Differentialrechnung

The Core of the Whole Business

Inhaltsverzeichnis

1. Tangenten- und Flächenproblem

Die Mathematik der Antike hat ihrer Nachwelt zwei klassische Probleme überliefert: das *Tangentenproblem* und das *Flächenproblem*.

- Die Konstruktion einer Tangente an einen Kreis ist relativ einfach. Sie versagt aber schon, wenn man versucht, eine Tangente an eine Ellipse zu konstruieren. Die griechischen Geometer hatten für die Ellipse ein neues Verfahren erdacht, das aber schon wieder bei einer anderen Kurve, der Parabel, versagte. Die Konstruktion der Parabeltangente liess sich nicht auf die Hyperbel übertragen; man musste also für jede Kurve eine ganz neue Konstruktion ersinnen. Wenn nur wenige Kurven bekannt sind, besteht kein Anlass, nach einer allgemeinen Methode zu suchen. Die Situation änderte sich aber schlagartig, als zu Beginn des 17. Jahrhunderts die analytische Koordinatengeometrie entstand und somit beliebig viele Kurven zu untersuchen waren. Jetzt wurde eine universelle Methode verlangt, die es ermöglicht, den Verlauf der Tangente für jede beliebige Kurve zu studieren.

- Das Flächenproblem bestand darin, den Inhalt einer durch Kurven begrenzten Fläche zu berechnen. Zu diesem Problem leistete vor allem ARCHIMEDES (287 – 212 v.u.Z) Hervorragendes. Seine Methode, die Exhaustionsmethode, bestand darin, die zu berechnende Fläche durch eine Folge von Flächen mit schon bekanntem Inhalt auszuschöpfen. Wenn man das Flächenproblem gelöst hat, fällt die Berechnung des Volumens eines Körpers nicht mehr so schwer. Viele spezielle Flächen und Körper konnten so durch teilweise raffinierte Zerlegungen berechnet werden. Aber auch hier existierte noch keine universelle Methode.

2. Historisches zur durchschnittlichen Änderungsrate

Nichts entgeht der Veränderung. Alles wächst oder schrumpft, erwärmt sich oder kühlt sich ab, wechselt die Stellung, die Farbe oder die Zusammensetzung. Die Fauna und die Flora liefern beliebig viele Beispiele. Selbst Felsen dehnen sich in der Sonne aus und ziehen sich im Schatten zusammen.

Der Mathematik der Antike gelang es nicht, veränderliche Grössen mathematisch zu erfassen. Ihre Mathematik war, bis auf wenige Ausnahmen, eine feste und stillstehende Welt. Andererseits zeigt dies, dass es sehr schwer ist, einen Veränderungsprozess zu analysieren und das dahinterstehende Naturgesetz zu finden.

Erst im 16. und 17. Jahrhundert war die Zeit reif, den allgemeinen Begriff der veränderlichen Grösse in die Mathematik aufzunehmen.

Für die Anwendungen der Mathematik standen Probleme der Geodäsie, der Astronomie, des Artilleriewesens, der Schifffahrt, des Kanalbaus, der maschinellen Ausrüstung von Manufakturen im Vordergrund. Die Uhren mussten enorm verbessert werden. Leonardo da Vinci machte sich sogar schon Gedanken über Flugmaschinen, Unterseeboote und Wagen, die ohne Zugtiere fahren konnten. Die Mathematik sollte vor allem mechanische Bewegungsabläufe — Planetenbewegungen, Fallbewegungen, Bewegungen gegeneinander beweglicher Maschinenteile — erfassen und theoretisch beschreiben können. Der neuen Mathematik des 16. und 17. Jahrhunderts gelang es, mit denselben Methoden sowohl das Tangentenproblem als auch das Flächenproblem, als auch die Bewegungsprobleme zu lösen! Sie konnte gleichzeitig die Verwandtschaft und die Gleichartigkeit all dieser Probleme aufzeigen. Auf diesen Lösungen aufbauend konnten weitere Probleme, die die naturwissenschaftliche Entwicklung immer weiter vorantrieben, bewältigt werden.

René Descartes (1596 – 1650) gelang es, die gegenseitige Abhängigkeit von veränderlichen Grössen — ausgedrückt durch eine Gleichung oder eine Funktion — in einem Koordinatensystem graphisch darzustellen. Weiterhin konnten die einzelnen Zustände einer Bewegung sichtbar gemacht und genau studiert werden. Es fehlte aber noch die klare Erfassung des Funktionsbegriffes und eine auf veränderliche Grössen zugeschnittene Rechentechnik. In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts schufen dann Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) unabhängig voneinander etwas für die bisherige Mathematik völlig Neues, das die analytische Koordinatengeometrie von Descartes mit der von Archimedes stammenden Exhaustionsmethode verband.

Dieses neue Gebiet der Mathematik heisst heute Infinitesimalrechnung oder *Analysis* oder Differenzial- und Integralrechnung oder im englischen Sprachraum *Calculus*.

Die Differenzialrechnung, die das Tangentenproblem löst, bildet unter anderem die Grundlage der mechanischen Bewegungen. Mit ihr kann beispielsweise der Physiker oder Tech-

Abbildung 1: SIR ISAAC NEWTON und GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

niker aus einer gegebenen Bahnkurve für jeden Zeitpunkt die augenblickliche Geschwindigkeit ermitteln. Später eroberte sich die Differenzialrechnung immer mehr Anwendungsgebiete; zum Beispiel ist sie für die heutigen Wirtschaftswissenschaften unentbehrlich geworden.

Mit der Integralrechnung, die das Flächenproblem löst, konnte man bald nach ihrer Entdeckung auch die Bogenlänge eines Kurvenstückes oder den Rauminhalt und die Oberfläche eines krummflächig begrenzten Körpers berechnen, aber auch viele physikalische Begriffe, wie zum Beispiel Schwerpunkt, Trägheitsmoment, Arbeit etc. mathematisch erfassen. Als besonders nützlich erwies sich die Integralrechnung zu der Zeit, als die Kohle als Energiequelle die Arbeit des Menschen und des Lasttiers zu ersetzen begann. Mit ihr konnte man nämlich die Leistung und den Wirkungsgrad von Maschinen berechnen. Später wurde die Integralrechnung auch zur Grundlage der Chemie der Energiestoffe (Thermodynamik).

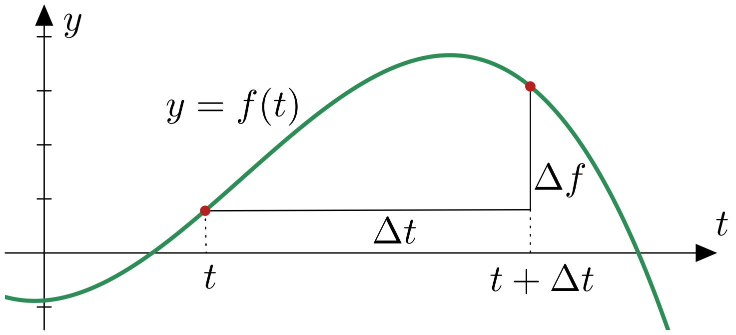


Abbildung 2: durchschnittliche Steigung $\frac{\Delta f}{\Delta t}$

3. Gedanken zur momentanen Änderungsrate

Bei einer veränderlichen Situation ist nicht nur der augenblickliche Zustand von Interesse, vielmehr interessiert oft, mit welcher Geschwindigkeit sich die Situation ändert. Für die Wettervorhersage ist nicht allein die Grösse des Luftdrucks wichtig, sondern vor allem, wie stark der Druck je Stunde steigt oder fällt. Für den Wirtschaftswissenschaftler ist neben dem Marktpreis eines Produktes von besonderer Wichtigkeit, wie schnell sich der Preis mit der Zeit ändert (Teuerungsrate). Die Infinitesimalrechnung von NEWTON und LEIBNIZ kann diese und ähnliche Fragen mit zwei neuen Verfahren, der Differenziation und der Integration, beantworten.

