# Funktionentypen

**beyond linear**

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

Vorab knappe Informationen zum vorliegenden Skript: Grundsätzlich gilt, dass fast alle Übungen selber verifiziert oder korrigiert werden können. Zu ausgewählten Übungen hat es Notizen, welche mit einem grauen Augensymbol gekennzeichnet sind. Diese Hyperlinks bringen Sie zu den Notizen und von dort kommen Sie meistens auch per Klick wieder zu den Übungen zurück. Die randnotierten QR-Codes, die Sie zu Video-Kommentaren des anliegenden Abschnitts führen, können am Computer unter anderem so benutzt werden, dass Sie das Code-Quadrat mit gehaltener linker Maustaste in einen Browser Ihrer Wahl ziehen. Natürlich können Sie wie üblich per Smartphone scannen. Alle meine Kommentare finden Sie auch via Besuch von `YouTube.com`. Wenn Sie *Jorma Wassmer* zusammen mit dem gewünschten, *mathematischen Stichwort* suchen, treffen Sie oft ins Schwarze. Jetzt aber los...

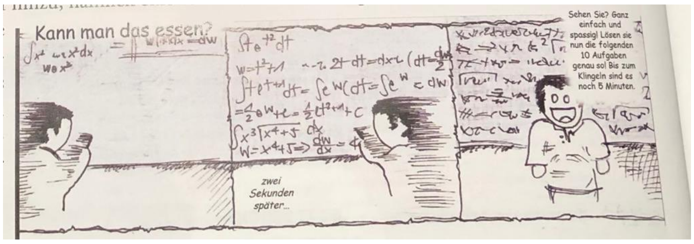



Abbildung 1: Math Teacher, Karikatur aus Lerbermatt Maturazeitung 2012

# 2. Der Funktionsbegriff

## 2.1. Funktionen

In der Mathematik betrachtet man oft Abbildungen, bei denen die Zielmenge eine Zahlenmenge ist. Solche Abbildungen werden Funktionen genannt. Bei Funktionen ist es üblich, die Urbilder als Argumente, die Bilder als Funktionswerte, die Ausgangsmenge als Definitionsmenge und die Bildmenge als Wertemenge zu bezeichnen.

**Definition 2.1: Funktion**

Eine Funktion $f$ ist eine Abbildung, die jedem Element der Definitionsmenge *genau ein* Element aus einer Zahlenmenge $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ zuordnet.

**Bemerkung.** Falls nicht erwähnt oder anderweitig festgelegt, so sind Definitions- und Wertemenge gleich $\mathbb{R}$.

Der Funktionsbegriff ist für die Mathematik zentral, da er in den Naturwissenschaften, in der Technik, in den Wirtschaftswissenschaften und auch in vielen andern Wissensgebieten eine grosse Rolle spielt. Denn Funktionen bieten die Möglichkeit, Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Grössen unmissverständlich und übersichtlich zu beschreiben.

**Beispiel 1.** Lässt man einen Stein vom Dach des schiefen Turms von Pisa fallen, so wird durch

$$h(t) = 56 - 4.9t^2$$

die Höhe $h$ des Steins, in Metern über dem Erdboden, $t$ Sekunden nach dem Fallenlassen beschrieben.

**Übung 2.1.**
Ausgehend von obiger Funktion $h$: Wie viele Meter über dem Boden ist der Stein nach 2 Sekunden Flugzeit? Wann trifft der Stein auf den Boden auf? Wie hoch ist der schiefe Turm von Pisa?

**Beispiel 2.** Die Funktion, welche vorschreibt, eine Zahl zu quadrieren notiert man kurz mit

$$f(x) = x^2.$$

Es ist dann beispielsweise $f(2) = 2^2 = 4$, $f(0) = 0^2 = 0$, $f(-3) = (-3)^2 = 9, \ldots$. Praktisch ist häufig die Illustration einer Funktion in einem Koordinatensystem. Man trägt ausgewählte Zahlenpaare $(2\,|\,4)$, $(0\,|\,0)$, $(-3\,|\,9), \ldots$ ein.

**Bemerkung.** In $y = f(x)$ heisst $x$ **Argument von** $f$ und $y$ bzw. $f(x)$ **Funktionswert/Bild von** $x$.

**Übung 2.2.**
Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = x^2 - 2x + 3.$$

a) Berechne $g(2)$, $g(3)$, $g(4) - g(-4)$ und $g(a^2)$.

b) Für welchen Wert $x$ ist $g(x) = 2$, $3$ bzw. $x^2$?

**Übung 2.3.**
Es sei

$$h(z) = z^3 - z + 2.$$

Berechne $h(3)$, $h(-1)$ und $h(0)$.

**Übung 2.4.**
Betrachte

$$s(t) = \frac{t+2}{t-1}$$

Berechne $s(0)$, $s(-2)$, $s(1)$ und $s(10)$. Für welche Argumente $t$ ist der Funktionswert $s(t) = 1$, $2$, $-5$ bzw. $0$?

**Übung 2.5.**
Berechne für

$$f(x) = 2^x - 1$$

$f(1)$ , $f(3)$ und $f(10)$.

**Definition 2.2: Nullstelle**

Gilt für einen Wert $x$ der Definitionsmenge $f(x) = 0$, so heisst $x$ Nullstelle der Funktion $f$.

Nullstellen sind also — wie der Name sagt — diejenigen Stellen, an denen der Funktionswert just 0 ist.

**Übung 2.6.**
Ermittle die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}$, die minimale Wertemenge $\mathbb{W}$ und die Nullstellen der Funktionen

a) $f(x) = 2x - 6$

b) $g(x) = 3x + 1$

c) $h(x) = x^2$

d) $k(x) = \sqrt{x}$

e) $m(x) = \frac{1}{x}$

f) $n(x) = \sqrt{x - 5}$

**Übung 2.7.**
Drücke die folgenden Aussagen kurz und prägnant in mathematischer Schreibweise aus:

a) Durch die Funktion $f$ wird der Zahl 5 die Zahl 132 zugeordnet.

b) Die Funktion $h$ nimmt für $x = -2$ den Funktionswert 18 an.

c) Die Funktion $f$ ordnet der Zahl 3 einen grösseren Wert zu als der Zahl 8.

d) Alle Funktionswerte der Funktion $f$ sind positiv.

e) Die Funktion $f$ ordnet jeder reellen Zahl das um 7 vermehrte Quadrat dieser Zahl zu.

f) Die Funktion $g$ ordnet jeder reellen Zahl das Quadrat der um 3 vergrösserten Zahl zu.

g) Die Funktion $h$ ordnet jeder reellen Zahl den um 13 vergrösserten Kehrwert dieser Zahl zu.

h) Die Funktion $f$ ordnet jeder reellen Zahl den Kehrwert der um 4 verminderten Zahl zu.

**Definition 2.3: Graph**

Sei $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}$ eine Funktion. Die Menge aller Punkte

$$\{\, (x \,|\, y) \mid y = f(x), x \in \mathbb{D} \,\}$$

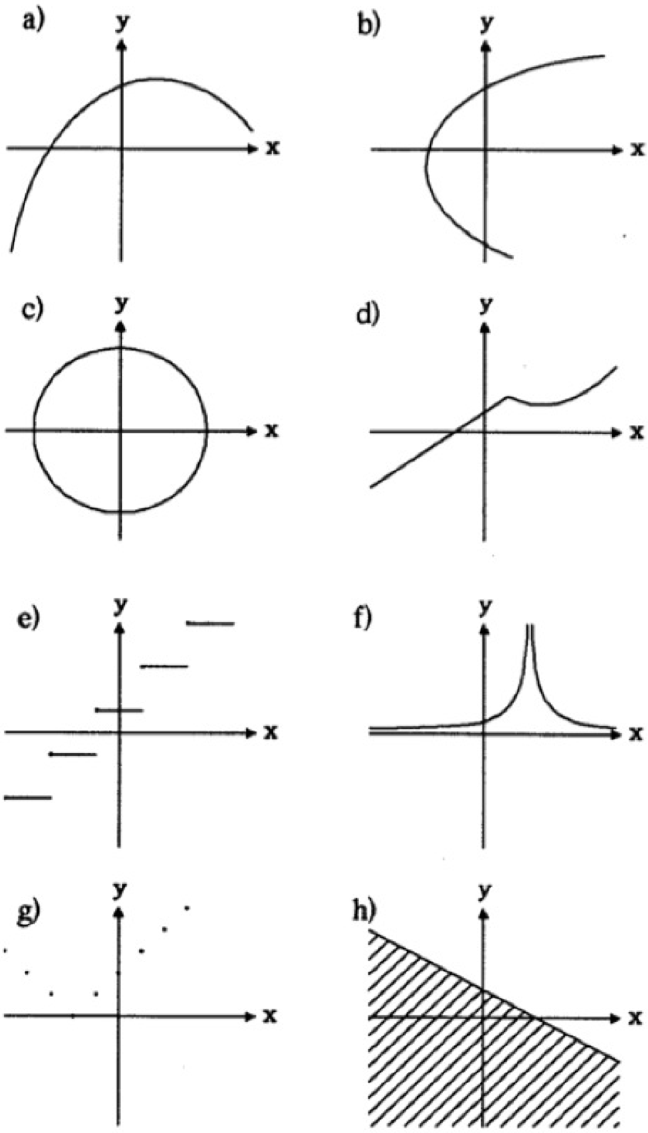
heisst **Graph** der Funktion $f$.

**Übung 2.8.**

Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$.

**Übung 2.9.**

Können die folgenden Darstellungen Graphen von Funktionen sein? Woran erkennt man, ob eine Funktion dargestellt wird oder nicht?

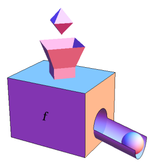



## 2.2. Inversfunktionen

Durch die Funktionsvorschrift

$$f(x) = 2x - 3$$

ist jedem $x$ genau ein $y$-Wert zugeordnet.




**Übung 2.10.**

Wie sieht der Graph von $f$ aus?

Umgekehrt ist in diesem Fall durch $f$ eine Funktion $f^{-1}$ definiert, die jedem Funktionswert $y$ genau einen $x$-Wert zuordnet.

**Übung 2.11.**
Wie sieht diese Inversfunktion $f^{-1}$ aus?

**Definition 2.4: Inversfunktion**

Gilt für eine Funktion $f$

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

dann heisst $f^{-1}$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$ die Inversfunktion von $f$ .

**Übung 2.12.**
Kann man, ausgehend von der Funktion

$$f(x) = x^2, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R},$$

eine Inversfunktion angeben?

**Bemerkung.** Man findet den Funktionsterm von $f^{-1}$ in dem man die Gleichung

$$f(x) = y$$

nach $x$ auflöst. Anschliessend vertauscht man noch die Bezeichnung $y$ mit $x$, weil üblicherweise $x$ die freie Variable darstellt und man dafür die horizontale Achse verwenden will.

**Beispiel 3.** Die Inversfunktion zu

$$f(x) = 3x - 2$$

ist demnach

$$\begin{aligned} y &= 3x - 2 && (+2) \\ y + 2 &= 3x && (\div 3) \\ \frac{y+2}{3} &= x \\ f^{-1}(x) &= \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Übung 2.13.**
Zeichne die Graphen von $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $f^{-1}$ aus dem Einführungsbeispiel in dasselbe Koordinatensystem, nachdem du den Funktionsterm von $f^{-1}$ gefunden hast.

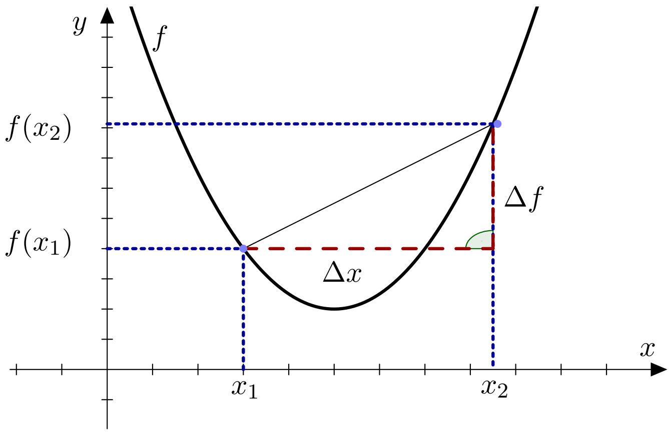



Abbildung 2: Durchschnittliche Änderungsrate

**Satz 2.1: Achsensymmetrie der Inversfunktion**

Die Graphen von $f$ und $f^{-1}$ sind achsialsymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten.

*Beweis.* Siehe Übung **??** □

## 2.3. Der Differenzenquotient

Manchmal ist man an der Änderung einer Funktion interessiert. Beispielsweise ist die Schwankung des SMI über einen Tag oder sogar nur über einen Monat relevant. Wie die Schwankungen tagsüber verliefen, ist für den Aktienanleger unbedeutend. Also betrachtet man die Änderung einer Grösse über einem bestimmten Zeitabschnitt. Dabei vergleicht man Anfangs- und Endwert bezüglich der Dauer der Beobachtung.

**Definition 2.5: Differenzenquotient**

Der Quotient

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

gibt die durchschnittliche Änderung der Funktion im Intervall $[x_1, x_2]$ an. Diesen Quotienten nennt man *Differenzenquotienten* .

**Definition 2.6: Intervall**

Die Menge
$$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2 \,\}$$
wird Intervall genannt und mit $[x_1, x_2]$ bezeichnet. Selbstverständlich muss der Funktionswert an jeder Stelle des Intervalls definiert sein, d.h. das Intervall ist eine Teilmenge der Definitionsmenge von $f$.

**Definition 2.7: Monotonie**

Eine Funktion $f$ heisst monoton wachsend im Intervall $I$, wenn die durchschnittliche Änderung für jedes Teilintervall von $I$ positiv oder Null ist. Entsprechend nennt man $f$ monoton fallend, wenn für jedes Teilintervall von $I$ die durchschnittliche Änderung negativ oder Null ist.

**Übung 2.14.**

Berechne die durchschnittliche Änderung der Funktion $f$ über den gegebenen Intervallen.

a) $x^2$ über $[0, 1], [2, 3], [0, 3], [-2, -1], [x_1, x_2]$

b) $\frac{1}{x}$ über $[0.5, 2], [-7, -2], [-1, 1], [x_1, x_2]$

c) $x^2 - 2x + 1$ über $[-3, 4], [0, 6], [-2, 2]$

**Übung 2.15.**

Die Tabelle zeigt die Tarif- und Lebenskostenindizes (Index 1977 $\sim$ 100) für die Schweiz.

| | Fahrpreis Bahn | Gesamtlohnindex | Konsumentenpreise |
|---|---|---|---|
| 1977 | 100 | 100 | 100 |
| 1979 | 101.5 | 106.6 | 104.4 |
| 1980 | 102.6 | 112.3 | 108.6 |
| 1981 | 107.9 | 119.3 | 115.7 |
| 1982 | 115.4 | 127.7 | 122.2 |
| 1983 | 125.1 | 132.5 | 125.8 |
| 1984 | 128.8 | 136.2 | 129.5 |
| 1985 | 131.1 | 140.4 | 133.9 |
| 1986 | 133.3 | 145.4 | 135.0 |
| 1987 | 130.3 | 148.9 | 137.0 |
| 1988 | 130.2 | 154.1 | 139.5 |

a) Zeichne farbig in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen, die durch diese Tabelle dargestellt werden.

b) Berechne die durchschnittliche Änderung der drei Funktionen in den Intervallen $[1977, 1988]$ und $[1986, 1988]$.

## 2.4. Notizen zu den Übungen

**Notizen zu Übung 2.1.** Nach zwei Sekunden ist der Stein auf einer Höhe von $h(2) = 56 - 4.9 \cdot 2^2 = 36.4\,\mathrm{m}$. Der Stein trifft auf dem Boden auf, wenn $h(t) \stackrel{!}{=} 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} 56 &= 4.9 \cdot t^2 && (\div 4.9) \\ \frac{56}{4.9} &= t^2 && ((\ \ )^2) \\ t &\approx \pm 3.38 \end{aligned}$$

wobei nur die positive Lösung sinnvoll ist; also beträgt die Fallzeit $t \approx 3.4\,\mathrm{s}$. Schliesslich ist der schiefe Turm von Pisa nach Funktion $h(0) = 56\,\mathrm{m}$ hoch.

**Notizen zu Übung 2.2.**

a) $g(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1$, $g(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 6$, $g(4) = 11$ und $g(-4) = 27$ impliziert $g(4) - g(-4) = -16$, $g(a^2) = a^2 - 2a + 3$

b) $g(x) = 2$ heisst

$$\begin{aligned} 2 &= x^2 - 2x + 3 && (-2) \\ 0 &= x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= (x-1)^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$g(x) = 3$ ist äquivalent zu $0 = x^2 - 2x = x(x-2)$ und damit $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Aus $g(x) = x^2$ hat man sofort $2x = 3$, also $x = \frac{3}{2}$.

**Notizen zu Übung 2.3.** $h(3) = 3^3 - 3 + 2 = 26$, $h(-1) = (-1)^3 - (-1) + 2 = 2$ und $h(0) = 2$.

**Notizen zu Übung 2.4.** $s(0) = -2$, $s(-2) = 0$, $s(1)$ ist nicht definiert und $s(10) = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3}$. Ferner rechnen wir

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{t+2}{t-1} && (\cdot(t-1)) \\ t - 1 &= t + 2 && (-t) \\ -1 &= 2 \end{aligned}$$

Also ist $s(t) = 1$ nicht erfüllbar. Wie sieht's mit 2 aus:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{t+2}{t-1} && (\cdot(t-1)) \\ 2t - 2 &= t + 2 && (-t+2) \\ t &= 4 \end{aligned}$$

$s(t) = -5$ :

$$\begin{aligned} -5 &= \frac{t+2}{t-1} && (\cdot(t-1)) \\ -5t+5 &= t+2 && (+5t-2) \\ 6t &= 3 && (\div 6) \\ t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Schliesslich:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{t+2}{t-1} && (\cdot(t-1)) \\ 0 &= t+2 && (-2) \\ t &= -2 \end{aligned}$$

**Notizen zu Übung 2.5.** $f(1) = 2^1 - 1 = 1$, $f(3) = 2^3 - 1 = 7$ und $f(10) = 1023$.
**Notizen zu Übung 2.6.**

a) Die Nullstelle liegt bei $x = 3$, da dies nach kurzer Rechnung aus $0 \stackrel{!}{=} 2x - 6$ folgt. Offensichtlich ist $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$ und $x = -\frac{1}{3}$.

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$. Wegen $0^2 = 0$ ist $x = 0$ Nullstelle.

d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{W}$. Die Nullstelle ist $x = 0$.

e) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $m$ hat wegen $0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{x} \implies 0 = 1$ keine Nullstellen.

f) $\mathbb{D} = [0, \infty)$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$. Nullstelle ist $x = 5$.

**Notizen zu Übung 2.7.**

a) $f(5) = 132$

b) $h(-2) = 18$

c) $f(3) > f(8)$

d) $f \in \mathbb{R}^+$

e) $f(x) = x^2 + 7$

f) $g(x) = (x+3)^2$

g) $h(x) = \frac{1}{x} + 13$

h) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

**Notizen zu Übung 2.8.** Verwende `geogebra.org` und vergleiche mit deinem Plot.
**Notizen zu Übung 2.9.**

a) ✓

b) keine Funktion: zu gewissen $x$-Werten gibt es mehr als einen $y$-Wert.

c) keine Funktion

d) ✓

e) ✓

f) ✓

g) ✓

h) keine Funktion: zu $x$-Werten gibt es unendlich viele $y$-Werte.

**Notizen zu Übung 2.10.** Diese Gerade hat Steigung 2 und schneidet die $y$-Achse bei $-3$. Check mit `geogebra.org`.
**Notizen zu Übung 2.11.**

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 && (+3) \\ y + 3 &= 2x && (\div 2) \\ \frac{y+3}{2} &= x \end{aligned}$$

Somit $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$
**Notizen zu Übung 2.12.** Nein, denn $f$ ist nicht injektiv. Schneide einen Parabelast ab.

$$\begin{aligned} y &= x^2 && (\sqrt{\ }) \\ \pm\sqrt{y} &= x \end{aligned}$$

Beispielsweise $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
**Notizen zu Übung 2.13.**

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x^2 && (\cdot 4) \\ 4y &= x^2 && (\sqrt{\ }) \\ \pm 2\sqrt{y} &= x \end{aligned}$$

$f^{-1}(x) = 2\sqrt{x}$. Check deinen Plot mit `geogebra.org`. Man sollte erkennen, dass die Graphen von $f$ und $f^{-1}$ achsensymmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden $y = x$ sind.
**Notizen zu Übung 2.14.**

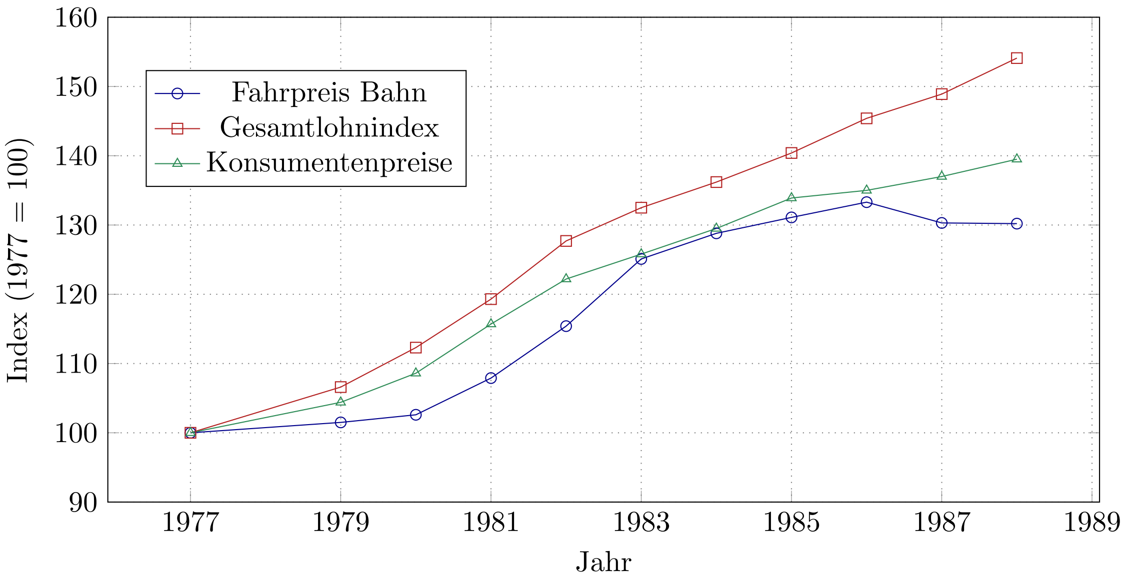
a) Sei $f(x) = x^2$. Beispielsweise ist die durchschnittliche Änderungsrate von $f$ über dem Intervall $[2, 3]$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5.$$

Allgemein ist über $[x_1, x_2]$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1.$$

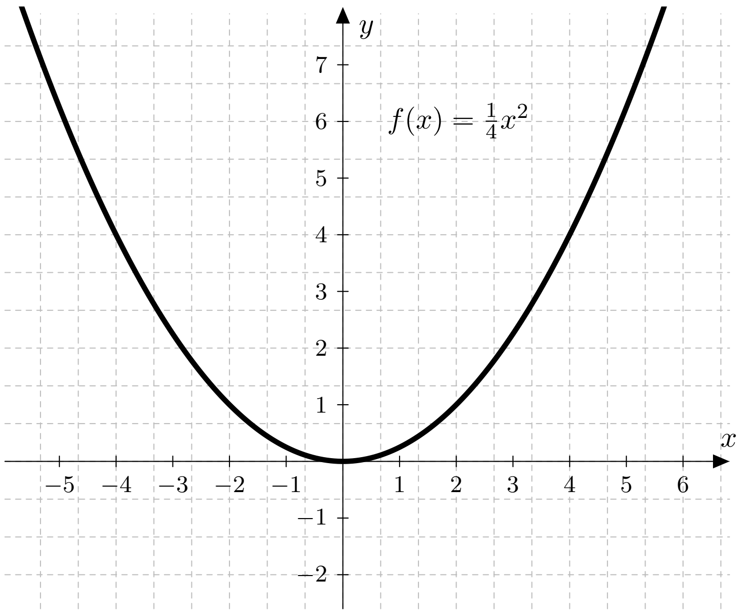
**Notizen zu Übung 2.15.**




Die durchschnittlichen Änderungsraten rechnet man aus. Exemplarisch der Gesamtlohnindex über der Zeitspanne $[1977, 1988]$:

$$\frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{G(1988) - G(1977)}{1988 - 1977} = \frac{154.1 - 100}{1988 - 1977} = \frac{54.1}{11} \approx 4.92$$

Analog $\frac{\Delta B}{\Delta t} \approx 2.75$ und $\frac{\Delta K}{\Delta t} \approx 3.6$
Über $[1986, 1988]$: $\frac{\Delta G}{\Delta t} = 4.35$, $\frac{\Delta B}{\Delta t} \approx -1.6$ und $\frac{\Delta K}{\Delta t} \approx 2.3$




# 3. Quadratische Funktionen

## 3.1. Erste Beobachtungen

Quadratische Funktionen, beziehungsweise die Graphen davon, haben bemerkenswerte Eigenschaften. Im Folgenden wollen wir zuerst ein Beispiel anschauen, das die Grundlage vieler Anwendungen im Alltag illustriert. Anschliessend wird auf die Mathematik von quadratischen Funktionen und ihren Graphen eingegangen.

