34. Der Schritt ins Unendliche

Wie kann man das Unendliche fassen? Wie beweist man zum Beispiel, dass beim Aufsummieren der ersten n Zahlen immer die Hälfte von $n \cdot (n+1)$ herauskommt? Testen wir zunächst, ob das wohl richtig sein kann, dazu nehmen wir als Beispiel die Zahl 4. Die Summe der ersten vier Zahlen, also $1+2+3+4$, ist gleich 10, und wenn wir in die Formel $n \cdot (n+1)/2$ für n die Zahl 4 einsetzen, kommt $4 \cdot (4+1)/2$, also ebenfalls 10 heraus. Statt mit 4 könnte man es noch mit anderen Zahlen testen, aber wie kann man sicher sein, dass es immer stimmt? Auch für $10\,000$-stellige Zahlen, auch für solche, die beim Aufschreiben alle in einem Jahr produzierte Druckerschwärze verbrauchen würden?

Sicher nicht dadurch, dass man ein systematisches Prüfungsverfahren startet, auch dann nicht, wenn man alle Computer dieser Welt mit einspannen würde: So käme man nicht einmal bis zu 20-stelligen Zahlen.

Aber wie dann? Mathematiker begründen die Richtigkeit dieser Aussage mit der Technik der *Induktion*. Dazu muss man zwei Dinge tun. Erstens muss durch Nachrechnen die Richtigkeit der Behauptung für die kleinste der betrachteten Zahlen gezeigt werden, in diesem Fall muss man also $n = 1$ einsetzen. Da ist der Nachweis leicht, denn die Summe aus der ersten Zahl ist Eins, und das kommt auch heraus, wenn man $1 \cdot 2/2$ berechnet. Und zweitens ist zu beweisen: Wenn die Aussage für eine Zahl schon gezeigt ist, dann stimmt sie auch für die nächste. (Die Rechnung für den vorliegenden Fall wird weiter unten nachgetragen.)

Weil die Aussage für 1 stimmt, ist sie nach dem zweiten Beweisteil auch für 2 richtig. Dann – wieder nach dem zweiten Teil – gilt sie auch für 3. Und so weiter. Irgendwann wird jede noch so große Zahl erfasst, die fragliche Aussage muss also immer gelten. Ein Vergleich: Wenn man Dominosteine aufrecht in eine Reihe stellt, ist es ja auch so, dass ein kippender Stein den Nachbarn ebenfalls aus dem Gleichgewicht bringt. Und deswegen ist klar, dass irgendwann alles flach liegen wird, wenn jemand den ersten Stein anstößt.

Das bemerkenswerteste an der Induktion ist, dass man durch einen Beweis, der wenige Zeilen einnimmt, Erkenntnisse über einen unendlichen Bereich gewinnen kann. Sie ist der Schlüssel zu fast allen Aussagen, bei denen sich Mathematiker mit der Betrachtung endlicher Mengen nicht zufrieden geben.

Der fehlende Induktionsschritt

Hier soll noch der so genannte Induktionsschritt für den Beweis der Summenformel nachgetragen werden.

Die Summe der ersten $n+1$ Zahlen, also $1+2+\cdots+n+(n+1)$ ist zu berechnen, man weiß schon, wie man die Summe der ersten n Summanden abkürzend schreiben kann: als $n \cdot (n+1)/2$.

Also ist $1+2+\cdots+n+(n+1) = n(n+1)/2+(n+1)$. Dieser Ausdruck ist aber genau gleich $(n+1)(n+2)/2$ (zum Nachweis braucht man nur elementare Bruchrechnung), und das ist die behauptete Formel für $n+1$.

Zusammen: Wenn man die Formel für n voraussetzt, kann man sie für $n+1$ beweisen.

Wie kommt man zu den Formeln?

Induktion ist die „offizielle“ Absicherung von Aussagen über die unendlich vielen natürlichen Zahlen. Um damit anfangen zu können, muss man die Aussage aber erst einmal haben. Wie bekommt man die?

Das ist der kreative Teil der Mathematik. Man braucht Intuition, Erfahrung, Glück und oft auch eine geschickte Visualisierung des Problems. Das soll an unserem Standardbeispiel erläutert werden, also der Aussage

$$1+2+\cdots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Den Beweis haben wir schon kennen gelernt, wie könnte man auf die Formel kommen? Es gibt mehrere Möglichkeiten, hier sollen zwei vorgestellt werden.

