

## 2. Polynome und Brüche

### 2.1. Grundlagen

Polynome und Bruchterme bilden die Bausteine vieler Berechnungen und mathematischer Theorien. Deshalb gehört die Fähigkeit, mit Polynomen sicher umgehen zu können, zu den grundlegendsten Voraussetzungen um Technik und Anwendungen der Neuzeit verstehen zu können; und nicht zuletzt um eine erfolgreiche gymnasiale Laufbahn einzuschlagen. Ein gutes Verständnis von Polynomen ist auch für den Umgang mit Bruchtermen wesentlich.

### 2.2. Bruchterme und Polynome

Es wird vorausgesetzt, dass ihr mit Zahlen und einzelnen Variablen Bruchrechnen könnt. Nun kommt neu dazu:

- Bruchterme beliebig zu erweitern und vollständig zu kürzen.
- mit Bruchtermen jeglicher Art zu operieren.
- mit Doppelbrüchen umzugehen.
- Äquivalenzumformungen bei Bruchtermen zu erkennen.

Chuf - RoK  
(W0)  
Hin Rekt!  
 $\frac{2}{4} : \frac{5}{5}$  (3:4)  
 $\frac{2}{3} : \frac{5}{5}$  (3:2)  
 $\frac{4}{4} : \frac{5}{5}$  (2:0)  
 $\frac{3}{3} : \frac{5}{5}$   
 $\boxed{\frac{5}{5} : 1}$  (3:1)  
 $10 : 6, 2x$

### 2.3. Das Pascal'sche Dreieck

**Übung 21** (Binompotenzen). Multipliziere aus.

- |               |               |
|---------------|---------------|
| (a) $(a+b)^1$ | (c) $(a+b)^3$ |
| (b) $(a+b)^2$ | (d) $(a+b)^7$ |

Die Übungen (a) und (b) gehen leicht von der Hand. Teiltübung (c) bedarf schon etwas mehr Aufwand und (d) scheint unmenschlich. Aber, beim Ausmultiplizieren von potenzierten Summen, insbesondere von *übeln* Summen wie  $(a+b)^6$ , kann das Pascal'sche

## 2. Polynome und Brüche

Dreieck nützlich sein; dazu später. Im Folgenden sollen nun das Pascal-Dreieck und einige seiner Eigenschaften präsentiert werden.

Das Pascal'sche Dreieck sieht wie folgt aus; es kann theoretisch unendlich „hoch“ werden.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & & & & & & \dots
 \end{array}$$

*Frage.* Beschreibe Regeln für die Konstruktion des Pascal-Dreiecks?

Offensichtlich besteht das Dreieck aus lauter 1-en am Rand. In jeder folgenden Zeile nimmt die Anzahl der Zahlen um Eins zu. Die Zahl in der unteren Zeile ist gleich der Summe der darüber liegenden Zahlen. Theoretisch kann man die  $k$ -te Zahl in der  $n$ -ten Zeile auch direkt berechnen — dabei beginnt man die Zeilen mit 0 durchzunummerieren. Die Zugrunde liegende Formel ist allerdings nicht leicht zu finden.

*Frage.* Welche Eigenschaften erkennt man?

Das Pascal-Dreieck besitzt unter anderem folgende Eigenschaften

- In der Diagonalen  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$  liest man die Dreieckszahlen ab.
- Die Summe der  $n$ -ten Zeile entspricht der Zweierpotenz  $2^n$ .
- Das Verhältnis zweier benachbarter Zahlen einer Zeile entspricht dem Verhältnis der Anzahl Zahlen, die links und rechts davon inklusive.

Pascal formulierte die letzte Eigenschaft wie folgt:

„En tout triangle arithmétique, deux cellules contigués étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules de-

### 2.3. Das Pascal'sche Dreieck

puis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de cellules depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.“

Die für unser Anfangsproblem wichtigste Eigenschaft ist

- Die Zahlen in der  $n$ -ten Zeile sind die Koeffizienten der Summanden des ausmultiplizierten Terms  $(a + b)^n$ .

$$\begin{aligned}
 (a + b)^0 &= 1 \\
 (a + b)^1 &= a + b \\
 (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & \dots & &
 \end{array}$$

Diese Eigenschaft erlaubt uns also, Terme der Form  $(a+b)^n$  ohne grossen Rechenaufwand ausmultiplizieren zu können.

**Bemerkung.** Das Pascal-Dreieck liefert uns die Koeffizienten des ausmultiplizierten Terms. Weiter gilt für die beteiligten Summanden  $a$  und  $b$ , dass die Exponenten von  $a$  mit dem grössten Wert des Exponenten starten und bei jedem weiteren Summanden um 1 abnehmen; für den Summanden  $b$  ist das Gegenteil der Fall: er taucht beim ersten Summanden nicht auf, dann als  $b = b^1$ , danach als  $b^2$ , etc.

#### Beispiel 9.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Wendet man nun diese Strategie auf ähnliche Terme an, so sind  $a$  und  $b$  bloss durch die entsprechenden Summanden zu ersetzen.

## 2. Polynome und Brüche

**Beispiel 10.** Für  $(z^2 - 2b)^3$  ist  $a = z^2$  und  $b = -2b$ . Also

$$\begin{aligned}(z^2 - 2b)^3 &= (z^2)^3 + 3 \cdot (z^2)^2 \cdot (-2b) + \\&\quad + 3 \cdot (z^2) \cdot (-2b)^2 + (-2b)^3 \\&= z^6 - 6z^4b + 12z^2b^2 - 8b^3\end{aligned}$$

**Übung 22** (direkt Pascal). Berechne mit Hilfe des Pascal'schen Dreieck

- (a)  $(x - 1)^5$
- (c)  $(y^3 - 2)^3$
- (b)  $(-3 + 2c)^3$
- (d)  $(-x - z)^4$

## 2.4. Aufgaben zu Polynome

### 2.4. Aufgaben zu Polynome

**2 Polynome**

**2 Polynome**

**2.1 Berechnung von Polynomwerten**

3 Berechne die Polynomwerte  $P(10)$ ,  $P(0)$ ,  $P(-10)$   
 a)  $P(k) = 6k^3 + 7k^2 + 8k + 9$       b)  $P(z) = z^3 - z^2 - 5z$

4 Berechne die Polynomwerte  $P(1)$ ,  $P(-1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(-2)$   
 a)  $P(a) = a^4 - 5a^2 + a + 4$       b)  $P(b) = b^4 - b^3 + b^2 - b + 1$

Zu 5-8: Füllt die Tabelle aus.

x	5x - 6	$\frac{1}{2}x + 8$	$-x^3 + x^2$	$-x^2 - 10x - 1$
a)	4			
b)	-4			
c)		19		
d)			7.5	

6

a	b	$3a + 4b$	$a^2 + b^2$	$a^2b - ab^2$
a)	5	3		
b)	-2	-6		
c)	1		-25	
d)		3	0	

7

3y + 1	6y + 2	9y + 3	-3y - 1	-6y - 2
a)	10			
b)		16		
c)			20	
d)			4.5	

8

$z^2$	$5z^2 + 7$	$z^4$	$z^6 - 9z^2$	$z^8$
a)	4			
b)	5			
c)		17		
d)			9	

**2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen**

17 a)  $-(a+b)$       b)  $-(11r+13s+8t)$       c)  $-(c^3+4a^2+5x+6)$   
 d)  $-(c-z)$       e)  $-(-u+v-w-y)$       f)  $-(2ab-7ac-a+b)$

18 Stelle die Werte der Binome  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $-a+b$ ,  $-a-b$ ,  $b+a$ ,  $b-a$  für  
 a)  $a=29$ ,  $b=53$       b)  $a=-47$ ,  $b=16$       c)  $a=61$ ,  $b=-35$   
 d)  $a=-28$ ,  $b=-14$   
 in einer Wertetabelle zusammen.

19 a)  $a-(b+c)$       b)  $5k-(k+3)$       c)  $n-(n^2+4n)$   
 20 a)  $8y+2-(3y+5)$       b)  $2x+4-(x^3+4)$       c)  $2.5a-3.6b-(1.8b+c)$   
 21 a)  $a-(b+c+d)$       b)  $4x-5y+6z-(3x+2y+8z)$   
 22 a)  $x^2+b^2-(x^2+2x+4)$       b)  $2a^3-3a^2b-(a^2b+ab^2+ab)$   
 23 a)  $a-(b-c)$       b)  $a-(-b+c)$       c)  $a-(-b-c)$   
 d)  $3m-(3m-4)$       e)  $\frac{1}{2}y-\left(-2-\frac{1}{3}y\right)$       f)  $12t^2-(-12t^2+5t)$   
 24 a)  $x^2-4z-(2z-3)$       b)  $-5e+7-(-5e+7)$       c)  $p+q-(-p-q)$   
 25 a)  $a-(b+c-d)$       b)  $a-(b-c-d+e)$   
 c)  $4v-(5u-6v+7w)$       d)  $8x-8y-8z-(x-2y+3z)$   
 26 a)  $-6g+5-(g^2-7g-1)$       b)  $a-2b+3c-4d-(a-2b+3c-4d)$

Zu 27-30: Subtrahiere das untere Polynom vom oberen.

27 a) $3a - 5b$	b) $-2c - d$	c) $-8z + 7$	d) $x^2 - \frac{2}{3}y^2$ $9a + 7b$	$6c - d$	$-8z - 12$	$-x^2 - \frac{1}{5}y^2$
28 a) $5rs - 7rt - 9st$	b) $1.6m^3 - 0.8n^2 + 2.7n - 3.2$					
$-6rs + rt - st$						
29 a) $x - y + z$	b) $4a$	c) $\frac{-e^2 + 9e}{c^2 - 3}$	d) $\frac{8p - 8q}{7q - 7r}$			
$x$	$2a - 5b + c$					
30 a) $5at - 2bt - 3c$	b) $2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x$					
$5at - 2bt + 1$	$-4x^3 + 6x^2 + 8x - 10$					
31 a) $P_1 = a - 0.5b - 1.8c + 2d$ , $P_2 = 1.4b - 0.6c - 3.5d + 2e$	b) $P_1 + P_2 = ?$	c) $P_2 - P_1 = ?$				

**2 Polynome**

**2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen**

Glieder mit dem gleichen "Namen" kann man **zusammenfassen**.  
 Beispiel:  $2ab - 5ab = -3ab$ . Dabei werden die Koeffizienten addiert.  
 Glieder mit verschiedenen "Namens" kann man nicht zusammenfassen.  
 Beispiel:  $2ab - 5a$  ist ein Binom, das nicht zu einem Monom umgeformt werden kann.

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.2 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

9 a)  $10a - 5b - c - 17a - 6b + 9a - 7b - 12c + 88$   
 b)  $-x^2 + 35x - 24 - 3x^2 + 19 - 47x - 19 + 48x + 2x^2$

10 a)  $4ab - 6.2ac + 5bc - 9.3ab - 1.5ac - 4bc + 9.4ab$   
 b)  $xyz - \frac{3}{2}xy - x - \frac{25}{3}xyz - 11 - \frac{7}{6}xy - x + xy - \frac{25}{3}xyz$

11 a)  $(4m - 17) + (11m - 6)$       b)  $5n^2 + 8n + (n^3 - 5n^2)$   
 c)  $x^3 - 3x^2 - 2 + (-x^2 + x + 2)$       d)  $2ef + e - 5f - 9e - 6f + 3$

12 a)  $8u + (5u + w) + (-15u + 12w) + (-9u - 2w) + (7u - 4w)$   
 b)  $8u + (6w + w - 15u) + 12w + (-9u) + (-3w + 7u - 4w)$   
 c)  $8u + 6w + (w - 15u) + (12w - 9u - 3w + 7u) + (-4w)$   
 d)  $(8u + 6w) + w + (-15u) + (12w - 9u - 3w + 7u - 4w)$

13 a)  $136a - 75b$  b)  $-7r^2 - 6r$ | c)  $-3x^2y + \frac{7}{2}xy^2$ |  |  |  |  || $-19a + 28b$ | $15r^2 + r$ | $\frac{8}{3}x^2y - \frac{5}{2}xy^2$ |  |  |  |  |
14 a)  $-x^2 + 2x - 5$	b)  $2a - 7b - 9c$	c)  $v^3 - u^2v + uv^2$	$u^2v - uv^2 + v^3$			
$4x^2 - 3x + 8$	$5b - 6c - d$					
15 a)  $-6abc + 5ab - 4a - 13$	b)  $-1.3x^2 - 2.4x - 1.9$					
$9abc - 8ab - 2a + 10$	$7.6x^2 + 0.8z - 0.1$					
$7abc + 3ab - a - 12$	$-0.2x^2 + 1.6z + 5.4$					
16 a)  $p^4 - 6p^3 - 12p^2$	b)  $x^2 - xy + y^2$	c)  $\frac{y^2 - 7x}{xy + 2y^2 - 5x + 8}$				
$p^3 - 0p^2 - 12p$	$-p^2 + 6p + 12$					

## 2 Polynome

32  $P_1 = -5x^2 - 7xy - y^2 - 4x + 8y - 2, \quad P_2 = 5x^2 + xy - y^2 + 3x - 4y - 9$

- a) Addiere die Polynome  $P_1$  und  $P_2$ .  
 b) Subtrahiere das Polynom  $P_2$  von  $P_1$ .  
 c) Subtrahiere das Polynom  $P_1$  von  $P_2$ .

33 Setze in den Term  $a - b$  und in den Term  $b - a$  ein:

- a)  $a = -26, b = -15$       b)  $a = 4,4, b = -3,9$   
 c)  $a = 5x + 2y, b = 4x + y$     d)  $a = 2t - 3, b = t + 6$   
 e)  $a = v - 7, b = w - 5$       f)  $a = z^2 + 2z - 4, b = 3z^2 - z + 8$

34 Setze in den Term  $a - b - c$  ein:

- a)  $a = 14, b = 60, c = 29$   
 b)  $a = -25, b = -37, c = -12$   
 c)  $a = 4n - 5, b = 3n - 6, c = 2n - 7$   
 d)  $a = x - 4y, b = -2x + 9z, c = 5y - 8z$   
 e)  $a = u^2 - u + 3, b = 6u - 7, c = u^2 - 4u$   
 f)  $a = p, b = q - r, c = r - q$

35 a)  $2v - (5w + 10) - 4w - (8w - 7) - 1 + (6v - 9w)$

b)  $a - (2b + 3c + 4) + (-5a + 6) - 7b - (-8a + 9b + 10c - 11)$

36 a)  $\frac{1}{3} - (m^2 - m - 2.5) - 4m - \left(m^2 + \frac{5}{6}\right)$

b)  $8x^2y - 2xy^2 - (7x^2y^2 + 4xy^2 - 5xy) - 16x^2y - (-13x^2y^2 + 8x^2y - 6xy^2)$

37 a)  $a - (b - (c - d))$

b)  $-(-(3p + 8) + 6p) + 8$

c)  $15y - [5y - (2y - z)]$

d)  $6.4r - [2.7 - (4.5r + 3.1)]$

e)  $-[a - (6b + 4) + b] + 3a - 7$

f)  $8x^2 - [4x - (3x^2 - 7x + 2)] + 9$

38 a)  $-9s + 6t - [t - (5s - 8t) - (3s + 7t) - s]$

b)  $12q^2 - (25q^2 - (17q - 20) - 13q^2) - (10q - 15)$

39 a)  $6.75f - (3.2g - 1.05) - [2.54f - (f - 0.49g + 0.07)]$

b)  $-\left[\frac{1}{10}x - \left(xy - \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}y\right)\right] + xy - \left(\frac{1}{15}x - \frac{1}{4}y\right)$

40  $45n^3 - (12n^2 + 3n - 1) - 45n^3 - (5n^2 + 10n - 1) - (-9n^2 + 16n + 3)] - 24n^2$

41 a)  $[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$

b)  $[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$

c)  $[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$

d)  $[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$

42 a)  $(15x - 7y) - [5x - (10x + 8y) + 12] - [20x + y - (5x + 12)] - y$

b)  $-[-(2u^2 + 11u - 13) + 4u + 5] + 7u^2 - u - [3u - 8 - (-u^2 + 9)]$

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.3 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

## 2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

43 a)  $a - (b - (c - (d - e)))$

b)  $1 - (2 - (3 - (4 - (5 - z))))$

c)  $50k + 29 - \{18k - \{44 - (7k + 36)\}\} - 13k$

44 a)  $-(3p + 8) + 5p - \{-6p + 2 - [9p - (p - 1) - 7]\} + 4p\}$

b)  $2x^3 - \{4a - [4 - (6a^3 - 1) - a^2] - (3a^2 - 5) + 3a - [4a^3 - (2a^2 - 7a)]\}$

c)  $20x^2 - (7xy - [3y^2 - (8x^2 + 11xy + 6y^2) - 12x^2] - 5y^2) - (9xy - 4y^2)$

### 2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.3 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

45 a)  $3(2a + 5b)$       b)  $-(2)(9c - d)$       c)  $(-n)(-n + 8)$

d)  $(-x - 2y)(-3)$       e)  $(4z - 1)z^2$       f)  $(6s - 5t)(-0.5u)$

46 In welchen Aufgaben von Nr. 45 kann man ein Klammerpaar weglassen, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert?