**Beispiel 4.** Stelle dir den unten abgebildeten Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

als Spiegel vor. Zeichne vier parallel zur $y$-Achse einfallende Lichtstrahlen und konstruiere ihre Reflexion. Beachte dabei, dass die Tangente an den Graphen von $f$ an der Stelle $x$ die Steigung $\frac{1}{2}x$ hat.

Beispiel 1 zeigt die wichtigste Eigenschaft der Graphen von quadratischen Funktionen. Alle parallel zur $y$-Achse einfallenden Strahlen werden in ein und denselben Punkt reflektiert. Dieser ausgezeichnete

Abbildung 3: Parabolspiegel in Odeillo

Punkt hat natürlich einen eigenen Namen verdient:
man nennt ihn Brennpunkt. Wir werden dies in Kürze noch genauer untersuchen. Tatsächlich kann es dort sehr sehr heiss werden! Abbildung 3 zeigt den grössten Parabolspiegel der Welt, welcher zu Forschungszwecken dient und das Sonnenlicht „bündelt". Damit werden im Häuschen, das im Brennpunkt steht, Temperaturen bis zu 4000 °C erreicht.

## 3.2. Begriffe und Mathematik

**Definition 3.1: Quadratische Funktion**

Eine Funktion heisst quadratisch, wenn sie sich mit einer Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

darstellen lässt.

**Bemerkung.** Spezialfall: Funktionen der Form

$$f(x) = ax^2$$

haben die bequeme Eigenschaft, dass ihr Graph durch den Ursprung geht und dort, je nachdem ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist, ihren Tief- bzw. Hochpunkt haben.

**Übung 3.1.**
Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen

a) $x^2, \frac{1}{2}x^2, 2x^2, -\frac{1}{4}x^2$

b) $x^2+1, -x^2+1, \frac{1}{2}x^2-2, -2x^2+3, \frac{1}{5}x^2-1$

**Definition 3.2: Parabel und Scheitelpunkt**

Der Graph einer quadratischen Funktionen nennt man Parabel. Der Tief- bzw. Hochpunkt heisst Scheitelpunkt.

**Satz 3.1: Brennpunkteigenschaft**

Die Parabel der Funktion

$$f(x) = ax^2$$

ist achsialsymmetrisch zur $y$-Achse. Die $x$-Achse ist Tangente im Scheitel. Jeder parallel zur $y$-Achse einfallende Lichtstrahl wird an der Parabel so gespiegelt, dass er durch den Brennpunkt geht.

*Beweis.* Später. □

**Satz 3.2: Symmetrie**

Der Scheitel halbiert das vom Brennpunkt auf die Leitlinie gefällte Lot. Dieses liegt auf der Symmetrieachse der Parabel.

*Beweis.* Siehe Übung **??**. □

Man kann zeigen, dass jede Parabel der Funktion $f(x) = ax^2$ sich in der Form

$$f(x) = \frac{1}{4p}x^2$$

schreiben lässt, wobei $p$ just die Hälfte des Abstandes des Lots Brennpunkt-Leitlinie ist.

**Bemerkung.** Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass man die Möglichkeit hat, die Parabel sowohl auf geometrische als auch auf algebraische Weise zu definieren. Nämlich

geometrisch: Jede Kurve mit der Eigenschaft, dass alle ihre Punkte von einem bestimmten Punkt (Brennpunkt) und einer bestimmten Geraden (Leitlinie) den gleichen Abstand haben, heisst Parabel.

algebraisch: Eine Parabel ist der Graph einer Funktion der Form $f(x) = \frac{1}{4p}x^2$.

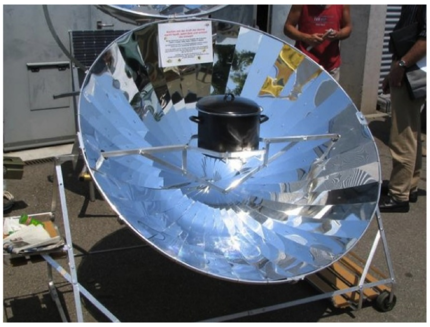


Abbildung 4: Kochen

**Übung 3.2.**

Berechne den Brennpunkt und die Funktionsgleichung der Leitlinie der Parabel aus dem Einführungsbeispiel.

Die Möglichkeit verschiedener Interpretationen gilt nicht nur für Parabeln, sondern auch für viele andere Kurven.

**Übung 3.3.**

Zeichne einen Punkt $B$ und eine Gerade $l$, die nicht durch diesen Punkt läuft. Konstruiere anschliessend die Menge aller Punkte, welche von $B$ und $l$ denselben Abstand haben.

**Übung 3.4.**

Zeige, dass für eine quadratische Funktionen der Form

$$f(x) = ax^2$$

ein beliebiger Punkt $Q$ auf der Parabel von $f$ vom Brennpunkt $\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{4a}\right)$ und von der Leitlinie $l(x) = -\frac{1}{4a}$ den gleichen Abstand hat. Wieso reicht es, dies nur für die Normalparabel zu zeigen?

## 3.3. Mehr Anwendungen

Wieso werden alle zur Symmetrieachse der Parabel parallel einfallenden Lichtstrahlen so reflektiert, dass sie durch den Brennpunkt laufen? Betrachte zur Begründung folgende Bilder.

Beachte hierbei in Abbildung 5 auf Seite 21, dass bei der Reflexion Enfallswinkel gleich Ausfallswinkel gilt. Begründe anschliessend, dass die Abstände $A$ zu $B$ und $B$ zu den beiden Schnittpunkten Tangente mit $y$-Achse bzw. Senkrechte auf die Tangente mit $y$-Achse gleich gross sind.

Daraus folgt dann, dass $B$ Mittelpunkt des Thaleskreises durch $A$ ist und damit jeder parallel zur Symmetrieachse der Parabel einfallende Lichtstrahl nach der Reflexion durch den Punkt $B$, den Brennpunkt, geht. Dies ist in Abbildung 6 auf Seite 21 illustriert.

Folgende Bilder zu Anwendungen von quadratischen Funktionen unter Ausnützung der Parabeleigenschaften.

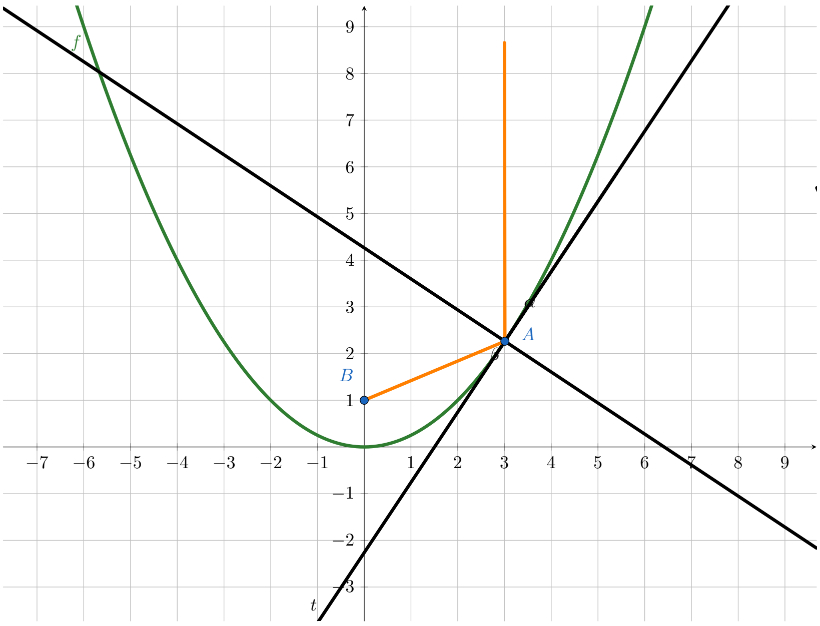



Abbildung 5: einfallender Lichtstrahl und Reflexion an Parabel

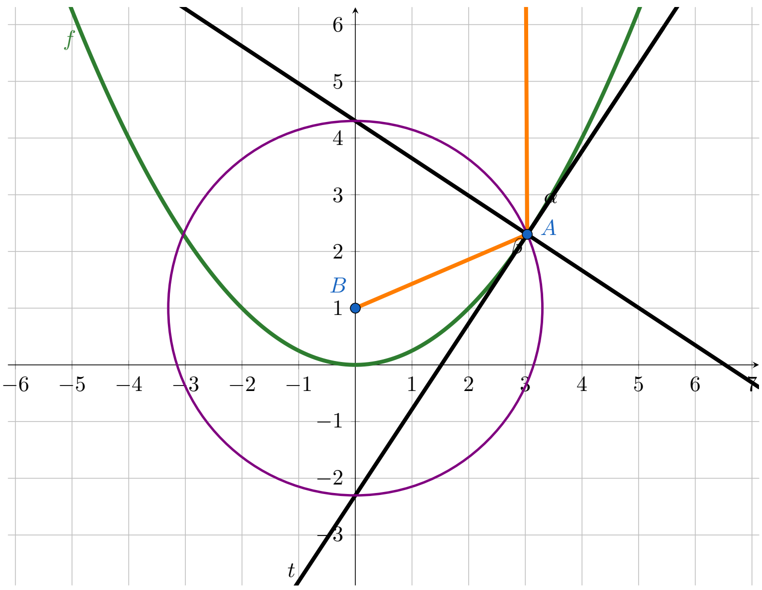



Abbildung 6: Thaleskreis mit Mittelpunkt $B$

Abbildung 7: Signalverstärkung

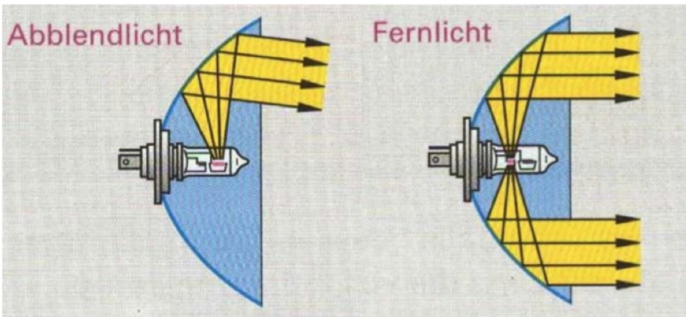



Abbildung 8: Scheinwerfer

## 3.4. Scheitelform

Wir haben gesehen, dass der Graph von

$$f(x) = ax^2$$

eine Parabel ist. Die Parabel ist für $a > 0$ nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet. Für $|a| < 1$ ist sie weiter, für $|a| > 1$ enger als die Normalparabel. lhr Scheitel ist $S(0|0)$.
Der Graph von

$$f(x) = ax^2 + v \quad (a, v \in \mathbb{R})$$

entsteht durch Verschiebung einer Parabel in y-Richtung um $|v|$ Einheiten. Für $v > 0$ ist die Parabel nach oben, für $v < 0$ nach unten verschoben. Ihr Scheitel ist $S(0|v)$.

**Übung 3.5.**
Zeichne in ein und dasselbe Koordinatensystem die Graphen der folgenden Funktionen

a) $(x-2)^2, (x+2)^2, \frac{1}{2}(x-1)^2, -2(x+2)^2, x^2+6x+9$

b) $(x-1)^2+1, \frac{1}{2}(x+2)^2-3, -2(x+3)^2+44, x^2-3x-2.$

Der Graph von

$$f(x) = a(x-u)^2 \quad (a, u, \in \mathbb{R})$$

entsteht durch Verschiebung einer Parabel in $x$-Richtung um $|u|$ Einheiten. Die Parabel ist für $u > 0$ nach rechts, für $u < 0$ nach links verschoben. Ihr Scheitel ist $S(u|0)$.
Der Graph von

$$f(x) = a(x-u)^2 + v \quad (a, u, v \in \mathbb{R})$$

ist die in x-Richtung um $|u|$ Einheiten und in $y$-Richtung um $|v|$ Einheiten verschobene Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$.

**Definition 3.3: Scheitelform**

Da man in dieser Darstellung aus dem Funktionsterm direkt den Scheitel $S\,(u\,|\,v)$ ablesen kann, nennt man

$$f(x) = a(x-u)^2 + v$$

Scheitelgleichung oder Scheitelform der Parabel.

Durch Umformen der Scheitelgleichung erhält man die Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$. Umgekehrt kann man $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch quadratische Ergänzung immer in die Scheitelgleichung überführen.

**Bemerkung.** Beachten Sie, dass der Parameter $a$ bei beiden Formen denselben Wert hat.

**Übung 3.6.**
Zeige die Aussage aus obiger Bemerkung.

**Beispiel 5.** Es ist klar, dass man durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen aus der Scheitelform die Form $ax^2 + bx + c$ erhält. Wie erhält man umgekehrt die Scheitelform? Sei

$$f(x) = 3x^2 - 30x + 37.$$

Wir generieren nun eine Form $(x - u)^2$ und passen $v$ „künstlich“ an. Man nennt das folgende Vorgehen *quadratische Ergänzung:*

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 30x + 37 \\ &= 3[(x-5)^2 - 25] + 37 \\ &= 3(x-5)^2 - 38 \end{aligned}$$

Der Scheitel ist somit $S\,(5\,|-38)$ und der Graph lässt sich sofort skizzieren.

**Definition 3.4: Polynom 2. Grades**

Die Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

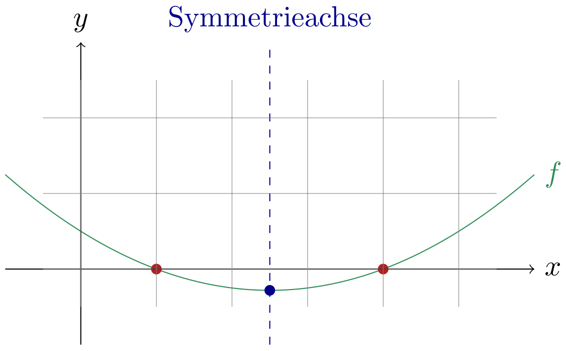
mit $a \neq 0$ heisst quadratische Funktion, oder ganzrationales Polynom 2. Grades, falls $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

**Bemerkung.** Ihr Graph ist eine Parabel; ihre Symmetrieachse ist die Parallele zur $y$-Achse durch den Scheitel $S$. Die Parabel ist für $a > 0$ nach oben, für $a < 0$ nach unten geöffnet.

**Bemerkung.** Statt mit quadratischen Ergänzen kann die Scheitelform aus der Normalform auch mit folgender Überlegung gewonnen werden. Betrachte die Lösungsformel für quadratische Gleichungen,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

bekanntlich zur Ausgangslage $ax^2 + bx + c = 0$. OEdA nehmen wir an, dass die quadratische Funktion $f$ zwei Nullstellen $x_1$ und $x_2$ habe. In der Mitte dieser Nullstellen liegt die Symmetrieachse der Parabel, welche senkrecht auf der $x$-Achse steht und durch den Scheitelpunkt $S(u|v)$ verläuft. Es gilt $u = \frac{-b}{2a}$, da der Term $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und von $u$ aus nach links und rechts zu den Nullstellen bringt.




Das heisst, dass wir aus der Normalform ohne quadratische Ergänzung den Scheitelpunkt $S(u|v)$ berechnen können. Es gilt $u = -\frac{b}{2a}$ und $v$, den Scheitel-$y$-Wert, berechnen wir durch Einsetzen des Scheitel-$x$-Wertes in $f$, $f(u) = v$.

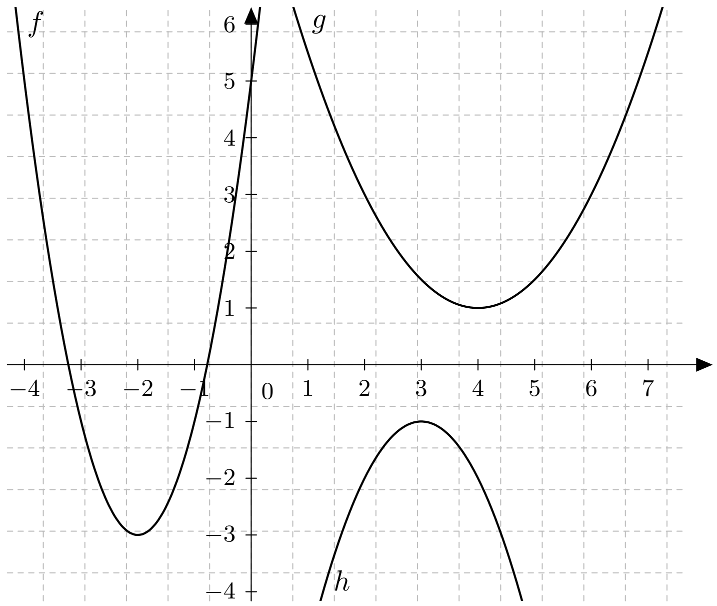
**Übung 3.7.**
Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der quadratischen Funktionen $x \mapsto$

a) $x^2 - 6x + 11, 2x^2 - 3x, -x^2 + 6x - 7,$

b) $0.5x^2 - 4x + 7, 0.25x^2 - 2x + 1, -0.1x^2 - x - 1.$

Hint: Ermittle gegebenenfalls die Scheitelgleichung und damit die Koordinaten des Scheitelpunkts.

**Übung 3.8.**
Wie lautet die Fuktionsgleichung der gegebenen Parabeln?



**Übung 3.9.**
Ermittle die Scheitelgleichung der Parabel mit dem Scheitel $S$ so, dass sie durch den Punkt $P$ geht.

a) $S\,(2\,|\,4)$, $P\,(3\,|\,3)$

b) $S\,(2\,|\,4)$, $P\,(-1\,|\,7)$

c) $S\,(-2\,|-3)$, $P\,(0\,|\,0)$

**Übung 3.10.**
Ermittle die Gleichung $y = x^2 + bx + c$ einer Parabel so, dass sie durch die Punkte $A(2|-7)$ und $B(-3|8)$ geht.

**Übung 3.11.**
Ermittle die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einer Parabel so, dass sie durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ geht.

a) $A\,(1\,|\,0)\,, B\,(-1\,|\,1)$ und $C\,(2\,|\,1)$

b) $A\,(1\,|\,2)$, $B\,(3\,|\,4)$ und $C\,(5\,|\,1)$

**Übung 3.12.**
Ein Brückenbogen hat die Form einer Parabel. Die Scheitelhöhe beträgt 4 m, die Spannweite 8 m.

a) Kann ein Lastwagen mit einer Höhe von 3.5 m und einer Breite von 2.1 m passieren?

b) Wie breit darf der Lastwagen höchstens sein?

c) Kann der Lastwagen aus (a) zugleich mit einem Pkw der Höhe 1.6 m und der Breite 1.8 m passieren, wenn zwischen ihnen ein Abstand von 0.3 m bleiben soll?

## 3.5. Maxima & Minima

Der grösste bzw. kleinste Wert, falls er existiert, einer Wertemenge heisst Maximum bzw. Minimum. Die quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-u)^2 + v$$

hat für

$$x = u = -\frac{b}{2a}$$

ein Maximum, falls $a < 0$, bzw. ein Minimum, falls $a > 0$. Das Maximum bzw. Minimum ist $v = f(u)$.
Begründung: Der Term $(x-u)^2$ ist nicht negativ; für $a < 0$ wird $f(x) \leq v$ und für $a > 0$ wird $f(x) \geq v$. Das Gleichheitszeichen gilt aber nur für $x = u$.

**Übung 3.13.**
Ermittle das Maximum bzw. das Minimum der folgenden Terme für $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 - 8x + 25, 3 - 2x - x^2, x^2 + x - 18, -x^2 + 6x + 2.$$

**Übung 3.14.**
Welches Rechteck vom Umfang 160 cm hat den grössten Inhalt?
**Übung 3.15.**
Mit 120 m Zaun soll ein möglichst grosses rechteckiges Feld abgegrenzt werden,

a) auf offenem Gelände,

b) wenn an einer Seite ein Fluss die Grenze bildet.

Wie gross wird jeweils das Feld?
**Übung 3.16.**
Ein Jazzlokal hat bei einem Eintritt von 8 Fr. durchschnittlich 240 Besucher. Würde man den Eintrittspreis um 0.5 Fr., 1 Fr. usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10, 20 usw. zurück. Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten?
**Übung 3.17.**
Der Schirm einer Stehlampe soll die Form einer quadratischen Säule haben. Für das Gestell stehen 440 cm Draht zur Verfügung.

a) Welche Ausmasse hat der Lampenschirm, wenn der Mantel zur dekorativen Gestaltung möglichst gross sein soll? Wie gross ist diese Mantelfläche?

b) Wie sind die Ergebnisse, wenn für eine entsprechende Hängelampe die Oberfläche maximal sein soll?

**Übung 3.18.**
Kann man, ausgehend von der Funktion

$$f(x) = x^2, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R},$$

eine Inversfunktion angeben?

**Bemerkung.** Man findet den Funktionsterm von $f^{-1}$ in dem man die Gleichung

$$f(x) = y$$

nach $x$ auflöst. Anschliessend vertauscht man noch die Bezeichnung $y$ mit $x$, weil üblicherweise $x$ die freie Variable darstellt und man dafür die horizontale Achse verwenden will.

**Beispiel 6.** Die Inversfunktion zu

$$f(x) = 3x - 2$$

ist demnach

$$
\begin{aligned}
y &= 3x - 2 && (+2)\\
y + 2 &= 3x && (\div 3)\\
\frac{y+2}{3} &= x\\
f^{-1}(x) &= \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

**Übung 3.19.**
Zeichne die Graphen von $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $f^{-1}$ aus dem Einführungsbeispiel in dasselbe Koordinatensystem, nachdem du den Funktionsterm von $f^{-1}$ gefunden hast.

## 3.6. Notizen zu den Übungen

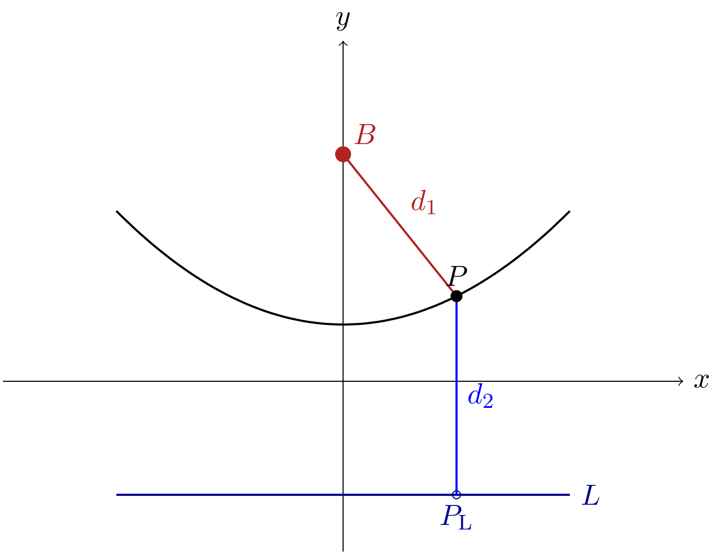
**Notizen zu Übung 3.1.** Man setzte ein paar Punkte ein. Meines erachtens bieten sich als erstes $-1, 0, 1$ an. Berechne ein paar weitere Punkte, falls nötig, und zeichne den Graphen. Kontrolliere mit `geogebra.org`.

**Notizen zu Übung 3.2.** Die Information über den Abstand vom Scheitelpunkt zum Brennpunkt steckt, wie oben gesehen, im Koeffizienten von $x^2$:

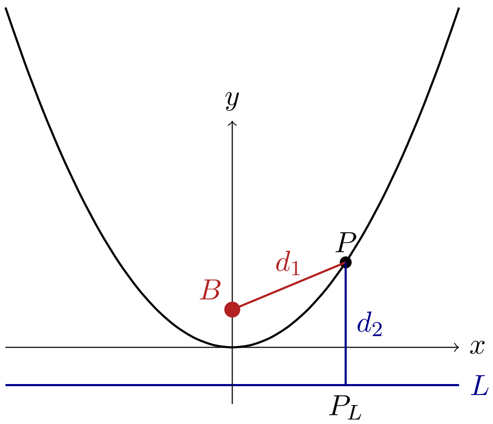
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4p} && (\cdot p, \cdot 4) \\ p &= 1 \end{aligned}$$

Da der Scheitelpunkt in $(0|0)$ liegt und die Parabel nach oben offen ist, folgt $B(0|1)$ und $l(x) = -1$.

**Notizen zu Übung 3.3.** Wir fällen zuerst das Lot von $B$ auf $l$ und halbieren diese Strecke. Dies gibt den sogenannten Scheitelpunkt $S$. Um weitere Punkte zu finden, die von $B$ und $l$ denselben Abstand haben, beachten wir, dass der Abstand zu $l$ senkrecht zu $l$ gemessen wird. Daher konstruieren wir eine beliebige Parallele $P$ zu $l$ auf der von $S$ abgewandten Seite von $l$, fällen das Lot von $P$ auf $l$, um den Abstand zu messen und tragen mit der Zirkelöffnung dieser Länge von $B$ aus auf die Parallele ab. So ergeben sich jeweils, ausser im Falle von $S$, zwei Punkte der Parabel. Man führe diesen Vorgang für weitere Parallelen durch, solange man lustig ist.




