werden; ausser die Division durch 0. Man sagt:

> $\mathbb{Q}$ ist *abgeschlossen* bezüglich allen vier Grundoperationen.

Bemerkung. Jede rationale Zahl lässt sich durch Division in einen Dezimalbruch verwandeln.

Dabei treten zwei Fälle auf:

- Nach endlich vielen Schritten tritt der Rest 0 auf, d.h. der Dezimalbruch ist *abbrechend*.
- Der Rest 0 tritt nie auf. Dann heisst der Dezimalbruch *periodisch*.

Beispiele. Die rationale Zahl
$$\frac{1}{8} = 0.125$$
ist abbrechend. Dagegen ist
$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$
periodisch.

Frage. Kannst du obige Beispiele mit schriftlicher Division bestätigen?

Bemerkung. Umgekehrt lässt sich jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch in einen gewähnlichen Bruch verwandeln.

Beispiel 2. Bei den abbrechenden Dezimalbrüchen ist die Umwandlung einfach. Man bestimmt die Grässe der letzten Nachkommastelle, schreibt als Bruch und kürzt gegebenenfalls:
$$0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$
Bei den periodischen hilft folgendes Vorgehen: Man definiert die gesuchte Zahl, die als Bruch dargestellt werden soll als x. Danach bestimmt man die Länge der Periode und den Wert des Vielfachen von x mit der Periodenlänge. Anschliessend wird x von diesem Produkt abgezogen und die entstandene Gleichung nach x aufgeläst; voilˆ.
$$\begin{aligned} 0.\overline{12} &= x \\ 12.\overline{12} &= 100x \\ 12 &= 99x \\ \frac{12}{99} &= x \\ \frac{4}{33} &= x \end{aligned}$$

Beispiel 3. Es gibt aber offensichtlich Dezimalbrüche, die weder abbrechend noch periodisch sind.
$$0.1234567891011121314\ldots$$

Frage. Kannst du einen nicht periodischen und nicht abbrechenden Dezimalbruch konstruieren, der nur Nullen und Einsen enthält?

Ein weiteres berühmtes Beispiel für eine nicht rationale Zahl ist die positive Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist, nämlich $\sqrt{2}$. Mit der folgenden Argumentation (indirekte Beweismethode) lässt sich dies leicht einsehen.

Satz 1.1: Es gibt irrationale Zahlen

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Dazu nehmen wir das Gegenteil der Behauptung an. Kännen wir diese Gegenannahme auf einen Widerspruch führen, so muss die Gegenannahme falsch und somit die ursprüngliche Aussage richtig sein. (Tertium non datur)

Annahme $\sqrt{2}$ ist rational. Also gibt es eine Darstellung

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

wobei $p, q \in \mathbb{N}$ und der Bruch vollständig gekürzt ist. Daraus folgt durch quadrieren und multiplizieren mit q^2

$$2q^2 = p^2$$

Das bedeutet, das p^2, und damit p eine gerade Zahl ist. Andererseits gilt

$$q^2 = \frac{p^2}{2} = p \cdot \frac{p}{2}$$

Also ist q^2 und damit q gerade. Widerspruch zur Annahme, dass $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt sei. Dann der Bruch kännte sicher mit 2 gekürzt werden, weil sowohl p als auch q gerade sind. Also ist $\sqrt{2}$ nicht rational. $\square$

Auch von der Zahl π, dem Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises, weiss man, dass sie nicht rational sein kann. Der Beweis ist nicht so einfach und gelang übrigens erst im 18. Jahrhundert. Diese und andere Tatsachen führen dazu, dass man eine umfassendere Zahlenmenge braucht, in der auch die oben genannten enthalten sind. Für unsere Zwecke wird diese Menge ausreichend sein. Wir geben hier keine formale Definition, sondern beschreiben sie folgendermassen.

Definition 1.3: Reelle Zahlen

Die *reellen Zahlen* entsprechen eindeutig sämtlichen Punkten der Zahlengeraden.

Demnach ist also auch jede rationale Zahl eine reelle. Wir unterscheiden noch durch

Definition 1.4: Irrationael Zahlen

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heissen *irrational*.

Frage. Kannst du die Situation aller oben vorgestellten Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{I}$ in einem Eulerdiagramm skizzieren?

Übung 7 (schriftlich dividieren)**.** Berechne mit Hilfe der schriftlichen Division den Wert von

(a) $\frac{1}{18}$ (b) $\frac{1}{15}$ (c) $\frac{3}{11}$ (d) $\frac{1}{17}$

Übung 8 (runter brechen)**.** Schreibe als rationale Zahl in Bruchform

(a) 0.1234 (b) $0.\overline{3}$ (c) $0.\overline{14}$ (d) $2.\overline{9}$

Übung 9 (Zahlengerade)**.** Konstruiere auf einer Zahlengerade die Punkte

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $-1\frac{1}{4}$ (d) $\sqrt{20}$ (e) $-\sqrt{3}$ (f) $0.\overline{7}$

1.5. Kardinalität einer Menge

Im täglichen Leben verwendet man die natürlichen Zahlen vor allem

- zum Nummerieren/Ordnen von Gegenständen; die natürlichen Zahlen dienen als *Ordinalzahlen*.
- als Anzahlen zur grössenmässigen Beschreibung von Mengen; als *Kardinalzahlen*.

Wenn man Elemente einer Menge $\mathbb{G}$ abzählt, so ist die letzte Zahl zugleich die Anzahl der Elemente dieser Menge.

Definition 1.5: Kardinalität

Die Anzahl der Elemente einer Menge $\mathbb{G}$ heisst *Kardinalität* oder Mächtigkeit von $\mathbb{G}$. Man schreibt $\text{card}(\mathbb{G})$.

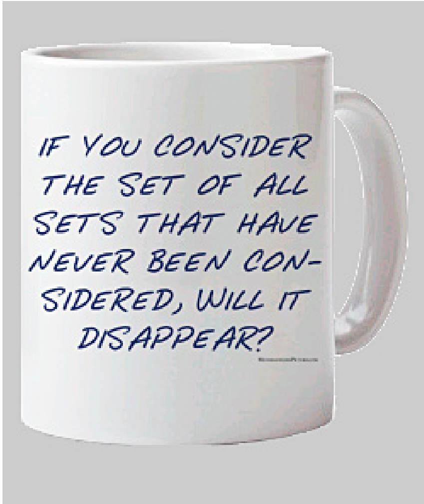


Abbildung 3: Is there a set of non considered sets?

Beispiele. Für $\mathbb{G} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ist $\text{card}(\mathbb{G}) = 5$. Oder man hat $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Bemerkung. Eine Menge kann auch eine unendliche Anzahl von Elementen enthalten; entsprechend spricht man von einer *unendlichen* Menge.

1.6. Teilmenge

Definition 1.6: Teilmenge

Ist jedes Element einer Menge $\mathbb{A}$ auch in einer Menge $\mathbb{B}$ enthalten, so ist $\mathbb{A}$ eine *Teilmenge* von $\mathbb{B}$. Man schreibt

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$$

Bemerkung. Offensichtlich ist jede Menge Teilmenge von sich selbst.

Satz 1.2: Leere Menge

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Beweis. Gegenannahme: Wäre die leere Menge nicht Teilmenge jeder Menge, dann gäbe es mindestens eine Menge, sagen wir $\mathbb{M}$, welche die leere Menge nicht enthalten würde.

Dann müsste es aber nach Definition von Teilmenge ein Element x in der leeren Menge geben, das nicht zu $\mathbb{M}$ gehärt. Widerspruch, denn somit wäre die leere Menge ja nicht leer, weil sie dieses x enthalten würde. Also muss die leere Menge Teilmenge jeder Menge sein. $\square$

Haben zwei Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ die gleichen Elemente, so schreibt man $\mathbb{A} = \mathbb{B}$.

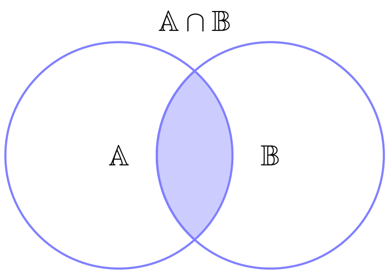
1.7. Operationen

1.7.1. Durchschnittsmenge

Definition 1.7: Schnitt

Die *Durchschnittsmenge* zweier Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die sowohl zu $\mathbb{A}$ als auch zu $\mathbb{B}$ gehären. In mathematischer Schreibweise

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\, x \mid x \in \mathbb{A} \text{ und } x \in \mathbb{B} \,\}$$



Beispiel 4. Ist $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ und $\mathbb{B} = \{2, 3\}$, dann gilt

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{2\}$$

Definition 1.8: disjunkt

Zwei Mengen heissen *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, d. h.

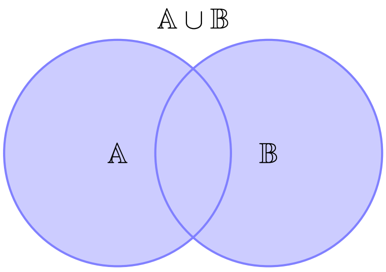
$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$$

1.7.2. Vereinigungsmenge

Definition 1.9: Vereinigung

Die *Vereinigunsmenge* zweier Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die zu $\mathbb{A}$ oder $\mathbb{B}$ gehären. Man schreibt

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{\, x \mid x \in \mathbb{A} \text{ oder } x \in \mathbb{B} \,\}$$



Beispiel 5. Für $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ wie im obigen Beispiel gilt

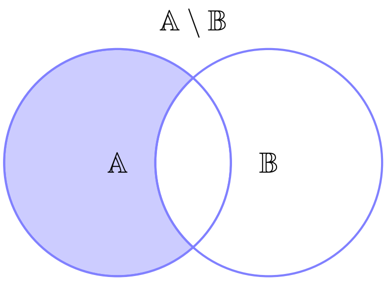
$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3\}$$

1.7.3. Differenzmenge

Definition 1.10: Differenz

Die *Differenzmenge* von $\mathbb{A}$ mit $\mathbb{B}$ besteht aus sämtlichen Elementen, die zu $\mathbb{A}$, aber nicht zu $\mathbb{B}$ gehären. Man schreibt

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{\, x \mid x \in \mathbb{A} \text{ und } x \notin \mathbb{B} \,\}$$



Beispiel 6. Mit $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ wie oben gilt

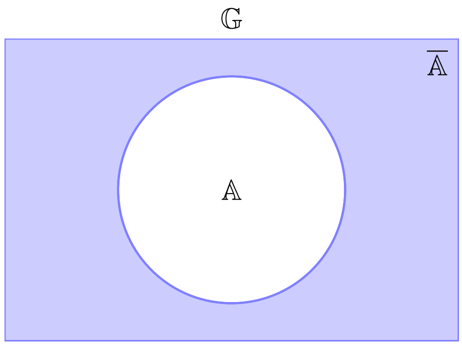
$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{1\}$$

1.7.4. Komplementärmenge

Definition 1.11: Komplement

Es sei $\mathbb{A} \subset \mathbb{G}$. Das *Komplement* von $\mathbb{A}$ bezüglich der Grundmenge $\mathbb{G}$ besteht aus sämtlichen Elementen von $\mathbb{G}$, die nicht zu $\mathbb{A}$ gehären. Man schreibt

$$\overline{\mathbb{A}} = \{\, x \mid x \in \mathbb{G} \text{ und } x \notin \mathbb{A} \,\}$$



Beispiel 7. Ist $\mathbb{G} = \{1, 2, 3\}$ und $\mathbb{A}$ wie oben, dann gilt

$$\overline{\mathbb{A}} = \{3\}$$

Übung 10 (Kapitel)**.** Es seien

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \{k, a, p, i, t, e, l\} \\ \mathbb{B} &= \{t, e, i, l\} \\ \mathbb{C} &= \{k, a, p\} \\ \mathbb{D} &= \{\} \\ \mathbb{E} &= \{e, i, s\} \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\mathbb{E} \subset \mathbb{A}$ (b) $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ (c) $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ (d) $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ (e) $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ (f) $\mathbb{E} \subset \mathbb{D}$

Übung 11 (richtig oder falsch)**.** Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $0 \notin \emptyset$

(b) $0 \subset \{0, 1, 2\}$

(c) $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$

(d) $\emptyset \subset 0$

(e) $\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}$

(f) $\{1, 2\} \not\subset \{2, 1\}$

(g) $\emptyset \in \{0\}$

(h) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$

(i) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{a\}\}$

(j) $\emptyset \in \{\emptyset, \{a\}\}$

Definition 1.12: Potenzmenge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge $\mathbb{A}$ heisst *Potenzmenge* von $\mathbb{A}$.

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\, \mathbb{B} \mid \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \,\}\,.$$

Beispiel 8. Die Potenzmenge von $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ ist

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\{\}\,, \{1\}\,, \{2\}\,, \{1, 2\}\}$$

Übung 12 (Potenzmenge)**.** Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ von

$$\mathbb{A} = \{a, b, c\}$$

Übung 13 (Kardinalität der Potenzmenge)**.** Wie viele Elemente hat die Potenzmenge einer Menge $\mathbb{A}$ mit $\operatorname{card}(\mathbb{A}) = n$?

Übung 14 (Zahlen)**.** Es sei die Grundmenge

$$\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20\}$$

sowie Teilmengen von $\mathbb{G}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \{\, x \in \mathbb{G} \mid x \text{ ist Viererzahl} \,\} \\ \mathbb{B} &= \{8, 9, 10, 11, 12, 13\} \\ \mathbb{C} &= \{\, x \in \mathbb{G} \mid x \text{ ist ungerade} \,\} \end{aligned}$$

Ermittle

(a) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ (b) $\mathbb{A} \cap \mathbb{C}$ (c) $\overline{\mathbb{C} \cup \mathbb{B}}$ (d) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{A}$

Übung 15 (Rückschluss)**.** Es seien $\mathbb{G} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{A} = \{1, 2\}$. Bestimme die Menge $\mathbb{B}$ so, dass $\mathbb{B} \cap \mathbb{A} = \{1\}$ und $\mathbb{B} \cup \mathbb{A} = \mathbb{G}$.

Übung 16 (Zahlenmengen)**.** Ermittle

(a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ (b) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$ (c) $\mathbb{R} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$

Übung 17 (Ausschluss)**.** Von 45 Schülerinnen nehmen 26 an einer Arbeitsgemeinschaft für Physik, 14 an einer Arbeitsgemeinschaft für Chemie teil. Wie viele Schülerinnen nehmen mindestens an keiner der beiden Arbeitsgemeinschaften teil, wie viele höchstens?

Übung 18 (etwas Logik)**.** Betrachte folgende Mengen: Grundmenge

$$\mathbb{G} = \{\, x \mid x \text{ ist Klubmitglied} \,\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \{\, x \mid x \text{ trägt eine Krawatte} \,\} \\
\mathbb{B} &= \{\, x \mid x \text{ hat seinen Arbeitsplatz in Basel} \,\} \\
\mathbb{C} &= \{\, x \mid x \text{ hat braune Augen} \,\} \\
\mathbb{D} &= \{\, x \mid x \text{ ist älter als 20 Jahre} \,\}
\end{aligned}$$

(a) Übersetze $\mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{D}} = \emptyset$, $\mathbb{B} \cap \mathbb{C} = \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \cup \mathbb{C} = \mathbb{G}$ jeweils in einen Satz unserer Umgangssprache.

(b) Übersetze die folgenden Sätze in die Mengensprache:
Es gibt keine Klubmitglieder mit braunen Augen, die älter als 20 Jahre sind.
Alle Klubmitglieder, die eine Krawatte tragen, arbeiten in Basel.

Übung 19 (noch etwas mehr Logik)**.** Es seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ zwei Mengen mit $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B}$. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig?
$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, $\mathbb{A} = \emptyset$.

Übung 20 (Planung)**.** Von den 26 Schülerinnen einer Klasse spielen 17 Fussball, 12 Schach und 9 Tennis. Eine Schülerin spielt gar nichts, 2 spielen alles, 3 spielen Schach und Tennis und 7 Schach und Fussball. Wie viele spielen nur Fussball und wie viele nur Tennis?

2. Polynome und Brüche

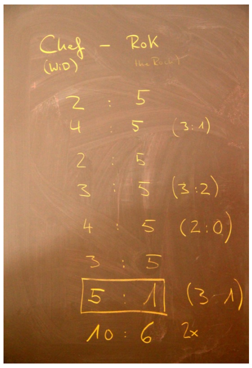
2.1. Grundlagen

Polynome und Bruchterme bilden die Bausteine vieler Berechnungen und mathematischer Theorien. Deshalb gehört die Fähigkeit, mit Polynomen sicher umgehen zu können, zu den grundlegendsten Voraussetzungen um Technik und Anwendungen der Neuzeit verstehen zu können; und nicht zuletzt um eine erfolgreiche gymnasiale Laufbahn einzuschlagen. Ein gutes Verständnis von Polynomen ist auch für den Umgang mit Bruchtermen wesentlich.

2.2. Bruchterme und Polynome

Es wird vorausgesetzt, dass ihr mit Zahlen und einzelnen Variablen Bruchrechnen könnt. Nun kommt neu dazu:

- Bruchterme beliebig zu erweitern und vollständig zu kürzen.
- mit Bruchtermen jeglicher Art zu operieren.
- mit Doppelbrüchen umzugehen.
- Äquivalenzumformungen bei Bruchtermen zu erkennen.



2.3. Das Pascal'sche Dreieck

Übung 21 (Binompotenzen)**.** Multipliziere aus.

(a) $(a+b)^1$

(b) $(a+b)^2$

(c) $(a+b)^3$

(d) $(a+b)^7$

Die Übungen (a) und (b) gehen leicht von der Hand. Teilübung (c) bedarf schon etwas mehr Aufwand und (d) scheint unmenschlich. Aber, beim Ausmultiplizieren von potenzierten Summen, insbesondere von *üblen* Summen wie $(a+b)^6$, kann das Pascal'sche

Dreieck nützlich sein; dazu später. Im Folgenden sollen nun das Pascal-Dreieck und einige seiner Eigenschaften präsentiert werden.

Das Pascal'sche Dreieck sieht wie folgt aus; es kann theoretisch unendlich „hoch" werden.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \ldots & & & & & & &
\end{array}
$$

Frage. Beschreibe Regeln für die Konstruktion des Pascal-Dreiecks?

Offensichtlich besteht das Dreieck aus lauter 1-en am Rand. In jeder folgenden Zeile nimmt die Anzahl der Zahlen um Eins zu. Die Zahl in der unteren Zeile ist gleich der Summe der darüber liegenden Zahlen. Theoretisch kann man die k-te Zahl in der n-ten Zeile auch direkt berechnen — dabei beginnt man die Zeilen mit 0 durchzunummerieren. Die Zugrunde liegende Formel ist allerdings nicht leicht zu finden.

Frage. Welche Eigenschaften erkennt man?

Das Pascal-Dreieck besitzt unter anderem folgende Eigenschaften

- In der Diagonalen $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ liest man die Dreieckszahlen ab.
- Die Summe der n-ten Zeile entspricht der Zweierpotenz 2^n.
- Das Verhältnis zweier benachbarter Zahlen einer Zeile entspricht dem Verhältnis der Anzahl Zahlen, die links und rechts davon stehen inklusive.

Pascal formulierte die letzte Eigenschaft wie folgt:

> „En tout triangle arithmétique, deux cellules contigués étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules de-

puis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de cellules depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement."

Die für unser Anfangsproblem wichtigste Eigenschaft ist

- Die Zahlen in der n-ten Zeile sind die Koeffizienten der Summanden des ausmultiplizierten Terms $(a+b)^n$.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Diese Eigenschaft erlaubt uns also, Terme der Form $(a+b)^n$ ohne grossen Rechenaufwand ausmultiplizieren zu können.

Bemerkung. Das Pascal-Dreieck liefert uns die Koeffizienten des ausmultiplizierten Terms. Weiter gilt für die beteiligten Summanden a und b, dass die Exponenten von a mit dem grössten Wert des Exponenten starten und bei jedem weiteren Summanden um 1 abnehmen; für den Summanden b ist das Gegenteil der Fall: er taucht beim ersten Summanden nicht auf, dann als $b = b^1$, danach als b^2, etc.

Beispiel 9.

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Wendet man nun diese Strategie auf ähnliche Terme an, so sind a und b bloss durch die entsprechenden Summanden zu ersetzen.

Beispiel 10. Für $(z^2-2b)^3$ ist $a=z^2$ und $b=-2b$. Also

$$\begin{aligned}(z^2-2b)^3 &= (z^2)^3 + 3\cdot(z^2)^2\cdot(-2b)+\\ &\quad + 3\cdot(z^2)\cdot(-2b)^2 + (-2b)^3\\ &= z^6 - 6z^4b + 12z^2b^2 - 8b^3\end{aligned}$$

Übung 22 (direkt Pascal)**.** Berechne mit Hilfe des Pascal'schen Dreieck

(a) $(x-1)^5$

(b) $(-3+2c)^3$

(c) $(y^3-2)^3$

(d) $(-x-z)^4$

2.4. Aufgaben zu Polynome

2 Polynome

2 Polynome

Polynome[1] sind Terme. Beispiele:

$-8ab^2cd$	1-gliedriges Polynom oder *Monom*[2]
$5yz + 2z^3$	2-gliedriges Polynom oder *Binom*[2]
$-u - v - w$	3-gliedriges Polynom oder *Trinom*[2]
$x^5 - x^4 - 1.3x^2 + 7$	4-gliedriges Polynom

Das Monom $-8ab^2cd$ besteht aus dem "Namen" ab^2cd $(abbcd)$ und dem *Koeffizienten*[3] -8.

