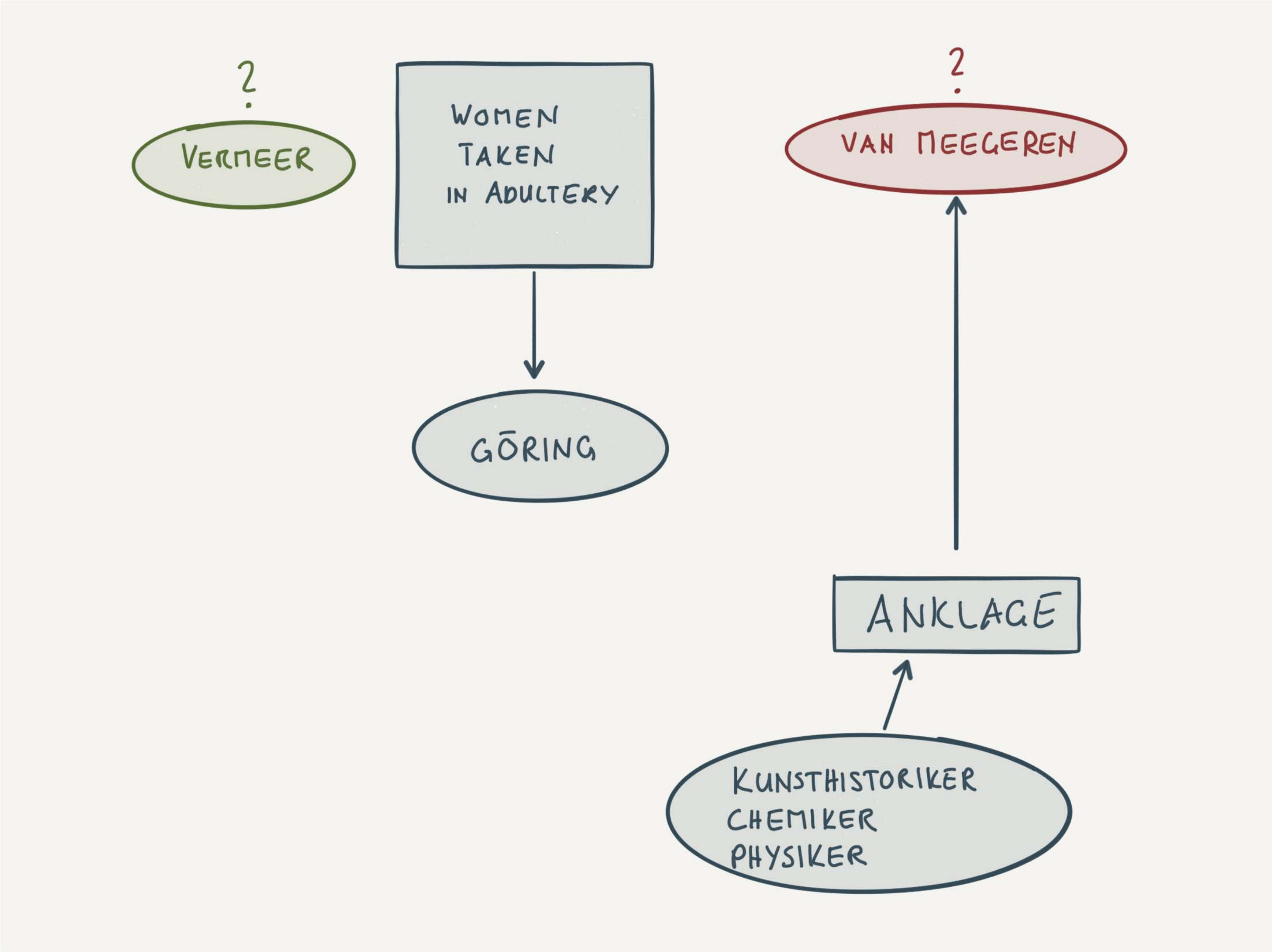
CASE STUDY

DETECTING ART FORGERIES


?
VERMEER
WOMEN
TAKEN
IN ADULTERY
GÖRING
?
VAN MEEGEREN
ANKLAGE
KUNSTHISTORIKER
CHEMIKER
PHYSIKER

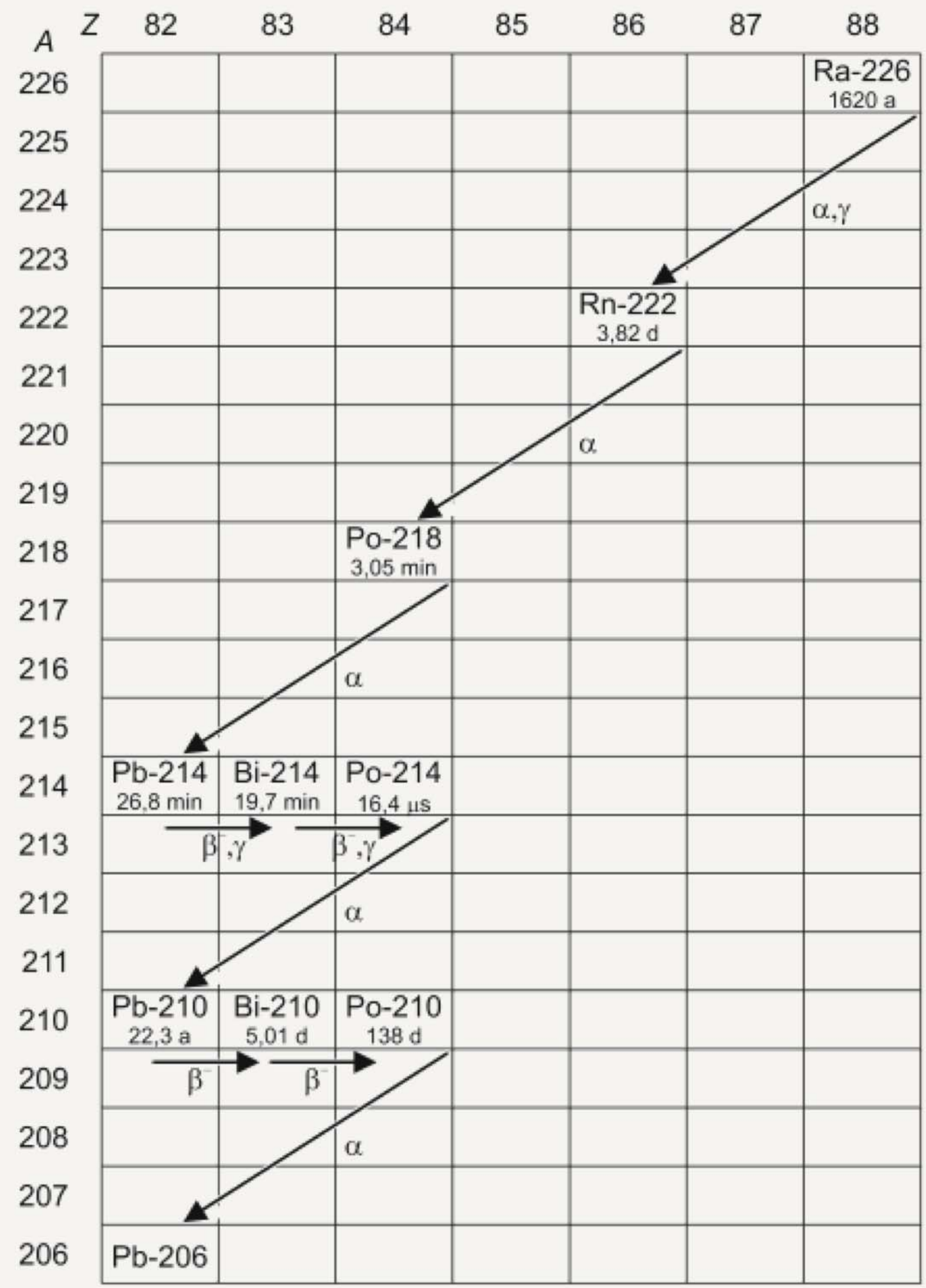
^{210}Pb

PIGMENT WEISS

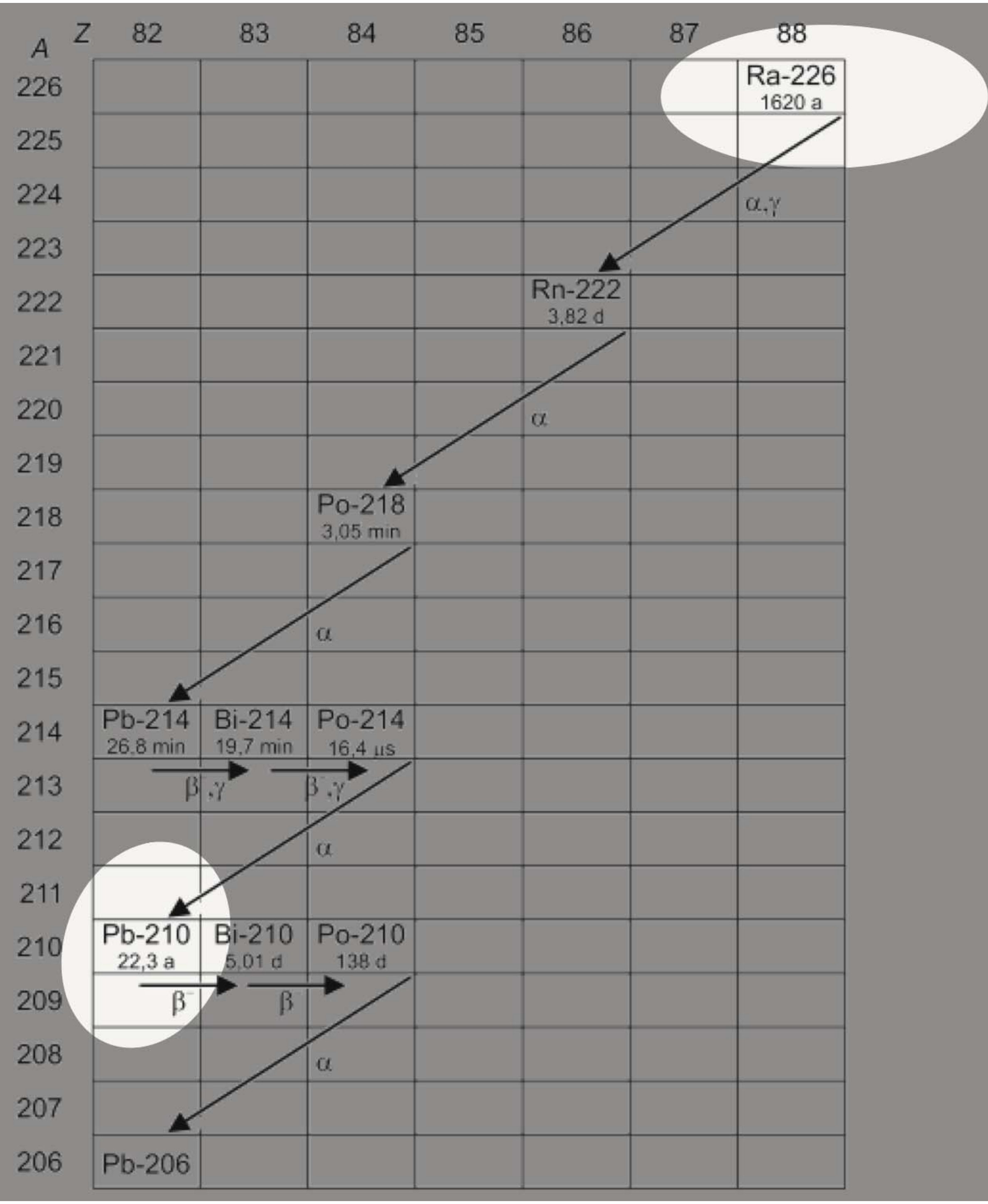
GESTEIN

- ^{210}Pb
- $^{226}Ra \dashrightarrow {}^{210}Pb$

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N + R(t)$$