**Notizen zu Übung 3.4.** Betrachte die beiden Abstände eines beliebigen Punktes $Q(x|y)$ auf der Parabel zu Brennpunkt $B$ bzw. Leitlinie $l$. Der Abstand Brennpunkt-Scheitelpunkt bezeichnen wir wie üblich mit $k$.




Es ist $d_1 = f(x) + \frac{1}{4a}$ und $d_2 = \sqrt{x^2 + (f(x) - \frac{1}{4a})^2}$. Wir vergleichen die Quadrate: $d_1^2 = a^2x^4 + 2ax^2\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} = a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}$ und $d_2^2 = x^2 + a^2x^4 - 2ax^2\frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2}$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

**Notizen zu Übung 3.5.** Man überprüfe seine Ergebnisse unter `geogebra.org`.

**Notizen zu Übung 3.6.** Wir rechnen nach $a(x-u)^2 + v = a(x^2 - 2ux + u^2) + v = ax^2 - 2aux + au^2 + v$ und vergleichen mit der Normalform $ax^2 + bx + c$.

**Notizen zu Übung 3.7.** Berechne zuerst die Scheitelform und skizziere anschliessend. Kontrollieren tut man mit `geogebra.org`.

Für das erste Beispiel $x^2 - 6x + 11$ ist $u = -\frac{-6}{1} = 6$ und damit $v = 6^2 - 6 \cdot 6 + 11 = 11$. Also $S(6|11)$ und $a = 1$.

**Notizen zu Übung 3.8.**

a) $2 \cdot (x+2)^2 - 3$

b) $0.5 \cdot (x-4)^2 + 1$

c) $-(x-3)^2 - 1$

**Notizen zu Übung 3.9.**

a) Klar ist $a(x-2)^2 + 4$. Und weil es auf eine Einheit nach rechts eine Einheit runter geht ist $a = -1$.

b) Wiederum $a(x-2)^2 + 4$. Nun geht es auf 3 Einheiten nach links 3 hoch. Also ist $a = \frac{1}{3}$.

c) $a(x+2)^2 - 3$ und $a = \frac{3}{4}$.

**Notizen zu Übung 3.10.** Die Bedingungen ergeben ein $2 \times 2$-Gleichungssystem, das wir nach $b$ und $c$ lösen.

$$-7 = 2^2 + 2b + c \tag{1}$$
$$8 = (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \tag{2}$$

Subtrahieren wir (1) − (2): $-15 = -5 + 5b$, um $c$ zu eliminieren. Es folgt $b = -2$ und unmittelbar $c = -7$.
**Notizen zu Übung 3.11.** Wir lösen $3 \times 3$-Gleichungssysteme

a) Die Punkte verwertet haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c && (3) \\ 1 &= a - b + c && (4) \\ 1 &= 4a + 2b + c && (5) \end{aligned}$$

(4)-(3) und (5)-(3) ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= -2b \\ 1 &= 3a + b \end{aligned}$$

Daraus folgt $b = -\frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$; schliesslich $c = 0$.

b)

$$\begin{aligned} 2 &= a + b + c && (6) \\ 4 &= 9a + 3b + c && (7) \\ 1 &= 25a + 5b + c && (8) \end{aligned}$$

Wir eliminieren $c$ via (7)-(6) und (8)-(7) ergibt

$$\begin{aligned} 2 &= 8a + 2b \\ -3 &= 16a + 2b \end{aligned}$$

Nach $2b$ aufgelöst und gleichgesetzt: $2 - 8a = -3 - 16a \Leftrightarrow 8a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{8}$. Somit $b = \frac{7}{2}$ und $c = -\frac{7}{8}$

**Notizen zu Übung 3.12.** Wir berechnen zuerst die Funktionsgleichung der Parabel, die den Brückenbogen repräsentiert. Wir wählen den Scheitel auf der $y$-Achse bei $(0|4)$. Damit ergeben sich die Nullstellen bei $(\pm 4|0)$. Da wir keine Verschiebung in $x$-Richtung haben, wählen wir als Ansatz $f(x) = ax^2 + c$. $c = 4$ ist trivial und $a$ bestimmen wir entweder durch Einsetzen oder mit einer Überlegung. Vom Scheitel aus muss die Parabel auf 4 Einheiten parallel zu $x$ in $y$ sich um Einheiten senken; es folgt $a = -\frac{1}{4}$. Halten wir fest: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

a) Wenn er es clever durch die Mitte versucht, dann müssen wir $f(\frac{2.1}{2}) \overset{?}{<} 3.5$ überprüfen. Es ist $f(\frac{2.1}{2}) = 3.72$ und er kann passieren.

b) $f(x) \stackrel{!}{=} 3.5 = -\frac{1}{4}x^2 + 4$, also $2 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \approx 1.4$; 2.8 m breit.

c) Wir setzen den Lastwagen an der Stelle $x = -1.4$ an, wo er grad noch unten durch passt. Wir überprüfen die Stelle $x = -1.4 + 2.1 + 0.3 + 1.8 = 2.8$ und checken $f(2.8) \stackrel{!}{<} 1.6$. Nein, denn es ist $f(2.8) = 2.04$.

**Notizen zu Übung 3.13.** Wir berechnen den Scheitelpunkt $S(u|v)$ mit $u = -\frac{b}{2a}$ und $v = f(u)$. Ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, liest man beim Paramter $a$ ab.
$u = 4$, $v = 9$ Minimum; $u = -1$, $v = 4$ Maximum; $u = -\frac{1}{2}$, $v = -18\frac{1}{4}$ Minimum, $u = 3$, $v = 11$ Maximum.
**Notizen zu Übung 3.14.** Für ein Rechteck mit Länge $x$ und Breite $y$ gilt für die Rechtecksfläche $A = xy$. Zudem haben wir die Nebenbedingung $U = 160 = 2x + 2y$, die wir nach $y = 80 - x$ auflösen, um damit $y$ in der Flächenformel zu eliminieren: $A(x) = x(80 - x) = -x^2 + 80x$. Diese Flächenfunktion ist eine Parabel mit Maximum bei $u = -\frac{80}{-2} = 40$. Damit hat das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt die Breite $x = 40\,\text{m}$ und $y = 80 - 40 = 40\,\text{m}$. Die Fläche ist $A = 40^2 = 1600\,\text{m}^2$.
**Notizen zu Übung 3.15.**

a) Wiederum gilt $A = xy$ und $U = 120 = 2x + 2y$, also $y = 60 - x$ und damit $A(x) = x(60 - x) = -x^2 + 60x$. Die Flächenfunktion ist eine nach unten offene Parabel und hat daher ein Maximum bei $u = -\frac{60}{-2} = 30$. Somit $x = 30\,\text{m} = y$ und $A(30) = 30^2 = 900\,\text{m}^2$.

**Notizen zu Übung 3.16.** Sei $x$ der Eintrittspreis und $b(x)$ die Anzahl Besucher. Es ist $b(x) = -20x + 400$, da pro Franken die Besucherzahl um 20 abnimmt und bei 8 Franken 240 Besucher erwartet werden. Für den Umsatz gilt $U(x) = x \cdot (-20x + 400) = -20x^2 + 400x$. Den grössten Umsatz erziehlt man für einen Eintrittspreis von $u = -\frac{400}{-40} = 10$ Franken. Der zugehörige Umsatz ist $U(100) = 100 \cdot 200 = 20\,000$ Franken.
**Notizen zu Übung 3.17.** Sei $x$ die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche und $y$ die Höhe des Quaders. Das Gestell erzwingt $R = 440 = 8x + 4y \Leftrightarrow y = 110 - 2x$.

a) $M(x) = 4xy = 4x(110 - 2x) = -8x^2 + 440x$. Damit $u = -\frac{440}{-16} = 27.5\,\text{cm}$, $y = 55\,\text{cm}$ und $M = 6050\,\text{cm}^2$.

b) $O(x) = 2x^2 + 4xy = 2x^2 - 8x^2 + 440x = -6x^2 + 440x$. Es folgt $u = -\frac{440}{-12} = 36\frac{2}{3}$ cm, $36\frac{2}{3}$ cm und $O \approx 8067\,\text{cm}^2$

**Notizen zu Übung 3.18.** Nein, $f$ ist nicht injektiv. Man muss $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ einschränken.
**Notizen zu Übung 3.19.** Wir setzen

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x^2 && (\cdot 4) \\ 4y &= x^2 && (\sqrt{\phantom{x}}) \\ \pm 2\sqrt{y} &= x \end{aligned}$$

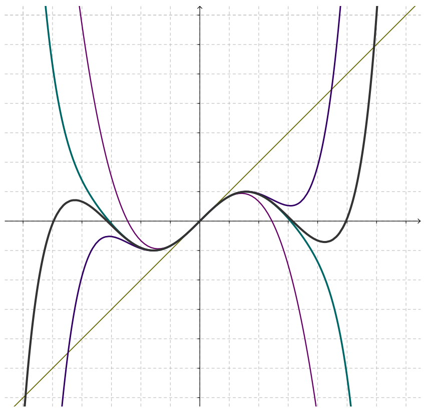
Ich entscheide mich für den positiven Parabelast: $f^{-1}(x) = 2\sqrt{x}$. Die Skizze kontrolliert man mit `geogebra.org` und bemerkt die Achsensymmetrie zur Winkelhalbierenden $y = x$.

# 4. Potenzfunktionen

## 4.1. Potenzen mit rationalen Exponenten

### 4.1.1. Rückblick

Wir wollen unsere Rechenregeln für Potenzen erweitern, um Potenzgesetze für reelle Zahlen vollumfänglich verstehen und interpretieren zu können. Wir brauchen dazu folgende, bereits bekannte, Regeln und Begriffe.



*Erinnerung.* Sie kennen die Potenzgesetze. In Kurzform lauten sie:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{9}$$
$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \tag{10}$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{11}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{12}$$
$$a^0 = 1 \tag{13}$$

Bisher waren die Exponenten $m$ und $n$ jeweils natürliche Zahlen (oder ausnahmsweise ganze Zahlen). Im nächsten Abschnitt werden Sie sehen, dass auch rationale Zahlen im Exponenten sinnvoll sind.
Weiter ruft man sich die Definition der $n$-ten Wurzel einer Zahl in Erinnerung: Die *$n$-te Wurzel* aus einer positiven Zahl $a$, ist diejenige positive Zahl $b$, deren $n$-te Potenz $a$ beträgt. Man schreibt dafür $b =: \sqrt[n]{a}$.

Die Potenzgesetze funktionieren bis anhin tadellos, wenn $m$ und $n$ ganze Zahlen sind. Was ist, wenn man nun im Exponenten rationale Zahlen zulässt? Ist $3^{\frac{1}{2}}$ eine Zahl? Un wenn ja, welche?
Betrachte $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$. Sollen die Potenzgesetze weiterhin gelten, dann ist also $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3$. Wir wissen, dass $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ und legen deshalb fest:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

**Übung 4.1:** Bestimme nach obigem Muster die Wurzeldarstellung von $8^{\frac{1}{3}}$. Betrachte dazu $8^{\frac{1}{3}}$ dreimal mit sich selbst multipliziert.

### 4.1.2. Erweiterung der Potenzgesetze

Offensichtlich kann jede Wurzelart als Potenz mit rationalem Exponenten dargestellt werden kann. Man erweitert die Potenzgesetze deshalb intuitiv, regelerhaltend auf rationale Exponenten und definiert:

**Definition 4.1: Wurzeln als Potenz**

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Man kann also jede Wurzel in eine Potenz verwandeln und dann mit den bekannten Potenzgesetzen weiterrechnen. Dies ist beim Umformen und Vereinfachen von Wurzeln enorm hilfreich. Weil wir mit rationalen Exponenten sinnvoll rechnen können gilt allgemein

**Satz 4.1: Potenzgesetz V**

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

*Beweis.* Schreibübung. □

**Übung 4.2:** Schreibe mit einer einzigen Wurzel.

a) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

b) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

d) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a}$

**Übung 4.3:** Bestimme mit dem Taschenrechner folgende Werte

a) $\sqrt[3]{10}$

b) $\sqrt[6]{100}$

c) $\sqrt[1000]{3}$

d) $\sqrt[10^6]{3}$

**Übung 4.4:** Berechne die Inversfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$.

**Übung 4.5:** Führe mit dem TR für eine beliebige, positive Zahl folgendes Verfahren mehrmals durch:

1. $x$ eintippen
2. $\sqrt{x}$ berechnen
3. das Resultat als neues $x$ nehmen

Gegen welchen Wert strebt $x$, wenn man diese Schleife oft ausführt?

### 4.1.3. Potenzen mit irrationalen Exponenten

Es ist möglich, Potenzen mit irrationalen Exponenten zu definieren. Man tut dies mit einer Streckenschachtelung im Exponenten. Ohne Beweis akzeptieren wir folgenden

**Satz 4.2: Irrationale Exponenten**

Alle Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Damit ist das Kapitel Potenzgesetze abgeschlossen; für das gymnasiale Momentum.
**Übung 4.6:** Bestimme ohne TR — wenn möglich exakt, allenfalls näherungsweise — folgende Werte.

a) $\sqrt{10^6}$

b) $\sqrt[\pi]{10^6}$

c) $3^{\frac{\pi}{6.28}}$

d) $64^{\frac{1}{\pi}}$

e) $\pi^\pi$

f) $\pi^{0.5}$

## 4.2. Potenzfunktionen

**Definition 4.2: Potenzfunktion**

Funktionen der Form
$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$
heissen **Potenzfunktionen** vom Grad $n$.

**Übung 4.7:** Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen

a) $x^2, x^4, x^{-2}, x^{-4}$

b) $x^3, x^5, x^{-1}, x^{-3}$.

**Bemerkung.** Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^n$, für $n$ gerade, sind achsensymmetrisch zur $y$-Achse, da für gerade Exponenten $(-x)^n = x^n$. Für $n$ ungerade, sind die Graphen punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems, da $(-x)^n = -x^n$.

**Bemerkung.** Klar ist, dass Potenzfunktionen mit negativen Exponenten $n$ für $x = 0$ nicht definiert sind. Ihre Graphen bestehen aus zwei „Ästen“, die für gerade Exponenten symmetrisch zur $y$-Achse, für ungerade Exponenten symmetrisch zum Ursprung liegen. Für $x$-Werte von hinreichend grossem Betrag werden die Funktionswerte dem Betrage nach beliebig klein, d.h. der Graph kommt für solche $x$-Werte der $x$-Achse beliebig nahe. Man sagt: Die $x$-Achse ist **Asymptote** des Graphen. Für hinreichend nahe bei 0 gelegene $x$-Werte werden die Funktionswerte dem Betrage nach beliebig gross, d.h. der Graph kommt für solche $x$-Werte der $y$-Achse beliebig nahe. Die $y$-Achse ist ebenfalls eine Asymptote des Graphen. Die undefinierte Stelle $x = 0$ nennt man **Polstelle**.

## 4.3. Wurzelfunktionen

**Übung 4.8:** Zeichne für $x \in \mathbb{R}^+$ in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

**Definition 4.3: Wurzelfunktion**

Funktionen der Form

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

heissen **Wurzelfunktionen**.

Die Definitionsmenge der Wurzelfunktionen ist $\mathbb{R}_0^+$. Sie sind für $\mathbb{R}_0^+$ die Umkehrfunktionen von $f(x) = x^n$. Ihre Graphen entstehen deswegen aus den Graphen von $f$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

**Übung 4.9:** Zeichne den Graphen der Quadratwurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

für $0 < x < 10$ und die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $P(0\,|\,8)$. Schneidet die Kurve die Parallele, wenn man sie nach rechts fortgesetzt denkt? Falls ja, wo?

**Übung 4.10:** Mit zunehmender Höhe nimmt die Windgeschwindigkeit zu. Für windschwache Gebiete kann man die gegenseitige Abhängigkeit durch die Funktion

$$f(x) = 0.2\sqrt{x} + 1$$

beschreiben. Dabei ist $x$ die Masszahl der in Meter gemessenen Höhe. Der Funktionsterm gibt die in $m/s$ gemessene Windgeschwindigkeit an. Zeichne den Graphen der Funktion für $0 < x < 600$. In welcher Höhe erreicht die Windgeschwindigkeit $7\,\mathrm{m/s}$?

**Übung 4.11:** Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3.$$

Verschiebe den Graphen

a) um 3 Einheiten nach oben,

b) um 2 Einheiten nach rechts,

c) um 2 Einheiten nach links und anschliessend um 1 Einheit nach unten.

Gib jeweils die Gleichung der neuen Kurve an.

**Übung 4.12:** Zeichne die Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^{-1} - 2 \quad \text{und} \quad g(x) = 4 - x^{-1}$$

in ein Koordinatensystem.

a) Wo schneiden die Graphen die $x$-Achse?

b) Wo schneiden sich die beiden Graphen?

**Übung 4.13:** Die Angebots- und Nachfragefunktion für ein wirtschaftliches Gut seien gegeben durch

$$p_A(x) = 2x^{\frac{1}{2}}, \quad p_N(x) = 4 + \frac{2}{x},$$

$0\,\text{ME} < x\,\text{ME} < 8\,\text{ME}$, wobei die Preise in ${}^{GE}/_{ME}$ angegeben sind. Stelle die Situation graphisch dar und berechne die Gleichgewichtsmenge, den Marktpreis und den Gesamterlös ab.

## 4.4. Notizen zu den Übungen

**Notizen zu Übung 4.1.** Wegen $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 8^1 = 8$ muss $8^{\frac{1}{3}} = 2 = \sqrt[3]{8}$ sein.

**Notizen zu Übung 4.2.**

a) $(a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

b) $(a(a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3}$

c) $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[mn]{a}$

d) $a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$

**Notizen zu Übung 4.3.**

a) $\approx 2.15$

b) $= \sqrt[3]{10}$

c) $\approx 1.001$

d) $\approx 1.000001$

**Notizen zu Übung 4.4.** Setze $y = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} && (\cdot x, \div y) \\ x &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

$\implies f^{-1}(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

**Notizen zu Übung 4.5.** Die Folge strebt gegen 1.

**Notizen zu Übung 4.6.**

a) $= 10^3$

b) $\approx 10^{\frac{6}{3}} = 10^2$

c) $\approx 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $\approx 64^{\frac{1}{3}} = 4$

e) $\approx 3^3 = 27$

f) $\approx \sqrt{3} \approx 1.73$

**Notizen zu Übung 4.7.** Verwende `geogebra.org` und vergleiche mit deinen Plots.
**Notizen zu Übung 4.8.** Verwende `geogebra.org` und vergleiche mit deinen Plots.
**Notizen zu Übung 4.9.** Für die Plots vergleiche man mit `geogebra.org`. Um den Schnittpunkt zu berechnen setzen wir

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{!}{=} 8 \\ \sqrt{x} &= 8 && ((\ )^2) \\ x &= 64 \end{aligned}$$

Also liegt der Schnittpunkt bei $S(64|8)$.
**Notizen zu Übung 4.10.**

$$\begin{aligned} 0.2\sqrt{x}+1 &\stackrel{!}{=} 7 && (-1) \\ 0.2\sqrt{x} &= 6 && (\cdot 5) \\ \sqrt{x} &= 30 && ((\ )^2) \\ x &= 900 \end{aligned}$$

Also in einer Höhe von 900 m.
**Notizen zu Übung 4.11.**

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^3$

c) $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^3 - 1$

**Notizen zu Übung 4.12.**

a) Aus $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ folgt unmittelbar $x = \frac{1}{2}$. Für $g$ ergibt sich analog $x = \frac{1}{4}$.

b) Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{!}{=} g(x) \\ \frac{1}{x} - 2 &= 4 - \frac{1}{x} && (+2, +\tfrac{1}{x}) \\ \frac{2}{x} &= 6 && (\cdot \tfrac{x}{6}) \\ x &= \frac{1}{3} \\ &\implies y = 1 \end{aligned}$$

Also schneiden sich $f$ und $g$ in $S(\frac{1}{3}|1)$.

**Notizen zu Übung 4.13.** Die Gleichgewichtsmenge findet man via $p_A(x) \overset{!}{=} p_N(x)$.

$$
\begin{aligned}
2x^{\frac{1}{2}} &= 4 + \frac{2}{x} && (\cdot x) \\
2\sqrt{x^3} &= 4x + 2 && ((\ \ )^2) \\
4x^3 &= 16x^2 + 16x + 4
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades, die wir mit unserem Wissen nicht lösen können. Man kann sie aber mit Hilfe der Lösungsformel für kubische Gleichungen von Cardano lösen.

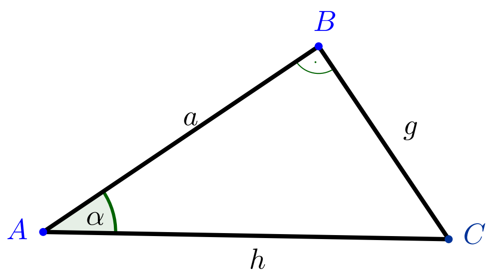



Abbildung 9: Definition der Winkelfunktionen

# 5. Trigonometrische Funktionen

## 5.1. Die Sinusfunktion

Wir wissen, dass in rechtwinkliges Dreieck durch zwei Seiten oder eine Seite und einen spitzen Winkel bestimmt ist. Gleichschenklige Dreiecke und Rechtecke lassen sich auf rechtwinklige Dreiecke zurückführen.

**Übung 5.1.**

Zeichne zwei rechtwinklige Dreiecke, bei denen ein spitzer Winkel 35° beträgt. Bestimme bei beiden Dreiecken das Verhältnis

$$\frac{\text{Gegenkathete des } 35^\circ \text{ Winkels}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{g}{h}$$

Als Gegenkathete bezeichnet man diejenige Kathete, welche dem gegebenen Winkel gegenüber liegt.

Weil die beiden Dreiecke ähnlich sind, sind die berechneten Verhältnisse theoretisch gleich gross; und zwar für sämtliche rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel 35°. Deshalb hat man festgelegt:

**Definition 5.1: Sinus**

In einem rechtwinkligen Dreieck heisst das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse Sinus des der Kathete gegenüberligenden Winkels, und man schreibt

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{g}{h}$$

Für die Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck wählt man üblicherweise $h$ für die Hypotenuse, $a$ für die Ankathete und $g$ für die Gegenkathete.

**Übung 5.2.**

Berechne mit dem TR $\sin(30^\circ)$ und $\sin(35^\circ)$.

**Übung 5.3.**
Zeichne den Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0°, 90°]$. Berechne dazu mit dem Taschenrechner die entsprechenden Funktionswerte. (Wähle Winkel, deren Sinus du exakt bestimmen kannst; also $0, 30, 45, 60, 90$ Grad)
**Übung 5.4.**
In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Hypotenuse 12 cm und ein spitzer Winkel 25°. Wie lang sind die Katheten?
**Übung 5.5.**
Ein rechteckiger Sonnenkollektor der Länge 2 m soll mit einem Neigungswinkel von 75° gegenüber der Horizontalen so an eine Hauswand gestellt werden, dass die eine Breite die Wand und die andere den Boden berührt. In welcher Höhe über dem Boden berührt die eine Breite die Hauswand?
**Übung 5.6.**
Ein kugelförmiger Wetterballon mit Durchmesser $d = 16\,\text{m}$ wird unter einem Sehwinkel $\alpha = 22'$ beobachtet. Wie weit ist der Ballon vom Beobachter entfernt?

## 5.2. Die Cosinusfunktion

**Definition 5.2: Cosinus**

In allen rechtwinkligen Dreiecken mit einem spitzen Winkel $\alpha$ ist das Verhältnis von Ankathete von $\alpha$ zu Hypotenuse aus Gründen der Ähnlichkeit gleich gross. Man nennt es *Cosinus* des der Kathete anliegenden Winkels.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{h}$$

**Übung 5.7.**
Zeichne ein Bild zur Cosinus-Definition.
**Übung 5.8.**
Zeichne den Graphen der Funktion

$$f(x) = \cos(x)$$

auf dem Intervall $[0°, 90°]$.
**Übung 5.9.**
Eine Leiter mit der Länge $l = 6.4\,\text{m}$ lehnt an einer Wand. Ihr Fuss ist $a = 2.8\,\text{m}$ von der Wand entfernt. Wie gross ist ihr Neigungswinkel?

**Bemerkung.** Den Winkel in obiger Aufgabe bestimmt man mit der Inversfunktion des Cosinus, $\cos^{-1}$ oder auch arccos (sprich „Arcus-Cosinus“) genannt, indem man sie auf beide Seiten der Gleichung anwendet:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{2.8}{6.4} && (\cos^{-1}) \\ \cos^{-1}(\cos(\alpha)) &= \cos^{-1}\left(\frac{2.8}{6.4}\right) \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{2.8}{6.4}\right) \approx 64.1° \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Wie üblich bei Funktionen steht das „$^{-1}$“ nicht für den Kehrwert, sondern für die Inversfunktion von $f$.