Wir fassen das Polynom $x^5 - x^4 - 1.3x^2 + 7$ als die *Summe der Glieder* $x^5, -x^4, -1.3x^2, 7$ auf. Jedes dieser Glieder ist ein Monom.

Beispiele für Terme, die keine Polynome sind: $\frac{1}{x}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $|n-5|$, 2^y

Dagegen gilt ein Term, der zu einer Summe von Monomen oder einem einzelnen Monom äquivalent ist, ebenfalls als Polynom. Beispiele:

$$2(a^2 - 3a - 4) = 2a^2 - 6a - 8, \quad \frac{c+d}{2} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d, \quad |y^2| = y^2$$

Unter der *Normalform* eines Polynoms versteht man seine einfachste Darstellung als Summe von Monomen oder als einzelnes Monom.

2.1 Berechnung von Polynomwerten

1 Berechne den Wert des Binoms $a - b^2$ für
a) $a = 9,\ b = 4$ b) $a = 11,\ b = -3$ c) $a = -2,\ b = 5$ d) $a = b = -0.5$

2 Berechne den Wert des Trinoms $-x^2 + 4xy + 7$ für
a) $x = 3,\ y = 5$ b) $x = -2,\ y = 6$ c) $x = 0,\ y = -9.8$ d) $x = -1,\ y = -6$

[1] Griech. polýs "viel", griech. nómos "Gesetz, Regel".
[2] Griech. mónos "allein", lat. bis "zweimal", lat. tres "drei".
[3] Lat. con (= cum) "zusammen mit", lat. efficiens "bewirkend".

32

2.1 Berechnung von Polynomwerten

3 Berechne die Polynomwerte $P(10),\ P(0),\ P(-10)$
a) $P(k) = 6k^3 + 7k^2 + 8k + 9$ b) $P(z) = z^3 - z^2 - 5z$

4 Berechne die Polynomwerte $P(1),\ P(-1),\ P(2),\ P(-2)$
a) $P(a) = a^4 - 5a^2 + a + 4$ b) $P(b) = b^4 - b^3 + b^2 - b + 1$

Zu 5 – 8: Fülle die Tabelle aus.

5

	x	$5x-6$	$\frac{1}{2}x+8$	$-x^3+x^2$	$-x^2-10x-1$
a)	4				
b)	−4				
c)		19			
d)			7.5		

6

	a	b	$3a+4b$	a^2+b^2	a^2b-ab^2
a)	5	3			
b)	−2	−6			
c)	1		−25		
d)		3	0		

7

	$3y+1$	$6y+2$	$9y+3$	$-3y-1$	$-6y-2$
a)	10				
b)		16			
c)				20	
d)			4.5		

8

	z^2	$5z^2+7$	z^4	z^6-9z^2	z^8
a)	4				
b)	5				
c)		17			
d)			9		

33

2 Polynome

2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen

Glieder mit dem gleichen "Namen" kann man *zusammenfassen*.
Beispiel: $2ab - 5ab = -3ab$. Dabei werden die Koeffizienten addiert.

Glieder mit verschiedenen "Namen" kann man nicht zusammenfassen.
Beispiel: $2ab - 5a$ ist ein Binom, das nicht zu einem Monom umgeformt werden kann.

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.2 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

9 a) $10a - 5b - c - 17a - 6b + 9a - 7b - 12c + 8b$
b) $-x^2 + 35x - 24 - 3x^2 + 19 - 47x - 19 + 48x + 2x^2$

10 a) $4ab - 6.2ac + 5bc - 9.3ab - 1.5ac - 4bc + 9.4ab$
b) $xyz - \frac{3}{2}xy - x - \frac{25}{3}xyz - 11 + \frac{7}{6}xy - x - xy + \frac{25}{3}xyz$

11 a) $(4m - 17) + (11m - 6)$ b) $5n^2 + 8n + (n^3 - 5n^2)$
c) $x^2 - 3x - 2 + (-x^2 + x + 2)$ d) $(2ef + e - 5f) - 9e - 6f + 3$

12 a) $8u + (6v + w) + (-15u + 12w) + (-9v - 3w) + (7u - 4v)$
b) $8u + (6v + w - 15u) + 12w + (-9v) + (-3w + 7u - 4v)$
c) $8u + 6v + (w - 15u) + (12w - 9v - 3w + 7u) + (-4v)$
d) $(8u + 6v) + w + (-15u) + (12w - 9v - 3w + 7u - 4v)$

Zu 13 – 16: Addiere die untereinander stehenden Polynome.

13 a) $\begin{array}{l} 136a - 75b \\ -19a + 28b \end{array}$ b) $\begin{array}{l} -7r^2 - 6r \\ 15r^2 + r \end{array}$ c) $\begin{array}{l} -3x^2y + \frac{7}{2}xy^2 \\ \frac{8}{3}x^2y - \frac{5}{2}xy^2 \end{array}$

14 a) $\begin{array}{l} -x^2 + 2x - 5 \\ 4x^2 - 3x + 8 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 2a - 7b - 9c \\ 5b - 6c - d \end{array}$ c) $\begin{array}{l} u^3 - u^2v + uv^2 \\ u^2v - uv^2 + v^3 \end{array}$

15 a) $\begin{array}{l} -6abc + 5ab - 4a - 13 \\ 9abc - 8ab - 2a + 10 \\ 7abc + 3ab - a - 12 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} -1.3z^2 - 2.4z - 1.9 \\ 7.6z^2 + 0.8z - 0.1 \\ -0.2z^2 + 1.6z + 5.4 \end{array}$

16 a) $\begin{array}{l} p^4 - 6p^3 - 12p^2 \\ p^3 - 6p^2 - 12p \\ -p^2 + 6p + 12 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 + y - 1 \\ x^2 - 6y^2 - 7x \\ xy + 2y^2 - 5x + 8 \end{array}$

34

2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen

17 a) $-(a + b)$ b) $-(11r + 13s + 8t)$ c) $-(x^3 + 4x^2 + 5x + 6)$
d) $-(-z)$ e) $-(-u + v - w - y)$ f) $-(2ab - 7ac - a + 9)$

18 Stelle die Werte der Binome $a + b,\ a - b,\ -a + b,\ -a - b,\ b + a,\ b - a$ für
a) $a = 29,\ b = 53$ b) $a = -47,\ b = 16$ c) $a = 61,\ b = -35$
d) $a = -28,\ b = -14$
in einer Wertetabelle zusammen.

19 a) $a - (b + c)$ b) $5k - (k + 3)$ c) $-n - (n^2 + 4n)$

20 a) $8y + 2 - (3y + 5)$ b) $2x + 4 - (x^3 + 4)$ c) $2.5a - 3.6b - (1.8b + c)$

21 a) $a - (b + c + d)$ b) $4x - 5y + 6z - (3x + 2y + 8z)$

22 a) $x^2 + 8x - (x^2 + 2x + 4)$ b) $2a^3 - 3a^2b - (a^2b + ab^2 + ab)$

23 a) $a - (b - c)$ b) $a - (-b + c)$ c) $a - (-b - c)$
d) $3m - (3m - 4)$ e) $\frac{1}{2}y - \left(-x - \frac{1}{3}y\right)$ f) $12t^2 - (-12t^2 + 5t)$

24 a) $z^2 - 4z - (2z - 3)$ b) $-5e + 7 - (-5e + 7)$ c) $p + q - (-p - q)$

25 a) $a - (-b + c - d)$ b) $a - (b - c - d + e)$
c) $4v - (-5u - 6v + 7w)$ d) $8x - 8y - 8z - (x - 2y + 3z)$

26 a) $-6g + 5 - (g^2 - 7g - 1)$ b) $a - 2b + 3c - 4d - (a - 2b + 3c - 4d)$

Zu 27 – 30: Subtrahiere das untere Polynom vom oberen.

27 a) $\begin{array}{l} 3a - 5b \\ 9a + 7b \end{array}$ b) $\begin{array}{l} -2c - d \\ 6c - d \end{array}$ c) $\begin{array}{l} -8z + 7 \\ -8z - 12 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} x^2 + \frac{2}{3}y^2 \\ -x^2 - \frac{1}{5}y^2 \end{array}$

28 a) $\begin{array}{l} 5rs - 7rt - 9st \\ -6rs + rt - st \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 1.6n^3 - 0.8n^2 + 2.7n - 3.2 \\ 1.2n^3 - 0.6n^2 - 1.5n + 4.8 \end{array}$

29 a) $\begin{array}{l} x - y + z \\ x - z \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 4a \\ 2a - 5b + c \end{array}$ c) $\begin{array}{l} -e^2 + 9e \\ e^2 - 3 \end{array}$ d) $\begin{array}{l} 8p - 8q \\ 7q - 7r \end{array}$

30 a) $\begin{array}{l} 5at - 2bt - 3c \\ 5at - 2bt + 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{l} 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x \\ -4x^3 + 6x^2 + 8x - 10 \end{array}$

31 $P_1 = a - 0.5b - 1.8c + 2d,\quad P_2 = 1.4b - 0.6c - 3.5d + 2e$
a) $P_1 + P_2 = ?$ b) $P_1 - P_2 = ?$ c) $P_2 - P_1 = ?$

35

32 $P_1 = -5x^2 - 7xy - y^2 - 4x + 8y - 2, \quad P_2 = 5x^2 + xy - y^2 + 3x - 4y - 9$
a) Addiere die Polynome P_1 und P_2.
b) Subtrahiere das Polynom P_2 von P_1.
c) Subtrahiere das Polynom P_1 von P_2.

33 Setze in den Term $a - b$ und in den Term $b - a$ ein:
a) $a = -26,\ b = -15$ b) $a = 4.4,\ b = -3.9$
c) $a = 5x + 2y,\ b = 4x + y$ d) $a = 2t - 3,\ b = t + 6$
e) $a = v - 7,\ b = w - 5$ f) $a = z^2 + 2z - 4,\ b = 3z^2 - z + 8$

34 Setze in den Term $a - b - c$ ein:
a) $a = 14,\ b = 60,\ c = 29$
b) $a = -25,\ b = -37,\ c = -12$
c) $a = 4n - 5,\ b = 3n - 6,\ c = 2n - 7$
d) $a = x - 4y,\ b = -2x + 9z,\ c = 5y - 8z$
e) $a = u^2 - u + 3,\ b = 6u - 7,\ c = u^2 - 4u$
f) $a = p,\ b = q - r,\ c = r - q$

35 a) $2v - (5w + 10) - 4w - (8v - 7) - 1 + (6v - 9w)$
b) $a - (2b + 3c + 4) + (-5a + 6) - 7b - (-8a + 9b + 10c - 11)$

36 a) $\frac{1}{3} - (m^2 - m - 2.5) - 4m - \left(m^2 + \frac{5}{6}\right)$
b) $8x^2y - 2xy^2 - (7x^2y^2 + 4xy^2 - 5xy) - 16x^2y - (-13x^2y^2 + 8x^2y - 6xy^2)$

37 a) $a - (b - (c - d))$ b) $-(-(3p + 8) + 6p) + 8$
c) $15y - [5y - (2y - z)]$ d) $6.4r - [2.7 - (4.5r + 3.1)]$
e) $-[a - (6b + 4) + b] + 3a - 7$ f) $8x^2 - [4x - (3x^2 - 7x + 2)] + 9$

38 a) $-9s + 6t - [t - (5s - 8t) - (3s + 7t) - s]$
b) $12q^2 - (25q^2 - (17q - 20) - 13q^2) - (10q - 15)$

39 a) $6.75f - (3.2g - 1.05) - [2.54f - (f - 0.49g + 0.07)]$
b) $-\left[\frac{1}{10}x - \left(xy - \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}y\right)\right] + xy - \left(\frac{1}{15}x - \frac{1}{4}y\right)$

40 $45n^3 - (12n^2 + 3n - 1) - [45n^3 - (5n^2 + 10n - 1) - (-9n^2 + 16n + 3)] - 24n^2$

41 a) $+[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$
b) $+[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$
c) $-[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$
d) $-[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$

42 a) $(15x - 7y) - [5x - (10x + 8y) + 12] - [20x + y - (5x + 12)] - y$
b) $-[-(-2u^2 + 11u - 13) + 4u + 5] + 7u^2 - u - [3u - 8 - (-u^2 + 9)]$

43 a) $a - (b - (c - (d - e)))$
b) $1 - (2 - (3 - (4 - (5 - z))))$
c) $50k + 29 - \{18k - [44 - (7k + 36)]\} - 13k$

44 a) $-(3p + 8) + 5p - \{-6p + 2 - [9p - (p - 1) - 7] + 4p\}$
b) $2a^3 - \{4a - [4 - (6a^3 - 1) - a^2] - (3a^2 - 5) + 3a - [4a^3 - (2a^2 - 7a)]\}$
c) $20x^2 - (7xy - (3y^2 - (8x^2 + 11xy + 6y^2) - 12x^2) - 5y^2) - (9xy - 4y^2)$

2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.3 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

45 a) $3(2a + 5b)$ b) $(-2)(9c - d)$ c) $(-n)(-n + 8)$
d) $(-x - 2y)(-3)$ e) $(4z - 1)z^2$ f) $(6s - 5t)(-0.5u)$

46 In welchen Aufgaben von Nr. 45 kann man ein Klammerpaar weglassen, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert?

47 a) $-5(7v - 9w)$ b) $-c(-a + b - c)$ c) $2p(p^2 - 1.5p - 4)$

48 a) $(8s + 3t)3u$ b) $(-x - y + z - 1)(-1)$ c) $(e + 2f - 6)ef$

49 Multipliziere das Polynom $x^2 - 0.8x + 2.4$ mit
a) 4 b) -4 c) $\frac{2}{3}$ d) $5x$ e) $-x^2$ f) $-0.5y$

50 Multipliziere das Polynom $2a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 8b^3$ mit
a) -1 b) 0 c) a d) $-b$ e) ab f) $-2.5r$

51 a) $3uv^2(u^4 - 3u^2v^2 - 2v^4)$ b) $-2abc(2a^2 + 4ab - b^2 - ac + 8c^2)$

52 a) $(-m^6 + m^4 - m^2 + 1)(-m)$ b) $-\frac{1}{3}xy^2z^3\left(\frac{5}{2}x^3y^2z - 6x^2y + \frac{3}{5}x\right)$

53 a) $(-1)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$ b) $b_3(-b_1 + b_2 - b_3 + b_4)$

54 a) $(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)x_4$ b) $y_1y_4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

55 a) $4(a + 2b) + 3(a - 3b)$ b) $d(c - 11) - c(d - 9)$
c) $x - 5y - 8(x - y + z)$ d) $n^2 - n(n + 5) - 6(1 - n)$

56 a) $2(3u - v) - 3(2u + v)$ b) $a(9a + 10) - 5(a^2 + 2a - 3)$
c) $p(q - r) - q(p - r) - r(-p + q)$ d) $4(2x - 7y - 3z) - 7(x - 4y) + z$

Zu 57 – 78: $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

57 a) $(a + b)(c + d)$ b) $(x + 4)(x + y)$ c) $(t + 2)(t + 5)$
d) $(e + f)(g - h)$ e) $(v - 6)(w + 1)$ f) $(p - q)(x + 7)$

58 a) $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$ b) $(n + 8)(n - 3)$ c) $(a - z)(b + z)$

59 a) $(a - b)(c - d)$ b) $(x - y)(z - 5)$ c) $(k - 2)(k - 4)$

60 a) $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$ b) $(u - 3)(v - 3)$ c) $(p - x)(p - y)$

61 a) $(-s_1 + s_2)(t_1 - t_2)$ b) $(-r + 6)(-r + 4)$ c) $(-f - g)(-g + 1)$

62 a) $(a + b)(x + y)$ b) $(a - b)(x + y)$ c) $(a - b)(x - y)$
d) $(-a + b)(-x + y)$ e) $(-a - b)(x - y)$ f) $(-a + b)(-x - y)$

63 a) $(2c - 7)(4d - 1)$ b) $(5v - 3w)(-6w + 5)$ c) $\left(m + \frac{1}{6}\right)\left(4m - \frac{3}{5}n\right)$

64 a) $(3x - 2y)(2x - 3y)$ b) $(-11a + 17)(-10b - 17)$ c) $\left(\frac{3}{2}r - 6\right)\left(\frac{2}{3}s + 8\right)$

65 a) $(z^2 - 1)(z + 1)$ b) $(st - 9s)(-st + 9t)$ c) $(4a^2 - 5b^2)(3a^2 - b^2)$

66 a) $(p^3 - p)(p^2 - p)$ b) $(10x^2 + 5y)(2x - 6y^2)$ c) $(k^4 + 0.4)(k^2 - 0.2)$

67 a) $(a + 6)(a - 2)$ b) $(c - 9)(c + 1)$ c) $(x - 5)(x - 3)$
d) $(b - 7)(b - 1)$ e) $(z + 11)(z - 11)$ f) $(8 - t)(4 - t)$

68 a) $(x - 12)(x + 5)$ b) $(p + 2)(p - 20)$ c) $(a - 2)(a - 9)$
d) $(1 + n)(15 - n)$ e) $(r - 6)(r - 6)$ f) $(y - 3)(y + 4)$

69 Berechne $a^2 - 10a + 24$ sowie $(4 - a)(6 - a)$ für
a) $a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ b) $a = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ c) $a = 0,\ 16,\ -16,\ 2.5$

70 Berechne $2x^2 + 5x - 3$ sowie $(x + 3)(2x - 1)$ für
a) $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ b) $x = -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ c) $x = 0,\ 10,\ -10,\ 0.6,\ \frac{1}{2}$

71 a) $(2a - 5)(3a - 1)$ b) $(9 - 4x)(-3 + x)$ c) $(7i - 1)(5i + 1)$
d) $(-k + 4)(-k + 4)$ e) $(2d - 1)(-3d + 8)$ f) $\left(z + \frac{9}{10}\right)\left(z - \frac{5}{6}\right)$

72 a) $(5y - 13)(y - 7)$ b) $(10 - 3a)(3 + 10a)$ c) $(-5s - 6)(5s - 6)$
d) $(q - 1.2)(q - 0.4)$ e) $(-c - 5)(-c - 2)$ f) $\left(\frac{3}{2}r + 3\right)\left(2r - \frac{4}{3}\right)$

73 a) $(a + 2b)(3a - b)$ b) $(4x - y)(5x + 2y)$ c) $(-c + d)(-c + 12d)$

74 a) $(q - 3r)(q - 4r)$ b) $(2a + 3c)(-a + 6c)$ c) $(8s - 9t)(10s + 11t)$

75 a) $(t^2 + 2)(t^2 + 7)$ b) $(p^2 - 5)(3p^2 - 5)$ c) $(n^2 - 2)(2n^2 + 1)$

76 a) $(x^2 - 10)(x^2 - 10)$ b) $(-w^2 + 8)(4w^2 + 9)$ c) $(0.3z^2 + 6)(2z^2 - 1)$

77 a) $(3a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)$ b) $(c^3 - 5)(c^3 + 4)$ c) $(x^2 - 2x)(-3x + 1)$

78 a) $(x^2 - 2y^2)(x^2 - 8y^2)$ b) $(6r - 1)(r^2 + 2r)$ c) $(m^2 + 4m)(m^2 - 3m)$

79 a) $(a - 2b)(c - d + e)$ b) $(x - z - 1)(2x + 3y)$

80 a) $(p + q - r)(m - n)$ b) $(4a - b)(b - c - 1)$

81 a) $(4x^2 - 5x + 6)(3x - 1)$ b) $(y - 1)(4y^2 + 3y - 1)$

82 a) $(a + 1)(a^2 - a - 1)$ b) $(-6z^2 + 3z + 4)(-5z + 3)$

83 a) $(2x + 4y - z)(3x - 6y + z)$ b) $(-s^2 + 3s + 1)(s^2 - s + 2)$

84 a) $(a - 2b - 3)(2a + 3b - 2)$ b) $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$

85 $(5xy - 2xz + yz)(xy + xz - 2yz)$

86 $(3a^2 - ab - 4b^2)(-a^2 + 2ab + b^2)$

87 a) $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ b) $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$

88 a) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ b) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

89 $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3)(3x^2 + 2x + 1)$

90 $(z^3 - 2z^2 - 5z + 6)(z^3 + 2z^2 - 5z - 6)$

91 a) $2(a + b)(c - d)$ b) $-4(p - 2)(-p + s)$
c) $5(2x - 1)(3x + 1)$ d) $(y + 3)(y - 6)(-y)$

