Geometrie

Rund um Ecken und Kanten

Inhaltsverzeichnis

1. Planimetrie

1.1. Testfragen Basics

Übung 1.1.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Ist die Aussage richtig, dann versuche sie zu begründen. Ist die Aussage falsch, dann gib ein Gegenbeispiel.

1. Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt
2. Die Summe eines Winkels α und seines Stufenwinkels beträgt 180°.
3. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°
4. Der 90°-Winkel kann konstruiert werden.
5. Der 15°-Winkel kann konstruiert werden.
6. Wird hintereinander an zwei verschiedenen Achsen gespiegelt, so erhält man eine Verschiebung.
7. Eine Punktspiegelung entspricht einer Drehung um 180°.
8. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen.
9. Die Innenwinkelsumme eines n-Ecks berechnet sich nach der Formel
$$2^{n-3} \cdot 180^\circ.$$
10. Der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks liegt im Innern des Dreiecks.
11. Halbieren sich die Diagonalen im einem Viereck, und besitzt das Viereck mindestens einen rechten Winkel, so handelt es sich um ein Rechteck.
12. Ein Parallelogramm ist ein spezielles Trapez.
13. Ein Rhombus besitzt gleich viele Symmetrieachsen wie ein gleichseitiges Dreieck.
14. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ($\gamma = 90^\circ$) ist
$$A = \frac{ab}{2}$$
15. Die Mittelsenkrechte einer Sehne eines Kreises geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

16. Der Kreisbogen eines Kreises ist proportional zu seinem Zentriwinkel.

17. Der Flächeninhalt eines Kreises ist proportional zu seinem Radius.

18. Die Mittellinie eines Trapezes ABCD mit den parallelen Seiten a und c hat die Länge
$$m = \frac{a+c}{2}$$

19. Die Peripheriewinkel über einer Sehne sind alle gleich gross und halb so gross wie ihr Zentriwinkel.

20. Der Satz des Thales ist eine direkte Folgerung aus der oben genannten Feststellung.

1.2. Konstruieren

Man hält grundsätzlich an folgenden Konventionen fest:

- Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal durchzuführen.
- Nicht konstruierbare Winkel misst man mit dem Geo-Dreieck (zB. 20°)
- Zu Geometrieaufgaben gehören im Allgemeinen eine Skizze und ein kurzer Konstruktionsbericht.

Übung 1.2.

Konstruiere Dreiecke aus folgenden Angaben:

a) $c = 5\,\text{cm}$, $a = 8\,\text{cm}$, $\beta = 40°$

b) $a = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$

c) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 55°$

d) $a = 7\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 55°$

e) $a = 9\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 55°$

1.3. Winkel am Kreis

Es gilt bekanntlich folgender

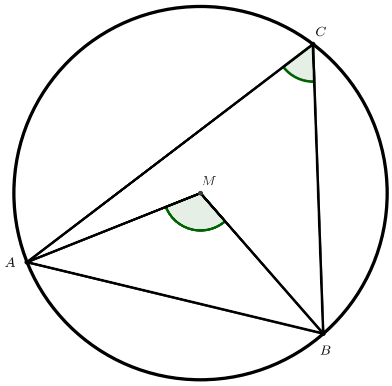


Abbildung 1: Peripheriewinkelsatz

Satz 1.1: Peripheriewinkelsatz

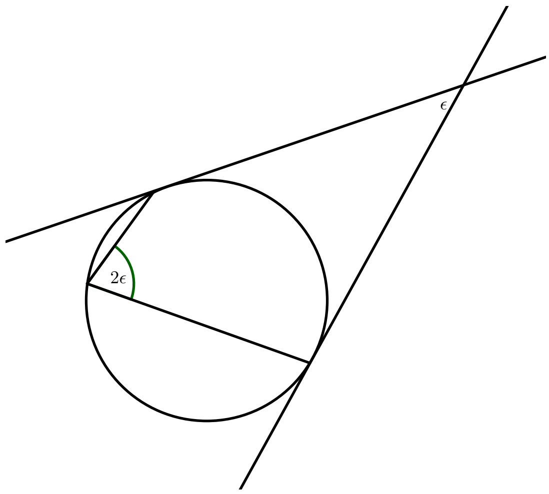
Der Peripheriewinkel über einer Sehne $\overline{AB}$ ist halb so gross wie der zugehörige Zentriwinkel.

Beweis. Siehe Übungen. □

Bemerkung 1.3.1. Aus dem Beweis folgt direkt, dass alle Peripheriewinkel über gleichem Bogen gleich gross sind.

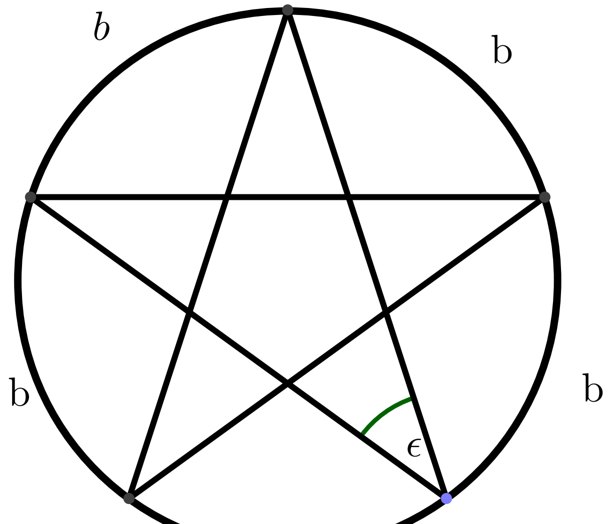
Übung 1.3.

Berechne den Winkel ϵ:



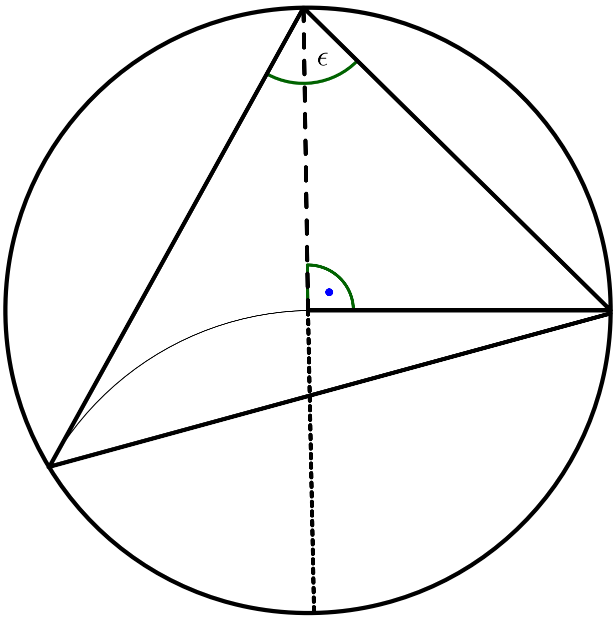
Übung 1.4.

Berechne den Winkel ϵ:



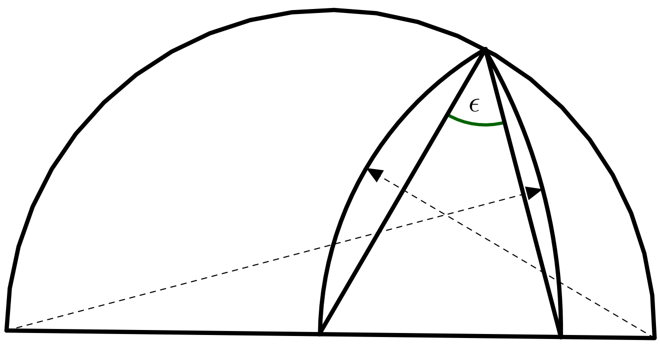
Übung 1.5.

Berechne den Winkel ϵ:



Übung 1.6.