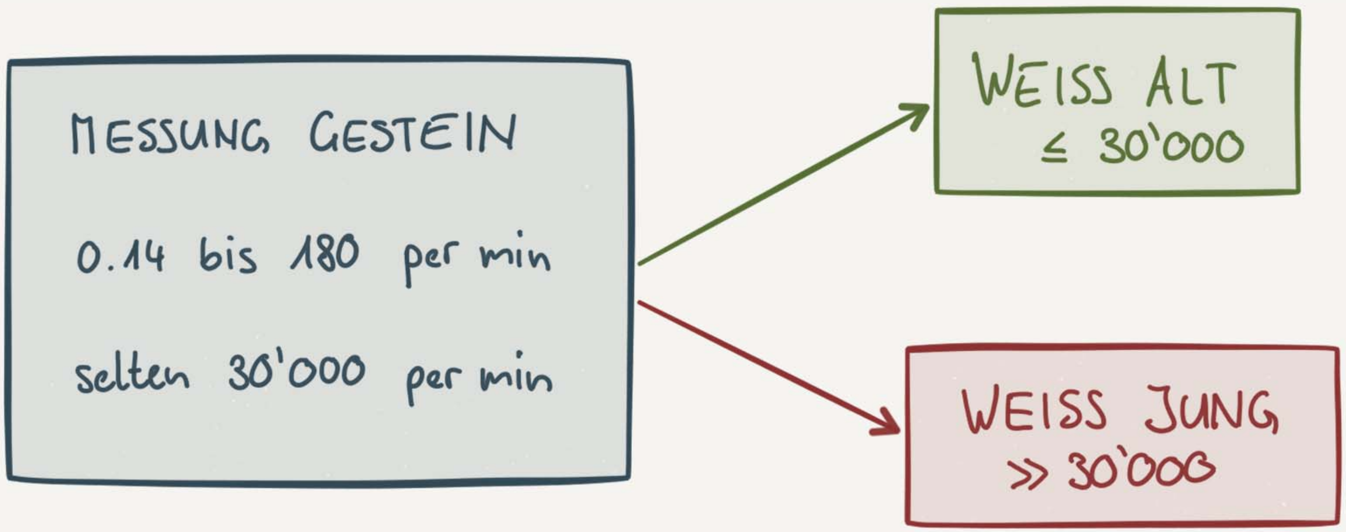


A
Z
82
83
84
85
86
87
88
226
225
224
223
222
221
220
219
218
217
216
215
214
213
212
211
210
209
208
207
206
Ra-226
1620 a
α,γ
Rn-222
3,82 d
α
Po-218
3,05 min
α
Pb-214
26,8 min
Bi-214
19,7 min
Po-214
16,4 µs
β⁻,γ
β⁻,γ
α
Pb-210
22,3 a
Bi-210
5,01 d
Po-210
138 d
β⁻
β⁻
α
Pb-206



A
Z
82
83
84
85
86
87
88
226
225
224
223
222
221
220
219
218
217
216
215