92 a) $-0.7(a-2)(4b+5)$ b) $2(0.5r-3)(r-0.5)$
c) $n(3n-1)(n-6)$ d) $(x-2y)(-x+3y)z$

93 a) $(a-b)(a+b)(x-y)$ b) $(k+1)(k+2)(k+3)$
c) $(g+2)(2v-1)(v+4)$ d) $(2x+1)(3x-1)(5x+2)$

94 a) $(1-c)(5-x)(5+x)$ b) $(3a-b)(a-b)(a+2b)$
c) $(z+2)(z-2)(z^2+4)$ d) $(n^2+1)(2n^2-3)(3n^2-2)$

95 a) $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$ b) $(2x+3)(y-4)(3z+1)$
c) $(x+2)(x-3)(x+4)$ d) $(c+d)(c-8)(d-8)$

96 a) $(a+b)(s-t)(x+y)$ b) $(x-5)(x+6)(x-1)$
c) $(-x+2)(-y+3)(z-4)$ d) $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2)$

97 a) $(a+b)(a+2b)+(a-b)(a-2b)$ b) $(x+4)(x+5)-2x(x+7)$
c) $(c+d)(8u-v)-d(8u-v)$ d) $(2a-3)(4a-1)-(5a+4)(a-1)$

98 a) $(3x-y)(x+y)+(2x+y)(x-y)$ b) $5p(p-3)-(2p+1)(p-8)$
c) $(a-5)(b-5)-(a-6)(b-6)$ d) $7n(9n+28)-(7n-1)(9n+28)$

99 Berechne die Polynomwerte $P(3)$, $P(7)$, $P(10)$ und $P(-99.5)$.
a) $P(x)=(x-7.5)(x-6)-(x-8)(x-5.5)$
b) $P(t)=2t^2-(2t+5)(t-3)$

100 Berechne die Polynomwerte $P(11)$, $P(-2)$, $P(0)$ und $P(3.33)$.
a) $P(a)=(a-5)(a-8)-(a-10)(a-4)$
b) $P(x)=(4x+9)(4x+5)-(8x+15)(2x+3)$

101 a) $17r^2-(4r-2)(8r-5)+(3r-4)(5r+6)$
b) $(a-7)(a+1)(y+z)+(a-7)(a+1)(-z)$

102 a) $(2x+3)(3x-4)x-(x-11)(x-1)-6x^3$
b) $-(u-1)(2u-1)(3u-1)-1+6u(u^2-u+1)$

103 a) $4a^2-5[a(2a-9)-3(a+7)]+6(a-12)(a+1)$
b) $[(2m-15)(3m-4)-5(m^2-9m+12)](m-1)$

104 a) $13x-[-11y-3(5x-6y)+5(2x-7y)-26x]-12y$
b) $36-[r-(r+3)(r-2)][r^2-(r+3)(r-2)]+(r-6)r^2$

105 a) $40z-\{8z-(9z-4)-2[3z-(7z+1)-(z-9)]-(3z-5(5z-3))\}$
b) $((((ax+b)x+c)x+d)x+e)x+f$

106 a) $(25u-13v)-\{15u-[14u-3(4u-5v)-8u]-7(2u+4v)\}$
b) $1-x(1-x(1-x(1-x(1-x(1-x)))))$

Zu 107, 108: $a=x-1$, $b=x+2$, $c=x-3$, $d=x+4$. Ersetze a, b, c, d im folgenden Term durch das entsprechende Binom in x und gib die Normalform des so entstandenen Polynoms an.

107 a) ab b) $b+cd$ c) $2a-bd$
d) $(a+b)c$ e) $ac+bc$ f) d^2-12

108 a) $a-bcd$ b) $ab-ac$ c) $a(b-c)$
d) c^2+3c e) $(4a-3c)(2b+d)$ f) $abcd$

Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation, d. h.
$a:b=x \quad \Leftrightarrow \quad a=xb; \quad (a:b)b=a; \quad (ab):b=a$

Der Divisionalgorithmus und Zerlegungen mit Rest folgen im Abschnitt 2.5, die Darstellung von Quotienten in Bruchform im Kapitel 5.

109 a) $(-58a):(-2)$ b) $21rs:3s$ c) $15ac:(-15a)$

110 a) $(-35x):7x$ b) $84d:(-6)$ c) $(-9ab):(-9ab)$

111 a) $3n:6n$ b) $-15y:20$ c) $-8cp:\left(-\frac{1}{2}c\right)$

112 a) $26z:\left(-\frac{2}{3}\right)$ b) $-54k:(-24k)$ c) $0.4ad:(-1.4d)$

113 a) $-19t^2:(-t)$ b) $-105px^2:1.5px$ c) $-21r^3:(-r^2)$

114 a) $-2ab^3:(-4ab)$ b) $119u^4z:(-7u^2)$ c) $-9.2m^2n^2:2.3mn$

115 a) $-5c^3d^4:5c^2d^2$ b) $-42w^5:(-3w^2)$ c) $-28ax^3y^4:16ax^2$

116 a) $6a^4n^4:\left(-\frac{1}{3}a^3n^4\right)$ b) $-x^3y^4z^5:x^2y^3z^4$ c) $-\frac{1}{8}mq^4:\left(-\frac{7}{2}q^3\right)$

117 a) $(8a-8b):8$ b) $(uv+vw):v$ c) $(15x^2+5x):\left(-\frac{5}{3}\right)$

118 a) $(6m+12n):6$ b) $(24a-20):\left(-\frac{4}{5}\right)$ c) $(-bt+ct):(-t)$

119 a) $(15ab-10a):5a$ b) $(p^2-p):(-p)$
c) $(1.4x^4+2x^3z):0.1x^3$ d) $(-7cy+3y):(-3y)$

120 a) $(14r^2-35r):(-7r)$ b) $(u^2v-uv):uv$
c) $(-9ax^4+8bx^3):(-6x^2)$ d) $(8apq-12bpq):\left(-\frac{1}{4}pq\right)$

121 a) $(18ab+27ac-36ad):9a$ b) $(10k^2+17k-32):(-1)$
c) $(-1.8x^5+2.4x^4-3x^3+3.6x^2):(-2.4x^2)$

122 a) $(-12at+20bt-32ct):(-4t)$ b) $(16z^3-35z^2-27z):42z$
c) $(70x^5y+25x^4y^3-90x^3y^4-5x^2y):(-5x^2y)$

123 a) $(a+c):[-(a+c)]$ b) $(x-y):(-y+x)$ c) $(r-5):(-r+5)$

124 a) $(1-z):(z-1)$ b) $(-m+n):(-n+m)$ c) $(u^2-8):(8-u^2)$

125 a) $4x(y+z):2x$ b) $-15a^2(s-3):5a$
c) $(d-6)k:(-k)$ d) $-x^4y^3(8x+12):(-4x^3y^3)$

126 a) $abc(a+b-c):ab$ b) $p^3(-2p+1):(-p)$
c) $-64n^2(x+y):(-8n)$ d) $3z(z^2+10z-24):6z$

127 a) $6cd^3(u-v):3d(u-v)$ b) $-21(2r-5):7(5-2r)$
c) $2.5(a+b)(a-2):(a+b)$ d) $2.5(a+b)(a-2):(2-a)$

128 a) $-34c(2x-y):51(-2x+y)$ b) $7.2(t-5)^2:1.8(t-5)$
c) $(a-b)^2(a+b):\left[\frac{1}{2}(b-a)\right]^2$ d) $9mn^3(n-6)(2n-1):3mn(6-n)$

129 $(12x^2+11x-56):(4x-7)$
Hinweis: Bestimme die Koeffizienten a, b so, dass $(ax+b)(4x-7)=12x^2+11x-56$.

130 Ist der Quotient ein Polynom? Bestimme dieses Polynom gegebenenfalls wie in Nr. 129.
a) $(8x^2-46x+45):(2x-9)$ b) $(15x^2+28x+8):(3x+4)$
c) $(-y^2+2y+24):(y-6)$ d) $(z^2-2.5z-21):(2z+7)$

Zu 131 – 134: Der Quotient soll ein Polynom sein. Bestimme dieses Polynom sowie die Zahl c.

131 a) $(18x^2+cx+14):(3x+2)$ b) $(x^2+cx+32):(-x+4)$

132 a) $(10x^2+cx-5):(5x+1)$ b) $(2x^2+cx+42):(3x-6)$

133 a) $(21x^2-37x+c):(7x-3)$ b) $(cx^2+3x-10):(x+2)$

134 a) $(cx^2-20x+25):(2x-5)$ b) $(x^2+3.6x+c):(0.4x+1.2)$

2.4 Formeln

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$		
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$	Binomische Formeln	
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$		
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	Trinomische Formel	

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.4 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

Zu 135 – 138: Rechne auf 2 Arten.

135 a) $(10+3)^2$ b) $(2+0.4)^2$ c) $\left(6\frac{2}{3}\right)^2$ d) $(2x+3x)^2$

136 a) $(1.8+1.2)^2$ b) $(100+1)^2$ c) $\left(4\frac{3}{4}\right)^2$ d) $(y+5y)^2$

137 a) $(10-4)^2$ b) $(2-11)^2$ c) $(-1-20)^2$ d) $(5c-2c)^2$

138 a) $(3-20)^2$ b) $(-30+5)^2$ c) $(1.7-0.2)^2$ d) $(a-a)^2$

139 a) $(2x+3)^2$ b) $(4c+5d)^2$ c) $(r^2+17)^2$

140 a) $(a+11)^2$ b) $(3m^2+0.4)^2$ c) $(5b+23)^2$

141 a) $(x+(-y))^2$ b) $(a-b)^2$ c) $(6n-1)^2$

142 a) $(c-2d)^2$ b) $(k^2-k)^2$ c) $(10p^2-18)^2$

143 a) $(-a+b)^2$ b) $(-a-b)^2$ c) $(-s+1.9)^2$

144 a) $(-8m-7)^2$ b) $\left(-q+\frac{5}{6}\right)^2$ c) $(-22w-5)^2$

145 a) $(2ab+16)^2$ b) $(xy-yz)^2$ c) $\left(-2uv+\frac{3}{4}v\right)^2$

146 a) $(3r^2-6rs)^2$ b) $(-9p^3+4p^2)^2$ c) $(0.3a^2+b^2)^2$

Zu 147, 148: Berechne $(a+b)(a-b)$ sowie a^2-b^2 für

147 a) $a=30,\ b=2$ b) $a=5,\ b=15$ c) $a=-20,\ b=3$
d) $a=4x,\ b=3x$

148 a) $a=17,\ b=3$ b) $a=17,\ b=-3$ c) $a=-8,\ b=0.4$
d) $a=t,\ b=t$

149 a) $(2x+5)(2x-5)$ b) $\left(r+\frac{2}{3}s\right)\left(r-\frac{2}{3}s\right)$ c) $(4y-1)(4y+1)$

150 a) $(a+7b)(a-7b)$ b) $(z^2-1)(z^2+1)$ c) $(8c+3d)(8c-3d)$

151 a) $(-3n+10)(-3n-10)$ b) $(-4a+12bc)(-4a-12bc)$

152 a) $(-0.6r+1)(-0.6r-1)$ b) $(-2u-11v)(-2u+11v)$

153 a) $(5n+4)(-5n+4)$ b) $(y-2z)(-y-2z)$

154 a) $(-8q-1)(8q-1)$ b) $(7a+10b)(10b-7a)$

155 a) $\left(\frac{7}{2}z^2+1\right)\left(\frac{7}{2}z^2-1\right)$ b) $(-m^3+m)(m^3+m)$
c) $(-xy-13)(-xy+13)$ d) $(1.4i-2.3)(1.4i+2.3)$

156 a) $(c^3-d^3)(c^3+d^3)$ b) $\left(9ab-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{3}{5}b+9ab\right)$
c) $(4p^4+1)(4p^4-1)$ d) $(-25n^2+6n)(-25n^2+6n)$

157 a) $(5x^2-8x)^2$ b) $\left(2e+3\frac{1}{3}\right)\left(2e-3\frac{1}{3}\right)$
c) $(17+4n)(17-4n)$ d) $(-a^2-b^2)(-a^2-b^2)$

158 a) $(9uv^2-1)(9uv^2+1)$ b) $(-6r^2+19)(-6r^2-19)$
c) $\left(\frac{7}{6}a-\frac{3}{7}b\right)\left(-\frac{3}{7}b+\frac{7}{6}a\right)$ d) $[(5x+2y)(5x-2y)]^2$

159 a) $(x+3y+4z)^2$ b) $(2a-b-3)^2$ c) $(-n^2+n+1)^2$

160 a) $(4a-1.5b+c)^2$ b) $(-u^2-2uv+2v^2)^2$ c) $[(p+1)(p+5)]^2$

161 a) $(a+b+c+d)^2$ b) $(x^3-x^2-x-4)^2$

162 a) $(5x-2y+z-1)^2$ b) $(a+b+c+d+1)^2$

163 a) $2c(c-5)^2$ b) $(x-y)(y-z)^2$ c) $\left(k+\frac{1}{4}\right)(2k-6)^2$

164 a) $(u-v)(u+3v)^2$ b) $(-p+2)^2(p+4)$ c) $(a+b)(a+b)^2$

165 a) $(a+b)^3$ b) $(c+10)^3$ c) $(2r+5s)^3$ d) $(z^2+3z)^3$

166 a) $(d+1)^3$ b) $(uv+v)^3$ c) $\left(m^2+\frac{1}{3}\right)^3$ d) $(10k+10)^3$

167 a) $(a-b)^3$ b) $(4g-1)^3$ c) $\left(\frac{1}{2}k-2\right)^3$ d) $(x^2-y^2)^3$

168 a) $(3n^2+2n)^3$ b) $(3n^2-2n)^3$ c) $(-3n^2+2n)^3$ d) $(-3n^2-2n)^3$

169 a) $(2n+5)(2n-5)(n+1)$ b) $(a-b)(x+y)(x-y)$
c) $(6z^2+1)(3z+2)(3z-2)$ d) $(r+3)(r-3)(r+4)(r-4)$

170 a) $(a+2)(a-2)(7b-8)$ b) $(4x+2)(4x-2)(x+1.5)(x-1.5)$
c) $(9c^2+d^2)(3c-d)(3c+d)$ d) $(p-5)^2(p+5)^2$

171 a) $(x+9)(x-9)-(y+9)(y-9)$ b) $(7e+4)^2+(7e-4)^2$
c) $(a+4b)(a-4b)-(a-5b)^2$ d) $(2uv)^2-(2u^2+v^2)^2$

172 a) $(2y+2z)^2-2(y+z)^2$ b) $(r^2+r)(r^2-r)+\left(r^3-\frac{1}{2}r\right)^2$
c) $(3x+8)^2-(3x-8)^2$ d) $(a^2-b^2)^2-(a+b)^2(a-b)^2$

173 $P(u,v)=u^2-(u+v)(u-v)$;
berechne die Polynomwerte $P(13,\ 9)$, $P(4,\ 7)$, $P(8,\ -12)$ und $P(-5.1,\ -6)$.

174 $P(x)=(x+9)^2-(x+7)(x+11)$;
berechne die Polynomwerte $P(3)$, $P(-15)$, $P(9)$ und $P(-7.5)$.

175 a) $(4a-b)^2-3(a+b)(a-b)-2b(-a+2b)$
b) $(2x+3y)^2+(4y-3x)^2-3(7y^2-x^2)-4(2x-y)^2$

176 a) $(5s-3)^2-(9s+1)(2s-7)-(s-3)^2-40s$
b) $6(n-1)(n+1)-(n^2+1)^2+n^4-2(-n+2)(-2n+1)$

177 $(x-y-z)^2+(-x+y-z)^2+(-x-y+z)^2$

178 a) $(r^2+r+4)^2+(r^2-r-5)^2$ b) $(-7a+b+6c)^2-(7a-b-6c)^2$

179 a) $(n+1)^3-(n-1)^3$ b) $(q^2+2)^3-6(q^2+1)^2$

180 a) $(-a+b)^3+b(2a-b)(2a+b)$ b) $(x-1)(x+8)^2-(x-4)^3$

181 a) $2m^2-17m-5(m-2)(m-6)-[8(m-7)-3(m+4)^2]$
b) $\{[3b-(b+4)(b-1)]^2-b^4\}(b^2+2)+8b^4$

182 a) $2c^2\{(a-c)^2-[a(a-c)-c(a+c)]\}$
b) $(k+5)^2-(2k+5)[(k-1)^2-(k+2)(k-2)]$

Zu 183 – 188: Multipliziere mit Hilfe binomischer Formeln aus. Beispiel:
$[a+b+c][a-b+c]=[(a+c)+b][(a+c)-b]=(a+c)^2-b^2$
usw.

183 a) $(x+3y-8z)(x+3y+8z)$ b) $(5m-n+5)(5m-n-5)$
c) $(r+s-7)(-r+s-7)$ d) $(u^2+uv+v^2)(u^2-uv+v^2)$

184 a) $(19f-g+21)(19f-g-21)$ b) $(-6a+b-c)(-6a+b+c)$
c) $(p^2-4p-2)(p^2+4p-2)$ d) $(-x^2-y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)$

185 a) $(a+b+c)(a-b-c)$ b) $(2u-5v-w)(2u+5v+w)$
c) $(x-y+z)(x+y-z)$ d) $(-r^2+r+6)(r^2+r-6)$

186 a) $(-5p-3q+1)(5p+3q+1)$ b) $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$
c) $(-4u+v-7w)(-4u-v+7w)$ d) $(n^2+4n+8)(-n^2+4n-8)$

187 a) $(a+b+u+v)(a+b-u-v)$ b) $(x+y-z-3)(x-y-z+3)$

188 a) $(r^3+r^2-r+1)(r^3-r^2-r-1)$ b) $(cd+5c-d-4)(cd-5c+d-4)$

Zu 189, 190: Zeige, dass die angegebene Gleichung eine Termumformung darstellt.

189 a) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$
b) $x^2-3(x+y)^2+3(x+2y)^2=(x+3y)^2$
c) $(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2$
d) $(r^2+s^2-t^2)^2+(2rt)^2+(2st)^2=(r^2+s^2+t^2)^2$

190 a) $[(k+3)^2+k^2]-[(k+1)^2+(k+2)^2]=4$
b) $n^2+(n+1)^2+[n(n+1)]^2=[n(n+1)+1]^2$
c) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ax+by+cz)^2$

191 Multipliziere zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen gleicher Parität (also entweder zwei aufeinander folgende gerade oder zwei aufeinander folgende ungerade Zahlen) und addiere 1. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?

192 Multipliziere drei aufeinander folgende natürliche Zahlen und addiere dazu die mittlere dieser Zahlen. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?

Zu 193, 194: Verwende das Pascal-Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

u s w.

193 a) $(3c+d)^4$ b) $(e-5f)^4$ c) $(x+2y)^5$ d) $(-m+10)^5$
e) $\left(k+\frac{1}{2}\right)^6$ f) $(1-z^2)^6$ g) $(2r+s)^4-(2r-s)^4$

194 a) $(-u+4v)^4$ b) $(n^2+n)^5$ c) $(0.1-p)^6$ d) $(a^3+b^3)^4$
e) $(i^2-3)^5$ f) $\left(t+\frac{1}{t}\right)^6$ g) $(h-1)^5-(1-h)^5$

2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

Die Darstellung eines Polynoms als Produkt heisst eine Faktorzerlegung:

Summe	$\xrightarrow{\text{faktorisieren}}$	Produkt
a^2+3a	$=$	$a(a+3)$
$4x^2-y^2$	$=$	$(2x+y)(2x-y)$
n^2+5n+6	$=$	$(n+2)(n+3)$

Faktorzerlegungen können zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen (Kapitel 3) oder Kürzen von Brüchen (Kapitel 5) nützlich sein.

In den meisten Aufgaben des Abschnitts 2.5 ist eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten zu finden; die Ausnahmen sind aus dem Zusammenhang ersichtlich (z. B. Nr. 205 – 214). Reine Zahlfaktoren müssen nicht weiter zerlegt werden. Wenn ein Polynom keine Faktorzerlegung hat (abgesehen von Zerlegungen mit dem Faktor 1 oder –1), heisst es *unzerlegbar* (*prim*).

Ausklammern

195 a) $5a+5b$ b) $6x-9$ c) $cd+ce$ d) u^2-uv

196 a) $20y-12$ b) $35a+48b$ c) $pq-qr$ d) $ct-dt^2$

197 a) $6ax+6ay$ b) $24z^3-16z^2$ c) $10c-21$ d) $108n^2+168n$

198 a) $3bt-9ct$ b) $21efg-35eg$ c) $81y^3+54y$ d) $126a^2b+96ab^2$

199 a) $8a+4$ b) z^2-z c) $6bc+2b$ d) x^2y^2-xy

200 a) $7e-7$ b) $2rs+s$ c) p^3+p^2 d) $36uvw+9uw$

201 a) $14f-21g+28$ b) $10at+15bt-6ct$ c) $xy-y^2-yz$

202 a) $15x-27y-12z$ b) $13r+65s-91$ c) $14np-12nq+21n$

203 a) $18a^2b+18ab^2-9ab$ b) $4x^2yz-10xy^2z+16xyz^2$

204 a) $42m^3n^2-70m^2n^3-42m^2n^2$ b) $3qr^2+3r^3+3r^2s-r^2$

Zu 205, 206: Klammere -1 aus.