**Übung 5.10.**
Eine Bahnstrecke hat auf der Karte $1 \div 25\,000$ eine Länge von $s = 18\,\text{mm}$ und fällt unter $\alpha = 8°$. Wie lang ist sie?

**Übung 5.11.**
Mit welcher Geschwindigkeit bewegen wir uns aufgrund der Erdrotation? Überlege dir zuerst anhand einer Skizze, welche Daten du zur Beantwortung der Frage benötigst, und beschaffe diese, um die Geschwindigkeit konkret zu berechnen.

## 5.3. Die Tangensfunktion

**Definition 5.3: Tangens**

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man das Verhältnis der Gegenkathete eines spitzen Winkels $\alpha$ zur Ankathete als den *Tangens* des Winkels $\alpha$.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{g}{a}$$

**Übung 5.12.**
Zeichne ein Bild zur Tangens-Definition.

**Übung 5.13.**
Zeichne den Graphen der Tangensfunktion

$$f(x) = \tan(x)$$

über dem Intervall $[0°, 90°]$.

**Übung 5.14.**
Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten $s = 27.5\,\text{m}$ lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 38°50'$ einfallen?

**Übung 5.15.**
Unter welchem Erhebungswinkel erscheint die Spitze des Berner Münsters ($h = 161\,\text{m}$) von einer Stelle aus, die in waagrechter Richtung $e = 150\,\text{m}$ vom Fuss des Turmes entfernt ist? (Augenhöhe $a = 1.5\,\text{m}$)

**Bemerkung.** Um sich die Definitionen der drei Winkelfunktionen sin, cos und tan zu verinnerlichen, gibt es zahlreiche Eselsbrücken; lerne eine!

## 5.4. Das Bogenmass

Um die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion zu zeichnen verwendet man üblicherweise das sogenannte Bogenmass.

**Definition 5.4: Bogenmass**

Unter dem *Bogenmass* $\operatorname{arc}\alpha$ des Winkels $\alpha$ versteht man den Quotienten

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{b}{r}.$$

Die „Einheit“ des Bogenmasses heisst Radian, rad.

**Bemerkung.** Aus Ähnlichkeitsgründen ist das Bogenmass unabhängig von der Wahl des Kreisradius.

Das Bogenmass gibt uns also die Möglichkeit, Winkel als dimensionslose Zahlenwerte darzustellen. Da das Bogenmass unabhängig von der Wahl des Kreisradius ist, denke ich mir jeweils einfach für einen gegebenen Winkel das Bogenmass als Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis. Weil dort $r = 1$ ist, vereinfacht sich das Bogenmass nämlich zu

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{b}{1} = b.$$

Für das Bogenmass in einem beliebigen Kreis gilt

**Satz 5.1: Bogenlänge**

$$b = r \cdot \operatorname{arc}\alpha$$

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition. □

**Übung 5.16.**
Erstelle eine Tabelle für das Bogenmass zu den folgenden Winkel im Gradmass: $360°$, $180°$, $90°$, $45°$, $1°$, $\alpha$.
Der folgende Satz gibt das Rezept an, wie man zu einem Winkel $\alpha$ im Gradmass das zugehörige Bogenmass $\operatorname{arc}\alpha$ bestimmt.

**Satz 5.2: Grad in Radian**

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi}{180^\circ}\cdot\alpha$$

*Beweis.* Es gilt
$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{b}{r}$$
wobei die Länge des Bogens $b$ abhängig vom Winkel $\alpha$ ist und den Bruchteil $\frac{\alpha}{360^\circ}$ des ganzen Kreisumfangs $2\pi r$ ausmacht. Also
$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{2\pi r\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}}{r} = \frac{2\pi\cdot\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi\cdot\alpha}{180^\circ}$$
□

**Bemerkung.** Der Taschenrechner kann Winkel unter anderem im Bogen- oder Gradmass darstellen. Setzt man im $\boxed{\text{Mode}}$ die Variable Angle auf „Rad“, so interpretiert er Winkel im Bogenmass (Radian), wählt man „Deg“, so erwartet er Winkel im Gradmass (Degree).

**Bemerkung.** Das Bogenmass ist ein Verhältnis zweier Strecken und daher einheitenlos. Als Bogenlänge im Einheitskreis aufgefasst hätte es die Einheit einer Länge.

**Übung 5.17.**
Zeichne die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion über dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$. Wähle auf der $x$-Achse die Winkel im Bogenmass.
Aus der vorigen Aufgabe lässt sich folgender Satz ablesen:

**Satz 5.3: Sinus-Cosinus-Beziehung**

Die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion sind zueinander achsialsymmetrisch bezüglich der Parallelen zur $y$-Achse durch den Punkt $\left(\frac{\pi}{4}\,|\,0\right)$.

Es gibt offenbar zu jedem Sinus-Wert einen gleich grossen Cosinus-Wert und umgekehrt. Diese Tatsache lässt sich durch folgende Formel ausdrücken:
$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$$
$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ + \alpha)$$

*Beweis der beiden vorherigen Sätze.* Nach Definition sieht man diese Beziehungen. □

Wir wollen die beiden eben kennengelernten Winkelfunktionen betrachten und stellen sie als Funktion in Abhängigkeit des Winkels dar. Dabei kann man in natürlicher Weise die Funktionen für beliebige Winkel definieren. Die Graphen von
$$f(\alpha) = \sin(\alpha)$$

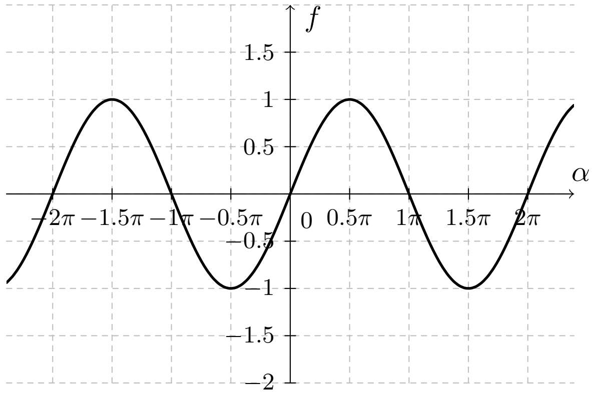



Abbildung 10: Graph von $\sin(\alpha)$

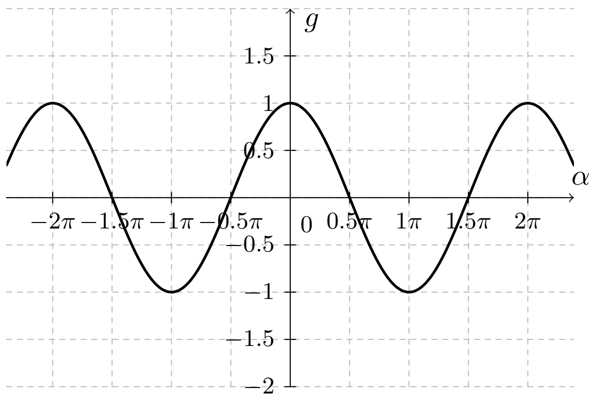



Abbildung 11: Graph von $\cos(\alpha)$

und

$$g(\alpha) = \cos(\alpha)$$

sehen wie folgt aus:

## 5.5. Zusammenhänge zwischen Sinus, Cosinus und Tangens

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $h$. Aus der Figur erkennt man:

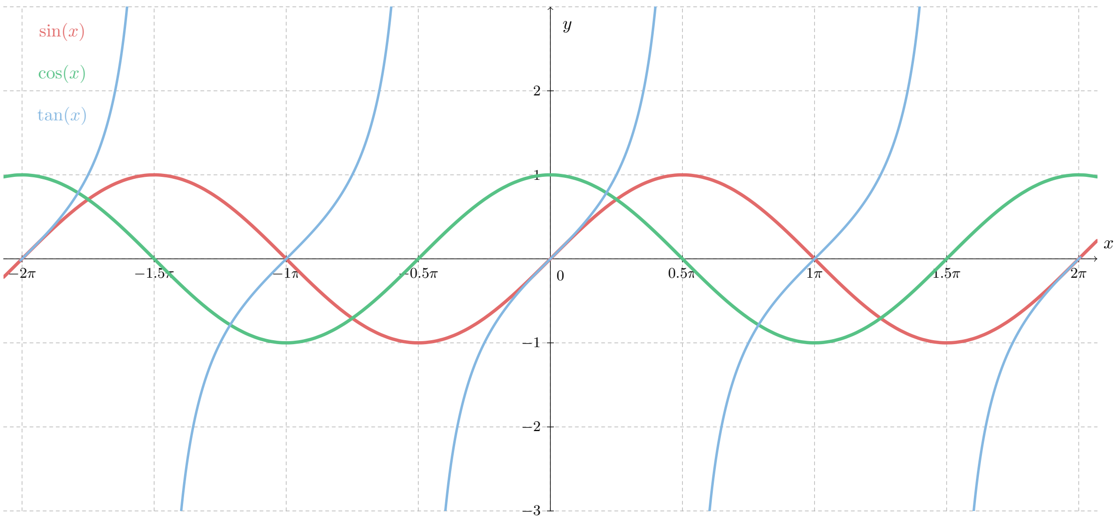
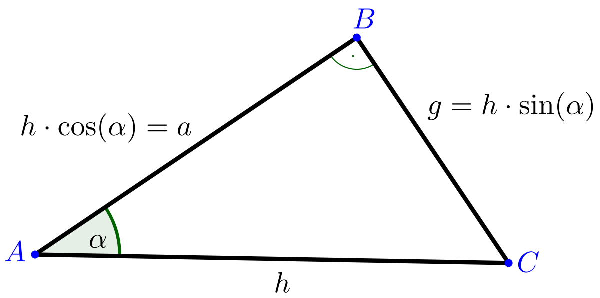



Abbildung 12: Graphen der Winkelfunktionen




**Satz 5.4: Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen**

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{14}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{15}$$

*Beweis.* **Übung 5.18.** □

**Bemerkung.** Anstelle von $(\sin(\alpha))^2$ schreibt man kürzer $\sin^2(\alpha)$ (sprich:„Sinusquadrat alpha“); dito für die anderen Winkelfunktionen.

**Bemerkung.** Hat man die Sinus-Werte beliebiger Winkel, so lassen sich daraus auch die Cosinus- und Tangens-Werte berechnen. Man benutzt dazu den obigen Satz.

**Übung 5.19.**
Es sei $\sin(\alpha) = 0.6$. Berechne mit Hilfe der Formeln aus Satz **??** $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$. (ohne TR)

**Übung 5.20.**
Berechne die Werte der trigonometrischen Funktionen für die Winkel 30°, 45° und 60° mit Hilfe der Definitionen. Gib die Werte als Brüche an. (ohne TR)

**Bemerkung.** Auf diese Weise lassen sich die trigonometrischen Funktionswerte nur für spezielle Winkel berechnen. Zur Berechnung der Sinus-Werte beliebiger Winkel, kann man folgende Formel verwenden, die wir später herleiten werden (im SF oder EF AM):

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

**Bemerkung.**

- $n!$ bedeutet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$, sprich „$n$ Fakultät".
- Die Formel gilt nur, wenn $x$ im Bogenmass angegeben wird.

**Übung 5.21.**
Berechne mit der oben angegebenen Formel $\sin(45°)$ näherungsweise mit den ersten vier Summanden, und vergleiche das Resultat mit dem Wert aus Übung 5.20.

**Übung 5.22.**
Schreibe $1 + \tan^2(\alpha)$ als Term mit Cosinus-Werten.

**Übung 5.23.**
Vereinfache so, dass nur eine Winkelfunktion im Term steht.

a) $\tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

b) $\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)$

c) $\dfrac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}$

d) $\sqrt{1 + \cos(\alpha)} \cdot \sqrt{1 - \cos(\alpha)}$

e) $\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha)$

f) $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1$

## 5.6. Überblick über die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks

**Übung 5.24.**
Eine Zahnradbahn steigt auf einer Strecke $s = 1350\,\text{m}$ mit $13.5\,\%$. Wie gross ist der Neigungswinkel und der Höhenunterschied?

**Übung 5.25.**
Um die Breite eines Flusses zu bestimmen, hat man am Ufer die Standlinie $\overline{AB} = 85\,\text{m}$ abgesteckt. Der A gegenüberliegende Punkt C des anderen Ufers wird in B unter einem Winkel von $\alpha = 53°16'$ gepeilt.

**Übung 5.26.**
In einem gleichschenkligen Dreieck ist $a = 65.4\,\text{m}$ und $c = 54.7\,\text{m}$. Berechne die fehlenden Winkel sowie den Flächeninhalt.

**Übung 5.27.**
Berechne den Umfang eines regelmässigen $n$-Ecks, dessen Umkreisradius $r = 0.5$ beträgt für

a) ein 4-Eck

b) ein 10-Eck

c) ein 100-Eck

d) ein 1000-Eck

Welcher Zahl nähert sich der Umfang für ein „sehr sehr viel-Eck“.

## 5.7. Der Sinussatz

**Satz 5.5: Sinussatz**

In einem beliebigen Dreieck gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\alpha}$$

In Worten: Im Dreieck ist das Verhältnis jeder Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels eine Konstante.

Man erhält diese schöne Beziehung, wenn man den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmen will, ohne dabei die Höhe in der Flächenformel auftauchen zu lassen.

*Beweis.* Für ein beliebiges Dreieck gilt:

$$F = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

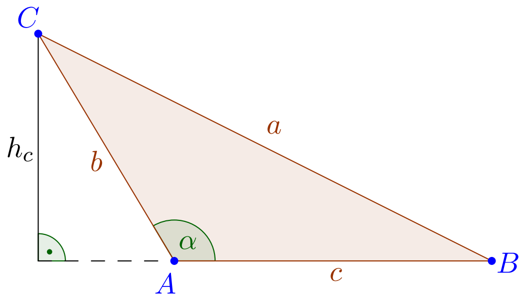



Abbildung 13: Illustration zum Sinussatz

Nun wollen wir $h_c$ eliminieren. Wir finden

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{h_c}{b}$$

also $h_c = b \cdot \sin(180° - \alpha)$ oder $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$. Letzteres ist klar, wenn man sich den Graphen des Sinus vor Augen führt. Wir können also nun

$$F = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}c \cdot b\sin(\alpha) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

schreiben. Durch zyklische Vertauschung erhält man

$$F = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) \tag{16}$$
$$F = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) \tag{17}$$
$$F = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) \tag{18}$$

Setzt man nun z.B. (16)=(17), hat man

$$c\sin(\alpha) = a\sin(\gamma),$$

woraus unmittelbar

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

folgt. Durch Kombination von (16)=(18) und (17)=(18) erhält man durch Gleichsetzen die Behauptung. □

Man gilt folgender

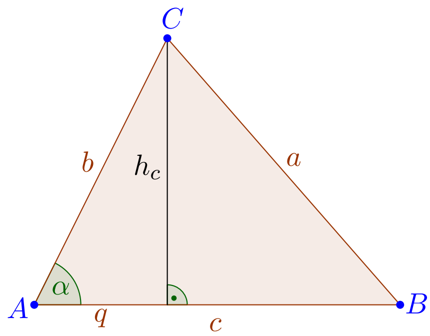



Abbildung 14: Veranschaulichung zum Beweis des Cosinussatz

**Satz 5.6**

Diese Konstante ist gleich dem Umkreisdurchmesser des Dreiecks

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

*Beweis.* **Übung 5.28.** □

## 5.8. Der Cosinussatz

**Satz 5.7: Cosinussatz**

In einem beliebigen Dreieck gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

*Beweis.* Aus einem beliebigen Dreieck
zieht man die Beziehungen

$$\cos(\alpha) = \frac{q}{b} \tag{19}$$
$$b^2 = q^2 + h_c^2 \tag{20}$$
$$a^2 = h_c^2 + (c-q)^2, \tag{21}$$

löst (20) und (21) nach $h_c^2$ auf und setzt gleich:

$$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2,$$

also

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cq.$$

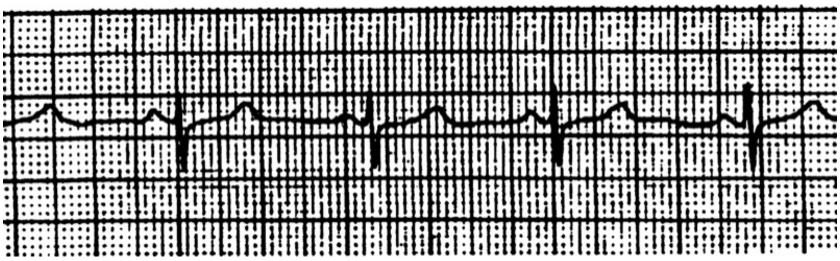


Abbildung 15: Graph eines EKG

Aus (19) folgt $q = b\cos(\alpha)$ und oben eingesetzt

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cb\cos(\alpha).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Übung 5.29.**
Welche Beziehungen entstehen durch zyklische Vertauschung beim Cosinussatz? Warum kann man den Cosinussatz als „Verallgemeinerter Pythagoreischer Lehrsatz“ bezeichnen?
**Übung 5.30.**
In einem Dreieck gilt

$$\sin(\alpha) \div \sin(\beta) \div \sin(\gamma) = \sqrt{3} \div \sqrt{4} \div \sqrt{5}$$

Wie gross sind die Winkel?
**Übung 5.31.**
Zwei waagrechte Bergwerkstollen gehen von einem Punkt A aus unter dem Winkel 75°. Sie haben die Länge $AB = 325\,\mathrm{m}$ bzw. $AC = 275\,\mathrm{m}$. Wie lang wird ein Verbindungsstollen von B nach C? Unter welchem Winkel gegen BA muss man ihn von B aus vorantreiben?
**Übung 5.32.**
Zwei Funkpeilstationen der Swisscom liegen 12.8 km voneinander entfernt, wobei $F_1$ sich genau nördlich von $F_2$ befindet. Ein Piratensender wird von $F_1$ aus unter 313.2° und von $F_2$ aus unter 284.4° angepeilt. Die Winkel werden von Osten aus im positiven Sinn gemessen. In welcher Entfernung von $F_1$ und $F_2$ liegt der Sender?

## 5.9. Anwendungen

Bei vielen Anwendungen kommen sich wiederholende Erscheinungen vor; für ihre mathematische Beschreibung sind die trigonometrischen Funktionen zuständig. Figur 15 auf Seite 53 zeigt ein typisches EKG, das elektrische Impulse des Herzens anzeigt.
Wir haben bereits die elementaren Funktionen sin, cos bzw. tan kennengelernt. Sie sind periodisch mit der Periode $2\pi$ bzw. $\pi$.

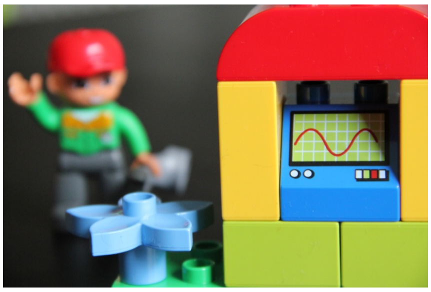


Abbildung 16: Duplo Telemetrie

**Übung 5.33.**
Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen

a) $\sin(2x), \sin(\frac{x}{2})$,

b) $2\cos x, 0.5\cos x$,

c) $\sin(x+\frac{\pi}{2}), \sin(x-\frac{\pi}{4})$,

d) $2\cos(x+\frac{\pi}{3}), 3\cos(x-\frac{\pi}{2})$.

**Übung 5.34.**
Die Sinusfunktion ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ monoton wachsend; sie hat also für dieses Intervall eine Umkehrfunktion. Ihr Name ist Arcus-Sinus und wird mit arcsin oder $\sin^{-1}$ bezeichnet.

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

Überlege dir, welchen Wertebereich die Funktion hat und zeichne den Graphen von arcsin durch Spiegelung des Graphen von sin an der 1. Winkelhalbierenden.
Verfahre ebenso für cos und tan.

**Bemerkung.** arctan induziert in natürlicher Weise eine Bijektion von $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ auf $[0, 1]$.

**Übung 5.35.**
Zeige obige Aussage: arctan induziert in natürlicher Weise eine Bijektion von $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ auf $[0, 1]$.

## 5.10. Notizen zu den Übungen

**Notizen zu Übung 5.1.** Das Resultat hängt natürlich der Messgenauigkeit ab. Man kriegt etwa 0.57.
**Notizen zu Übung 5.2.** Es ist $\sin(30°) = 0.5$ und $\sin(35° \approx 0.57$.
**Notizen zu Übung 5.3.** Verwende $\sin(0°) = 0$, $\sin(30°) = 0.5$, $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin(90°) = 1$ sowie `geogebra.org`.
**Notizen zu Übung 5.4.** Für die Ankathete $a$ des Winkels ist $\cos(25°) = \frac{a}{12}$, also $a = 12 \cdot \cos(25°) \approx 10.9\,\text{cm}$. Die andere Kathete $g$ berechnet man mit Pythagoras oder rascher via $\sin(25°) = \frac{g}{12}$, also $g = 12 \cdot \sin(25°) \approx 5.1\,\text{cm}$.
**Notizen zu Übung 5.5.** Der Sonnenkollektor ist die Hypotenuse und die gesuchte Höhe $g$ die Gegenkathete zum Neigungswinkel: $\sin(75°) = \frac{g}{2}$. Die Höhe ist $g = 2 \cdot \sin(75°) \approx 1.93\,\text{m}$.
**Notizen zu Übung 5.6.** Wir beachten erst mal, dass der Winkel sehr klein ist: $22' = \frac{22}{60}°$. Nun, falls die Vorstellungskraft nicht reicht, müssen wir skizzieren. Unser punktförmiges Auge sieht den kugelförmigen Wetterballon unter dem Winkel gebildet durch die zwei Tangenten dies- und jenseits. Unser Auge, eine Tangente zusammen mit dem Radius, der Tangentenberührpunkt mit dem Mittelpunkt verbindet, und die Strecke Mittelpunkt zu unserem Auge bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Sind wir pingelig, so muss man von der gesuchten Entfernung $D$ noch den Ballonradius abziehen. Wir haben die Hypotenuse $D + r$ und die Gegenkathete $r = 8\,\text{m}$ zum Winkel $\frac{11}{60}°$:

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{11}{60}°) &= \frac{r}{D+r} && (\cdot(D+r), \div \sin(\tfrac{11}{60}°))\\
D + r &= \frac{r}{\sin(\frac{11}{60}°)} && (-r)\\
D &= \frac{r}{\sin(\frac{11}{60}°}) - r
\end{aligned}$$

Das tippen wir ein und sehen $D \approx 2492\,\text{m}$, also knapp 2.5 km.
**Notizen zu Übung 5.7.** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck und wähle einen spitzen Winkel, den du mit $\alpha$ bezeichnest. Die restlichen Bezeichnungen ergeben sich nun und du kannst $\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$ notieren.
**Notizen zu Übung 5.8.** Wie bei der entsprechenden Aufgabe beim Sinus berechnet man ein paar ausgewählte Werte und skizziert dann den Verlauf des Graphen. $\cos(0°) = 1$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ und $\cos(90°) = 0$ sollten reichen. Den Graphen vergleicht man mit dem Plot von `geogebra.org`.
**Notizen zu Übung 5.9.** Die Entfernung von der Wand ist die Ankathete des gesuchten Winkels. Die Leiter ist Hypotenuse, also

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{2.8}{6.4} && (\cos^{-1}(\ ))\\
\alpha &= \cos^{-1}(\frac{2.8}{6.4})
\end{aligned}$$

Und wir erhalten für den Winkel ca. $64°$.

**Notizen zu Übung 5.10.** Den Massstab wenden wir am Schluss an. Auf der Karte sehen wir die Projektion auf die Ebene, aber bei der wahren Streckenlänge handelt es sich um die Hypotenuse. Wir haben also $\cos(8°) = \frac{18}{h}$, woraus $h = \frac{18}{\cos(8°)} \approx 18.2$ folgt. Also ist die Strecke in Realität 454 m.

**Notizen zu Übung 5.11.** Ich bin für das Kugelmodel der Erde und wohne in Thun, $46°45'32''$N; für die Geschwindigkeit ist der Längengrad irrelevant. Die Geschwindigkeit berechnet sich zu $v = \frac{s}{t}$. Ich kenne $t \approx 24\,\mathrm{h}$ und muss $s$ berechnen. Dafür berechnen wir den Radius $r'$ zur Rotationsachse für den Breitengrad von Thun. Es ist $\cos(46°45'32'') = \frac{r'}{r_E}$. Daraus folgt für den Weg $s = 2\pi \cdot r_E \cos(46°45'32'')$. Ich nehme für den mittleren Erdradius $r_E = 6370\,\mathrm{m}$ und erhalte für die Geschwindigkeit $v \approx \frac{27419.2}{24} \approx 1146\,\mathrm{km/h}$.

**Notizen zu Übung 5.12.** Wie in den vorhergehenden Fällen zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel $\alpha$ und benennt An-und Gegenkathete. Die Definition ist $\tan(\alpha) = \frac{g}{a}$.

