Folgen & Reihen

Look up the Number!

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Basics

Das Bild „You know my name (Look up the number)“ ist vom Thuner Künstler Eugen Jost. Suche Gesetzmässigkeiten in den Zahlenfolgen. Beschreibe gefundene Gesetzmässigkeiten in Worten und mathematisch. Wie lautet die hundertste Zahl der jeweiligen Folge? Wie lautet die k-te Zahl der Folge?

Abbildung 1: You Know my Name

Übung 1 (Papier falten)**.** Man falte einen Bogen Papier in der Mitte und lege die beiden Hälften aufeinander. Danach setze man dieses Prozedere mit dem gefalteten Papier fort.

(a) Wie oft kann man das Papier höchstens falten?

(b) Man denkt sich nach jeder Faltung das Papier längs der Faltachse aufgeschnitten und die beiden Hälften zu einem Turm aufgeschichtet. Wie hoch ist der Turm nach $2, 3, 4, 5$ Faltungen?

(c) Finde den Zusammenhang zwischen der Turmhöhe h_k und der Anzahl Faltungen $k \in \mathbb{N}$.

(d) Wie hoch ist der Turm nach $15, 20, 42$ Faltungen? Schätze zuerst.

Bemerkung. Man ahnt aus obiger Übung den Zusammenhang zwischen dieser „Art“ von Folge und Exponentialfunktion. Hier ist der Unterschied zu einer Exponentialfunktion bloss, dass man nur an diskreten Werten — bzw. ihren Funktionswerten — interessiert ist.

Eine Zahlenfolge ist eine Folge, die nur aus Zahlen besteht. Die einzelnen Zahlen der Folge nennt man Glieder. Es ist naheliegend, jedem Glied einer bestimmten Folge seine Positionsnummer zuzuordnen. Um Unklarheiten aus dem Weg zu räumen und den Begriff der Folge global zu erfassen, definieren wir unmissverständlich, was wir unter einer Folge verstehen wollen.

Definition 1.1: Folge

Eine **Folge** ist eine Funktion
$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W},$$
deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen, oder eine Teilmenge davon, ist.

Besteht die Folge aus lauter reellen Zahlen, so spricht man genauer von einer Zahlenfolge.

Definition 1.2: Zahlenfolge

Eine **Zahlenfolge** ist eine Funktion

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$.

Bemerkung. Häufig wird die Bemerkung $k \in \mathbb{N}$ weggelassen, weil sie aus dem Kontext hervorgeht. Betrachtet man Folgen, die nicht unendlich lang sind, dann sollte man die Definitionsmenge explizite angeben.

Definition 1.3: Glied der Folge

Die reellen Zahlen

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{k-1} \quad a_k \quad a_{k+1} \quad \dots$$

einer Zahlenfolge heissen Glieder der Folge. a_k, die kurze Schreibweise von $f(k)$, heisst k-tes **Glied** der Folge.

Bemerkung. Der Index k kann also als Position in der jeweiligen Folge aufgefasst werden. a_k hingegen ist der Wert, der an Position k steht.

Beispiele. Zur Illustration einige Beispiele:

- $a_k = 2k$ ist die Folge der geraden Zahlen

  $$2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots,$$

  denn es ist $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, etc.
- $a_k = 2k - 1$

  $$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \dots$$
- $a_k = k^2$

  $$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad \dots$$

Übung 2 (Schreibweise)**.** Notiere die ersten fünf Glieder der Folgen aus obigem Beispiel und beschreibe sie in Worten.

Die Definition einer Folge lässt natürlich auch solche zu, die keinen Gesetzmässigkeiten folgen und zu denen man daher jedes Glied explizite angeben muss. Wir werden uns hier aber hauptsächlich mit speziell einfach zu beschreibenden Folgen befassen.

Übung 3 (Einsetzübung)**.** Berechne die ersten sechs, das hundertste und das 101-ste Glied der Folge:

(a) $a_k = 3k - 5$ (c) $c_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

(b) $b_k = \frac{k}{k+1}$ (d) $d_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$

Übung 4 (Muster erkennen)**.** Ermittle das k-te Glied der Folge:

(a) $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ (c) $-1, 4, -9, 16, -25, \ldots$

(b) $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ (d) $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$

Bemerkung. Bei vielen Zahlenfolgen ist es schwierig, die Vorschrift zu finden, mit der man das k-te Glied direkt berechnen kann. Jedoch kann man oft ein Bildungsgesetz erkennen, das für jede natürliche Zahl k die Berechnung von a_k aus a_{k-1} ermöglicht, d.h. die Berechnung des Wertes an Position k anhand des Wertes der vorherigen Position.

1.2 Explizite und rekursive Beschreibungen von Folgen

Explizite und rekursive Definitionen von Folgen sind zwei Möglichkeiten, Folgen zu beschreiben.
Bei der **expliziten Definition** einer Folge erhält man ein beliebiges Glied sofort aus der Funktionsvorschrift, indem man direkt einsetzt. Beispielsweise ist $a_k = 2k$ eine explizite Definition der Folge der geraden Zahlen.

Beispiel 1. Eine explizite Definition von $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ ist

$$a_k = 2^k - 1.$$

Bei der **rekursiven Definition** einer Folge ergibt sich das k-te Glied aus den vorherigen Gliedern mit Hilfe einer sogenannten Rekursionsvorschrift. Bei dieser Definition müssen dann auch so viele Glieder explizite vorgegeben werden, wie die Rekursionsvorschrift „zum Starten“ benötigt.

Beispiel 2. Eine Rekursionsformel für $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ ist

$$a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1, \quad a_1 = 1.$$

Beispiel 3. Die **Fibonacci-Folge**

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad \ldots$$

kann durch

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \quad \text{mit } a_1 = 1 \text{ und } a_2 = 1$$

rekursiv definiert werden.

Bemerkung. Die Fibonacci-Folge ist äusserst berühmt. Benannt ist sie nach Leonardo Fibonacci, der damit im Jahr 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb. Die Folge war aber schon in der Antike sowohl den Griechen als auch den Indern bekannt. Sie wird heute oft von Künstlern benutzt und in Film, Musik, Bildern u.ä. verkörpert.

Bemerkung. Für viele Zahlenfolgen können sowohl rekursive als auch explizite Definitionen gefunden werden. Zum Beispiel ist

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

eine explizite Definition der Fibonacci-Folge, die von de Moivre 1718 hergeleitet wurde.. Teste sie!