3.1. Von der durchschnittliche zur momentanen Änderungsrate

Wir betrachten eine beliebige, zeitlich veränderliche Situation, deren einzelne Zustände durch die Funktion $f(t)$ beschrieben werden können. Man kann relativ einfach eine *durchschnittliche* Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes angeben, indem man die zu zwei bestimmten Zeitpunkten t_1 und t_2 gebildete Differenz der zugehörigen Funktionswerte $f(t_1)$ und $f(t_2)$ durch die Zeitspanne dividiert. Wir erinnern uns:

$$\overline{v} = \frac{\text{Änderung von } f(t)}{\text{Änderung von } t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Mit der Differenziation kann man jedoch die *momentane* Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zu einem beliebigen Zeitpunkt t berechnen. Wie man dies mathematisch Umsetzt, darum soll es im Folgenden gehen.

Man bezeichnet üblicherweise einen Zuwachs der Variablen t mit Δt und die entsprechende Änderung des Funktionswertes zwischen den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ mit Δf. Da Zähler und Nenner jeweils Differenzen sind, heisst der Bruch Differenzenquotient. Jetzt braucht man nur zu verfolgen, was mit dem Bruch $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ geschieht, wenn Δt gegen

Null strebt. Zu Beginn gibt der Differenzenquotient die durchschnittliche Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zwischen den Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ an. Wenn nun Δt gegen Null strebt, so strebt Δf auch gegen Null. Der Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ kann jedoch existieren und muss nicht unbedingt gegen Null streben. Dieser Grenzwert ist, falls er existiert, die augenblickliche Änderungsgeschwindigkeit des Funktionswertes zum Zeitpunkt t. Man schreibt dafür

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

und nennt diesen Grenzwert Differenzialquotient.

Die Integration ist in gewisser Weise die Umkehrung der Differenziation, etwa in der Art, wie die Addition und Subtraktion oder Multiplikation und Division Umkehrungen voneinander sind. Bei der Integration sucht man eine Funktion, deren Differenzialquotient $q(t)$ bekannt ist. Man nennt diese Funktion das Integral von $q(t)$ und schreibt

$$\int q(t)\, \mathrm{d}t$$

(integrare: lat. wiederherstellen). Kennt man zum Beispiel bei einer Autofahrt die zurückgelegte Wegstrecke als Funktion der Zeit, so gibt der Differenzialquotient für einen bestimmten Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit an. Kennt man die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, so kann man mit Integration die zwischen zwei bestimmten Zeitpunkten zurückgelegte Wegstrecke berechnen.

3.2. Das Gesetz des freien Falls nach Galilei

Nach jahrelangen Experimenten und vielen theoretischen Anläufen konnte Galilei 1585 die Gesetze des freien Falls aufstellen: Ein auf die Erde herabfallender Körper legt in der Zeit t den Weg

$$s(t) = 4.9t^2$$

zurück (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter); nach der Zeit t hat der Körper die Geschwindigkeit $v(t) = 9.8t$ ($v(t)$ in $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$); seine Beschleunigung ist zu jedem Zeitpunkt konstant, nämlich $9.8\,^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

Mit der von Newton und Leibniz entdeckten Infinitesimalrechnung braucht man nur die Wegstreckenfunktion $s(t) = 4.9t^2$ zu kennen. Die Geschwindigkeit ist die Änderung des Weges relativ zur Zeit, also der Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4.9(t + \Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t}$$

und damit

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 4.9 \cdot 2t + 4.9\Delta t = 9.8t.$$

Übung 3.1.

Rechne nach, dass aus $s(t)$ tatsächlich mit Hilfe des Differentialquotienten $v(t)$ folgt.

Die Beschleunigung $a(t)$ ist die Veränderung der Geschwindigkeit relativ zur Zeit, also der Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9.8(t + \Delta t) - 9.8t}{\Delta t} = 9.8$$

Die Beschleunigung ändert sich nicht mehr mit der Zeit, sie ist konstant. Das hinter dem freien Fall stehende Naturgesetz, dass jeder frei fallende Körper mit der konstanten Beschleunigung von $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ auf die Erde fällt, tritt klar und ohne grossen Aufwand ans Licht.

3.3. Leibniz oder Newton?

Noch heute wird Newton als der grösste Physiker und als einer der grössten Mathematiker bezeichnet. Albert Einstein schrieb:

> „Für Newton war die Natur ein offenes Buch, dessen Buchstaben er mühelos lesen konnte.“

Newton selbst sagte:

> „Mir selbst kommt es vor, als wäre ich wie ein Knabe gewesen, der am Strand des Meeres spielt und sich damit vergnügt, hier und da einen glatteren Kiesel oder eine schönere Muschel zu finden, während der grosse Ozean der Wahrheit unentdeckt vor mir lag.“

An anderer Stelle erklärt er bescheiden, er habe nur deshalb weiterschauen können, weil er auf den „Schultern von Riesen“ gestanden habe. Damit meinte er in erster Linie Archimedes (287 – 212 v.u.Z), Johannes Kepler (1571 – 1630), Galileo Galilei (1564 – 1642), Blaise Pascal (1623 – 1662), Pierre de Fermat (1601 – 1665) und René Descartes (1596 – 1650).

Newtons Ergebnisse (Axiome, freier Fall, Planetenbewegung, Gravitation, Berechnung der Gezeiten, ...), die schon 1671 in einem druckfertigen Manuskript vorlagen, erschienen erst 1687 in seinem Buch „Philosophiae naturalis principia mathematica“, in dem die Bewegungsgesetze formuliert und damit die Grundlagen der Mechanik gelegt wurden. Erst durch Einstein wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Newton'sche Physik in einen noch tieferen Zusammenhang, den der Relativitätstheorie, eingebettet.

Leibniz war nicht nur ein bedeutender Mathematiker. Er sprach schon mit 12 Jahren griechisch und lateinisch, war Philosoph, Historiker, Jurist und Diplomat. Er lie-

Abbildung 3: both have biscuits named after them

ferte wesentliche Beiträge zur Mechanik, Biologie und theoretischen Logik; er gründete 1700 die Berliner Akademie der Wissenschaften, war Erfinder einer Rechenmaschine, einer Universalsprache. Er machte unzählige alchemistische Versuche, kümmerte sich um Wasserförderung in den Bergwerken, Seidenraupenzucht und technische Verbesserungen von Maschinen. Leibniz war ein Universalgenie. 1675 gelingt Leibniz, unabhängig von Newton, die Entdeckung des „Calculus“, wie er seine Version der Infinitesimalrechnung nannte. Er veröffentlichte bereits ab 1684 seine Ergebnisse. Dies führte denn auch zu einem hässlichen Prioritätsstreit. Im diametralen Gegensatz zu seinem Rivalen Newton, der 1705 geadelt und 1727 feierlich mit einem Staatsbegräbnis in der Londoner Westminster Abtei beigesetzt wurde, war Leibniz bei seinem Fürsten in Ungnade gefallen und starb einsam und völlig verarmt.

3.4. Die Leibniz-Notation

Die rasche Verbreitung der Leibniz'schen Methoden und ihrer weitgefächerten Anwendungen auf dem Kontinent ist vor allem seiner genialen Wahl der Bezeichnungen und Symbole zu verdanken. Sein Notationssystem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

für den Differenzialquotienten,

$$\int y \, \mathrm{d}x$$

für das Integral, wird noch heute so benutzt. Mit dieser Schreibweise war es möglich, Ergebnisse herzuleiten, ohne die tieferen Zusammenhänge zu verstehen. So leicht macht es uns die Natur nun doch nicht, da gerade in Naturprozessen der Zufall eine grosse Rolle spielt. Dennoch gab es schon Zeitgenossen von Newton und Leibniz, die bereits an den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung arbeiteten, um den Zufall mathematisch erfassen zu können.

Abbildung 4: 10 DM Note: Carl Friedrich Gauss

3.5. Das Teilgebiet Analysis

An der weiteren Entwicklung der Infinitesimalrechnung sind vor allem die Basler Mathematiker Jakob und Johann Bernoulli (1654 – 1705, 1667 – 1748) beteiligt. Von Johann Bernoulli stammt auch die Bezeichnung „Integral“. Beide Brüder waren Anhänger Leibniz und Newton gegenüber eher feindlich gesinnt.