Berechne den Winkel ϵ:



1.4. Notizen zu den Übungen

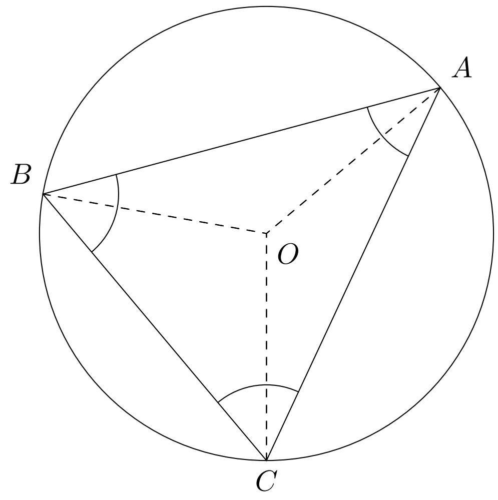
Notizen zu Übung 1.6

1. ✗, die Geraden können parallel laufen. Dann haben sie keinen oder unendlich viele Schnittpunkte.
2. ✗, 2α
3. ✓ für die Innenwinkelsumme. Für einen Beweis betrachte man eine Dreieckseite und ihre Parallele durch die gegenüberliegende Ecke. Die Stufen- und der Zentriwinkel zusammen ergeben 180°.
4. ✓, Mittelsenkrechte
5. ✓, man halbiert einen konstruierten 60° Winkel zweimal.
6. ✗, denn beispielsweise zwei Achsenspiegelungen (x- und y-Achse) ergeben eine Drehung um 180° um den Ursprung.
7. ✓, die Verbindung Punkt-Bildpunkt geht durch das Drehzentrum.
8. ✓
9. ✗, korrekt ist $(n-2)\cdot 180°$. Für das Dreieck haben wir oben gesehen, dass die Innenwinkelsumme 180° ist. Wird nun eine weitere Ecke hinzugefügt, so ergibt sich durch Verbinden der beiden nächstgelegenen Punkte ein zusätzliches Dreieck, die Innenwinkelsumme wächst also um 180°.
10. ✗, da er Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist, kann er ausserhalb liegen; beispielsweise in einem stumpfwinkligen Dreieck.
11. ✓, denn wenn sich die Diagonalen halbieren, dann haben wir ein Parallelogramm vorliegen. Ist dann noch ein Winkel 90°, so müssen es die andern auch sein (insbesondere die Gegenwinkel).
12. ✓, ein Trapez braucht zwei Seiten, die parallel sind.
13. ✗, weniger, wie man durch eine Skizze bestätigt.
14. ✗, denn eine zwei Seiten entsprechen auch just den Höhen.
15. ✗, denn die Radien zu den Sehnenendpunkten sind die Schenkel eines Dreiecks, dessen Höhe auf die Sehne durch den Mittelpunkt verlaufen muss.
16. ✗, $b = \frac{2\pi r}{360°}\cdot\alpha$

17. ✓, $A = \pi \cdot r^2$

18. ✓, eine Skizze motiviert die Aussage

19. ✓



Betrachte beispielsweise die Sehne AC. Benenne im Dreieck AOC den Zentriwinkel δ und die Basiswinkel α. Die Basiswinkel für die beiden andern Dreiecke heissen β bzw. γ. Es ist $180° - 2\alpha = \delta$, aber auch $180° - 2\alpha = 2(\beta + \gamma)$. Setze $\varphi := \beta + \gamma$ und es folgt $2\varphi = \delta$. Das heisst der Zentriwinkel δ ist doppelt so gross wie der Peripheriewinkel φ über einer Sehne.

20. ✓, denn für $\delta = 180°$ ist $\varphi = 90°$.

Notizen zu Übung 1.6

a) Seite a abtragen, Winkel β und dann von C aus mit der Länge 5 abtragen um A zu erhalten.

b) Man kann $\gamma = 80°$ ausrechnen und dann zusammen mit β von a aus abtragen.

c) b und α abtragen, dann von C aus die Länge von a abtragen.

d) analog wie vorhin

e) analog wie vorhin

Notizen zu Übung 1.6

$\epsilon + 4\epsilon + 180° = 360°$, also $\epsilon = 36°$.

Notizen zu Übung 1.6

$2\epsilon = 180° - 108°$, also $\epsilon = 36°$

Notizen zu Übung 1.6

Brauche den skizzierten Kreisbogen, um dort ein gleichseitiges Dreieck zu skizzieren. Dann sieht man $2\epsilon = 90° + 60°$, also $\epsilon = 75°$.

Notizen zu Übung 1.6

Das rechtwinklige Hilfsdreieck (dort wo sich die Radien treffen) liefert die Winkel $\alpha + \epsilon + \beta = 90°$. Im Dreieck mit ϵ sind die Winkel auf dem Durchmesser $\alpha + \epsilon$ bzw. $\beta + \epsilon$. Somit $2\epsilon + \alpha + \beta + \epsilon = 180° = 2\epsilon + 90°$ und daraus $\epsilon = 45°$.

2. Stereometrie

Die Stereometrie (griech., Körpermessung) beschäftigt sich, im Gegensatz zur Planimetrie, mit der Form, gegenseitiger Lage und der Grösse geometrischer Gebilde des Raumes.

Die einfachen Körper — Würfel, Quader, Zylinder, Kugel — waren schon bei allen Völkern der vorgeschichtlichen Zeit bekannt und wurden praktisch genutzt. Sowohl die Babyionier (3500 bis 200 v.u.Z.) als auch die Ägypter (3000 bis 500 v.u.Z.) haben Volumen und Oberfläche von Würfeln, Zylindern, Pyramiden und Kegeln, wenn auch teilweise nur in guter Näherung, berechnen können. Die Berechnung des Volumens und der Oberfläche einer Kugel gelang aber erst Archimedes (287 - 212 v.u.Z.).

2.1. Prismen

Übung 2.1.

Berechne Volumen V, Oberfläche O und Raumdiagonale d eines

a) Würfels mit Kantenlänge k

b) eines Quaders mit Kantenlänge a, b, c

2.2. Pyramiden

Übung 2.2.

Die Cheopspyramide hat als Grundfläche ein Quadrat mit Seitenlänge 233 m. Sie war ursprünglich 148 m hoch; heute ist sie auf einer Höhe von 137 m abgestumpft.

a) Der Bau soll 100 000 Mann 20 Jahre beschäftigt haben. Welche Gesteinsmasse wurde dabei bewegt? (Dichte des Gesteins: $\rho_S = 2.7\,\mathrm{g/cm^3}$)

b) Welche Abmessung hat die heutige Plattform?

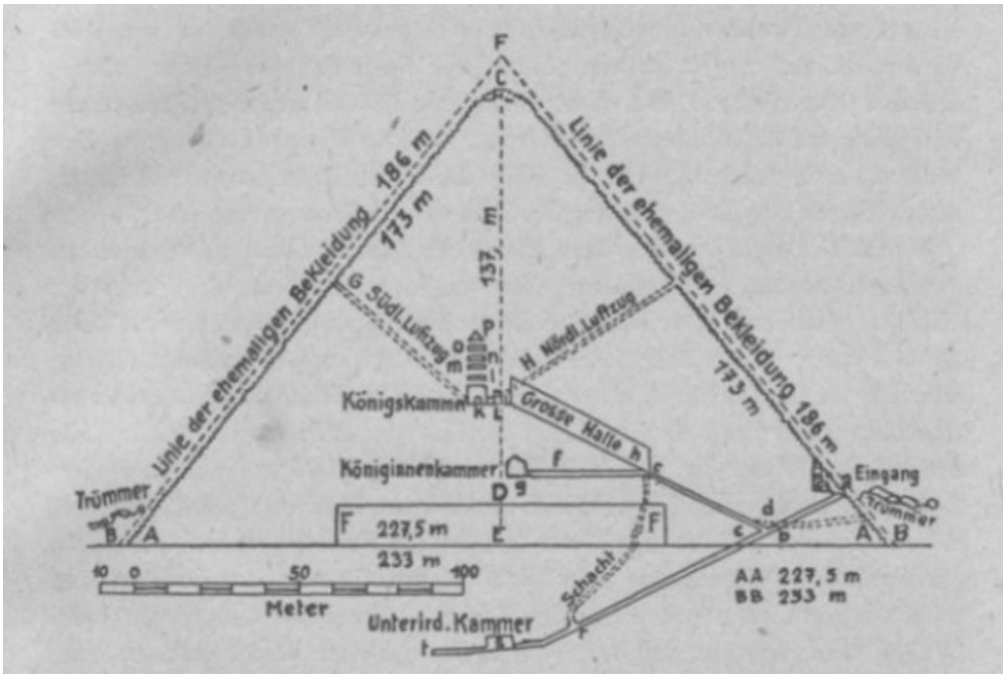


Abbildung 2: Cheopspyramide

2.3. Gerader Kreiszylinder

Übung 2.3.

Ein rechteckiges Blatt mit den Seitenlängen a und b kann auf zwei Arten zu einem Zylinder gebogen werden. Wie gross ist das Verhältnis der (a) Volumina, (b) Mäntel

Übung 2.4.

Wie viel Blech benötigt man für eine Konservendose (Durchmesser 10 cm, Inhalt 1 Liter), wenn für Verschnitt etc. noch 15% zugeschlagen werden?

Übung 2.5.

Die Metallverkleidung eines Kamins muss mit einer Spezialfarbe zweimal gestrichen werden. Die Kaminverkleidung ist ein Zylinder mit einem Durchmesser von 150 cm und einer Höhe von 18 m. Beim ersten Anstrich rechnet man mit 1 kg Farbe für 15 m^2; beim zweiten Anstrich genügen 70% der Menge des ersten Anstrichs. Wie viele Dosen (5 kg bzw. 10 kg) Farbe werden benötigt?

2.4. Gerader Kreiskegel

Übung 2.6.

Von einem geraden Kreiskegel kennt man den Radius $r = 5\,\text{cm}$ und das Volumen $V = 1000\,\text{cm}^3$. Berechne h, s, M und O.

Übung 2.7.