Übung 5 (Muster erkennen 2)**.** Finde ein Bildungsgesetzt für die Folge; falls möglich explizit. Beschreibe notfalls ein Bildungsverfahren.

(a) $1, 8, 27, 64, 125, \ldots$

(b) $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

(c) $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

(d) $0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$

Übung 6 (rekursiv formulieren)**.** Gib eine mögliche rekursive Definition für die Folge

(a) $-7, -3, 1, 5, 9, \ldots$

(b) $10, 12, 15, 19, 24, 30, \ldots$

(c) $c_k = k \cdot 2^k$

(d) die Innenwinkelsumme eines n-Ecks w_n

(e) die maximale Anzahl der Schnittpunkt von n Geraden s_n

1.3 Die Partialsumme einer Folge

Häufig ist an einer Zahlenfolge interessant, wie gross nun die Summe ihrer Glieder ist. Hat man also eine Zahlenfolge

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots$$

so lautet die zugehörige Summe bis zum n-ten Glied

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Deshalb definiert man:

Definition 1.4: Partialsumme

Die k-te **Partialsumme** der ersten k oder aller Glieder einer Zahlenfolge ist die Summe
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$$

Übung 7 (Summen bilden)**.** Berechne die erste, dritte, 100., n-te Partialsumme der Folge
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$
Tipp: Verwende Kombinatorik oder den Trick von C.F. Gauss.

Bemerkung. Man schreibt eine Summe — oder Reihe — wie folgt etwas kürzer:
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
Dabei schreibt man also ein grosses Σ (Sigma), um anzudeuten, dass es sich um eine Summe handelt. Unterhalb dieses Sigmas wird notiert, bei welchem natürlichen Wert die laufende Variable (hier k) startet. Dieses k wird solange um 1 erhöht, bis es die obere Grenze n erreicht hat. Zwischen den Erhöhungen wird immer ein $+$-Zeichen gesetzt.

Beispiele.
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$$
$$\sum_{k=100}^{999} k = 100 + 101 + 102 + \cdots + 999$$

Bemerkung. Man kann aus einer Zahlenfolge eine neue zusammenstellen, welche einfach aus den verschiedenen Teilsummen der ursprünglichen Zahlenfolge besteht. Wenn man beispielsweise die Zahlenfolge
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots$$
anschaut, dann ist ihre erste Teilsumme $s_1 = 1$, ihre zweite $s_2 = 3$, die dritte $s_3 = 6$, die vierte $s_4 = 10$, etc. Man kann also eine Folge der Teilsummen
$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \ldots$$
bestehend aus den einzelnen Teilsummen
$$s_k = \sum_{i=1}^{k} i$$
bilden.

Übung 8 (Folgeprodukt)**.** Stelle folgenden Ausdruck mit einem einzigen Term dar

$$s_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

Berechne dazu erst einmal die Summe der ersten paar Glieder, also $s_1, s_2, s_3, \ldots,$ explizite, und versuche dann eine Formel für obigen Ausdruck zu erraten, die den Wert von s_k explizite angibt.

Übung 9 (Zweierpotenzen-Kehrwert)**.** Wie vorhergehende Übung, aber mit dem Ausdruck

$$s_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + a_k$$

Finde zuerst eine Darstellung für a_k.

Im Folgenden werden wir uns fast ausschliesslich auf zwei Typen von Zahlenfolgen beschränken. Nämlich einerseits auf Folgen, bei denen der „Abstand" zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist (verwandt mit affinen Funktionen), und andererseits auf Folgen, bei denen der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist (verwandt mit Exponentialfuntionen).

2 Arithmetische Folgen & Reihen

Definition 2.1: Arithmetische Folge

Eine **arithmetische Folge** ist eine Zahlenfolge, deren Glieder der Rekursionsformel

$$a_{k+1} = a_k + d \quad (k \in \mathbb{N}, d = \text{konstant})$$

genügen.

Bemerkung. Der Name arithmetische Folge ist dadurch motiviert, dass jedes Glied — ausser das erste und gegebenenfalls das letzte — gleich dem arithmetischen Mittel der Nachbarglieder ist.

Übung 10 (Name „arithmetisch")**.** Zeige die Gültigkeit der obigen Bemerkung.

Beispiel 4. Die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen ist arithmetisch mit $d = 2$.

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \ldots$$

Satz 2.1: AF Formeln

Für eine arithmetische Folge gelten

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \tag{1}$$
$$s_k = k \cdot \frac{a_1 + a_k}{2} \tag{2}$$

Beweis. (??) ist eine „Pföstchen-†berlegung“. Für (??) nimmt man den Trick von Gauss. □

Übung 11 (Dreierzahlen)**.** Berechne die Summe aller Dreierzahlen von 81 bis 1020.

Übung 12 (freier Fall)**.** Ein frei fallender Körper legt in der ersten Sekunde 5 m und in jeder folgenden Sekunde 10 m mehr als in der jeweils vorangegangenen Sekunde zurück.

(a) Welche Strecke legt er in der 13-ten Sekunde zurück?

(b) Welche Strecke fällt er in 13 Sekunden?

(c) Wie viele Sekunden braucht er für 1805 m?

3 Geometrische Folgen & Reihen

Definition 3.1: geometrische Folge

Eine **geometrische Folge** ist eine Zahlenfolge, deren Glieder der Rekursionsformel

$$a_{k+1} = a_k \cdot q \quad (k \in \mathbb{N}, q = \text{konstant})$$

genügen.

Bemerkung. Der Name geometrische Folge ist dadurch motiviert, dass jedes Glied — ausser das erste und gegebenenfalls das letzte — gleich dem geometrischen Mittel der Beträge Nachbarglieder ist.

Übung 13 (Name geometrisch)**.** Zeige die Gültigkeit der obigen Bemerkung.

Beispiel 5. Die Folge der Zweierpotenzen mit natürlichen Exponenten ist geometrisch mit $q = 2$.