Eine erste Möglichkeit besteht darin, sich die Summe $1+\cdots+n$ so wie in dem nachstehenden Bild vorzustellen:

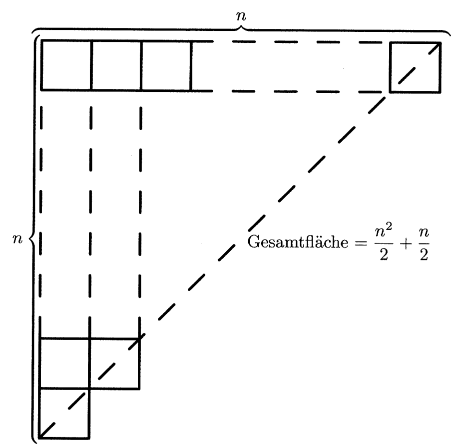

Abbildung 34: So „sieht“ man die Formel $1+\cdots+n = n(n+1)/2$.

Man beginnt mit einem Quadrat, legt darüber zwei, dann drei, und so weiter, bis im letzten Schritt n Quadrate verwendet werden. Das sieht doch so ähnlich wie ein halbes Schachbrett aus! Das halbe Schachbrett hätte eine Fläche von $n\cdot n/2$, aber

es ragt ja n-mal ein halbes Quadrat über die Diagonale. Kurz: $1+\cdots+n$ sollte gleich $n^2/2+n\cdot(1/2)$ sein. Auch dieser Ausdruck ist gleich $n\cdot(n+1)/2$.

Man könnte es aber auch so machen wie in der in Beitrag 25 vorgestellten Anekdote über Gauß. Die Summe $1+\cdots+n$ wird als $(1+n)+\big(2+(n-1)\big)+\cdots$ geschrieben, man fasst also den ersten und letzten Summanden, den zweiten und vorletzten Summanden, ... zusammen. Jede dieser Summen ergibt $n+1$, und davon gibt es $n/2$, wenn n gerade ist; falls n ungerade ist, erhält man beim Zusammenfassen $(n-1)/2$ Mal $n+1$, und der Summand in der Mitte, also $(n+1)/2$, bleibt übrig.

Fazit: Für gerades n sollte die Summe $(n+1)\cdot n/2$ sein, und für ungerades n sollte sich $(n+1)\cdot(n-1)/2+(n+1)/2$ ergeben. Auch das ist aber gleich $(n+1)\cdot n/2$, wir erhalten also immer – unabhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist – die gleiche Formel für die Summe.

Ein weiterer Induktionsbeweis

Als weiteres Beispiel einer durch Induktion zu beweisenden Tatsache betrachten wir die Aussage: „n Objekte können auf $1\cdot2\cdot3\cdots n$ verschiedene Weisen angeordnet werden[40]“.

Für kleine n kann das direkt nachgeprüft werden. Zum Beispiel gibt es bei 3 Objekten a,b,c die Anordnungsmöglichkeiten $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, und das sind wirklich $1\cdot2\cdot3=6$ Stück.

Ein „strenger“ Induktionsbeweis könnte so aussehen. *Erstens* zeigt man, dass die Aussage für $n=1$ richtig ist. Das ist klar, denn bei einem Element gibt es nur eine einzige Möglichkeit. *Zweitens* wird ein – beliebig großes – n fixiert und angenommen, dass die Aussage dafür richtig ist. Und nun ist *drittens* zu zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ Objekte gilt.

Das könnte so gehen. Wir stellen uns die ersten n Objekte als weiße Kugeln vor, die mit den Nummern von 1 bis n gekennzeichnet sind. Das $(n+1)$-te Objekt soll eine rote Kugel sein. Um dann *alle* Objekte in eine Reihenfolge zu bringen, können wir doch so verfahren. Wir ordnen zunächst die weißen Kugeln irgendwie an, dafür gibt es aufgrund unserer Annahme $1\cdot2\cdot3\cdots n$ Möglichkeiten. Und dann überlegen wir, was mit der roten Kugel passieren soll. Sie könnte ganz nach vorne, sie könnte aber auch nach der ersten Kugel einsortiert werden. Ebenfalls nach der zweiten usw., die letzte Möglichkeit wäre, sie ganz nach hinten zu packen. Das sind $n+1$ Möglichkeiten für die rote, auf so viele Weisen entsteht aus einer Anordnung der weißen Kugeln eine Anordnung aller Kugeln. Damit ist die Gesamtzahl gleich $1\cdot2\cdot3\cdots n$ mal $n+1$, also gleich $1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot(n+1)$. Das ist gerade die zu beweisende Behauptung für $n+1$ Objekte.

[40] Genauer ist gemeint: Für $n=1$ ist es eine Möglichkeit, für $n=2$ sind es $1\cdot2$ usw. Übrigens kürzt man $1\cdot2\cdot3\cdots n$ mit $n!$ ab und nennt diese Zahl „n Fakultät“. S.a. Beitrag 29.