**Notizen zu Übung 5.13.** Konsultiere `geogebra.org`. Verwende einfache Werte: $\tan(0°)$, $\tan(45°) = 1$ oder $\tan(60°)$.

**Notizen zu Übung 5.14.** Für die Höhe der Tanne $H$ ist $\tan((38 + \frac{5}{6})°) = \frac{H}{27.5}$ und damit $H = 27.5 \cdot \tan((38\frac{5}{6})°) \approx 22.1\,\mathrm{m}$.

**Notizen zu Übung 5.15.** Es folgt unmittelbar $\tan(\alpha) = \frac{159.5}{150}$. Somit $\alpha = \arctan(\frac{159.5}{150}) \approx 47°$.

**Notizen zu Übung 5.16.**

| **Gradmass** | **Bogenmass** |
|---|---|
| 360 | $2\pi$ |
| 180 | $\pi$ |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 1 | $\frac{\pi}{180}$ |
| $\alpha$ | $\frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ |

**Notizen zu Übung 5.17.** `geogebra.org` hilft bei der Kontrolle.

**Notizen zu Übung 5.18.** Zu (14): $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{g}{h}\right)^2 + \left(\frac{g}{h}\right)^2 = \frac{g^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2} = \frac{g^2+a^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$.

**Notizen zu Übung 5.19.** Es ist $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8$. Ferner $\tan(\alpha) = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$.

**Notizen zu Übung 5.20.** Im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge $s$ findet man: $\sin(30°) = \frac{1}{2}$. Nun kann man die andern Winkelfunktionswerte analog wie oben bestimmen oder direkt über das gleichseitige Dreieck. $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ kriegt man auch fast gratis. Für die $45°$ Winkel schaut man sich die Hälfte eines Quadrats an und findet $\tan(45°) = 1$.

Damit kann man auch die restlichen Werte berechnen: $\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45°)$. $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30°)$ und $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sowie $\tan(60°) = \sqrt{3}$.

**Notizen zu Übung D.3.** $45° = \frac{\pi}{4}$, also $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{(\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{5!} - \frac{(\frac{\pi}{4})^7}{7!} \approx 0.70710647$

**Notizen zu Übung 5.22.** $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \frac{1-\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

**Notizen zu Übung 5.23.**

a) $\tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(\alpha) = \sin(\alpha)$

b) $\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = \sin(\alpha)$

c) $\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \cos(\alpha)$

d) $\sqrt{1 + \cos(\alpha)} \cdot \sqrt{1 - \cos(\alpha)} = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sin(\alpha)$

e) $\sin^4(\alpha) - \cos^4(\alpha) = (\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha))(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = (\sin^2(\alpha) - (1 - \sin^2(\alpha)) = 2\sin^2(\alpha) - 1$

f) $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1 = 1 + \tan^2(\alpha) - 1 = \tan^2(\alpha)$

**Notizen zu Übung 5.24.** $s$ ist die Hypotenuse und 0.135 als Steigung das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete. Also beträgt der Steigungswinkel $\alpha = \arctan(0.135) \approx 7.7°$. Der Höhenunterschied ist die Gegenkathete zu diesem Winkel: $g = s \cdot \sin(7.7°) \approx 181\,\mathrm{m}$.

**Notizen zu Übung 5.25.** Wir wollen die Gegenkathete zum Winkel $\alpha = 53°16'$ mit Ankathete $\overline{AB} = 85\,\mathrm{m}$ bestimmen: $\tan(53°16') = \frac{g}{85}$, also $g = 85\tan(53°16') \approx 114\,\mathrm{m}$

**Notizen zu Übung 5.26.** Die Höhe auf die Basis $c$ liefert zwei rechtwinklige, zueinander kongruente Dreiecke. Der Basiswinkel ist $\alpha = \arccos(\frac{27.35}{65.4}) \approx 65°$ und damit $\alpha = 50°$. Um den Flächeninhalt zu bestimmen brauchen wir die Höhe $h_c = \sqrt{65.4^2 - 27.35^2} \approx 59.4$. Es folgt $F = \frac{59.4 \cdot 54.7}{2} \approx 1625\,\mathrm{m}^2$.

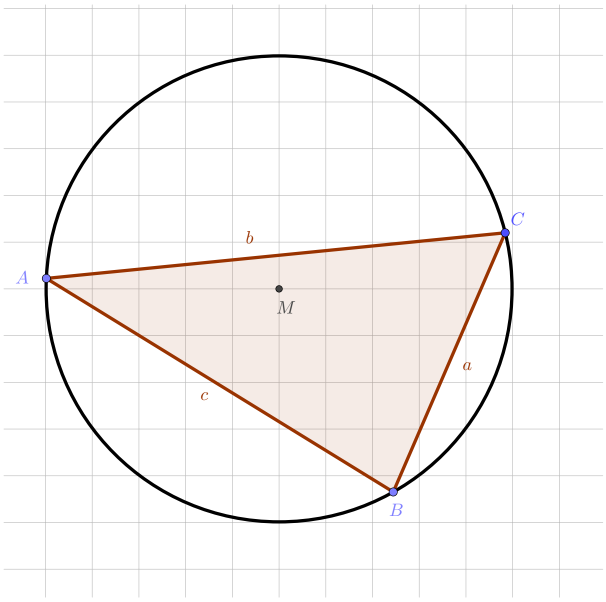
**Notizen zu Übung 5.27.**

a) In einem Quadrat mit Diagonale 1 sind die Seiten $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Der Umfang ist also $U_4 = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

b) In einem 10-Eck zieht man alle Diagonalen und halbiert dann die entstandenen Dreiecke, um die Seitenlänge bestimmen zu können. Ein solcher Teildreiecks-Innenwinkel ist $\alpha = \frac{360°}{10 \cdot 2}$. Die Länge der Teildreiecksseite $g = 0.5 \cdot \sin(\alpha)$ und damit die Seitenlänge $s = \sin(\alpha)$. Also haben wir für den Umfang $U_{10} = 10 \cdot \sin(\frac{360°}{20}) \approx 3.09$

Für ein $n$-Eck erkennen wir $U_n = n \cdot \sin(\frac{180°}{n})$ und erwarten $n \to \infty \implies U_n = \pi$.

**Notizen zu Übung 5.28.** Sei $r$ der Umkreisradius. Betrachten wir oEdA die Seite $a$ mit gegenüberliegendem Winkel $\alpha$. Für die Seite $a$ ist der Umkreis Peripheriewinkelkreis. Verschieben wir nun die Ecke $A$ so lange auf dem Kreisrand Richtung $B$, bis die Seite $b$ durch den Umkreismittelpunkt verläuft. Der Winkel in $A$ ist immer noch $\alpha$, die Seite $b$ ist als Hypotenuse $2r$ lang und wir haben in $B$ einen rechten Winkel (Thaleskreis). Daher gilt nun $\sin(\alpha) = \frac{a}{2r}$ woraus unmittelbar der Satz folgt.




**Notizen zu Übung 5.29.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos(\beta)$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos(\gamma)$. Im rechtwinkligen Dreieck, $\gamma = 90°$, ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos(90°) = a^2 + b^2 - 2bc \cdot 0 = a^2 + b^2$.

**Notizen zu Übung 5.30.** Aufgrund der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ setzen wir $a = \sqrt{3}$, $b = 2$, und $c = \sqrt{5}$ und berechnen die Winkel mit dem Cosinussatz. Wir haben

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) && (-b^2 - c^2) \\ a^2 - b^2 - c^2 &= -2bc\cos(\alpha) && (\cdot(-1)) \\ b^2 + c^2 - a^2 &= 2bc\cos(\alpha) && (\div 2bc) \\ \cos(\alpha) &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} && (\arccos(\ )) \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \end{aligned}$$

Also $\alpha \approx 48°$, $\beta \approx 59°$ und $\gamma \approx 73°$.

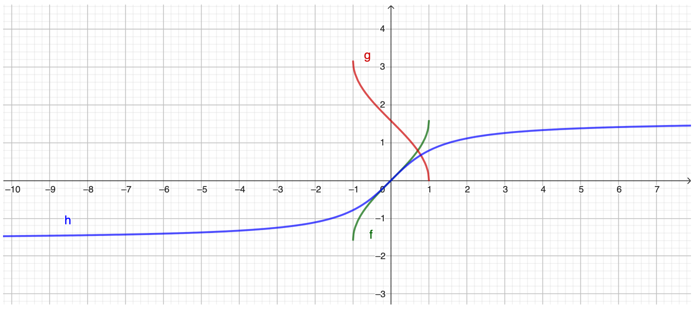
**Notizen zu Übung 5.31.** Die Länge ist $\overline{BC} = \sqrt{325^2 + 275^2 - 2 \cdot 325 \cdot 275 \cdot \cos(75°)} \approx 367\,\mathrm{m}$. Der Winkel ist $\beta \approx \arcsin(\frac{275}{367} \cdot \sin(75°)) \approx 46°$.

**Notizen zu Übung 5.32.** Vom Funkpeildreieck liest man alle Innenwinkel ab: 46.8°, 28.8° und 104.4°. Die Entfernung von $F_1$ ist dann $12.8 \cdot \frac{\sin(104.4°)}{\sin(28.8°)} \approx 25.7\,\mathrm{km}$ und $F_2 = 12.8 \cdot \frac{\sin(46.8°)}{\sin(28.8°)} \approx 19.4\,\mathrm{km}$.

**Notizen zu Übung 5.33.** Konsultiere wie üblich `geogebra.org`.

**Notizen zu Übung 5.34.** arcsin hat die Definitiosnmenge $[-1, 1]$ und beispielsweise die Wertemenge $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ich möchte ja auf einem möglichst grossen Intervall invertieren. Bei arccos nähme ich auch $[-1, 1]$ und kriege dann als Wertemenge $[0, \pi]$. arctan ist interessant: Ich nehme $(-\infty.\infty)$ woraus $\mathbb{W} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ folgt. Plotte in `geogebra.org`.

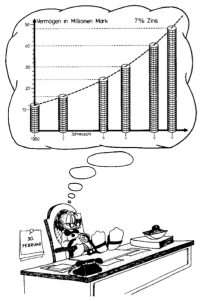
**Notizen zu Übung 5.35.** Wir verschieben $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ um eine halbe Einheit nach oben und stauchen die Amplitude so, dass sie zwischen 0 und 1 zu liegen kommt: $\frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$ ist eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $(0, 1)$.



# 6. Exponentialfunktionen

## 6.1. Einleitung

Seit der Pandemie von SARS2 CoV19 im Jahr 2020 ist der Begriff des *exponentiellen Wachstums* in aller Munde. Ein Beispiel aus einer Tageszeitung — dem Tagesspiegel Ausgabe vom 12.3.21 — fand ich hier: Wie exponentielles Wachstum unser Leben beeinflusst Dieser wichtige Typ Funktion soll nun in diesem Kapitel ergründet werden.




**Beispiel 7.** Ein Schüler verbreitet zu Beginn der grossen Pause im Gymnasium Lerbermatt ein Gerücht. Fortan werde ein Wissender dieses jede Minute einem Nicht-Eingeweihten erzählen. Wie lange dauert es, bis alle Schüler des Gymnasiums über das Gerücht in Kenntnis gesetzt worden sind?

Bei den Potenzfunktionen sind die Exponenten immer Konstanten, bei den Exponentialfunktionen ist die Basis konstant und der Exponent variabel, daher der Name.

**Definition 6.1: Exponentialfunktion**

Eine Funktion der Form

$$f(x) = b^x$$

mit $b \in \mathbb{R}^+$ heisst Exponentialfunktion zur Basis $b$.

**Beispiel 8.** Klassische Anwendungen, die durch Exponentialfunktionen beschrieben werden, sind:

- Ausbreitung von Krankheiten/Epidemien
- Radioaktiver Zerfall
- Zellvermehrung

## 6.2. Graphen

**Übung 6.1.**

Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Graphen der Funktionen

1. $2^x$, $3^x$, $2.7^x$
2. $4^x$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $10^x$

**Übung 6.2.**
Vergleiche das Verhalten (insbesondere das Wachstum) der beiden Funktionen

$$p(x) = x^2 \quad \text{und} \quad e(x) = 2^x$$

**Bemerkung.** Der Graph der Exponentialfunktionen

$$f(x) = b^x$$

liegt oberhalb der $x$-Achse und geht durch den Punkt $(0 \,|\, 1)$, da $f(0) = b^0 = 1 \; \forall b \in \mathbb{R}^+$. Für $b > 1$ ist der Graph steigend ($f$ monoton wachsend), für $0 < b < 1$ ist der Graph fallend ($f$ monoton fallend) und die $x$-Achse ist jeweils Asymptote.

**Übung 6.3.**
Was passiert mit $f(x) = b^x$ im Falle $b = 1$?

**Satz 6.1: Wachstum- & Zerfall**

Die Graphen der Funktionen $f(x) = b^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ liegen symmetrisch zueinander bezüglich der $y$-Achse.

*Beweis.* **Übung 6.4.**

□

**Übung 6.5.**
Berechne für die Funktionen $p(x) = x^2$ und $e(x) = 2^x$ die durchschnittlichen Änderungsraten über den Intervallen $[0, 1]$, $[-1, 0]$ und $[1, 7]$.
**Übung 6.6.**
Zeichne den Graphen von $f(x) = 2^x$ in ein Koordinatensystem.

a) Verschiebe den Graphen in positiver $x$-Richtung um 3 Einheiten.

b) Spiegele den Graphen an der $x$-Achse.

c) Verschiebe den Graphen in negativer $y$-Richtung um 4 Einheiten.

d) Spiegele den Graphen an der $y$-Achse.

e) Spiegele den Graphen am Ursprung des Koordinatensystems.

Gib jeweils die Gleichung der Bildkurve an.
**Übung 6.7.**
Es sei

$$f(x) = b^x \text{ und } g(x) = a \cdot b^x.$$

Der Punkt $P$ liegt auf dem Graphen von $f$. Berechne $b$ für

a) $P = (1.5 \,|\, 27)$

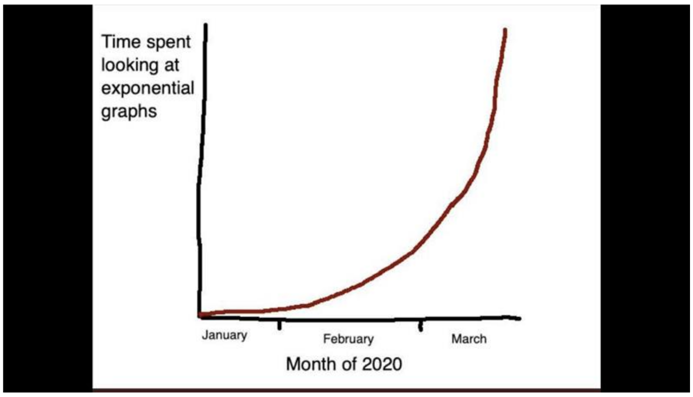



Abbildung 17: Joke During SARS2-CoV19 Lockdown in 2020

b) $P = (4 \,|\, 9)$

Die Punkte $R$ und $Q$ liegen auf dem Graphen von $g$. Berechne $a$ und $b$ für

c) $R\,(0 \,|\, 2)\,, Q\,(2 \,|\, 18)$

d) $R\,(-2 \,|\, 20)\,, Q = \left(3 \,|\, \frac{5}{8}\right)$

### 6.3. Wachstum und Zerfall

Exponentialfunktionen spielen bei der Beschreibung von zeitabhängigen Wachstums- und Zerfallserscheinungen eine sehr wichtige Rolle.

**Definition 6.2: Exponentialfunktion allgemein**

Ist $t$ die Masszahl der Zeit, so bezeichnet man die Funktion

$$f(t) = ab^t$$

für $b > 1$ als *exponentielle* Wachstumsfunktion, für $0 < b < 1$ als exponentielle Zerfallsfunktion.

**Bemerkung.** Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt

$$f(0) = ab^0 = a.$$

Also ist $(0|a)$ der Schnittpunkt mit der $y$-Achse, und man nennt $a$ den Anfangswert oder Startwert von $f$. Der Parameter $b$ ist ein Mass für das Wachstum bzw. den Zerfall und wird deshalb Wachstums- bzw. Zerfallsfaktor genannt.

**Bemerkung.** Weil die freie Variable im Exponenten steht, kann eine Rundung des Faktors $b$ schon nach wenigen Schritten zu grosser Fehlerspanne im Funktionswert $f$ führen. Nach Möglichkeit sollte also $b$ nicht gerundet werden.

**Übung 6.8.**
Bei einer Bakterienkultur ohne Raum- und Nahrungsmangel wächst die Individuenzahl exponentiell. Um 8 Uhr waren es 2300 und um 12 Uhr 36800 Individuen.

a) Nimm 2300 als Anfangswert an und ermittle den Wachstumsfaktor $b$. Wie lautet demnach die entsprechende Wachstumsfunktion?

b) Welches ist die Individuenzahl um 9 Uhr, um 11 Uhr, um 13.30 Uhr?

**Übung 6.9.**
Ein Waldbestand, in dem kein Holz geschlagen wird, wächst exponentiell. Er beträgt heute $72\,342\,\mathrm{m}^3$, vor zwölf Jahren betrug er $48\,228\,\mathrm{m}^3$.

a) Wie hoch war der Waldbestand vor fünf Jahren?

b) Wie hoch wird er heute in sieben Jahren sein?

**Übung 6.10.**
In einer Bakterienkultur ist

$$f(t) = 10^4 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t$. In welcher Zeitspanne $\Delta t$ verdoppelt, vervierfacht, verachtfacht sich die Anzahl?

**Bemerkung.** In der Praxis werden viele Wachstumsprozesse dadurch beschrieben, dass man neben dem Startwert $a$ noch die jährliche Zunahme der betrachteten Grösse in Prozenten angibt. Man denke einfach an die wohlbekannte Zinseszinsrechnung.

**Beispiel 9.** Es sei $f(0) = a = 10000$ die Anzahl der Einwohner einer Stadt, deren jährliches Wachstum 2% beträgt. Nach einem Jahr hat die Stadt

$$f(1) = f(0) + 0.02 \cdot f(0) = f(0) \cdot (1 + 0.02) = 10200$$

Einwohner. Nach zwei Jahren sind es

$$f(2) = f(1) \cdot (1 + 0.02) = f(0) \cdot (1 + 0.02)^2$$

Einwohner und analog nach $t$ Jahren

$$f(t) = 10000 \cdot 1.02^t$$

Einwohner.

| Jahr | Zunahme in Prozent |
|---|---|
| 1875 | 0.78 |
| 1902 | 1.15 |
| 1918 | -0.06 |
| 1937 | 0.36 |
| 1948 | 0.84 |
| 1965 | 1.01 |
| 1976 | 0.27 |

Tabelle 1: Zunahme der Wohnbevölkerung der Schweiz

**Übung 6.11.**
Vom Jahr 1875 zum Jahr 1985 ist die Wohnbevölkerung der Schweiz von 2 750 300 auf 6 455 900 angewachsen. Wieviel Prozent betrug die jährliche Zunahme, wenn man annimmt, dass die Bevölkerung von Jahr zu Jahr gleich viele Prozent zugenommen hat?

**Übung 6.12.**
Leite die Formel für das Kapital $K(n)$ nach $n$ Jahren in Abhängigkeit des Startkapitals $K_0$ und Zinsfusses $p$ her. Vergleiche mit der Formelsammlung.

**Übung 6.13.**
Susanne erhält zur Eröffnung eines Jugendsparbuches von ihrer Bank zu ihrer Einlage von 100 Franken ein Eröffnungsgeschenk von 50 Franken. Über welchen Betrag wird sie bei einem Jahreszins von 5.5% in 10 Jahren verfügen können?

**Übung 6.14.**
Im Jahre 1627 wurde die Insel Manhattan (New York) für 24$ den Indianern abgekauft. Im Jahre 1970 betrug der Wert nur des Landes 6 Milliarden Dollar. Welches ist die konstant angenommene jährliche Wertzunahme in Prozent?

**Übung 6.15.**
Ein 57 jähriger Fussballfan und seine 59 jährige Schwester teilen einen Totogewinn von 50 000 Franken so, dass sie im Zeitpunkt der Pensionierung (Frauen: 64 Jahre, Männer: 65 Jahre) gleich viel besitzen. Wieviel erhält jedes der Geschwister bei einem Zinssatz von 1.7%?

## 6.4. Notizen zu den Übungen

**Notizen zu Übung 6.1.** Man konsultiere `geogebra.org`.
**Notizen zu Übung 6.2.** Man konsultiere `geogebra.org`. Die Exponentialfunktion wächst ab $x > 2$ wesentlich schneller als die Potenzfunktion.
**Notizen zu Übung 6.3.** Im Falle $b = 1$ haben wir die konstante Einsfunktion.
**Notizen zu Übung 6.4.** Man sieht $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x} = f(-x)$. Also ist $g$ und $f$ Spiegelungen voneinander an der $y$-Achse.
**Notizen zu Übung 6.5.** Ich nehme die beiden Funktionen $p(x) = x^2$ und $e(x) = 2^x$. Für $p$ über $[0, 1]$:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p(1) - p(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

$\frac{\Delta p}{\Delta x} = 1$ über $[-1, 0]$. Und exemplarisch noch $e(x)$ über $[-1, 0]$:

$$\frac{\Delta e}{\Delta x} = \frac{e(0) - e(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - 0.5}{1} = 0.5$$

sowie über $[0, 1]$ $\frac{\Delta e}{\Delta x} = 1$. Über dem Intervall $[1, 7]$ berechnen wir beide Änderungsraten:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p(7) - p(1)}{7 - 1} = \frac{49 - 1}{6} = 8$$

$$\frac{\Delta e}{\Delta x} = \frac{e(7) - e(1)}{7 - 1} = \frac{128 - 2}{3} = 20\frac{2}{3}$$

**Notizen zu Übung 6.6.**

a) $g(x) = f(x - 3) = 2^{x-3}$

b) $g(x) = -f(x) = -2^x$

c) $g(x) = f(x) - 4 = 2^x - 4$

d) $g(x) = f(-x) = 2^{-x}$

e) $g(x) = -f(-x) = -2^{-x}$

**Notizen zu Übung 6.7.**

a) Aus $f(1.5) = 27 = b^{\frac{3}{2}}$ folgt $b = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 9$, also $f(x) = 9^x$.

b) $f(4) = 9 \implies b = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Somit $f(x) = \sqrt{3}^x$.

c) $R$ eingesetzt liefert $2 = a \cdot b^0 \Leftrightarrow a = 2$. Aus $Q$ folgt $18 = 2 \cdot b^2 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3 \implies b = 3$. $g(x) = 2 \cdot 3^x$.

d) Hier gibt es mehr zu tun. Mit $R$ folgt $20 = ab^{-2} = \frac{a}{b^2}$ und aus $Q$ $\frac{5}{8} = ab^3$. Dies sind 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, das wir lösen können. Aus der ersten folgt $a = 20b^2$, was wir in der zweiten einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} &= 20b^5 && (\div 20) \\ \frac{1}{32} &= b^5 && (\sqrt[5]{\ }) \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also errechnet man $g(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

**Notizen zu Übung 6.10.**

a) $f(t) = 2300 \cdot b^t$ mit $t = 0$ um $8:00$ Uhr. Ferner gilt $f(4) = 36\,800$, also $36\,800 = 2300 \cdot b^4$ und damit $b = 2$. $f(t) = 2300 \cdot 2^t$.

b) $f(1) = 4600$, $f(3) = 18\,400$ und $f(5.5) \approx 104\,086.12$, also $104\,086$.

**Notizen zu Übung 6.9.** Nehmen wir den aktuellen Bestand als Startwert: $f(t) = 72\,342 \cdot b^t$. Es muss $f(-12) = 48\,228 = 72\,342 \cdot b^{-12}$ woraus $b = \sqrt[12]{\frac{3}{2}} \approx 1.034$ folgt. $f(t) = 72\,342 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{12}}$.

a)

**Notizen zu Übung 6.10.** Wir betrachten insbesondere den Wachstumsfaktor inklusive Exponenten. Sei $B = f(t_0)$ der Bestand zum Zeitpunkt $t_0$. Mit $\Delta t$ bezeichnen wir die Zeit, die es zur Verdoppelung braucht. Damit ist $f(\Delta t) = 2B = B \cdot 2^{\frac{\Delta t}{2}}$. Daraus folgt $2 = 2^1 = 2^{\frac{\Delta t}{2}}$ und wir finden $\Delta t = 2$. Beim Vervierfachen muss $4 = 2^2 = 2^{\frac{\Delta t}{2}}$ und es folgt $\Delta t = 4$, beim Verachtfachen folgt schliesslich $\Delta t = 6$.

**Notizen zu Übung 6.11.** Die Wachstumsperiode beträgt 110 Jahre. Also lösen wir $6\,455\,900 = 2\,750\,300 \cdot b^{110}$ nach $b = \sqrt[110]{\frac{6\,455\,900}{2\,750\,300}} \approx 1.007787$. Die durchschnittliche Wachstumsrate pro Jahr war $1.007787 - 1 \approx 0.0078 = 0.78\%$

**Notizen zu Übung 6.12.** Nach einem Jahr hat man $K_1 = K_0 + p \cdot K_0 = K_0(1 + p)$ und nach zwei Jahren $K_2 = K_1 + p \cdot K_1 = K_1(1 + p) = K_0(1 + p)(1 + p) = K_0(1 + p)^2$. Analog erhält man $K_n = K_0(1 + p)^n$.