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad \ldots$$

Satz 3.1: GF Formeln

Für eine geometrische Folge gelten

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \tag{3}$$
$$s_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} \tag{4}$$

Beweis. (**??**) ist wiederum eine „Pföstchen-Überlegung". Wir zeigen (**??**) und nehmen dazu an, dass die Folge endlich sei.

$$\begin{aligned} s_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k \\ &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{k-1} \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit q folgt

$$s_k \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^k$$

Nun subtrahieren wir s_k von $s_k \cdot q$ und erhalten

$$s_k \cdot q - s_k = s_k(q-1) = a_1 \cdot q^k - a_1 = a_1(q^k - 1)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$s_k = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1}$$

und damit die Behauptung. □

Übung 14 (Zweierpotenzen)**.** Berechne

$$-2 + 4 - 8 + 16 - \cdots + 4096.$$

Übung 15 (Zwischen 1 und 2)**.** Eine geometrische Folge besteht aus 10 positiven Gliedern, beginnt mit 1 und endet mit 2. Bestimme das Bildungsgesetz dieser Folge und berechne die zugehörige Partialsumme aller Glieder.

4 Übungen zu arithmetischen und geometrischen Folgen

Übung 16 (Rohr-Pyramide)**.** Es sind 60 Rohre so zu stapeln, dass jede Schicht auf Lücke mit der darunter liegenden Schicht liegt; die oberste Schicht soll aus vier Rohren bestehen. Wie viele Rohre müssen in die unterste Schicht gelegt werden, und wie viele Schichten hat der Stapel? Wie hoch ist er, wenn die Rohre einen Durchmesser von 20 cm haben?

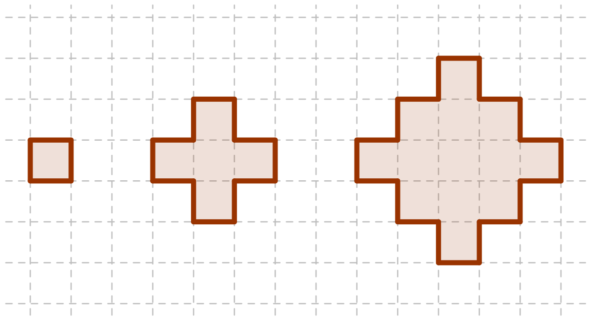


Abbildung 2: Quadrate

Übung 17 (Kalium)**.** Für manche medizinische Diagnosen wird das radioaktive Kaliumisotop ^{42}K benutzt. Es verliert pro Stunde 5.42% seiner Intensität. Welchen Prozentsatz verliert es nach drei Stunden?

Übung 18 (AF und GF)**.** a, b, c bilden in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge mit der Summe 3; in der Reihenfolge b, c, a bilden sie eine geometrische Folge. Berechne die drei Zahlen, wenn $a \neq b \neq c$.

Übung 19 (Reiskörner)**.** In einer Erzählung des Persers Ibn Khallikan aus dem 13.Jahrhundert lesen wir: „In jener Zeit, als der indische Herrscher Shihram seine Untertanen unmässig tyrannisierte, erfand der Weise Sissa Ibn Dahir zur Belehrung des Königs das Schachspiel, um ihm nachzuweisen, wie wichtig für einen Herrscher seine Untertanen sind. Als Dank für die Erleuchtung bot der König Sissa seine Schätze an und stellte ihm einen Wunsch frei. Der Weise wünschte sich soviel Weizen, wie sich auf dem Schachbrett folgendermassen angeordnet ergibt: Auf das erste Feld des Schachbrettes 1 Reiskorn, auf das zweite Feld 2 Reiskörner, auf das dritte Feld 4 Körner etc., auf jedem Feld doppelt so viele wie auf dem vorhergehenden.“

(a) Wie viele Reiskörner sind dies insgesamt?

(b) Wie lange wäre ein Zug, der diese Reismenge transportieren müsste, wenn ein Güterwagen von 10 m Länge 10 Tonnen Reis laden kann und 18 Körner 1 g ergeben?

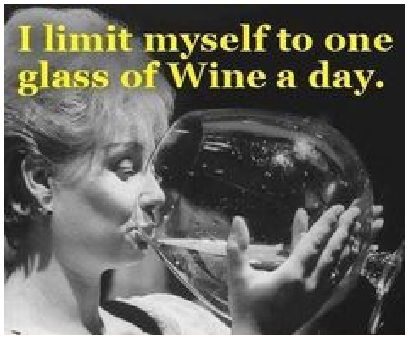
(c) Welche Höhe hätte ein Reisteppich, wenn man die Schweiz damit bedecken würde? (Nimm z.B. ein zylindrisches Reiskorn mit Durchmesser 2 mm und Höhe 1 cm.)

Übung 20 (Quadrate)**.** Die Figuren sind aus Quadraten zusammengesetzt wie in Abbildung **??** auf Seite **??**. Stelle eine Formel auf für die Anzahl $A(k)$ der Quadrate, die in der n-ten Figur vorhanden sind.

Übung 21. In der Randnotiz findet man ein Video zur Matura Mathematik Aufgabe Folgen und Reihen von 2013. Darin seht ihr die Aufgabe und eine mögliche Lösung kommentiert.

5 Grenzwerte

5.1 Konvergenz und bestimmte Divergenz



Bisher haben wir nur die Anfangsglieder einer Folge betrachtet. Wir wenden uns in diesem Kapitel den Gliedern mit hohen Nummern zu und werden versuchen, Aussagen über ihr Verhalten zu machen, wenn n gegen Unendlich strebt (schreibe: $n \to \infty$). Wir schreiben für eine Zahlenfolge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, k \mapsto f(k)$ kurz $< a_k >$.

Übung 22 (konvergent & bestimmt divergent, oder sonst was)**.** Berechne für $k = 10, 11, 10^3, 10^3 + 1, 10^6, 10^6 + 1$ die Glieder der Zahlenfolge mit

(a) $a_k = 5 + \frac{1}{k}$

(b) $b_k = (-1)^k \cdot \frac{3000}{k}$

(c) $c_k = k^3$

(d) $d_k = 1 + (-1)^k$

Wir können also das Verhalten von Folgen für grosse $k \in \mathbb{N}$ in drei wesentliche Fälle aufteilen.

A Die Glieder der Folge streben für $k \to \infty$ genau einer reellen Zahl, einem Grenzwert, zu.

B Die Glieder der Folge werden für $k \to \infty$ betragsmässig grösser als jede noch so grosse Zahl.

C Die Glieder der Folge verhalten sich nicht so wie in den beiden andern Fällen.