214
213
212
211
210
209
208
207
206
Ra-226
1620 a
α,γ
Rn-222
3,82 d
α
Po-218
3,05 min
α
Pb-214
26,8 min
Bi-214
19,7 min
Po-214
16,4 µs
β⁻,γ
β⁻,γ
α
Pb-210
22,3 a
Bi-210
5,01 d
Po-210
138 d
β⁻
β⁻
α
Pb-206

$$\boxed{\lambda N_0 = \lambda N e^{\lambda(t-t_0)} - R e^{\lambda(t-t_0)}}$$


MESSUNG GESTEIN
0.14 bis 180 per min
selten 30'000 per min
WEISS ALT
≤ 30'000
WEISS JUNG
>> 30'000

$$\boxed{\lambda N_0 = \lambda N e^{\lambda(t-t_0)} - R e^{\lambda(t-t_0)}}$$

MESSUNG AM GEMÄLDE : $\lambda N = 8.5$, $R = 0.8$

Aus Mathematical Modelling with Case Studies

CASE STUDY

DETECTING ART FORGERIES

Based on an article in Brown (1979)

Nach dem 2. Weltkrieg war Europa im Aufruhr. Bekannte Gemälde waren verschwunden, andere tauchten an entlegenen Orten auf, und neue, als verschollen geglaubte, tauchten auf.