205 a) $-y-2$ b) $-5c+d$ c) $-3m+4n-1$
d) $u-v-w$ e) $-7x^2+4x+11$ f) $-a_1-a_2+a_3-a_4$

206 a) $-mx+q$ b) $-6r-s-8t$ c) $-c^2-d^2+36$
d) $-b_1+b_2-b_3+b_4$ e) $z^5-z^4-z^3+z^2-z-1$

207 Klammere 2 aus.
a) $2n+\frac{4}{5}$ b) $4u+3v+2w$ c) $2a-\frac{5}{4}b+\frac{6}{7}$

208 Klammere 3 aus.
a) $3p-4$ b) $3x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}rs-\frac{2}{3}r-\frac{3}{4}s$

209 Klammere $\frac{1}{6}$ aus.
a) $\frac{1}{6}a+\frac{3}{2}b$ b) $\frac{1}{2}q^2-q+\frac{2}{3}$ c) $4c+5d-\frac{1}{6}$

210 Klammere -1.2 aus.
a) $-1.2t^2+3.6$ b) $6e-2.4f-8.4$ c) $-1.2x+y+1.5z$

Zu 211–214: Ausmultiplizieren und Ausdividieren mit Hilfe von Ausklammern

211 a) $(a+b)(4a+4b)$ b) $(2n-2)(3n-3)$ c) $(1.5u-1.5v)(6u+6v)$

212 a) $(7f-7g)(f-g)$ b) $(5r+5s)(8r-8s)$ c) $(2.5c+2.5)(0.4c+0.4)$

213 a) $(9xy+9y):(x+1)$ b) $(4.5ac-7.5ad):(3c-5d)$

214 a) $(18ab-12b^2):(3a-2b)$ b) $(0.7x^2y+2.8xy^2):(x+4y)$

215 a) $(a+2)x+(b-3)x$ b) $r(2u+3v)-r(u+v)$
c) $e^2(n-4)-e^2(2n-7)$ d) $(p^2-5p)z+(p^2+p)z$

216 a) $(8-t)y-(6-2t)y$ b) $(3a-5b)x+(b+1)x$
c) $(2k^3-k^2)r-(k^3-7k^2)r$ d) $d^2(e-f+g)-d^2(f+g-h)$

217 a) $a(x+y)+b(x+y)$ b) $m(u+v)-3(u+v)$
c) $cd(6c-d)-4(6c-d)$ d) $q(r-s)+(r-s)$

218 a) $(m+n)y+(m+n)z$ b) $2a(a-b)-b(a-b)$
c) $(5e-1)-c(5e-1)$ d) $(f+g)-d(f+g)$

219 a) $5p(3p-2)+(-3p+2)$ b) $x(y-z)-(z-y)$

220 a) $s(st-4)+t(4-st)$ b) $r(-r+2)+(r-2)$

221 a) $4x(a+b)-5y(a+b)-6(a+b)-3x(a+b)-(a+b)$
b) $3p^2(u-v)-2p(v-u)-8(u-v)+(u-v)$

222 a) $-a(x-y)+2b(x-y)-3c(x-y)+4(x-y)$
b) $7m(r+s)-3n(r+s)-4(r+s)-n(r+s)+(r+s)$

223 a) $4v(p+q)-8w(p+q)$ b) $(t^2-t)z+9(t^2-t)$
c) $a^3(2ab-c)+a^2(2ab-c)$ d) $10q(9e-6)-5(9e-6)$

224 a) $3w(2u-6v)+5(2u-6v)$ b) $2r^2(r-7)-r(-r+7)$
c) $a^2(xy+xz-x)-ab(xy+xz-x)+a(xy+xz-x)$

225 a) $(e-4f)(f+g)+2e(f+g)$ b) $(c-d)(n+5)+(c-d)(2n+3)$
c) $q(2x-3y)-(q+1)(-2x+3y)$ d) $(3a-5c)(m+4)-(a+c)(m+4)$

226 a) $8p(2p-5)-(2p+5)(2p-5)$ b) $(c^3+c^2)(r-3)+(c^3+c^2)(r-1)$
c) $(3u+v)(u-v)-(3u+v)(u-w)$ d) $(a-b)(5z-1)+(2b-2a)(z+4)$

Ausklammern in Teilsummen

227 a) $a(x+y)+2x+2y$ b) $bq+cq-(b+c)r$
c) $2u-v+5r(2u-v)$ d) $7k(4n-3)-4n+3$

228 a) $a(3a-2b)+9ac-6bc$ b) $4m(p+q)-p-q$
c) $(t-5)x-ty+5y$ d) $r^2-r+(r-1)s$

229 a) $au+av+bu+bv$ b) $j^2-jk+2j-2k$
c) $-2cx+cy-4dx+2dy$ d) $12st+16s-27t-36$
e) $24pz-39p-16qz+26q$ f) $35f^2-63fg-15f+27g$

230 a) $81ab+72ad+36bc+32cd$ b) $mn-m+n-1$
c) $8v^2-2vw-12v+3w$ d) $20xy-15xz-24y+18z$
e) $20r^2s+4rs^2-5r-s$ f) $-21ef-56eg+6fg+16g^2$

231 a) $4amx+4amy+4anx+4any$ b) $6ab+3a-12b-6$
c) $u^4-u^3v-2u^3w+2u^2vw$ d) $40r^3s^2-60r^2s^2+16r^3s-24r^2s$

232 a) $5act-20adt+15bct-60bdt$ b) $-e^2fg-ef^2g+efg^2+f^2g^2$
c) $28pq-42p-24q+36$ d) $-18x^2y^2+36xy^2z+30xy^3-60y^3z$

233 a) $mx+my+mz+nx+ny+nz$ b) $as+at+bs+bt+cs+ct$
c) $eu+fu-ev-fv+ew+fw$ d) $3kp+3kq-3kr-6p-6q+6r$

234 a) $ar-a+br-b+cr-c$ b) $efm-efn-ef+egm-egn-eg$
c) $-px-py-pz+5x+5y+5z$ d) $u^2-uv-uw-u+v+w$

235 a) $2a^2+10ab-12ac+5a+25b-30c$ b) $2pr^2+4pr-3qr^2-6qr-r^2-2r$

236 a) $22cv-22ct+66c-33dv+33dt-99d$ b) $15mnx-5mny+10mnz-3x+y-2z$

Faktorzerlegung mit Hilfe von Formeln

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

237 a) x^2-y^2 b) $4c^2-9d^2$ c) z^2-225 d) $36n^2-1$
e) $-a^2+324b^2$ f) $-u^2v^2+1$ g) $16p^2-q^4$ h) x^4-y^4

238 a) $16m^2-9n^2$ b) $25x^2-1$ c) $-4s^2+49t^2$ d) $121q^2-576$
e) $u^2v^2-64w^2$ f) $-p^2+289$ g) r^4-1 h) $-y^4z^2+81$

239 a) $6a^2-6b^2$ b) $9k^4-36k^2$ c) n^3-n d) $-50e^2+338$

240 a) $18z^2-2$ b) $75r^2-147$ c) $-c^4d^2+4c^2$ d) $x^6y^4-x^2y^8$

241 a) $a(x^2-y^2)+b(x^2-y^2)$ b) $p^2u+2p^2v-4u-8v$

242 a) $63km^2-28kn^2+45m^2-20n^2$ b) cr^2-c-dr^2+d

243 a) $x^2-2xy+y^2$ b) $36u^2+60uv+25v^2$ c) n^2-4n+4
d) $4c^2+28cd+49d^2$ e) $9q^2-6q+1$ f) $a^4-2a^2b^2+b^4$

244 a) m^2-2m+1 b) $4f^2-20fg+25g^2$ c) $x^2+16x+64$
d) $16r^2-24rs+9s^2$ e) p^4-8p^2+16 f) $36z+81z^2+4$

245 a) $5a^2-10ab+5b^2$ b) $xy^2+2xy+x$ c) $-3u^2+18uv-27v^2$

246 a) $72n^2+168n+98$ b) $-q^2r^2+4qr-4$ c) $-c^4-2c^3d-c^2d^2$

247 a) $a^2+2ab+b^2-36z^2$ b) p^2-x^2-2x-1

248 a) $u^2-8uv+16v^2-1$ b) $m^2-q^2+10q-25$

Klammeransatz bei geeigneten Trinomen

Beispiel: $a^2+8a+15=(a+3)(a+5)$

249 a) $x^2+9x+20$ b) $d^2+20d+91$ c) $r^2-15r+54$
d) $n^2-26n+144$ e) $n^2-24n+144$ f) $3c^2+16c+5$

250 a) $s^2+18s+72$ b) $z^2-19z+48$ c) $p^2+23p+132$
d) $y^2-29y+210$ e) $b^2+10b+9$ f) $2x^2-5x+2$

251 a) $a^2+2a-24$ b) $u^2-3u-40$ c) t^2-6t-7
d) $x^2-25x+84$ e) $x^2+25x-84$ f) $4e^2+3e-1$

252 a) $c^2-3c-108$ b) m^2+4m-5 c) y^2-y-30
d) $z^2+9z-90$ e) $r^2-43r-240$ f) $5k^2-2k-3$

253 a) $b^2+20b+51$ b) $t^2+t-156$ c) $x^2-4x+16$
d) $v^2-7v-98$ e) $p^2-7p-120$ f) $2n^2+7n+3$

254 a) $m^2-m-110$ b) $z^2-29z+208$ c) $q^2-16q-36$
d) $y^2+40y+400$ e) $a^2+6a-10$ f) $12r^2-8r+1$

255 a) $5x^2+10x-75$ b) n^3-n^2-n c) $-4t^2-4t+48$

256 a) $9z^4-36z^3+27z^2$ b) $-3k^2-3k-60$ c) $2b^5+9b^4-5b^3$

257 a) $x^2-7xy+10y^2$ b) $p^2-2pq-8q^2$ c) $m^4-5m^2n-24n^2$

258 a) $a^2+5ab+4b^2$ b) $r^2+4rs-21s^2$ c) $c^4-13c^2d^2+36d^4$

Vermischte und schwierigere Aufgaben zur Faktorzerlegung

259 a) $-16x^5+x$ b) n^3-19n^2+90n c) $fgh+fg+fh+f$

260 a) $625c^3-225cd^2$ b) $-3z^4+6z^3+24z^2$ c) $64st-48s-48t+36$

261 Vervollständige die Zerlegung
a) $(36a-54b)^2$ b) $(r^2+r)(r^2+r-6)$ c) $(kx^2-ky^2)^3$

262 Zerlege die Polynome P, Q, $P+Q$ und PQ (vollständig)
a) $P=(5u+5v)^2,\ Q=(du+dv)^2$ b) $P=(2n-2)^3,\ Q=(3n-3)^3$

Zu 263, 264: Klammere zuerst einen Bruch aus, sodass der andere Faktor ein Polynom mit teilerfremden ganzen Koeffizienten ist.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+6=\frac{3}{4}(x^2-6x+8)=\frac{3}{4}(x-2)(x-4)$

263 a) $\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{2}b^2$ b) $-1.25r^2-5r-5$ c) $\frac{7}{30}c^2+\frac{7}{6}c-\frac{28}{5}$

264 a) $4.8p^2-7.5$ b) $3m^2-2mn+\frac{1}{3}n^2$ c) $0.2q^2-2.4q+5.4$

265 a) $(a+b)^3-5(a+b)^2$ b) $(x+6y)^2+8x(x+6y)$

266 a) $u^2(4u+4)+(4u+4)^2$ b) $p(3w+3)+(p-5)(2w+2)$

267 a) $(2a-3b)^2-(3b-2a)$ b) $r(r-s)^2-(s-r)^3$

268 a) $(k-7)^2(k+2)+(-k+7)^3$ b) $s^2(t-5)+s(5-t)-2(t-5)$

269 a) $n(n+4)(n-8)-(n+4)(n-8)$ b) $(a+b)^2(a-c)-(a+b)(c-a)^2$

270 a) $(u-1)(2v-2)+(3-3u)(4-4v)$ b) $(x-y)(x^2-z^2)-(x^2-y^2)(x-z)$

271 a) $a(a+3)-10$ b) $(m+9)^2-36m$ c) $u^2(v-1)-(u^2-v)v$

272 a) $4pq-(p+q)^2$ b) $st(t-6)-4s(t+6)$ c) $2(e^2-fg)+e(f-4g)$

273 a) $a^2-2ab+b^2-c^2$ b) $9x^2-y^2-2yz-z^2$
c) $u^2-4uv+4v^2-1$ d) u^2-4v^2+4v-1

274 a) $r^2-4s^2+12st-9t^2$ b) $25c^2-d^2+10d-25$
c) w^2-8w-z^2+16 d) $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$

275 a) $c^2m^2-c^2n^2-d^2m^2+d^2n^2$ b) $8rt^2-2r-12st^2+3s$
c) $2uv-7uw+4v^2-49w^2$ d) $64a^2-80a+25-24ab+15b$

276 a) p^3+p^2-p-1 b) $27ef-18eg+9f^2-12fg+4g^2$
c) $b^2-6b-4c^2+12c$ d) $4r^2-9s^2+6s-1$

277 a) $(5x-4y+3)^2-(x+2y-1)^2$ b) $a^4-(13a-30)^2$

278 a) $81t^2-25(t^2+6t+9)$ b) $n^4-25n^2-60n-36$

279 a) $a^4-10a^2b^2+9b^4$ b) $x^4+x^2y^2+y^4$

280 a) z^4+4z^2-32 b) r^4-3r^2+1

Zu 281, 282: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

281 a) x^3-8 b) $375n^3-3$ c) a^3+b^3 d) p^6-q^6

282 a) y^3+1 b) $128c^4d-54cd^4$ c) $r^3+r^2-s^3-s^2$

283* Beweise:
a) Für jede natürliche Zahl n ist n^3-n durch 6 teilbar.
b) Für jede ungerade natürliche Zahl u ist u^3-u durch 24 teilbar.
c) Für jede Primzahl $p>3$ ist p^2-1 durch 24 teilbar.

284* a) Die beiden letzten Ziffern von 25^2 bilden die Zahl 25. Gibt es noch eine andere zweistellige Zahl mit der entsprechenden Eigenschaft?
b) Die drei letzten Ziffern von 125^3 bilden die Zahl 125. Bestimme alle weiteren dreistelligen Zahlen mit der entsprechenden Eigenschaft!

2.6 Der Divisionsalgorithmus für Polynome

Im Abschnitt 2.6 werden Polynome mit nur einer Variablen und beliebigen Koeffizienten (aus $\mathbb{R}$) betrachtet.

Ein Beispiel zum Divisionsalgorithmus:

$$
\begin{array}{llll}
(6x^3+29x^2+38x+35) & :(2x+7) = & 3x^2+4x+5 & \\
\underline{6x^3+21x^2} & & 6x^3+21x^2 & =(2x+7)\cdot 3x^2 \\
\quad 8x^2+38x+35 & & & \\
\quad \underline{8x^2+28x} & & 8x^2+28x & =(2x+7)\cdot 4x \\
\qquad 10x+35 & & & \\
\qquad \underline{10x+35} & & 10x+35 & =(2x+7)\cdot 5 \\
\qquad\qquad 0 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(6x^3+29x^2+38x+35) & :(2x+7) & =3x^2+4x+5 \quad \Leftrightarrow \\
6x^3+29x^2+38x+35 & & =(3x^2+4x+5)(2x+7) \\
 & & \text{(Faktorzerlegung)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(6x^3+29x^2+38x+44) & :(2x+7) & =3x^2+4x+5+9:(2x+7) \quad \Leftrightarrow \\
6x^3+29x^2+38x+44 & & =(3x^2+4x+5)(2x+7)+9 \\
 & & \text{(Zerlegung mit Rest)}
\end{array}
$$

Zu 285 – 288: Divisionen ohne Rest

285 a) $(6x^3-14x^2+17x-12):(3x-4)$ b) $(y^3-10y^2+16y+48):(y-6)$
c) $(n^4+5n-6):(n+2)$ d) $(c^3+1.5c^2-2c-20):(2c-5)$

286 a) $(4a^3-12a^2+a+4):(2a+1)$ b) $(z^3+9z^2-100):(z+5)$
c) $\left(4r^3+\frac{2}{3}r^2+\frac{5}{3}r+2\right):(3r+2)$ d) $(k^5-1):(k-1)$

287 a) $(x^4-8x^3+14x^2-7x-30):(x^2-3x+5)$
b) $(9p^4-31p^2+25):(3p^2+p-5)$

288 a) $(12a^4-15a^3-5.5a^2+9a-8):(4a^2-3a+2)$
b) $(u^5-3u^4-9u^2-16u+12):(u^2+4)$

289 Dividiere durch $x+3$ und notiere das Ergebnis in Form einer Zerlegung mit Rest (im Fall des Restes 0 als Faktorzerlegung).
a) $x^2+8x+24$ b) x^2+8x+3 c) x^3 d) $x^3-13x-12$

290 Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x+1$.

291 Wie Nummer 289, aber mit Division durch x.

292 Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x-4$.

Zu 293 – 298: Notiere das Divisonsergebnis, gegebenenfalls mit Rest.

293 a) $(6a^3-17a^2+21a-30):(2a-5)$
b) $(n^4-3n-22):(n+2)$
c) $(6z^4+8z^3-19z^2-7z-12):(3z^2-2z-4)$
d) $(8x^7-10x^6+x^5-16x^4+2x^3+25x^2+14x-24):(2x^3-x^2+3x-4)$

294 a) $(-12y^3+8y^2+13y+3):(-2y+3)$
b) $(a^4-9a^3+6a^2-5a+12):(a-2)$
c) $(6p^5-3p^4+p^3+6p^2-13p+3):(3p^3-4p+1)$
d) $k^5:(k^2+k-1)$

295 a) $\left(x^2-\frac{7}{2}x-2\right):\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)$ b) $(a^3-4a^2+2a-1):(2a-1)$

296 a) $(2q^3+5q^2-4q-3):(q+0.5)$ b) $(y^3+y^2):(3y+1)$

297 a) $(x+4x^2+x^3):(x-2+x^2)$ b) $(r^3-6r^2+5r+8):(4-r)$

298 a) $2t^4:(2+t)$ b) $(1+z)^3:(1-z)^2$

Zu 299, 300: Finde mit Hilfe des Divisonsalgorithmus eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten.

299 a) x^3-4x^2+x+6 b) n^4-7n^2+6n

300 a) $z^5-2z^4-4z^3+5z^2$ b) $-3a^3+9a^2-12$

2.5. Aufgaben zu Brüche

5 Bruchterme

Ergebnisse mit Nennern sind generell als *ein* Bruch anzugeben, wobei der Zähler und der Nenner ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist.

5.1 Kürzen und Erweitern

Kürzen: Zähler und Nenner eines Bruches durch denselben Divisor dividieren.

Erweitern: Zähler und Nenner eines Bruches mit demselben Faktor multiplizieren.

$$\frac{at}{bt} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0,\ t \neq 0)$$

Zu 1 – 12: Bestimme den ggT und das kgV der untereinander stehenden Polynome.

Bemerkung: Als ggT von z. B. $6a$ und $-8a$ kann man sowohl $2a$ als auch $-2a$ angeben. Bei jedem ggT und kgV zweier Polynome gibt es in diesem Sinn zwei entgegengesetzte Möglichkeiten; im Lösungsteil unseres Buches ist jeweils nur eine davon angegeben.

1 a) $6d$, $4d$ b) $-9xy$, $45xz$ c) p^6, p^4 d) $18a^2bc^3$, $8ab^4$

2 a) uv, vw b) $6n^6$, $9n^9$ c) $15m^2$, $-8mq$ d) $9r^2s^2t$, $36r^2s^3$

3 a) a, $a+b$ b) $4i+4$, $5i+5$ c) $4c^2-6cd$, $2c$ d) $3x-3y$, $y-x$

4 a) z, z^2-3z b) $15t-25$, $-6t+10$ c) $5p$, $p+5$ d) u^2+uv, u^2-uv

5 a) h^2-h, $h-h^2$ b) $abc+b^2c$, a^2b+ab^2 c) x^2-y^2, $2x-2y$ d) n^3-4n, n^3+2n^2

6 a) $6p-9$, $4p^2-6p$ b) $8uv$, $8u-20v$ c) $s-s^2$, s^3-s d) e^2-f^2, $(e-f)^2$

7 a) $r^2-8r+15$, $-r^2-r+12$ b) $x(x+y)+x^2-y^2$, $4x^2-4xy+y^2$ c) $am+an-bm-bn$, m^2-n^2+m+n

8 a) $z^2-8z+16$, $wz-4w-3z+12$ b) $(2c-18)^2$, $c^2-7c-18$ c) u^3-v^3, $-u^2+v^2$

9 a) $6a^2b$, $15a^3b^2$, $18a^4b^4$ b) $2t-5$, $10-4t$, $6t-15$ c) d^2-9, $d-3$, $d^2-9d+18$

10 a) $2g+2$, $3g+3$, $4g+4$ b) x^2-4y^2, $x^2-4xy+4y^2$, x^2-2xy c) r^2-s^2-2s-1, r^2-2r-s^2+1, $r^2-2rs+s^2-1$

11 a) $6ac-9ad-4c^2+6cd$, $3a^2+4ac-4c^2$ b) $2p^3-7p^2+8p+6$, $18p^3+9p^2$

12 a) $8u^2v-uv^2-9v^3$, $u^3v+2u^2v^2+uv^3$ b) $z^2-9z+20$, z^3-3z^2-50

Zu 13 – 20: Kürze!