Im Fall A nennt man die Folge konvergent, im Fall B bestimmt divergent.

5.2 Der Konvergenzbegriff

Um den Begriff der Konvergenz exakter bereitzustellen betrachten wir ein Beispiel. Für diesen, etwas länger dauernden, Prozess brauchen wir vorerst

Definition 5.1: Umgebung

Sei $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl und $g \in \mathbb{R}$ beliebig. Das offene Intervall $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ heisst **ε-Umgebung** von g.

Beispiel 6. Wir betrachten die Zahlenfolge

$$a_k = 2 + (-1)^k \cdot \frac{4}{k}$$

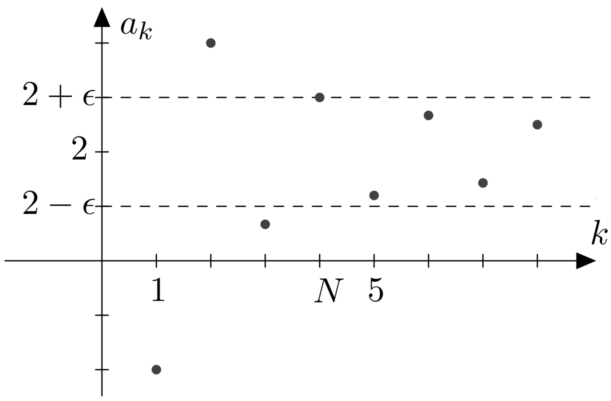


Abbildung 3: Veranschaulichung der ε-Umgebung

und berechnen die ersten sechs Glieder der Folge. Dazu zeichnen wir die ε-Umgebung 1 um den Grenzwert g, d.h. $g = 2$ und $\varepsilon = 1$.
Je grösser die Nummern der Glieder gewählt werden, desto näher sind diese beim Wert 2. In diesem Beispiel sieht man, dass alle Glieder ab der Nummer $N = 4$ in unserer gewählten Umgebung liegen.

$$|a_k - 2| < 1 \quad \text{für } k > 4.$$

Wählt man statt $\varepsilon = 1$ nun ein kleineres ε, so kann man bei dieser Folge wieder eine bestimmte Nummer N finden, ab welcher a_k mit $k > N$ in dieser neuen ε-Umgebung liegen. Weil also dieses N von der Grösse der Umgebung abhängt, schreibt man oft deutlicher $N(\varepsilon)$ und nennt diese Nummer **Stichzahl**.

Übung 23 (Stichzahl)**.** Berechne zu obiger Folge die Stichzahl $N(\frac{1}{100})$ für den Grenzwert $g = 2$, den wir ja zu kennen glauben.

Damit ist $N(0.01) = 400$. Vom 401. Glied an liegen alle Glieder der Folge in der $\frac{1}{100}$-Umgebung von 2. Entsprechend gilt für alle Glieder mit den Nummern $k > 4000000$: $|a_k - 2| < 0.000001$. Durch passende Wahl einer Gliednummer N kann man bei dieser Folge immer erreichen, dass von dieser Nummer an alle Betragsdifferenzen $|a_k - 2|$ kleiner als jede noch so klein gewählte Zahl ε ausfallen. Man sagt dann, dass die Folge $< a_k >$ konvergiert und den Grenzwert $g = 2$ hat.

Definition 5.2: Konvergenz

Eine Folge $< a_k >$ heisst **konvergent mit Grenzwert** g, wenn zu jeder noch so kleinen ε-Umgebung von g eine Nummer $N(\varepsilon)$ so existiert, dass alle Glieder a_k mit $k > N(\varepsilon)$ in dieser Umgebung liegen. Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \text{ so, dass } |a_k - g| < \varepsilon \quad \forall k > N(\varepsilon)$$

Bemerkung. Ausschlaggebend für die Konvergenz einer Folge ist die Existenz von N; völlig belanglos ist die Grösse.

Bemerkung. Konvergiert die Folge $< a_k >$ gegen den Grenzwert g (Fall A), so schreibt man dafür

$$\lim_{k\to\infty} a_k = g$$

Für die bestimmt divergenten Folgen, deren Glieder gegen ∞ oder gegen $-\infty$ streben (Fall B), benutzt man die gleiche Symbolik und schreibt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = -\infty$$

Das Symbol ∞ stammt von John Wallis (1616-1703), der Begriff „limes“ (lat. Grenze) von Isaak Newton (1643-1716) und die Bezeichnung „Konvergenz“ von James Gregory (1638-1675).

Übung 24 (Umgebung)**.** Untersuche die Folge mit

(a) $a_k = \frac{5}{k+1}$ (c) $x_k = k^2 - 3$

(b) $b_k = \frac{7k+8}{2k-3}$ (d) $u_k = \frac{3-2k^2}{k^2}$

auf Konvergenz. Berechne, falls die Folge konvergent ist, die Nummern $N(10^{-3})$ und $N(\varepsilon)$ für ein beliebiges ε. Veranschauliche dir mit einer Figur den Sachverhalt.

5.3 Ausblick

Man kann die Konvergenz einer Folge auch nachweisen, ohne den Grenzwert zu kennen. Das von Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) stammende Konvergenzkriterium besagt nämlich, dass eine Folge konvergiert, wenn der Unterschied beliebiger Folgenglieder mit genügend grosser Nummer kleiner als jede vorgegebene positive reelle Zahl ist.

Definition 5.3: monoton

Eine Folge $< a_k >$ heisst **monoton wachsend**, wenn $a_{k+1} \geq a_k$ resp. **monoton fallend**, wenn $a_{k+1} \leq a_k$ für alle k ist.

Definition 5.4: beschränkt

Eine Folge $< a_k >$ heisst **beschränkt**, wenn es eine positive Zahl M mit $|a_k| < M$ für alle k gibt.

6 Reihen

Reihen spielen nicht nur in der reinen Mathematik eine wichtige Rolle, insbesondere in der Physik und der Technik sind sie unentbehrlich; deshalb der Titel *Folgen und Reihen*. Mit Reihen kann man beispielsweise die Kreiszahl π und die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen näherungsweise berechnen. Unter einer **Reihe** verstehen wir die „unendliche" Summe einer Folge.

Übung 25 (Näherungen)**.** Es gelten die folgenden Näherungsformeln:

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 \quad |x| < 1$$

Berechne damit π, $\cos(\frac{\pi}{3})$ und $\frac{1}{1+0.13}$. Um wie viel Prozent weicht die Näherung vom tatsächlichen Wert ab?