47 a)  $-5(7v - 9w)$       b)  $-c(-a + b - c)$       c)  $2p(p^2 - 1.5p - 4)$

48 a)  $3(8s + 3t)3u$       b)  $(-x - y + z - 1)(-1)$       c)  $(e + 2f - 6)e^f$

49 Multipliziere das Polynom  $x^2 - 0.8x + 2.4$  mit

a) 4      b) -4      c)  $\frac{2}{3}$       d) 5x      e)  $-x^2$       f)  $-0.5y$

50 Multipliziere das Polynom  $2a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 8b^3$  mit

a) -2.5      b) 0      c) a      d) -b      e) ab      f) -2.5r

51 a)  $3uv^2(u^4 - 3u^2v^2 - 2v^4)$       b)  $-2abc(2a^2 + 4ab - b^2 - ac + 8c^2)$

52 a)  $(-m^6 + m^4 - m^2 + 1)(-m)$       b)  $\frac{1}{3}xy^2z^3\left(\frac{5}{2}x^3y^2z - 6x^2y + \frac{3}{5}w\right)$

53 a)  $(-1)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$       b)  $b_3(-b_1 + b_2 - b_3 + b_4)$

54 a)  $x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)x_4$       b)  $y_1y_4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

55 a)  $4(a + 2b) + 3(a - 3b)$       b)  $d(c - 11) - c(d - 9)$

c)  $x - 5y - 8(x - y + z)$       d)  $n^2 - n(n + 5) - 6(1 - n)$

56 a)  $2(3u - v) - 3(2u + v)$       b)  $a(9a + 10) - 5(a^2 + 2a - 3)$

c)  $p(q - r) - q(p - r) - r(-p + q)$       d)  $4(2x - 7y - 3z) - 7(x - 4y) + z$

37

## 2 Polynome

Zu 57-78:  $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

57 a)  $(a + b)(c + d)$       b)  $(x + 4)(x + y)$       c)  $(t + 2)(t + 5)$

d)  $(e + f)(g - h)$       e)  $(v - 6)(w + 1)$       f)  $(p - q)(x + 7)$

58 a)  $(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$       b)  $(n + 8)(n - 3)$       c)  $(a - z)(b + z)$

59 a)  $(a - b)(c - d)$       b)  $(x - y)(z - 5)$       c)  $(k - 2)(k - 4)$

60 a)  $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$       b)  $(u - 3)(v - 3)$       c)  $(p - x)(p - y)$

61 a)  $(-s_1 + s_2)(t_1 - t_2)$       b)  $(-r + 6)(-r + 4)$       c)  $(-f - g)(-g + 1)$

62 a)  $(a + b)(x + y)$       b)  $(a - b)(x + y)$       c)  $(a - b)(x - y)$

d)  $(-a + b)(-x + y)$       e)  $(-a - b)(x - y)$       f)  $(-a + b)(x - y)$

63 a)  $(2c - 7)(4d - 1)$       b)  $(5v - 3w)(-6w + 5)$       c)  $\left(m + \frac{1}{6}\right)\left(4m - \frac{3}{5}n\right)$

64 a)  $(3x - 2y)(2x - 3y)$       b)  $(-11a + 17)(-10b - 17)$       c)  $\left(\frac{3}{2}r - 6\right)\left(\frac{2}{3}s + 8\right)$

65 a)  $(x^2 - 1)(z + 1)$       b)  $(st - 9s)(-st + 9t)$       c)  $(4a^2 - 5b^2)(3a^2 - b^2)$

66 a)  $(p^3 - p)(p^2 - p)$       b)  $(10x^2 + 5y)(2x - 6y^2)$       c)  $(k^4 + 0.4j)(k^2 - 0.2)$

67 a)  $(a + 6)(a - 2)$       b)  $(c - 9)(c + 1)$       c)  $(x - 5)(x - 3)$

d)  $(b - 7)(b - 1)$       e)  $(z + 11)(z - 11)$       f)  $(8 - t)(4 - t)$

68 a)  $(x - 12)(x + 5)$       b)  $(p + 2)(p - 20)$       c)  $(a - 2)(a - 9)$

d)  $(1 + n)(15 - n)$       e)  $(r - 6)(r - 6)$       f)  $(y - 3)(y + 4)$

69 Berechne  $a^2 - 10a + 24$  sowie  $(4 - a)(6 - a)$  für

a)  $a = 1, 2, 3, 4, 5$       b)  $a = -1, -2, -3, -4, -5$       c)  $a = 0, 16, -16, 2.5$

70 Berechne  $2x^2 + 5x - 3$  sowie  $(x + 3)(2x - 1)$  für

a)  $x = 1, 2, 3, 4, 5$       b)  $x = -1, -2, -3, -4, -5$       c)  $x = 0, 10, -10, 0.6, \frac{1}{2}$

71 a)  $(2a - 5)(3a - 1)$       b)  $(9 - 4x)(-3 + x)$       c)  $(7i - 1)(5i + 1)$

d)  $(-k + 4)(-k + 4)$       e)  $(2d - 1)(-3d + 8)$       f)  $\left(z + \frac{9}{10}\right)\left(z - \frac{5}{6}\right)$

## 2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

72 a)  $(5y - 13)(y - 7)$       b)  $(10 - 3a)(3 + 10a)$       c)  $(-5s - 6)(5s - 6)$

d)  $(q - 1.2)(q - 0.4)$       e)  $(-c - 5)(-c - 2)$       f)  $\left(\frac{3}{2}r + 3\right)\left(2r - \frac{4}{3}\right)$

73 a)  $(a + 2b)(3a - b)$       b)  $(4x - y)(5x + 2y)$       c)  $(-c + d)(-c + 12d)$

74 a)  $(x - 3r)(y - 4r)$       b)  $(2a + 3c)(-a + 6c)$       c)  $(8s - 9t)(10s + 11t)$

75 a)  $(t^2 + 2)(t^2 + 7)$       b)  $(p^2 - 5)(3p^2 - 5)$       c)  $(n^2 - 2)(2n^2 + 1)$

76 a)  $(x^2 - 10)(x^2 - 10)$       b)  $(-w^2 + 8)(4w^2 + 9)$       c)  $(0.3z^2 + 6)(2z^2 - 1)$

77 a)  $(3a^2 + b^2)(a^2 - 3b^2)$       b)  $(c^3 - 5)(c^2 + 4)$       c)  $(x^2 - 2x)(-3x + 1)$

78 a)  $(x^2 - 2y^2)(x^2 - 8y^2)$       b)  $(fr - 1)(r^2 + 2r)$       c)  $(m^2 + 4m)(m^2 - 3m)$

79 a)  $(a - 2b)(c - d + e)$       b)  $(x - z - 1)(2z + 3y)$

80 a)  $(p + q - r)(m - n)$       b)  $(4a - b)(b - c - 1)$

81 a)  $(4x^2 - 5x + 6)(3x - 1)$       b)  $(y - 1)(4y^2 + 3y - 1)$

82 a)  $(a + 1)(a^2 - a - 1)$       b)  $(-6z^2 + 3z + 4)(-5z + 3)$

83 a)  $(2x + 4y - z)(3x - 6y + z)$       b)  $(-s^2 + 3s + 1)(s^2 - s + 2)$

84 a)  $(a - 2b - 3)(2a + 3b - 2)$       b)  $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 5)$

85  $(5xy - 2xz + yz)(xy + zx + 2yz)$

86  $(3a^2 - ab - 4b^2)(-a^2 + 2ab + b^2)$

87 a)  $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + y^3)$       b)  $(x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$

88 a)  $(a - b)(a^2 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$       b)  $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

89  $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3)(3x^2 + 2x + 1)$

90  $(x^3 - 2x^2 - 5z + 6)(x^3 + 2z^2 - 5z - 6)$

91 a)  $2(a + b)(c - d)$       b)  $-4(p - 2)(-p + s)$

c)  $5(2x - 1)(3x + 1)$       d)  $(y + 3)(y - 6)(-y)$

39

38

## 2 Polynome

- 92 a)  $-0.7(a-2)(4b+5)$   
c)  $n(3n-1)(n-6)$
- 93 a)  $(a-b)(a+b)(x-y)$   
c)  $(g+2)(2v-1)(v+4)$
- 94 a)  $(1-c)(5-x)(5+x)$   
c)  $(z+2)(z-2)(z^2+4)$
- 95 a)  $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$   
c)  $(x+2)(x-3)(x+4)$
- 96 a)  $(a+b)(s-t)(x+y)$   
c)  $(x+2)(-y+3)(z-4)$
- 97 a)  $(a+b)(a+2b) + (a-b)(a-2b)$   
c)  $(c+d)(8u-v) - d(8u-v)$
- 98 a)  $3(x-y)(x+y) + (2x+y)(x-y)$   
c)  $(a-5)(b-5) - (a-6)(b-6)$
- 99 Berechne die Polynomwerte  $P(3)$ ,  $P(7)$ ,  $P(10)$  und  $P(-9.95)$ .  
a)  $P(x) = (x-7.5)(x-6) - (x-8)(x-5.5)$   
b)  $P(t) = 2t^2 - (2t+5)(t-3)$
- 100 Berechne die Polynomwerte  $P(11)$ ,  $P(-2)$ ,  $P(0)$  und  $P(3.33)$ .  
a)  $P(a) = (a-5)(a-8) - (a-10)(a-4)$   
b)  $P(x) = (4x+9)(4x-5) - (8x+15)(2x+3)$
- 101 a)  $17r^2 - (4r-2)(8r-5) + (3r-4)(5r+6)$   
b)  $(a-7)(a+1)(a+z) + (a-7)(a+1)(-z)$
- 102 a)  $(2x+3)(3x-4)x - (x-11)(x-1) - 6x^3$   
b)  $-(u-1)(2u-1)(3u-1) - 1 + 6u(u^2-1)$
- 103 a)  $4a^2 - 5[a(2a-9) - 3(a+7)] + 6(a-12)(a+1)$   
b)  $[(2m-15)(3m-4) - 5(m^2 - 9m + 12)]/(m-1)$
- 104 a)  $13x - [-11y - 3(5x-6y) + 5(2x-7y) - 26x] - 12y$   
b)  $36 - [r - (r+3)(r-2)][r^2 - (r+3)(r-2)] + (r-6)r^2$
- 105 a)  $40z - (8z - (9z-4) - 2[3z - (7z+1) - (z-9)] - (3z - 5(5z-3))$   
b)  $\{((ax+b)x+c)x+d\}x + e)x + f$

40

## 2 Polynome

- 119 a)  $(15ab - 10a) : 5a$   
c)  $(1.4x^4 + 2x^3z) : 0.1x^3$
- 120 a)  $(14r^2 - 35r) : (-7r)$   
c)  $(-9ax^4 + 8bx^3) : (-6x^2)$
- 121 a)  $(18ab + 27ac - 36ad) : 9a$   
c)  $(-1.8x^2 + 2.4x^3 - 3x^5 + 3.6x^2) : (-2.4x^2)$
- 122 a)  $(-12x + 20b - 32c) : (-4t)$   
c)  $(70x^5y + 25x^4y^3 - 90x^3y^4 - 5x^2y) : (-5x^2y)$
- 123 a)  $(a + c) : [-(a + c)]$   
b)  $(x - y) : (-y + x)$   
c)  $(r - 5) : (r - 5)$
- 124 a)  $(1 - z) : (z - 1)$   
b)  $(-m + n) : (-n + m)$   
c)  $(u^2 - 8) : (8 - u^2)$
- 125 a)  $4x(y + z) : 2x$   
c)  $(d - 6)k : (-k)$
- 126 a)  $abc(a + b - c) : ab$   
c)  $64x^2(x + y) : (-8x)$
- 127 a)  $6cd^2(u - v) : 3d(u - v)$   
c)  $2.5(a + b)(a - 2) : (a + b)$
- 128 a)  $-34c(2x - y) : 51(-2x + y)$   
c)  $(a - b)^2(a + b) : \left[\frac{1}{2}(b - a)\right]^2$
- 129  $(12x^2 + 11x - 56) : (4x - 7)$   
Hinweis: Bestimme die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  so, dass  $(ax+b)(4x-7) = 12x^2 + 11x - 56$ .
- 130 Ist der Quotient ein Polynom? Bestimme dieses Polynom gegebenenfalls wie in Nr. 129.  
a)  $(8x^2 - 46x + 45) : (2x - 9)$   
c)  $(-y^2 + 2y + 24) : (y - 6)$

Zu 131–134: Der Quotient soll ein Polynom sein. Bestimme dieses Polynom sowie die Zahl  $c$ .

- 131 a)  $(18x^2 + cx + 14) : (3x + 2)$   
b)  $(x^2 + cx + 32) : (-x + 4)$
- 132 a)  $(10x^2 + cx - 5) : (5x + 1)$   
b)  $(2x^2 + cx + 42) : (3x - 6)$
- 133 a)  $(21x^2 - 37x + c) : (7x - 3)$   
b)  $(cx^2 + 3x - 10) : (x + 2)$
- 134 a)  $(cx^2 - 20x + 25) : (2x - 5)$   
b)  $(x^2 + 3.6x + c) : (0.4x + 1.2)$

42

## 2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

- 106 a)  $(25u - 13v) - \{15u - [14u - 3(4u - 5v) - 8u] - 7(2u + 4v)\}$   
b)  $1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x(1 - x))))\}$

Zu 107, 108: a)  $x = -1$ , b)  $x = 2$ , c)  $x = -3$ , d)  $x = 4$ . Ersetze a, b, c, d im folgenden Term durch das entsprechende Binom in x und gib die Normalform des so entstandenen Polynoms an.

- 107 a)  $ab$   
d)  $(a+b)c$
- b)  $b + cd$   
e)  $ac + bc$
- c)  $2a - bd$   
f)  $d^2 - 12$
- 108 a)  $a - bcd$   
d)  $c^2 + 3c$
- b)  $ab - ac$   
e)  $(4a - 3c)(2b + d)$
- c)  $a(b - c)$   
f)  $abcd$

### Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation, d. h.  
 $a \cdot b = x \Leftrightarrow a = xb; (a : b)b = a; (ab) : b = a$

Der Divisionalgorithmus und Zerlegungen mit Rest folgen im Abschnitt 2.5, die Darstellung von Quotienten in Bruchform im Kapitel 5.

- 109 a)  $(-58a) : (-2)$   
b)  $21rs : 3s$   
c)  $15ac : (-15a)$
- 110 a)  $(-35x) : 7x$   
b)  $84d : (-6)$   
c)  $(-9ab) : (-9ab)$
- 111 a)  $3n : 6n$   
b)  $-15y : 20$   
c)  $-8cp : \left(-\frac{1}{2}\right)$
- 112 a)  $26z : \left(-\frac{2}{3}\right)$   
b)  $-54k : (-24k)$   
c)  $0.4ad : (-1.4d)$
- 113 a)  $-19t^2 : (-t)$   
b)  $-105px^2 : 1.5px$   
c)  $-21r^3 : (-r^2)$
- 114 a)  $-2ab^3 : (-4ab)$   
b)  $119u^2z : (-7u^2)$   
c)  $-9.2m^2n^2 : 2.3mn$
- 115 a)  $v^3 - 2v^3d^4 : 5c^2d^2$   
b)  $-42w^5 : (-3w^2)$   
c)  $-28ax^3y^4 : 16ax^2$
- 116 a)  $6a^4n^4 : \left(-\frac{1}{3}a^3n^4\right)$   
b)  $-x^3y^4z^5 : x^2y^3z^4$   
c)  $-\frac{1}{8}mq^4 : \left(-\frac{7}{2}q^3\right)$
- 117 a)  $(8a - 8b) : 8$   
b)  $(w + vw) : v$   
c)  $(15x^2 + 5x) : \left(-\frac{5}{3}\right)$
- 118 a)  $(6m + 12n) : 6$   
b)  $(24a - 20) : \left(-\frac{4}{5}\right)$   
c)  $(-bt + ct) : (-t)$

41

## 2.4 Formeln

$(a+b)^2$	$= a^2 + 2ab + b^2$	
$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$	Binomische Formeln
$(a+b)^3$	$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
$(a+b+c)^2$	$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomische Formel

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.4 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

Zu 135–138: Rechne auf 2 Arten.