13 a) $\frac{12d}{9}$ b) $\frac{10r}{15r}$ c) $\frac{16xyz}{20xz}$ d) $\frac{24a^2bc^2}{56abc}$ e) $\frac{-72uv^3w^6}{-60uv^3w^5}$

14 a) $\frac{14}{21e}$ b) $\frac{25pq}{5q}$ c) $\frac{-27s^2}{-36st}$ d) $\frac{4mq^2}{8mq^3}$ e) $\frac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2}$

15 a) $\frac{5a+20}{5}$ b) $\frac{14n-10}{7}$ c) $\frac{28x-35y}{21}$ d) $\frac{u^2+uv}{uv}$

16 a) $\frac{60c-40d}{20c}$ b) $\frac{92p+46q}{23}$ c) $\frac{360z^2-90z}{45z^2}$ d) $\frac{225i-15}{15}$

17 a) $\frac{25}{5r+10}$ b) $\frac{uw}{uv+uw}$ c) $\frac{2m}{4mn-2m}$ d) $\frac{-36x^2y}{12x^2y-60xy}$

18 a) $\frac{36}{9s-18t}$ b) $\frac{-h}{h^2+h}$ c) $\frac{18a^2bc}{18a^2b^2c+54a^2bc^2}$

19 a) $\frac{7n+14}{7n-21}$ b) $\frac{2y+2}{5y+5}$ c) $\frac{rs-rt}{su-tu}$ d) $\frac{p^3-p^2}{p^3+p^2}$

20 a) $\frac{a^2-a}{ab+a}$ b) $\frac{4c-4d}{6c-6d}$ c) $\frac{6x-6z}{9x+9z}$ d) $\frac{w^3+w^2}{w^2+w}$

21 Berechne die Werte der Terme $T_1 = \frac{6}{x}$ und $T_2 = \frac{6x-18}{x^2-3x}$ für $x = 1, 2, 3, 4, 10, -1.2$ (soweit sie definiert sind) und vergleiche.

22 Berechne die Werte der Terme $T_1 = \frac{x+5}{x-1}$ und $T_2 = \frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$ für $x = 2, 3, 4, 5, 6, -1$ (soweit sie definiert sind) und vergleiche.

Zu 23 – 42: Kürze!

23 a) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}$ b) $\frac{6u-8v}{9u^2-16v^2}$ c) $\frac{n^3-n}{n^3+n^2}$

24 a) $\frac{4r-2}{4r^2-1}$ b) $\frac{36x^2-4y^2}{18x-6y}$ c) $\frac{4s^2+25}{16s^4-625}$

25 a) $\frac{u^2+2uv+v^2}{4u+4v}$ b) $\frac{2ac-5bc}{4a^2-20ab+25b^2}$ c) $\frac{w^3+2w^2+w}{wz+z}$

26 a) $\frac{10m-5}{8m^2-8m+2}$ b) $\frac{(16p-16q)^2}{16p^2-16q^2}$ c) $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2x+1}$

27 a) $\frac{as+at+bs+bt}{2s+2t}$ b) $\frac{375w-1000}{6uw-16u+6vw-16v}$ c) $\frac{4c^2+cr-4c-r}{5c-5}$

28 a) $\frac{4af+7ag-8bf-14bg}{3a-6b}$ b) $\frac{kp-5p+k-5}{kp+k}$ c) $\frac{x-xy+y-1}{y-yz+z-1}$

29 a) $\frac{40cm-60dm+32cn-48dn}{24cm-36dm+16cn-24dn}$ b) $\frac{rs-rt-s^2+t^2}{r-s-t}$

30 a) $\frac{u^2-v^2+4u+4v}{u^2-v^2}$ b) $\frac{144x^3-60x^2z-156x^2+65xz}{12xyz+12xz^2-5yz^2-5z^3}$

31 a) $\frac{a^2+2a-24}{a^2-6a+8}$ b) $\frac{kn-2k}{3n^2-3n-6}$ c) $\frac{r^2-8r+7}{2r^2-4r+2}$ d) $\frac{c^2-9d^2}{c^2+2cd-15d^2}$

32 a) $\frac{m^2-9m+20}{m^2-10m+25}$ b) $\frac{x^4-4x^3}{x^4-x^3-12x^2}$ c) $\frac{h^4-1}{h^4+6h^2+5}$ d) $\frac{yz^2+2yz-8y}{yz-2y+5z-10}$

33 a) $\frac{10u^2-11u-6}{25u^2-4}$ b) $\frac{18a-9b}{32a^2-26ab+5b^2}$ c) $\frac{r^2+12r+36}{15r^2+88r-12}$

34 a) $\frac{x^2-7x+12}{2x^2-x-15}$ b) $\frac{45n^2-12n-28}{9n^2+12n+4}$ c) $\frac{27c^2-48d^2}{24c^2+5cd-36d^2}$

35 a) $\frac{a-b}{b-a}$ b) $\frac{4mp-20}{30-6mp}$ c) $\frac{k^2-13k+42}{14-2k}$ d) $\frac{-u^2+2uv-v^2}{4u^2-4v^2}$

36 a) $\frac{3z-3y}{4y-4z}$ b) $\frac{e^2-e}{1-e^2}$ c) $\frac{c^2+c-20}{-c^2+c+30}$ d) $\frac{r^2-rs-rt}{rt-rs-r^2}$

37 a) $\frac{80a^3-58a^2+11a-3}{5a-3}$ b) $\frac{3n^2-9n}{n^3-2n^2-5n+6}$

c) $\frac{4p^3-6p^2+2p+3}{4p^2-1}$ d) $\frac{v^2-4v+4}{v^4+3v^3-7v^2-9v+6}$

38 a) $\frac{8x+3}{96x^3+28x^2+37x+15}$ b) $\frac{3t^3+t^2+5t+12}{6t+8}$

c) $\frac{4u^3+5u^2-2u-3}{u^2+2u+1}$ d) $\frac{z^2+z-2}{z^4+z^3+z^2+z-4}$

39 a) $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ b) $\frac{3n+3}{2n^3+2}$ c) $\frac{4s^2-12s+9}{27-8s^3}$ d) $\frac{r^3-8}{r^3-r^2-r-2}$

40 a) $\frac{x+y}{x^3+y^3}$ b) $\frac{u^3-v^3}{v^2-u^2}$ c) $\frac{250p^4-2p}{5p^2+29p-6}$ d) $\frac{(c+d)^2(c^3-d^3)}{(c^2-d^2)^2}$

41 a) $\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{2a+2b+2c}$ b) $\frac{180k^2s^3+240ks^2t+80st^2}{30ks^2+6kst+20st+4t^2}$ c) $\frac{(m+5)^2-(n+1)^2}{(m+7)-(n+3)}$

42 a) $\frac{25u^2-9(v-1)^2}{6v-10u-6}$ b) $\frac{36p^2-60pq+25q^2-9r^2}{6p-5q-3r}$ c) $\frac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x^6-y^6}$

Zu 43, 44: Erweitere mit -1.

43 a) $\frac{b-a}{-a-c}$ b) $\frac{4y-x}{-3}$ c) $\frac{-uvw}{-u+v-w}$ d) $\frac{(-s+3)(-s+5)}{-s+7}$

44 a) $\frac{-t}{1-t-t^2}$ b) $\frac{1-qr}{1-q}$ c) $\frac{-m-n}{n-m}$ d) $\frac{6z-z^2-3}{5-4z-z^2}$

Zu 45, 46: Notiere den Term als Bruch mit dem Nenner N.

Beispiel: $\frac{z}{a-b}$, $N = a^2 - b^2$; Ergebnis: $\frac{z}{a-b} = \frac{(a+b)z}{a^2-b^2}$

45 a) $\frac{6}{7x}$, $N = 84xyz$ b) $\frac{3u}{8}$, $N = 24u$ c) $\frac{a+b}{ab^2}$, $N = a^3b^3$

d) $2r$, $N = 3$ e) $\frac{15w}{10-w}$, $N = w^2 - 10w$ f) p^2, $N = p\,(p-1)$

g) $\frac{s-t}{s+t}$, $N = s^2 - t^2$

46 a) $\frac{4ac}{3b}$, $N = 12b^2c^2$ b) $\frac{4q}{3q+2}$, $N = 6q^2 + 4q$ c) 7, $N = 2w$

d) k, $N = k$ e) $\frac{6mn}{2m-5n}$, $N = 8mn - 20n^2$ f) $\frac{-2}{4y-3x}$, $N = 6x - 8y$

g) $\frac{d}{2d+1}$, $N = (6d+3)^2$

Zu 47 – 52: Mache gleichnamig.

47 a) $\frac{2}{a}, \frac{3}{b}, \frac{4}{c}$ b) $\frac{7}{8w}, \frac{5}{6w}$ c) $\frac{p}{e^2}, \frac{p}{e^3}$ d) $\frac{r^2}{9s^2u}, \frac{1}{r^2u^2}, \frac{8u}{15rs}$

48 a) $\frac{u}{2v}, \frac{v}{2u}$ b) $\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy}$ c) $\frac{15}{4mn^2}, \frac{25}{6m^3n}$ d) $\frac{13}{6h^2}, 1, \frac{4}{21hi}$

49 a) $\frac{1}{rs}, \frac{1}{r^2+r}$ b) $\frac{a}{b}, \frac{a}{b+c}$ c) $\frac{q}{q^2-1}, \frac{q-1}{q+1}$

50 a) $\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x-y}$ b) $\frac{1}{t^2-t}, \frac{t-1}{t}$ c) $\frac{3}{uv+v}, \frac{u+v}{2v}$

51 a) $\frac{n}{n-5}, \frac{5}{5-n}$ b) $\frac{w-z}{w+z}, \frac{w+z}{w-z}$ c) $\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{b}{b-a}$

52 a) $\frac{3c+2d}{3c-2d}, \frac{2c+3d}{2c-3d}$ b) $\frac{21}{2x-2}, \frac{-31}{3x-3}, \frac{41}{4x-4}$

53 Welcher Bruch ist grösser, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a+1}{b+1}$, wenn $a > 0 \ \wedge \ b > 0$?

54 Welcher Bruch ist grösser, $\frac{a}{b}$ oder $\frac{a+d}{b+d}$, wenn $a > 0 \ \wedge \ b > 0 \ \wedge \ d > 0$?

5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

55 a) $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$ b) $\frac{7}{8a} - \frac{1}{8a}$ c) $\frac{5}{3n} + \frac{2}{3n} - \frac{-5}{3n}$

56 a) $\frac{5z}{6} - \frac{z}{6}$ b) $\frac{5c}{12y} + \frac{c}{12y}$ c) $\frac{-76u}{35v} - \frac{8u}{35v}$

57 a) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ b) $\frac{a+nb}{n} - \frac{a-nb}{n}$ c) $-\frac{3r+4}{6} + \frac{5r+7}{6}$

58 a) $\frac{-t+7}{4t} - \frac{3t+4}{4t} - \frac{8t-5}{4t}$ b) $\frac{x^2+x-8}{2x} - \frac{x^2-7x-3}{2x} + \frac{2x^2-4x+5}{2x}$

59 a) $\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}$ b) $\frac{cd}{b-d} - \frac{bc}{b-d}$

c) $\frac{xy}{y^2-2yz+z^2} - \frac{xz}{y^2-2yz+z^2}$ d) $\frac{4a}{4a^2+7a+3} + \frac{3}{4a^2+7a+3}$

60 a) $\frac{q}{p-q} - \frac{p}{p-q}$ b) $\frac{4ktw}{2t-1} - \frac{2kw}{2t-1}$

c) $-\frac{s^3}{s^2-1} + \frac{s^2}{s^2-1}$ d) $\frac{52x}{65x^2+59x-72} - \frac{36}{65x^2+59x-72}$

61 a) $\frac{e}{2} - \frac{e}{3}$ b) $\frac{2p}{15q} + \frac{8p}{9q}$ c) $\frac{5}{6ac} - \frac{3}{4cd}$ d) $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}$

62 a) $\frac{4u}{21} + \frac{9u}{14}$ b) $\frac{8}{9m} - \frac{11}{36m}$ c) $\frac{z}{n^2} + \frac{4}{3n}$ d) $\frac{7v}{10w} - \frac{5v}{6w}$

63 a) $\frac{7s}{18} - \frac{4s-9}{45}$ b) $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$ c) $\frac{x+y}{2xy} + \frac{x+z}{2xz} + \frac{y+z}{2yz}$

64 a) $\frac{c-2}{c^3} + \frac{c-1}{c^2}$ b) $\frac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \frac{2u+v}{u^2v} + \frac{u-3v}{uv^2}$

65 a) $\frac{a}{3} + 1$ b) $7r - \frac{9}{2s}$ c) $5w - 1 + \frac{3}{w}$

66 a) $8m - \frac{n}{5}$ b) $b + \frac{1}{b}$ c) $\frac{x}{4z} - 2y + 3z$

67 a) $\frac{2r+3}{6} + 1$ b) $t - 4 - \frac{t+1}{2}$ c) $d - \frac{nd-2}{n}$

68 a) $p+\frac{9-p}{2}$ b) $\frac{x-y}{3x}-1$ c) $2-\frac{k^2-k+1}{k^2}$

69 a) $\frac{2a}{a+b}+1$ b) $4-\frac{u-v}{u+v}$ c) $\frac{z^2}{z+1}-z$

70 a) $3-\frac{m}{m-n}$ b) $\frac{q}{q+1}-1$ c) $e-\frac{e^2-2}{e-2}$

d) $1+\frac{z}{1-z}$, $1+z+\frac{z^2}{1-z}$, $1+z+z^2+\frac{z^3}{1-x}$

71 a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$ b) $\frac{8}{n+5}-\frac{n+2}{n}$ c) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$

72 a) $\frac{m}{m-1}-\frac{m-1}{m+2}$ b) $\frac{2r}{s}-\frac{r+3}{r+s+1}$ c) $\frac{w-4}{w-2}+\frac{w+6}{w+3}$

73 a) $\frac{c}{c+d}-\frac{c-d}{2(c+d)}$ b) $\frac{4}{z-1}+\frac{z}{z^2-1}$

c) $\frac{3u}{u^2+2uv+v^2}-\frac{1}{u+v}$ d) $\frac{a+2b+t}{4at+8bt}-\frac{1}{4t}$

74 a) $\frac{x-y}{15x+10y}+\frac{x+y}{3x+2y}$ b) $\frac{8p}{4p^2-4p+1}-\frac{3}{2p-1}$

c) $\frac{r+2}{5r^2}-\frac{4r+4}{5r^3+10r^2}$ d) $\frac{1}{q-1}-\frac{q^2+2}{q^3-1}$

75 a) $\frac{c}{c-d}-\frac{2cd}{c^2-d^2}-\frac{d}{c+d}$ b) $\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+5}-\frac{2a+3}{a^2+3a-10}$

76 a) $\frac{z}{z-5}-\frac{5}{z+3}-\frac{40}{z^2-2z-15}$ b) $\frac{n}{n+1}-\frac{2n+1}{n-1}+\frac{n^2+5n}{n^2-1}$

77 a) $\frac{a-b}{4a+4b}+\frac{a+4b}{6a+6b}$ b) $\frac{t+7}{3t-6}-\frac{t+4}{t^2-2t}$

c) $\frac{u}{uv+v^2}-\frac{v}{u^2+uv}$ d) $\frac{c}{c^2-8c+16}+\frac{2}{c^2-6c+8}$

78 a) $\frac{1}{rx+ry}+\frac{1}{sx+sy}$ b) $\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{b}{(a-b)^2}$

c) $\frac{z+9}{z^2-1}-\frac{z+5}{z^2+z}$ d) $\frac{5}{n^2+n-6}-\frac{3}{n^2-n-2}$

79 a) $\frac{7}{e-1}+\frac{6}{1-e}$ b) $\frac{5}{3h-3}-\frac{4}{2-2h}$

c) $\frac{r-4}{5r+5}+\frac{2}{1-r^2}$ d) $\frac{u}{u-v}-\frac{4uv}{u^2-v^2}-\frac{v}{v-u}$

80 a) $\frac{a-b}{c-d}-\frac{a+b}{d-c}$ b) $\frac{x+y}{2x-6y}+\frac{x+3y}{9y-3x}$

c) $\frac{8s}{s^2-4}+\frac{2+s}{2-s}$ d) $\frac{m^2-8m}{2m^2+m-15}-\frac{m}{5-2m}$

81 a) $\frac{2n-11}{3n-5}-\frac{4n+15}{n+7}+1$ b) $\frac{2v+3w}{2v+w}-\frac{2v-w}{2v}-\frac{2v+3w}{w}$

82 a) $\frac{2r-19}{3r-7}-\frac{5r}{6r-8}-\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{p-2}-\frac{3}{2p+1}+\frac{1}{p+1}$

83 a) $\frac{5}{4x-8y}-\frac{3}{10y-5x}-\frac{11}{6x-12y}$ b) $\frac{b-c}{a^2+ac}-\frac{a-b}{ac+c^2}+\frac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$

84 a) $\frac{k+2}{6k-15}+\frac{8k+1}{8k-20}+\frac{k+11}{10-4k}$ b) $\frac{u}{u-v}+\frac{v}{v-u}-\frac{u+v-1}{u+v}$

85 a) $\frac{2x-1}{x-3}-\frac{2x(x+2)}{x^2-9}-\frac{2}{3x}$ b) $\frac{3s}{(s-2)^2}-\frac{2}{s}+\frac{s+4}{2s-s^2}$

86 a) $\frac{2u-v}{2u-2v}-\frac{u-v}{3u+3v}-\frac{v(3v-u)}{3v^2-3u^2}$ b) $\frac{1}{z^2-z}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^2+z}$

87 $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$

88* $\frac{x^4+36x^2-32}{x^4-8x^2+16}-\frac{16x}{x^3+2x^2-4x-8}-\frac{16x}{x^3-2x^2-4x+8}-1$

89* $\frac{a^2+3a+5}{a^4-a^3-31a^2+25a+150}-\frac{a+2}{a^3-3a^2-25a+75}$

$+\frac{a-3}{a^3+2a^2-25a-50}-\frac{a-5}{a^3+4a^2-11a-30}$

90* $\frac{6-x}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}+\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x^2-4x+3}$

5.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

Multiplikation

91 a) $3\cdot\frac{4}{5}$ b) $a\cdot\frac{b}{c}$ c) $a\cdot\frac{-b}{c}$ d) $a\cdot\frac{b}{-c}$ e) $(-a)\frac{-b}{c}$

92 a) $x\cdot\frac{y}{x}$ b) $u\cdot\frac{u}{v}$ c) $n\cdot\frac{m}{n^2}$ d) $r^2\cdot\frac{1}{rs}$ e) $pq\cdot\frac{p}{q}$

93 a) $6ab\cdot\frac{9a}{4b}$ b) $44x^2y^2\cdot\frac{2x^3}{11y^3}$ c) $21m^3n\cdot\frac{-7cd}{12mn^2}$

94 a) $29k^5t\cdot\frac{47h^2}{29k^5t}$ b) $\frac{5rs^2}{18uv^3}(-15rsuv)$ c) $(-4pz)\left(-\frac{3q^2z}{10p^2}\right)$

95 a) $(a-b)\frac{2a+b}{a-b}$ b) $(3x+3y)\frac{9c}{x+y}$ c) $\frac{5}{q^2-1}(q-1)$

96 a) $4z\cdot\frac{z+1}{8z^2+12z}$ b) $\frac{d}{d^2-8d+15}(d-5)$ c) $(2k-7)\frac{k}{7-2k}$

97 a) $(r^2-36s^2)\frac{r+6s}{r-6s}$ b) $(2p-4)\frac{p-4}{p^2-4}$ c) $\frac{a+b+c}{ab+ac}\cdot abc$

98 a) $\frac{x}{yz}(xz+yz)$ b) $(3g-3f)\frac{4f+4g}{5f-5g}$ c) $(m^2-n^2)\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$

99 a) $\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{3}$ b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ c) $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}$ d) $\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

100 a) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{-d}$ b) $\frac{a}{-b}\cdot\frac{-c}{d}$ c) $\left(-\frac{1}{n}\right)^5$ d) $\left(-\frac{-a}{-b}\right)\left(-\frac{-c}{-d}\right)\left(-\frac{-e}{-f}\right)$