Je mehr Summanden berücksichtigt werden, desto genauer werden die Näherungswerte. Die Herleitungen der Näherungsformeln für π und $\cos(x)$ sind schwierig und gehören nicht zum Programm der nicht-PAM Maturitätstypen. Deshalb verzichten wir hier im Grundlagenfach auf sie. Das dritte Beispiel jedoch wird in einer späteren Aufgabe begründet.
Der Mönch Guido Grandi, ein Mathematiker der Universität Pisa, kam 1703 in einer seiner Schriften zu dem Ergebnis:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}.$$

Obwohl er immer zwei aufeinanderfolgende Summanden zusammenfasste, zog er den Schluss:

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Dies war für ihn ein Beweis dafür, dass Gott die Welt aus dem Nichts hat erschaffen können. Das Universalgenie Leibniz stimmte ihm 1713 mit der folgenden †berlegung zwar nicht in der Interpretation, aber in der Sache zu: Bricht man die Summation nach einer geraden Anzahl von Summanden ab, so erhält man als Summe 0, bricht man sie nach einer ungeraden Anzahl ab, so erhält man als Summe 1. Nun gibt es aber unendlich viele Summanden, und da wir dem Unendlichen weder den Charakter einer geraden noch einer ungeraden Zahl zuschreiben können, kann die Summe weder den Wert 1 noch den Wert 0 haben. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt nun, dass man, wenn zwei Werte für eine Grösse gleichwahrscheinlich sind, ihr arithmetisches Mittel als den wahren Wert nehmen muss. Daher muss man der Summe, wenn man konsequent sein will, den Wert

$$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

annehmen. Erst viel später erkannte man, dass es sich hier um ein typisches Scheinproblem handelt. Man muss erst definieren, was man unter der Summe von unendlich vielen Summanden versteht, denn das Wort *Summe* ist ja bis anhin nur für endlich viele Summanden erklärt.

Definition 6.1: Reihe

Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine beliebige reelle Zahlenfolge. Die formal gebildete Summe mit unendlich vielen Summanden

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

heisst eine unendliche Summe oder kurz **Reihe**.

Mit den Folgengliedern bildet man eine neue Folge, die Folge der Partialsummen, sie ist rekursiv definiert durch:

$$s_1 = a_1, s_n = s_{n-1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

Erst durch diese Definition wird die Addition von unendlich vielen Summanden sinnvoll, denn die Glieder der Folge der Partialsummen können nun einem bestimmten Wert zustreben oder nicht; entsprechend nennt man die unendliche Reihe konvergent oder bestimmt divergent.

Beispiele.

- $a_1 = 0.9, a_2 = 0.09, a_3 = 0.009, \ldots$, also $s_1 = 0.9, s_2 = 0.99, s_3 = 0.999, \ldots$. Die Folgenglieder s_n streben dem Wert $s = 1$ zu; die entsprechende unendliche Reihe ist konvergent.

- $a_1 = 5, a_2 = 6, a_3 = 7, a_4 = 8, \ldots$, also $s_1 = 5, s_2 = 11, s_3 = 18, s_4 = 26, \ldots$. Die Folgenglieder s_n streben keinem bestimmten Wert zu; die entsprechende Reihe ist bestimmt divergent.

Bei einer konvergenten Reihe schreibt man $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots = \lim s_n = s$ und bezeichnet den Grenzwert s als die Summe der unendlichen Reihe.

Übung 26 (Huygens-Problem)**.** Bilde bei der Zahlenfolge die Folge der Partialsummen und entscheide dann, ob die zur gegebenen Folge zugehörige unendliche Reihe konvergiert. Berechne gegebenenfalls die Summe s dieser unendlichen Reihe und die Nummer $N(\varepsilon)$, von der an für $\varepsilon = 10^{-3}$ $|s_k - s| < \varepsilon$ wird.

(a)

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{k(k+1)}, \ldots.$$

Als Leibniz bei seinem ersten Besuch in Paris mit Huygens zusammentraf, wurde ihm diese Aufgabe vorgelegt. Er konnte dieses Problem lösen, obwohl er sich bis zu diesem Zeitpunkt kaum mit Mathematik beschäftigt hatte.

(b)

$$1, -2, 4, -8, 16, \ldots.$$

Betrachte zudem die beiden Anordnungen $1+(-2+4)+(-8+16)+(-32+64)+\ldots$ und $(1-2)+(4-8)+(16-32)+(64-128)+\ldots$. Der norwegische Mathematiker Nils Henrik Abel schrieb 1828 dazu:

> Die divergenten Reihen sind eine Erfindung des Teufels.

Satz 6.1: Satz über die Nullfolge

Wenn eine unendliche Reihe $< a_k >$ konvergiert, dann ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Beweis. Es gilt $a_k = s_k - s_{k-1}$. Betrachte $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1})$. □

Die Kontraposition ergibt den

Satz 6.2: Satz zur bestimmten Divergenz

Ist $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, so ist die Reihe zur Folge $< a_k >$ bestimmt divergent.

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz **??** gilt *nicht*: Aus $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ folgt nicht die Konvergenz der entsprechenden Reihe.

Die harmonische Reihe divergiert aufreizend langsam. s_{100} ist nur wenig grösser als 5 und erst S_{12367} ist grösser als 10. Streicht man aus der harmonischen Reihe sämtliche Summanden, deren Nenner — im Dezimalsystem geschrieben — die Ziffer 9 enthalten, so konvergiert merkwürdigerweise die übrigbleibende Teilreihe. Erstaunlich ist ebenfalls, dass die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

für $p > 1$ konvergiert und für $p \leq 1$ divergiert bestimmt .
Der Nachweis dafür, ob eine Reihe konvergent oder bestimmt divergent ist, fällt oft sehr schwer. Wir können deshalb hier nur für die unendlichen geometrischen Reihen eine allgemeine Aussage machen.