- 135 a)  $(10 + 3)^2$   
b)  $(2 + 0.4)^2$   
c)  $\left(\frac{6}{3}\right)^2$   
d)  $(2x + 3x)^2$
- 136 a)  $(1.8 + 1.2)^2$   
b)  $(100 + 1)^2$   
c)  $\left(\frac{4}{4}\right)^2$   
d)  $(y + 5y)^2$
- 137 a)  $(10 - 4)^2$   
b)  $(-2 - 11)^2$   
c)  $(-1 - 20)^2$   
d)  $(5c - 2c)^2$
- 138 a)  $(-30 + 20)^2$   
b)  $(-30 + 5)^2$   
c)  $(1.7 - 0.2)^2$   
d)  $(a - a)^2$
- 139 a)  $(2x + 3)^2$   
b)  $(4c + 5d)^2$   
c)  $(r^2 + 17)^2$
- 140 a)  $(a + 11)^2$   
b)  $(3m^2 + 0.4)^2$   
c)  $(5b + 23)^2$
- 141 a)  $(x + (-y))^2$   
b)  $(a - b)^2$   
c)  $(6n - 1)^2$
- 142 a)  $(c - 2d)^2$   
b)  $(k^2 - k)^2$   
c)  $(10p^2 - 18)^2$
- 143 a)  $(-a + b)^2$   
b)  $(-a - b)^2$   
c)  $(-s + 1.9)^2$
- 144 a)  $(-8m - 7)^2$   
b)  $\left(-q + \frac{5}{6}\right)^2$   
c)  $(-22w - 5)^2$
- 145 a)  $(2ab + 16)^2$   
b)  $(xy - yz)^2$   
c)  $\left(-2uv - \frac{3}{4}v\right)^2$
- 146 a)  $(3r^2 - 6rs)^2$   
b)  $(-9p^3 + 4p^2)^2$   
c)  $(0.3a^2 + b^2)^2$

43

- Zu 147, 148:** Berechne  $(a+b)(a-b)$  sowie  $a^2 - b^2$  für
- 147 a)  $a = 30, b = 2$       b)  $a = 5, b = 15$       c)  $a = -20, b = 3$   
d)  $a = 4x, b = 3x$
- 148 a)  $a = 17, b = 3$       b)  $a = 17, b = -3$       c)  $a = -8, b = 4$   
d)  $a = t, b = t$
- 149 a)  $(2x+5)(2x-5)$       b)  $\left(r + \frac{2}{3}s\right)\left(r - \frac{2}{3}s\right)$       c)  $(4y-1)(4y+1)$
- 150 a)  $(a+7b)(a-7b)$       b)  $(z^2-1)(z^2+1)$       c)  $(8c+3d)(8c-3d)$
- 151 a)  $(-3n+10)(-3n-10)$       b)  $(-4a+12bc)(-4a-12bc)$
- 152 a)  $(-0.6r+1)(-0.6r-1)$       b)  $(-2u-11v)(-2u+11v)$
- 153 a)  $(5n+4)(-5n+4)$       b)  $(y-2z)(-y-2z)$
- 154 a)  $(-8q-1)(8q-1)$       b)  $(7a+10b)(10b-7a)$
- 155 a)  $\left(\frac{7}{2}z^2+1\right)\left(\frac{7}{2}z^2-1\right)$       b)  $(-m^3+m)(m^3+m)$   
c)  $(-xy-13)(-xy+13)$       d)  $(1.4i-2.3)(1.4i+2.3)$
- 156 a)  $(c^2-d^2)(c^2+d^2)$       b)  $\left(9ab-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{3}{5}b+9ab\right)$   
c)  $(4p^4+1)(4p^4-1)$       d)  $(-25n^2+6n)(-25n^2+6n)$
- 157 a)  $(5x^2-8x)^2$       b)  $\left(2e+3\frac{1}{3}\right)\left(2e-3\frac{1}{3}\right)$   
c)  $(17+4n)(17-4n)$       d)  $(-a^2-b^2)(-a^2-b^2)$
- 158 a)  $(9w^2-1)(9w^2+1)$       b)  $(-6r^2+19)(-6r^2-19)$   
c)  $\left(\frac{7}{6}a-\frac{3}{7}b\right)\left(-\frac{3}{7}b+\frac{7}{6}a\right)$       d)  $((5x+2y)(5x-2y))^2$
- 159 a)  $(x+3y+4z)^2$       b)  $(2a-b-3)^2$       c)  $(-n^2+n+1)^2$
- 160 a)  $(4a-1.5b+c)^2$       b)  $(-u^2-2uv+2v^2)^2$       c)  $[(p+1)(p+5)]^2$
- 161 a)  $(a+b+c+d)^2$       b)  $(x^3-x^2-x-4)^2$
- 162 a)  $(5x-2y+z-1)^2$       b)  $(a+b+c+d+1)^2$

- 181 a)  $2m^2-17m-5(m-2)(m-6)-[8(m-7)-3(m+4)^2]$   
b)  $\{(3b-(b+4)(b-1))^2-b^4\}(b^2+2)+8b^4$
- 182 a)  $2c^2\{(a-c)^2-[a(a-c)-c(a+c)]\}$   
b)  $(k+5)^2-(2k+5)(k-1)^2-(k+2)(k-2)$
- Zu 183 – 188:** Multipliziere mit Hilfe binomischer Formeln aus. Beispiel:  
 $[a+b+c][a-b+c] = [(a+c)+b][(a+c)-b] = (a+c)^2 - b^2$   
usw.
- 183 a)  $(x+3y-8z)(x+3y+8z)$       b)  $(5m-n+5)(5m-n-5)$   
c)  $(r+s-7)(r-s-7)$       d)  $(u^2+wv+v^2)(u^2-uv+w^2)$
- 184 a)  $(19f-q+21)(19f-q-21)$       b)  $(-6a+b+c)(-6a+b+c)$   
c)  $(p^2-4p-2)(p^2+4p-2)$       d)  $(-x^2-y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)$
- 185 a)  $(a+b+c)(a-b-c)$       b)  $(2u-5v-w)(2u+5v+w)$   
c)  $(x-y+z)(x+y-z)$       d)  $(-r^2+r+6)(r^2+r-6)$
- 186 a)  $(-5p-3q+1)(5p+3q+1)$       b)  $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$   
c)  $(-4u+v-7w)(-4u-v+7w)$       d)  $(u^2+4u+8)(-u^2+4u-8)$
- 187 a)  $(a+b+u+v)(a+b-u-v)$       b)  $(x+y-z-3)(x-y-z+3)$
- 188 a)  $(r^3+r^2-r+1)(r^3-r^2-r-1)$       b)  $(cd+5c-d-4)(cd-5c+d-4)$

**Zu 189, 190:** Zeige, dass die angegebene Gleichung eine Termumformung darstellt.

- 189 a)  $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$   
b)  $x^2-3(x+y)^2+3(x+2y)^2 = (x+3y)^2$   
c)  $(u^2-v^2)^2+(2uv)^2 = (u^2+v^2)^2$   
d)  $(r^2+s^2-t^2)^2 = (2rt)^2 + (2st)^2 = (r^2+s^2+t^2)^2$
- 190 a)  $[(k+3)^2+k^2] = [(k+1)^2+(k+2)^2] = 4$   
b)  $n^2+(n+1)^2+[n(n+1)]^2 = [n(n+1)+1]^2$   
c)  $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 + (ax+by+cz)^2$
- 191 Multipliziere zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen gleicher Parität (also entweder zwei aufeinander folgende gerade oder zwei aufeinander folgende ungerade Zahlen) und addiere 1. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?
- 192 Multipliziere drei aufeinander folgende natürliche Zahlen und addiere dazu die mittlere dieser Zahlen. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?

- 163 a)  $2c(c-5)^2$       b)  $(x-y)(y-z)^2$       c)  $\left(k+\frac{1}{4}\right)(2k-6)^2$
- 164 a)  $(u-v)(u+3v)^2$       b)  $(-p+2)^2(p+4)$       c)  $(a+b)(a+b)^2$
- 165 a)  $(a+b)^3$       b)  $(c+10)^3$       c)  $(2r+5s)^3$       d)  $(z^2+3z)^3$
- 166 a)  $(d+1)^3$       b)  $(uv+v)^3$       c)  $\left(m^2+\frac{1}{3}\right)^3$       d)  $(10k+10)^3$
- 167 a)  $(a-b)^3$       b)  $(4g-1)^3$       c)  $\left(\frac{1}{2}k-2\right)^3$       d)  $(x^2-y^2)^3$
- 168 a)  $(3n^2+2n)^3$       b)  $(3n^2-2n)^3$       c)  $(-3n^2+2n)^3$       d)  $(-3n^2-2n)^3$
- 169 a)  $(2n+5)(2n-5)(n+1)$       b)  $(a-b)(x+y)(x-y)$   
c)  $(6s^2+1)(3s+2)(3s-2)$       d)  $(r+3)(r-3)(r+4)(r-4)$
- 170 a)  $(a+2)(a-2)(7b-8)$       b)  $(4x+2)(4x-2)(x+1.5)(x-1.5)$   
c)  $(9e^2+d^2)(3e-d)(3c+d)$       d)  $(p-5)^2(p+5)^2$
- 171 a)  $(x+9)(x-9)-(y+9)(y-9)$       b)  $(7e+4)^2+(7e-4)^2$   
c)  $(a+4b)(a-4b)-(a-5b)^2$       d)  $(2u^2)^2-(2u^2+v^2)^2$
- 172 a)  $(2y+2z)^2-2(y+z)^2$       b)  $(r^2+r)(r^2-r)+\left(r^3-\frac{1}{2}r\right)^2$   
c)  $(3x+8)^2-(3x-8)^2$       d)  $(u^2-b^2)^2-(a+b)^2(a-b)^2$
- 173  $P(u,v) = u^2 - (u+v)(u-v)$ ;  
berechne die Polynomwerte  $P(13, 9)$ ,  $P(4, 7)$ ,  $P(8, -12)$  und  $P(-5, 1, -6)$ .
- 174  $P(x) = (x+9)^2 - (x+7)(x+11)$ ;  
berechne die Polynomwerte  $P(3)$ ,  $P(-15)$ ,  $P(9)$  und  $P(-7,5)$ .
- 175 a)  $(4a-b)^2-3(a+b)(a-b)-2b(-a+2b)$   
b)  $(2x+3y)^2+(4y-3x)^2-3(7y^2-x^2)-4(2x-y)^2$
- 176 a)  $(5s-3)^2-(9s+1)(2s-7)-(s-3)^2-40s$   
b)  $6(n-1)(n+1)-(n^2+1)^2+n^4-2(-n+2)(-2n+1)$
- 177  $(x-y-7)^2+(-x+y-2)^2+(-x-y+2)^2$
- 178 a)  $(r^2+r+4)^2+(r^2-r-5)^2$       b)  $(-7a+b+6c)^2-(7a-b-6c)^2$
- 179 a)  $(n+1)^3-(n-1)^3$       b)  $(q^2+2)^3-6(q^2+1)^2$
- 180 a)  $(-a+b)^3+b(2a-b)(2a+b)$       b)  $(x-1)(x+8)^2-(x-4)^3$

**Zu 193, 194:** Verwende das Pascal-Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & \text{u s w.} & & \end{array}$$

- 193 a)  $(3c+d)^4$       b)  $(e-5f)^4$       c)  $(x+2y)^5$       d)  $(-m+10)^5$   
e)  $\left(k+\frac{1}{2}\right)^6$       f)  $(1-z^2)^6$       g)  $(2r+s)^4-(2r-s)^4$
- 194 a)  $(-u+v)^4$       b)  $(n^2+n)^5$       c)  $(0.1-p)^6$       d)  $(a^3+b^3)^4$   
e)  $(i^2-3)^5$       f)  $\left(t+\frac{1}{t}\right)^6$       g)  $(h-1)^5-(1-h)^5$

## 2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

Die Darstellung eines Polynoms als Produkt heisst eine **Faktorzerlegung**:

Summe	faktorisieren	Produkt
$a^2+3a$	$=$	$a(a+3)$
$4x^2-y^2$	$=$	$(2x+y)(2x-y)$
$n^2+5n+6$	$=$	$(n+2)(n+3)$

Faktorzerlegungen können zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen (Kapitel 3) oder Kürzen von Brüchen (Kapitel 5) nützlich sein.

In den meisten Aufgaben des Abschnitts 2.5 ist eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten zu finden; die Ausnahmen sind aus dem Zusammenhang ersichtlich (z. B. Nr. 205 – 214). Reine Zahl faktoren müssen nicht weiter zerlegt werden. Wenn ein Polynom keine Faktorzerlegung hat (abgesehen von Zerlegungen mit dem Faktor 1 oder -1), heisst es **unzerlegbar (prim)**.

### Ausklammern

- 195 a)  $5a+5b$       b)  $6x-9$       c)  $cd+ce$       d)  $u^2-uv$
- 196 a)  $20y-12$       b)  $35a+48b$       c)  $pq-qr$       d)  $ct-dt^2$
- 197 a)  $6ax+6ay$       b)  $24z^3-16z^2$       c)  $10c-21$       d)  $108n^2+168n$
- 198 a)  $3bd-9ct$       b)  $21efg-35eg$       c)  $81y^3+54y$       d)  $126a^2b+96ab^2$
- 199 a)  $8a+4$       b)  $z^2-z$       c)  $6bc+2b$       d)  $x^2y^2-xy$

## 2 Polynome

- 200 a)  $7e - 7$  b)  $2rs + s$  c)  $p^3 + p^2$  d)  $36uvw + 9uw$   
 201 a)  $14r - 21g + 28$  b)  $10at + 15bt - 6ct$  c)  $xy - y^2 - yz$   
 202 a)  $15x - 27y - 12z$  b)  $13r + 65s - 9t$  c)  $14np - 12nq + 21n$   
 203 a)  $18a^2b + 18ab^2 - 9ab$  b)  $4x^2yz - 10xy^2z + 16xyz^2$   
 204 a)  $42m^3n^2 - 70m^2n^3 - 42m^2n^2$  b)  $3qr^2 + 3r^3 + 3r^2s - r^2$

Zu 205, 206: Klammerne -1 aus.

- 205 a)  $-y - 2$  b)  $-5c + d$  c)  $-3m + 4n - 1$   
 d)  $u - v - w$  e)  $-7x^2 + 4x + 11$  f)  $-a_1 - a_2 + a_3 - a_4$   
 206 a)  $-mx + q$  b)  $-6r - s - 8t$  c)  $-c^2 - d^2 + 36$   
 d)  $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4$  e)  $z^5 - z^4 - z^3 + z^2 - z - 1$   
 207 Klammerne 2 aus.  
 a)  $2n + \frac{4}{5}$  b)  $4u + 3v + 2w$  c)  $2a - \frac{5}{4}b + \frac{6}{7}$   
 208 Klammerne 3 aus.  
 a)  $3p - 4$  b)  $3x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}$  c)  $\frac{1}{2}rs - \frac{2}{3}r - \frac{3}{4}$   
 209 Klammerne  $\frac{1}{2}$  aus.  
 a)  $\frac{1}{6}a + \frac{3}{2}b$  b)  $\frac{1}{2}q^2 - q + \frac{2}{3}$  c)  $4c + 5d - \frac{1}{6}$   
 210 Klammerne -1,2 aus.  
 a)  $-1.2t^2 + 3.6$  b)  $6e - 2.4f - 8.4$  c)  $-1.2x + y + 1.5z$

Zu 211–214: Ausmultiplizieren und Ausdividieren mit Hilfe von Ausklammern

- 211 a)  $(a + b)(4a + 4b)$  b)  $(2n - 2)(3n - 3)$  c)  $(1.5u - 1.5v)(6u + 6v)$   
 212 a)  $(7f - 7g)(f - g)$  b)  $(5r + 5s)(8r - 8s)$  c)  $(2.5c + 2.5)(0.4c + 0.4)$   
 213 a)  $(9xy + 9y) : (x + 1)$  b)  $(4.5ac - 7.5ad) : (3c - 5d)$   
 214 a)  $(18ab - 12b^2) : (3a - 2b)$  b)  $(0.7x^2y + 2.8xy^2) : (x + 4y)$   
 215 a)  $(a + 2)x + (b - 3)x$  b)  $r(2u + 3v) - r(u + v)$   
 c)  $c^2(n - 4) - c^2(2n - 7)$  d)  $(p^2 - 5p)z + (p^2 + p)z$   
 216 a)  $(8 - t)y - (6 - 2t)y$  b)  $(3a - 5b)x + (b + 1)x$   
 c)  $(2k^3 - k^2)r - (k^3 - k^2)r$  d)  $d^2(e - f + g) - d^2(f + g - h)$

48

## 2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

- 217 a)  $a(x + y) + b(x + y)$  b)  $m(u + v) - 3(u + v)$   
 c)  $cd(6c - d) - 4(6c - d)$  d)  $q(r - s) + (r - s)$   
 218 a)  $(m + n)y + (m + n)z$  b)  $2a(a - b) - b(a - b)$   
 c)  $(5e - 1) - c(5e - 1)$  d)  $(f + g) - d(f + g)$   
 219 a)  $5p(3p - 2) + (-3p + 2)$  b)  $x(y - z) - (z - y)$   
 220 a)  $s(st - 4) + t(4 - st)$  b)  $r(-r + 2) + (r - 2)$   
 221 a)  $4x(a + b) - 5y(a + b) - 6(a + b) - 3x(a + b) - (a + b)$   
 b)  $3y^2(u - v) - 2p(v - u) - 8(u - v) + (u - v)$   
 222 a)  $-a(x - y) + 2h(x - y) - 3c(x - y) + 4(x - y)$   
 b)  $7m(r + s) - 3n(r + s) - 4(r + s) - n(r + s) + (r + s)$   
 223 a)  $4x(p + q) - 8u(p + q)$  b)  $(t^2 - t)x + 9(t^2 - t)$   
 c)  $a^2(2ab - c) + a^2(2ab - c)$  d)  $10q(9e - 6) - 5(9e - 6)$   
 224 a)  $3w(2u - 6v) + 5(2u - 6v)$  b)  $2r^2(r - 7) - r(-r + 7)$   
 c)  $a^2(xy + xz - x) - ab(xy + xz - x) + a(xy + cz - x)$   
 225 a)  $(e - 4f)(f + g) + 2e(f + g)$  b)  $(c - d)(n + 5) + (c - d)(2n + 3)$   
 c)  $q(2x - 3y) + (q + 1)(-2x + 3y)$  d)  $(3a - 5c)(m + 4) - (a + c)(m + 4)$   
 226 a)  $8(p - 5) - (2p + 5)(2p - 5)$  b)  $(c^3 + c^2)(r - 3) + (c^3 + c^2)(r - 1)$   
 c)  $(3u + v)(u - v) - (3u + v)(u - w)$  d)  $(a - b)(5z - 1) + (2b - 2a)(z + 4)$

## Ausklammern In Teilsummen

- 227 a)  $a(x + y) + 2x + 2y$  b)  $bq + cq - (b + c)r$   
 c)  $2u - v + 5r(2u - v)$  d)  $7k(4n - 3) - 4n + 3$   
 228 a)  $a(3x - 2b) + 9ac - 6bc$  b)  $4m(p + q) - p - q$   
 c)  $(t - 5)x - ty + 5y$  d)  $r^2 - r + (r - 1)s$   
 229 a)  $au + av + bu + bv$  b)  $j^2 - jk + 2j - 2k$   
 c)  $-2cx + cy - 4dx + 2dy$  d)  $12st + 16s - 27t - 36$   
 e)  $2kpz - 39p - 16qz + 26q$  f)  $35t^2 - 65ft - 15f + 27g$   
 230 a)  $8lab - 72ad + 36bc + 32cd$  b)  $mn - m + n - 1$   
 c)  $8y^2 - 2vw - 12v + 3w$  d)  $20xy - 15xz - 24y + 18z$   
 e)  $20r^2s + 4rs^2 - 5r - s$  f)  $-21ef - 56eg + 6fg + 16g^2$