101 a) $\frac{8a}{3b}\cdot\frac{9bc}{4a}$ b) $\frac{-xy^2}{35z^3}\cdot\frac{7z^2}{x^2y^2}$ c) $\frac{-18u^2w}{65v^4}\cdot\frac{-26v}{27uw^3}$

102 a) $\frac{7m^2}{12n^3}\cdot\frac{-3n^2}{14m}$ b) $\frac{-a}{b}\cdot\frac{-b}{c}\cdot\frac{-c}{a}$ c) $\frac{17r^4s^3}{54t^5}\cdot\frac{24st^2}{85r^2}$

103 a) $\left(\frac{6a}{7b}\right)^2$ b) $\left(\frac{-12}{n^3}\right)^2$ c) $\left(-\frac{xyz}{cd}\right)^2$ d) $\left(\frac{m}{4}\right)^3$

104 a) $\left(\frac{-8h^2}{9}\right)^2$ b) $\left(\frac{5uv}{17w}\right)^2$ c) $\left(\frac{19r}{2st}\right)^2$ d) $\left(-\frac{3}{e^2}\right)^4$

105 a) $\frac{m-n}{3m}\cdot\frac{5m}{2m-2n}$ b) $\frac{d-1}{18d}\cdot\frac{12d^2}{1-d}$ c) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x-y}{xy}$

106 a) $\frac{t}{4u+4v}\cdot\frac{3u^2-3v^2}{t^2+t}$ b) $\frac{5a^2}{5b-3}\cdot\frac{9-15b}{10ac}$ c) $\frac{7r^2s}{12(r-s)}\cdot\frac{(2s-2r)^2}{21rs^2}$

107 a) $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\cdot\frac{p+q}{p-q}$ b) $\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n}\cdot\frac{m^4-n^4}{x-3y+z}$

108 a) $\frac{v^2+4v+4}{3t-3}\cdot\frac{9-9t}{v^2+5v+6}$ b) $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{225a^2b^2-150abc+25c^2}\cdot\frac{45abc-15c^2}{ab-b}$

109 a) $xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ b) $(n-z)\left(\frac{n}{n-z}-\frac{z}{n^2-z^2}\right)$ c) $\left(-\frac{r^2}{s^2}\right)\left(\frac{s}{r}-\frac{s^2}{r^2}+\frac{s^3}{r^3}\right)$

110 a) $\left(c-\frac{d}{c}\right)\left(c+\frac{d}{c}\right)$ b) $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\frac{u}{u+v}+\frac{v}{u-v}\right)$

c) $\left(\frac{ab}{a-b}+a\right)\left(\frac{ab}{a+b}-b\right)\frac{b-a}{ab^2}$

111 a) $\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{n}\right)^2$ b) $\left(\frac{z^2}{x-z}+z\right)^2$ c) $\left(\frac{p}{q}-1\right)^2-\left(\frac{p}{q}+1\right)^2$

112 a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{c}{3d}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{r-s}-\frac{1}{r+s}\right)^2$ c) $\left(u-\frac{v}{u}\right)^2-\left(u+\frac{v}{u}\right)^2$

113 $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)-\left(\frac{x}{3}+y\right)\left(\frac{x}{2}-y\right)$

114 $\frac{3a}{3a-2b}\cdot\frac{3a}{2b}-\left(\frac{3a}{3a-2b}+\frac{3a}{2b}\right)$

115 a) $\left(1+\frac{r}{s}\right)^3-\left(1-\frac{r}{s}\right)^3$ b) $\left(\frac{n^3-2n-1}{n^2-1}-n\right)\left(n-\frac{2n^2}{n+1}\right)$

116 a) $\left(\frac{c}{3}-1\right)^3-\left(\frac{c}{3}+1\right)^3$ b) $\left(\frac{8x^2+4x+1}{4x^2-2x}-\frac{2x}{2x-1}\right)\frac{6x-3}{4x^2+2x}$

Division

117 a) $\frac{4}{5}:3$ b) $\frac{a}{b}:c$ c) $\frac{-a}{b}:c$ d) $\frac{a}{-b}:c$ e) $\left(-\frac{a}{b}\right):(-c)$

118 a) $\frac{21}{8}:7$ b) $\frac{mn}{d}:m$ c) $\frac{u^2}{v^2}:u$ d) $\frac{9}{25}:15$ e) $\frac{xy}{wz}:yz$

119 a) $\frac{15d}{4e}:6de$ b) $\frac{19r^2s^2}{23t}:19r^2s^2$ c) $\frac{-16ab^2}{27c}:(-16bc^2)$

120 a) $\frac{7u^3}{9v^2}:21u^2v$ b) $\frac{-8h}{11mn}:11mn$ c) $\frac{72x^6}{5y^3z^4}:24x^2$

121 a) $\frac{10k-15}{12k}:5$ b) $\frac{a^2+ab}{b+c}:a$ c) $\frac{6hs-9h}{10s}:18hs$

122 a) $\frac{3u^2v-4uv^2}{3u+4v}:uv$ b) $\frac{q^3+q^2}{4}:q^3$ c) $\frac{10xz+16yz}{5x-10}:10xyz$

123 a) $\frac{2a+2b}{ab}:(a+b)$ b) $\frac{w^2-t^2}{w^2+t^2}:(t-w)$ c) $\frac{c^2-cd}{d^2}:(3c-3d)$

124 a) $\frac{2p-8}{15}:(4-p)$ b) $\frac{x+y}{x-y}:(x^2-y^2)$ c) $\frac{8n^2-34n-9}{n+4}:(4n^2+n)$

125 a) $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}$ b) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ c) $7:\frac{3}{4}$ d) $a:\frac{c}{d}$ e) $47:\frac{47}{59}$

126 a) $\frac{a}{b}:\left(-\frac{c}{d}\right)$ b) $(-a):\left(-\frac{c}{d}\right)$ c) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$ d) $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ e) $\frac{z}{a}:\frac{z}{b}$

127 a) $\frac{5km}{6}:\frac{3k}{2m}$ b) $\frac{112n^2}{19xyz}:\frac{-7n}{19xyz}$ c) $\frac{12u^2v}{25tw}:\frac{18uv^2}{35tw}$

128 a) $\frac{9c}{10ab}:\frac{6ac}{25b}$ b) $\frac{1}{24rs^3}:\frac{1}{16r^2s}$ c) $\left(-\frac{78f}{85h^3}\right):\left(-\frac{48f^2}{85h^3}\right)$

129 a) $\frac{uv}{u+v}:\frac{5v}{u^2+uv}$ b) $\frac{z}{3z-3}:\frac{z}{2-2z}$ c) $\frac{n^2-19n+90}{n+9}:\frac{n-9}{n+9}$

130 a) $\frac{c^2-d^2}{c-1}:\frac{c+d}{1-c}$ b) $\frac{x^2-xy}{x+y}:\frac{3x+3y}{x-y}$ c) $\frac{m^2-m}{m+2}:\frac{m^2-1}{4m+8}$

131 a) $\frac{w^2-w-12}{t^2}:\frac{w-4}{t^2-t}$ b) $\frac{196a^2-25}{4b^2+20b+25}:\frac{70a+25}{2b+5}$

132 a) $\frac{1}{4n^2-4}:\frac{1}{(4n-4)^2}$ b) $\left(\frac{x-1}{2x}\right)^2:\frac{2x^3-3x^2+1}{4x^2}$

133 a) $\frac{a^3+a^2b}{c^2+1}:\frac{a^3-ab^2}{c^2-c}$ b) $\frac{e^2+2ef+f^2}{e^2+2ef}:\frac{e^2+ef-e-f}{2ef+4f^2}$

134 a) $\frac{10x^2-20x+10}{9x^2+18x+9}:\frac{15x^2+15x-30}{2x^2-2x-4}$ b) $\frac{r^4-1}{rs-s^2}:\frac{4r+4}{r^2-rs-r+s}$

135 a) $6abc:\frac{15ac^2}{4bd}$ b) $(u+v):\frac{u+v}{w}$ c) $(-4n-4):\frac{n+1}{-2}$

136 a) $39g^2h^2:\frac{52g}{9h}$ b) $(7-k):\frac{k-7}{-k-7}$ c) $(p+q):\frac{p^2-q^2}{pq}$

137 a) $(4m-2):\frac{4m^2-1}{m-2}$ b) $xyz:\frac{xyz-xy}{xz-yz}$

138 a) $(6d^2-9d):\frac{4d-6}{2d+3}$ b) $(a^2b+ab^2):\frac{a^3b-ab^3}{a^2+b^2}$

139 a) $\left(u^2+\frac{u}{v}\right):\frac{u}{v}$ b) $\left(\frac{x^4}{y^2}-x^3\right):\left(-\frac{x^2}{y}\right)$

140 a) $\left(4ef-\frac{2e}{f}\right):\frac{2e}{f}$ b) $\left(6\cdot\frac{r^2}{s^2}-3\cdot\frac{r}{s}+\frac{3}{2}\right):\left(-3\cdot\frac{r^2}{s^2}\right)$

141 a) $\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$ b) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right):\left(1+\frac{1}{n}\right)$

142 a) $\left(x-\frac{1}{x}\right):\left(x+\frac{1}{x}\right)$ b) $\left(\frac{w}{2}-\frac{2}{w}\right):(w+2)$

5.4 Doppelbrüche

143 a) $\frac{\frac{25}{36}}{\frac{15}{16}}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ c) $\frac{\frac{u}{v}}{x}$ d) $\frac{x}{\frac{u}{v}}$ e) $\frac{\frac{p}{n}}{\frac{q}{n}}$ f) $\frac{\frac{z}{r}}{\frac{z}{s}}$

144 a) $\frac{\frac{a}{b}}{a}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{b}$ c) $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}}$ d) $\frac{c}{\frac{c}{d}}$ e) $\frac{d}{\frac{c}{d}}$ f) $\frac{x}{\frac{1}{y}}$

145 a) $\frac{\frac{14u^3v}{57xyz}}{\frac{35uv^2}{76y^2z}}$ b) $\frac{\frac{3m}{4n}}{6mn}$ c) $\frac{\frac{1}{p^2-4}}{\frac{1}{p^2-4p+4}}$ d) $\frac{2e-6f}{\frac{3e^2-9ef}{2f}}$

146 a) $\frac{\frac{54k^2}{65t}}{\frac{81k}{75t^2}}$ b) $\frac{9ab^2c^3}{\left(9\cdot\frac{ab}{c}\right)^2}$ c) $\frac{\frac{2w^2-w}{w-2}}{w^2-2w^3}$ d) $\frac{\frac{rs}{r+s}}{\frac{r:s}{r^2-s^2}}$

147 a) $\frac{g+\frac{1}{3}}{g-\frac{1}{3}}$ b) $\frac{h}{0.5h-0.75}$ c) $\frac{1-\frac{1}{e}}{1+\frac{1}{e^2}}$ d) $\frac{\frac{y}{x}-\frac{z}{y}}{-\frac{z}{x}}$

148 a) $\frac{1-\frac{n}{v}}{-nv}$ b) $\frac{0.6m-0.4p}{p+0.8}$ c) $\frac{r^2+\frac{1}{r}}{r+\frac{1}{r^2}}$ d) $\frac{\frac{5f}{2n}}{\frac{1}{2n}-\frac{1}{4}}$

149 a) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ b) $\frac{1}{\frac{1}{w}+\frac{1}{z}}$ c) $\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}{\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}$ d) $\frac{-\frac{2k}{a}+\frac{3k}{b}}{\frac{6}{a}\cdot\frac{k}{b}}$

150 a) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}}$ b) $\frac{\frac{q-p}{r}}{1-\frac{p}{q}}$ c) $\frac{\frac{e}{f}\cdot\frac{g}{h}}{\frac{e}{f}-\frac{g}{h}}$ d) $\frac{\frac{u}{v}-\frac{v}{u}}{\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+2}$

151 a) $\frac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{x}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{x+y}}$ b) $\frac{\frac{n}{n^2-1}}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}}$

c) $\frac{s^2+t^2}{\frac{s}{s-t}-\frac{t}{s+t}}$ d) $\frac{\frac{z}{z+6}-\frac{8}{z}}{z-\frac{32}{z(z+6)}}$

152 a) $\frac{\frac{r}{r+1}-\frac{r}{r+2}}{\frac{r}{r+2}-\frac{2r}{r+1}}$ b) $\frac{\frac{2c}{c-3}-\frac{c}{c+4}}{\frac{c+11}{c^2+c-12}}$

c) $\frac{\frac{u}{w}-\frac{u+uv}{u+w}}{6u^2-12uvw+6v^2w^2}$ d) $\frac{\frac{4a^2-9b^2}{(2a+3b)^2}-\frac{2a+3b}{2a-3b}}{\frac{(2a+3b)^2}{4a^2-9b^2}-\frac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}}$

5.5 Vermischte Aufgaben

153 a, b sind zwei beliebige Zahlen und $m=\frac{a+b}{2}$. Vergleiche $m-a$ mit $b-m$.

154 Berechne das arithmetische Mittel der beiden Terme.

a) $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{12}x$, $\frac{3}{4}x$ c) $\frac{7}{12}(a+b)$, $\frac{3}{4}(a+b)$ d) $\frac{7}{12n}$, $\frac{3}{4n}$

155 Berechne das arithmetische Mittel der drei Terme.

a) $\frac{3}{5}t$, $\frac{2}{3}t$, $\frac{5}{6}t$ b) $\frac{3}{5}(x-y)$, $\frac{2}{3}(x-y)$, $\frac{5}{6}(x-y)$ c) $\frac{3a}{5b}$, $\frac{2a}{3b}$, $\frac{5a}{6b}$

156 Verifiziere, dass $a=n$, $b=\frac{n^2-1}{2}$ und $c=\frac{n^2+1}{2}$ für jeden Wert des Parameters n die Gleichung $a^2+b^2=c^2$ erfüllen. Berechne a, b, c für

a) $n=3$ b) $n=5$ c) $n=7$ d) $n=19$ e) $n=4$ f) $n=10$

157 a) $\left(\frac{2a+1}{a}-1\right)^2$ b) $\left(\frac{x-z^2}{z}+z-1\right)^2$ c) $\left(\frac{m-n}{m+n}+1\right)^2$

158 a) $\left(\frac{2a-b}{a}-\frac{b+c}{b}-\frac{b+c}{c}\right):\frac{-1}{abc}$ b) $\left(\frac{r^3-1}{r^3}-\frac{r^2-r-1}{r^2}-\frac{1}{r}\right):\frac{1}{r^3}$

159 a) $4y^2z^3\left(\frac{2x}{yz^2}-\frac{3x}{y^2z}\right):(3z-2y)$ b) $u^2v^2\left(\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\right)^2:(u-v)(u+v)^2$

160 a) $\left(\frac{5s-3}{s-t}-\frac{5s+3}{s+t}\right):\frac{25t^2-9}{s+t}$ b) $\left(\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{2n-1}{2n+1}\right)\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8n}\right)$

161 a) $\left(\frac{7ab}{5c-5d}\cdot\frac{4e^3}{9f^3}\right):\frac{14b}{3c-3d}\cdot\left(\frac{2e}{3f}\right)^2$

b) $\frac{25x^2-9}{(x+2)^2}\cdot\frac{x^2+5x+6}{y^3}:\frac{5x-3}{xy^3+2y^3}$

162 a) $\frac{9a^2-30ab+25b^2-1}{3a-5b-1}$ b) $\frac{u^4-v^4+2v^2-1}{u^2+v^2-1}$

163 a) $(p+1)^2\cdot\left(p-1+\frac{1}{p+1}\right)^2$ b) $(c-5):\frac{c^2-3c-10}{c^2-4}$

164 a) $(x-3):\frac{x^2-2x-3}{xy+x+y+1}$ b) $\left(\frac{r}{r^2-r-1}\right)^2\left(-r+1+\frac{1}{r}\right)^2$

165 $\frac{a^2b}{8}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right]$

166 a) $\frac{u-3v}{u^2-v^2}\cdot\frac{u+v}{u}+\frac{3uv-v^2}{u^2-2uv+v^2}:\frac{v^2}{u-v}$

b) $\frac{1}{(a+b)^2}\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$

167 $\left(\frac{2}{m-1}+m+1\right)\cdot\left(\frac{1}{m^2-1}-\frac{2m}{m^4-1}\right)$

168 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{ab}\right)(a+b+c):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{c^2}{a^2b^2}\right)$

169 $1^2=\frac{0\cdot 1}{2}+\frac{1\cdot 2}{2},\ 2^2=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2},\ 3^2=\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}$; Verallgemeinerung?

170 Unter der Voraussetzung $a\leq b+c$ für die positiven Zahlen a, b, c ist die Ungleichung $\frac{a}{a+1}<\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$ zu beweisen.

5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

Multiplikation (beider Seiten) einer Gleichung mit einem Term kann eine Gewinnumformung sein. Vergleiche Abschnitt 4.3. Beispiele:

$$\frac{4x+5}{2x-8}=\frac{17}{2x-8}\ \Leftrightarrow\ 4x=12,\qquad \frac{4x+5}{2x-6}=\frac{17}{2x-6}\ \Rightarrow\ 4x=12$$

Zu 171 – 200: Bestimme die (reellen) Lösungen.

171 a) $\frac{1}{x}+2=\frac{9}{x}$ b) $\frac{5}{6x}+\frac{13}{4}=\frac{5}{3}-\frac{2}{9x}$ c) $\frac{x+10}{3x}-\frac{x+8}{5x}=1$

172 a) $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}=4$ b) $\frac{1}{2x}-\frac{3}{4x}+\frac{5}{6}=0$ c) $\frac{11}{5}-\frac{x-20}{2x}=\frac{2x-1}{3x}$

173 a) $\frac{5-x}{10}=\frac{x}{10}$ b) $\frac{2x-4}{x}=\frac{8x-7}{x}$ c) $\frac{3(x+2)}{x+8}=\frac{2(x+3)}{x+8}$

174 a) $\frac{4x+1}{6x}=\frac{7x+8}{6x}$ b) $\frac{4-x}{3x-1}=\frac{2x+3}{3x-1}$ c) $\frac{2(x-2)}{x-5}=\frac{2x-4}{x-5}$

175 Löse die Gleichung $\frac{3x-7}{N}=\frac{x+1}{N}$ mit dem Nenner N:

a) $N=10$ b) $N=x$ c) $N=x-4$ d) $N=x+4$ e) $N=x^2+x-20$

176 Löse die Gleichung $\frac{Z}{4x-25}=\frac{Z}{10-x}$ mit dem Zähler Z:

a) $Z=9$ b) $Z=2x-4$ c) $Z=7-x$ d) $Z=(x+4)(2x-1)$ e) $Z=x^2+1$

177 a) $\frac{1}{x}=\frac{9}{x-5}$ b) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+5}$ c) $\frac{x-6}{x}=\frac{x}{x+10}$

178 a) $\frac{4}{2x+1}=\frac{3}{2x}$ b) $\frac{7}{x-8}=\frac{11}{x-1}$ c) $\frac{14}{x-14}=\frac{x-14}{14}$

179 a) $\frac{2x+19}{x+2}=\frac{47}{3x+6}$ b) $\frac{2x}{x-5}=\frac{x-24}{5-x}$ c) $\frac{x-7}{6x+6}=\frac{x+7}{8x+8}$

180 a) $\frac{x}{x-3}=\frac{x+1}{9-3x}$ b) $\frac{10}{4x+3}=\frac{x+3}{4x^2+3x}$ c) $\frac{x-2}{x^2-x}=\frac{x}{x^2-1}$

181 a) $\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{5x-8}{2(x-1)}=\frac{3(x-4)}{2(x-1)}$ b) $\frac{2}{x+9}+\frac{3}{4(x+9)}=\frac{1}{4}$

182 a) $\frac{x}{2(x-6)}+\frac{1}{2}=\frac{3}{x-6}$ b) $\frac{y}{y+3}-\frac{y+1}{2(y+3)}=\frac{1}{3}$

183 a) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{2x-1}{2x+2}=\frac{4x-1}{4x+4}$ b) $\frac{z-3}{z-2}+\frac{z}{5z-10}=\frac{4}{5}$

184 a) $\frac{r-7}{r+5}-\frac{3-r}{2r+10}=2$ b) $\frac{x}{2x-8}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{3}{2}$

185 a) $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x+8}{x^2-4}$ b) $\frac{5}{n-4}-\frac{1}{n-5}=\frac{9n-1}{n^2-9n+20}$

c) $\frac{x+3}{x-2}-\frac{x+2}{x-3}=\frac{x-5}{x^2-5x+6}$ d) $\frac{2k+17}{7k-3}+\frac{5k^2}{7k^2-3k}=\frac{k+2}{k}$

186 a) $\frac{5}{2t^2+3t}+\frac{6}{2t+3}-\frac{7}{t}=0$ b) $\frac{7x-51}{x^2-9}-\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+3}=0$

c) $\frac{v+1}{v-1}-\frac{v-1}{v+1}-\frac{1}{v^2-1}=0$ d) $\frac{x-1}{x+3}-\frac{x-4}{x+5}=\frac{7x+13}{x^2+8x+15}$