Erinnerung. Für eine geometrische Folge gilt

$$s_k = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}.$$

Satz 6.3: Summe der konvergenten, geometrischen Reihe

Eine unendliche geometrische Reihe konvergiert, wenn $-1 < q < 1$ ist. Dann gilt für den Wert der Reihe

$$\lim_{k\to\infty} s_k = s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Beweis. Man setzt die Formel aus obiger Erinnerung fort. □

Übung 27 (Reihen)**.** Ermittle die Summe der unendlichen geometrischen Reihe

(a) $1 + \frac{2}{3} + \dots$ (c) $1 - \frac{99}{100} + \dots$

(b) $2 - \frac{2}{3} + \dots$ (d) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$

Übung 28 (Quartastoff)**.** Jeden periodischen Dezimalbruch kann man als konvergente geometrische Reihe auffassen. Zeige dies für $0.\overline{4}$ und berechne den Wert der Reihe.

Übung 29 (Konvergenz erzwingen)**.** Für welchen Wert von $p \in \mathbb{R}$ ist die unendliche geometrische Reihe

$$p^3 + \frac{p^6}{27} + \frac{p^9}{729} + \dots$$

konvergent?

Übung 30 (Quadrate schachteln)**.** Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein zweites einbeschrieben, dessen Eckpunkte auf den Mitten der Seiten des ersten Quadrates liegen. In der gleichen Weise ist dem zweiten Quadrat ein drittes, dem dritten ein viertes usw. einbeschrieben. Zeichne eine Figur mit vier ineinander geschachtelten Quadraten. Berechne die Summe der unendlich vielen
a) Flächeninhalte b) Umfänge.

Übung 31 (Zenon'sches Paradoxon)**.** Die folgende Geschichte — Auszug aus dem Lehrgedicht „Achilles und die Schildkröte“ von H. Cremer — ist als **Zenon'sches Paradoxon** bekannt.

...
Der Zenon, den ein jeder kennt,
war zu Elea einst Dozent.
...
Schildkröten sind uns hierzuland
als plump und langsam wohl bekannt.

Achill, so schliess ich, weil ich hell,
läuft sicherlich zehnmal so schnell.
Je nun, er rennt, so denk ich mir,
mal um die Wette mit dem Tier.
Zehn Meter Vorsprung geb' er bloss;
dies Zugeständnis scheint nicht gross.
Die Glocke tönt, der Kampf fängt an,
nun, gute Kröte, halt' Dich ran!
Zehn Meter läuft Achilles heiter;
die Kröte ist 'nen Meter weiter.
Auch diesen läuft Achill in Eil;
die Kröte läuft den zehnten Teil.
Auch dieses Stück durchmisst Achill,
doch ach, das Vieh steht auch nicht still;
sie ist trotz allem etwas weiter;
Achilles ist schon nicht mehr heiter.
So wiederholt sich stets dies Spiel,
und nimmer kommt der Held zum Ziel.
Nimmt er der Kröte alten Ort, schwupp!
ist sie auch schon wieder fort.
Er kommt in Wut bis zur Ekstase;
die Kröte dreht ihm eine Nase.
Sie bleibt ihm stets ein Stück voraus;
Achilles schleicht geknickt nach Haus;
die Kröte aber triumphiert
und wird mit Orden dekoriert.

Auf welchem Trugschluss beruht das Sophisma des Zenon vom Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte? Wann holt Achilles die Schildkröte wirklich ein?

Übung 32 (Quadrat)**.** Ein Quadrat mit Seite a wird so erweitert, dass an jede Quadratseite ein weiteres Quadrat mit Seitenlänge $\frac{a}{3}$ an das mittlere Drittel der ursprünglichen Seite angehängt wird. Dieses Verfahren setzt man beliebig fort.

(a) Berechne die Gesamtfläche der Figur.

(b) Berechne den Umfang der Figur.

Übung 33 (Stammhalter)**.** Bei der Frage, wie viele Kinder man zu erwarten hat, wenn man nach der Stammhalterstrategie vorgeht, muss man die Summe s der unendlichen Reihe

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots, (0 < p < 1)$$

berechnen. Berechne $s - ps$ und daraus s.

Übung 34 (Sierpinski Flickenteppich)**.** Teile ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 zunächst in neun gleiche kleinere Quadrate. Entferne das mittlere Quadrat, behandle die übrigen acht Quadrate in der gleichen Art und wiederhole den Prozess unendlich oft. Man erhält so den Sierpinski'schen Flickenteppich. Berechne seinen Flächeninhalt.

Übung 35 (Kleine Umgebungen erreichen)**.** Gegeben sei die unendlich geometrische Folge

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \dots$$

(a) Berechne den Quotienten q und gib eine rekursive Definition für das k-te Glied a_k.

(b) Berechne $s_1, \dots, s_4$ und die 100-ste Partialsumme.

(c) Berechne den Wert der Reihe s.

(d) Ab welchem Index n weicht die n-te Partialsumme um weniger als einen Millionstel vom Wert der Reihe ab?

Mit diesen Übungen möchte ich das Thema Folgen & Reihen schliessen. Als Randnotiz findet man den Link zu einem Repe Video dieser Themen: *Folgen und Reihen in 10 Minuten.*

A Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

A.1 Deduktion und Induktion

In der Logik bezeichnet man sprachliche Gebilde, bei denen es sinnvoll ist zu fragen, ob sie richtig oder falsch sind, als **Aussagen**. Man unterscheidet allgemeine und spezielle Aussagen. Ein Beispiele für allgemeine Aussagen ist:

- Das erste Mendelsche Vererbungsgesetz (Uniformitätsgesetz) lautet: Kreuzt man zwei Individuen der gleichen Art, die sich nur in einem Merkmal unterscheiden, so sehen ihre Nachkommen — bezogen auf dieses Merkmal — untereinander gleich aus.
- In jedem Trapez ist die Mittelparallele gleich der halben Summe der beiden Grundseiten.
- Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar.

Als entsprechende spezielle Aussagen kämen in Betracht:

- Kreuzt man eine schwarze und eine weisse Hühnerrasse miteinander, so haben alle Hühner der ersten Mischlingsgeneration die gleiche Farbe.
- Im Trapez mit den parallelen Grundseiten der Länge 2 bzw. 4 cm misst die Mittelparallele 3 cm.
- 46 ist durch 2 teilbar.

Den †bergang von allgemeinen Aussagen zu speziellen Aussagen nennt man **Deduktion**. Die Deduktion birgt keine Probleme, sie ist ein logisches Schlussverfahren, das immer anwendbar ist. Die Deduktion aus einer richtigen allgemeinen Aussage ist stets richtig. Den †bergang von speziellen zu allgemeinen Aussagen nennt man **Induktion**. Die Induktion ist in ihrer Anwendung viel schwieriger zu handhaben, da sie sowohl zu falschen als auch zu richtigen Schlussfolgerungen führen kann.