49

## 2 Polynome

- 231 a)  $4amx + 4amy + 4anx + 4any$  b)  $6ab + 3a - 12b - 6$   
 c)  $u^4 - u^3v - 2u^2v + 2u^2vw$  d)  $10r^3s^2 - 60r^2s^2 + 16r^3s - 24r^2s$   
 232 a)  $5act - 20adt + 15bct - 60bdt$  b)  $-e^2fg - ef^2g + efg^2 + f^2g^2$   
 c)  $28pq - 42p - 24q + 36$  d)  $-18x^2y^2 + 36xy^2z + 30xy^3 - 60y^3z$   
 233 a)  $mx + my + mz + nx + ny + nz$  b)  $as + at + bs + bt + cs + ct$   
 c)  $eu + fu - ev - fv + ew + fw$  d)  $3kp + 3kq - 3kr - 6p - 6q + 6r$   
 234 a)  $ar - a + br + b + cr - c$  b)  $efm - efn - ef + egn - egn - eg$   
 c)  $-px - py - pz + 5x + 5y + 5z$  d)  $v^2 - uv - uw - ut - v + w$   
 235 a)  $2a^2 + 10ab - 12ac + 5a + 25b - 30c$  b)  $2pr^2 + 4pr - 3qr^2 - 6qr - r^2 - 2r$   
 236 a)  $22cv - 22ct + 66c - 33dv + 33dt - 99d$  b)  $15mnx - 5mny + 10mnz - 3x + y - 2z$

## Faktorzerlegung mit Hilfe von Formeln

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

- 237 a)  $x^2 - y^2$  b)  $4c^2 - 9d^2$  c)  $x^2 - 225$  d)  $36n^2 - 1$   
 e)  $-a^2 + 324b^2$  f)  $-u^2v^2 + 1$  g)  $16p^2 - q^4$  h)  $x^4 - y^4$   
 238 a)  $16m^2 - 9n^2$  b)  $25x^2 - 1$  c)  $-4s^2 + 49t^2$  d)  $121q^2 - 576$   
 e)  $v^2w^2 - 64w^2$  f)  $-p^2 + 289$  g)  $r^4 - 1$  h)  $-y^2z^2 + 81$   
 239 a)  $6a^2 - 6b^2$  b)  $9k^4 - 36k^2$  c)  $n^3 - n$  d)  $-50c^2 + 338$   
 240 a)  $18s^2 - 2$  b)  $75r^2 - 147$  c)  $-c^4d^2 + 4c^2$  d)  $x^6y^4 - x^2y^8$   
 241 a)  $a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$  b)  $p^2u + 2p^2v - 4u - 8v$   
 242 a)  $63km^2 - 28kn^2 + 45m^2 - 20n^2$  b)  $cr^2 - c - dr^2 + d$   
 243 a)  $x^2 - 2xy + y^2$  b)  $26u^2 + 60uv + 25v^2$  c)  $n^2 - 4n + 4$   
 d)  $4c^2 + 28cd + 49d^2$  e)  $9q^2 - 6q + 1$  f)  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$   
 244 a)  $m^2 - 2m + 1$  b)  $4f^2 - 20fg + 25g^2$  c)  $x^2 + 16x^2 + 64$   
 d)  $16r^2 - 24rs + 9s^2$  e)  $p^4 - 8p^2 + 16$  f)  $36z + 81z^2 + 4$   
 245 a)  $5a^2 - 10ab + 5b^2$  b)  $xy^2 + 2xy + x$  c)  $-3a^2 + 18uv - 27v^2$   
 246 a)  $72n^2 + 168n + 98$  b)  $-q^2r^2 + 4qr - 4$  c)  $-c^4 - 2c^3d - c^2d^2$

50

## 2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

- 247 a)  $a^2 + 2ab + b^2 - 36z^2$  b)  $p^2 - x^2 - 2x - 1$   
 248 a)  $u^2 - 8uv + 16v^2 - 1$  b)  $m^2 - q^2 + 10q - 25$

## Klammeransatz bei geeigneten Trinomen

Beispiel:  $a^2 + 8a + 15 = (a + 3)(a + 5)$ 

- 249 a)  $x^2 + 9x + 20$  b)  $d^2 + 20d + 91$  c)  $r^2 - 15r + 54$   
 d)  $n^2 - 26n + 144$  e)  $n^2 - 24n + 144$  f)  $3c^2 + 16c + 5$   
 250 a)  $s^2 + 18s + 72$  b)  $z^2 - 19z + 48$  c)  $p^2 + 23p + 132$   
 d)  $y^2 - 29y + 210$  e)  $t^2 + 109 + 9$  f)  $2x^2 - 5x + 2$   
 251 a)  $a^2 + 2a - 24$  b)  $u^2 - 3u - 40$  c)  $t^2 - 6t - 7$   
 d)  $x^2 - 25x + 84$  e)  $x^2 + 25x - 84$  f)  $4e^2 + 3e - 1$   
 252 a)  $c^2 - 3c - 108$  b)  $m^2 + 4rn - 5$  c)  $y^2 - y - 30$   
 d)  $z^2 + 9z - 90$  e)  $r^2 - 43r - 240$  f)  $5k^2 - 2k - 3$   
 253 a)  $b^2 + 20b + 51$  b)  $t^2 + t - 156$  c)  $x^2 - 4x + 16$   
 d)  $v^2 - 7v - 98$  e)  $p^2 - 7p - 120$  f)  $2n^2 + 7n + 3$   
 254 a)  $m^2 - m - 110$  b)  $z^2 - 29z + 208$  c)  $q^2 - 16q - 36$   
 d)  $y^2 + 40y + 400$  e)  $a^2 + 6a - 10$  f)  $12r^2 - 8r + 1$   
 255 a)  $5z^2 + 10z - 75$  b)  $n^2 - n^2 - n$  c)  $-4t^2 - 4t + 48$   
 256 a)  $9z^4 - 36z^3 + 27z^2$  b)  $-3k^2 - 3k - 60$  c)  $2b^5 + 9b^4 - 5b^3$   
 257 a)  $x^2 - 7xy + 10y^2$  b)  $p^2 - 2pq - 8q^2$  c)  $m^4 - 5m^2n - 24n^2$   
 258 a)  $a^2 + 5ab + 4b^2$  b)  $r^2 + 4rs - 21s^2$  c)  $c^4 - 13c^2d^2 + 36d^4$

## Vermischte und schwierigere Aufgaben zur Faktorzerlegung

- 259 a)  $-16x^5 + x$  b)  $n^3 - 19n^2 + 90n$  c)  $fgh + fg + fh + f$   
 260 a)  $625c^3 - 225cd^2$  b)  $-3z^4 + 6z^3 + 24z^2$  c)  $64st - 48s - 48t + 36$

51

## 2 Polynome

- 261** Vervollständige die Zerlegung  
a)  $(36a - 54b)^2$  b)  $(r^2 + r)(r^2 + r - 6)$  c)  $(kx^2 - ky^2)^3$
- 262** Zerlege die Polynome  $P$ ,  $Q$ ,  $P + Q$  und  $PQ$  (vollständig)  
a)  $P = (5u + 5v)^2$ ,  $Q = (du + dv)^2$  b)  $P = (2n - 2)^3$ ,  $Q = (3n - 3)^3$

Zu 263, 264: Klammere zuerst einen Bruch aus, sodass der andere Faktor ein Polynom mit teilerfremden ganzen Koeffizienten ist.

Beispiel:  $\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 6 = \frac{3}{4}(x^2 - 6x + 8) = \frac{3}{4}(x - 2)(x - 4)$

263 a) $\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{2}b^2$	b) $-1.25r^2 - 5r - 5$	c) $\frac{7}{30}c^2 + \frac{7}{6}c - \frac{28}{5}$
264 a) $4.8p^2 - 7.5$	b) $3m^2 - 2mn + \frac{1}{3}n^2$	c) $0.2q^2 - 2.4q + 5.4$
265 a) $(a + b)^3 - 5(a + b)^2$	b) $(x + 6y)^2 + 8x(x + 6y)$	
266 a) $w^2(4u + 4) + (4u + 4)^2$	b) $p(3w + 3) + (p - 5)(2w + 2)$	
267 a) $(2a - 3b)^2 - (3b - 2a)$	b) $r(t - s)^2 - (s - t)^3$	
268 a) $(k - 7)^2(k + 2) + (-k + 7)^3$	b) $s^2(t - 5) + s(5 - t) - 2(t - 5)$	
269 a) $n(n + 4)(n - 8) - (n + 4)(n - 8)$	b) $(a + b)^2(a - c) - (a + b)(c - a)^2$	
270 a) $(u - 1)(2v - 2) + (3 - 3a)(4 - 4v)$	b) $(x - y)(x^2 - z^2) - (x^2 - y^2)(x - z)$	
271 a) $a(a + 3) - 10$	b) $(m + 9)^2 - 36m$	c) $w^2(v - 1) - (v^2 - v)v$
272 a) $4pq - (p + q)^2$	b) $st(t - 6) - 4s(t + 6)$	c) $2(e^2 - fg) + c(f - 4g)$
273 a) $u^2 - 2ab + b^2 - c^2$	b) $9z^2 - y^2 - 2yz - z^2$	
c) $u^2 - 4uv + 4v^2 - 1$	d) $u^2 - 4v^2 + 4v - 1$	
274 a) $r^2 - 4s^2 + 12st - 9t^2$	b) $25c^2 - d^2 + 10d - 25$	
c) $w^2 - 8w - z^2 + 16$	d) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2(ax - by)$	
275 a) $c^2m^2 - c^3n^2 - d^2m^2 + d^2n^2$	b) $8rl^2 - 2r - 12sl^2 + 3s$	
c) $2uv - 7uw + 4v^2 - 49w^2$	d) $64a^2 - 80a + 25 - 24ab + 15b$	

52

## 2 Polynome

### 2.6 Der Divisionsalgorithmus für Polynome

Im Abschnitt 2.6 werden Polynome mit nur einer Variablen und beliebigen Koeffizienten (aus  $\mathbb{R}$ ) betrachtet.

Ein Beispiel zum Divisionsalgorithmus:

$$\begin{array}{rcl} (6x^3 + 29x^2 + 38x + 35) & : (2x + 7) & = 3x^2 + 4x + 5 \\ \hline 6x^3 + 21x^2 & & = 6x^3 + 21x^2 \\ & 8x^2 + 38x + 35 & = (2x + 7) \cdot 3x^2 \\ & 8x^2 + 28x & = 8x^2 + 28x \\ & 10x + 35 & = (2x + 7) \cdot 4x \\ & 10x + 35 & = 10x + 35 \\ & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (6x^3 + 29x^2 + 38x + 35) & : (2x + 7) & = 3x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow \\ 6x^3 + 29x^2 + 38x + 35 & & = 3x^2 + 4x + 5 \\ & & (\text{Faktorzerlegung}) \\ (6x^3 + 29x^2 + 38x + 44) & : (2x + 7) & = 3x^2 + 4x + 5 + 9 : (2x + 7) \Leftrightarrow \\ 6x^3 + 29x^2 + 38x + 44 & & = (3x^2 + 4x + 5)(2x + 7) + 9 \\ & & (\text{Zerlegung mit Rest}) \end{array}$$

Zu 285–288: Divisionen ohne Rest

- 285** a)  $(6x^3 - 14x^2 + 17x - 12) : (3x - 4)$  b)  $(y^3 - 10y^2 + 16y + 48) : (y - 6)$   
c)  $(n^4 + 5n - 6) : (n + 2)$  d)  $(c^3 + 1.5c^2 - 2c - 20) : (2c - 5)$
- 286** a)  $(4a^3 - 12a^2 + a + 4) : (2a + 1)$  b)  $(z^3 + 9z^2 - 100) : (z + 5)$   
c)  $\left(4r^3 + \frac{2}{3}r^2 + \frac{5}{3}r + 2\right) : (3r + 2)$  d)  $(k^5 - 1) : (k - 1)$
- 287** a)  $(x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x - 30) : (x^2 - 3x + 5)$   
b)  $(3p^4 - 31p^2 + 25) : (3p^2 + p - 5)$
- 288** a)  $(12e^4 - 15e^3 - 5.5e^2 + 9e - 8) : (4e^2 - 3e + 2)$   
b)  $(u^5 - 3u^4 - 9u^2 - 16u + 12) : (u^2 + 4)$

54

## 2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

- 276** a)  $p^3 + p^2 - p - 1$  b)  $27ef - 18eg + 9f^2 - 12fg + 4g^2$   
c)  $b^2 - 6b - 4c^2 + 12c$  d)  $4r^2 - 9s^2 + 6s - 1$
- 277** a)  $(5x - 4y + 3)^2 - (x + 2y - 1)^2$  b)  $a^4 - (13a - 30)^2$
- 278** a)  $8lt^2 - 25(t^2 + 6t + 9)$  b)  $n^4 - 25n^2 - 60n - 36$
- 279** a)  $a^2 - 10a^2b^2 + 9b^4$  b)  $x^4 + x^2y^2 + y^4$
- 280** a)  $z^4 + 4z^2 - 32$  b)  $r^4 - 3r^2 + 1$

Zu 281, 282:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

- 281** a)  $x^3 - 8$  b)  $375n^3 - 3$  c)  $a^3 + b^3$  d)  $p^6 - q^6$
- 282** a)  $y^3 + 1$  b)  $128c^4d - 54cd^4$  c)  $r^3 + r^2 - s^3 - s^2$

- 283\*** Beweise:  
a) Für jede natürliche Zahl  $n$  ist  $n^3 - n$  durch 6 teilbar.  
b) Für jede ungerade natürliche Zahl  $u$  ist  $u^3 - u$  durch 24 teilbar.  
c) Für jede Primzahl  $p > 3$  ist  $p^2 - 1$  durch 24 teilbar.

- 284\*** a) Die beiden letzten Ziffern von  $25^2$  bilden die Zahl 25. Gibt es noch eine andere zweistellige Zahl mit der entsprechenden Eigenschaft?  
b) Die drei letzten Ziffern von  $125^3$  bilden die Zahl 125. Bestimme alle weiteren dreistelligen Zahlen mit der entsprechenden Eigenschaft!

53

## 2.6 Der Divisionsalgorithmus für Polynome

- 289** Dividiere durch  $x + 3$  und notiere das Ergebnis in Form einer Zerlegung mit Rest (im Fall des Restes 0 als Faktorzerlegung).  
a)  $x^2 + 8x + 24$  b)  $x^2 + 8x + 3$  c)  $x^3 - 13x - 12$

- 290** Wie Nummer 289, aber mit Division durch  $x + 1$ .

- 291** Wie Nummer 289, aber mit Division durch  $x$ .

- 292** Wie Nummer 289, aber mit Division durch  $x - 4$ .

Zu 293–298: Notiere das Divisonsergebnis, gegebenenfalls mit Rest.

- 293** a)  $(6e^3 - 17e^2 + 21e - 30) : (2a - 5)$   
b)  $(a^4 - 3a - 22) : (n + 2)$   
c)  $(6z^2 + 8z - 19z^2 - 7z - 12) : (3z^2 - 2z - 4)$   
d)  $(3x^3 - 10x^2 + x^3 - 16x^2 + 2x^3 + 25x^2 + 14x - 24) : (2x^3 - x^2 + 3x - 4)$
- 294** a)  $(-12y^3 + 8y^2 + 13y + 3) : (-2y + 3)$   
b)  $(a^4 - 9a^3 + 6a^2 - 5a + 12) : (a - 2)$   
c)  $(6p^3 - 3p^2 + p^3 + 6p^2 - 13p + 3) : (3p^3 - 4p + 1)$   
d)  $k^5 : (k^2 + k - 1)$
- 295** a)  $\left(x^2 - \frac{7}{2}x - 2\right) : \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)$  b)  $(a^3 - 4a^2 + 2a - 1) : (2a - 1)$
- 296** a)  $(2q^3 + 5q^2 - 4q - 3) : (q + 0.5)$  b)  $(y^3 + y^2) : (3y + 1)$
- 297** a)  $(x + 4x^2 + x^3) : (x - 2 + x^2)$  b)  $(r^3 - 6r^2 + 5r + 8) : (4 - r)$
- 298** a)  $2t^4 : (2t + t)$  b)  $(1 + z)^3 : (1 - z)^2$

Zu 299, 300: Finde mit Hilfe des Divisionsalgorithmus eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten.

- 299** a)  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  b)  $n^4 - 7n^2 + 6n$
- 300** a)  $z^5 - 2z^4 - 4z^3 + 5z^2$  b)  $-3a^3 + 9a^2 - 12$

55

## 5 Bruchterme

Ergebnisse mit Nennern sind generell als ein Bruch anzugeben, wobei der Zähler und der Nenner ein Polynom mit ganzen Koeffizienten ist.

### 5.1 Kürzen und Erweitern

**Kürzen:** Zähler und Nenner eines Bruches durch denselben Divisor dividieren.

**Erweitern:** Zähler und Nenner eines Bruches mit denselben Faktor multiplizieren.

$$\frac{at}{bt} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, t \neq 0)$$

Zu 1–12: Bestimme den ggT und das kgV der untereinander stehenden Polynome.

Bemerkung: Als ggT von z. B.  $6a$  und  $-8a$  kann man sowohl  $2a$  als auch  $-2a$  angeben. Bei jedem ggT und kgV zweier Polynome gibt es in diesem Sinn zwei entgegengesetzte Möglichkeiten; im Lösungsteil unseres Buches ist jeweils nur eine davon angegeben.