Die holländische Polizei hob einen Ring aus, der mit einem Banker als Mittelsmann, Gemälde an Göring verkaufte. Insbesondere, im Fall des Gemäldes von Vermeer "Woman Taken in Adultery", behauptete der Banker mit Van Meegeren, einem wenig erfolgreichen Maler, zusammengearbeitet zu haben. Van Meegeren war in Untersuchungshaft wegen Kollaboration.

Jedoch proklamierte Van Meegeren kurz nach seiner Inhaftierung, dass er nie das besagte Gemälde an Göring verkaufte, hingegen aber eine Fälschung. Und, er habe nebst dem "Disciples of Emaus" auch andere Fälschungen gemalt.

Um diese Behauptung zu erhärten, begann er in Gefangenschaft eine Fälschung zu malen. Als jedoch die Anklage von Kollaboration zu Fälschung gewechselt wurde, weigerte er sich das Bild zu vollenden und schwieg sich über die Techniken aus, mit denen er die Bilder habe "echt aussehen" lassen.

Ein Team von Kunsthistorikern, Chemikern und Physikern wurde beauftragt, das Bild zu untersuchen. Mit Röntgen wurde nach übermalten Bildern gesucht, Pigmente analysiert und nach chemischen oder physikalischen Indizien nach dem Alter.

Obwohl Van Meegeren sehr vorsichtig war, z.B. was die Farbwahl/-Zusammensetzung betraf, fand man Spuren moderner Pigmente im Cobalt Blue. Ferner entdeckte man Phenoformaldehyd, das Van Meegeren gebraucht worden war um Bakelyt zu simulieren. Dies besiegelte sein Schicksal: Er wurde im Oktober 1947 verurteilt und starb im Dezember an Herzschlag.

Damit, jedoch, war die Kontroverse nicht ausgestanden. Kunstkenner erachteten "The Disciples of Emaus" als zu schön/echt wirkend, um eine Fälschung zu sein. Es wurden mehr/überzeugendere Argumente verlangt, um das Bild definitiv als Fälschung zu klassifizieren. Ferner hatte der bedeutende Kunsthistoriker A. Bredius das Bild als "echt" klassifiziert; Ruf und Geld standen auf dem Spiel.

In Auftrag wurde eine Studie gegeben, die Untersuchungen über den radioktiven Zerfall ihren Argumenten zugrunde legte. Die Atome bestimmter Elemente sind instabil oder radioktiv und zerfallen in andere Produkte.

Also, mit $N(0) = N_0$ ist

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \text{mit} \quad N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{bzw.} \quad N = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

wobei die Zerfallskonstante λ positiv gewählt wird.

Nun, zum Zeitpunkt t_0, als die Farbe verwendet wurde, hatten wir N_0 Masse. Das Alter berechnet sich zu:

$$N = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda(t-t_0) \longrightarrow t - t_0 = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right) \quad \text{(Alter)}$$

Hilfreich ist natürlich auch die Halbwertszeit : $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$
Beispielsweise ist für Uran 238 $T_{1/2}$ 4.5 Mia Jahre, für ^{14}C 5568 Jahre, für Blei 210 22 Jahre und für Polonium 214 weniger als 1 Sekunde.

Alle Gemälde enthalten kleine Mengen $\boxed{\text{radioaktives } ^{210}Pb}$, welches eine Halbwertszeit von 22 Jahren hat und von Künstlern seit über 2000 Jahren als Pigment in $\boxed{\text{Weiss}}$ verwendet wurde.
Weiss enthält also Blei, das aus Steinen geschmolzen wird und welches kleine Mengen ^{210}Pb und sehr wenig Radium 226 (grösstenteils entfernt im Schmelzprozess). $\boxed{\text{Radium 226}}$ zerfällt in Schritten zu Blei 210, welches anfänglich also rasch zerfällt. Radium 226 mit einer Halbwertszeit von 1600 Jahren und in Weiss nur in ganz kleinen Mengen vorhanden, bewirkt, dass der Blei-Zerfall schliesslich stabil wird, sobald der Blei-Zerfall mit dem Zerfallsbeitrag von Radium im Gleichgewicht ist.