Beispiel 7. 46 ist durch 2 teilbar, also sind alle zweistelligen Zahlen durch 2 teilbar. Oder 46 ist durch 2 teilbar, also sind alle geraden Zahlen durch 2 teilbar.

In den Naturwissenschaften ist die Induktion unentbehrlich. Physiker und Chemiker stellen auf Grund ihrer Experimente allgemeine Gesetze auf; Mediziner versuchen durch Testreihen sämtliche Nebenwirkungen eines Medikamentes zu erforschen. Weitere Beispiele aus der Biologie, Geologie, Psychologie, Wirtschafts- und Sozialwissenschaft etc. lassen sich unschwer finden. Je mehr Einzelfälle untersucht werden, desto sicherer erscheint das allgemeine Gesetz; absolute Gültigkeit ist jedoch so nicht zu erreichen. Deshalb hat diese Art von Induktion in der Mathematik nur heuristischen Wert. Die mathematische Induktion, auch **vollständige Induktion** genannt, wird nur in der Mathematik benutzt. Sie ist ein Verfahren, mit dem die Richtigkeit von Aussagen über natürliche Zahlen nachgewiesen wird. Die mathematische Induktion ist im Gegensatz zu den „unvollkommenen“ Induktionen in den anderen Wissenschaften vollkommen oder vollständig, d.h. es bleiben keine Zweifel an der Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes.

Übung 36 (Mersenne'sche Zahlen)**.** Nach Marin Mersenne (1588-1648) sind die Zahlen der Gestalt $2^p - 1$, wobei p eine Primzahl ist, benannt. Berechne die ersten vier Zahlen dieser Art und vermute eine allgemeine Aussage. Kann man sie beweisen oder widerlegen?

Übung 37 (Ebene zerlegen)**.** In der Ebene sind n Geraden gezeichnet, so dass keine zwei unter ihnen parallel sind und keine drei unter ihnen durch denselben Punkt gehen. Ermittle für $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Anzahl $A(n)$ der Gebiete, in welche die Ebene zerlegt wird. Vermute eine allgemeine Aussage. Kann man sie beweisen oder widerlegen?

Die Aufgaben zeigen, dass eine Aussage in speziellen Fällen zwar richtig, aber dennoch allgemein falsch sein kann. Da unmöglich alle Fälle untersucht werden können, braucht man ein Beweisverfahren, mit dem man erkennen und beweisen kann, ob eine Aussage allgemein gültig ist oder nicht.
Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion wurde von Blaise Pascal (1623-1662) entdeckt, und zwar im Zusammenhang mit dem nach ihm benannten Zahlendreieck. Die Namensgebung geht aber auf Augustus de Morgan (1806-1871) und die Entwicklung der Mengenlehre zurück.

Bemerkung. Es gibt auch Vermutungen, von denen man bis heute nicht weiss, ob sie für alle natürlichen Zahlen gelten oder nicht. So hat bereits vor mehr als 200 Jahren Christian Goldbach (1690-1764) die Vermutung ausgesprochen, dass sich jede gerade Zahl grösser als 2 als Summe von zwei Primzahlen darstellen lässt.

$$4 = 2 + 2, 12 = 7 + 5, 54 = 47 + 7, \ldots$$

Lustigerweise geht zum Beispiel 20 sogar auf zwei Arten; welche? Die Vermutung für alle geraden Zahlen jedoch konnte bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden.

A.2 Vollständige Induktion

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion lässt sich immer dann anwenden, wenn die zu beweisende Behauptung mit natürlichen Zahlen formuliert werden kann.
1889 hat der italienische Mathematiker Giuseppe Peano die Menge der natürlichen Zahlen durch fünf Axiome charakterisiert. Als fünftes Axiom formulierte er:

> Eine Eigenschaft, die der 1 zukommt und mit jeder natürlichen Zahl auch ihrem Nachfolger, kommt allen natürlichen Zahlen zu.

Deshalb genügen praktisch zwei Schritte, um zu zeigen, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen n richtig ist. Mit Peano sind die drei Schritte:

1. *Induktionsverankerung*: Man beweist die Vermutung für kleine $n \in \mathbb{N}$, in der Regel für $n = 1$.

2. *Induktionsschritt*: Man beweist, dass die Behauptung für $n+1$ richtig ist, unter der Annahme (Hypothese), dass sie für n richtig ist.

3. *Induktionsschluss*: Weil die Behauptung gemäss 1. für $n = 1$ richtig ist, ist sie gemäss 2. auch für $n = 2$ richtig, also gemäss 2. auch für $n = 3$ richtig, also gemäss 2. auch für $n = 4$ richtig, $\ldots$.

Bemerkung. Der zweite Schritt bedeutet für das vorangehende Beispiel, dass die Addition des $(n+1)$-Summanden zur vermuteten Formel für die Summe der ersten n Summanden zum gleichen Term führen muss, wie wenn man in der vermuteten Formel für die Summe der ersten n Summanden n durch $n+1$ ersetzt.

Übung 38 (natürliche Zahlenfolge)**.** Finde eine Formel für die n-te Partialsumme der Folge

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots \quad n$$

Beweise anschliessend deine Vermutung mit vollständiger Induktion.

Übung 39 (Folge der Quadratzahlen und mehr)**.** Finde zuerst die Darstellung für a_n, dann eine Formel für die Summe, und beweise deine Vermutung anschliessend mit vollständiger Induktion.

(a)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + a_n$$

(b)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + a_n$$

(c)

$$5 + 17 + 29 + 41 + \ldots + a_n$$

(d)

$$1 + 8 + 27 + \ldots + a_n$$

Übung 40 (Teilbarkeit)**.** Zeige, dass $n^3 + 5n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.

B Historisches zur vollständigen Induktion

Der erste, der dieses Schlussverfahren angewendet hat, ist Blaise Pascal (1623–1662). Er beweist 1654 damit eine Eigenschaft des sogenannten *Pascal'schen Dreiecks* (in *TraitŽ du triangle aritmŽtique*). Dieses Dreieck besteht aus den Zahlen, die bei der Potenzierung das Binoms $(a+b)$ als Koeffizienten auftreten.