**Notizen zu Übung 6.13.** $K_{10} = 150 \cdot 1.055^{10} \approx 256.221$, also über 256.20 Franken.

**Notizen zu Übung 6.14.** Die Zeitdauer ist 343, also lösen wir: $6 \cdot 10^9 = 24 \cdot b^{343}$. Das ergibt $b = \sqrt[343]{2.5 \cdot 10^8} \approx 1.058$ und somit war die jährliche Wertzunahme 5.8%.

**Notizen zu Übung 6.15.** Wir müssen den Gewinn auf den Fan $x$ und seine Schwester $y$ aufteilen, $50\,000 = x + y$. Der Teil des Fans läuft für 8 Jahre, $x \cdot 1.017^8$, und der der

Schwester 5 Jahre, $y \cdot 1.017^5$. Also wollen wir

$$\begin{aligned}
x \cdot 1.017^8 &= y \cdot 1.017^5 \\
x \cdot 1.017^8 &= (50\,000 - x) \cdot 1.017^5 && (\div 1.017^5) \\
x \cdot 1.017^3 &= 50\,000 - x && (+x) \\
x \cdot 1.017^3 + x &= 50\,000 && (+x) \\
x(1 + 1.017^3) &= 50\,000 && (\div(1 + 1.017^3)) \\
x &= \frac{50\,000}{1 + 1.017^3} \approx 24368
\end{aligned}$$

Also kriegt er 24 368 Franken und sie 25632 Franken.

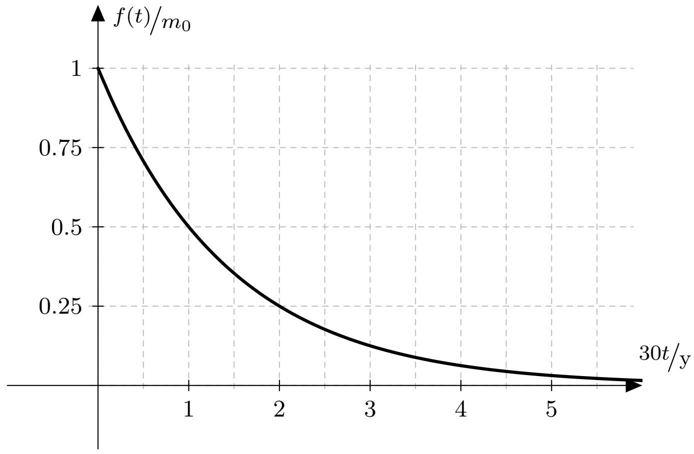



Abbildung 18: Radioaktiver Zerfall

# 7. Logarithmen

**Beispiel 10.** Nach welcher Zeit $t$ sinkt die Menge $m_0$ eines radioaktiven Stoffes mit der Halbwertszeit $T = 30\,\mathrm{y}$ auf einen Zehntel des ursprünglichen Wertes? Wir bezeichnen die Zeit mit $t$ und nehmen als Einheit $30\,\mathrm{y}$, die Masse zu Beginn sei $m_0$. Also haben wir für die Restmasse $m$ zur Zeit $t$:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t .$$

Um zu berechnen, wann noch $\frac{m_0}{10}$ übrig sind, lösen wir die zugehörige Gleichung nach $t$ auf:

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{10} &= m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t && (\div m_0) \\ \frac{1}{10} &= \left(\frac{1}{2}\right)^t && ((\ )^{-1}) \\ 10 &= 2^t \end{aligned}$$

Das Auflösen nach $t$ gelingt uns leider nicht, weil die gesuchte Variable im Exponenten steht. Wir sind gezwungen zu raten und mit try and error zu approximieren. Wegen $2^3 < 10 < 2^4$ ist $3 < t < 4$, und man findet als Näherung

$$t \approx 3.32$$

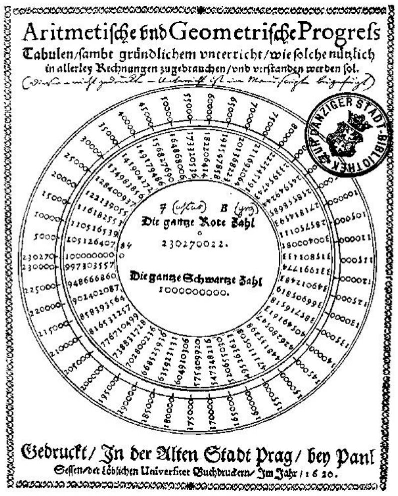
Antwort: Man hat nach ca. $99.6\,\mathrm{y}$ noch einen Zehntel der ursprünglichen Masse.

Diese Lösung ist unbefriedigend, da wir $t$ nicht genau bestimmen konnten. Das Problem liegt darin, dass wir zur Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ zwar den $y$-Wert 10 kennen, nicht aber den $x$-Wert. Wir suchen also die Inversfunktion der Exponentialfunktion $2^x$, die zu gegebenem $y$-Wert den ursprünglichen $x$-Wert liefert. Wie diese Funktion heisst bzw. definiert ist, seheh wir im nächsten Abschnitt.

## 7.1. Die Logarithmusfunktion

Wir möchten also eine gegebene Gleichung mit Variable im Exponenten lösen können. Dafür gehen wir von den bereits bekannten Exponentialfunktionen aus. Die Exponentialfunktion

$$f(x) = b^x$$



Titelblatt von Jost Bürgis Logarithmentafel

ist für $0 < b < 1$ streng monoton fallend und für $b > 1$ streng monoton wachsend und damit injektiv. Deshalb existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1}$. Diese nennt man Logarithmusfunktion zur Basis $b$ und bezeichnet sie mit $\log_b$.

**Übung 7.1.**

Nenne eine Funktion, welche keine Inversfunktion besitzt.

**Übung 7.2.**

Zeichne die Funktion $f(x) = 2^x$ und den Graphen der Inversfunktion $f^{-1}(x) = \log_2(x)$. Siehst du den bekannten graphischen Zusammenhang zwischen Funktion und Inversfunktion?

**Übung 7.3.**

Betrachte den Graphen der Funktion $f(x) = \log_2(x)$ in einem Koordinatensystem.

a) Verschiebe den Graphen in positiver $x$-Richtung um 2 Einheiten.

b) Spiegle den Graphen an der x-Achse.

Gib jeweils die Gleichung der Bildkurve an.

Mit der $\boxed{\text{log}}$-Taste kann man Werte von Variablen in Exponenten bestimmen. Um sie korrekt einsetzen zu können, wollen wir erst definieren, was wir unter einem Logarithmus verstehen wollen. Die Definition entspricht grundsätzlich einer Regel zum Umschreiben von Exponentialfunktionen.

**Definition 7.1: Logarithmus**

Unter dem Logarithmus von $y$ zur Basis $b$, geschrieben

$$\log_b y,$$

versteht man diejenige Zahl $x \in \mathbb{R}$, welche als Exponent der Basis $b \in \mathbb{R}+ \setminus \{1\}$ den Wert $y$ ergibt. Mathematisch notiert wird diese Aussage übersichtlich:

$$x = \log_b(y) \quad \Leftrightarrow \quad b^x = y.$$

$y$ nennt man Numerus und $b$ Basis des Logarithmus.

**Bemerkung.** Bei Betrachtung obiger Äquivalenz wird klar, dass der Logarithmus nur für $y, b \in \mathbb{R}^+$ und $b \neq 1$ definiert ist.

**Übung 7.4.**
Überlege kurz, welche Probleme entstünden, wenn man $y, b \in \mathbb{R}$ zulassen würde.

**Beispiele.**

- Den Logarithmus von $y$ zur Basis $b$ finden, ist gleichwertig mit der Beantwortung der Frage: „$b$ hoch was gibt $y$?“
- $\log_2(8) = 3$: Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3, denn $2^3 = 8$.
- $\log_{10}(100) = 2$, weil $10^2 = 100$.
- $\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{9}) = 2$, da $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

**Übung 7.5.**
Bestimme ohne Taschenrechner

a) $\log_{10}(1000)$, $\log_{10}(1000000)$, $\log_{10}(10^6)$, $\log_{10}(10^{837})$

b) $\log_{10}(0.1)$, $\log_{10}(0.01)$, $\log_{10}(\frac{1}{10})$, $\log_{10}(\frac{1}{10\,000})$

c) $\log_2(4)$, $\log_2(1024)$, $\log_2(\frac{1}{4})$, $\log_2(\frac{1}{512})$

d) $\log_{\mathrm{e}}(1)$, $\log_{\mathrm{e}}(\mathrm{e})$, $\log_{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^3)$, $\log_{\mathrm{e}}(\frac{1}{\mathrm{e}^4})$, $\log_{\mathrm{e}}(\sqrt{\mathrm{e}})$

e) $\log_b(1)$, $\log_b(\sqrt[k]{b})$, $\log_b(\frac{1}{b^2})$, $\log_b(0)$

Der folgende Satz folgt direkt aus der Definition und bringt meine saloppe Formulierung aus dem obigen Beispiel auf den Punkt.

**Satz 7.1: Exponenten-Eigenschaft**

Jeder Logarithmus ist ein Exponent.

*Beweis.* **Übung 7.6.** □

## 7.2. Übliche Bezeichnungen und Schreibweisen

Erstens werde ich anstelle von $\log_b(y)$ nun oft $\log_b(x)$ schreiben. Das $y$ habe ich verwendet, um klar darzustellen, dass der Logarithmus $x = \log_b(y)$ die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion $y = b^x$ ist. In andern Worten wird hier der Schritt „Vertauschung der Variablen"— der ja beim Algorithmus zur Bestimmung von Inversfunktionen als letzter erfolgt — schliesslich vorgenommen. Zweitens kommt als Basis $b$ des Logarithmus

$$\log_b(x)$$

oft eine der drei Zahlen 2, e (Euler'sche Zahl) oder 10 vor. Deshalb legt man folgende, kürzere Schreibweisen fest:

- $\log_{10} x = \log x = \lg x$ (10^er^ Logarithmus)
- $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x$ (Logarithmus naturalis)
- $\log_2 x = \operatorname{lb} x$ (Logarithmus dualis)

**Bemerkung.** Die $\boxed{\log}$ - Taste auf dem Taschenrechner ist also der Logarithmus zur Basis 10.

Drittens werde ich oft die Klammer um den Numerus weglassen, falls das Argument der Logarithmusfunktion klar ersichtlich ist. So wie das unter „Zweitens" bereits geschehen ist. Oft schreibe ich den Numerus in Klammer, um deutlich zu kennzeichnen, was alles zum Logarithmus gehört. Zum Beispiel

$$\log_{3.5}(4x^3 + 2x - 1).$$

**Übung 7.7.**
Lasse von `geogebra.org` folgende Logarithmusfunktionen zeichnen.

- $f(x) = \log(x)$
- $g(x) = \ln(x)$

**Übung 7.8.**
Die Funktion

$$f(x) = \log_b(x)$$

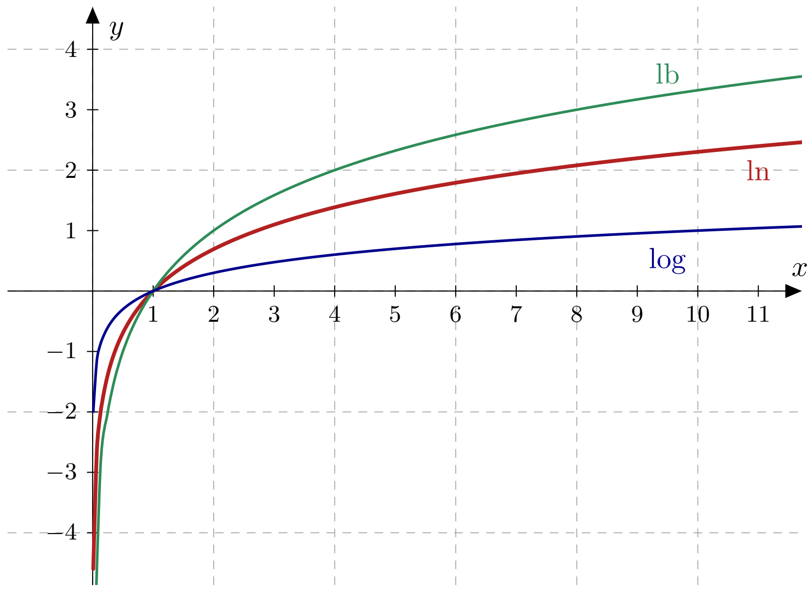



Abbildung 19: Die Graphen von $\ln(x)$, $\log(x)$, und $\text{lb}(x)$

ist für $b > 1$ eine monoton wachsende Funktion. Allerdings ist dieses Wachstum sehr langsam. Um einen Eindruck davon zu bekommen, denke man sich ein Koordinatensystem, dessen $x$-Achse mehrere Äquatorumfänge lang ist. Die Einheit sei 1 cm. Überprüfe die Abbildung 20 für den Graphen von $\log(x)$ und zeichne die Werte von zwei weiteren „Erdumrundungen“ in Abbildung 20 auf Seite 73 ein.

**Übung 7.9.**

Berechne mit dem TR folgende Logarithmen, und kontrolliere deine Berechnung, indem du 10 „hoch“ dein jeweiliges Resultat eintippst.

a) $\log 7$

b) $\log 1001$

c) $\log 1024$

d) $\log 0.101$

e) $\log 10^{-23}$

f) $\log 0.5$

## 7.3. Die Logarithmensätze

Es folgen vier Logarithmenregeln. Die erste ist hilfreich beim Eintippen in den Taschenrechner. Die letzte beschreibt, wie man Gleichungen nach einer im Exponenten stehenden

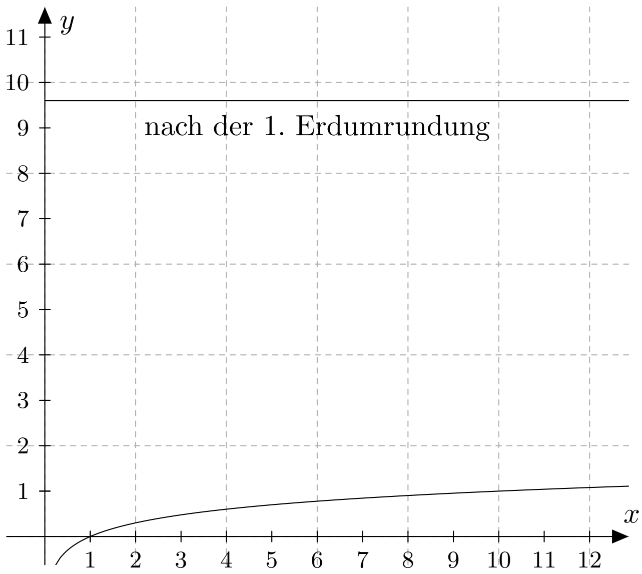



Abbildung 20: Log der Äquator-Vielfachen

Variablen auflöst. Damit wird man in der Lage sein die für unser Ausgangsproblem auf Seite 1 gesuchte Variable $t$ exakt zu bestimmen.
Die erste Regel besagt, dass jeder Logarithmus zu einer beliebigen Basis $b$ als Quotient von Logarithmen zu einer beliebigen Basis $n$ geschrieben werden kann.

**Satz 7.2: Basiswechsel**

$$\log_b x = \frac{\log_n x}{\log_n b}$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir eine der folgenden drei Rechenregeln, die leicht mit der Definition nachgewiesen werden können.

**Satz 7.3: Rechenregeln für Logarithmen**

Es gilt

$$\log_b (u \cdot v) = \log_b (u) + \log_b (v) \tag{22}$$

$$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b (u) - \log_b (v) \tag{23}$$

$$\log_b (u^n) = n \cdot \log_b (u) \tag{24}$$

*Beweis.* Nach Definition; also

**Übung 7.10.**

Hinweis: Erinnere dich daran, dass ein Logarithmus die Inversfunktion einer Exponentialfunktion ist und daher die Gesetze ähnlich zu den Potenzgesetzen sein müssen. □

*Beweis zu Satz 3.* **Übung 7.11.** □

## 7.4. Graphen von Logarithmenfunktionen

Wir haben ein paar Graphen anhand von Wertetabellen oder mit `geogebra.org` gezeichnet.

**Übung 7.12.**

Skizziere die Graphen der Funktionen $f(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)$ und $g(x) = \log_{\frac{1}{\mathrm{e}}}(x)$ in ein und dasselbe Koordinatensystem. Was fällt auf?

**Übung 7.13.**

Skizziere die Graphen der Funktionen $f(x) = \ln x$ und $g(x) = \mathrm{e}^x$ in ein und dasselbe Koordinatensystem. Was fällt auf? Erkläre das Ergebnis.

**Übung 7.14.**

Vereinfache $e^{\ln 2}$, $\ln(e^2)$, $e^{\ln(x)}$, $\ln(e^x)$?

**Satz 7.4: Eigenschaften der Logarithmusfunktionen**

Graphen von Logarithmusfunktionen haben folgende Eigenschaften:

- Sie gehen alle durch den Punkt $(1 \mid 0)$.
- Die Graphen von $f(x) = \log_b(x)$ und $g(x) = \log_{\frac{1}{b}}(x)$ sind achsialsymmetrisch bezüglich der x-Achse.

*Beweis.* Wir betrachten eine beliebige Logarithmusfunktion $f(x) = \log_b(x)$. Also $f(1) = \log_b(1)$ genau dann, wenn $b^{f(1)} = 1$, dh. $f(1) = 0$ und der erste Punkt ist bewiesen.
Um den zweiten Punkt zu verifizieren betrachten wir:

$$\begin{aligned} g(x) = \log_{\frac{1}{b}}(x) = \log_{b^{-1}}(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(b^{-1})} \\ &= \frac{\log_b(x)}{-\log_b(b)} = -\log_b(x) = -f(x). \end{aligned}$$

Also sind die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ symmetrisch bezüglich der x-Achse. □

**Übung 7.15.**

Gegeben sei die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

a) Zeichne den Graphen von $f$ und spiegle diesen an der Winkelhalbierenden durch den 1. und 3. Quadranten. Überlege, dass durch die Spiegelung der Graph einer neuen Funktion $g$ entsteht.

b) Bestimme die Funktionswerte von $g$ an den Stellen $\mathrm{e}$, $\mathrm{e}^2$, $\mathrm{e}^{-1}$ und $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Schliesslich halten wir noch fest, was wir zu Beginn einfach in den Raum geworfen haben:

**Satz 7.5: Log als Inversfunktion von Exp**

Jede Logarithmusfunktion ist die Inverse einer Exponentialfunktion und vice-versa.

*Beweis.* Wir bestimmen die Inversfunktion einer beliebigen Exponentialfunktion:

$$y = b^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y).$$

Variablen umbenennen und die Inversfunktion mit $f^{-1}$ bezeichnen: $f^{-1}(x) = \log_b(x)$. Die Umkehrung gilt ebenfalls, weil wir ausschliesslich Identitäten und Äquivalenzen verwendet haben. □

## 7.5. Weitere Anwendungen

Logarithmen kann man benutzen, um Zahlen zu berechnen, welche ausserhalb der Kapazität des TRs liegen.

**Beispiel 11.** Wir wollen $x = 2^{4000}$ berechnen. Eingetippt in den TR erhalten wir leider nur die obere Kapazitätsgrenze; der TR ist überfordert.
Wir helfen der Rechenmaschine etwas nach, indem wir sie instrumentalisieren:

$$\log(x) = \log(2^{4000}) = 4000 \cdot \log(2) = 1204.1199$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} x &= 10^{1204.1199} = 10^{1204+0.1199} \\ &= 10^{0.1199} \cdot 10^{1204} = 1.318 \cdot 10^{1204} \end{aligned}$$

**Übung 7.16.**
Berechne $9^{(9^9)}$.

**Übung 7.17.**
Der pH-Wert ist ein Mass für die $H_3O^+$-Konzentration einer Lösung. Es gilt

$$\mathrm{pH} = -\log\left(H\right)$$

wobei $H$ die Konzentration von $H_3O^+$ in $^{\mathrm{mol}}/_{\mathrm{l}}$ bezeichnet.

a) Für Tomaten ist $H = 6.3 \cdot 10^{-5}\,^{\mathrm{mol}}/_{\mathrm{l}}$, für Milch $H = 4 \cdot 10^{-7}\,^{\mathrm{mol}}/_{\mathrm{l}}$. Berechne die zugehörigen pH-Werte.

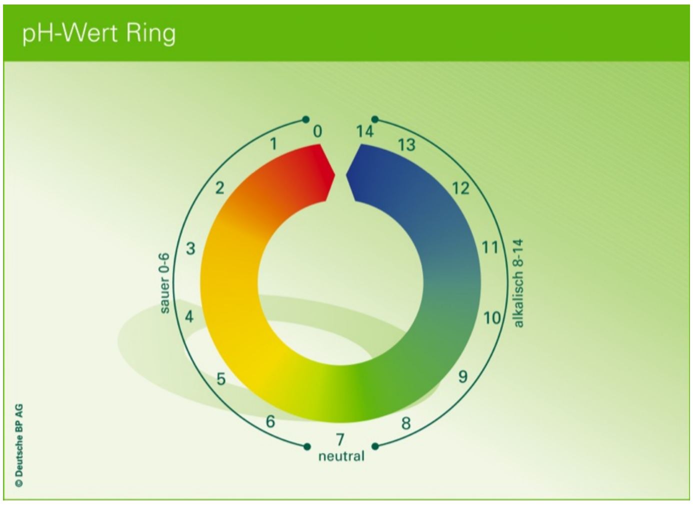



Abbildung 21: PH-Ring

b) Welchen pH-Wert hat eine Lösung mit $H = 1\,{}^{\mathrm{mol}}\!/\mathrm{l}$?

**Übung 7.18.**

Die Lautstärke $L$ eines Geräuschs von der Intensität $I$ ist definiert durch

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB}.$$

dB steht für Dezibel, nach dem amerikanischen Ingenieur Graham Bell (1847–1922); dem Erfinder des Telefons. $I_0$ bedeutet die Intensität eines Geräuschs, das vom menschlichen Ohr gerade noch wahrgenommen werden kann.

a) Die Geräuschintensität normaler Unterhaltung ist etwa eine Million mal so gross wie $I_0$. Welchem Dezibel-Wert entspricht das?

b) Eine Intensitätszunahme von 10 Dezibel empfindet das menschliche Ohr als Verdoppelung der Lautstärke. Welcher Intensitätszunahme in Prozent entspricht dies?

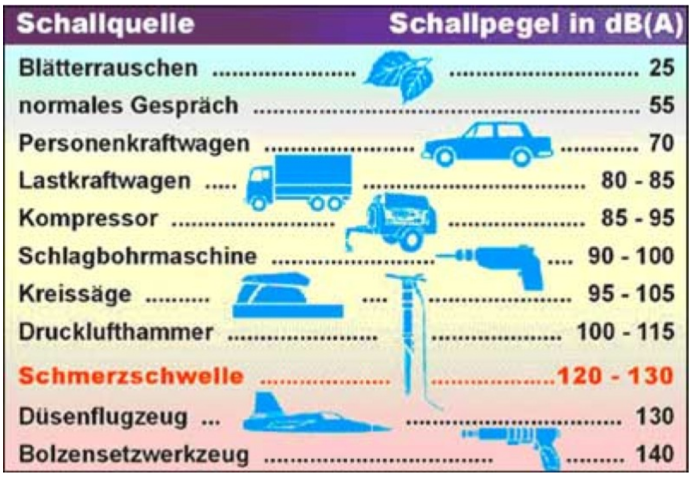
c) Ein Düsenflugzeug entwickelt beim Start eine Intensität von $10^{13} I_0$. Dezibel-Werte von mehr als 90 dB gelten als gehörschädigend; ist es die angegebene Intensität?

**Übung 7.19.**

Die Stärke von Erdbeben $R$ gibt man durch Werte der sogenannten *Richter-Skala* an. Diese ist definiert durch

$$R = \log\left(\frac{B}{B_0}\right),$$

wobei $B_0$ die Intensität eines gerade noch wahrnehmbaren Bebens bezeichnet.



| Schallquelle | Schallpegel in dB(A) |
|---|---|
| Blätterrauschen | 25 |
| normales Gespräch | 55 |
| Personenkraftwagen | 70 |
| Lastkraftwagen | 80 - 85 |
| Kompressor | 85 - 95 |
| Schlagbohrmaschine | 90 - 100 |
| Kreissäge | 95 - 105 |
| Drucklufthammer | 100 - 115 |
| Schmerzschwelle | 120 - 130 |
| Düsenflugzeug | 130 |
| Bolzensetzwerkzeug | 140 |

Abbildung 22: Schallpegel-Tabelle

a) Das Beben von San Francisco im Jahr 1906 hatte eine Intensität von $B = B_0 \cdot 10^{8.25}$. Welchem Wert auf der Richter-Skala entspricht dies?

b) Welche Intensitätsänderung bedeutet eine Zunahme von 1 auf der Richterskala?