Wie tief taucht ein Holzkegel ($r = 5\,\text{cm}$, $h = 12\,\text{cm}$, Dichte $0.8\,{}^{\text{g}}/_{\text{cm}^3}$) mit der Spitze nach unten in Wasser ein?

Übung 2.8.

Wie gross ist der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes, der den abgewickelten Mantel eines Kegels mit r=6 cm und h=8 cm darstellt?

Übung 2.9.

Ein Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel 120¡ und dem Radius $8\,\text{cm}$ wird zu einem Kegel zusammengebogen. Wie gross wird dessen Volumen?

2.5. Kugel

Die Berechnung des Volumens der Kugel erfolgt mit dem Prinzip von Cavalieri. Als Vergleichskörper nimmt man denjenigen Körper, der entsteht, wenn man aus einem Zylinder (Radius r, Höhe r) einen Kegel herausfräst. Man schneidet die Halbkugel und den Vergleichskörper mit einer Ebene, die vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand a hat. Als Schnittflächen ergeben sich für die Halbkugel

$$A = \pi r'^2 = \pi(r^2 - a^2),$$

für den Vergleichskörper

$$A = A_{Kreisring} = \pi r^2 - \pi a^2$$

Für das Volumen der Kugel gilt deshalb:

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3,$$

also

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Übung 2.10.

Berechne den Radius einer Kugel mit $1\,\mathrm{m}^3$ Rauminhalt.

Übung 2.11.

Leite eine Formel für das Materialvolumen einer Hohlkugel in Abhängigkeit vom Kugelradius r und der Wanddicke d her. Welche Glieder der Formel können bei sehr kleinem d vernachlässigt werden? Deute die entstehende Näherungsformel und leite somit die Formel für die Oberfläche einer Kugel ab.

Übung 2.12.

Wie verhalten sich die (a) Radien, (b) Oberflächen, (c) Volumina der In- und Umkugel eines Würfels?

2.6. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 2.12

a) $V = k^3$, $O = 6k^2$, $d = \sqrt{3}k$ (zweimal Pythagoras anwenden)

b) $V = abc$, $O = 2(ab + ac + bc)$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Notizen zu Übung 2.12

a) Nach dem Strahlensatz gilt für die Plattform $F = \left(\frac{11}{148} \cdot 233\right)^2 \approx 300\,\mathrm{m}^2$, also hat man eine Seitenlänge von ungefähr 17 Metern.

b) $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 233^2 \cdot 148 - \frac{1}{3} \cdot (10\sqrt{3})^2 \cdot 11 \approx 2.7 \cdot 10^6$ mit einer Dichte von $2.7\,{}^{\mathrm{t}}/_{\mathrm{m}^3}$. Die Masse ist $m = V\rho \approx 7$ Millionen Tonnen.

Notizen zu Übung 2.12

Entweder verwendet man a oder b als Umfang und das zweite für die Höhe. Wegen $U = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{U}{2\pi}$. Die Volumina sind $V_1 = (\frac{a}{2\pi})^2 b$ und $V_2 = (\frac{b}{2\pi})^2 a$, woraus $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a}{b}$. Die Mäntel ergeben $M_1 = M_2$, trivial.

Notizen zu Übung 2.12

Der Radius ist 5 Centimeter und das Volumen 1000 Kubikcentimeter, die Höhe daher $h = \frac{1000}{2\pi \cdot 5^2} \approx 6.4$. Also die Oberfläche ungefähr 357 Quadratcentimeter; mit 15% Verschnitt sind es $410\,\mathrm{cm}^2$.

Notizen zu Übung 2.12

Der Mantel hat eine Fläche von $\pi \cdot 1.5 \cdot 18 \approx 85\,\mathrm{m}^2$ und dazu bräuchte man etwas weniger als 6 Liter Farbe. Für den zweiten Anstrich 70%, was insgesamt etwas weniger als 10 Liter ergibt

Notizen zu Übung 2.12

$V = \frac{1}{3}Gh \Leftrightarrow h = \frac{3V}{G}$ also $h \approx 38$ Centimeter. $s = \sqrt{r^2 + h^2} \approx 39$. Der abgewickelte Mantel ist ein Kreissektor mit Bogenlänge $2\pi r$ und Radius s. Sei α der Öffnungswinkel, dann ist $\frac{\alpha}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$. Für den Mantel gilt also $M = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi s^2 = \frac{r}{s}\pi s^2 = rs\pi \approx 605$ Quadratcentimeter. Die Oberfläche ist $O = 684$.

Notizen zu Übung 2.12

Der Holzkegel wird schwimmen, da seine Dichte kleiner ist als die Dichte von Wasser. Der Kegel hat die Masse $m_K = 80\pi \approx 250\,\mathrm{g}$. Also müssen wir die Höhe des Kegels berechnen, mit der Dichte von Wasser, der 250 g verdrängt. Beachte, dass $\frac{r}{h} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow r = \frac{5}{12}h$. Daraus folgt

$$m_W = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{5}{12}h\right)^2 \cdot h \stackrel{!}{=} 80\pi \Leftrightarrow h \approx 10.7\,\text{cm}.$$

Notizen zu Übung 2.12

Die Seitenlänge ist $s = \sqrt{r^2 + h^2} = 10\,\text{cm}$. Der abgerollte Kegelmantel, Kreisausschnitt, hat den Radius s und die Bogenlänge $2\pi r$. Den Öffnungswinkel nennen wir φ. Der Anteil einer vollen Umdrehung ist $\frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{3}{5}$, also ist $\varphi = \frac{3}{5} \cdot 360° = 216°$.

Notizen zu Übung 2.12

Von vorhin wissen wir, dass $\frac{r}{s} = \frac{\varphi}{360°}$ gilt. Es folgt $s = 24$ und $h = \sqrt{s^2 - r^2} \approx 22.6$. Daraus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \approx 1.5$ Liter.

Notizen zu Übung 2.12

Es ist $V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3V_K}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V_K}{4\pi}}$, also $r \approx 0.24$ Meter.

Notizen zu Übung 2.12

Die äussere Hülle hat ein Volumen von $V_a = \frac{4}{3}\pi r^3$ und die innere $V_i = \frac{4}{3}\pi(r-d)^3$. Für das Volumen der Hohlkugel gilt

$$V = V_a - V_i = \frac{4}{3}\pi r^3 - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - 4\pi r^2 d + 4\pi r d^2 - \frac{4}{3}\pi d^3\right) = 4\pi d\left(r^2 - rd + \frac{\pi}{3}d^2\right).$$

Wird nun $d \to 0$ klein, so werden die Terme mit grösseren Exponenten rascher klein als solche mit kleineren Exponenten. Vermutlich dominiert also für kleine d der Term $4\pi d r^2$. Vermutlich ist also $O_K = 4\pi r^2$.

Notizen zu Übung 2.12

Sei k die Kantenlänge des Würfels. Dann hat die Innkugel Radius $r_i = \frac{k}{2}$ und die Umkugel $r_u = \frac{\sqrt{3}k}{2} = \sqrt{3}r_i$. Also $\frac{r_u}{r_i} = \sqrt{3}$, $\frac{O_a}{O_i} = 3$ und $\frac{V_a}{V_i} = 3\sqrt{3}$.

3. Ähnlichkeit

3.1. Kongruenzabbildungen

Eine Abbildung ist eine eindeutige Zuordnung, bei der jedem Punkt einer ersten Punktmenge genau ein Punkt einer zweiten Punktmenge zugeordnet wird.

Wir nennen die erste Punktmenge die Urbilder und die zweite Punktmenge die Bilder. In der Regel bezeichnen wir die Bildpunkte zu den Urbildpunkten A, B, P, ... mit A', B', P', ...

Abbildungen, bei denen die Bilder deckungsgleich (kongruent) zu den Urbildern ist, heissen Kongruenzabbildungen. Kongruente Figuren haben also dieselbe Form und dieselbe Grösse. Zu den Kongruenzabbildungen gehören

- Achsenspiegelungen
- Rotationen
- Punktspiegelungen
- Translationen

3.2. Zentrische Streckung

Wir wählen einen Punkt Z der Ebene und eine positive Zahl k. Ordnen wir nun jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zu gemäss der Vorschrift

- P' liegt auf dem Strahl ZP
- Die Strecke ZP' ist k-mal so lang wie die Strecke ZP

so heisst diese Abbildung eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum Z und dem Streckungfaktor k.

Eine zentrische Streckung hat folgende Eigenschaften

- Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich gross.
- Urbildgerade und Bildgerade sind parallel.
- Die Bildstrecke ist k-mal so lang wie die Urbildstrecke.
- Der Flächeninhalt der Bildfigur ist k^2-mal so gross wie der Flächeninhalt der Urbildfigur.

Übung 3.1.

Strecke ein Quadrat Q von einem Punkt Z aus mit dem Streckungsfaktor 3 zentrisch und überprüfe anschliessend obige Eigenschaften.

Übung 3.2.

Eine Streckung mit einem negativen Streckungsfaktor bedeutet eine Streckung mit dem entgegengesetzten positiven Streckungsfaktor und eine zusätzliche Punktspiegelung am Streckungszentrum.