Den wahren Durchbruch der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften und insbesondere der Mechanik aber erreichte der in Riehen geborene Leonhard Euler (1707 – 1783). 1979 wurde ihm zu Ehren die bis 1997 gebräuchliche 10-Franken Note gestaltet. Auf der Vorderseite erkannte man eine Zeichnung des idealen „Zahn-Profils“ eines Zahnrades, eine von Eulers zahlreichen Entdeckungen. Den Hintergrund bildeten Diagramme, die Euler zur Darstellung logischer Schlüsse verwandte. Die drei Motive auf der Rückseite zeigten: Eine von Euler auf Grund von Berechnungen entworfene Wasserturbine, deren Grundidee noch heute bei modernen Turbinen in den Kohle- und Kernkraftwerken verwendet wird, ein Schema eines Strahlengangs durch ein System von Linsen, und eine Darstellung unseres Sonnensystems im Zusammenhang mit Eulers Mondtheorie, die für die Schifffahrt wichtigen Tafeln der Mondbewegung enorm verbesserte.

Eulers gesammelte Werke, die seit Jahrzehnten in Basel und Leningrad neu herausgegeben werden, umfassen bis jetzt etwa 100 Quartbände. Euler gilt als der letzte Mathematiker, der noch die gesamte „zeitgenössische“ Mathematik beherrschte. Zum Vergleich: Heute kennt ein guter Mathematiker weniger als 0.1% der gesamten Mathematik.

Im 19. Jahrhundert waren es neben Lagrange vor allem Pierre Simon Laplace (1749 – 1823), Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), Augustin Louis Cauchy (1789 – 1864), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Bernhard Riemann (1826-1866) und Karl Weierstrass (1815 – 1897), die eine strenge Begründung und einen weiteren Ausbau der Infinitesimalrechnung erreichten. Von diesen Analytikern stammt der Name Analysis.

Die Arbeiten der Analytiker des 19. Jahrhunderts haben gezeigt, dass die ganze Infinitesimalrechnung auf nur fünf grundsätzlichen, klaren mathematischen Ideen beruht:

- Funktion
- Behandlung des Krummen via Approximation durch Gerades
- Konvergenz und Grenzwert
- Differentiation
- Integration

Dadurch ist heute die Infinitesimalrechnung für jeden interessierten Menschen zugänglich geworden. Man darf aber nicht den Schluss ziehen, dass die Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert abgeschlossen worden wäre. Gegenwärtig werden in den verschiedenen Teilgebieten der Analysis jährlich mehr als 1000 Arbeiten veröffentlicht.

3.6. Recap Differenzenquotient

Bei vielen funktionalen Zusammenhängen ist nicht nur interessant, welche Werte eine Funktion f annimmt und ob sie stetig ist, sondern auch, wie rasch bzw. stark die Funktionswerte $y = f(x)$ zu- oder abnehmen, wenn sich die x-Werte ändern.

Definition 3.1: Differenzenquotient

Der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gibt die durchschnittliche Änderung der Funktion f im Intervall $[x_0, x_0 + h]$ an.

Mit ihm erhält man eine erste grobe Aussage über das Änderungsverhalten der Funktion f. Dieser Differenzenquotient kann je nach Funktion verschiedene Bedeutungen haben.

Beispiel 3.6.1. Bei einer ansteigenden Strasse wird der Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha) = m.$$

Er entspricht also der durchschnittlichen Steigung des betrachteten Strassenstücks.

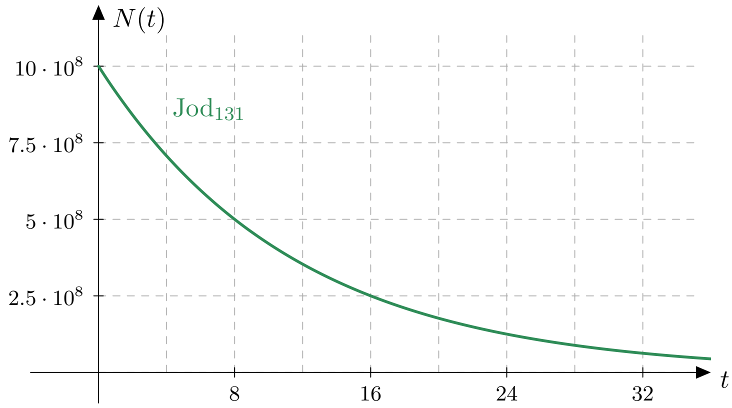


Abbildung 5: Zerfallsverlauf von Jod 131

Übung 3.2.

Köniz liegt auf einer Höhe von 610 M.ü.M. Berechne die durchschnittliche Steigung des Könizbergs (höchster Punkt 674 M.ü.M) in Prozent und berechne den Steigungswinkel, wenn die beiden Messungen horizontal 700 m auseinander liegen.

Beispiel 3.6.2. Beim radioaktiven Zerfall verringert sich die Anzahl der radioaktiven Kerne allmählich. Dementsprechend nimmt die Strahlung jedes radioaktiven Präparats im Laufe der Zeit ab. Die Aktivität sinkt innerhalb der sogenannten Halbwertszeit auf die Hälfte ihres Ausgangswerts. Da radioaktive Materialen aufgrund ihrer ausgesendeten Strahlung leicht geortet werden können, dienen radioaktive Isotope in vielen Bereichen der Physik, Chemie, Biologie, Medizin und Technik als Indikatoren. Beispielsweise kann man mit Jod (J-131), das dem Organismus in geringer Menge zugeführt wird, Stoffwechselvorgänge verfolgen und allfällige Störungen feststellen. Das folgende Diagramm zeigt den Zerfall von J-131, dessen Halbwertszeit 8 Tage beträgt.

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta N(t_0)}{\Delta t} = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

gibt in diesem Beispiel die durchschnittliche Zerfallsrate des radioaktiven Isotops an.

Übung 3.3.

Berechne mit Hilfe der Abbildung 5 auf Seite 14 die durchschnittliche Zerfallsrate für Jod 131 in den Intervallen $[8, 16], [16, 24]$ und $[5, 13]$.

Übung 3.4.

Berechne die durchschnittliche Steigung des Graphen der Funktion f im Intervall $[x_0, x_0+h]$, und bestätige dein Ergebnis mit einer Skizze.

a) $f(x) = x^2$ in $[1, 1.2]$

b) $f(x) = \sin(x)$ in $[0, \pi/2]$

c) $f(x) = \ln(x)$ in $[0.5, \mathrm{e}]$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x/2}$ in $[-1, 1]$

e) In welchem Intervall $[2, b]$ beträgt die durchschnittliche Steigung der Funktion aus (a) 6?

Übung 3.5.

Eine neue Computeranlage für ein grösseres Unternehmen kostet 500 000 CHF. Ihr Wert nach t Jahren beträgt etwa

$$W(t) = 500\,000 \cdot e^{-0.35t}.$$

Berechne ihre durchschnittliche Wertänderung pro Jahr zwischen dem 2. und 5. Jahr.

Abschliessend zur Anwendung des Differenzenquotienten noch aus der Chemie folgendes

Beispiel 3.6.3. Bei chemischen Reaktionen gibt es keine einfache Methode, um die Reaktionsrate, d.h. die Geschwindigkeit, mit der die Reaktion abläuft, direkt zu messen. Üblicherweise misst man die Konzentration des Ausgangsmaterials oder des Endprodukts zu verschiedenen Zeitpunkten und liest dann aus einer graphischen Darstellung die Reaktionsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt ab.

3.7. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 3.1.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{4.9(t+\Delta t)^2-4.9t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{4.9(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-4.9t^2}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{4.9(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-4.9t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{9.8t\Delta t+4.9\Delta t^2}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0} 9.8t+4.9\Delta t = 9.8\end{aligned}$$

Notizen zu Übung 3.2. Wir berechnen $\frac{\Delta H}{\Delta x}=\frac{674-610}{700}=\frac{64}{700}\approx 0.091=9.1\%$. Der durchschnittliche Steigungswinkel ist $\alpha\approx\arctan(0.091)\approx 5.2°$.