Sei $N(t)$ die Menge ^{210}Pb zur Zeit t, dann haben wir

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = -\lambda N + R(t)}$$

mit $N(t_0) = N_0$ und $R(t)$ die Zerfallsrate von Radium 226 pro Minute pro Gramm von Weiss bezeichnet.
Da wir an einem Zeitraum von höchstens 300 Jahren interessiert sind, die Halbwertszeit von Radium 226 1600 Jahre beträgt und die vorhandene Menge sehr klein ist, nehmen wir $\boxed{R(t) =: R}$ konstant.

Versuchen wir $\dot{N} = -\lambda N + R$ zu lösen.

Vielleicht mit Variation der Konstanten:

homogen: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$

partikuläre Lösung: $\dot{N} = -\lambda N + R$ findet man $N(t) = \frac{R}{\lambda}$

Also haben wir $N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{R}{\lambda}$.

R und N kann man messen und λ kennen wir; jedoch ist N_0 schwierig zu bestimmen. Wir formen um

$$\lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + R$$

$$\lambda N - R = \lambda N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$(\lambda N - R) e^{\lambda(t-t_0)} = \lambda N_0$$

Wir haben nun die Zerfallsrate von Weiss, als das Blei aus dem Stein geschmolzen wurde:

$$\boxed{\lambda N_0 = \lambda N e^{\lambda(t-t_0)} - R e^{\lambda(t-t_0)}}$$

Diese wird nun mit Zerfallsratenmessungen von diesem Gestein verglichen. Man erhält eine Range von 0.18 bis 140 Zerfallen pro Minute pro Gramm; in seltenen Fällen sogar bis zu 30'000.

Intermezzo verschiedene Lösungsansätze ...

Separation der Variablen : Variation der Konstanten

$$\dot{N} = -\lambda N + R \rightarrow \frac{dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow \frac{1}{N} dN = -\lambda\, dt \xrightarrow{\int_{t_0}^{t}} \ln(N) - \ln(N_0) = -\lambda t + \lambda t_0$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda(t-t_0) \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda(t-t_0)} \rightarrow N = N_0\, e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow N = N_0(t) \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} \rightarrow \dot{N} = N_0'(t)\, e^{-\lambda(t-t_0)} - N_0 \cdot \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$\rightarrow N_0' e^{-\lambda(t-t_0)} - N_0 \cdot \lambda e^{-\lambda(t-t_0)} = -\lambda N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + R \rightarrow N_0' \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} = R$$

$$\rightarrow N_0' = e^{\lambda(t-t_0)} \cdot R \rightarrow N_0 = \frac{R}{\lambda} e^{\lambda(t-t_0)} + \tilde{c} \rightarrow N = \frac{R}{\lambda} + \tilde{c} \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Direkt mit Separation :

$$\dot{N} = -\lambda N + R \rightarrow \frac{1}{-\lambda N + R} dN = 1\, dt \rightarrow -\frac{1}{\lambda} \ln(-\lambda N + R) = t + \tilde{c} \rightarrow \ln\left(\sqrt[\lambda]{\frac{1}{-\lambda N + R}}\right) = t + \tilde{c} \quad \text{... (blöd)}$$

Partikuläre Lösung erraten $\rightarrow N = \frac{R}{\lambda}$ geht

Das ist eine grosse Range und wir haben keine Chance, das exakte Alter des Bildes zu bestimmen! Aber, das müssen wir ja nicht... Wir müssen "nur" entscheiden, ob das Bild alt (300 y) oder modern (30 - 50 y alt) ist.

Angenommen, dass Bild ist 300 Jahre alt, dann wird der Wert λN_0 deutlich unter 30'000 liegen. Umgekehrt, wenn es modern ist, erwarten wir λN_0 deutlich über 30'000.

Mit $\lambda = \frac{\ln(2)}{22}$ folgt $e^{300\lambda} = 2^{150/11}$. Eine Messung λN ergibt 8.5 für das Bild. Mit der Messung $R = 0.8$ haben wir insgesamt

$$\boxed{\lambda N_0 = 8.5 \cdot 2^{150/11} - 0.8 \cdot 2^{150/11} = 98'045 \gg 30'000}$$

D.h. das vorliegende Gemälde wurde sicher nicht im 17. Jhdt von Vermeer gemalt.