Strecke ein Dreieck von Z aus mit dem Streckungsfaktor $-\frac{1}{2}$.

3.3. Ähnlichkeitsabbildungen

Kongruenzabbildungen, zentrische Streckungen und ihre Verkettungen heissen Ähnlichkeitsabbildungen. Figuren, welche durch Ähnlichkeitsabbildungen auseinander hervorgehen, heissen zueinander ähnlich.

Eine Ähnlichkeitsabbildung hat folgende Eigenschaften

- Urbildwinkel und Bildwinkel sind gleich gross.
- Alle Bildstrecken sind k-mal so lang wie die entsprechenden Urbildstrecken.
- Der Flächeninhalt der Bildfigur ist k^2-mal so gross wie der Flächeninhalt der Urbildfigur

Bemerkung 3.3.1. Daraus folgt insbesondere für ähnliche Dreiecke, dass sie gleiche Winkel haben und im Verhältnis von zwei einander entsprechenden Seiten übereinstimmen.

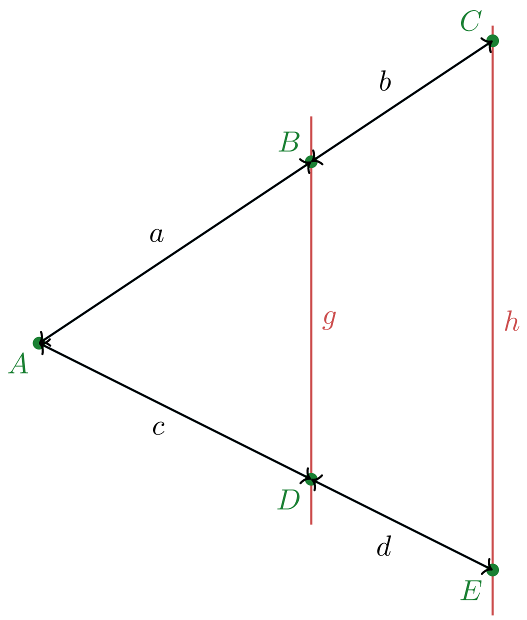
Übung 3.3.

Alle Kreise sind zueinander ähnlich. Wie verhalten sich die Flächen zweier Kreise, wenn sich ihre Radien wie $2 \div 3$ verhalten?

3.4. Strahlensätze

Satz 3.1: 1. Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem andern Strahl.



Übung 3.4.

Teile eine Strecke im Verhältnis $2 \div 3$.

Satz 3.2: 2. Strahlensatz

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Parallelenabschnitte wie die vom Anfangspunkt aus gemessenen Abschnitte auf einem der Strahlen.

Übung 3.5.

Beweise folgende Aussagen:

a) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

b) $\frac{a}{g} = \frac{a+b}{h}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Übung 3.6.

Eine freistehende Telefonstange im ebenen Gelände wirft bei einem bestimmten Sonnenstand einen Schatten von 5.6 m Länge. Um die Stangenhöhe h zu bestimmen, wird ein Meterstab parallel zur Stange aufgestellt, so dass beide Schattengrenzen zusammenfallen. Der Abstand des Meterstabes von der Stange misst 2.9 m.

3.5. Ähnliche Körper

Körper, welche durch Ähnlichkeitsabbildungen auseinander hervorgehen, heissen zueinander ähnlich.

Neben den bereits bekannten Eigenschaften von Ähnlichkeitsabbildungen gilt zusätzlich: Das Volumen des Bildkörpers ist k^3-mal so gross wie das Volumen des Urbildkörpers

Beispiel 3.5.1. Alle Würfel sind zueinander ähnlich.

Beispiel 3.5.2. a) Zwei Würfel aus gleichem Material wiegen 1 g und 1 kg. Der leichtere Würfel hat eine Kantenlänge von 5 cm. Wie lang ist eine Kante des schwereren Würfels?

Weil die beiden Würfel aus gleichem Material sind verhalten sich wegen

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 \cdot \rho}{V_2 \cdot \rho} = \frac{V_1}{V_2}$$

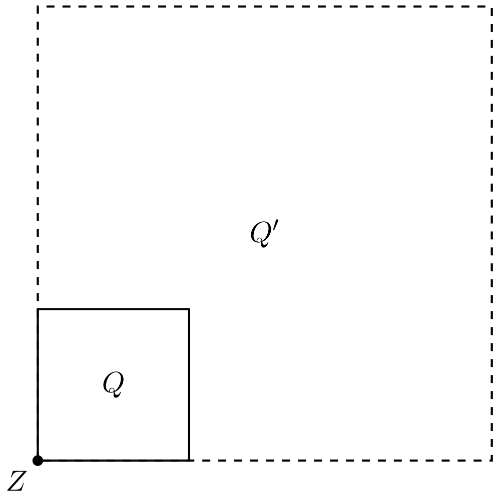
ihre Volumina wie $1 \div 1000$, also wegen $10^3 = 1000$ ihre Kantenlängen wie $1 \div 10$. Die Kantenlänge des schwereren Würfels beträgt deshalb 50 cm.

b) Ein gerader Kreiskegel wird durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche in halber Höhe geteilt. Er zerfällt dabei in einen kleineren Kegel und einen Kegelstumpf. Wie verhalten sich die Volumina der beiden Teile?

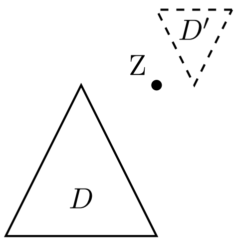
Der kleine Kegel ist zum ursprünglichen ähnlich (zentrische Streckung mit Kegelspitze als Streckungszentrum). Ihre Höhen verhalten sich wie $1 \div 2$, ihre Grundflächen wie $1 \div 4$ und ihre Volumina wie $1 \div 8$. Das Volumen des Kegelstumpfs ist Volumen des ursprünglichen Kegels minus Volumen des kleinen Kegels. Also verhält sich das Volumen des kleinen Kegels zu dem des Kegelstumpfs wie $1 \div 7$.

3.6. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 3.6



Notizen zu Übung 3.6



Notizen zu Übung 3.6

Kreise gehen durch zentrische Streckung am Mittelpunkt ineinander über. Gegebenenfalls müssen die Mittelpunkte zuerst mit einer Translation zur Deckung gebracht werden.

Flächen sind zweidimensional, also verhalten sie sich wie $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 4 \div 9$.

Notizen zu Übung 3.6

Gegeben sei eine Strecke mit Anfangspunkt A und Endpunkt B. Zeichne einen Strahl von A aus und unterteile ihn in fünf beliebig, aber gleich grosse Abschnitte. Verbinde die letzte Markierung mit dem Punkt B. Verschiebe diese Strecke parallel, bis sie die vorletzte Markierung auf dem Strahl schneidet. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Strecke AB teilt diese im Verhältnis $2 \div 3$

Notizen zu Übung 3.6

Man kann die Strahlen auch mit Geraden formulieren und dann mit Schnittpunkten arbeiten. Daraus ergeben sich dann mit Hilfe der Koordinaten dieser Schnittpunkte und dem Satz von Pythagoras die obigen Gleichheiten.

Wir betrachten ein Ähnlichkeitsargument:

a) Sei $a+b=k\cdot a$ eine zentrische Streckung. Dann gilt auch $c+d=kc$, da die Dreiecke ABD und AEC ähnlich sind. Es folgt

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a}{ka}=\frac{1}{k}=\frac{c}{kc}=\frac{c}{c+d}$$

b) Diese Beziehung ergibt sich analog zur ersten auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke.

c) Hier können wir nicht mit einer zentrischen Streckung arbeiten. Aber aus der ersten Gleichheit folgt

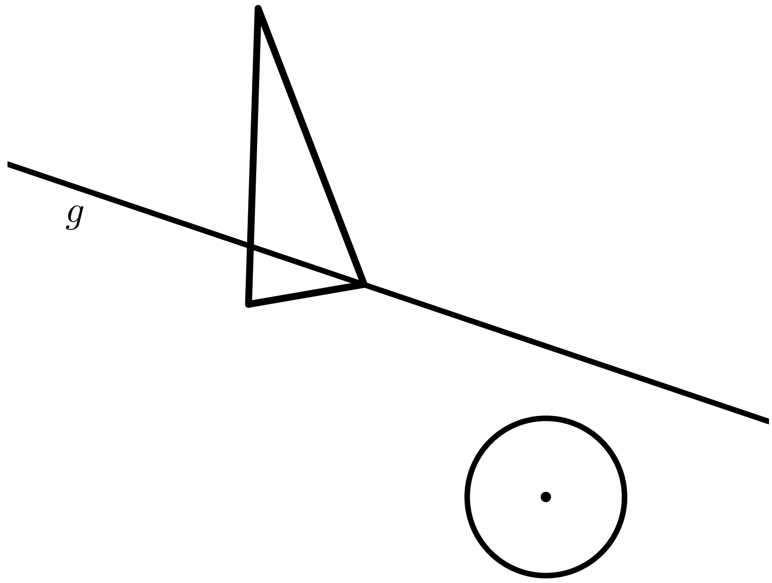
$$a(c+d)=c(a+b)\Leftrightarrow ac+ad=ca+cb\Leftrightarrow ad=cb\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Notizen zu Übung 3.6

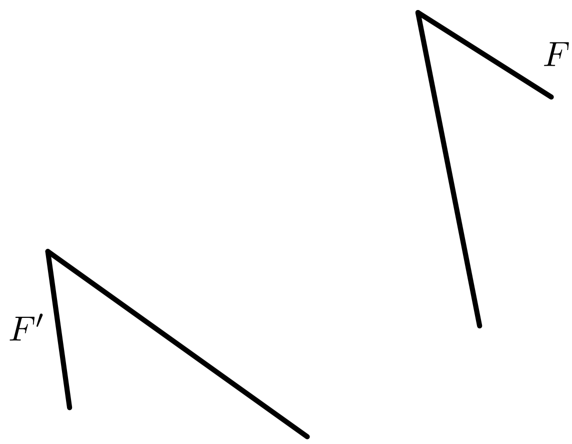
Wir haben die Gleichung $\frac{1}{2.7}=\frac{h}{5.6}$, woraus unmittelbar $h=\frac{5.6}{2.7}\approx 2.1\,\mathrm{m}$ folgt.

3.7. Übungen

1. Spiegle das Dreieck und den Kreis an der Geraden g.

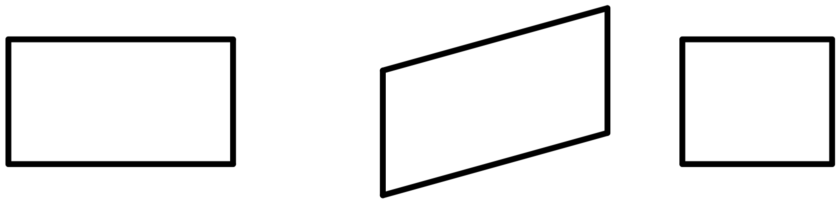


2. Die Figur F kann durch eine Achsenspiegelung in die Figur F' überführt werden. Konstruiere die Spiegelachse.



3. Geht eine Figur durch eine Achsenspiegelung in sich selbst über, so heisst die Figur achsensymmetrisch. Bei Achsensymmetrie heisst die Spiegelachse auch Symmetrieachse der Figur.

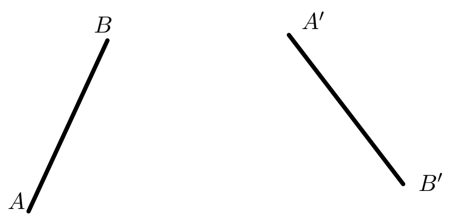
   Zeichne bei den Figuren alle möglichen Symmetrieachsen und Symmetriepunkte ein.



4. Drehe den Punkt P um Z um den Winkel 120° im Uhrzeigersinn.

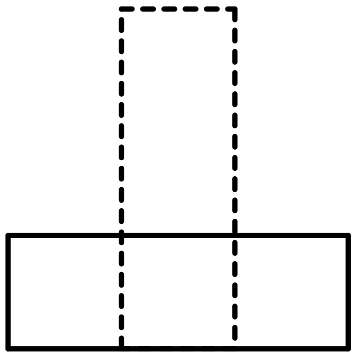
5. Der Punkt A wurde um einen Drehpunkt nach A' gedreht. Wo muss der Drehpunkt liegen?

6. Die Strecke AB wurde um einen Drehpunkt nach $A'B'$ gedreht. Konstruiere den Drehpunkt.



7. Eine rechteckige Tischplatte soll auf ihrem Untergestell derart gelagert sein, dass

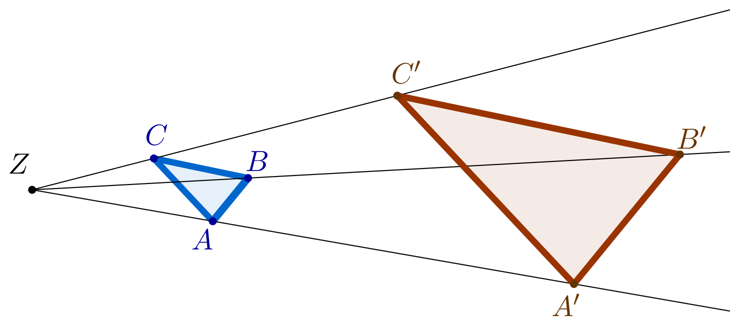
sie die beiden gezeichneten Lagen einnehmen kann. An welcher Stelle muss der Tischler den Drehzapfen anbringen?



8. Ein Sportflugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 240 km/h nach Norden. Von Westen weht ein Wind mit 60 km/h. Bestimmen an der Abbildung die Richtung und die tatsächliche Geschwindigkeit des Flugzeugs gegenüber dem Erdboden.

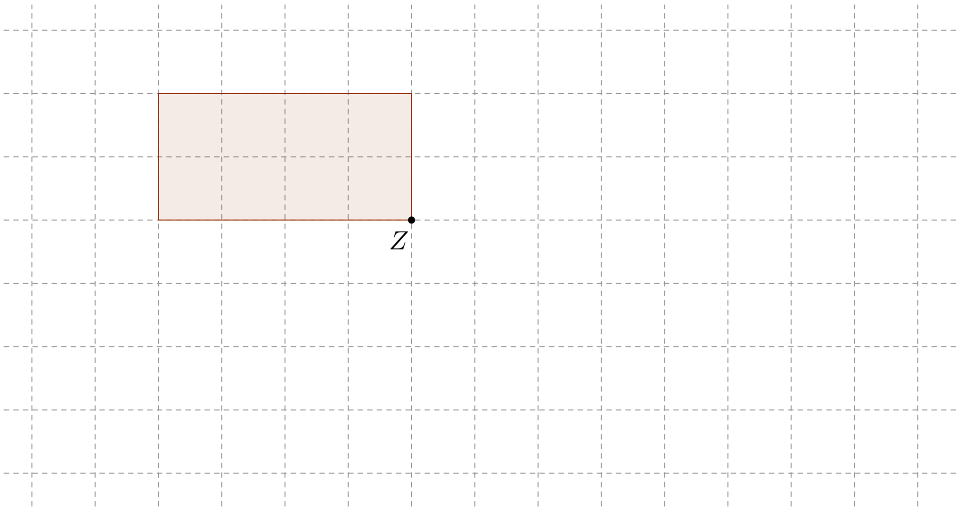
9. Durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum Z ist aus dem Originaldreieck ABC das Bilddreieck $A'B'C'$ entstanden.

   Mit welchem Streckungsfaktor wurde es gestreckt? In welchem Verhältnis stehen entsprechende Seitenlängen zueinander? In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte zueinander?



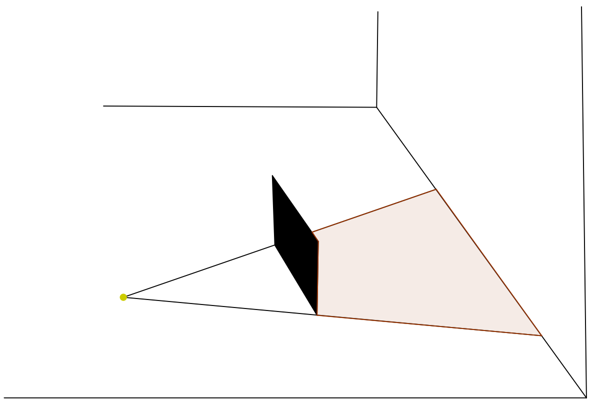
10. Strecke die Figur von Z aus mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{3}$.

11. Strecke das Rechteck von Z aus mit dem Streckungsfaktor -2.



12. Verbindet man die Seitenmitten eines Dreiecks ABC, so entsteht ein weiteres Dreieck. Dieses könnte aus dem Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung erhalten werden. Wo liegt das Streckungszentrum und wie gross ist der Streckungsfaktor?

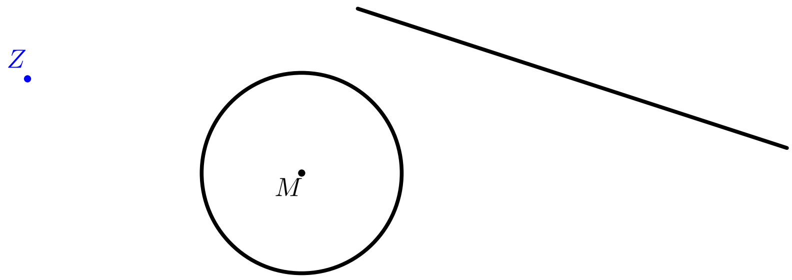
13. In einem Zimmer steht das schwarze rechteckige Brett parallel zur Wand auf dem Boden. Von einem Punkt vom Boden aus strahlt Licht. Zeichnen Sie die Lichtstrahlen durch die oberen Eckpunkte des Bretts und finde so deren Schlagschatten an der Wand.



14. Ein Filmnegativ der Grösse $24 \times 36\,\text{mm}$ soll so vergrössert werden, dass das Bild alles zeigt, was auf dem Negativ ist. Bei welchem der drei Papierformate 9×13, 10×15, 13×18 (alle Masse in cm) ist dies ohne Verschnitt möglich?

15. Der Kreis mit Mittelpunkt M soll von Z aus so gestreckt werden, dass der Bildkreis

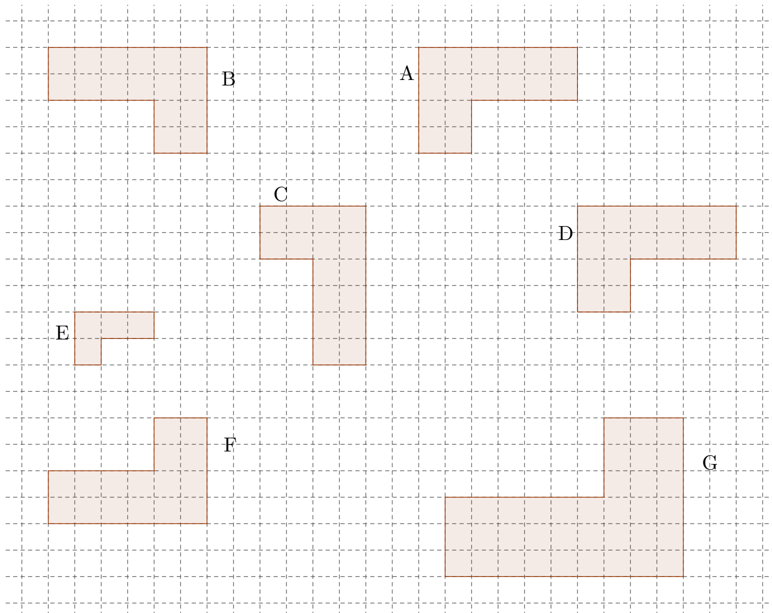
die Gerade g berührt. Konstruiere den Bildkreis.



16. Auf einer Karte mit Massstab $1 \div 25'000$ ist ein horizontales Autobahnstück 65 mm lang und eine Stadt bedeckt eine Fläche von $420\,\text{cm}^2$. Wie lang ist das Autobahnstück und wie gross ist die Stadtfläche in Wirklichkeit?

17. Die Schweiz hat eine Fläche von $41'000\,\text{km}^2$. Die Luftlinie Bern-Thun beträgt 25 km. Welche Fläche hat die Schweiz auf einer Karte, bei der die Distanz Bern-Thun 5 cm beträgt?

18. Die Originalfigur A kann je durch eine Ähnlichkeitsabbildung in die Bildfigur B, C, D, E, F oder G abgebildet werden.



Welche Abbildung ist

a) eine Kongruenzabbildung

b) eine Punktspiegelung

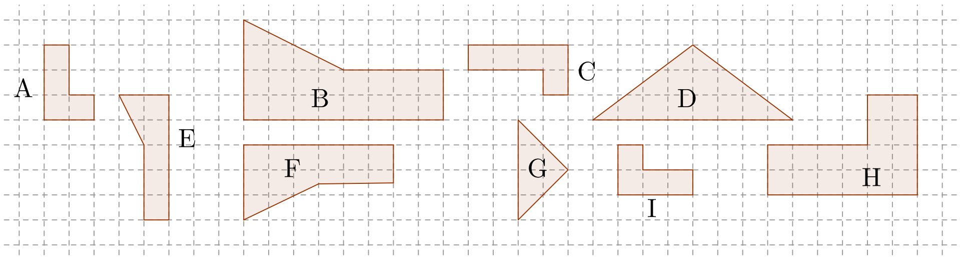
c) eine Rotation

d) eine Achsenspiegelung

e) eine Verschiebung

f) eine zentrische Streckung

19. Welche Figuren sind zueinander ähnlich?



20. Wahr oder falsch?

a) Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

b) Alle rechtwinkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

c) Alle gleichschenkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

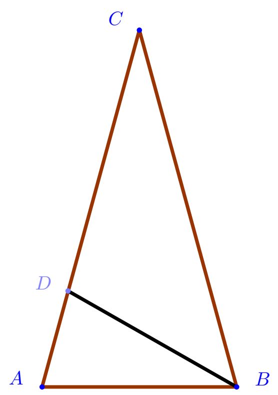
d) Alle rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich.

e) Alle Quadrate sind zueinander ähnlich.

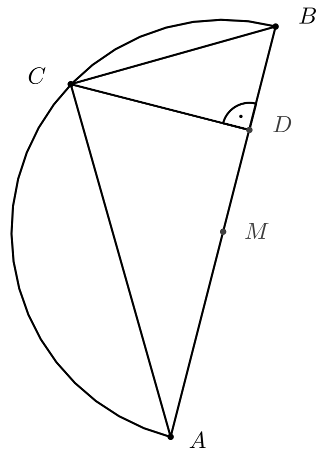
f) Alle Rechtecke sind zueinander ähnlich.

g) Alle Kreise sind zueinander ähnlich.

21. Zeigen Sie, dass die gleichschenkligen Dreiecke ABC und DAB in der Grösse von zwei Winkeln übereinstimmen und somit ähnlich sind.

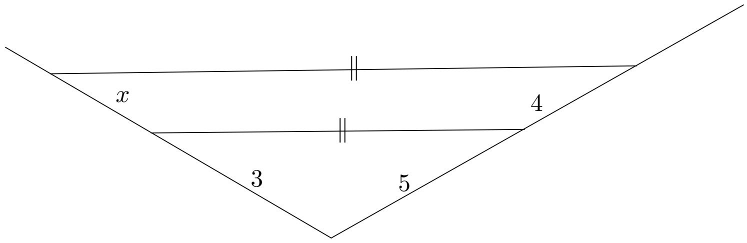


22. Über der Strecke AB ist der Halbkreis mit dem Mittelpunkt M gezeichnet, C liegt auf dem Halbkreis. Beweise die Ähnlichkeit der Dreiecke ADC und ACB.

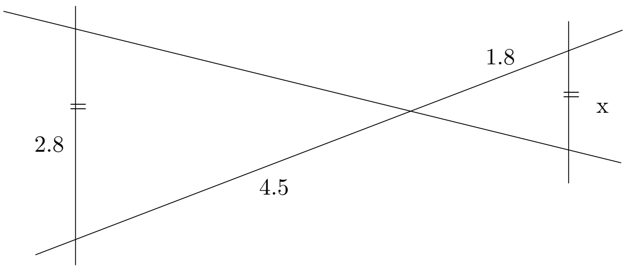


23. Berechne aus den gegebenen Angaben die Streckenlänge x.

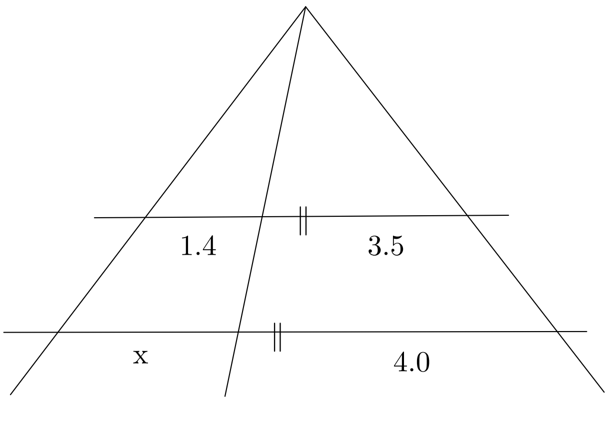
    a)



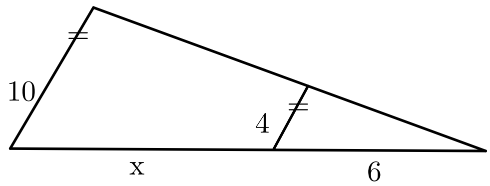
b)



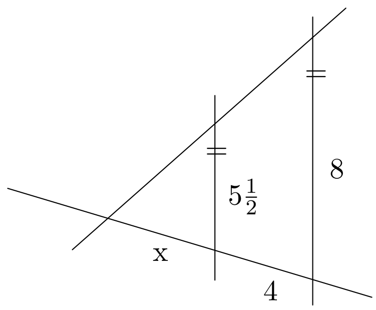
c)



d)



e)



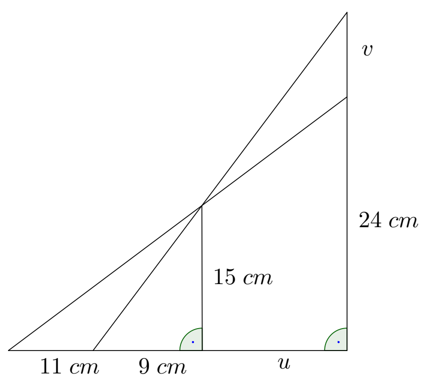
24. Teile, ohne zu messen oder zu rechnen, eine Strecke AB im Verhältnis $1 \div 2$.

