

## 12. Horror vacui

Vor dem Nichts haben Mathematikstudenten – wenigstens am Anfang ihres Studiums – großen Respekt. Das ist nicht verwunderlich, auch für die Zahl Null mussten erst viele Jahrhunderte vergehen, bis sie genauso akzeptiert war wie die Sieben oder die Zwölf. Um das Problem zu verstehen, muss daran erinnert werden, dass die von Georg Cantor geschaffene Mengenlehre das Fundament aller zeitgenössischen Mathematik ist. Nach Cantor ist eine Menge die Zusammenfassung von gewissen wohlunterschiedenen Dingen zu einem neuen Objekt. Das gehört auch für Nichtmathematiker zur alltäglichen Erfahrung, jeder weiß doch, was „die Bundesregierung“ oder „die EU“ ist.

Problematisch wird es allerdings, wenn bei so einer Zusammenfassung gar nichts zum Zusammenfassen übrig bleibt. „Die Gesamtheit der Bundesbürger, die größer als 3 Meter sind“ wäre so ein Beispiel. Es ist wirklich ein bisschen schwer zu verstehen, dass dadurch das gleiche Objekt definiert ist wie durch „die Gesamtheit der ukrainischen Pianisten, die den Minutenwalzer von Chopin in 20 Sekunden spielen können“. Beide sind Beispiele für die so genannte „leere Menge“.

Die leere Menge spielt eine ähnlich wichtige Rolle in dem Bereich „Mengenlehre“ der Mathematik wie die Null für die Zahlen. Man kann sie zu einer beliebigen Menge hinzufügen, ohne diese zu verändern, und durch diese Eigenschaft ist sie auch charakterisiert. Es ist möglich, die ganze Mathematik aus der leeren Menge zu entwickeln. Zahlen entstehen z.B. dadurch, dass die leere Menge als die Null aufgefasst wird und die Eins ist diejenige Menge, die als einziges Element die leere Menge enthält; für größere Zahlen wird alles sehr schwerfällig.

Mit dem Verstehen der Frage „Was ist die leere Menge?“ sind die Schwierigkeiten aber noch nicht ausgeräumt. Mathematiker studieren ja auch Aussagen über Mengen, besonders wichtig sind Ergebnisse der Form „alle Elemente der Menge haben die soundso-Eigenschaft“. Es ist dann in diesem formalen Rahmen gewöhnungsbedürftig, dass solche Aussagen für die leere Menge immer wahr sind.

Wie in fast allen Fällen ist es aber auch hier so, dass man eigentlich nur die Alltagslogik anwenden muss. Wenn sich jemand zum Beispiel vorgenommen hat, jedem Bettler, den er heute sieht, fünf Euro zu schenken, so hat er seinen guten Vorsatz auch dann gehalten, wenn er keinen Bettler treffen sollte.

### Die leere Menge verhält sich wie die Null

Dass die leere Menge der Null bei den Zahlen entspricht, soll hier noch präzisiert werden. Dazu muss man wissen, dass die *Vereinigung* von zwei Mengen  $A, B$  aus all denjenigen Elementen besteht, die in  $A$ , in  $B$  oder sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten sind. Besteht etwa  $A$  aus den Zahlen 2, 5, 6 und  $B$  aus den Zahlen 6, 8, so wird die Vereinigung aus den Zahlen 2, 5, 6, 8 gebildet. Oder ist  $A$  die Menge der Einwohner von Berlin-Mitte und  $B$  die Menge der blonden Berliner, so gehören zur Vereinigung auch die Rothaarigen aus Mitte.

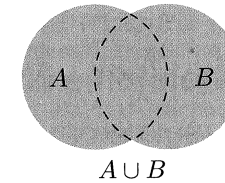


Abbildung 8: So kann man sich die Vereinigung vorstellen ...

Für die Vereinigung schreibt man  $A \cup B$  (gesprochen „A vereinigt mit B“). Und dann gilt

$$A \cup \emptyset = A$$

für jede Menge  $A$ , denn die leere Menge trägt ja nichts zur Vereinigung bei. Fasst man also die Vereinigung als Analogon zur Addition auf, so entspricht  $A \cup \emptyset = A$  der Gleichung  $x + 0 = x$  für Zahlen.

Übrigens schreibt man  $A \cap B$  für die Menge der Elemente, die sowohl in  $A$  als auch in  $B$  enthalten sind. (Im obigen Beispiel kämen die blonden Mitteinwohner heraus.)

Gesprochen wird  $A \cap B$  als „Durchschnitt von A mit B“.

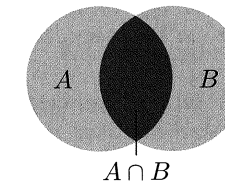


Abbildung 9: ... und so den Durchschnitt

Da die leere Menge keine Elemente enthält, ist

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Mit der Übersetzung „Das Analogon zum Durchschnitt ist die Multiplikation“ entspricht das der Gleichung  $x \cdot 0 = 0$  für Zahlen.

Horror vacui ist Lateinisch, es heißt so viel wie „Abscheu vor der Leere“. Der Begriff stammt aus der antiken Naturphilosophie, es soll ausgedrückt werden, dass die Natur keine leeren Räume ertragen kann. Daher haben leere Räume angeblich die Tendenz, Gase oder Flüssigkeiten anzusaugen.