7 a)  $x^3 - 8x + 15$

b)  $x(x+y)+x^2-y^2$

c)  $am+an-bm-bn$

$m^2-n^2+m+n$

8 a)  $z^2 - 8z + 16$

b)  $(2c-18)^2$

c)  $u^3-v^3$

$-u^2+v^2$

9 a)  $6a^2b$

b)  $2t-5$

c)  $d^2-9$

$10-4t$

$6t-15$

$d^2-3$

$d^2-9t+18$

10 a)  $2y+2$

b)  $x^2-4y^2$

c)  $r^2-s^2-2s-1$

$x^2-4xy+4y^2$

$x^2-2xy$

$r^2-2r-s^2+1$

$r^2-2rs+s^2-1$

11 a)  $6ac-9ad-4c^2+6cd$

b)  $2p^3-7p^2+8p+6$

$3a^2+4ac-4c^2$

$18p^3+9p^2$

12 a)  $8u^2v-u^2w^2-9w^3$

b)  $2^2-9z+20$

$w^3v+2u^2v^2+wv^3$

$z^3-3z^2-50$

## 2.5. Aufgaben zu Brüche

### 2.5. Aufgaben zu Brüche

7 a)  $x^3 - 8x + 15$

b)  $x(x+y)+x^2-y^2$

c)  $am+an-bm-bn$

$m^2-n^2+m+n$

8 a)  $z^2 - 8z + 16$

b)  $(2c-18)^2$

c)  $u^3-v^3$

$-u^2+v^2$

9 a)  $6a^2b$

b)  $2t-5$

c)  $d^2-9$

$10-4t$

$6t-15$

$d^2-3$

$d^2-9t+18$

10 a)  $2y+2$

b)  $x^2-4y^2$

c)  $r^2-s^2-2s-1$

$x^2-4xy+4y^2$

$x^2-2xy$

$r^2-2r-s^2+1$

$r^2-2rs+s^2-1$

11 a)  $6ac-9ad-4c^2+6cd$

b)  $2p^3-7p^2+8p+6$

$3a^2+4ac-4c^2$

$18p^3+9p^2$

12 a)  $8u^2v-u^2w^2-9w^3$

b)  $2^2-9z+20$

$w^3v+2u^2v^2+wv^3$

$z^3-3z^2-50$

13 a)  $\frac{12d}{9}$

b)  $\frac{10r}{15r}$

c)  $\frac{16xyz}{20xyz}$

d)  $\frac{24a^2bc^2}{56abc}$

e)  $\frac{-72uv^3w^6}{30uvw^5}$

14 a)  $\frac{14}{14}$

b)  $\frac{25pq}{5q}$

c)  $\frac{27s^2}{-36st}$

d)  $\frac{4mq^2}{8mz^3}$

e)  $\frac{6f^4g^3h^5}{2f^3gh^2}$

15 a)  $\frac{5a+20}{5}$

b)  $\frac{14n-10}{7}$

c)  $\frac{28x-35y}{21}$

d)  $\frac{uv}{uv}$

16 a)  $\frac{60c-40d}{20c}$

b)  $\frac{92p+46q}{23}$

c)  $\frac{360z^2-90z}{45z^2}$

d)  $\frac{225i-15}{15}$

17 a)  $\frac{25}{35+10}$

b)  $\frac{uw}{uv+uw}$

c)  $\frac{2m}{4mn-2m}$

d)  $\frac{-36x^2y}{12x^2y-60xy}$

18 a)  $\frac{36}{9s-18t}$

b)  $\frac{-h}{h^2+h}$

c)  $\frac{18a^2bc}{18a^2bc+54a^2bc^2}$

d)  $\frac{p^3-p^2}{p^3+p^2}$

19 a)  $\frac{7n+14}{7n-21}$

b)  $\frac{2y+2}{3y+5}$

c)  $\frac{rs-rt}{su-ru}$

d)  $\frac{w^3+w^2}{w^2+w}$

20 a)  $\frac{a^2-a}{ab+a}$

b)  $\frac{4c-4d}{6c-6d}$

c)  $\frac{6x-6z}{9x+9z}$

## 5 Bruchterme

## 5.1 Kürzen und Erweitern

- 21 Berechne die Werte der Terme  $T_1 = \frac{6}{x}$  und  $T_2 = \frac{6x-18}{x^2-3x}$  für  $x = 1, 2, 3, 4, 10, -1, 2$  (soweit sie definiert sind) und vergleiche.
- 22 Berechne die Werte der Terme  $T_1 = \frac{x+5}{x-1}$  und  $T_2 = \frac{x^2-25}{x^2-6x+5}$  für  $x = 2, 3, 4, 5, 6, -1$  (soweit sie definiert sind) und vergleiche.

Zu 23–42: Kürze!

- 23 a)  $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}$  b)  $\frac{6u-8v}{9u^2-16v^2}$  c)  $\frac{n^3-n}{n^3+n^2}$   
 24 a)  $\frac{4r-2}{4r^2-1}$  b)  $\frac{36x^2-4y^2}{18x-6y}$  c)  $\frac{4s^2+25}{16s^4-625}$   
 25 a)  $\frac{u^2+2uv+v^2}{4u+4v}$  b)  $\frac{2ac-5bc}{4a^2-20ab+25b^2}$  c)  $\frac{w^3+2w^2+w}{wz+z}$   
 26 a)  $\frac{10m-5}{8m^2-8m+2}$  b)  $\frac{(16p-16q)^2}{16p^2-16q^2}$  c)  $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2x+1}$   
 27 a)  $\frac{as+at+bs+bt}{2s+2t}$  b)  $\frac{375w-1000}{6uw-16u+6vw-16v}$  c)  $\frac{4c^2+cr-4c-r}{5c-5}$   
 28 a)  $\frac{4af-7ag-8bf-14bg}{3a-6b}$  b)  $\frac{kp-5p+k-5}{kp+k}$  c)  $\frac{x-xy+y-1}{y-yz+z-1}$   
 29 a)  $\frac{40cm-60dm+32cn-48dn}{24cm-36dm+16cn-24dn}$  b)  $\frac{rs-rt-s^2+t^2}{r-s-t}$   
 30 a)  $\frac{u^2-v^2+4u+4v}{u^2-v^2}$  b)  $\frac{144x^3-60x^2z-156x^2+65xz}{12xyz+12xz^2-5yz^2-5z^3}$   
 31 a)  $\frac{a^2+2a-24}{a^2-6a+8}$  b)  $\frac{kn-2k}{3n^2-3n-6}$  c)  $\frac{r^2-8r+7}{2r^2-4r+2}$  d)  $\frac{c^2-9d^2}{c^2+2cd-15d^2}$   
 32 a)  $\frac{m^2-9m+20}{m^2-10m+25}$  b)  $\frac{x^4-4x^3}{x^4-x^3-12x^2}$  c)  $\frac{h^4-1}{h^4+6h^2+5}$  d)  $\frac{yz^2+2yz-8y}{yz-2y+5z-10}$   
 33 a)  $\frac{10u^2-11u-6}{25u^2-4}$  b)  $\frac{18a-9b}{32a^2-2bab+5b^2}$  c)  $\frac{r^2+12r+36}{15r^2+88r-12}$   
 34 a)  $\frac{x^2-7x+12}{2x^2-x-15}$  b)  $\frac{45n^2-12n-28}{9n^2+12n+4}$  c)  $\frac{27c^2-48d^2}{24c^2+5cd-36d^2}$

96

35 a)  $\frac{a-b}{b-a}$  b)  $\frac{4mp-20}{30-6mp}$  c)  $\frac{k^2-13k+42}{14-2k}$  d)  $\frac{-u^2+2uv-v^2}{4u^2-4v^2}$

36 a)  $\frac{3x-3y}{4y-4z}$  b)  $\frac{c^2-e}{1-e^2}$  c)  $\frac{c^2+c-20}{-c^2+c+30}$  d)  $\frac{r^2-rs-rt}{rt-rs-r^2}$

37 a)  $\frac{80a^3-58a^2+11a-3}{5a-3}$  b)  $\frac{3n^2-9n}{n^3-2n^2-5n+6}$   
 c)  $\frac{4p^3-6p^2+2p+3}{4p^2-1}$  d)  $\frac{v^2-4v+4}{v^4+3v^3-7v^2-9v+6}$

38 a)  $\frac{8x+3}{96x^3+28x^2+37x+15}$  b)  $\frac{3t^3+t^2+5t+12}{6t+8}$

c)  $\frac{4u^3+5u^2-2u-3}{u^2+2u+1}$  d)  $\frac{z^2+z-2}{z^4+z^3+z^2+z-4}$

39 a)  $\frac{a^3-b^3}{a-b}$  b)  $\frac{3n+3}{2n^3+2}$  c)  $\frac{4s^2-12s+9}{27-8s^3}$  d)  $\frac{r^3-8}{r^3-r^2-r-2}$

40 a)  $\frac{x+y}{x^3+y^3}$  b)  $\frac{u^3-v^3}{v^2-u^2}$  c)  $\frac{290p^4-2p}{5p^2+29p-6}$  d)  $\frac{(c+d)^2(c^3-d^3)}{(c^2-d^2)^2}$

41 a)  $\frac{a^2-b^2-2bc-c^2}{2a+2b+2c}$  b)  $\frac{180k^2s^3+240ks^2t+80st^2}{30ks^2+6kst+20st+4t^2}$  c)  $\frac{(m+5)^2-(n+1)^2}{(m+7)-(n+3)}$

42 a)  $\frac{25u^2-9(v-1)^2}{6v-10u-6}$  b)  $\frac{30p^2-60pq+25q^2-9r^2}{6p-5q-3r}$  c)  $\frac{x^4+x^3y-xy^3-y^4}{x^6-y^6}$

Zu 43, 44: Erweitere mit  $-1$ .  
 43 a)  $\frac{b-a}{-a-c}$  b)  $\frac{4y-x}{-3}$  c)  $\frac{-uvw}{-u+v-w}$  d)  $\frac{(-s+3)(-s+5)}{-s+7}$

44 a)  $\frac{-t}{1-t-t^2}$  b)  $\frac{1-gr}{1-q}$  c)  $\frac{-m-n}{n-m}$  d)  $\frac{6z-z^2-3}{5-4z-z^2}$

97

## 5 Bruchterme

## 5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

- Zu 45, 46: Notiere den Term als Bruch mit dem Nenner  $N$ .
- Beispiel:  $\frac{z}{a-b}$ ,  $N = a^2 - b^2$ ; Ergebnis:  $\frac{z}{a-b} = \frac{(a+b)z}{a^2-b^2}$
- 45 a)  $\frac{6}{7x}$ ,  $N = 84xyz$  b)  $\frac{3u}{8}$ ,  $N = 24u$  c)  $\frac{a+b}{ab^2}$ ,  $N = a^3b^3$   
 d)  $2r$ ,  $N = 3$  e)  $\frac{15w}{10-w}$ ,  $N = w^2 - 10w$  f)  $p^2$ ,  $N = p(p-1)$   
 g)  $\frac{s-t}{s+t}$ ,  $N = s^2 - t^2$
- 46 a)  $\frac{4ac}{3b}$ ,  $N = 12b^2c^2$  b)  $\frac{4q}{3q+2}$ ,  $N = 6q^2 + 4q$  c)  $7$ ,  $N = 2w$   
 d)  $k$ ,  $N = k$  e)  $\frac{6mn}{2m-5n}$ ,  $N = 8mn - 20n^2$  f)  $\frac{-2}{4y-3x}$ ,  $N = 6x - 8y$   
 g)  $\frac{d}{2d+1}$ ,  $N = (6d+3)^2$
- Zu 47–52: Mache gleichnamig.
- 47 a)  $\frac{2}{a}, \frac{3}{b}, \frac{4}{c}$  b)  $\frac{7}{8w}, \frac{5}{6w}$  c)  $\frac{p}{e^2}, \frac{p}{e^3}$  d)  $\frac{r^2}{9s^2u}, \frac{1}{r^2u^2}, \frac{8u}{15rs}$   
 48 a)  $\frac{u}{2u}, \frac{v}{2u}$  b)  $\frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{z}{xy}$  c)  $\frac{15}{4mn^2}, \frac{25}{6m^3n}$  d)  $\frac{13}{6h^2}, 1, \frac{4}{21hi}$   
 49 a)  $\frac{1}{rs}, \frac{1}{r^2+r}$  b)  $\frac{a}{b}, \frac{a}{b+c}$  c)  $\frac{q}{q^2-1}, \frac{q-1}{q+1}$   
 50 a)  $\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x-y}$  b)  $\frac{1}{t^2-t}, \frac{t-1}{t}$  c)  $\frac{3}{uv}, \frac{u+v}{2v}$   
 51 a)  $\frac{n}{n-5}, \frac{5}{5-n}$  b)  $\frac{w-z}{w+z}, \frac{w+z}{w-z}$  c)  $\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{b}{b-a}$   
 52 a)  $\frac{3c+2d}{3c-2d}, \frac{2c+3d}{2c-3d}$  b)  $\frac{21}{2x-2}, \frac{-31}{3x-3}, \frac{41}{4x-4}$
- 53 Welcher Bruch ist grösser,  $\frac{a}{b}$  oder  $\frac{a+1}{b+1}$ , wenn  $a > 0 \wedge b > 0$ ?
- 54 Welcher Bruch ist grösser,  $\frac{a}{b}$  oder  $\frac{a+d}{b+d}$ , wenn  $a > 0 \wedge b > 0 \wedge d > 0$ ?

98

## 5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

- 55 a)  $\frac{2x}{3} + \frac{4x}{3}$  b)  $\frac{7}{8s} - \frac{1}{8a}$  c)  $\frac{5}{3n} + \frac{2}{3n} - \frac{-5}{3n}$   
 56 a)  $\frac{5z}{6} - \frac{z}{6}$  b)  $\frac{5c}{12y} + \frac{c}{12y}$  c)  $\frac{-76u}{35v} - \frac{8u}{35v}$   
 57 a)  $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$  b)  $\frac{a+nb}{n} - \frac{a-nb}{n}$  c)  $\frac{-3r+4}{6} + \frac{5r+7}{6}$   
 58 a)  $\frac{-t+7}{4t} - \frac{3t+4}{4t} - \frac{8t-5}{4t}$  b)  $\frac{x^2+x-8}{2x} - \frac{x^2-7x-3}{2x} + \frac{2x^2-4x+5}{2x}$   
 59 a)  $\frac{1}{m+1} + \frac{m}{m+1}$  b)  $\frac{cd}{b-d} - \frac{bc}{b-d}$   
 c)  $\frac{xy}{y^2-2yz+z^2} - \frac{xz}{y^2-2yz+z^2}$  d)  $\frac{4a}{4a^2+7a+3} + \frac{3}{4a^2+7a+3}$   
 60 a)  $\frac{q}{p-q} - \frac{p}{p-q}$  b)  $\frac{4ktw}{2t-1} - \frac{2kw}{2t-1}$   
 c)  $\frac{s^3}{s^2-1} + \frac{s^2}{s^2-1}$  d)  $\frac{52x}{65x^2+59x-72} - \frac{36}{65x^2+59x-72}$   
 61 a)  $\frac{e}{2} - \frac{e}{3}$  b)  $\frac{2p}{15q} + \frac{8p}{9q}$  c)  $\frac{5}{6ac} - \frac{3}{4cd}$  d)  $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3}$   
 62 a)  $\frac{4u}{21} + \frac{9u}{14}$  b)  $\frac{8}{9m} - \frac{11}{36m}$  c)  $\frac{z}{n^2} + \frac{4}{3n}$  d)  $\frac{7v}{10w} - \frac{5v}{6w}$   
 63 a)  $\frac{7s}{18} - \frac{4s-9}{45}$  b)  $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{a}$  c)  $\frac{x+y}{2xz} + \frac{x+z}{2xz} + \frac{y+z}{2yz}$   
 64 a)  $\frac{c-2}{c^2} + \frac{c-1}{c^2}$  b)  $\frac{(u-v)^2}{u^2v^2} - \frac{2u+v}{u^2v} + \frac{u-3v}{uv^2}$   
 65 a)  $\frac{a}{3} + 1$  b)  $7r - \frac{9}{2s}$  c)  $5w - 1 + \frac{3}{w}$   
 66 a)  $8m - \frac{n}{5}$  b)  $b + \frac{1}{b}$  c)  $\frac{x}{4z} - 2y + 3z$   
 67 a)  $\frac{2r+3}{6} + 1$  b)  $t - 4 - \frac{t+1}{2}$  c)  $d - \frac{nd-2}{n}$

99

### 5 Bruchterme

- 68 a)  $p + \frac{9-p}{2}$  b)  $\frac{x-y}{3x} - 1$  c)  $2 - \frac{k^2-k+1}{k^2}$   
 69 a)  $\frac{2a}{a+b} + 1$  b)  $4 - \frac{u-v}{u+v}$  c)  $\frac{z^2}{z+1} - z$   
 70 a)  $3 - \frac{m}{m-n}$  b)  $\frac{q}{q+1} - 1$  c)  $e - \frac{e^2-2}{e-2}$   
 d)  $1 + \frac{z}{1-z}, 1+z + \frac{z^2}{1-z}, 1+z+z^2 + \frac{z^3}{1-x}$   
 71 a)  $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c}$  b)  $\frac{8}{n+5} - \frac{n+2}{n}$  c)  $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$   
 72 a)  $\frac{m}{m-1} - \frac{m-1}{m+2}$  b)  $\frac{2r}{s} - \frac{r+3}{r+s+1}$  c)  $\frac{w-4}{w-2} + \frac{w+6}{w+3}$   
 73 a)  $\frac{c}{c+d} - \frac{c-d}{2(c+d)}$  b)  $\frac{4}{z-1} + \frac{z}{z^2-1}$   
 c)  $\frac{3u}{u^2+2av+v^2} - \frac{1}{u+v}$  d)  $\frac{a+2b+t}{4ab+8bt} - \frac{1}{4t}$   
 74 a)  $\frac{x-y}{15x+10y} + \frac{x+y}{3x+2y}$  b)  $\frac{8p}{4p^2-4p+1} - \frac{3}{2p-1}$   
 c)  $\frac{r+2}{5r^2} - \frac{4r+4}{5r^3+10r^2}$  d)  $\frac{1}{q-1} - \frac{q^2+2}{q^2-1}$   
 75 a)  $\frac{c}{c-d} - \frac{2cd}{c^2-d^2} - \frac{d}{c+d}$  b)  $\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+5} - \frac{2a+3}{a^2+3a-10}$   
 76 a)  $\frac{z}{z-5} - \frac{5}{z+3} - \frac{40}{z^2-2z-15}$  b)  $\frac{n}{n+1} - \frac{2n+1}{n-1} + \frac{n^2+5n}{n^2-1}$   
 77 a)  $\frac{a-b}{4a+4b} + \frac{a+4b}{6a+6b}$  b)  $\frac{t+7}{3t-6} - \frac{t+4}{t^2-2t}$   
 c)  $\frac{u}{uv+v^2} + \frac{v}{u^2+uv}$  d)  $\frac{c}{c^2-8c+16} + \frac{2}{c^2-6c+8}$   
 78 a)  $\frac{1}{rx+ry} + \frac{1}{sx+sy}$  b)  $\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{b}{(a-b)^2}$   
 c)  $\frac{z+9}{z^2-1} - \frac{z+5}{z^2+z}$  d)  $\frac{5}{n^2+n-6} - \frac{3}{n^2-n-2}$