Notizen zu Übung 3.3. Über dem Intervall $[8,16]$ lesen wir ab: $\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(16)-f(8)}{16-8}=\frac{2.5\cdot 10^8-5\cdot 10^8}{8}=-3.125\cdot 10^7$ Zerfälle pro Tag. Für $[16,24]$ ist $\frac{\Delta f}{\Delta t}=-1.5625\cdot 10^7$ und für $[5,13]$ ist $\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(13)-f(5)}{13-5}=\frac{10^9(\frac{1}{2})^{\frac{13}{8}}-10^9(\frac{1}{2})^{\frac{5}{8}}}{8}\approx -4.05\cdot 10^7$

Notizen zu Übung 3.4.

a) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{1.2^2-1^2}{1.2-1}=2.2$

b) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2})-\sin(0)}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

c) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\ln(\mathrm{e})-\ln(0.5)}{\mathrm{e}-0.5}\approx 0.76$

d) $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}}{1-(-1)}\approx 0.52$

Notizen zu Übung 3.5. $\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{W(5)-W(2)}{5-2}\approx -5380$

4. Der Differenzialquotient

4.1. Von der mittleren zur momentanen Änderungsrate

In früheren Aufgaben wurde die durchschnittliche Änderung einer Grösse berechnet; beispielsweise die durchschnittliche Geschwindigkeit einer Rakete, wenn man das Weg-Zeit-Diagramm kennt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

wobei Δs die Höhendifferenz und Δt die Länge des zugehörigen Zeitintervalls ist. Wie gross ist aber die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt, zum Beispiel 15 s nach dem Start? Einen ersten, noch ungenauen Näherungswert für die gesuchte Momentangeschwindigkeit liefert sicher die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[15, 20]$. Durch die Verkleinerung des Zeitintervalls kann die Genauigkeit verbessert werden.

Übung 4.1.

Fällt ein Körper aus der Ruhelage im freien Fall t Sekunden lang, so lässt sich der zurückgelegte Weg s (in Meter) annähernd durch

$$s(t) = 5t^2$$

berechnen.

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den Zeitintervallen $[3, 3.5]$, $[3, 3.2]$, $[3, 3.1]$, $[3, 3.05]$. Wie gross ist die Momentangeschwindigkeit nach genau drei Sekunden?

Die entsprechende mathematische Formulierung lautet: Die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 ist der Grenzwert, gegen den die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ im Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ strebt, wenn t_1 gegen t_0 geht ($\Delta t \to 0$). In Formeln:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \bar{v} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

$s(t)$ bezeichne die bis zum Zeitpunkt t erreichte Höhe.

4.2. Das Konzept

Eine beliebige Funktion f sei im betrachteten Intervall $[a, b]$ stetig. Mit der Steigung der Sekante lässt sich das Änderungsverhalten der Funktion, d.h. die Steigung, an einer beliebigen, aber festgehaltenen Stelle $x_0 \in [a, b]$ in einfacher Weise erklären. Will

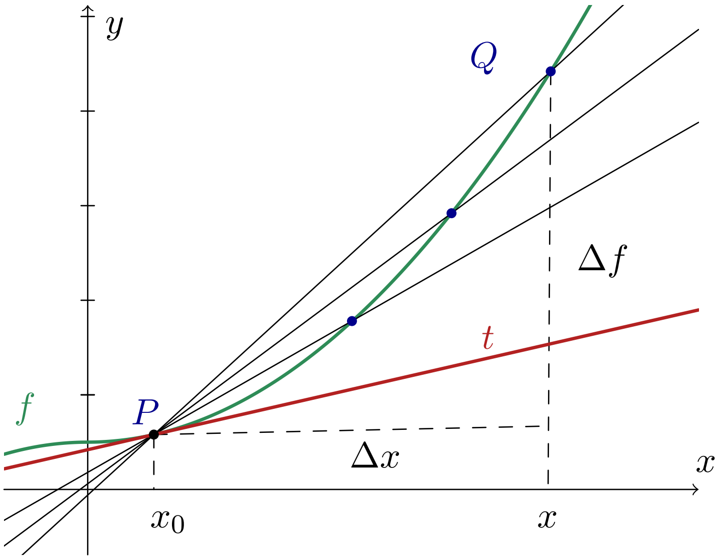


Abbildung 6: Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotient

man nun das Änderungsverhalten der Funktion in x_0 exakt bestimmen, so ist dazu die Tangentensteigung im Punkt $P = (x_0|f(x_0))$ zu berechnen.

Definition 4.1: Steigung

Die Steigung der Tangente t in P wird als Steigung des Graphen in P, also als momentanes Änderungsverhalten der Funktion f an einer Stelle x_0 bezeichnet.

Nachdem die Tangente im Punkt eines Graphen definiert ist, kann das Tangentenproblem rechnerisch formuliert werden. Es genügt, die Steigung der Tangente in P zu ermitteln, da die Stelle x_0 bzw. der Punkt P gegeben ist, womit die Lage der Tangente eindeutig bestimmt ist.

Definition 4.2: Differenzialquotient

Die Steigung der Tangente erhält man für $\Delta x \to 0$. Sie ist also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Falls dieser Grenzwert existiert, was ja keinesfalls sicher ist, da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen Null streben (x_0 ist eine Unbestimmtheitsstelle), nennt man diesen Grenzwert den Differenzialquotient von f an der Stelle x_0.

Der Differenzialquotient ist der wichtigste Begriff der Differenzialrechnung. Mit ihm bewältigten Newton und Leibniz den Übergang von der antiken zur modernen Mathematik, da sie jetzt das momentane Änderungsverhalten einer Funktion bzw. die Steigung des Graphen an einer bestimmten Stelle x_0 rechnerisch untersuchen konnten. Sowohl der Name Differenzialquotient als auch die Schreibweise $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$ stammen von Leibniz.

Für die praktische Berechnung des Differenzialquotienten ersetzt man x durch $x_0 + h$ und lässt h gegen 0 streben. Der Differenzialquotient erhält dann die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Übung 4.2.

Vervollständige Tabelle 2 auf Seite 21 mit weiteren Beispielen für lokale Änderungsraten.

Übung 4.3.

Berechne den Differenzialquotienten der Funktion f an der Stelle x_0 und die Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0|f(x_0))$. Überprüfe dein Ergebnis mit einer Skizze.

a) $f(x) = x^2$ in $x_0 = 1$

b) $g(x) = -x^3$ in $x_0 = -1$

c) $h(x) = x^{-1}$ in $x_0 = 0.25$

Übung 4.4.

Berechne die Momentangeschwindigkeit zur Zeit $t = 2$ für eine Bewegung mit

a) $s(t) = t^2 + 3t$

b) $s(t) = \sqrt{t}$

x	$f(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$
Abszisse	Ordinate	Graphensteigung
Zeit	Ort	
Zeit		Beschleunigung
Zeit	elektrische Ladung	
	Energie	Leistung
	chem. Konzentration	chem. Reaktionsgeschw.
Zeit		Wachstumsgeschwindigkeit
Zeit	Geldwert	

Tabelle 1: Interpretation des Differenzialquotienten

wenn t in Sekunden und $s(t)$ in Meter angegeben sind.

4.3. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 4.1. Man hat für $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ und die immer kleiner werden Intervalle 32.5, 31, 30.5, 30.25 Meter pro Sekunde. Vermutlich ist die Momentangeschwindigkeit nach 3 Sekunden 30 m/s.

