47. Der erste mathematische Beweis ist schon 2500 Jahre alt

Wann fing die Mathematik eigentlich an? Das ist schwer zu sagen, es hängt davon ab, was man unter Mathematik versteht. Meint man damit die Fähigkeit, einfache mit Zahlen zusammenhängende Probleme zu behandeln, so liegen die Anfänge weit im Dunkel der Geschichte. Schon bei den Babyloniern und den Ägyptern wurde fleißig gerechnet. Wie viel Getreide wurde geerntet, wie lang muss eine Rampe für den Pyramidenbau sein?

Für die dazu erforderlichen Rechnungen gab es Anleitungen, man verwendete schon brauchbare Näherungen für die Kreiszahl π, und dass rechte Winkel etwas mit dem (heute so genannten) Satz von Pythagoras zu tun haben, war auch schon bekannt.

Üblicherweise setzt man den Anfang der Mathematik auf die Mitte des ersten vorchristlichen Jahrtausends an. So etwa um 500 vor unserer Zeitrechnung waren nämlich griechische Mathematiker nicht mehr mit Faustregeln und Beispielrechnungen zufrieden. Sie wollten der Sache auf den Grund gehen und eine sichere Basis für das Finden von Wahrheit haben. Damals wurden die ersten Beweise entwickelt, ein frühes allgemein bekanntes Beispiel ist der Satz von Thales: Liegt die Spitze eines Dreiecks auf einem Halbkreis über der längsten Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig. Und das gilt immer, man kann es nämlich aus einfachen Annahmen streng beweisen.

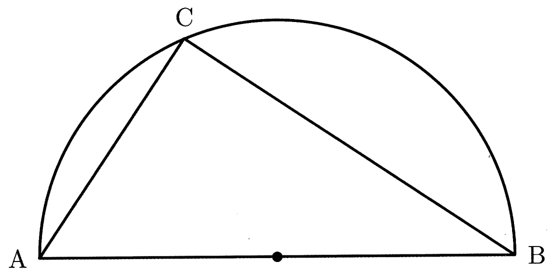

Abbildung 42: Der Satz von Thales: Bei C entsteht ein Winkel von 90 Grad

Einen ersten Höhepunkt erlebten diese Bemühungen mit dem Erscheinen der „Elemente" des Euklid, der das damalige geometrische Wissen zusammenfasste und gleichzeitig ein oft kopiertes Modell für die Entwicklung einer Wissenschaft vorlegte. Man geht von offensichtlich wahren Tatsachen (den Axiomen) aus und entwickelt dann streng logisch alle weiteren. Auf diese Weise ist zum Beispiel die Newtonsche Physik aufgebaut, auch Kant nannte diesen Ansatz vorbildlich: „*In jeder reinen Naturlehre ist nur soviel an eigentlicher Wissenschaft enthalten, als Mathematik in ihr angewandt werden kann.*" (aus: I. Kant, Kritik der Reinen Vernunft).

Diese durch griechische Mathematiker erstmals realisierte „abgesicherte Wahrheitssuche" führte zu bemerkenswerten Erfolgen. Es zeigte sich nämlich im Laufe der Neuzeit, dass immer mehr Phänomene der uns umgebenden Wirklichkeit durch Tatsachen beschrieben werden können, die in der von den Mathematikern untersuchten idealisierten Welt gefunden wurden. Das war bei Newton noch vergleichsweise einfach, man kam mit Vektoren und Funktionen aus. Heute tun sich aber auch Fachleute schwer, ständig auf der Höhe der Zeit bei all den gekrümmten Räumen, Tensoren und Wahrscheinlichkeiten zu bleiben.

Über die Frage, warum das so gut geht, kann man natürlich streiten. War der liebe Gott ein Mathematiker? Oder sehen wir nur das, was wir durch die Auswahl unserer Methoden sehen wollen? Für Mathematiker ist das eher zweitrangig. Sie finden es faszinierend und befriedigend, Wahrheiten zu finden, die in alle Zukunft Bestand haben werden.

Von Halbkreisen und rechten Winkeln

Der Satz von Thales ist ein schönes Beispiel dafür, dass man mathematische Sachverhalte manchmal dadurch leicht verifizieren kann, dass man sie nur auf die „richtige" Weise ansieht. Noch einmal die Aussage (siehe das vorstehende Bild): Es wird der Halbkreis über dem Durchmesser eines beliebigen Kreises betrachtet. Die Endpunkte des Durchmessers sollen mit A und B bezeichnet werden. Ist dann C irgendein Punkt auf dem Halbkreis, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig, der rechte Winkel liegt bei C.

Der Beweis beginnt damit, dass man sich eine Hilfslinie vom Mittelpunkt M des Kreises nach C vorstellt:

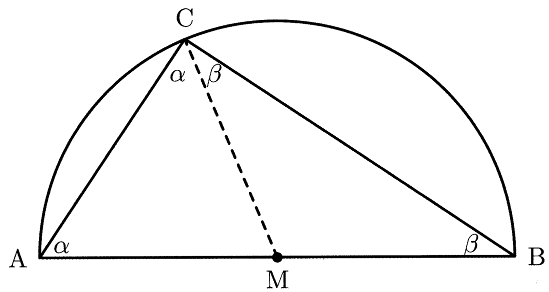

Abbildung 43: Der Satz von Thales: Beweis

Das Dreieck AMC hat dann zwei gleiche Seiten, denn sowohl die Seite AM als auch die Seite MC sind gleich dem Kreisradius. Deswegen muss – im Dreieck AMC – der Winkel bei A gleich dem bei C sein. Gleiches gilt im Dreieck MBC: Der Winkel bei B ist gleich dem bei C. Mit den Bezeichnungen des Bildes ist also im Originaldreieck ABC der Winkel bei C gleich $\alpha + \beta$.

Andererseits weiß man, dass die Winkelsumme (Winkel bei A plus Winkel bei B plus Winkel bei C) in jedem Dreieck gleich 180 Grad sein muss. In unserem Fall bedeutet das

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180,$$

und das bedeutet, dass das Doppelte von $\alpha + \beta$ gleich 180 ist. Und deswegen muss $\alpha + \beta$ selbst, also der Winkel bei C, gleich 90 Grad sein.

Der Satz von Thales wird oft angewandt. Als Beispiel sei auf die Möglichkeit hingewiesen, allein mit Zirkel und Lineal die *Wurzel aus einer Zahl* zu ziehen. Das wurde in Beitrag 33 ausführlich erläutert.