100

### 5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

- 79 a)  $\frac{7}{e-1} + \frac{6}{1-e}$  b)  $\frac{5}{3h-3} - \frac{4}{2-2h}$   
 c)  $\frac{r-4}{5r+5} + \frac{2}{1-r^2}$  d)  $\frac{u}{u-v} - \frac{4uv}{u^2-v^2} - \frac{v}{v-u}$   
 80 a)  $\frac{a-b}{c-d} - \frac{a+b}{d-c}$  b)  $\frac{x+y}{2x-6y} + \frac{x+3y}{9y-3x}$   
 c)  $\frac{8s}{s^2-4} + \frac{2+s}{2-s}$  d)  $\frac{m^2-8m}{2m^2+m-15} - \frac{m}{5-2m}$   
 81 a)  $\frac{2n-11}{3n-5} - \frac{4n+15}{n+7} + 1$  b)  $\frac{2v+3w}{2v+w} - \frac{2v-w}{2v} - \frac{2v+3w}{w}$   
 82 a)  $\frac{2r-19}{3r-7} - \frac{5r}{6r-8} - \frac{1}{2}$  b)  $\frac{5}{p-2} - \frac{3}{2p+1} + \frac{1}{p+1}$   
 83 a)  $\frac{5}{4x-8y} - \frac{3}{10y-5x} - \frac{11}{6x-12y}$  b)  $\frac{b-c}{a^2+ac} - \frac{a-b}{ac+c^2} + \frac{a^2+c^2}{a^2+c^2}$   
 84 a)  $\frac{k+2}{6k-15} + \frac{8k+1}{8k+20} - \frac{k+11}{10-4k}$  b)  $\frac{u}{u-v} + \frac{v}{v-u} - \frac{u+v-1}{u+v}$   
 85 a)  $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{x^2-9} - \frac{2}{3x}$  b)  $\frac{3s}{(s-2)^2} - \frac{2}{s} + \frac{s+4}{2s-s^2}$   
 86 a)  $\frac{2u-v}{2u-2v} - \frac{u-v}{3u+3v} - \frac{v(3v-u)}{3v^2-3u^2}$  b)  $\frac{1}{z^2-z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2+z}$   
 87 a)  $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$   
 88\*  $\frac{x^4+36x^2-32}{x^4-8x^2+16} - \frac{16x}{x^3+2x^2-4x-8} - \frac{16x}{x^3-2x^2-4x+8} - 1$   
 89\*  $\frac{a^2+3a+5}{a^4-a^3-31a^2+25a+150} - \frac{a+2}{a^3-3a^2-25a+75}$   
 +  $\frac{a-3}{a^3+2a^2-25a-50} - \frac{a-5}{a^3+4a^2-11a-30}$   
 90\*  $\frac{6-x}{x^4+2x^3-13x^2-14x+24} + \frac{1}{x^3-2x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^2-4x+3}$

101

### 5 Bruchterme

#### 5.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

##### Multiplikation

- 91 a)  $3 \cdot \frac{4}{5}$  b)  $a \cdot \frac{b}{c}$  c)  $a \cdot \frac{-b}{c}$  d)  $a \cdot \frac{b}{-c}$  e)  $(-a) \cdot \frac{-b}{c}$   
 92 a)  $x \cdot \frac{y}{x}$  b)  $u \cdot \frac{u}{v}$  c)  $n \cdot \frac{m}{n^2}$  d)  $r^2 \cdot \frac{1}{rs}$  e)  $pq \cdot \frac{p}{q}$   
 93 a)  $6ab \cdot \frac{9a}{4b}$  b)  $44x^2y^2 \cdot \frac{2x^3}{11y^3}$  c)  $21m^3n \cdot \frac{-7cd}{12mn^2}$   
 94 a)  $29k^5t \cdot \frac{47h^2}{29k^5t}$  b)  $\frac{5rs^2}{18uw^3} \cdot (-15rvw)$  c)  $(-4pz) \left( \frac{-3q^2z}{10p^2} \right)$   
 95 a)  $(a-b) \frac{2a+b}{a-b}$  b)  $(3x+3y) \frac{9c}{x+y}$  c)  $\frac{5}{q^2-1}(q-1)$   
 96 a)  $4z \cdot \frac{z+1}{8z^2+12z}$  b)  $\frac{d}{d^2-8d+15} \cdot (d-5)$  c)  $(2k-7) \frac{k}{7-2k}$   
 97 a)  $(r^2-36s^2) \frac{r+6s}{r-6s}$  b)  $(2p-4) \frac{p-4}{p^2-4}$  c)  $\frac{a+b+c}{ab+ac} \cdot abc$   
 98 a)  $\frac{x}{yz} (xz+yz)$  b)  $(3g-3f) \frac{4f+4g}{5f-5g}$  c)  $(m^2-n^2) \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}$   
 99 a)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3}$  b)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$  c)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$  d)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$  e)  $\left(\frac{a}{b}\right)^3$   
 100 a)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{-d}$  b)  $\frac{a}{-b} \cdot \frac{-c}{d}$  c)  $\left(-\frac{1}{n}\right)^5$  d)  $\left(-\frac{-a}{b}\right) \left(\frac{-c}{-d}\right) \left(\frac{-e}{-f}\right)$   
 101 a)  $\frac{8a}{3b} \cdot \frac{9bc}{4a}$  b)  $\frac{-xy^2}{35z^3} \cdot \frac{7z^2}{x^2y^2}$  c)  $\frac{-18u^2w}{65v^4} \cdot \frac{-26v}{27uw^3}$   
 102 a)  $\frac{7m^2}{12n^3} \cdot \frac{-3n^2}{14m}$  b)  $\frac{-a}{b} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-c}{a}$  c)  $\frac{17r^4s^3}{54t^5} \cdot \frac{24st^2}{85r^2}$   
 103 a)  $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2$  b)  $\left(\frac{-12}{n^3}\right)^2$  c)  $\left(\frac{-xyz}{cd}\right)^2$  d)  $\left(\frac{m}{4}\right)^3$

102

### 5.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

- 104 a)  $\left(\frac{-8h^2}{9}\right)^2$  b)  $\left(\frac{5uv}{17w}\right)^2$  c)  $\left(\frac{19r}{28t}\right)^2$  d)  $\left(-\frac{3}{e^2}\right)^4$   
 105 a)  $\frac{m-n}{3m} \cdot \frac{5m}{2m-2n}$  b)  $\frac{d-1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1-d}$  c)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{xy}$   
 106 a)  $\frac{t}{4u+4v} \cdot \frac{3u^2-3v^2}{t^2+t}$  b)  $\frac{5a^2}{5b-3} \cdot \frac{9-15b}{10ac}$  c)  $\frac{7r^2s}{12(r-s)} \cdot \frac{(2s-2r)^2}{21rs^2}$   
 107 a)  $\frac{p^2-q^2}{p^2-q^2} \cdot \frac{p+q}{p-q}$  b)  $\frac{x^2-6xy+9y^2-z^2}{5m-5n} \cdot \frac{m^4-n^4}{x-3y+z}$   
 108 a)  $\frac{v^2+4v+4}{3t-3} \cdot \frac{9-9t}{v^2+5v+6}$  b)  $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{225a^2b^2-150abc+25c^2} \cdot \frac{45abc-15c^2}{ab-b}$   
 109 a)  $xy \left( \frac{x}{x} + \frac{y}{x} \right)$  b)  $(n-z) \left( \frac{n}{n-z} - \frac{z}{n^2-z^2} \right)$  c)  $\left( -\frac{r^2}{s^3} \right) \left( \frac{s}{r} - \frac{s^2}{r^2} + \frac{s^3}{r^3} \right)$   
 110 a)  $\left( c - \frac{d}{c} \right) \left( c + \frac{d}{c} \right)$  b)  $\frac{v^2-v^2}{v^2+v^2} \left( \frac{u}{u+v} + \frac{v}{u-v} \right)$   
 c)  $\left( \frac{ab}{a-b} + a \right) \left( \frac{ab}{a+b} - b \right) \frac{b-a}{ab^2}$   
 111 a)  $\left( \frac{n}{2} - \frac{1}{n} \right)^2$  b)  $\left( \frac{z^2}{x-z} + z \right)^2$  c)  $\left( \frac{p}{q} - 1 \right)^2 - \left( \frac{p}{q} + 1 \right)^2$   
 112 a)  $\left( \frac{a}{2b} - \frac{c}{3d} \right)^2$  b)  $\left( \frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} \right)^2$  c)  $\left( u - \frac{v}{u} \right)^2 - \left( u + \frac{v}{u} \right)^2$   
 113  $\left( \frac{x}{3} - \frac{y}{2} \right) \left( \frac{x}{2} + y \right) - \left( \frac{x}{3} + y \right) \left( \frac{x}{2} - y \right)$   
 114  $\frac{3a}{3a-2b} \cdot \frac{3a}{2b} - \left( \frac{3a}{3a-2b} + \frac{3a}{2b} \right)$   
 115 a)  $\left( 1 + \frac{r}{s} \right)^3 - \left( 1 - \frac{r}{s} \right)^3$  b)  $\left( \frac{n^3-2n-1}{n^2-1} - n \right) \left( n - \frac{2n^2}{n+1} \right)$   
 116 a)  $\left( \frac{c}{3} - 1 \right)^3 - \left( \frac{c}{3} + 1 \right)^3$  b)  $\left( \frac{8x^2+4x+1}{4x^2-2x} - \frac{2x}{2x-1} \right) \frac{6x-3}{4x^2+2x}$

103

## 5 Bruchterme

### Division

117 a)  $\frac{4}{5} : 3$  b)  $\frac{a}{b} : c$  c)  $\frac{-a}{b} : c$  d)  $\frac{a}{-b} : c$  e)  $\left(\frac{a}{b}\right) : (-c)$

118 a)  $\frac{21}{8} : 7$  b)  $\frac{mn}{d} : m$  c)  $\frac{u^2}{v^3} : u$  d)  $\frac{9}{25} : 15$  e)  $\frac{xy}{wz} : yz$

119 a)  $\frac{15d}{4e} : 6de$  b)  $\frac{19r^2s^2}{23t} : 19r^2s^2$  c)  $\frac{-16ab^2}{27c} : (-16bc^2)$

120 a)  $\frac{7u^3}{9v^2} : 21u^2v$  b)  $\frac{-8h}{11mn} : 11mn$  c)  $\frac{72x^6}{5y^2z^4} : 24x^2$

121 a)  $\frac{10k - 15}{12k} : 5$  b)  $\frac{a^2 + ab}{b + c} : a$  c)  $\frac{6hs - 9h}{10s} : 18hs$

122 a)  $\frac{3u^2v - 4uv^2}{3u + 4v} : uv$  b)  $\frac{q^3 + q^2}{4} : q^3$  c)  $\frac{10xz + 16yz}{5x - 10} : 10xyz$

123 a)  $\frac{2a + 2b}{ab} : (a + b)$  b)  $\frac{w^2 - t^2}{w^2 + t^2} : (t - w)$  c)  $\frac{c^2 - cd}{d^2} : (3c - 3d)$

124 a)  $\frac{2p - 8}{15} : (4 - p)$  b)  $\frac{x + y}{x - y} : (x^2 - y^2)$  c)  $\frac{8n^2 - 34n - 9}{n + 4} : (4n^2 + n)$

125 a)  $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$  b)  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$  c)  $7 : \frac{3}{4}$  d)  $a : \frac{c}{d}$  e)  $47 : \frac{47}{59}$

126 a)  $\frac{a}{b} : \left(-\frac{c}{d}\right)$  b)  $(-a) : \left(\frac{c}{-d}\right)$  c)  $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$  d)  $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$  e)  $\frac{z}{a} : \frac{z}{b}$

127 a)  $\frac{5km}{6} : \frac{3k}{2m}$  b)  $\frac{112n^2}{19xyz} : \frac{-7n}{19xyz}$  c)  $\frac{12n^2v}{25tw} : \frac{18uv^2}{35tw}$

128 a)  $\frac{9c}{10ab} : \frac{6ac}{25b}$  b)  $\frac{1}{24rs^3} : \frac{1}{16r^2s}$  c)  $\left(\frac{78f}{-85h^3}\right) : \left(\frac{-48f^2}{-85h^3}\right)$

129 a)  $\frac{uv}{u + v} : \frac{5v}{u^2 + uv}$  b)  $\frac{z}{3z - 3} : \frac{z}{2 - 2z}$  c)  $\frac{n^2 - 19n + 90}{n + 9} : \frac{n - 9}{n + 9}$

130 a)  $\frac{c^2 - d^2}{c - 1} : \frac{c + d}{1 - c}$  b)  $\frac{x^2 - xy}{x + y} : \frac{3x + 3y}{x - y}$  c)  $\frac{m^2 - m}{m + 2} : \frac{m^2 - 1}{4m + 8}$

104

## 5 Bruchterme

### 5.4 Doppelbrüche

143 a)  $\frac{25}{36}$  b)  $\frac{a}{\frac{b}{c}}$  c)  $\frac{u}{\frac{v}{x}}$  d)  $\frac{p}{\frac{u}{v}}$  e)  $\frac{n}{\frac{q}{r}}$  f)  $\frac{z}{\frac{s}{t}}$

144 a)  $\frac{a}{\frac{b}{a}}$  b)  $\frac{a}{\frac{b}{b}}$  c)  $\frac{m}{\frac{n}{\frac{m}{n}}}$  d)  $\frac{c}{\frac{d}{\frac{c}{d}}}$  e)  $\frac{d}{\frac{c}{\frac{d}{c}}}$  f)  $\frac{x}{\frac{y}{\frac{1}{y}}}$

145 a)  $\frac{14u^3v}{57xyz}$  b)  $\frac{3m}{6mn}$  c)  $\frac{1}{p^2 - 4}$  d)  $\frac{2e - 6f}{3e^2 - 9ef}$

146 a)  $\frac{54k^2}{65t}$  b)  $\frac{9ab^2c^3}{\left(9 \cdot \frac{ab}{c}\right)^2}$  c)  $\frac{\frac{2w^2 - w}{w^2 - 2w^3}}{\frac{rs}{r^2 - s^2}}$  d)  $\frac{\frac{rs}{r + s}}{\frac{r^2 - s^2}{r^2 - s^2}}$

147 a)  $\frac{g + \frac{1}{3}}{g - \frac{1}{3}}$  b)  $\frac{h}{0.5h - 0.75}$  c)  $\frac{1 - \frac{1}{e}}{1 + \frac{1}{e^2}}$  d)  $\frac{\frac{y - z}{x - y}}{-\frac{z}{x}}$

148 a)  $\frac{1 - \frac{n}{v}}{-nv}$  b)  $\frac{0.6m - 0.4p}{p + 0.8}$  c)  $\frac{r^2 + \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r^2}}$  d)  $\frac{\frac{5f}{2n}}{\frac{1}{2n} - \frac{1}{4}}$

149 a)  $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{x - y}{y - x}}$  b)  $\frac{1}{\frac{1}{w} + \frac{1}{z}}$  c)  $\frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{d}}{\frac{1}{s} + \frac{1}{t}}$  d)  $\frac{-\frac{2k}{a} + \frac{3k}{b}}{\frac{6}{a} - \frac{k}{b}}$

150 a)  $\frac{a - \frac{c}{d}}{\frac{d - 1}{d - b}}$  b)  $\frac{q - p}{1 - \frac{p}{q}}$  c)  $\frac{\frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h}}{\frac{f}{g} - \frac{h}{h}}$  d)  $\frac{\frac{u - v}{w - u}}{\frac{v}{w} + \frac{u}{v} + 2}$

106

## 5.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

131 a)  $\frac{w^2 - w - 12}{t^2} : \frac{w - 4}{t^2 - t}$  b)  $\frac{196a^2 - 25}{4b^2 + 20b + 25} : \frac{70a + 25}{2b + 5}$

132 a)  $\frac{1}{4n^2 - 4} : \frac{1}{(4n - 4)^2}$  b)  $\left(\frac{x - 1}{2x}\right)^2 : \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{4x^2}$

133 a)  $\frac{a^3 + a^2b}{c^2 + 1} : \frac{a^3 - ab^2}{c^2 - c}$  b)  $\frac{e^2 + 2ef + f^2}{e^2 + 2ef} : \frac{e^2 + ef - e - f}{2ef + 4f^2}$

134 a)  $\frac{10x^2 - 20x + 10}{9x^2 + 18x + 9} : \frac{15x^2 + 15x - 30}{2x^2 - 2x - 4}$  b)  $\frac{r^4 - 1}{rs - s^3} : \frac{4r + 4}{r^2 - rs - r + s}$

135 a)  $6abc : \frac{15ac^2}{4bd}$  b)  $(u + v) : \frac{u + v}{w}$  c)  $(-4n - 4) : \frac{n + 1}{-2}$

136 a)  $39g^2h^2 : \frac{52g}{9h}$  b)  $(7 - k) : \frac{k - 7}{-k - 7}$  c)  $(p + q) : \frac{p^2 - q^2}{pq}$

137 a)  $(4m - 2) : \frac{4m^2 - 1}{m - 2}$  b)  $xyz : \frac{xyz - xy}{xz - yz}$

138 a)  $(6d^2 - 9d) : \frac{4d - 6}{2d + 3}$  b)  $(a^2b + ab^2) : \frac{a^3b - ab^3}{a^2 + b^2}$

139 a)  $\left(u^2 + \frac{u}{v}\right) : \frac{u}{v}$  b)  $\left(\frac{x^4}{y^2} - x^3\right) : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

140 a)  $\left(4ef - \frac{2e}{f}\right) : \frac{2e}{f}$  b)  $\left(6 \cdot \frac{r^2}{s^2} - 3 \cdot \frac{r}{s} + \frac{3}{2}\right) : \left(-3 \cdot \frac{r^2}{s^2}\right)$

141 a)  $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$  b)  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

142 a)  $\left(x - \frac{1}{x}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right)$  b)  $\left(\frac{w}{2} - \frac{2}{w}\right) : (w + 2)$

105

## 5.5 Vermischte Aufgaben

151 a)  $\frac{\frac{2 - y}{x + y} - \frac{x}{x - y}}{\frac{2 - y}{x - y} - \frac{y}{x + y}}$  b)  $\frac{\frac{n}{n^2 - 1}}{\frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n - 1}}$   
c)  $\frac{\frac{s^2 + t^2}{s - t} - \frac{t}{s + t}}{\frac{z}{s - t} - \frac{8}{s + t}}$  d)  $\frac{\frac{z}{z + 6} - \frac{8}{z}}{\frac{32}{z - z(z + 6)}}$

152 a)  $\frac{\frac{r}{r + 2} - \frac{r}{r + 2}}{\frac{r}{r + 2} - \frac{2r}{r + 1}}$  b)  $\frac{\frac{2c}{c - 3} - \frac{c}{c + 4}}{\frac{c + 11}{c^2 + c - 12}}$   
c)  $\frac{\frac{u - w + uv}{w - u + w}}{\frac{(2a + 3b)^2 - 2a + 3b}{6u^2 - 12uvw + 6v^2w^2}}$  d)  $\frac{\frac{4a^2 - 9b^2}{(2a + 3b)^2} - \frac{2a + 3b}{2a - 3b}}{\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 - 9b^2} - \frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2}}$

### 5.5 Vermischte Aufgaben

153 a, b sind zwei beliebige Zahlen und  $m = \frac{a + b}{2}$ . Vergleiche  $m - a$  mit  $b - m$ .

154 Berechne das arithmetische Mittel der beiden Terme.  
a)  $\frac{7}{12}, \frac{3}{4}$  b)  $\frac{7}{12}x, \frac{3}{4}x$  c)  $\frac{7}{12}(a + b)$ ,  $\frac{3}{4}(a + b)$  d)  $\frac{7}{12n}, \frac{3}{4n}$

155 Berechne das arithmetische Mittel der drei Terme.

a)  $\frac{3}{5}t, \frac{2}{3}t, \frac{5}{6}t$  b)  $\frac{3}{5}(x - y), \frac{2}{3}(x - y), \frac{5}{6}(x - y)$  c)  $\frac{3a}{5b}, \frac{2a}{3b}, \frac{5a}{6b}$

156 Verifiziere, dass  $a = n$ ,  $b = \frac{n^2 - 1}{2}$  und  $c = \frac{n^2 + 1}{2}$  für jeden Wert des Parameters  $n$  die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  erfüllen. Berechne  $a$ ,  $b$ ,  $c$  für  
a)  $n = 3$  b)  $n = 5$  c)  $n = 7$  d)  $n = 19$  e)  $n = 4$  f)  $n = 10$

157 a)  $\left(\frac{2a + 1}{a} - 1\right)^2$  b)  $\left(\frac{x - z^2}{z} + z - 1\right)^2$  c)  $\left(\frac{m - n}{m + n + 1}\right)^2$

158 a)  $\left(\frac{2a - b}{a} - \frac{b + c}{b} - \frac{b + c}{c}\right) : \frac{-1}{abc}$  b)  $\left(\frac{r^3 - 1}{r^3} - \frac{r^2 - r - 1}{r^2} - \frac{1}{r}\right) : \frac{1}{r^3}$

107

## 5 Bruchterme

- 159 a)  $4y^2z^3 \left( \frac{2x}{yz^2} - \frac{3x}{y^2z} \right) : (3z - 2y)$  b)  $u^2v^2 \left( \frac{u}{v} - \frac{v}{u} \right)^2 : (u - v)(u + v)^2$
- 160 a)  $\left( \frac{5s - 3}{s - t} - \frac{5s + 3}{s + t} \right) : \frac{25t^2 - 9}{s + t}$  b)  $\left( \frac{2n + 1}{2n - 1} - \frac{2n - 1}{2n + 1} \right) \left( \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8n} \right)$
- 161 a)  $\left( \frac{7ab}{5c - 5d} - \frac{4e^3}{9f^3} \right) : \frac{14b}{3c - 3d} \cdot \left( \frac{2e}{3f} \right)^2$   
b)  $\frac{25x^2 - 9}{(x + 2)^2} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{y^3} : \frac{5x - 3}{xy^2 + 2y^3}$
- 162 a)  $\frac{9a^2 - 30ab + 25b^2 - 1}{3a - 5b - 1}$  b)  $\frac{u^4 - v^4 + 2v^2 - 1}{u^2 + v^2 - 1}$
- 163 a)  $(p + 1)^2 \cdot \left( p - 1 + \frac{1}{p + 1} \right)^2$  b)  $(c - 5) : \frac{c^2 - 3c - 10}{c^2 - 4}$
- 164 a)  $(x - 3) : \frac{x^2 - 2x - 3}{xy + x + y + 1}$  b)  $\left( \frac{r}{r^2 - r - 1} \right)^2 \left( -r + 1 + \frac{1}{r} \right)^2$
- 165 a)  $\frac{a^2b}{8} \left[ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right]$
- 166 a)  $\frac{u - 3v}{u^2 - v^2} \cdot \frac{u + v}{u} + \frac{3uv - v^2}{u^2 - 2uv + v^2} : \frac{v^2}{u - v}$   
b)  $\frac{1}{(a + b)^2} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a + b} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$
- 167  $\left( \frac{2}{m - 1} + m + 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{m^2 - 1} - \frac{2m}{m^4 - 1} \right)$
- 168  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c}{ab} \right) (a + b + c) : \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{c^2}{a^2b^2} \right)$
- 169  $1^2 = \frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2}, 2^2 = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2}, 3^2 = \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2}$ ; Verallgemeinerung?
- 170 Unter der Voraussetzung  $a \leq b + c$  für die positiven Zahlen  $a, b, c$  ist die Ungleichung  $\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$  zu beweisen.

108

## 5 Bruchterme

- 182 a)  $\frac{x}{2(x - 6)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{x - 6}$  b)  $\frac{y}{y + 3} - \frac{y + 1}{2(y + 3)} = \frac{1}{3}$
- 183 a)  $\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{2x + 2} = \frac{4x - 1}{4x + 4}$  b)  $\frac{z - 3}{z - 2} + \frac{z}{5z - 10} = \frac{4}{5}$
- 184 a)  $\frac{r - 7}{r + 5} - \frac{3 - r}{2r + 10} = 2$  b)  $\frac{x}{2x - 8} + \frac{x - 6}{x - 4} = \frac{3}{2}$
- 185 a)  $\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} = \frac{2x + 8}{x^2 - 4}$  b)  $\frac{5}{n - 4} - \frac{1}{n - 5} = \frac{9n - 1}{n^2 - 9n + 20}$   
c)  $\frac{x + 3}{x - 2} - \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}$  d)  $\frac{2k + 17}{7k - 3} + \frac{5k^2}{7k^2 - 3k} = \frac{k + 2}{k}$
- 186 a)  $\frac{5}{2t^2 + 3t} + \frac{6}{2t + 3} - \frac{7}{t} = 0$  b)  $\frac{7x - 51}{x^2 - 9} - \frac{5}{x + 3} + \frac{4}{x + 3} = 0$   
c)  $\frac{v + 1}{v - 1} - \frac{v - 1}{v + 1} - \frac{1}{v^2 - 1} = 0$  d)  $\frac{x - 1}{x + 3} - \frac{x - 4}{x + 5} = \frac{7x + 13}{x^2 + 8x + 15}$
- 187 a)  $\frac{2}{x + 2} - \frac{2}{x - 2} = \frac{x + 3}{4 - x^2}$  b)  $\frac{x}{3x - 4} + \frac{1}{8 - 6x} - 2 = 0$
- 188 a)  $\frac{8x + 1}{x - 8} - \frac{8x - 1}{8 - x} = 8$  b)  $\frac{5 + x}{5 - x} - \frac{5 - x}{5 + x} = \frac{5x - 5}{x^2 - 25}$
- 189 a)  $\frac{x}{x - 3} - \frac{x}{x - 4} = \frac{5}{x - 3}$  b)  $\frac{1}{p} + \frac{2p + 5}{p + 6} = 2$   
c)  $\frac{1}{w - 5} + \frac{2w - 3}{w + 2} = 2$  d)  $\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x - 8} = \frac{11}{8 - x}$

## 190 Kopfrechnungen!

- a)  $\frac{x}{x + 7} + \frac{7}{x + 7} = \frac{100}{x + 2}$  b)  $\frac{2x}{2x - 11} - \frac{11}{2x - 11} = \frac{x - 8}{3}$   
c)  $\frac{3x}{x + 2} + \frac{6}{x + 2} = \frac{1}{x}$  d)  $\frac{6}{x - 6} - \frac{x}{x - 6} = \frac{9}{9 - x}$
- 191 a)  $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x + 1}$  b)  $\frac{x}{2x - 3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x - 3}$
- 192 a)  $\frac{1}{q} - \frac{q}{4q - 15} + \frac{1}{4} = 0$  b)  $\frac{1}{1 - m} + \frac{2}{m} = \frac{1}{2 + m}$
- 193 a)  $\frac{2x - 1}{2x} - \frac{3x - 1}{3x} + \frac{4}{4x + 1} = 0$  b)  $\frac{x - 4}{x - 2} + \frac{x - 8}{2x - 4} + \frac{x - 9}{3x - 6} = 0$   
c)  $\frac{x + 4}{6x^2 + x - 2} - \frac{3}{8x - 4} = 0$  d)  $\frac{3r + 7}{r^2 + 4r} - \frac{5}{r + 4} = \frac{1}{4r}$

110

## 5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

## 5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

Multiplikation (beider Seiten) einer Gleichung mit einem Term kann eine Gewinnungsumformung sein. Vergleiche Abschnitt 4.3. Beispiele:

$$\frac{4x + 5}{2x - 8} = \frac{17}{2x - 8} \Leftrightarrow 4x = 12, \quad \frac{4x + 5}{2x - 6} = \frac{17}{2x - 6} \Rightarrow 4x = 12$$

Zu 171–200: Bestimme die (reellen) Lösungen.

- 171 a)  $\frac{1}{x} + 2 = \frac{9}{x}$  b)  $\frac{5}{6x} + \frac{13}{4} = \frac{5}{3} - \frac{2}{9x}$  c)  $\frac{x + 10}{3x} - \frac{x + 8}{5x} = 1$
- 172 a)  $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = 4$  b)  $\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{6} = 0$  c)  $\frac{11}{5} - \frac{x - 20}{2x} = \frac{2x - 1}{3x}$
- 173 a)  $\frac{5 - x}{10} = \frac{x}{10}$  b)  $\frac{2x - 4}{x} = \frac{8x - 7}{x}$  c)  $\frac{3(x + 2)}{x + 8} = \frac{2(x + 3)}{x + 8}$
- 174 a)  $\frac{4x + 1}{6x} = \frac{7x + 8}{6x}$  b)  $\frac{4 - x}{3x - 1} = \frac{2x + 3}{3x - 1}$  c)  $\frac{2(x - 2)}{x - 5} = \frac{2x - 4}{x - 5}$
- 175 Löse die Gleichung  $\frac{3x - 7}{N} = \frac{x + 1}{N}$  mit dem Nenner  $N$ :  
a)  $N = 10$  b)  $N = x$  c)  $N = x - 4$  d)  $N = x + 4$  e)  $N = x^2 + x - 20$
- 176 Löse die Gleichung  $\frac{Z}{4x - 25} = \frac{Z}{10 - x}$  mit dem Zähler  $Z$ :  
a)  $Z = 9$  b)  $Z = 2x - 4$  c)  $Z = 7 - x$  d)  $Z = (x + 4)(2x - 1)$  e)  $Z = x^2 + 1$
- 177 a)  $\frac{1}{x} = \frac{9}{x - 5}$  b)  $\frac{2}{x - 3} = \frac{3}{x + 5}$  c)  $\frac{x - 6}{x} = \frac{x}{x + 10}$
- 178 a)  $\frac{4}{2x - 1} = \frac{3}{2x}$  b)  $\frac{7}{x - 8} = \frac{11}{x - 1}$  c)  $\frac{14}{x - 14} = \frac{x - 14}{14}$
- 179 a)  $\frac{2x + 19}{x + 2} = \frac{47}{3x + 6}$  b)  $\frac{2x}{x - 5} = \frac{x - 24}{5 - x}$  c)  $\frac{x - 7}{6x + 6} = \frac{x + 7}{8x + 8}$
- 180 a)  $\frac{x}{x - 3} = \frac{x + 1}{9 - 3x}$  b)  $\frac{10}{4x + 3} = \frac{x + 3}{4x^2 + 3x}$  c)  $\frac{x - 2}{x^2 - x} = \frac{x}{x^2 - 1}$
- 181 a)  $\frac{x + 1}{2(x - 1)} - \frac{5x - 8}{2(x - 1)} = \frac{3(x - 4)}{2(x - 1)}$  b)  $\frac{2}{x + 9} + \frac{3}{4(x + 9)} = \frac{1}{4}$

109

## 5.6 Gleichungen mit Bruchtermen

- 194 a)  $\frac{x}{x - 3} - \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{2x - 2}$  b)  $\frac{1}{n^2 - n} + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{5}{n^2 + n}$   
c)  $\frac{6}{4s^2 - 9} + \frac{5}{2s^2 - s - 3} = \frac{4}{s^2 - 1}$  d)  $\frac{1}{4x - 4} + \frac{1}{6x - 6} = \frac{5}{9x^2 - x - 8}$   
e)  $\frac{x + 10}{x^2 - 10x} + \frac{x + 5}{x^2 - 5x} = \frac{x}{x^2 - 15x + 50}$  f)  $\frac{x}{4x^2 - 20x + 25} - \frac{1}{4x - 10} + \frac{10}{4x^2 - 25} = 0$
- 195 a)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3}$  b)  $\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x - 5}{x - 6} = \frac{x - 3}{x - 4} - \frac{x - 7}{x - 8}$
- 196 a)  $\frac{1}{x - 9} - \frac{1}{x - 4} = \frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x + 9}$  b)  $\frac{6}{2x - 5} - \frac{3}{x + 3} = \frac{22}{2x - 7} - \frac{11}{x - 2}$
- 197 a)  $\frac{0.5x - 1}{x + 0.1} - \frac{0.2}{2x + 0.2} = 1$  b)  $\frac{1 - \frac{r}{3}}{1 + \frac{r}{3}} = \frac{1 + r}{2.6 - r}$  c)  $\frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{2}{x}} - \frac{1 - \frac{3}{x}}{3 + \frac{3}{x}} = \frac{1 - \frac{4}{x}}{4 + \frac{4}{x}}$
- 198 a)  $\frac{\frac{1}{x}x + 1}{1 - \frac{1}{2}x} - \frac{3}{2 - x} = \frac{1}{4}$  b)  $\frac{1}{1 + \frac{1}{w}} = \frac{1 + \frac{1}{w}}{1 - \frac{1}{w}}$  c)  $\frac{0.75}{1.5 + 0.5x} + \frac{0.2x}{x + 3} = 0.3$

Zu 199, 200: Kopfrechnungen!

- 199 a)  $\frac{1}{x} = \frac{4}{9}$  b)  $\frac{1}{x} = 6$  c)  $\frac{1}{x} = -\frac{5}{3}$  d)  $\frac{1}{x} = 2.7$  e)  $\frac{1}{x} = -0.01$   
f)  $\left( \frac{1}{x} - \frac{2}{3} \right) \left( \frac{1}{x} + 7 \right) = 0$  g)  $\left( \frac{3 - 1}{n} \right) \left( 2 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 0 - \frac{1}{n} \right) = 0$   
h)  $\frac{1}{f} \left( \frac{1}{f} - \frac{9}{2} \right) \left( \frac{1}{f} + 5 \right) \left( 3 - \frac{1}{f} \right) \left( \frac{1}{f} - 1.6 \right) \left( 0.04 - \frac{1}{f} \right) = 0$
- 200 a)  $\frac{8}{x + 2} = \frac{8}{9}$  b)  $\frac{7}{2x - 3} = \frac{7}{5}$  c)  $\frac{25}{x - 1} = 1$  d)  $\frac{12}{x + 5} = 4$  e)  $\frac{6}{x - 3} = \frac{1}{9}$   
f)  $\left( \frac{24}{x - 3} - 1 \right) \left( \frac{24}{x - 1} - 3 \right) = 0$  g)  $\left( \frac{1}{x - 1} - 1 \right) \left( \frac{2}{x - 2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{x - 3} - \frac{1}{3} \right) = 0$

111

**Gleichungen mit Parametern**

Wenn aus dem Aufgabentext nichts anderes hervorgeht, ist die angegebene Gleichung ohne Berücksichtigung von Sonderfällen nach  $x$  aufzulösen.