Notizen zu Übung 4.2.

x	$f(x)$	$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$
Abszisse	Ordinate	Graphensteigung
Zeit	Ort	Geschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Beschleunigung
Zeit	elektrische Ladung	Strom
Zeit	Energie	Leistung
Zeit	chem. Konzentration	chem. Reaktionsgeschw.
Zeit	Population	Wachstumsgeschwindigkeit
Zeit	Geldwert	Inflation/Deflation

Tabelle 2: Interpretation des Differenzialquotienten

Notizen zu Übung 4.3.

a)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0+h = 2x_0\end{aligned}$$

also $\frac{\mathrm{d}f(1)}{\mathrm{d}x} = 2$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(x_0+h)^3+x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-x_0^3-3x_0^2h-3x_0h^2-h^3+x_0^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-(x_0+h)^3+x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-3x_0^2h-3x_0h^2-h^3}{h} = \lim_{h\to 0} -3x_0^2-3x_0h-h^2 = -3x_0^2\end{aligned}$$

also $\frac{\mathrm{d}g(-1)}{\mathrm{d}x} = -3$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{h(x_0+h)-h(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+h)}-\frac{x_0+h}{x_0(x_0+h)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x_0(x_0+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+h)} = -\frac{1}{x_0^2}\end{aligned}$$

somit $\frac{\mathrm{d}h(0.25)}{\mathrm{d}x} = -16$

Notizen zu Übung 4.4.

a)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(t_0+h)^2+3(t_0+h)-(t_0^2+3t_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(t_0^2+2t_0h+h^2)+3(t_0+h)-(t_0^2+3t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2t_0h+h^2+3h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} 2t_0+h+3 = 2t_0+3\end{aligned}$$

und damit $v(3) = 9\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}$.

b)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \lim_{h\to 0}\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{t_0+h}-\sqrt{t_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{t_0+h-t_0}{h(\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{t_0+h}+\sqrt{t_0}} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}\end{aligned}$$

also $v(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ Meter pro Sekunde.

5. Die Ableitung

5.1. Definition

Definition 5.1: Ableitung

Existiert für jedes x in einem Intervall der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

so kann damit eine neue Funktion f' definiert werden. Bei dieser Funktion f' wird jedem x aus dem Intervall genau eine reelle Zahl, nämlich $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, zugeordnet.

Diese Funktion f' — die Symbolik stammt übrigens von Leonard Euler — nennt man Steigungsfunktion, weil jedem x eine Steigung zugeordnet wird. Durch f' wird das Änderungsverhalten der Ausgangsfunktion f charakterisiert. f' wird oft kurz als *Ableitung* von f bezeichnet.

Übung 5.1.

Ermittle die Steigungsfunktion (die Ableitung) f' für

a) die Geraden mit den Gleichungen $f(x) = x$, $g(x) = 2x - 3$,

b) die Parabeln mit den Gleichungen $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2 - 2$,

c) die Hyperbeln mit der Gleichung $f(x) = \frac{2}{x}$

d) den Parabelast mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x}$,

und die Steigungen in den Punkten $P(3|?)$ und $Q(-2|?)$.

Übung 5.2.

Vervollständige die Tabelle 3 auf Seite 24.

Notizen zu Übung 5.1.

a) $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2$ und $f'(3) = 1 = f'(-2)$, $g'(3) = 2 = g'(-2)$

b) $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 6x$ und $f'(3) = 6$, $f'(-2) = -4$, $g'(3) = 18$, $g'(-2) = -12$

c) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ und $f'(3) = \frac{2}{9}$, $f'(-2) = -\frac{1}{2}$

$f(x) =$	$f'(x) =$
x^4	
x^3	
x^2	
x	
x^0	
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	
$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$	

Tabelle 3: Wichtige Ableitungen

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $f'(-2) = \text{n.d.}$

Notizen zu Übung 5.2.

$f(x) =$	$f'(x) =$
x^4	$4x^3$
x^3	$3x^2$
x^2	$2x$
x	1
x^0	0
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2}$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$-2x^{-3}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

5.2. Ableitungsregeln

Die vorherigen Aufgaben waren teilweise Beispiele für die folgenden allgemeinen Differenziationsregeln.

Die beiden Funktionen f und g seien im betrachteten Intervall differenzierbar. Dann gelten:

- Eine konstante Funktion hat die Ableitung 0.

$$(c)' = 0$$

- Ein konstanter Summand fällt bei der Differenziation weg.

$$(f(x) + c)' = f'(x)$$

- Ein konstanter Faktor bleibt bei der Differenziation erhalten.

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

- Eine Summe von Funktionen darf man gliedweise differenzieren.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Übung 5.3.

Beweise die vier Regeln mittels

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Übung 5.4.

Differenziere die Funktionen

a) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

b) $5x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 2x - 7$

c) $\frac{2}{x} - 3x$

d) $\sqrt{x} - 10x - (4x)^2$

Übung 5.5.

Für die Masse M (in g) von Glukose bei einem Stoffwechselexperiment in Abhängigkeit der Zeit t (in h) gilt:

$$M(t) = 4.5 - 0.03t^2.$$

1. Wie gross ist die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten beiden Stunden?
2. Berechne die momentane Änderungsrate für $t = 0$ und $t = 2$.

Übung 5.6.

Differenziere die Funktion V, deren Funktionswerte das Volumen einer Kugel mit dem Radius r angeben. Was fällt auf?

Übung 5.7.

Die Tragseile einer Hängebrücke sind an den Pfeilern befestigt, die 250 m auseinander stehen, und hängen in Form einer Parabel, deren tiefster Punkt 50 m unter den Aufhängungspunkten liegt. Ermittle den Winkel zwischen Seil und Pfeiler.

Übung 5.8.

Am Oktoberfest in München sind in einem grossen Fass Bier anfänglich 2000 Liter Bier. Der Inhalt $V(t)$ des Fasses lässt sich in Abhängigkeit der Zeit t in Minuten durch

$$V(t) = 2000 - \frac{5}{48}t^2 + \frac{1}{3456}t^3$$

beschreiben.

1. Überprüfe, dass das Fass nach vier Stunden leer ist.
2. Wie viel Liter Bier fliessen genau 30 Minuten nach dem Anstich des Fasses in die Humpen?
3. Wann ist das Fest auf seinem „Höhepunkt"?

Übung 5.9.

Finde zu den fünf Graphen a – e in Abbildung 7 auf Seite 28 jeweils die passende Ableitungsfunktion A – E.

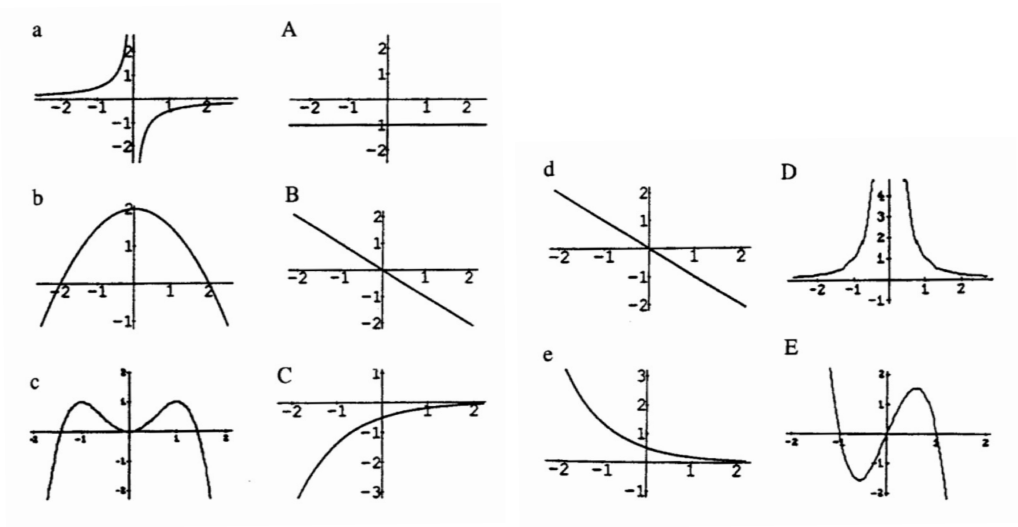


Abbildung 7: Graphen und ihre Ableitungsgraphen

5.3. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 5.3.

a) $F(x) = c$ und daraus

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

b) $F(x) = f(x) + c$ und daraus

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + c - (f(x) + c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

c) $F(x) = c \cdot f(x)$ und daraus

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - (c \cdot f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

d) $F(x) = f(x) + g(x)$ und daraus

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

Notizen zu Übung 5.4.

a) $x - 3$

b) $15x^2 + \frac{2}{3}x - 2$

c) $-\frac{2}{x^2} - 3$

d) $-32x - 10 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Notizen zu Übung 5.5.

a) $\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{M(2) - M(0)}{2} = \frac{4.38 - 4.5}{2} = -0.06$

b) $M'(t) = -0.06t$ und somit $M'(0) = 0$ bzw. $M'(2) = -0.12$

Notizen zu Übung 5.6. Aus $V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ folgt $V'(r) = 4\pi r^2 = O(r)$.

Notizen zu Übung 5.7. Ich nehme den Scheitelpunkt in den Ursprung. Damit werden die Aufhängepunkte $A_1(-125|50)$ und $a_2(125|50)$ und wir nehmen $f(x) = ax^2$ an. Es folgt $50 = a \cdot 125^2$ und sofort $a = \frac{50}{125^2} = 0.0032$,

$$f(x) = 0.0032x^2.$$

Der Winkel am Aufhängepunkt bezüglich der Horizontalen ist $f'(125)$. Es ist $f'(x) = 0.0064$. Daraus folgt $f'(125) = 0.8$ und $\alpha = \arctan(0.8) \approx 38.7°$. Also ist der Winkel zwischen Seil und Pfosten $180 - 90 - 38.7 \approx 51.3°$.

Notizen zu Übung 5.8.

a) $V(240) = 2000 - \frac{5}{48} \cdot 240^2 + \frac{1}{3456} \cdot 240^3 = 0$.

b) $V'(t) = -\frac{5}{24}t + \frac{1}{1152}t^2 \quad \Longrightarrow \quad V'(30) \approx -5.5$ Liter pro Minute

c) Definieren wir den Höhepunkt, wenn am meisten Bier ausgeschenkt wird. Scheitelpunkt von $V'(t)$, dann findet die maximale Änderung des Fassinhalts statt. $t_s = -\frac{-\frac{5}{24}}{\frac{2}{1152}} = 120$, also nach 2 Stunden.

Notizen zu Übung 5.9. aD, bB, cE, dA, eC

6. Weitere Ableitungsregeln

Wollte man die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin^3(x) \quad \text{oder} \quad g(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^3 - 2}$$

mittels dem Differenzialquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

berechnen, so wäre dies sicher ein mühsames Unterfangen. Mit einigen weiteren Differenziationsregeln lassen sich die nötigen Rechnungen erheblich vereinfachen.

6.1. Produkt- und Quotientenregel

Aus

$$f(x) = x^5 = x^2 \cdot x^3$$

und daraus

$$f'(x) = 5x^4 \neq 2x \cdot 3x^2$$

erkennt man, dass die Ableitung eines Produkts nicht so einfach wie bei der Summe berechnet werden kann.

Satz 6.1: Produktregel

Sind f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch ihr Produkt an dieser Stelle differenzierbar und der Differenzialquotient von $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ lautet:

$$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Satz 6.2: Quotientenregel

Sind f und g an der Stelle x differenzierbar und $g(x) \neq 0$, so ist auch ihr Quotient f/g an dieser Stelle differenzierbar und der Differenzialquotient von $F(x) = f(x)/g(x)$ lautet:

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis Produktregel.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) \end{aligned}$$

Da f an der Stelle x nach Voraussetzung differenzierbar ist, also dort sicher auch stetig, gilt $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Und daraus erhält man

$$F'(x) = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$$

□

Übung 6.1.

Beweise die Quotientenregel indem du

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$$

setzt und die Produktregel benutzt.

Übung 6.2.

Berechne im Punkt $P(3|?)$ die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

In welchem Punkt hat der Graph eine zur ersten Winkelhalbierenden $g(x) = x$ parallele Tangente?

Übung 6.3.

Ermittle die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (x^2-1)(x^3+4)$

b) $f(x) = (x^3-2x+1)(2x^5+x^4-3x)$

c) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 5x^{-3}$

d) $f(t) = (1+\frac{1}{t})(1-\frac{1}{t^2})$

e) $f(x) = \sqrt{7x} - 5x + 3x^{-1} + \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{5}x^{-5}$

f) $f(t) = \frac{1}{t^2-1}$

g) $f(s) = \frac{4+s}{4-s}$

h) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$

i) $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$

j) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

k) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-7x+12}$

l) $f(u) = \frac{u+1}{\sqrt{u}}$

m) $f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$

6.2. Kettenregel

Eine wichtige Regel für die Differenziation bezieht sich auf verschachtelte Funktionen:

$$F(x) = g(f(x)),$$

oder auch etwa in der Form

$$F(x) = g(u) \quad \text{mit} \quad u = f(x)$$

notiert. Zusammengesetzte Funktionen werden auch verkettete Funktionen genannt.

Beispiel 6.2.1. Die Funktion

$$F(x) = \sin(3x)$$

kann als Verkettung mit

$$g(u) = \sin(u) \quad \text{und} \quad f(x) = 3x$$

interpretiert werden.

In der Mathematik ist die Schreibweise

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{(sprich: g Ring f)}$$

üblich; insbesondere dann, wenn die Funktionen ohne Argument notiert werden. Beachte: $g \circ f$ bedeutet, dass zuerst f und dann g ausgeführt wird. Die Reihenfolge wird also von rechts nach links, wie im Arabischen, gelesen.

Übung 6.4.

Ermittle die aus f und g zusammengesetzte Funktion

$$F(x) = (g \circ f)(x)$$

mit dem Funktionsterm $F(x) = g(f(x))$.

1. $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = (x-3)^2 + 5$
2. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^3 + x^{-2}$

Satz 6.3: Kettenregel

f an der Stelle x und g an der Stelle $f(x)$ differenzierbar, so ist auch ihre Verkettung $F = g \circ f$ mit $F(x) = g(f(x))$ in x differenzierbar. Der Differenzialquotient von $F(x) = g(f(x))$ lautet:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Bemerkung 6.2.1. Man nennt g die äussere, f die innere Funktion und entsprechend $g'(f(x))$ die äussere und $f'(x)$ die innere Ableitung.

Beispiel 6.2.2. Für $F(x) = (10x^2 - 7x + 3)^{100}$ ist $g(u) = u^{100}$ und $f(x) = 10x^2 - 7x + 3$, also

$$F'(x) = 100(10x^2 - 7x + 3)^{99} \cdot (20x - 7).$$

Für $f(x) = \sqrt{5x^7 + 3x^2 + 256}$ ist $g(u) = \sqrt{u}$ und $h(x) = 5x^7 + 3x^2 + 256$, damit

$$f'(x) = \frac{35x^6 + 6x}{2\sqrt{5x^7 + 3x^2 + 256}}.$$

Beweis Kettenregel. Es seien f, g differenzierbar und wir setzen $u = f(x)$ und $f(x+h) =$

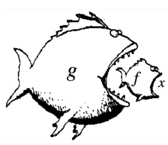


Abbildung 8: Verkettung von Funktionen: hier $g(f(x))$

$f(x) + h*$. Aus der Stetigkeit von f folgt: für $h \to 0$ gilt auch $h* \to 0$. So ergibt sich

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h*) - g(u)}{h*} \cdot \frac{h*}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h*) - g(u)}{h*} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= g'(u) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

$\square$

Übung 6.5.

Ermittle die Ableitung der Funktionen:

a) $f(x) = (4x^3 - 2x)^5$

b) $f(x) = (x^2 + x^{-1})^4$

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^{-3}$

d) $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$

e) $f(t) = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^2$

f) $f(u) = \frac{1}{\sqrt{25-u^2}}$

6.3. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

Übung 6.6.

Vermute aufgrund einer Zeichnung, welche Gestalt die Steigungsfunktion der Sinusfunktion hat.

Mit den Additionstheoremen, die man leicht mit der Euleridentität ($e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$) nachweist, kann man Sinus und Cosinus überall differenzieren, wenn man die Ableitungen bei 0 kennt:

$$\sin'(0 + a) = \sin'(0)\cos(a) + \cos'(0)\sin(a)$$

$$\cos'(0 + a) = \cos'(0)\cos(a) - \sin'(0)\sin(a).$$

Falls $\sin'(0)$ existiert, können wir mit der Kettenregel aus $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ folgern

$$\cos'(0) = \frac{-2\sin(0)\sin'(0)}{2\sqrt{1-\sin^2(0)}} = 0.$$

Wir brauchen also nur

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)-\sin(0)}{h-0} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

Üblicherweise wird dazu benutzt (siehe auch unten)

$$\sin(h) \leq h \leq \tan(h) \longleftrightarrow \cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq 1.$$

Wir sehen am Kreis unter anderem die Schranke $|\cos(\beta)-\cos(\alpha)| \leq |\beta-\alpha|$ und folgern $|\cos(0)-\cos(h)| \leq |0-h|$, also

$$\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1.$$

Daher gilt auch

$$\sin'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

und wir sind fertig.

Satz 6.4: Ableitungen von $\sin$ **und** $\cos$

Nach den obigen Überlegungen gilt:

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Übung 6.7.

Leite die Ableitungsfunktion von

$$f(x) = \tan(x)$$

her.

Übung 6.8.

Bestimme die Ableitung:

a) $f(x) = \sin x + 2\cos(x)$

b) $f(x) = x\sin x + \cos(x)$

c) $f(x) = \frac{1}{1+\cos(x)}$

d) $f(u) = \tan^2(u)$

e) $f(t) = \frac{t^2}{\sin(t)}$

f) $f(\varphi) = \frac{1}{2}a^2 \sin(\varphi)$

g) $f(x) = \sin(4x)$

h) $f(t) = \sqrt{\cos(t)}$

i) $f(u) = \cos^2(u)$

j) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

k) $f(\varphi) = \cos(a\sqrt{\varphi})$

l) $f(t) = \tan^3(5t)$

m) $f(x) = x^2 \cos(4x)$

n) $f(x) = x^{-2} \sin(4x)$

Übung 6.9.

a) Wo und unter welchem Winkel (Schnittwinkel der Tangenten im Schnittpunkt) schneiden sich die Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$?

b) Wo haben die Graphen im Intervall $[0, 2\pi]$ die gleiche Steigung?

Übung 6.10.

Der Ort $x(t)$ eines Kolbens kann beschrieben werden durch

$$x(t) = \cos(20\pi t) + \sqrt{25 - \sin^2(20\pi t)}, \quad t \text{ in } s$$

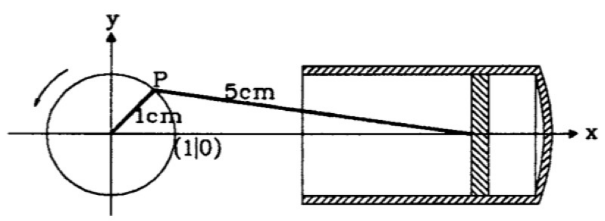


Abbildung 9: Schema des Kolben

Wie schnell bewegt sich der Kolben zu den Zeiten $t = \frac{1}{40}$ und $t = \frac{1}{20}$ Sekunden?

6.4. Die Ableitung der Exponentialfunktion

Um die Ableitung der Exponentialfunktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ zu bestimmen, muss man den Grenzwert

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h}$$

untersuchen.

Übung 6.11.

Überzeuge dich davon, dass obiger Grenzwert gleich

$$\mathrm{e}^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$$

ist.

Berechnet man Näherungswerte für den Grenzwert ($h \to 0$) mit dem Taschenrechner, so drängt sich die Vermutung

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

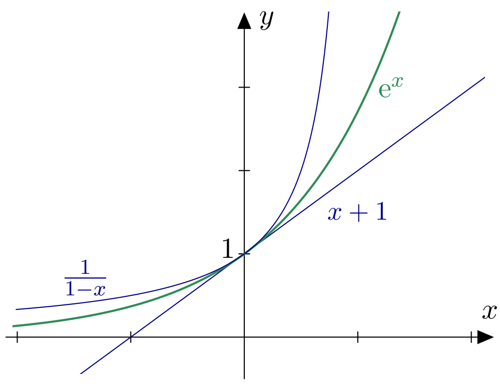
auf. Dies würde bedeuten, dass die Ableitung der e-Funktion just wieder die e-Funktion ist:

$$(\mathrm{e}^x)' \stackrel{?}{=} \mathrm{e}^x$$

Wir begnügen uns hier mit folgender Herleitung: Für $h < 1$ gilt

$$1 + h \le \mathrm{e}^h \le \frac{1}{1-h}$$

Diese Ungleichungen können mit der Reihendefinition von e bzw. mit der geometrischen Reihe für $\frac{1}{1-h}$, falls $-1 < h < 1$, erklären.



also

$$h \leq \mathrm{e}^h - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}$$

Es folgt für $h > 0$

$$1 \leq \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \leq \frac{1}{1-h}, \text{ also } \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

und für $h < 0$

$$1 \geq \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} \geq \frac{1}{1-h}, \text{ also } \lim_{h \uparrow 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

Insgesamt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

Satz 6.5: Ableitung der e-Funktion

Die Exponentialfunktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

Bemerkung 6.4.1. Einen anderen Zugang hat man durch die Punkte:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
- $< \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n >$ ist für $n > |x|$ monoton wachsend

also gilt $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^x$.

Mit Hilfe der Bernoulli'schen Ungleichung erhält man dann die beiden Ungleichungen

$$1 + x = 1 + n\frac{x}{n} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^x,$$

also $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ und, wenn man x durch $-x$ ersetzt, $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$. Aus der zweiten Ungleichung ergibt sich für $1 - x > 0$ also $\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$. Damit gilt für $x < 1$: $1 + x \leq \mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$.

6.5. Die Ableitung der Logarithmusfunktion

Für die Herleitung erinnern wir uns daran, dass die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ Inversfunktion der Exponentialfunktion e^x ist. Allgemein gilt für eine Funktion f und ihre Inverse f^{-1}:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Wenden wir diese Beziehung auf exp und ln an — und berücksichtigen, dass ln nur für positive Argumente definiert ist — haben wir

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$$

Beide Seiten der Gleichung abgeleitet ergibt:

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1$$

und daraus folgt unmittelbar

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Satz 6.6: Ableitung des ln

Die Logarithmusfunktion $\ln(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^+$ differenzierbar und es gilt

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Übung 6.12.

Ermittle die Definitionsmenge und die Ableitung der Funktion ($\mapsto$ bedeutet: „wird zugeordnet“)

a) $7\ln(x)$

b) $(\ln(x))^2$

c) $\ln(x-5)$

d) $\ln(\ln(x))$

e) $\sqrt{\ln(x)}$

f) $\ln(\sin(x))$

g) $3\mathrm{e}^{x}$

h) e^{3x}

i) $6\mathrm{e}^{-5t+2}$

j) e^{2t^4-1}

k) $\sqrt{t}\mathrm{e}^{\sqrt{t}}$

l) $\mathrm{e}^{-t^2}\ln(t)$

6.6. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 6.1. Betrachte

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot[g(x)]^{-1}\right)' \\ &= f'(x)\cdot[g(x)]^{-1} + f(x)\cdot(-[g(x)]^{-2}\cdot g'(x)) = \frac{f'(x)}{[g(x)]^{-1}} + \frac{f(x)\cdot g'(x)}{-[g(x)]^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

Notizen zu Übung 6.2. Wir halten $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ fest. Die Steigung ist $f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$. An der Stelle 3: $f'(3) = -\frac{1}{8}$ und damit als Ansatz für die Tangente $t(x) = -\frac{1}{8}x + q$. Ferner ist $f(3) = -\frac{1}{2}$, was wir in t einsetzen:

$$\begin{aligned}t(3) &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8}\cdot 3 + q &= -\frac{1}{2} \\ q &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Die Tangentengleichung lautet $t(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$.

Aus $g'(x) = 1 = \frac{-2}{(1+x)^2}$ folgt $x^2 + 2x + 3 = 0$ mit Diskriminante $2^2 - 4\cdot 3 < 0$. Daher beträgt die Steigung von f an keiner Stelle 0.