## 7.6. Gleichungen mit Variablen im Exponenten

Die Lösung unseres Ausgangsproblems, die Bestimmung von Variablen in Exponenten, soll an einem Beispiel vorgeführt werden.

**Beispiel 12.** Wir lösen die Gleichung

$$6^{x-1} = 10$$

nach $x$ auf. Dies können wir auf zwei Arten tun.

1. Mit Logarithmieren auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \log 6^{x-1} &= \log 10 && \text{(Regel (3))} \\ (x-1) \cdot \log 6 &= 1 && (\div \log 6) \\ x - 1 &= \frac{1}{\log 6} && (+1) \\ x &= \frac{1}{\log 6} + 1 \approx 2.285 \end{aligned}$$

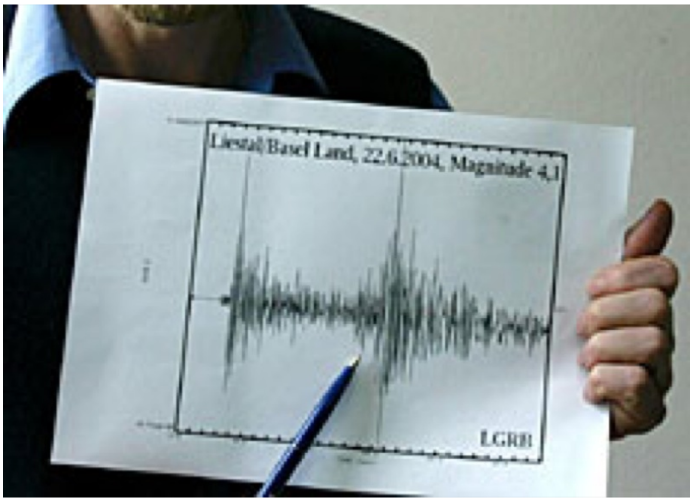



Abbildung 23: Aufzeichnung des Erdbebens von Basel vom 22. Juni 2004

2. Mit der Definition:

$$\begin{aligned} 6^{x-1} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 &= \log_6 10 && \text{(Satz 3)} \\ x - 1 &= \frac{\log 10}{\log 6} && (+1) \\ x &= \frac{1}{\log 6} + 1 \end{aligned}$$

Kontrolle:

$$6^{2.285-1} \approx 10 \qquad \checkmark$$

**Übung 7.20.**
Löse nach $x$ auf:

$$2000 \cdot 1.025^x = 3750$$

**Übung 7.21.**
Stelle drei Gleichungen auf, bei denen die Variable im Exponenten vorkommt. Löse diese und überprüfe deine Resultate durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung.

**Übung 7.22.**
Nach UNO-Angaben lebten 1988 auf der Erde 5113 Millionen Menschen; die jährliche Wachstumsrate betrug 1.7%. Wann wird unter der Annahme, dass diese Zuwachsrate konstant bleibt, jedem Menschen nur noch ein Stehplatz von $\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2$ zur Verfügung stehen? (Die Landfläche beträgt 29% der Erdoberfläche.)

**Übung 7.23.**
Beim radioaktiven Zerfall wird meistens die sogenannte Halbwertszeit angegeben. Die Halbwertszeit ist die Zeit, in der die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Atome zerfällt. Für Uran 239 beträgt die Halbwertszeit $T_{1/2} = 23.5$ Minuten. Stelle die Gleichung der Zerfallsfunktion auf, wenn zu Beginn $N_0$ Atome vorhanden sind.

**Übung 7.24.**
In lebenden Organismen besteht Kohlenstoff aus stabilen Atomkernen sowie einem Anteil ($3 \cdot 10^{-8}\%$) aus radioaktiven Atomkernen $C_{14}$, die durch kosmische Strahlung entstehen. Sobald ein organischer Stoff stirbt, nimmt der $C_{14}$-Anteil mit einer Halbwertszeit von 5736 Jahren exponentiell ab.

a) Im Jahre 1960 stellte man in der Leinwand einer altägyptischen Königsmumie einen $C_{14}$-Anteil von $1.75 \cdot 10^{-8}\%$ fest. Datiere auf hundert Jahre genau.

b) 1950 wurde in der Höhle von Lascaux (Frankreich) Holzkohlenreste mit einem $C_{14}$-Anteil von $0.435 \cdot 10^{-8}\%$ gefunden. Berechne das Alter dieser Holzkohle.

**Übung 7.25.**
In der Informationstheorie versteht man unter dem Informationsgehalt $H$ eines Ereignisses mit der Wahrscheinlichkeit $p$ den Logarithmus von $\frac{1}{p}$ zur Basis 2.

$$H = \log_2(\frac{1}{p}) \quad \text{(Einheit: 1 bit)}$$

Welche Wahrscheinlichkeit gehört zum Informationsgehalt $0, 1, 0.5, 5, 10.2$ bit?
Eine Münze (Kopf oder Zahl) wird viermal nacheinander geworfen. Berechne den Informationsgehalt der Ereignisse

a) nie Kopf,

b) genau einmal Kopf,

c) genau zweimal Kopf,

d) genau dreimal Kopf

e) viermal Kopf.

## 7.7. Die Euler'sche Zahl

Die geeignetste Basis für eine Exponentialfunktion

$$f(x) = b^x$$

ist die Zahl e, eine Zahl, die in vielen Anwendungen vorkommt. Der Buchstabe e wurde zu Ehren des in Riehen geborenen Mathematikers Leonhard Euler (1707-1783) gewählt. Wie $\pi$ ist die Euler'sche Zahl irrational, und ihre Dezimaldarstellung beginnt mit

$$\mathrm{e} = 2.71828182845904523536028747135266\ldots$$

Was es mit der Zahl e auf sich hat, können wir an dieser Stelle nur zu einem kleinen Teil erfahren, denn ihre Bedeutung und Tragweite wird erst nach und nach mit fortschreitendem Stoff klarer werden. Eine Möglichkeit, die Zahl e kurz und bündig zu charakterisieren, ist diese:


Abbildung 24: 10-Franken Note alter Serie: Leonard Euler

e ist die einzige positive Zahl, für die

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Übung 7.26.**
Skizziere $\mathrm{e}^x$ und $x + 1$.
**Übung 7.27.**
Skizziere $\mathrm{e}^x$, $2^x$ und $3^x$ und betrachte einen kleinen Ausschnitt um $(0\,|\,1)$.
Eine weitere schöne Eigenschaft ist folgende.

**Bemerkung.** Alle Exponentialfunktionen $b^x$ schneiden die $y$-Achse im Punkt $(0\,|\,1)$. Sucht man für eine Exponentialfunktion $b^x$ eine Basis $b$ so, dass die Steigung des Graphen beim Schnittpunkt mit der $y$-Achse exakt $45°$, also 1, beträgt, dann würde $b = \mathrm{e}$ folgen.

Obwohl die bisherige Argumentation von einem strengen mathematischen Gesichtspunkt aus betrachtet unbrauchbar ist, geben wir uns mit ihr zufrieden. Auch ein stringenterer Beweis liefert dasselbe Resultat, ist aber mit erheblich mehr Aufwand verbunden.
Um die Basis Euler'sche Zahl zu berechnen, gehen wir folgendermassen vor: Wir wählen ein positives $x$ und betrachten jene Basis $b$, für die

$$b^x = 1 + x$$

oder, nach $b$ aufgelöst

$$b = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

ist. Dies ist genau jene Basis, für die der Graph von $b^x$ die Gerade $1 + x$ in einem Punkt mit der (positiven) $x$-Koordinate $x$ schneidet. Wenn wir nun $x$ immer kleiner machen $(x \to 0)$, wird $b$ immer näher an e heran rücken. Wir berechnen sinngemäss

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

für grosse natürliche Zahlen $n$, also $n \to \infty$.

| $n$ | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2.25 |
| 10 | 2.59... |
| 100 | 2.70... |
| 1000 | 2.716... |
| 100000 | 2.71826... |
| 100000000 | 2.71828... |

Tabelle 2: Approximation an e

**Definition 7.2: Euler'sche Zahl**

Man verwendet als Definition für die Euler'sche Zahl auch

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828\ldots.$$

**Definition 7.3: gebräuchliche Schreibweisen**

Die entsprechende Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x$$

bezeichnet man als die natürliche Exponentialfunktion.
Die entsprechende Logarithmusfunktion, also die Umkehrfunktion von $x \mapsto \mathrm{e}^x$, wird natürliche Logarithmusfunktion genannt:

$$\exp^{-1}(x) = \log_{\mathrm{e}}(x) =: \ln(x)$$

**Bemerkung.** Der Taschenrechner stellt mit speziellen Tasten sowohl die Funktionswerte $\mathrm{e}^x$ als auch die Funktionswerte $\ln(x)$ zur Verfügung.

**Bemerkung.** Fortgeschrittene Rechner verwenden selbstverständlich als Basis einer Exponentialfunktion e und bezeichnen den ln oft als log.
Später werden wir in erster Linie nur noch diese beiden Funktionen verwenden, da sich alle anderen Exponential- und Logarithmusfunktionen auf diese beiden Funktio-

nen zurückführen lassen. Diese schöne Tatsache wollen wir mit den beiden nächsten Übungen untermauern.

**Übung 7.28.**
Stelle die Exponentialfunktion $f(x) = 3.5 \cdot 2^x$ als natürliche Exponentialfunktion der Form

$$f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{cx}$$

dar.

**Übung 7.29.**
Für die Zeit während der Ausbreitung einer Epidemie kann man die Anzahl der nach $t$ Tagen infizierten Individuen durch die folgende Modellfunktion angeben:

$$N(t) = \frac{M}{1 + c\mathrm{e}^{-at}}$$

Für eine bestimmte Epidemie seien $M = 1000$, $c = 999$ und $a = 0.4$.

a) Wie viele Individuen sind nach 0, 10, 20, 30 Tagen infiziert?

b) Nach wie vielen Tagen sind 200, 500, 950 Individuen infiziert?

c) Zeichne den Graphen der Funktion.

## 7.8. Lösungen zu den Übungen

**Notizen zu Übung 7.1.** Beispielsweise $f(x) = x^2$ ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Ein gutes Beispiel sind auch die Winkelfunktionen.
**Notizen zu Übung ??.** Verwende `geogebra.org`, um zu sehen, dass Funktion und Inversfunktion symmetrisch bezüglich Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$ sind.
**Notizen zu Übung 7.3.** Wiederum konsultiert man `geogebra.org`.

a) $g(x) = f(x-2) = \log_2(x-2)$

b) $g(x) = -f(-x) = -\log_2(-x)$

**Notizen zu Übung 7.4.** Für $b = 1$ gäbe es im Allgemeinen keinen Funktionswert. Für $y \in \mathbb{R}^-$ gäbe es für gerade Exponenten oder Wurzeln allenfalls keine Funktionswerte.
**Notizen zu Übung 7.5.**

a) 3, 6, 6, 837

b) $-1$, $-2$, $-1$, $-4$

c) 2, 10, $-2$, $-9$

d) 0, 1, 3, $-4$, $\frac{1}{2}$

e) 0, $\frac{1}{k}$, $-2$, n.d.

**Notizen zu Übung 7.6.** Trivial: Nach Definition mit den üblichen Parametern ist $\log_b(y) = x :\Leftrightarrow b^x = y$, also steht der Logarithmus im Exponenten.
**Notizen zu Übung ??.** Ich nehme für den mittleren Erdradius $r_E = 6370\,\text{km}$, was einen Umfang von $U_E \approx 40\,000\,\text{km}$ ergibt. Das sind $4\,000\,000\,000\,\text{cm}$ und es ist $\log(4\,000\,000\,000) \approx 9.6$. Eine Runde später haben wir ungefähr 9.9 und nach der dritten Runde approximativ 10.2.
**Notizen zu Übung 7.9.**

a) $\approx 0.85$

b) $\approx 3$

c) $\approx 3.01$

d) $\approx -0.996$

e) $-23$

f) $\approx -0.3$

**Notizen zu Übung 7.10.** Zu (22): Setze $\log_b(u) =: x$ und $\log_b(v) =: y$. Es ist $u = b^x$ und $v = b^y$, woraus $u \cdot v = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$ folgt, also mit Definition $\log_b(u \cdot v) = x + y = \log_b(u) + \log_b(v)$.

Zu (23): Analog wie oben sieht man $u \div v = b^x \div b^y = b^{x-y}$ und damit $\log_b(u \div v) = x - y = \log_b(u) - \log_b(v)$.
Zu (24): Erhält man mit vollständiger Induktion aus (22) oder $\log_b(u^n) =: x \Leftrightarrow b^x = u^n$ und daraus $u = b^{\frac{x}{n}}$. Also $\log_b(u) = \frac{x}{n} \Leftrightarrow n \cdot \log_b(u) = x = \log_b(u^n)$.
**Notizen zu Übung 7.11.** Es sei $\log_b(x) = y$, also $b^y = x$. Diese Exponentialgleichung logarithmieren wir auf beiden Seiten

$$\log_n(b^y) = \log_n(x).$$

Mit der dritten Logarithmenregel folgt dann $y \cdot \log_n(b) = \log_n(x) \Leftrightarrow y = \frac{\log_n(x)}{\log_n(b)}$ Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.
**Notizen zu Übung 7.12.** Check mit `geogebra.org`. Wegen $\frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1}$ sind die Graphen symmetrisch bezügliche der $y$-Achse.
**Notizen zu Übung 7.13.** Wiederum überprüft man die Skizze mit `geogebra.org`. Da $f$ und $g$ Inversfunktionen voneinander sind, sind die Graphen symmetrisch bezüglich der Achse $y = x$.
**Notizen zu Übung 7.14.** 2, 2, $x$, $x$
**Notizen zu Übung 7.15.**

a) Check mit `geogebra.org`.

b) Anhand der Spiegelung sieht man: $g(\mathrm{e}) = 1$, $g(\mathrm{e}^2) = 2$, $g(\mathrm{e}^{-1}) = -1$ und $g(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2}$

**Notizen zu Übung 7.16.** $9^9 = 387\,420\,489$, $\log(9^{387\,420\,489}) = 9\log(387\,420\,489) \approx 77.293643$ und damit $9^{9^9} \approx 10^{77.293643} \approx 1.966 \cdot 10^{77}$.
**Notizen zu Übung 7.17.**

a) Tomaten 4.2, Milch 6.4

b) 0

**Notizen zu Übung 7.18.**

a) $L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^6 \cdot I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \log(10^6) = 60\,\mathrm{dB}$

b) $\Delta L = 10 = 10\log(\frac{I_2}{I_0}) - 10\log(\frac{I_1}{I_0})$, also $1 = \log(\frac{I_2}{I_0}) - \log(\frac{I_1}{I_0}) = \log(\frac{I_2}{I_1})$ und nach Definition $10 = \frac{I_2}{I_1}$. Somit $I_2 = 10 \cdot I_1$, d.h. eine Verzehnfachung der Intensität!

c) $L = 130\,\mathrm{dB}$, ja.

**Notizen zu Übung 7.19.**

1. $R = 8.25$

2. $\Delta R = 1 = \log(\frac{B_2}{B_0}) - \log(\frac{B_1}{B_0}) = \log(\frac{B_2}{B_1})$, woraus $B_2 = 10 \cdot B_1$ also das Zehnfache.

**Notizen zu Übung 7.20.**

$$\begin{aligned} 2000 \cdot 1.025^x &= 3750 && (\div 2000) \\ 1.025^x &= \frac{3750}{2000} \\ x &= \log_1 .025(\frac{15}{8}) \\ x &\approx 25.5 \end{aligned}$$

**Notizen zu Übung 7.21.** Kotrolliere, indem du in das Anfangsproblem einsetzt.
**Notizen zu Übung 7.22.** Mit Startwert $f_0 = 5.113 \cdot 10^9$ im Jahr 1988 haben wir die Funktion für die Anzahl Menschen $f$ nach $t$ Jahren: $f(t) = 5.113 \cdot 10^9 \cdot 1.017^t$. Für die Fläche verwenden wir den mittleren Erdradius 6370 km und berechnen die Landfläche $O = 4\pi \cdot 6\,370\,000^2 \cdot 0.29 \approx 1.4 \cdot 10^{14}$. Wir setzten

$$\begin{aligned} 4 \cdot O &= f(t) \\ \frac{4O}{f_0} &= 1.017^t \\ t &= \log_1 .017(\frac{4O}{f_0}) \end{aligned}$$

und erhalten damit $t \approx 691.6$, also etwa im Jahr 2680.
**Notizen zu Übung 7.23.** Bezeichne $N(t)$ die Anzahl Atome zum Zeitpunkt $t$. Es ist $N(t) = N_0 \cdot b^t$ und schliessen aus der Halbwertszeit, dass $\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot b^{23.5}$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 \cdot b^{23.5} && (\div N_0) \\ \frac{1}{2} &= b^{23.5} \\ b &= \sqrt[23.5]{\frac{1}{2}} \\ b &\approx 0.971 \end{aligned}$$

$$N(t) = N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{23.5}}.$$

**Notizen zu Übung 7.24.** Für die Zerfallsfunktion ermitteln wir den Faktor aus der Halbwertszeit.

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 \cdot b^{5736} && (\div N_0) \\ \frac{1}{2} &= b^{5736} \\ b &= \sqrt[5736]{\frac{1}{2}} \\ b &\approx 0.999879 \end{aligned}$$

und es folgt $N(t) = 3 \cdot 10^{-8} \cdot 0.5^{\frac{t}{5736}}$. Wir lösen

$$\begin{aligned} 1.75 \cdot 10^{-8} &= 3 \cdot 10^{-8} \cdot 0.5^{\frac{t}{5736}} \\ \frac{1.75}{3} &= 0.5^{\frac{t}{5736}} \\ \frac{t}{5736} &= \log_{0.5}(\frac{1.75}{3}) \\ t &\approx 4460 \end{aligned}$$

**Notizen zu Übung 7.25.** Zu $H = 0$ gehört die Wahrscheinlichkeit $p = 1$, zu $H = 1$ $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $p = \frac{1}{32}$, $p \approx 0.00085$

a) $p = \frac{1}{16}$ und damit 4

b) $p = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$, also 2

c) $p = \frac{3}{8}$. Somit $H \approx 1.415$

d) 4

e) 4

**Notizen zu Übung 7.26.** `geogebra.org`
**Notizen zu Übung 7.27.** `geogebra.org`
**Notizen zu Übung 7.28.**

$$\begin{aligned} 3.5 \cdot 2^x &= a \cdot e^{cx} && (a = 3.5) \\ 2 &= e^c \\ c &= \ln(2) \end{aligned}$$

Also ist $f(x) = 3.5 \cdot 2^x = 3.5 \cdot e^{\ln(2) \cdot x}$
**Notizen zu Übung 7.29.**

a) 1, 52, 749, 994

b)

$$\begin{aligned} N &= \frac{M}{1 + ce^{-at}} \\ N + Nce^{-at} &= M \\ Nce^{-at} &= M - N \\ e^{-at} &= \frac{M - N}{Nc} && ((\ )^{-1}) \\ e^{at} &= \frac{Nc}{M - N} && (\ln(\ )) \\ at &= \ln(\frac{Nc}{M - N}) \\ t &= \frac{1}{a} \ln(\frac{Nc}{M - N}) \end{aligned}$$

$t(200) = 13.8$, $t(500) = 17.3$ und $t(950) = 24.6$

c) Der Graph ist eine sogenannte logistische Funktion, `geogebra.org`.

# A. Relationen

Personen oder Dinge stehen oft in Beziehung. Manche Beziehungen lassen sich graphisch darstellen und mathematisch beschreiben. Im Folgenden werden Menge und Beziehungen zwischen ihren Elementen betrachtet.

**Beispiel 13.** Es gibt eine Beziehung, in der Mathematik sagt man Relation, zwischen den Mitgliedern dieser Klasse und den möglichen Freifächern, welche Angeboten werden.

**Bemerkung.** Unter einer Relation $R$ zwischen den Elementen der Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ versteht man eine beliebige Beziehung (Zuordnung), wodurch jedem Element $x \in \mathbb{A}$ *kein, genau ein* oder *mehr als ein* Element $y \in \mathbb{B}$ zugeordnet wird. Man schreibt

$$R : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$$

**Beispiel 14.** Im obigen Beispiel steht $R$ für „zu einem Klassenmitglied das Freifach zuordnen“, $\mathbb{A}$ für die Menge der Schülerinnen und Schüler der Klasse und $\mathbb{B}$ für die Menge der angebotenen Freifächer.

**Bemerkung.** Offensichtlich kann jede Relation als Menge von geordneten Paaren $(x|y)$ notiert werden. Um eine Relation via Mengenlehre zu definieren brauchen wir noch folgende

**Definition 1.1: Produktmenge**

Die Produktmenge zweier Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ ist die Menge aller geordneten Paare $(a|b)$, wobei $a \in \mathbb{A}$ und $b \in \mathbb{B}$ ist. Man schreibt

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a|b) |\, a \in \mathbb{A} \text{ und } b \in \mathbb{B}\}.$$

Damit lässt sich der Relationsbegriff auch rein mengentheoretisch definieren. Wir betrachten zuerst noch ein Beispiel zur Produktmenge.

**Beispiel 15.** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kurz $\mathbb{R}^2$, ist die Menge aller Punkte einer Ebene. Die Paare $(x \,|\, y)$ können als Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem veranschaulicht werden.

**Übung A.1.**
Beschreibe die Menge $\mathbb{R}^3$. Welche Form/Schreibweise hat ein Punkt in dieser Menge?

**Definition 1.2: Relation**

Eine *Relation* $R$ zwischen den Elementen der Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ ist eine Teilmenge der Produktmenge $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$.

**Bemerkung.** Die Darstellung der Relationen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem nennt man den Graphen oder Plot der Relation.

Für die folgenden Übungen erinnern wir uns an die Definition des Betrags:

**Definition 1.3: Betrag**

Für jede reelle Zahl $x$ ist der Betrag von $x$ definiert durch

$$|x| \;=\begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

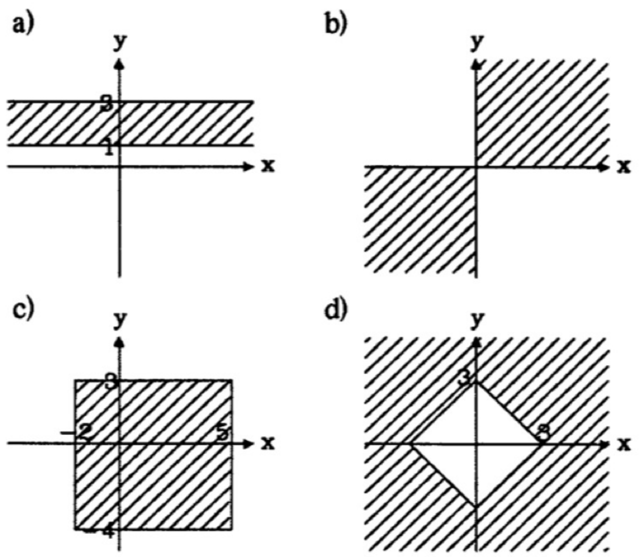
**Übung A.2.**
Beachte, dass $x$ und $y$ als reelle Zahlen zu betrachten sind, falls keine andere Vereinbarung vorliegt. Zeichne den Graphen der Relation

a) $R = \{\, (x\,|\,y) \mid y \leq x \,\}$

b) $R = \{\, (x\,|\,y) \mid x < 2 \text{ und } y < 4, x, y \in \mathbb{Z} \,\}$

c) $R = \{\, (x\,|\,y) \mid |x| \leq 5 \,\}$

**Übung A.3.**
Wie lautet die Relation, die durch den folgenden Graphen veranschaulicht wird?

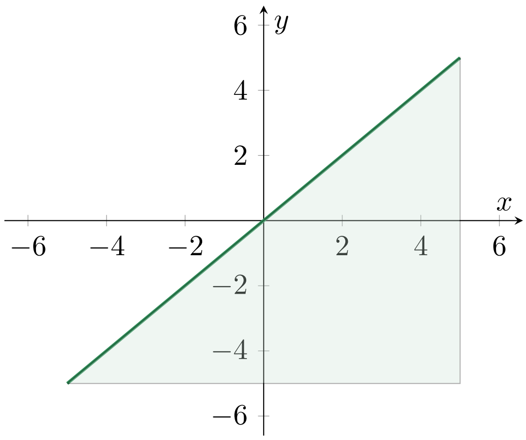


## A.1. Notizen zu den Übungen

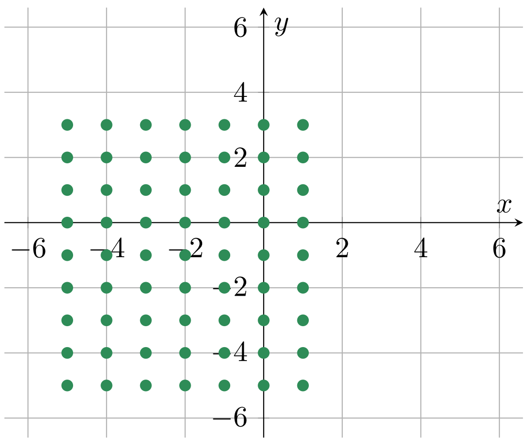
**Notizen zu Übung A.1.** Es handelt sich um die Menge aller Zahlentrippel $(x|y|z)$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$, also den 3D-Raum.