187 a) $\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x-2}=\frac{x+3}{4-x^2}$ b) $\frac{x}{3x-4}+\frac{1}{8-6x}-2=0$

188 a) $\frac{8x+1}{x-8}-\frac{8x-1}{8-x}=8$ b) $\frac{5+x}{5-x}-\frac{5-x}{5+x}=\frac{5x-5}{x^2-25}$

189 a) $\frac{x}{x-3}-\frac{x}{x-4}=\frac{5}{x-3}$ b) $\frac{1}{p}+\frac{2p+5}{p+6}=2$

c) $\frac{1}{w-5}+\frac{2w-3}{w+2}=2$ d) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-8}=\frac{11}{8-x}$

190 Kopfrechnungen!

a) $\frac{x}{x+7}+\frac{7}{x+7}=\frac{100}{x+2}$ b) $\frac{2x}{2x-11}-\frac{11}{2x-11}=\frac{x-8}{3}$

c) $\frac{3x}{x+2}+\frac{6}{x+2}=\frac{1}{x}$ d) $\frac{6}{x-6}-\frac{x}{x-6}=\frac{9}{9-x}$

191 a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}$ b) $\frac{x}{2x-3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x-3}$

192 a) $\frac{1}{q}-\frac{q}{4q-15}+\frac{1}{4}=0$ b) $\frac{1}{1-m}+\frac{2}{m}=\frac{1}{2+m}$

193 a) $\frac{2x-1}{2x}-\frac{3x-1}{3x}+\frac{4}{4x+1}=0$ b) $\frac{x-4}{x-2}+\frac{x-8}{2x-4}+\frac{x-9}{3x-6}=0$

c) $\frac{x+4}{6x^2+x-2}-\frac{3}{8x-4}=0$ d) $\frac{3r+7}{r^2+4r}-\frac{5}{r+4}=\frac{1}{4r}$

194 a) $\frac{x}{x-3}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2x-2}$ b) $\frac{1}{n^2-n}+\frac{1}{n^2-1}=\frac{5}{n^2+n}$

c) $\frac{6}{4s^2-9}+\frac{5}{2s^2-s-3}=\frac{4}{s^2-1}$ d) $\frac{1}{4x-4}+\frac{1}{6x-6}=\frac{5}{9x^2-x-8}$

e) $\frac{x+10}{x^2-10x}+\frac{x+5}{x^2-5x}=\frac{x}{x^2-15x+50}$

f) $\frac{x}{4x^2-20x+25}-\frac{1}{4x-10}+\frac{10}{4x^2-25}=0$

195 a) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-7}{x-8}$

196 a) $\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+9}$ b) $\frac{6}{2x-5}-\frac{3}{x+3}=\frac{22}{2x-7}-\frac{11}{x-2}$

197 a) $\frac{0.5x-1}{x+0.1}-\frac{0.2}{2x+0.2}=1$ b) $\frac{1-\frac{r}{3}}{1+\frac{r}{3}}=\frac{1+r}{2.6-r}$ c) $\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}}-\frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}}=\frac{1-\frac{4}{x}}{4+\frac{4}{x}}$

198 a) $\frac{\frac{1}{4}x+1}{1-\frac{1}{2}x}-\frac{\frac{3}{2}}{2-x}=\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{1+\frac{1}{w}}=\frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}}$ c) $\frac{0.75}{1.5+0.5x}+\frac{0.2x}{x+3}=0.3$

Zu 199, 200: Kopfrechnungen!

199 a) $\frac{1}{x}=\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{x}=6$ c) $\frac{1}{x}=-\frac{5}{3}$ d) $\frac{1}{x}=2.7$ e) $\frac{1}{x}=-0.01$

f) $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{x}+7\right)=0$

g) $\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{1}{n}\right)=0$

h) $\frac{1}{f}\left(\frac{1}{f}-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{f}+\frac{5}{7}\right)\left(3-\frac{1}{f}\right)\left(\frac{1}{f}-1.6\right)\left(0.04-\frac{1}{f}\right)=0$

200 a) $\frac{8}{x+2}=\frac{8}{9}$ b) $\frac{7}{2x-3}=\frac{7}{5}$ c) $\frac{25}{x-1}=1$ d) $\frac{12}{x+5}=4$ e) $\frac{6}{x-3}=\frac{1}{9}$

f) $\left(\frac{24}{x-3}-1\right)\left(\frac{24}{x-1}-3\right)=0$

g) $\left(\frac{1}{x-1}-1\right)\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{x-3}-\frac{1}{3}\right)=0$

Gleichungen mit Parametern

Wenn aus dem Aufgabentext nichts anderes hervorgeht, ist die angegebene Gleichung ohne Berücksichtigung von Sonderfällen nach x aufzulösen.

201 a) $x+1=\frac{a}{a+b}$ b) $\frac{r}{r-1}=\frac{r}{r+1}+x$ c) $5x=3x+\frac{4}{u}-\frac{2}{v}$

202 a) $x+\frac{1}{m}=\frac{1}{m-1}$ b) $2x-\frac{3a+b}{2a+2b}=\frac{b-2a}{2a+2b}$ c) $6x-\frac{1}{2h}=\frac{1}{3h}-4x$

203 a) $x+\frac{x}{p}=1$ b) $\frac{x}{e}+\frac{x}{f}=\frac{1}{f}$ c) $\frac{n+1}{x}+\frac{n}{x+1}=0$

204 a) $2x-\frac{dx}{2}=c$ b) $\frac{1}{x-t}=1-\frac{1}{t}$ c) $\frac{a}{w}-\frac{w}{a}=\frac{a^2}{x+aw}$

Zu 205 – 208: Löse die Gleichung nach jeder Variablen auf.

205 a) $A=\frac{abc}{4r}$ b) $s=\frac{1}{1-q}$ c) $\frac{x}{a}=\frac{h-x}{h}$

206 a) $\frac{x}{y}=\frac{x+a}{y+b}$ b) $F=G\,\frac{m_1m_2}{r^2}$ $(r>0)$ c) $\alpha=\frac{(n-2)180°}{n}$

207 a) $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x\cdot y}$ b) $\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}$ c) $t=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

208 a) $\frac{y}{x}-\frac{y}{x+1}=\frac{y+1}{x}$ b) $\frac{1}{H}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$ c) $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$ $(c>0)$

209 a) $\frac{1+x}{1-x}=a$ b) $\frac{3x+p}{3x-1}=\frac{x+1}{x-p}$ c) $\frac{m}{x-2}+\frac{2x}{2x-m}=1$

210 Diskutiere in Nr. 209 die Sonderfälle.

211 a) $\frac{x-1}{x-c}=c$ b) $\frac{s-5}{x-s}+\frac{1}{x}=0$ c) $\frac{a}{x}+1=\frac{x}{x-b}$

212 Diskutiere in Nr. 211 die Sonderfälle.

213 a) $\frac{a^2x-bx+c}{ax+bx-c}=a-1$ b) $\frac{g-hx}{gx-g}-\frac{x+1}{x-1}=1$ $(gx-g)=g(x-1)$

c) $\frac{x+r}{x-r}-\frac{x-r}{x+r}=\frac{4r^2+2r}{x^2-r^2}$

214 a) $\frac{(mx-n)(m+n)}{mx-nx+n}+n=m$ b) $\frac{x}{c-d}-\frac{x+c+d}{c^2-d^2}=0$

c) $\frac{x^2}{sx-2s}-\frac{x-s}{s}=\frac{1}{x-2}$

215 a) $\frac{2a-x}{4a^2-4ab+b^2}=\frac{x-b+2}{4a-2b}$ b) $\frac{x^2+n^2}{x^2-nx}-\frac{n^2+1}{nx-n^2}=1$

c) $\frac{r^2-4}{24r}-\frac{5r-6}{8x}=\frac{8r+2}{3rx}-r$ d) $\frac{4}{x+y}+\frac{1}{x}+\frac{4}{x-y}=0$

e) $\frac{2(x-c)}{a^2+ab-ac-bc}-\frac{x+c}{a^2+ab+ac+bc}=\frac{1}{a+b}$

216 a) $\frac{c-dx}{c^2-9d^2}-\frac{c+dx}{c^2+6cd+9d^2}=0$ b) $\frac{7}{t^2+tx}-\frac{t+4}{tx}+\frac{3t-2}{tx+x^2}=0$

c) $\frac{ex-f}{ex+e}+\frac{3e+fx}{fx+f}=\frac{e^2+f^2}{ef}$ d) $\frac{1}{(x-k)^2}+\frac{2}{(x+k)^2}=\frac{3}{x^2-k^2}$

e) $\frac{a-x}{2a^2-2ab}-\frac{2(a+x)}{a^2-b^2}+\frac{x}{ab+b^2}+\frac{a^2+6ab+b^2}{2a^3-2ab^2}=0$

217 a) $\frac{x+g}{x+\frac{x}{g}}=1$ b) $\frac{1}{\frac{x}{u}-\frac{x}{v}}=uv$ c) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{d}}=\frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{c}}$

218 a) $\frac{1-\frac{x+a}{x-b}}{1-\frac{x-a}{x+b}}=1$ b) $\frac{r-\frac{1}{x}}{r+\frac{1}{x}}=\frac{x-\frac{1}{r}}{x+\frac{1}{r}}$ c) $\frac{x-\frac{1}{n}}{\frac{1}{x}-n}=n+x+1$

Textaufgaben

219 Der Zähler eines ungekürzten Bruches ist um 3 grösser als der Nenner. Der Wert des Bruches ist 0.8. Berechne Zähler und Nenner.

220 Der Nenner eines ungekürzten Bruches ist um 240 grösser als der Zähler. Addiert man 1200 zum Zähler, so erhält man einen Bruch, dessen Wert zum ursprünglichen reziprok ist. Berechne Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruches.

221 Peter verwechselt das Subtrahieren mit dem Dividieren. Statt dass er x durch a dividiert, subtrahiert er a von x. Trotzdem erhält er das richtige Resultat. Bestimme x.

a) $a=2$ b) $a=3$ c) $a=10$ d) $a=-10$ e) $a=\frac{4}{3}$ f) allgemein

222 Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz dieser Kehrwerte. Welche Zahlen sind es?

223 Ein grosser Bagger benötigt für einen Aushub 12 Stunden. Würde noch ein kleinerer Bagger helfen, so könnte der Aushub in 9 Stunden gemacht werden. Wie lange würde der kleine Bagger allein brauchen?

224 Ein Wasserbecken wird durch eine Zuleitung in 10 Stunden gefüllt. Die Zuleitung wird um 9.00 Uhr geöffnet. Um 11.30 Uhr wird zusätzlich eine zweite Zuleitung geöffnet, so dass das Becken schon um 16.00 Uhr voll ist. Wie lange hätte die zweite Zuleitung allein, um das Becken zu füllen?

225 Zwei Metallstücke haben die Massen 6 kg und 7.2 kg. Das Volumen des zweiten Stückes beträgt 90 % des Volumens des ersten. Die beiden Dichten unterscheiden sich um 2.5 g/cm³. Berechne das Volumen des ersten Stückes.

226 Ein Schiff benötigt für eine 180 km lange Strecke einen Sechstel weniger an Zeit als ein langsameres Schiff, dessen mittlere Geschwindigkeit um 5 km/h kleiner ist als die des schnelleren. Berechne die beiden Fahrzeiten.

227 Ein Autofahrer erreicht sein Ziel nach 120 km Fahrt um 15.00 Uhr. Wäre seine mittlere Geschwindigkeit um 4 km/h grösser gewesen, so hätte er 4 % Zeit gewonnen. Wann ist er gestartet?

228* Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B. Berechne die Laufzeit von A.

229 Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr, um allein Schutt wegzuführen, als ein grosser. Beide gemeinsam können den Schutt in je 20 Fahrten wegführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?

230 Der Kilopreis der Kaffeesorte A ist um 2 Franken höher als derjenige der Sorte B. Von der Sorte B erhält man für 160 Franken 8 kg mehr, als man von der Sorte A für 120 Franken erhält. Berechne den Kilopreis der Sorte A.

Einige Ungleichungen

231 a) $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{x}<-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x}<3$ d) $\frac{-1}{x}<-3$

232 a) $\frac{2}{x}>1$ b) $\frac{-2}{x}>-1$ c) $\frac{-1}{-2x}>1$ d) $\frac{-1}{-2x}>-1$

233 a) $\frac{1}{x-4}<0$ b) $\frac{8}{x+5}>0$ c) $\frac{-7}{2x-3}<0$ d) $\frac{5}{6-x}>0$

234 a) $\frac{2}{3x+8}<0$ b) $\frac{-6}{1-x}>0$ c) $\frac{-1}{3-4x}<0$ d) $\frac{12}{8x-9}>0$

235 a) $\frac{1}{(x-2)(x-6)}<0$ b) $\frac{1}{(x-2)(x-6)}>0$ c) $\frac{x-2}{x-6}>0$

236 a) $\frac{x}{x+5}<0$ b) $\frac{-3}{x^2+5x}<0$ c) $\frac{4}{x^2-8x+15}>0$

237 a) $\frac{6}{x-5}<\frac{1}{2}$ b) $\frac{6}{x-5}>\frac{1}{2}$ c) $\frac{x+5}{x-3}<2$ d) $\frac{x+1}{x-8}>4$

238 a) $\frac{5}{4-x}>\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{4-x}<\frac{2}{3}$ c) $\frac{2x-1}{2x+1}<\frac{7}{6}$ d) $\frac{x-3}{x+3}>3$

3. Zehnerpotenzen

Häufig treten in alltäglichen oder wissenschaftlichen Kontexten, zum Beispiel in Physik, Biologie oder Chemie, grosse oder kleine Zahlen auf. Potenzen können dazu verwendet werden um sehr grosse oder sehr kleine Zahlen kurz und übersichtlich zu notieren. Zwei wichtige Beispiele für solche Zahlen sind folgend aufgeführt.

- Abstand Erde-Sonne, eine astronomische Einheit (1 AE)
  $$150'000'000\,\text{km}$$
- Durchmesser eines Atoms, ein Ångström (1 Å)
  $$0.000\,000\,000\,1\,\text{m}$$

3.1. Der Potenzbegriff für natürliche Exponenten

Definition 3.1: Potenz, Basis und Exponent

Der Term
$$a^b$$
heisst *Potenz*. a nennt man *Basis*, b heisst *Exponent*.

Definition 3.2: Potenz

ür $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:
$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} \text{ für } n \geq 2$$

Beispiele.

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- $\pi^4 \approx 3^4 = 81$

3.2. Zehnerpotenzen

Nach Definition gilt also zum Beispiel

$$10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000$$

was leicht berechnet werden kann. Die obige Liste weist auch ein System auf: Erhöht man nämlich den Exponenten einer Zehnerpotenz um 1, so muss man einfach die entsprechende Zahl mit 10 multiplizieren. Wenden wir dieses Prinzip rückwärts an, so können wir Bedeutungen für die bislang sinnlosen Ausdrücke

$$10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad \text{etc.}$$

festlegen. Nämlich

$$10^0 = 1 \quad 10^{-1} = 0.1 \quad 10^{-2} = 0.01 \quad \ldots$$

Lernen Sie zu den jeweiligen Zehnerpotenzen auch die entsprechenden Präfixe und Abkürzungen, vielleicht mit Tabelle 1 auf Seite 35. Sie gehören einer umfassenden Allgemeinbildung, da sie uns im Alltag begegnen. Damit lässt sich leicht erklären, wie viel ein Milliliter ist, was man unter einer Dekade versteht, wie viele Bytes ein Terabyte sind oder was unter den Begriff Mikrokosmos fällt. Auch eine namhafte Firma scheut sich nicht davor, ihr Flaggschiff i*** Nano zu nennen, um zu suggerieren, dass ....

3.3. Wissenschaftliche Darstellung

Wir kommen auf unsere Motivation zu Beginn des Kapitels zurück; der schlanken Darstellung grosser und kleiner Zahlen. Bei der sogenannten *wissenschaftlichen Darstellung* von Zahlen schreibt man die Zahl als Dezimalbruch mit Einer und Zehnerpotenzen.

Beispiele.

- Abstand Erde-Sonne, eine astronomische Einheit (1 AE)

$$150'000'000\,\text{km} = 1.5 \cdot 10^8\,\text{km}$$

- Durchmesser eines Atoms, ein Ångström (1 Å)

$$0.000\,000\,000\,1\,\text{m} = 1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

-

$$92'300 = 9.23 \cdot 10^4$$

10^{12}	1 000 000 000 000	1 Billion	Tera-	T
10^{11}	100 000 000 000			
10^{10}	10 000 000 000			
10^{9}	1 000 000 000	1 Milliarde	Giga-	G
10^{8}	100 000 000			
10^{7}	10 000 000			
10^{6}	1 000 000	1 Million	Mega-	M
10^{5}	100 000			
10^{4}	10 000			
10^{3}	1 000	1 Tausend	Kilo-	k
10^{2}	100		Hekto-	h
10^{1}	10		Deka-	d
10^{0}	1			
10^{-1}	0.1		Dezi-	d
10^{-2}	0.01		Centi-	c
10^{-3}	0.001	1 Tausendstel	Milli-	m
10^{-4}	0.000 1			
10^{-5}	0.000 01			
10^{-6}	0.000 001	1 Millionstel	Mikro-	μ
10^{-7}	0.000 000 1			
10^{-8}	0.000 000 01			
10^{-9}	0.000 000 001	1 Milliardstel	Nano-	n
10^{-10}	0.000 000 000 1			
10^{-11}	0.000 000 000 01			
10^{-12}	0.000 000 000 001	1 Billionstel	Piko	p

Tabelle 1: Zehnerpotenzen: Namen und Abkürzungen

- $$0.0032 = 3.2 \cdot 10^{-3}$$

Bemerkung. Man findet leicht eine Merkregel, um den jeweiligen Wert des Exponenten zur Basis 10 zu bestimmen.

Übung 23 (expand)**.** Schreibe die Zahlen aus:

(a) $2.52 \cdot 10^5$
(b) $6.52 \cdot 10^7$
(c) $5.555 \cdot 10^{12}$
(d) $4.15 \cdot 10^9$
(e) $4.31 \cdot 10^9$
(f) $3.11 \cdot 10^3$
(g) $1.23 \cdot 10^6$
(h) $6.22 \cdot 10^4$

Übung 24 (factor)**.** Schreibe in wissenschaftlicher Darstellung:

(a) $99'000'000$
(b) $4'180'000'000$
(c) $48'500'000$
(d) $0.000\,008\,21$
(e) $92'400$
(f) $0.000\,016$
(g) $19'300$
(h) $2'340$
(i) $1'350'000$
(j) $0.000\,000\,000\,101$
(k) $822'000'000$
(l) $0.000\,000\,077$

Übung 25 (sci)**.** Schreibe in wissenschaftlicher Darstellung:

(a) $0.000\,015$
(b) $0.000\,008\,1$
(c) 0.654
(d) $0.000\,000\,074$
(e) $0.000\,000\,25$
(f) $0.000\,005\,15$
(g) $0.000\,000\,061\,5$
(h) $0.000\,000\,000\,077$

Übung 26 (float)**.** Schreibe die Zahlen aus:

(a) $1.25 \cdot 10^{-5}$
(b) $7.22 \cdot 10^{-7}$
(c) $3.33 \cdot 10^{-12}$
(d) $4.15 \cdot 10^{-4}$
(e) $2.31 \cdot 10^{-9}$
(f) $2.75 \cdot 10^{-5}$
(g) $5.05 \cdot 10^{-6}$
(h) $6.02 \cdot 10^{-8}$

3.4. Rechenregeln für Potenzen

Insbesondere beim Rechnen mit Variablen aber auch fürs Kopfrechnen können folgende Regeln zu Hilfe genommen werden.

Wir erinnern uns an die Definition der Potenz für natürliche Exponenten.

Definition 3.3: Potenz

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} \text{ für } n \geq 2$$

Damit lassen sich leicht die folgenden Potenzgesetze einsehen.

Für die folgenden Ausführungen seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$; sowie bei Bedarf $n > m$. Es gilt

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1}$$
$$a^n \div a^m = a^{n-m} \tag{2}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{3}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{4}$$
$$a^n \div b^n = (a \div b)^n \tag{5}$$

Bemerkung. Die ersten beiden Gesetze beziehen sich auf Potenzen mit denselben Basen, die letzten beiden auf Potenzen mit gleichen Exponenten.

Beispiele. Folgend je ein Anwendungsbeispiel zu jedem Gesetz:

- $x^{2n} \cdot x^{3-n} = x^{2n+3-n} = x^n + 3$
- $z^7 \div z^{3-n} = z^{7-(3-n)} = z^{n+4}$

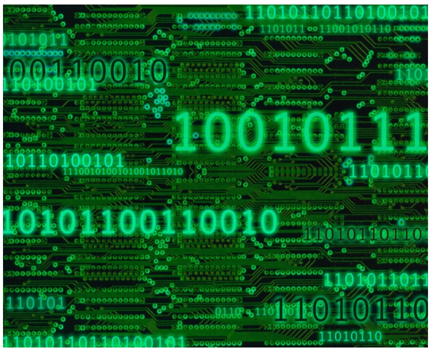
3. Zehnerpotenzen

- $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} = 4096$
- $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$
- $25^3 \div 5^3 = (25 \div 5)^3 = 5^3 = 125$

4. Zahlensysteme

4.1. Eine kurze Geschichte der Zahlen

Es ist nicht genau bekannt, seit wann die Menschen Zahlen benutzen. Die ersten Darstellungen von Zahlen waren wahrscheinlich Striche. Das älteste bekannte Beispiel ist ein Knochen eines Wolfes, in dem 55 tiefe Kerben eingeritzt sind. Diese Darstellung wird heute noch gerne auf Bierdeckeln oder für einfache Zählaufgaben, beispielsweise beim Jassen, verwendet. Man spricht hier von einem *unären* Zahlensystem, weil alle Zahlen mit nur einem Zeichen (Strich) dargestellt werden. Der Übersicht wegen fasst man häufig fünf Striche zusammen, indem der fünfte Strich quer über die vier Einzelstriche gelegt wird.



Übung 27. Weshalb fasst man just fünf Striche zu einem Bündel zusammen?

4.1.1. Zahlen in Ägypten (ca. 3000 v. Chr.)

Die Ägypter entwickelten ein eigenes Zahlensystem mit unterschiedlichen Zeichen für die Zahlen $1, 10, 100, 1000, \ldots, 10^6$. Dies ist ein sogenanntes *Additionssystem* zur Basis 10,

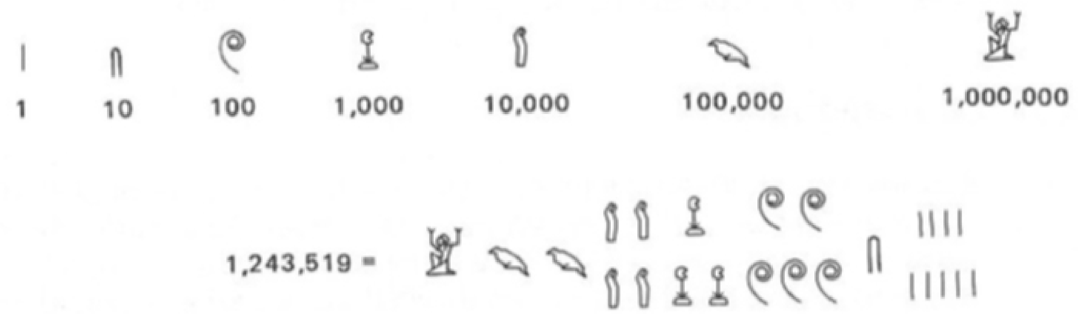


Abbildung 4: Ägyptische Zahlen

wobei jede Zehnerpotenz $(10^0, \ldots, 10^6)$ ein eigenes Zeichen hat und die Zahl die Summe der Werte ihrer Ziffern ist. Übrigens, die Ägypter waren vermutlich auch die Ersten, welche Zeichen für Brüche einführten.

Übung 28 (ägyptisch)**.** Übersetze folgende Zahlen ins „Ägyptische“:

(a) 2300654 (b) 44629

Übung 29 (mal so mal so)**.** Finde Zahlen, die in der ägyptischen Schreibweise mehr Zeichen benötigen als in unserer Schreibweise. Finde auch Zahlen, die bei den Ägyptern kürzer geschrieben wurden.

Übung 30 (vorteil?)**.** Beschreibe Vor- und Nachteile der ägyptischen Zahlenschreibweise gegenüber unserem heutigen System.

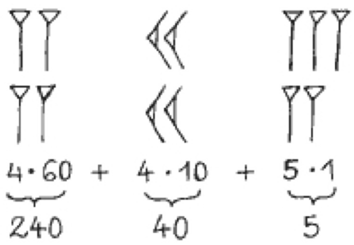
4.1.2. Zahlen in Babylonien (ca. 2000 v. Chr.)


Abbildung 5: Babylonische Rechentafel und Sternkarte

Die Babylonier verwendeten als eines der ersten Völker ein sogenanntes *Positionssystem*. Der Wert eines Zeichens hängt auch von dessen Position ab. Während wir heute in unserem Dezimalsystem (Basis 10) die Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ verwenden, brauchten die Babylonier in ihrem Sechzigersystem 59 Ziffern. Ein Zeichen für die Null, das „Nichts“, gab es damals noch nicht.

Übung 31 (Zahlzeichen)**.** Finde eine Darstellung der Zahlzeichen der Babylonier, und schreibe das Wesentliche dieser Darstellung auf, so dass du mit deinen Notizen jede Zahl in Babylonisch schreiben kannst.

Abschliessend noch ein Beispiel, wie diese Zeichen verwendet werden.



Übung 32 (übersetze)**.** Übersetze folgende Zahlen ins „Babylonische“:

(a) 2381 (b) 829

4.1.3. Zahlen in Indien und Arabien

Die Ziffern, wie wir sie heute verwenden, haben ihren Ursprung in Indien und Arabien. Sie wurden unter anderem durch Kaufleute wie Fibonacci im 13. Jahrhundert nach Europa gebracht, konnten sich aber erst später gegen die römischen Zahlen durchsetzen.

Eine grossartige Leistung des menschlichen Geistes stellt die Erfindung der Zahl Null dar. Für die Menschen war es lange Zeit unvorstellbar, ein Zeichen für „Nichts“ zu gebrauchen. Bei Positionssystemen ist ein Zeichen für Null als Platzhalter aber unentbehrlich. Ohne die Null könnte zum Beispiel 12 mehrere Bedeutungen haben: $12, 102, 120, 1200, \ldots$.

Abbildung 6: Evolution von den indischen bis zu den heutigen arabischen Ziffern

Abbildung 7: Magisches Quadrat am Tor der Familia Sagrada

Übung 33 (römisch)**.** Notiere die römischen Zahlzeichen, und finde Regeln zur Bildung von Zahlen in der römischen Schreibweise.

Übung 34 (Jahreszahl)**.** Schreibe 2023 mit römischen Zahlzeichen; und 1848.

Übung 35 (magisches Quadrat)**.** Stelle ein magisches 4×4 Quadrat mit römischen Zahlen her.

4.2. Zahlensysteme

Ein Zahlensystem wird zur Darstellung von Zahlen verwendet. Eine Zahl wird dabei nach den Regeln des Zahlensystems als Folge von Ziffern dargestellt. Man unterscheidet im Wesentlichen zwischen Additionssystemen und Stellenwertsystemen (Positionssystemen).

4.3. Additionssysteme

In einem Additionssystem wird eine Zahl als Summe der Werte ihrer Ziffern dargestellt. Dabei spielt die Position der einzelnen Ziffern keine Rolle.

Übung 36 (bsp add)**.** Nenne zwei Additionssysteme.

4.4. Positionssysteme

In einem Positionssystem bestimmt die Stelle (Position) den Wert der jeweiligen Ziffer. Die „niederwertigste“ Position steht dabei im Allgemeinen rechts.

Ein Stellenwertsystem hat eine Basis b. Jede Zifferposition hat einen Wert, der einer Potenz der Basis entspricht. Für die k-te Position hat man einen Wert von b^{k-1}.

Die Berechnung des Zahlenwertes erfolgt durch Multiplikation der einzelnen Ziffern z_i mit den zugehörigen Stellenwerten b_i und Summation dieser Produkte:

$$\text{Zahlenwert} = z_n \cdot b^n + \cdots + z_i \cdot b^i + \cdots + z_0 \cdot b^0.$$

Beispiel 11. Unter der Zahl 1257 im üblichen Dezimalsystem (d.h. die Basis ist 10) verstehen wir den Wert

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 1257.$$

Übung 37 (bsp pos)**.** Nenne ein Positionssystem ausser das Dezimalsystem.

Bei einigen Naturvölkern sind auch noch Zahlensysteme zu anderen Basen gefunden worden. Vergleichsweise weit verbreitet ist das System zur Basis 20. Bei diesen Völkern werden in der Regel zum Zählen neben den Fingern auch noch die Füsse verwendet.

Mit der Beschränkung des niedrigsten Exponenten auf 0 kann man nur ganze Zahlen darstellen. Lässt man auch negative Exponenten zu, kann man auch rationale Zahlen in einem Stellenwertsystem schreiben, wobei der Übergang vom nichtnegativen zum negativen Exponenten durch ein Trennzeichen markiert wird, beispielsweise ein Komma:

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 121,47$$

Übung 38 (binär)**.** Die Idee des Positionssystems mit einer bestimmten Basis wird auch beim Binärsystem (Basis 2) verwendet. Computer stellen Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1 dar und zwar als magnetische Polung oder elektrisches Signal (Nord oder Süd bzw. Plus oder Minus). Die binäre Zahl 1011 entspricht der Dezimalzahl

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11.$$

Stelle die Dezimalzahlen von 1 bis 20 im Binärsystem dar. Beschreibe dein Vorgehen.

Übung 39 (bin dec)**.** Verwandle folgende Binärzahlen in Dezimalzahlen

$$1 \qquad 11 \qquad 111 \qquad 1111 \qquad \ldots$$

und

$$10 \qquad 100 \qquad 1000 \qquad 10000 \qquad \ldots$$

Übung 40 (dec bin)**.** Finde für die Dezimalzahlen 34 und 37 die Binärschreibweise.

4.5. Das Sexagesimalsystem

Von den Kulturvölkern ist mir nur von den Sumerern und Babyloniern bekannt, dass sie ein Stellenwertsystem benutzten. Das Wissen um den Vorteil eines Stellenwertsystems ging danach wieder verloren, so dass weder die Griechen noch die Römer ein solches Zahlensystem verwendeten. In diesem Kontext sei erneut auf die praktischen Vorteile eines Stellenwertsystems hingewiesen, zum Beispiel im kaufmännischen Bereich. Die Verachtung der Griechen für eine anwendungsorientierte Mathematik mag erklären, warum dieses so erfindungsreiche Volk keine Anstalten machte, sein kompliziertes, alphabetisches System durch ein Stellenwertsystem zu ersetzen. Im Folgenden wollen wir auf das babylonische Zahlensystem eingehen, da es bis heute in unserem Alltag präsent ist.

Das babylonische Zahlensystem ist ein Stellenwertsystem zur Basis 60, mit dem beliebig grosse, aber auch beliebig kleine Zahlen systematisch dargestellt werden können. Die Babylonier benutzten eine Keilschrift, die durch das Eindrücken von Griffeln in Tontafeln entstand. Hier die ersten 59 Zahlen. Jede dieser oben aufgeführten Zahlen ist als eine

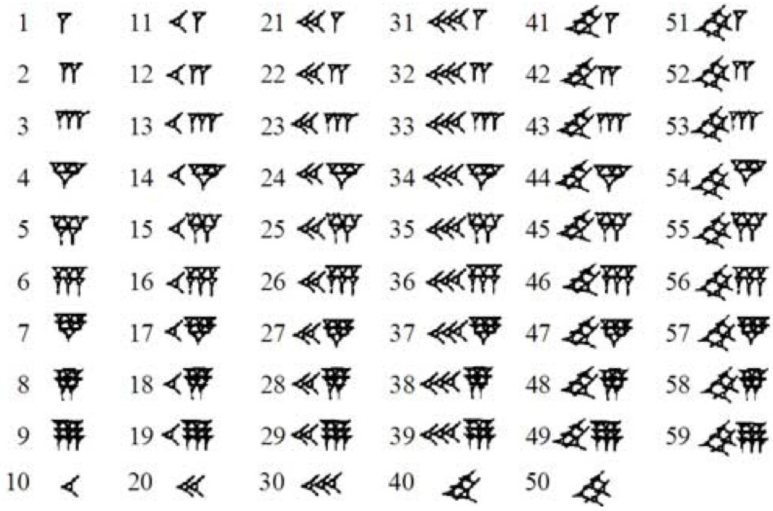
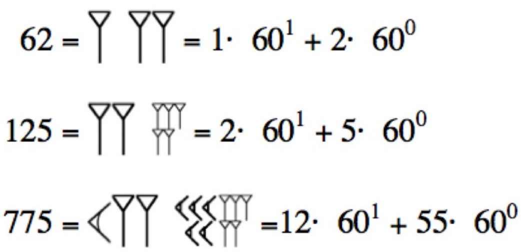


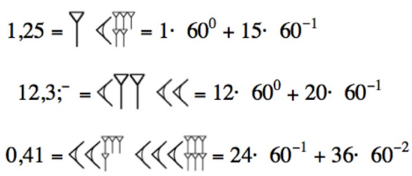
Abbildung 8: Babylonische Zahlen von 1 bis 59

Ziffer zu interpretieren. Erst bei Zahlen über 59 wird naturgemäss die nächste Stelle benutzt. Sie wird, wie auch bei unserem Dezimalsystem, nach links eingerückt.

Abbildung 9: Babylonische Tontafel, 7289 v.Chr.



Genauso interessant ist, dass die Babylonier ihr Stellenwertsystem auch für Nachkommazahlen nutzten. Dabei kam ihnen die vielfältige Teilbarkeit der Zahl 60 zugute — dies war vermutlich auch der Grund, weshalb das Sexagesimalsystem überhaupt eingeführt wurde. Ein Zeichen für das „Komma“ war nicht vorhanden, so dass die Zuordnung der Stellen zu den 60-er Potenzen nicht eindeutig war. Welche Position z.B. die 60^0-Stelle hat, musste aus dem Kontext erraten werden.



Eine genaue Untersuchung des Objekts aus Abbildung 9 auf Seite 45 fördert folgendes Schriftbild zu Tage, das in Abbildung 10 auf Seite 46 deutlicher zu erkennen ist.

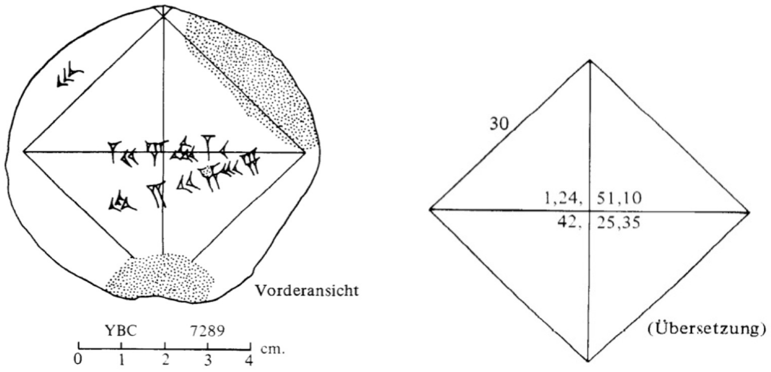


Abbildung 10: Schema und Übersetzung der Zahlen

Es zeigt sich, dass man ein sinnvolles Ergebnis kriegt, wenn man die erste „1“ mit $1 \cdot 60^0$ identifiziert. Wir erhalten so für die erste Zeile

$$1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$$

Übung 41 (irrational)**.** Welche Zahl wird hier vermutlich beschrieben?

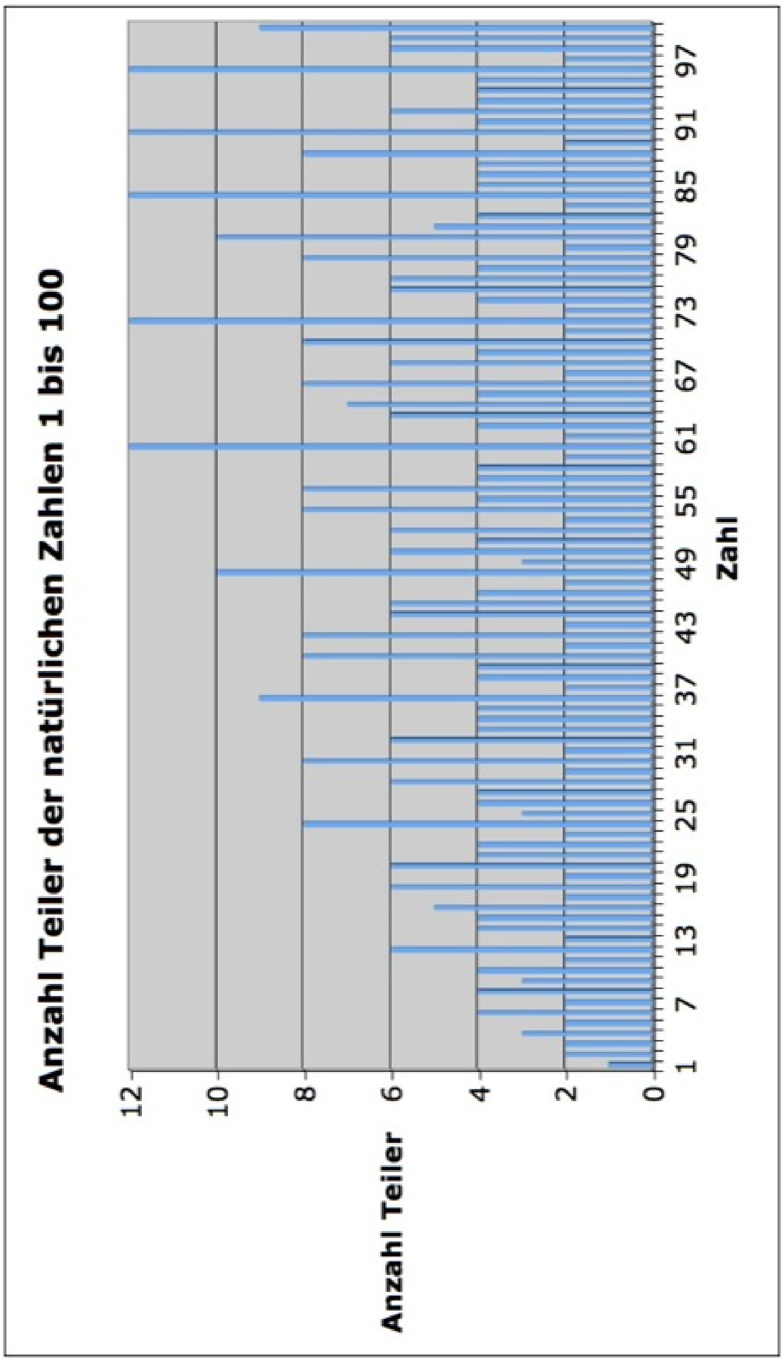


Abbildung 11: Anzahl Teiler der ersten hundert natürlichen Zahlen

A. Das Binärsystem

Wie könnte eine Codierung von Zeichen im Computer realisiert werden? Der Computer arbeitet mit elektrischem Strom. Das heisst er kann lediglich die beiden Zustände „Strom an“ und „Strom aus“ unterscheiden. Man codiert 1 für den ersten und 0 für den zweiten Zustand. Die Information, die durch den Strom in einer Leitung codiert ist, heisst *ein Bit* (binary digit). So lassen sich bloss zwei Zeichen codieren. Kombiniert man aber zwei Leitungen, lassen sich nun vier Zustände unterscheiden:

Leitung 1	Leitung 2
0	0
0	1
1	0
1	1

Übung 42. Stelle eine Tabelle für drei Leitungen auf.

Dies reicht natürlich für unsere Zwecke noch nicht.

Frage. Wie viele Leitungen braucht man, um alle Buchstaben des Alphabets codieren zu können?

In der Informatik ist es üblich, acht Leitungen zur Speicherung von Informationen zusammenzufassen. Insgesamt lassen sich damit $2^8 = 256$ verschiedene Zeichen darstellen. Man spricht bei dieser Bündelung von acht Leitungen vom Informationsgehalt ein *Byte*.

Bemerkung. Früher rechnete man noch in Kilobyte, was ca. 1000 Bytes entspricht. Kilo wurde in diesem Zusammenhang nicht wie üblich für den Wert Tausend verwendet, sondern für $2^{10} = 1024 \approx 1000$. Deshalb ist zum Beispiel ein Megabyte = 1024 Kilobyte.

Nun zur nächsten Frage: Wie rechnet der Computer mit diesen Binärzahlen? Dabei gehen wir hier aber nicht auf die Frage ein, wie diese Rechnungen technisch realisiert werden, sondern betrachten nur die algebraischen Aspekte des Rechnens mit Binärzahlen.

Die Addition von Binärzahlen funktioniert prinzipiell genau so, wie die Addition von Dezimalzahlen.

Übung 43. Addiere schriftlich die Binärzahlen 1001011 und 101011.

Werden mehrere Binärzahlen addiert, kann der Übertrag natürlich auch grösser als 1 werden.

Übung 44. Addiere schriftlich die Binärzahlen 1001011, 101011 und 101011.

Übung 45. Berechne folgende Aufgaben, indem du alle Summanden ins Binärsystem überführst, darin addierst und das Ergebnis schliesslich ins Dezimalsystem zurück übersetzt. Kontrolliere mit der dezimalen Rechnung.

(a) $35 + 17$

(b) $119 + 31$

(c) $63 + 63 + 1$

Abbildungsverzeichnis