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \ldots & & & &
\end{array}$$

Dieses Zahlendreieck hat eine ganze Reihe von Eigenschaften. Zwei davon sind:

- Jede innere Zahl ist die Summe der beiden darüber stehenden Zahlen
- Von zwei benachbarten Zahlen einer Zeile verhält sich die untere (weiter links liegende) zur oberen (weiter rechts liegende), wie die Anzahl Zahlen links der oberen zur Anzahl Zahlen rechts der unteren.

Pascal formulierte die letzte Eigenschaft wie folgt:

> En tout Triangle arithmŽtique, deux cellules contigu‘s Žtant dans

B.1 Erkenntnistheoretischer Ausblick

Definition 2.1: Induktion

Induktion nennt man die Schlussweise, bei der aus Einzelfällen auf den allgemeinen Fall geschlossen wird.

Definition 2.2: Deduktion

Deduktion heisst die Schlussweise, bei der aus dem allgemeinen Fall auf den Einzelfall geschlossen wird.

Mittels Deduktion gewonnene Folgerungen sind stets richtig, falls man von richtigen Prämissen ausgeht. Mittels Induktion gewonnene Schlüsse können falsch sein: Was für einige Spezialfälle gilt, muss nicht unbedingt für alle Fälle gelten.

Beispiel 8. Nach Leonard Euler (1707–1783): Setzt man im Ausdruck

$$p = n^2 - n + 41$$

für n der Reihe nach die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 40$ ein, so erhält man für p stets eine Primzahl. Mittels Induktion ergäbe sich daraus der Schluss, dass der Ausdruck p stets Primzahlen liefert, wenn man für n eine natürliche Zahl einsetzt. Für $n = 41$ ist aber $p = 41 \cdot 41$, was keine Primzahl ist.

Obschon die Induktion kein sicheres Beweisverfahren ist, so beruhen doch alle naturwissenschaftlichen Erkenntnisse auf Induktionsschlüssen: Aus einer endlichen Zahl von Versuchen wird auf den allgemeinen Fall geschlossen. Deshalb können die naturwissenschaftlichen Erkenntnisse keinen absoluten Wahrheitsgrad beanspruchen, sondern sie gelten nur mit einem sehr hohen Wahrscheinlichkeitsgrad.

Bemerkung. Nur die in der Mathematik verwendete Methode der *vollständigen* Induktion ist ein unanfechtbares Schlussverfahren; ha!

C Von Halbtönen und Wurzeln

C.1 Pythagoräische Tonleiter

Schon Pythagoras fiel vor fast 2500 Jahren auf, dass sich der Zusammenklang zweier Töne dann besonders angenehm anhört, wenn die Schwingungen in einem einfachen mathematischen Verhältnis zueinander stehen: Zum Beispiel verhalten sich die Schwingungszahlen der Teiltöne einer Oktave wie $1 \div 2$ und bei einer Quinte wie $2 \div 3$. Die Pythagoräer bauten eine ganze Tonleiter auf dieser Idee auf. Es ist immer noch ein Geheimnis, wie es zu einer Beziehung zwischen einfachen mathematischen Verhältnissen und dem Hörgenuss kommt.
Leider gibt es bei der pythagoräischen Tonleiter und verwandten Versuchen einen entscheidenden Nachteil.

Bemerkung. Wenn man einen Tonleiterton zum Zweck einer Modulation als neuen Grundton deklariert, so passt die neue Tonleiter nicht hundertprozentig mit den schon vorhandenen Tönen zusammen.

Aus dieser Not wurde die Idee geboren, die Oktave in zwölf gleichberechtigte Teiltöne zu unterteilen. Von einem Halbton zum nächsten erhöht sich damit die Schwingungszahl um die zwölfte Wurzel aus Zwei, also um

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.059463094.$$

	pythagoräisch	chromatisch
C	1	1
D	1.12500	1.12246
E	1.26563	1.25992
F	1.33333	1.33484
G	1.50000	1.49831
A	1.68750	1.68179
H	1.89844	1.88775
C	2	2

Tabelle 1: Frequenzverhältnisse: pythagoräisch vs. chromatisch

So entstand vor 300 Jahren die chromatische Tonleiter, auch temperierte Stimmung genannt. Johann Sebastian Bach hat im „wohltemperierten" Klavier gezeigt, welche phantastischen Modulationsmöglichkeiten sich dadurch ergeben.
Damit ist die gegenseitige Beziehung noch längst nicht ausgeschöpft. So verwenden Xenakis und viele andere Komponisten mathematische Methoden bei ihren Kompositionen; auch kann man die Struktur vieler Werke — besonders der zeitgenössischen Musik — bemerkenswert mit mathematischen Begriffen beschreiben. Bei aller hochschätzung der Mathematik bleibt allerdings festzustellen, dass es wohl niemals möglich sein wird, unsere Empfindungen beim Hören unseres Lieblingssongs auf Mathematisches zurückzuführen.

C.2 Pythagoräisch vs. chromatisch

Warum tauchen hier plötzlich zwölfte Wurzeln auf? Soll die Oktave in n Teile unterteilt werden müsste man als Guitarrenbauer n Bünde auf dem Hals bis zur Mitte der Saite versehen, wobei der letzte genau in der Mitte einzulassen wäre. Bezeichnet man mit x das Schwingungsverhältnis zwischen zwei Halbtönen und mit k den Abstand der beiden Halbtöne, so gilt für das Schwingungsverhältnis x^k. Insbesondere soll der n-te Ton mit der Oktave übereinstimmen: $x^n = 2$. Im Beispiel der chromatischen Stimmung ist $n = 12$ und damit zur Gleichung

$$x^{12} = 2$$

mit der Lösung

$$x = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094.$$

In der nachstehenden Tabelle **??** sind die Frequenzverhältnisse für die pythagoräische und die chromatische Stimmung gegenübergestellt (C-Dur-Tonleiter).
Die Frequenzverhältnisse sind fast identisch, ungeübte Ohren dürften kaum den Unterschied wahrnehmen. In der Unterhaltungsmusik gibt es praktisch nur noch die chromatische Stimmung; bei historischen Instrumenten wird dagegen versucht, sie so klingen zu lassen wie zu der Zeit, als die dafür komponierte Musik geschrieben wurde.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis