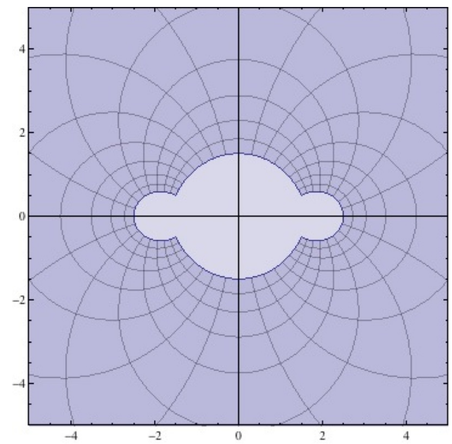
Komplexe Funktionen

Angewandte Mathematik
Komplexe Funktionen
Funktionen
gymkl, WaJ

1 Komplexe parametrische Kurven

Seien $x(t)$ und $y(t)$ zwei reelle Funktionen in der Variablen t. Wir können daraus eine komplexe Funktion in der Variablen t basteln, indem wir $x(t)$ als Realteil und $y(t)$ als Imaginärteil nehmen.



Definition 1.1. Die Funktion

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

ist eine **komplexe Funktion** der reellen Variablen t.

Überstreicht die Variable t ein gewisses Intervall in $\mathbb{R}$, so schreibt die Funktion $z(t)$ eine parametrische Kurve in der Gauss'schen Ebene, mit dem Parameter t. Eine komplexe parametrische Funktion kann auch in anderer Form ausgedrückt werden:

polar $z(t) = r(t)(\cos\varphi(t) + i\sin\varphi(t))$

exponentiell $z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$

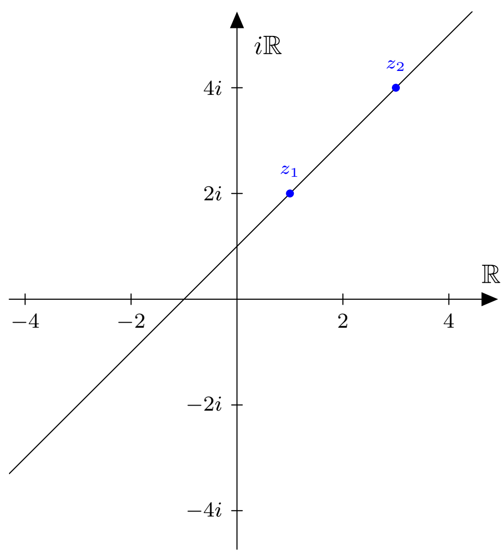
Der Betrag $r(t)$ und das Argument $\varphi(t)$ mit den Funktionen des kartesischen Koordinatensystems $x(t)$ und $y(t)$ erreicht man über die üblichen Formeln

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

und

$$\varphi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right).$$

Beispiel 1. Wir stellen die Gerade durch die Punkte $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 + 4i$ in parametrischer Form in der komplexen Ebene dar.



Dazu können wir zum Beispiel die Punkte als Ortsvektoren auffassen und die vektorielle Parameterdarstellung für Geraden verwenden. Es ist

$$\vec{g}(t) = \vec{z_1} + t \cdot (\vec{z_2} - \vec{z_1}),$$

also

$$z(t) = 1 + i2 + t(2 + i2) = (1 + 2t) + i(2 + 2t)$$

mit

$$x(t) = 1 + 2t \quad \text{und} \quad y(t) = 2 + 2t$$

oder mit $s = 1 + 2t$ kürzer

$$x(s) = s \quad \text{und} \quad y(s) = 1 + s$$

was

$$z(s) = s + i(1 + s)$$

ergibt. Alternativ kann man mit Koordinaten arbeiten und erhält unmittelbar die Geradengleichung

$$f(x) = x + 1$$

im $\mathbb{R}^2$. Das heisst $(x \,|\, x + 1)$, was in Parameterform $(t \,|\, t + 1)$ entspricht. Also gilt

$$z(t) = t + i(1 + t).$$

Übung 1. Beschreibe in parametrischer Form den Kreis mit Zentrum $z_0 = 3 + 4i$ und Radius $r = 2$ in der komplexen Ebene.

Übung 2. Beschreibe das Bild der Geraden aus Beispiel 1 unter der Abbildung

$$f(z) = z^2.$$

Übung 3. Beschreibe und zeichne die Bilder aller Geraden der komplexen Ebene parallel zur reellen bzw. imaginären Achse unter der Abbildung

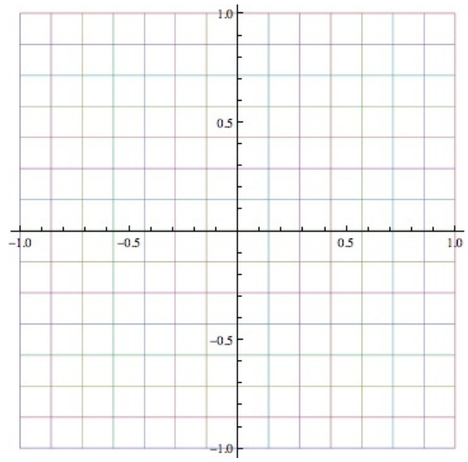
$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

2 Komplexe Funktionen mit komplexer Variable

Wir betrachten nun Abbildungen

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C},$$

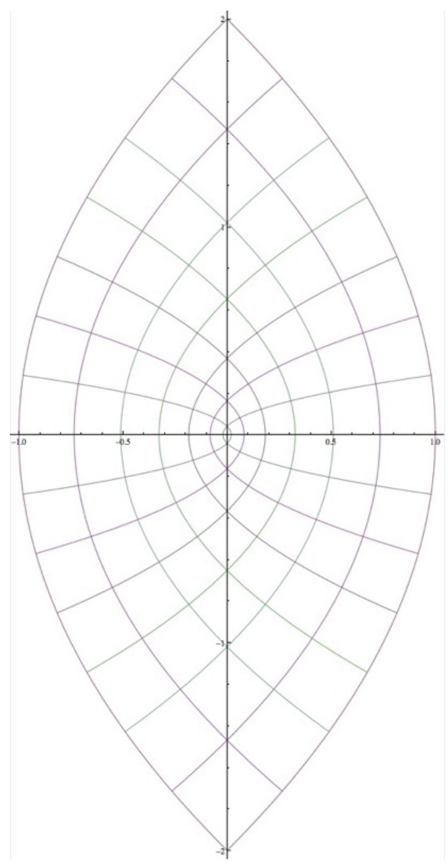
wobei die Definitionsmenge eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Um eine solche Abbildung darzustellen bräuchten wir einen 4-dimensionalen Raum. Weil dies nicht möglich ist, stellen wir die Funktion f dar, indem wir die zwei Mengen in zwei getrennten Figuren darstellen. Die erste Figur stellt einen Teil der komplexen Ebene dar, die $\mathbb{D}$ enthält, und in der wir repräsentative Elemente (Punkte, Geraden, Kurven) platzieren. Die zweite Figur stellt die Bilder der repräsentativen Elemente unter der Funktion dar. In der Praxis betrachten wir häufig einen rechtwinkligen Bereich in $\mathbb{D}$, der mit einem regelmässigen Gitter von parallel zu den Achsen verlaufenden Geraden überdeckt ist.



Beispiel 2. Das Bild unter

$$f(z) = z^2$$

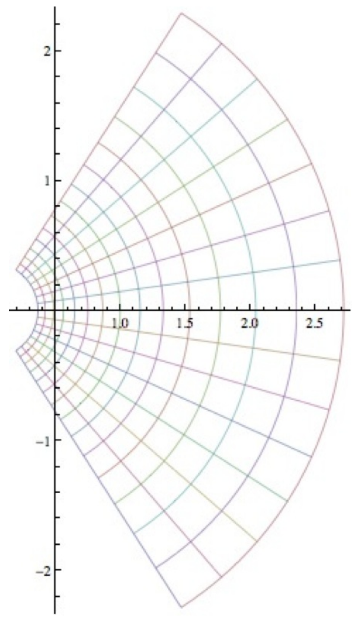
eines quadratischen Gitters mit Seitenlänge zwei sieht wie folgt aus:



Beispiel 3. Das Bild unter

$$f(z) = e^z$$

sieht wie folgt aus:

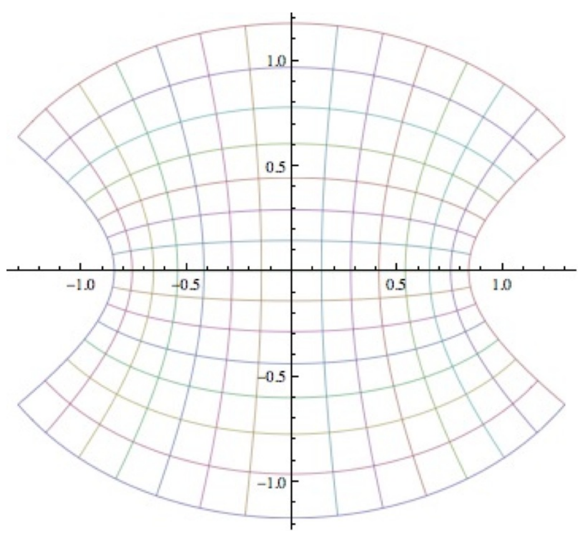


Beispiel 4. Das Bild unter

$$f(z) = sin(z)$$

erhalten wir mit Hilfe der Definition des komplexen Sinus:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$



Komplexe Funktionen

Unter der Menge aller Abbildungen $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ unterscheiden wir eine spezielle Untermenge; die konformen Abbildungen.

Definition 2.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ heisst **konforme Abbildung**, falls

$$f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Die konformen Abbildungen besitzen folgende geometrische Eigenschaft:

Satz 2.1. *Eine konforme Abbildung ist winkeltreu.*

Die Abbildungen in den obenstehenden Figuren sind konforme Abbildungen. Wir können bemerken, dass die rechtwinkligen Schnittwinkel zwischen den horizontalen und vertikalen Geraden unter der Transformation konserviert sind. In Engineering ist eine Familie von konformen Abbildungen besonders wichtig: die Homographien — oder öfter Möbius-Transformationen genannt.

Definition 2.2. Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ der Form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc \neq 0)$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ heisst **Homographie** oder **Möbius Transformation**.

Beispiel 5. Die Verschiebung

$$f(z) = z + z_0$$

mit $z_0 \in \mathbb{C}$ ist eine Möbius Transformation.

Beispiel 6. Jede Streckung

$$f(z) = c \cdot z$$

mit $c \in \mathbb{C}$ ist eine Möbius Transformation.

Übung 4. Ist die *Inversion*

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

eine Möbius Transformation?

Zeichne das Bild eines regelmässigen Gitters mit Seitenlänge 2.

Man kann die folgende interessante geometrische Eigenschaft beweisen:

Satz 2.2. *Eine Möbius Transformation konserviert die Kreise.*

Ferner gilt für eine Möbius Transformation:

- Die Bildmenge unter f einer Geraden der komplexen Ebene ist entweder eine Gerade, oder ein Kreis in der komplexen Ebene (eine Gerade kann als Kreis mit unendlichem Radius interpretiert werden.)

- Die Bildmenge unter f eines Kreises der komplexen Ebene ist entweder eine Gerade, oder ein Kreis in der komplexen Ebene.

Ein Kreis ist also vollständig bestimmt, wenn drei von seinen Punkten gegeben sind. Um die Bildmenge eines Kreises unter f zu beschreiben, genügt es folglich, drei Punkte auszuwählen und deren Bilder unter f zu berechnen. Dann ermöglichen die Bilder dieser drei Punkte die Konstruktion des Bildkreises bzw. der Bildgeraden.

Übung 5. Beschreibe das Bild eines Kreises mit Radius 2 mit Zentrum im Ursprung unter

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Übung 6. Beschreibe das Bild eines Kreises mit Radius 1 mit Zentrum in $2 + i$ unter

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Übung 7. Beschreibe das Bild eines Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ mit Zentrum in $1 + i$ unter

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Übung 8. Beschreibe unter

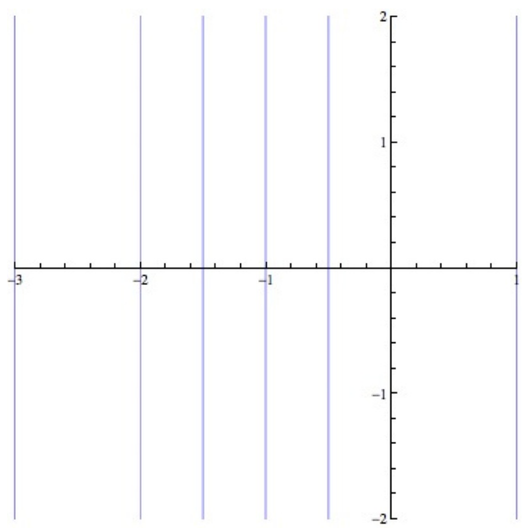
$$f(z) = \frac{1}{z}$$

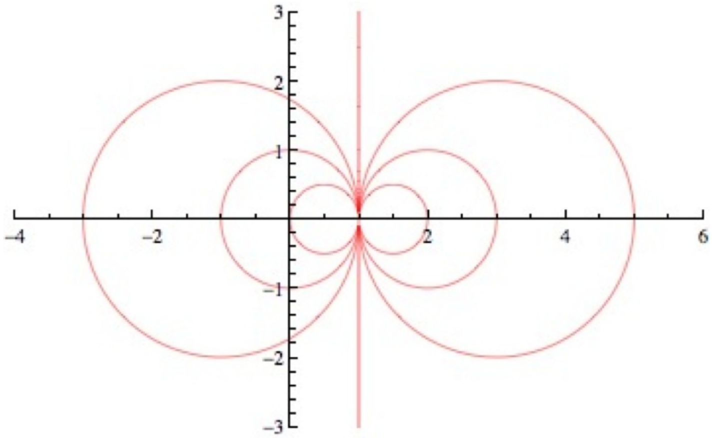
die Bilder einer Ursprungsgeraden und einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht.

Beispiel 7. Eine spezielle Möbius Transformation, nämlich

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

gibt eine graphische Darstellung, die in der Telekommunikation verwendet wird: das sogenannte *Smith-Diagramm* oder *Smith-Chart*. Das Bild einer vertikalen Geraden sieht wie folgt aus:





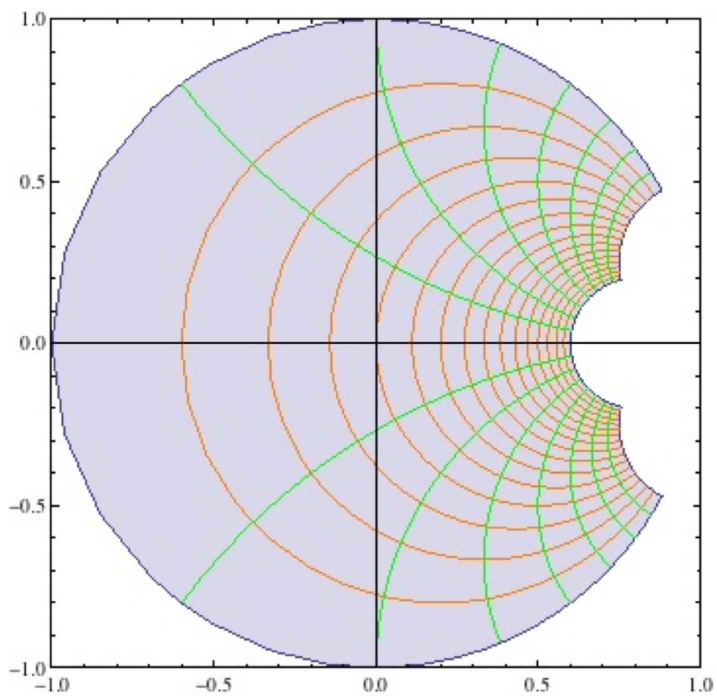
Übung 9. Beschreibe das Bild einer horizontalen Geraden unter