25. Konstruiere eine Strecke, für deren Länge x die Beziehung gilt:

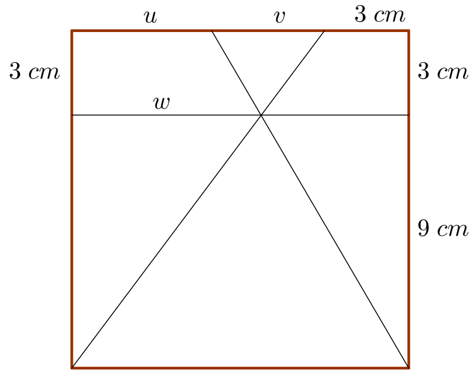
    a) $2 \div 3 = 5 \div x$

    b) $x \div 5 = 3 \div 4$

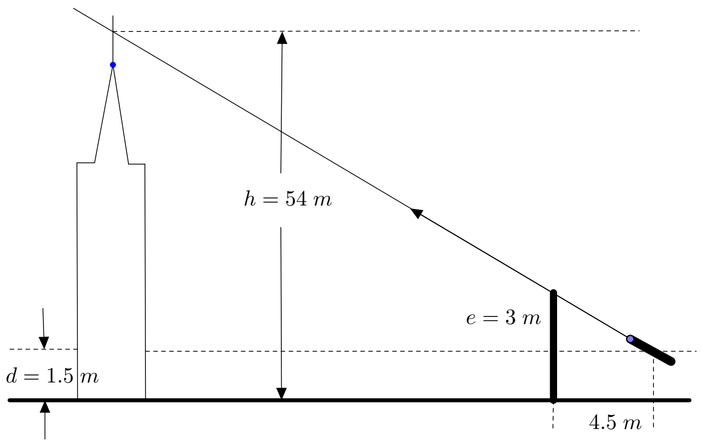
26. Berechne u und v.



27. Gegeben sei ein Quadrat, darin schneiden sich drei Geraden — wie abgebildet — in einem Punkt. Berechne w, v und u.



28. Berechne die horizontale Entfernung des Kirchturms vom Beobachtungsinstrument.



29. Visiert man einen vertikal gehaltenen Bleichstift Z zuerst mit dem rechten und dann mit dem linken Auge an, so kommt er mit zwei verschiedenen Geländepunkten A und B zur Deckung. Wie weit ist der Bleistift von A entfernt, wenn der Abstand Bleistift-rechtes Auge $d = 72\,\text{cm}$, Pupillenabstand $s = 7.5\,\text{cm}$ und die Länge der Strecke $\overline{AB} = 250\,\text{m}$ bekannt sind?

30. Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks misst 6 cm, die Höhe 12 cm. Dem Dreieck ist ein Quadrat einbeschrieben. Wie lang ist die Quadratseite?

31. Die Sonne erzeugt vom Mond einen Schlagschatten, der als Schattenkegel weit

in den Raum hinausreicht. Berechne, wie weit die Spitze des Schattenkegels vom Mondzentrum entfernt ist.

32. Ein Würfel wird zentrisch gestreckt, so dass sich die Kantenlängen des Bildwürfels zu den Kantenlängen des Originalwürfels wie $3 \div 2$ verhalten. Wie verhalten sich

    a) die Längen der Körperdiagonalen,

    b) die Inhalte der Seitenflächen,

    c) die Volumen?

33. Eine ägyptische Pyramide mit quadratischem Grundriss wird von waagrecht abgelagertem Wüstensand allmählich begraben. Die Höhe der noch sichtbaren Pyramide beträgt nur noch vier Fünftel der Höhe der ursprünglichen Pyramide.

    a) Wie verhalten sich die Volumen des sichtbaren und des verschütteten Teils zueinander?

    b) Wie viele % des ursprünglichen Pyramidenvolumens ragen noch aus dem Sand?

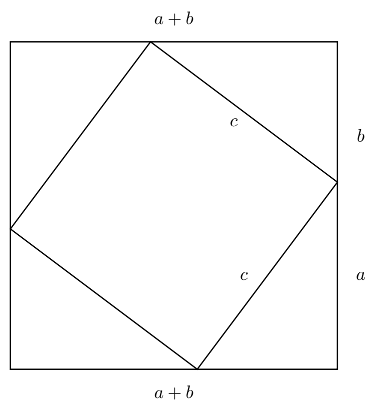
A. Satz von Pythagoras

Satz 1.1: Satz von Pythagoras

Sind a, b und c die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei a und b die Längen der Katheten sind und c die Länge der Hypotenuse ist, so gilt

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Beweis. Betrachte ein Quadrat mit Seitenlänge $a + b$ und ein einbeschriebenes Quadrat mit der Seitenlänge c, die von der Unterteilung durch a und b von einer Seite auf eine benachbarte Seite zeigt. Die Quadrate und Teildreiecke sind rechtwinklig.



Die Gesamtfläche $(a + b)^2$ setzt sich offensichtlich aus den Teilflächen c^2 und $4 \cdot \frac{1}{2}ab$ zusammen:

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab \\
a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\
a^2 + b^2 &= c^2
\end{aligned}$$

□

B. Polyeder

Als Polyeder (griech., Vielflächner) bezeichnet man Körper, die nur von ebenen Vielecken begrenzt werden. Beispiele sind Würfel, Pyramiden, Prismen; ein Zylinder ist kein Polyeder.

B.1. Die 5 Platon'schen Polyeder

Besteht eine Oberfläche eines konvexen Polyeders aus lauter kongruenten Vielecken und treffen in dessen Ecken immer die gleiche Anzahl Flächen zusammen, so spricht man von einem regelmässigen Polyeder. Ihre Anzahl ist beschränkt und kann ermittelt werden, wenn man bedenkt:

- Die Summe aller Kantenwinkel an jeder Körperecke muss kleiner als 360° sein.
- In jeder Körperecke stossen mindestens 3 Flächen zusammen.

Somit folgt: Wird das Polyeder von regelmässigen Dreiecken begrenzt, so kann eine Ecke nur von 3, 4 oder 5 Seitenflächen gebildet werden (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder). Wird das Polyeder von regelmässigen Vierecken (Hexaeder) oder regelmässigen Fünfecken (Dodekaeder) begrenzt, so kann eine Ecke nur durch 3 Seitenflächen gebildet werden. Andere Möglichkeiten gibt es nicht mehr.

Übung B.1.

Begründen Sie diese Folgerungen.

Satz 2.1: Regulärer Polyedersatz

Es gibt genau 5 regelmässige Polyeder.

Für den griechischen Philosophen Plato (427–347 v. Chr.) waren diese fünf Körper Grundbausteine seines Weltsystems: Sie entsprachen den vier Elementen Feuer, Erde, Wasser und Luft. Das Dodekaeder entsprach einer Schale, die das ganze Universum einhüllt. Daher werden die fünf regelmässigen Polyeder auch platonische Körper genannt.

Diese Idee Platons kann als erster bekannter Versuch interpretiert werden, die Welt mit einem Atombild zu erklären. Platon stellte auch Regeln auf, wie die einzelnen Elemente miteinander reagieren oder ineinander übergeführt werden können.

Selbst die Natur bevorzugt bei Kristallformen der Platon'schen Körper Gestalt. Der