**Notizen zu Übung A.2.**

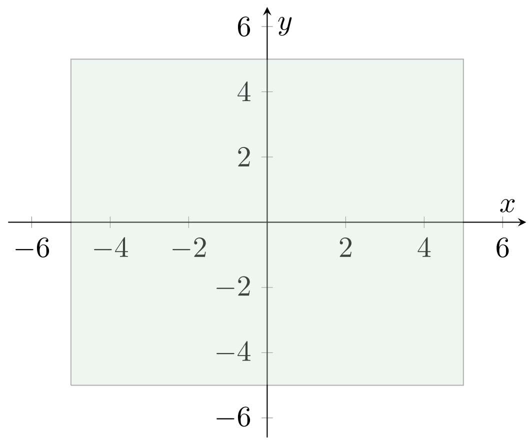
a) Das ist die Menge aller Punkte unterhalb der Winkelhalbierenden $y = x$.




b) Das sind alle ganzzahligen Koordinaten ab $x = 1$ abwärts und $y = 3$ abwärts.




c) Dies entspricht einem Quadrat.




**Notizen zu Übung A.3.** Noch einmal: Falls nicht anders erwähnt, ist die Grundmenge $\mathbb{R}$. Zudem nehme ich manchmal den Rand dazu, manchmal nicht.

a) $R = \{(x|y) \mid 1 \leq y \leq 3\}$

b) $R = \{(x|y) \mid x \cdot y \geq 0\}$

c) $R = \{(x|y) \mid -2 < x < 5 \text{ und } -4 < y < 3\}$

d) $R = \{(x|y) \mid |x+y| > 3 \text{ oder } |x-y| > 3\}$

## B. Abbildungen

In manchen Ländern ist der Preis einer Ware oft nicht eindeutig festgelegt. Dem einen macht das Handeln zwar Spass, dem andern wäre es aber lieber, wenn die Relation zwischen Ware und Preis einer eindeutigen Zuordnung entspricht. Ist eine Relation nämlich nicht eindeutig festgelegt, so können Missverständnisse auftreten.

Verlagshäuser und Buchhändler haben die ISBN (Internationale Standardbuchnummer) eingeführt, um Missverständnisse auszuschalten. Durch die ISBN ist jedem Buch $x$ genau eine Buchnummer $y$ zugeordnet. In der Mathematik spielen die Relationen, die sich auf die gesamte Ausgangsmenge beziehen und eine eindeutige Zuordnung schaffen, eine besonders wichtige Rolle.

**Definition 2.1: Abbildung**

Eine Abbildung $f$ von einer Ausgangsmenge $\mathbb{A}$ in eine Zielmenge $\mathbb{B}$ ist eine Relation, die jedem Element $x \in \mathbb{A}$ *genau ein* Element $y \in \mathbb{B}$ zuordnet. Man schreibt

$$f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$$

oder für Elemente

$$y = f(x).$$

Man nennt $y$ das Bild von $x$, $x$ das Urbild von $y$.

**Bemerkung.** Jede Abbildung ist eine Relation, aber nicht jede Relation eine Abbildung.

# C. Rechnerische Lösung von quadratischen Gleichungen

## C.1. Die reinquadratische Gleichung

**Definition 3.1: Reinquadratische Gleichung**

Eine reinquadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$x^2 - c = 0$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

**Satz 3.1: Lösung der reinquadratischen Gleichung**

Die reinquadratische Gleichung hat für $c < 0$ keine Lösung, für $c = 0$ die Lösung $x = 0$ und für $c > 0$ die Lösungen

$$x_1 = \sqrt{c} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{c}$$

*Beweis.* Einsetzübung.

## C.2. Die allgemeine quadratische Gleichung

**Definition 3.2: Quadratische Gleichung**

Eine Gleichung heisst *quadratisch*, wenn sie sich in der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

schreiben lässt, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist.

**Satz 3.2: Lösungsformel der quadratischen Gleichung**

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Anzahl der Lösungen hängt vom Term unter der Wurzel ab.

*Beweis.* **Übung C.1.**
Benutze quadratische Ergänzung.

**Definition 3.3: Diskriminante**

Der Term unter der Wurzel, $D = b^2 - 4ac$, heisst Diskriminante.

**Satz 3.3: Anzahl Lösungen einer quadratischen Gleichung**

Die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat

- zwei Lösungen, falls $b^2 - 4ac > 0$
- eine Lösung, falls $b^2 - 4ac = 0$
- keine Lösung, falls $b^2 - 4ac < 0$

*Beweis.* Nach Definition der Wurzel.

**Übung C.2.**
Gib je ein Beispiel einer reinquadratischen Gleichung die keine Lösung bzw. zwei Lösungen hat.

**Übung C.3.**
Bringe die Gleichung

$$7x^2 = -(33x - 36)$$

in die Form $ax^2 + bx + c = 0$, und bestimme die Koeffizienten $a$, $b$ und $c$.

**Übung C.4.**
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$7x^2 + 33x - 36 = 0$$

**Bemerkung.** Es ist oft von Vorteil, die Lösung ungerundet anzugeben.

**Bemerkung.** Eine gute Übung ist immer zur Kontrolle die Lösung in die ursprüngliche Gleichung einzusetzen.

**Übung C.5.**
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

**Übung C.6.**
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

**Übung C.7.**
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

**Übung C.8.**
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + 2ex - 3e^2 = 0$$

**Übung C.9.**
Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 + 2a - a^2 = 0$$

## C.3. Beziehungen zwischen Koeffizienten und Lösungen einer quadratischen Gleichung

**Satz 3.4: von Viëta**

Sind $x_1$ und $x_2$ Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

*Beweis.* **Übung C.10.**

**Satz 3.5: Linearfaktorzerlegung**

Sind $x_1$ und $x_2$ die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ so lässt sich diese stets in Linearfaktoren zerlegen:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

*Beweis.* Die Gleichung $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ hat offensichtlich die Lösungen $x_1$ und $x_2$. □

**Bemerkung.** Dieser Satz eignet sich zum Kreieren von quadratischen Gleichungen mit vorgegebener Lösung und zum Lösen von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen.

**Übung C.11.**
Löse mit Zerlegung in Linearfaktoren:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 + 9x + 18 = 0$

c) $18x^2 - 9x + 1 = 0$

d) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

**Übung C.12.**
Gib eine quadratische Gleichung an, die folgende Lösung hat:

a) $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

b) $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = -\pi$.

## C.4. Notizen zu den Übungen

**Notizen zu Übung C.1.** Sei $ax^2 + bx + x = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine quadratische Gleichung, also zusätzlich $a \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + x &= 0 && (\div a)\\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && (\text{ergänzen})\\
(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 && (+\tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{c}{a})\\
(x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} && (\sqrt{\ })\\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} && (-\tfrac{b}{2a})\\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} && (\text{TU})\\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} && (\text{TU})\\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} && (\text{TU})\\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

**Notizen zu Übung C.2.** $x^2 = -1$ hat keine und $x^2 = 1$ hat die Lösungen 1 und $-1$.
**Notizen zu Übung C.3.** Es folgt unmittelbar $7x^2 + 33x - 36 = 0$ und offensichtlich ist $a = 7$, $b = 33$ und $c = -36$.
**Notizen zu Übung C.4.** $x_{1,2} = \frac{-33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-33)}}{2 \cdot 7} = \frac{-33 \pm \sqrt{2013}}{12}$, $x_1 \approx 0.85$ und $x_2 \approx -5.56$
**Notizen zu Übung C.5.** Das ist der zweite Binom: $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
**Notizen zu Übung C.6.** $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6}$ hat keine Lösung, da die Diskriminante kleiner als 0 ist.
**Notizen zu Übung C.7.** Kann man faktorisieren, $(x-5)(x+3) = 0$, und daher die Lösungen direkt ablesen: $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$.
**Notizen zu Übung C.8.** Mit Faktorisieren oder $x_{1,2} = \frac{-2e \pm \sqrt{4e^2 + 12e^2}}{2} = \frac{-2e \pm \sqrt{16e^2}}{2} = \frac{-2e \pm 4e}{2}$, also $x_1 = e$ und $x_2 = -3e$
**Notizen zu Übung C.9.** $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4a^2 - 8a - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4a^2 - 8a + 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{a^2 - 2a + 1}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{(a-1)^2}}{2} = \frac{4 \pm 2(a-1)}{2} = 2 \pm (a-1)$ und endlich $x_1 = 1 + a$ bzw. $x_2 = 3 - a$.
**Notizen zu Übung C.10.** Es ist $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p}{2} \pm \frac{\sqrt{4(\frac{p^2}{4}) - 4q}}{2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$. Daraus folgt

$$x_1 + x_2 = \frac{-p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} + \left(\frac{-p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right) = -p$$

und

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right)\left(\frac{-p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}\right) = \frac{p^2}{4} - ((\frac{p}{2})^2 - q)) = q$$

**Notizen zu Übung C.11.**

a) $(x-3)(x-5) = 0$

b) $(x+3)(x+6) = 0$

c) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{18} = (x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{6}) = 0$

d) $(x-a)(x-b) = 0$

**Notizen zu Übung C.12.**

a) $(x-2)(x-3) = 0$

b) $(x - \frac{1}{2})(x + \pi) = 0$

# D. Funktionsverwandtschaften

## D.1. Einleitung

In diesem Abschnitt wollen wir uns Funktionen anschauen, welche insofern miteinander verwandt sind, als dass deren Graphen durch eine Translation, eine Streckung oder eine Drehung ineinander übergeführt werden können. Es geht darum, allgemeine Aussagen über die Ähnlichkeit ihrer Funktionsgleichungen machen zu können, wenn ihre Graphen kongruent sind oder durch elementare Abbildungen ineinander übergeführt werden können.

**Übung D.1.**

Zeichne die Graphen von $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-2)^2$ und $h(x) = (x+3)^2$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

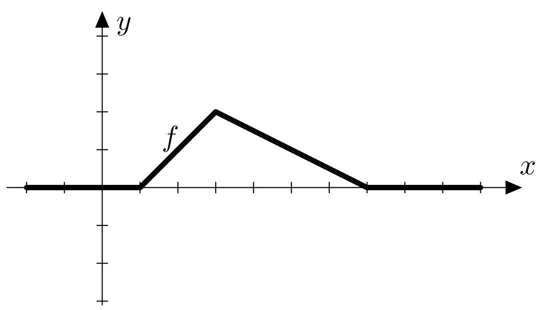
Zeichne die Graphen von $f(x) = \log(x)$, $g(x) = \log(x+1)$ und $h(x) = 1 + \log(x)$ in ein und das selbe Koordinatensystem.

Zeichne die Graphen von $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+1)^2 - 2$ und $h(x) = (x-2)^2 + 1$ in ein und das selbe Koordinatensystem.

Zeichne die Graphen von $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-1}$ und $h(x) = \frac{1}{2}2^x$ in ein und das selbe Koordinatensystem.

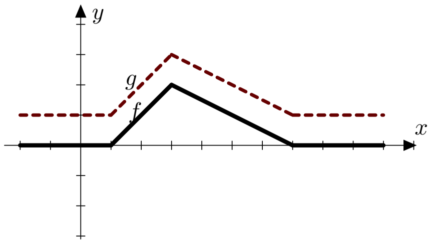
## D.2. Untersuchung der Verwandtschaften

**Beispiel 16.** Wir betrachten den Graphen einer beliebigen Funktion $y = f(x)$. Wie sieht der Graph der Funktion $g(x)$ aus, der aus dem Graphen von $f$ entsteht, indem man letzteren um 1 in $y$-Richtung verschiebt? Wie lautet die Funktionsgleichung von $g$?




### D.2.1. Verschiebung in y-Richtung

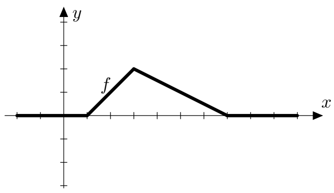
Wir verschieben den Graphen von $f$ um 1 in $y$-Richtung und erhalten folgendes Bild:




Wegen der Verschiebung um 1 in $y$-Richtung ist jeder Wert von $g(x)$ um 1 grösser als der entsprechende Wert von $f(x)$. Deshalb ist $g(x) = f(x) + 1$.
Allgemein kann man also sagen, dass der Graph von $f(x)+a$ aus dem Graphen von $f(x)$ durch eine Verschiebung parallel zur $y$-Achse um den Wert $a$ hervorgeht.

### D.2.2. Verschiebung in x-Richtung

Verschiebe den Graphen von $f$ um 1 in $x$-Richtung und zeichne ihn. Wie lautet die Funktionsgleichung $g(x)$ des neuen Graphen? Formuliere eine Verschiebung in $x$-Richtung um den Wert $a$ allgemein.




### D.2.3. Einschub

Für das Folgende ist es praktisch, den Begriff der affinen Abbildung einzuführen.

**Definition 4.1: Affinität**

Eine Abbildung (Funktion/Translation) heisst affin, wenn die Verbindungsgeraden Ausgangspunkt $P$ – Bildpunkt $P'$ alle parallel sind. Die Richtung dieser Parallelen heisst Affinitätsrichtung.

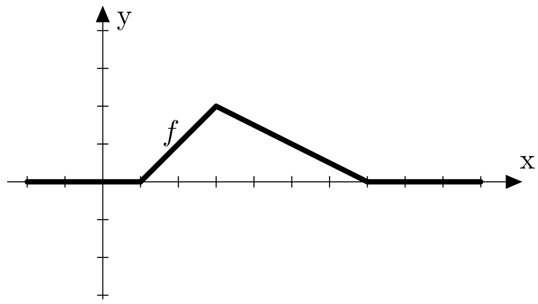
**Satz 4.1: Linearität der Affinität**

Der Abstand eines Bildpunktes von einer festen Geraden (Affinitätsachse) beträgt das $k$-fache des Abstandes des Ausgangspunktes von dieser Geraden, wobei $k \in \mathbb{R}$. $k$ heisst Affinitätsfaktor.

**Beispiel 17.** Betrachte den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ auf deinem TR. Anschliessend lässt du zusätzlich den Graphen von $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ von deinem TR zeichnen. Die Translation, welche den Graphen von $f$ in $g$ überführt ist eine affine Abbildung mit Affinitätsfaktor $k = \frac{1}{2}$ und hat als Affinitätsachse die $x$-Achse. Die Affinitätsrichtung ist parallel zur $y$-Achse.

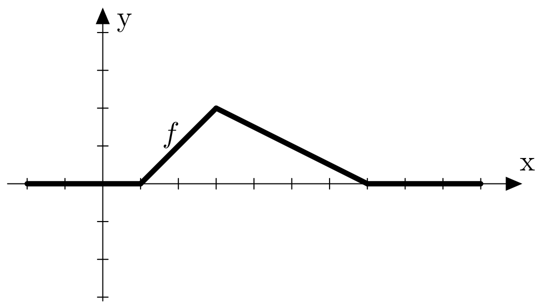
### D.2.4. Streckung in y-Richtung

Bilde den Graphen von $f$ affin in $y$-Richtung ab, wobei du als Affinitätsachse die $x$-Achse wählst und $k = 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung $g(x)$?



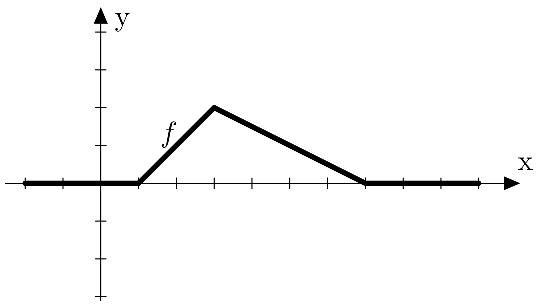

### D.2.5. Streckung in x-Richtung

Zeichne den Graphen von $g(x) = f(2x)$. Bestimme Affinitätsachse, Affinitätsrichtung und Affinitätsfaktor dieser Translation, die den Graphen von $f$ in denjenigen von $g$ überführt.



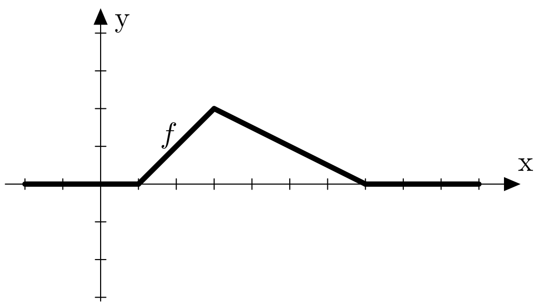

### D.2.6. Spiegelung an der x-Achse

Zeichne den Graphen von $g$, welcher durch Spiegelung des Graphen von $f$ an der $x$-Achse entsteht, und bestimme die Funktionsgleichung von $g$. Gib anschliessend an, um welche affine Abbildung es sich hierbei handelt.



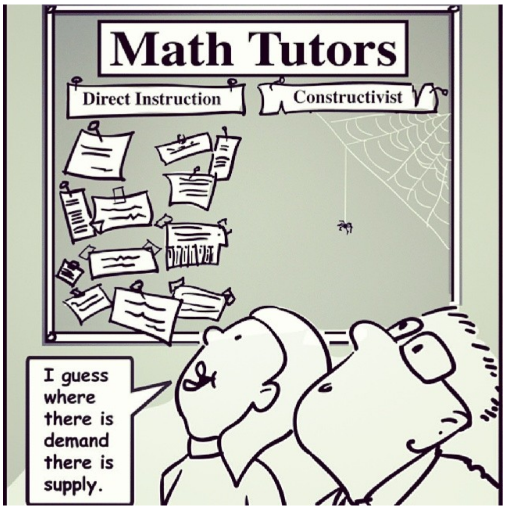

### D.2.7. Spiegelung an der y-Achse

Zeichne den Graphen von $g$, welcher durch Spiegelung des Graphen von $f$ an der $y$-Achse entsteht, und bestimme die Funktionsgleichung von $g$. Gib anschliessend an, um welche affine Abbildung es sich hierbei handelt.




## D.3. Zusammenfassung

| Der Graph von | geht aus dem Graphen von $f(x)$ hervor durch |
|---|---|
| $f(x) + a$ | eine Translation parallel zur $y$-Achse um $a$ |
| $f(x - a)$ | eine Translation parallel zur $x$-Achse um $a$ |
| $af(x)$ | eine affine Abbildung mit Affinitätsrichtung $y$-Achse, Affinitätsachse $x$-Achse und Affinitätsfaktor $a$ |
| $f(ax)$ | eine affine Abbildung mit Affinitätsrichtung $x$-Achse, Affinitätsachse $y$-Achse und Affinitätsfaktor $\frac{1}{a}$ |




## D.4. Ganzrationale Funktionen

In vorherigen Kapiteln haben wir die affinen und die quadratischen Funktionen behandelt. Sie sind Spezialfälle der ganzrationalen Funktionen $n$-ten Grades (Polynomfunktionen). Eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

heisst ganzrational vom Grade $n$, wenn $n$ eine natürliche Zahl und $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ rationale Zahlen und natürlich $a_0 \neq 0$ bedeuten. Für $n = 1$ hat man

$$f(x) = a_0x + a_1,$$

also eine affine Funktion, für $n = 2$ ergibt sich

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2,$$

also eine quadratische Funktion.
Die Zeichnung eines sauberen Graphen einer ganzrationalen Funktion grösser als 2. Grades erfordert Methoden der Differentialrechnung. Wir müssen uns hier deshalb mit einem Beispiel für $n = 4$ und einer Wertetabelle bescheiden.

**Beispiel 18.** Wir betrachten

$$f(x) = 3x^4 - 14x^3 + 54x - 10$$

anhand einer Wertetabelle:

**Übung D.2.**
Zeichne den Graphen der Funktion

a) $-x^3 + x^2$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 449 | 42 | $-47$ | $-10$ | 33 | 34 | 17 |

| $x$ | $-10$ | $-4$ | $-3$ | $-2.5$ | $-2.3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.75 | 2.5 | | | |
| $x$ | $-2.1$ | $-1.9$ | $-1.5$ | $0$ | $2$ |
| $f(x)$ | | | | | |

b) $8x^3 - 12x^2 + 2x + 1$.

**Übung D.3.**
Im Kapitel über trigonometrische Funktionen wird die Reihenentwicklung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

vorgestellt.

a) Betrachte die Güte der Näherung, wenn $x$ zwischen $-90$ und $90°$ gewählt wird. Berechne dazu beispielsweise $\sin(\frac{\pi}{3})$ bzw die entsprechende Reihe bis zum 3-ten Summanden.

b) Betrachte graphisch die Güte der Näherung, indem du zum Graphen der Sinusfunktion sukzessive die Entwicklungen $x$, $x - \frac{x^3}{3!}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, etc. skizzierst.

## D.5. Gebrochenrationale Funktionen

**Definition 4.2: Gebrochenrationale Funktionen**

Eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)},$$

mit $Z(x)$ und $N(x) \neq 0$ ganzrationalen Funktionen, heisst *gebrochenrational.*

Auch hier wollen wir uns vorerst nur mit einigen einfachen Beispielen bescheiden. Betrachten wir zu

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+4}, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\},$$

charakteristische Werte
Die Gerade $x = -2$ ist Polstelle, die Gerade $y = 1.5$ eine horizontale Asymptote. Die Funktion aus Übung **??** gehört zu den einfachsten gebrochenrationalen Funktionen von der Gestalt

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{mit } ad \neq bc.$$

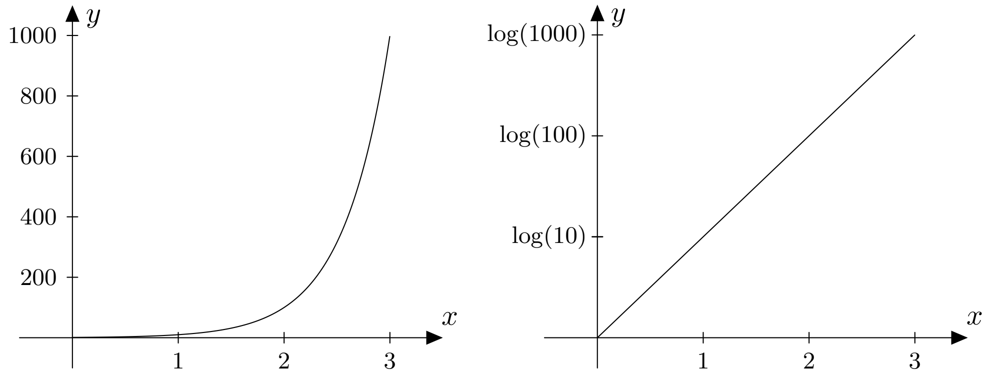



Abbildung 25: Logarithmische Skala

Der Graph ist eine Hyperbel. Sie ist punktsymmetrisch bezüglich $(-\frac{d}{c}|\frac{a}{c})$ und hat als Asymptote bzw. Polstelle die Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{a}{c}$ und $x = -\frac{d}{c}$.

**Übung D.4.**

Zeichne den Graphen der Funktionen

a) $\frac{0.5x-2}{x-2}$

b) $\frac{4x}{x-1}$

c) $\frac{2-x}{x-4}$

**Übung D.5.**

Berechne die Parameter $a$ und $b$ so, dass der Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{a}{b+x}$$

durch die Punkte $(2\,|\,1)$ und $(-4\,|\,-2)$ geht.

**Übung D.6.**

Diskutiere (Asymptoten, Polstellen) den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}.$$

## D.6. Logarithmische Skala

Manchmal verwendet man bei der Darstellung von Funktionen die logarithmische Skala. Dabei bedeutet eine Einheit eine Zehnerpotenz. Als Illustration soll die Funktion $f(x) = 10^x$ einerseits im üblichen Koordinatensystem und andererseits im Koordinatensystem mit logarithmischer y-Achse dienen. Die logarithmisch eingeteilte Achse beginnt bei 1.

**Notizen zu Übung D.1.** Man konsultiere `geogebra.org` und erinnere sich an die Scheitelform und die trigonometrischen Funktionen.
**Notizen zu Übung D.2.** Man rechnet ein paar Punkte aus, skizziert und checkt mit `geogebra.org`.
**Notizen zu Übung D.3.**

a) $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{(\frac{\pi}{3})^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{3})^5}{5!} \approx 0.866$

b) Benutze vbbgeogebralink.

**Notizen zu Übung D.4.** Setze gängige Werte ein, skizziere und kontrolliere mit `geogebra.org`.
**Notizen zu Übung D.5.** $f(2) = 1 = \frac{a}{b+1}$ und $f(-4) = -2 = \frac{a}{b-4}$. Es folgt $a = b + 1$ und weiter $-2 = \frac{b+1}{b-4}$, $8 - 2b = b + 1 \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$ und damit $a = \frac{10}{3}$.
**Notizen zu Übung D.6.** Die Asymptote ist die $x$-Achse, da der Grad im Nenner 2 ist und im Zähler 1. Die Polstellen sind bei den Nullstellen des Nenners, also bei $x_{1,2} = \pm 2$.

# Abbildungsverzeichnis