- 201 a)  $x + 1 = \frac{a}{a+b}$  b)  $\frac{r}{r-1} = \frac{r}{r+1} + x$  c)  $5x = 3x + \frac{4}{u} - \frac{2}{v}$   
 202 a)  $x + \frac{1}{m} = \frac{1}{m-1}$  b)  $2x - \frac{3a+b}{2a+2b} = \frac{b-2a}{2a+2b}$  c)  $6x - \frac{1}{2h} = \frac{1}{3h} - 4x$   
 203 a)  $x + \frac{x}{p} = 1$  b)  $\frac{x}{c} + \frac{x}{f} = \frac{1}{f}$  c)  $\frac{n+1}{x} + \frac{n}{x+1} = 0$   
 204 a)  $2x - \frac{dx}{2} = c$  b)  $\frac{1}{x-t} = 1 - \frac{1}{t}$  c)  $\frac{a}{w} - \frac{w}{a} = \frac{a^2}{x+aw}$

Zu 205–208: Löse die Gleichung nach jeder Variablen auf.

- 205 a)  $A = \frac{abc}{4r}$  b)  $s = \frac{1}{1-q}$  c)  $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$   
 206 a)  $\frac{x}{y} = \frac{x+a}{y+b}$  b)  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  (r > 0) c)  $\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$   
 207 a)  $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x \cdot y}$  b)  $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$  c)  $t = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}$   
 208 a)  $\frac{y}{x} - \frac{y}{x+1} = \frac{y+1}{x}$  b)  $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$  c)  $u' = \frac{u-v}{1-u^2}$  ( $c > 0$ )  
 209 a)  $\frac{1+x}{1-x} = a$  b)  $\frac{3x+p}{3x-1} = \frac{x+1}{x-p}$  c)  $\frac{m}{x-2} + \frac{2x}{2x-m} = 1$

210 Diskutiere in Nr. 209 die Sonderfälle.

- 211 a)  $\frac{x-1}{x-c} = c$  b)  $\frac{s-5}{x-s} + \frac{1}{x} = 0$  c)  $\frac{a}{x} + 1 = \frac{x}{x-b}$

212 Diskutiere in Nr. 211 die Sonderfälle.

- 221 Peter verwechselt das Subtrahieren mit dem Dividieren. Statt dass er  $x$  durch  $a$  dividiert, subtrahiert er  $a$  von  $x$ . Trotzdem erhält er das richtige Resultat. Bestimme  $x$ .  
 a)  $a = 2$  b)  $a = 3$  c)  $a = 10$  d)  $a = -10$  e)  $a = \frac{4}{3}$  f) allgemein  
 222 Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz dieser Kehrwerte. Welche Zahlen sind es?  
 223 Ein grosser Bagger benötigt für einen Aushub 12 Stunden. Würde noch ein kleinerer Bagger helfen, so könnte der Aushub in 9 Stunden gemacht werden. Wie lange würde der kleine Bagger allein brauchen?  
 224 Ein Wasserbecken wird durch eine Zuleitung in 10 Stunden gefüllt. Die Zuleitung wird um 9.00 Uhr geöffnet. Um 11.30 Uhr wird zusätzlich eine zweite Zuleitung geöffnet, so dass das Becken schon um 15.00 Uhr voll ist. Wie lange hätte die zweite Zuleitung allein, um das Becken zu füllen?  
 225 Zwei Metallstücke haben die Massen 6 kg und 7.2 kg. Das Volumen des zweiten Stückes beträgt 90 % des Volumens des ersten. Die beiden Dichten unterscheiden sich um 2.5 g/cm³. Berechne das Volumen des ersten Stückes.  
 226 Ein Schiff benötigt für eine 180 km lange Strecke einen Sechstel weniger an Zeit als ein langsameres Schiff, dessen mittlere Geschwindigkeit um 5 km/h kleiner ist, als die des schnelleren. Berechne die beiden Fahrzeiten.  
 227 Ein Autofahrer erreicht sein Ziel nach 120 km Fahrt um 15.00 Uhr. Wäre seine mittlere Geschwindigkeit um 4 km/h grösser gewesen, so hätte er 4 % Zeit gewonnen. Wann ist er gestartet?  
 228\* Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h grösser als die von B. Berechne die Laufzeit von A.  
 229 Ein kleiner Lastwagen benötigt 9 Fahrten mehr, um allein Schutt wegzuführen, als ein grosser. Beide gemeinsam können den Schutt in je 20 Fahrten wegführen. Wie viele Fahrten benötigt jeder allein?  
 230 Der Kilopreis der Kaffessorte A ist um 2 Franken höher als derjenige der Sorte B. Von der Sorte B erhält man für 160 Franken 8 kg mehr, als man von der Sorte A für 120 Franken erhält. Berechne den Kilopreis der Sorte A.

- 213 a)  $\frac{a^2x - bx + c}{ax + bx - c} = a - 1$  b)  $\frac{g - hx}{gx - g} - \frac{(x+1)}{x-1} = \frac{g(x-c)}{1} = \frac{g(x-a)}{1}$   
 c)  $\frac{x+r}{x-r} - \frac{x-r}{x+r} = \frac{4r^2 + 2r}{x^2 - r^2}$   
 214 a)  $\frac{(mx-n)(m+n)}{mx - nx + n} + n = m$  b)  $\frac{x}{c-d} - \frac{x+c+d}{c^2 - d^2} = 0$   
 c)  $\frac{x^2}{sx - 2s} - \frac{x-s}{s} = \frac{1}{x-2}$   
 215 a)  $\frac{2a - x}{4a^2 - 4ab + b^2} = \frac{x - b + 2}{4a - 2b}$  b)  $\frac{x^2 + n^2}{x^2 - nx} - \frac{n^2 + 1}{nx - n^2} = 1$   
 c)  $\frac{r^2 - 4}{24r} - \frac{5r - 6}{8x} = \frac{8r + 2}{3rx} - r$  d)  $\frac{4}{x+y} + \frac{1}{x} + \frac{4}{x-y} = 0$   
 e)  $\frac{2(x-c)}{a^2 + ab - ac - bc} - \frac{x+c}{a^2 + ab + ac + bc} = \frac{1}{a+b}$   
 216 a)  $\frac{c - dx}{c^2 - 9d^2} - \frac{c + dx}{c^2 + 6cd + 9d^2} = 0$  b)  $\frac{7}{t^2 + tx} - \frac{t+4}{tx} + \frac{3t-2}{tx + x^2} = 0$   
 c)  $\frac{ex - f}{ex + e} + \frac{3e + fx}{fx + f} = \frac{e^2 + f^2}{ef}$  d)  $\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{2}{(x+k)^2} = \frac{3}{x^2 - k^2}$   
 e)  $\frac{a - x}{2a^2 - 2ab} - \frac{2(a+x)}{a^2 + b^2} + \frac{x}{ab + b^2} + \frac{a^2 + 6ab + b^2}{2a^3 - 2ab^2} = 0$   
 217 a)  $\frac{x+g}{x} = 1$  b)  $\frac{1}{\frac{x}{u} - \frac{x}{v}} = uv$  c)  $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{c}{u} - \frac{1}{v}} = \frac{1}{\frac{c}{u} - \frac{1}{v}}$   
 d)  $\frac{1}{\frac{x+a}{x-b}} = 1$  b)  $\frac{r - \frac{1}{x}}{r + \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{x}}$  c)  $\frac{x - \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = n + x + 1$   
 218 a)  $\frac{1 - \frac{x+a}{x-b}}{1 - \frac{x-a}{x+b}} = 1$  b)  $\frac{r - \frac{1}{x}}{r + \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{x}}$  c)  $\frac{1}{x - n} = n + x + 1$

**Textaufgaben**

- 219 Der Zähler eines ungekürzten Bruches ist um 3 grösser als der Nenner. Der Wert des Bruches ist 0.8. Berechne Zähler und Nenner.  
 220 Der Nenner eines ungekürzten Bruches ist um 240 grösser als der Zähler. Addiert man 1200 zum Zähler, so erhält man einen Bruch, dessen Wert zum ursprünglichen reziprok ist. Berechne Zähler und Nenner des ursprünglichen Bruches.

**Einige Ungleichungen**

- 231 a)  $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$  b)  $\frac{1}{x} < -\frac{1}{3}$  c)  $\frac{1}{x} < 3$  d)  $\frac{-1}{x} < -3$   
 232 a)  $\frac{2}{x} > 1$  b)  $\frac{-2}{x} > -1$  c)  $\frac{-1}{-2x} > 1$  d)  $\frac{-1}{-2x} > -1$   
 233 a)  $\frac{1}{x-4} < 0$  b)  $\frac{8}{x+5} > 0$  c)  $\frac{-7}{2x-3} < 0$  d)  $\frac{5}{6-x} > 0$   
 234 a)  $\frac{2}{3x+8} < 0$  b)  $\frac{-6}{1-x} > 0$  c)  $\frac{-1}{3-4x} < 0$  d)  $\frac{12}{8x-9} > 0$   
 235 a)  $\frac{1}{(x-2)(x-6)} < 0$  b)  $\frac{1}{(x-2)(x-6)} > 0$  c)  $\frac{x-2}{x-6} > 0$   
 236 a)  $\frac{x}{x+5} < 0$  b)  $\frac{-3}{x^2+5x} < 0$  c)  $\frac{4}{x^2-8x+15} > 0$   
 237 a)  $\frac{6}{x-5} < \frac{1}{2}$  b)  $\frac{6}{x-5} > \frac{1}{2}$  c)  $\frac{x+5}{x-3} < 2$  d)  $\frac{x+1}{x-8} > 4$   
 238 a)  $\frac{5}{4-x} > \frac{2}{3}$  b)  $\frac{5}{4-x} < \frac{2}{3}$  c)  $\frac{2x-1}{2x+1} < \frac{7}{6}$  d)  $\frac{x-3}{x+3} > 3$

### 3. Zehnerpotenzen

Häufig treten in alltäglichen oder wissenschaftlichen Kontexten, zum Beispiel in Physik, Biologie oder Chemie, grosse oder kleine Zahlen auf. Potenzen können dazu verwendet werden um sehr grosse oder sehr kleine Zahlen kurz und übersichtlich zu notieren. Zwei wichtige Beispiele für solche Zahlen sind folgend aufgeführt.

- Abstand Erde-Sonne, eine astronomische Einheit (1 AE)

$$150'000'000 \text{ km}$$



- Durchmesser eines Atoms, ein Ångström (1 Å)

$$0.000\,000\,000\,1 \text{ m}$$

#### 3.1. Der Potenzbegriff für natürliche Exponenten

##### Definition 3.1: Potenz, Basis und Exponent

Der Term

$$a^b$$

heisst *Potenz*.  $a$  nennt man *Basis*,  $b$  heisst *Exponent*.

##### Definition 3.2: Potenz

für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  soll gelten:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \quad \text{für } n \geq 2$$

**Beispiele.**

$$\bullet 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\bullet \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\bullet \pi^4 \approx 3^4 = 81$$

### 3. Zehnerpotenzen

#### 3.2. Zehnerpotenzen

Nach Definition gilt also zum Beispiel

$$10^1 = 10 \quad 10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000$$

was leicht berechnet werden kann. Die obige Liste weist auch ein System auf: Erhöht man nämlich den Exponenten einer Zehnerpotenz um 1, so muss man einfach die entsprechende Zahl mit 10 multiplizieren. Wenden wir dieses Prinzip rückwärts an, so können wir Bedeutungen für die bislang sinnlosen Ausdrücke

$$10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad \text{etc.}$$

festlegen. Nämlich

$$10^0 = 1 \quad 10^{-1} = 0.1 \quad 10^{-2} = 0.01 \quad \dots$$

Lernen Sie zu den jeweiligen Zehnerpotenzen auch die entsprechenden Präfixe und Abkürzungen, vielleicht mit Tabelle 1 auf Seite 35. Sie gehören einer umfassenden Allgemeinbildung, da sie uns im Alltag begegnen. Damit lässt sich leicht erklären, wie viel ein Milliliter ist, was man unter einer Dekade versteht, wie viele Bytes ein Terabyte sind oder was unter den Begriff Mikrokosmos fällt. Auch eine namhafte Firma scheut sich nicht davor, ihr Flaggenschiff i\*\*\* Nano zu nennen, um zu suggerieren, dass ....

#### 3.3. Wissenschaftliche Darstellung

Wir kommen auf unsere Motivation zu Beginn des Kapitels zurück; der schlanken Darstellung grosser und kleiner Zahlen. Bei der sogenannten *wissenschaftlichen Darstellung* von Zahlen schreibt man die Zahl als Dezimalbruch mit Einer und Zehnerpotenzen.

##### Beispiele.

- Abstand Erde-Sonne, eine astronomische Einheit (1 AE)

$$150'000'000 \text{ km} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

- Durchmesser eines Atoms, ein Ångström (1 Å)

$$0.000\,000\,000\,1 \text{ m} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

- 

$$92'300 = 9.23 \cdot 10^4$$

### 3.3. Wissenschaftliche Darstellung

$10^{12}$	1 000 000 000 000	1 Billion	Tera-	T
$10^{11}$	100 000 000 000			
$10^{10}$	10 000 000 000			
$10^9$	1 000 000 000	1 Milliarde	Giga-	G
$10^8$	100 000 000			
$10^7$	10 000 000			
$10^6$	1 000 000	1 Million	Mega-	M
$10^5$	100 000			
$10^4$	10 000			
$10^3$	1 000	1 Tausend	Kilo-	k
$10^2$	100		Hekto-	h
$10^1$	10		Deka-	d
$10^0$	1			
$10^{-1}$	0.1		Dezi-	d
$10^{-2}$	0.01		Centi-	c
$10^{-3}$	0.001	1 Tausendstel	Milli-	m
$10^{-4}$	0.000 1			
$10^{-5}$	0.000 01			
$10^{-6}$	0.000 001	1 Millionstel	Mikro-	$\mu$
$10^{-7}$	0.000 000 1			
$10^{-8}$	0.000 000 01			
$10^{-9}$	0.000 000 001	1 Milliardstel	Nano-	n
$10^{-10}$	0.000 000 000 1			
$10^{-11}$	0.000 000 000 01			
$10^{-12}$	0.000 000 000 001	1 Billionstel	Piko	p

Tabelle 1: Zehnerpotenzen: Namen und Abkürzungen

### 3. Zehnerpotenzen

•

$$0.0032 = 3.2 \cdot 10^{-3}$$

**Bemerkung.** Man findet leicht eine Merkregel, um den jeweiligen Wert des Exponenten zur Basis 10 zu bestimmen.

**Übung 23** (expand). Schreibe die Zahlen aus:

- |                           |                       |
|---------------------------|-----------------------|
| (a) $2.52 \cdot 10^5$     | (e) $4.31 \cdot 10^9$ |
| (b) $6.52 \cdot 10^7$     | (f) $3.11 \cdot 10^3$ |
| (c) $5.555 \cdot 10^{12}$ | (g) $1.23 \cdot 10^6$ |
| (d) $4.15 \cdot 10^9$     | (h) $6.22 \cdot 10^4$ |

**Übung 24** (factor). Schreibe in wissenschaftlicher Darstellung:

- |                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| (a) 99'000'000    | (g) 19'300            |
| (b) 4'180'000'000 | (h) 2'340             |
| (c) 48'500'000    | (i) 1'350'000         |
| (d) 0.000 008 21  | (j) 0.000 000 000 101 |
| (e) 92'400        | (k) 822'000'000       |
| (f) 0.000 016     | (l) 0.000 000 077     |

**Übung 25** (sci). Schreibe in wissenschaftlicher Darstellung:

- |                   |                       |
|-------------------|-----------------------|
| (a) 0.000 015     | (e) 0.000 000 25      |
| (b) 0.000 008 1   | (f) 0.000 005 15      |
| (c) 0.654         | (g) 0.000 000 061 5   |
| (d) 0.000 000 074 | (h) 0.000 000 000 077 |

**Übung 26** (float). Schreibe die Zahlen aus:

### 3.4. Rechenregeln für Potenzen

- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| (a) $1.25 \cdot 10^{-5}$  | (e) $2.31 \cdot 10^{-9}$ |
| (b) $7.22 \cdot 10^{-7}$  | (f) $2.75 \cdot 10^{-5}$ |
| (c) $3.33 \cdot 10^{-12}$ | (g) $5.05 \cdot 10^{-6}$ |
| (d) $4.15 \cdot 10^{-4}$  | (h) $6.02 \cdot 10^{-8}$ |

#### 3.4. Rechenregeln für Potenzen

Insbesondere beim Rechnen mit Variablen aber auch fürs Kopfrechnen können folgende Regeln zu Hilfe genommen werden.

Wir erinnern uns an die Definition der Potenz für natürliche Exponenten.

##### Definition 3.3: Potenz

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  soll gelten:

$$a^1 = a \quad \text{und} \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} \quad \text{für } n \geq 2$$

Damit lassen sich leicht die folgenden Potenzgesetze einsehen.

Für die folgenden Ausführungen seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $m, n \in \mathbb{N}$ ; sowie bei Bedarf  $n > m$ . Es gilt

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m} \tag{2}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{3}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{4}$$

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n \tag{5}$$

**Bemerkung.** Die ersten beiden Gesetze beziehen sich auf Potenzen mit denselben Basen, die letzten beiden auf Potenzen mit gleichen Exponenten.

**Beispiele.** Folgend je ein Anwendungsbeispiel zu jedem Gesetz:

- $x^{2n} \cdot x^{3-n} = x^{2n+3-n} = x^n + 3$
- $z^7 \div z^{3-n} = z^{7-(3-n)} = z^{n+4}$

3. Zehnerpotenzen

- $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$
- $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$
- $25^3 \div 5^3 = (25 \div 5)^3 = 5^3 = 125$