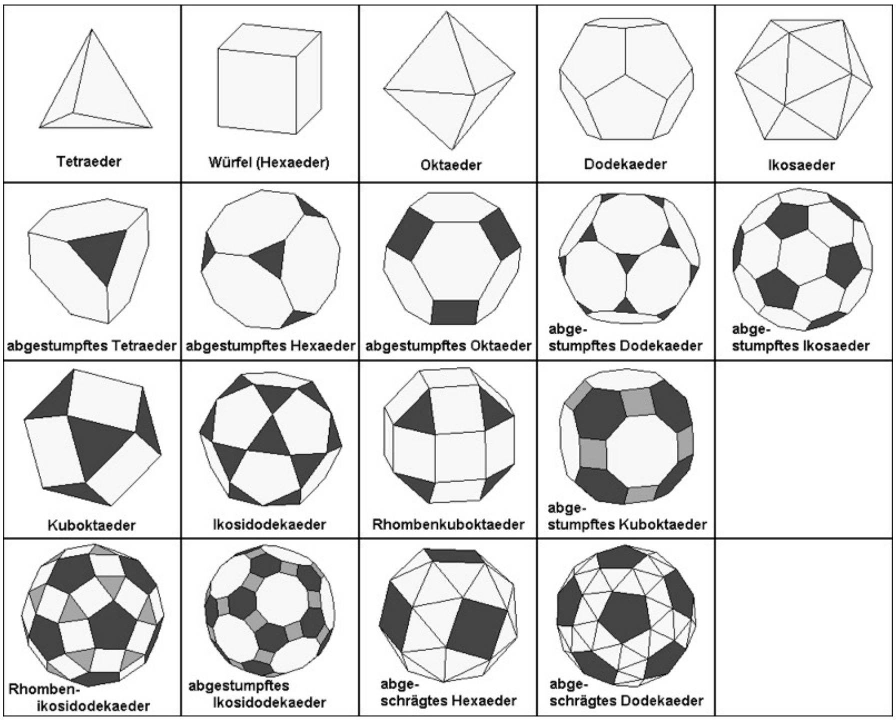


Abbildung 3: Die fünf regelmässigen Polyeder mit verwandten

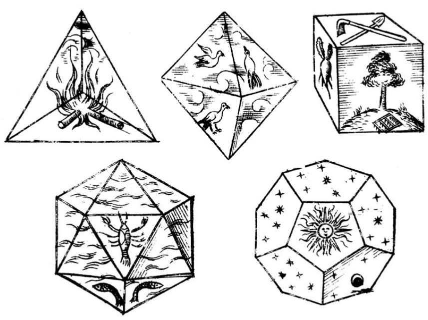


Abbildung 4: Die fünf platonischen Körper und ihre Bedeutung als Elemente

Astronom Johannes Kepler (1471–1528) benutzte diese regelmässigen Polyeder als Modell für die Bahnen der Planeten. Eine der Erdbahn zugeordnete Kugel bildet den Ausgang. Ihr wird ein Dodekaeder umbeschrieben; auf dessen Umkugel liegt die Bahn des Mars. Das dieser Kugel umbeschriebene Tetraeder enthält auf seiner Umkugel die Bahn des Jupiter, und der dieser Kugel umbeschriebene Würfel bestimmt eine Umkugel, auf der die Bahn des Saturn verläuft. Das der Erdbahnkugel einbeschriebene Ikosaeder trägt auf seiner Inkugel die Bahn der Venus und das dieser Inkugel einbeschrieben Oktaeder

Abbildung 5: Fluorkristalle (Würfel und Oktaeder)

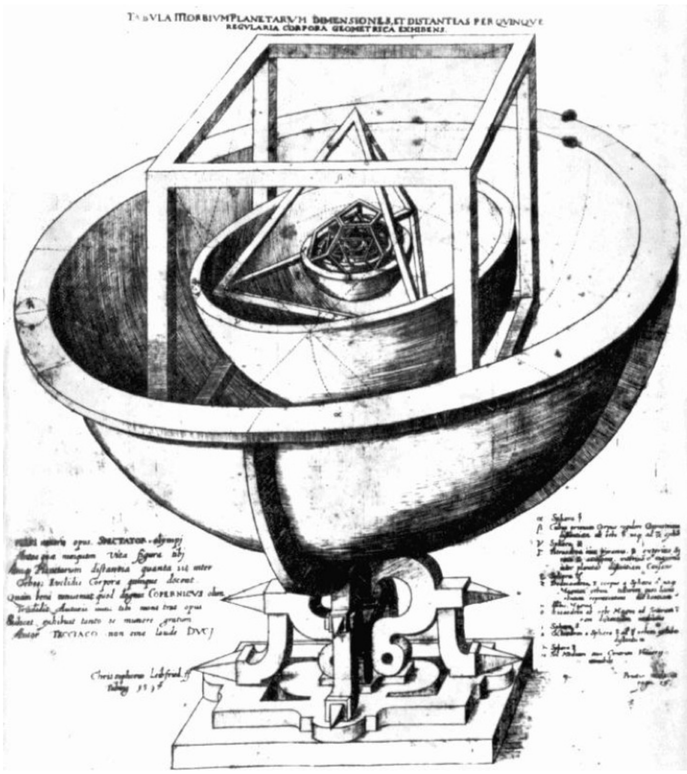


Abbildung 6: Planetenbahnmodell von Kepler

enthält auf seiner Inkugel die Bahn des Merkurs.

Übung B.2.

Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Körper	**Ecken**	**Flächen**	**Kanten**
Tetraeder			
Hexaeder			
Oktaeder			
Dodekaeder			
Ikosaeder			

Fällt dir beim Betrachten der Tabelle auch auf, was LEONARD EULER entdeckt hat?

B.2. Der Euler'sche Polyedersatz

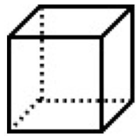
Obwohl sich die griechischen Mathematiker intensiv mit den Polyedern beschäftigt haben, wurde der folgende Satz erst von LEONARD EULER (1707–1783) entdeckt.

Satz 2.2: Euler'scher Polyedersatz

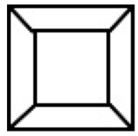
Es sei E die Anzahl Ecken, K die Anzahl Kanten und F die Anzahl Seitenflächen eines beliebigen Polyeders. Dann gilt:

$$E - K + F = 2.$$

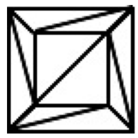
Beweis. Wir haben diesen Satz bereits bei den platonischen Körper bestätigt. Die folgenden Beweisschritte werden am Beispiel eines Würfels demonstriert. Man stelle sich dabei vor, dass die Oberfläche des Polyeders aus einer Gummihaut besteht.



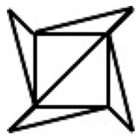
1. Nach Herausnehmen einer Fläche ($F \to F - 1$) kann man die Oberfläche so stark deformieren, dass sie schliesslich flach in der Ebene liegt.



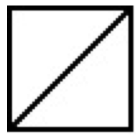
2. Triangulation: In jedem Vieleck, das nicht schon ein Dreieck ist, wird eine Diagonale eingezeichnet: ($K \to K + 1, F \to F + 1$) $E - K + F$ bleibt konstant.



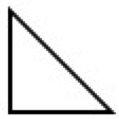
3. Bei den Dreiecken, die nur eine Kante auf der Randlinie haben, wird alles entfernt, was nicht zugleich zu anderen Dreiecken gehört: ($K \to K - 1, F \to F - 1$) $E - K + F$ bleibt konstant.



4. Bei den Dreiecken, die zwei Kanten auf der Randlinie haben, wird auch alles entfernt, was nicht zugleich zu anderen Dreiecken gehört: ($E \to E - 1, K \to K - 2, F \to F - 1$) $E - K + F$ bleibt konstant.



5. Die Punkte 3. und 4. werden so lange wiederholt, bis zuletzt nur noch ein Dreieck mit $E - K + F = 1$ übrig bleibt.



Bei diesen Operationen hat sich der Wert von $E - K + F = 1$ nicht verändert. Berücksichtigt man noch Punkt 1., so muss für das Polyeder $E - K + F = 2$ gelten. □

Übung B.3.

in konvexes Polyeder hat 14 Flächen und 24 Ecken. Wie viele Kanten hat es?

B.3. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung B.3

Der Innenwinkel an einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks ist 60°. Man kann daher nicht mehr als 5 solche in einer Ecke zusammenkommen lassen, da sonst die Winkelsumme 360° oder mehr beträgt, der Polyeder also nicht mehr konvex ist (es zwingt ihn in die Ebene oder konkav). Das gleiche Argument gilt für die Quadrate (90°) und die regelmässigen Fünfecke (108°). Man sieht so zudem, dass nicht mehr als zwei reguläre Sechsecke (120°) an einer Ecke zusammenkommen könnten, um konvex zu bleiben.

Notizen zu Übung B.3

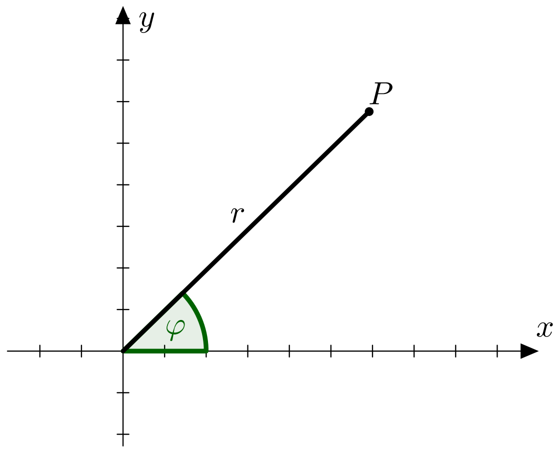
Körper	Ecken	Flächen	Kanten
Tetraeder	4	4	6
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

Notizen zu Übung B.3

s ist nach Euler'schem Polyedersatz $24 - K + 14 = 2$, also hat es 36 Kanten.

C. Polarkoordinaten

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem kann die Lage eines Punktes $P \neq (0|0)$ nicht nur durch seine kartesischen Koordinaten $(x|y)$, sondern auch durch seinen Abstand $r > 0$ vom Ursprung und einem Richtungswinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig angegeben werden.



Definition 3.1: Polarkoordinaten

Das Paar $(r|\varphi)$ nennt man die *Polarkoordinaten* von P.

Polarkoordinaten können insbesondere dann nützlich sein, wenn man in Kugelsymmetrien rechnet oder einfach punktsymmetrische Probleme lösen muss.

Abbildungsverzeichnis