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Die sogenannte *Smith-Chart-Grafik* besteht aus den Bildern vertikaler und horizontaler Geraden der positiven Halbebene unter

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Die reelle Achse entspricht dabei dem elektrischen Widerstand, der stets positiv ist. Anschliessend ein Ausschnitt für $0 \leq a \leq 4$ und $-4 \leq b \leq 4$.

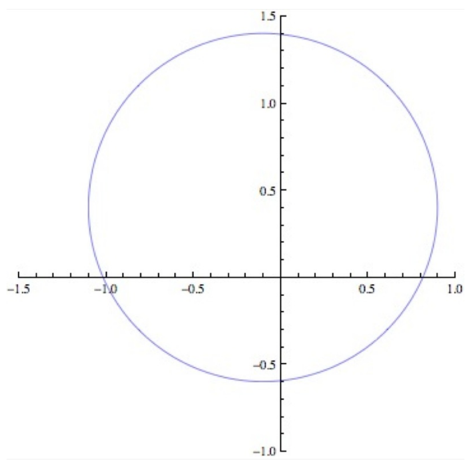


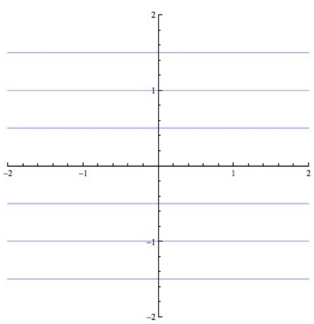
Beispiel 8. Die *Joukowski-Abblidung*

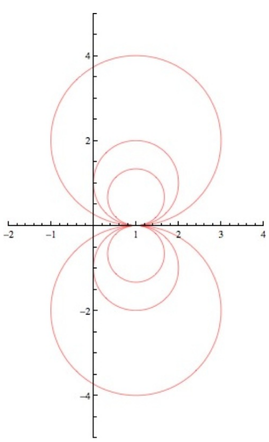
$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

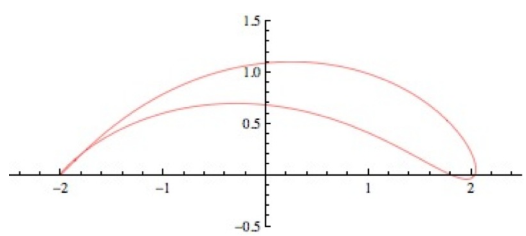
ist eine komplexe Abbildung, welche keine Möbius Transformation ist. Sie spielt offensichtlich in der Aerodynamik eine besondere Rolle, wie folgende Übung zeigt.

Übung 10. Bestimme unter f aus Beispiel 8 die Bildmenge des Kreises mit Zentrum $-0.1 + 0.4i$, der durch den Punkt -1 geht.









Lösungen

1.) $2e^{it} + (3 + 4i)$
2.) Das Bild ist eine Parabel $(0.5^2 - 0.5)$.
3.) Die reelle Achse wird auf die reelle Achse ohne 0 abgebildet, sonst hat man einen Kreis $m = \frac{1}{2b}i$, $r = \frac{1}{2b}$; Die imaginäre Achse wird auf die imaginäre Achse ohne 0 abgebildet, sonst hat man einen Kreis mit $m = \frac{1}{2a}$, $r = \frac{1}{2a}$.
4.) ✓
5.) - 10.) sind nicht ganz ohne und erfordern etwas Fantasie.