Notizen zu Übung 6.3.

a) $2x(x^3+4) + (x^2-1)\cdot 3x^2$

b) $(3x^2-2)(2x^5+x^4-3x) + (x^3-2x+1)(10x^4+4x^3-3)$

c) $x^3 + 9x^2 + x - 15x^{-4}$

d) $(-t^{-2})(1-\frac{1}{t^2}) + (1+\frac{1}{t})\cdot t^{-3}$

e) $\frac{\sqrt{7}}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5 - 3x^{-2} + x^7 + -x^{-6}$

f) $\frac{-2t}{(t^2-1)^2}$

g) $\frac{(4-s)-(4+s)(-1)}{(4-s)^2}$

h) $\frac{4x(x+3)-(2x^2+1)}{(x+3)^2}$

i) $\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$

j) $\frac{2x(x^2-4)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

k) $\frac{(x^2-7x+12)-(x-5)(2x-7)}{(x^2-7x+12)^2}$

l) $\frac{\sqrt{u}-(u+1)\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}}{u}$

m) $\frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-\sqrt{t}-(1+\sqrt{t})(-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}})}{(1-\sqrt{t})^2}$

Notizen zu Übung 6.4.

a) $g(f(x)) = g(2x-1) = (2x-4)^2+5$

b) $g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)^3+(x^2+1)^{-2}$

Notizen zu Übung 6.5.

a) $5(4x^3-2x)^4(12x^2-2)$

b) $4(x^2+x^{-1})^3(2x-x^{-2}$

c) $(-3)(x^2-5x+6)^{-4}(2x-5)$

d) $\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}2t$

e) $2\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)\left(\frac{2t(t^2-1)-(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}\right)$

f) $-\frac{1}{2}(25-u^2)^{-\frac{3}{2}}(-2u)$

Notizen zu Übung 6.6. Man zeichne die Graphen mit `geogebra.org` und vermutet $(\sin(x))' = \cos(x)$ und $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Notizen zu Übung 6.7. Wir schreiben Tangens mit Sinus und Cosinus und leiten ab.

$$\begin{aligned}\tan' x = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' &= \frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Im letzten Schritt hätten wir auch den Bruch aufspalten können, um $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$ zu erhalten.

Notizen zu Übung 6.12.

a) $\cos(x) - 2\sin(x)$

b) $\sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) = x\cos(x)$

c) $-(1+\cos(x))^{-2}(-\sin(x))$

d) $2\tan(u)\cdot(1+\tan^2(u))$

e) $\frac{2t\sin(t)-t^2\cos(t)}{\sin^2(t)}$

f) $\frac{1}{2}(\cos(t))^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\sin(t))$

g) $2\cos(u)(-\sin(u))$

h) $\cos(\frac{1}{x})(-x^{-2})$

i) $-\sin(a\varphi)\cdot\frac{1}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}}$

j) $3\tan^2(5t)(1+\tan^2(5t))\cdot 5$

k) $2x\cos(4x) + x^2(-\sin(4x))\cdot 4$

l) $-2x^{-3}\sin(4x) + x^{-2}\cos(4x)\cdot 4$

Notizen zu Übung 6.9.

a) $\sin(x) = \cos(x) \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow \tan(x) = 1$ und damit $x = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Mit den Ableitungen $\cos(x)$ und $-\sin(x)$ berechnen wir die Steigung zu $\arccos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $-\arcsin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Wir berechnen $\arctan(\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 35.3°$ und damit für den Zwischenwinkel $70.6°$.

b) Nun setzten wir $\cos(x) = -\sin(x)$ und erhalten $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Also hat man an der Stelle $x = \frac{7}{4}\pi$.

Notizen zu Übung 6.10. Die Ableitung des Ortes nach der Zeit ist die Geschwindigkeit:

$$\dot{x} = -\sin(20\pi t)\cdot 20\pi + \frac{1}{2}(25-\sin^2(20\pi t))^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2\sin(20\pi t))\cdot\cos(20\pi t)\cdot 20\pi.$$

Also folgt $v(\frac{1}{20}) = 0$ und $v(\frac{1}{40}) = -20\pi$.

Notizen zu Übung 6.11.

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h-1)}{h}\\ &= \mathrm{e}^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\end{aligned}$$

Notizen zu Übung 6.12.

a) $7\cdot\frac{1}{x}$

b) $2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x-5}$

d) $\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}$

e) $\frac{1}{2}(\ln(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}$

f) $\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x)$

g) $3\mathrm{e}^x$

h) $\mathrm{e}3x\cdot 3$

i) $6\mathrm{e}^{-5t+2}\cdot(-5)$

j) $\mathrm{e}^{2t^4-1}\cdot(8t^3)$

k) $\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

l) $\mathrm{e}^{-t^2}\cdot(-2t)\ln(t)+\mathrm{e}^{-t^2}\cdot\frac{1}{t}$

7. Graphenanalyse

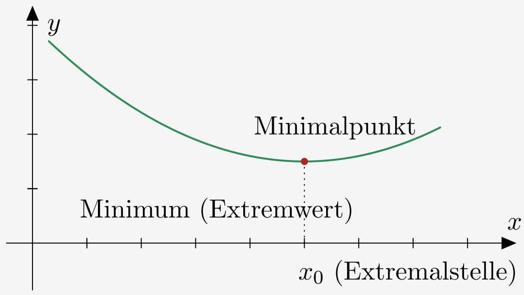
7.1. Extrema

Definition 7.1: Extrema

Der Punkt $(x_0|f(x_0))$ heisst *relatives Minimum* oder Tiefpunkt, falls

$$f(x) > f(x_0)$$

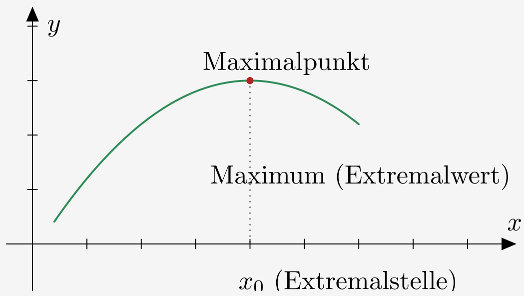
für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.



$(x_0|f(x_0))$ heisst *relatives Maximum* oder Hochpunkt, falls

$$f(x) < f(x_0)$$

für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.



Wie man diese Punkte rechnerisch findet, beschreiben die folgenden beiden Sätze.

Satz 7.1: Extremum

Hat die Funktion f im Punkt x_0 ein relatives Minimum oder Maximum, dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beachte, dass diese Bedingung für eine Extremalstelle notwendig, aber nicht hinreichend, ist. Um zu entscheiden, ob sich im Punkt x_0 ein Minimum oder Maximum befindet, hilft der folgende

Satz 7.2: Krümmung

Ist $f''(x_0) > 0$, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt. Ist $f''(x_0) < 0$, dann ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.

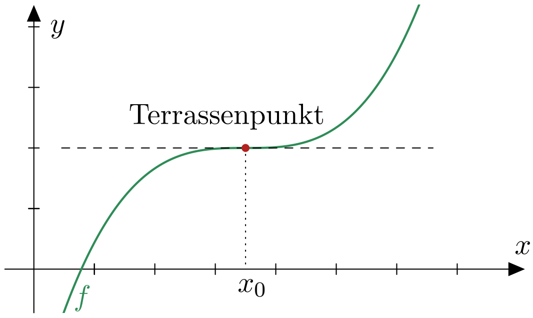
Zusammengefasst heisst dies, wenn f ein Minimum in x_0 hat, dann ist dort $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, und wenn f ein Maximum in x_0 hat, dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist.

7.2. Wendepunkte

Das letzte Resultat wirft die Frage auf, wie ein Punkt x_0 von f interpretiert werden soll, falls dort $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ ist. Wenn wir uns daran erinnern, dass die erste Ableitung einer Funktion die Steigung und die zweite Ableitung die Krümmung in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 angibt, dann bedeutet $f''(x_0) = 0$ also, dass dort der Graph von f keine Krümmung besitzt.

Definition 7.2: Terrassenpunkt

Man nennt einen Punkt $(x_0|f(x_0))$ Terrassenpunkt von f, falls $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.



Schliesslich will ich noch einen letzten Begriff zur Kurvendiskussion einführen, den sogenannten Wendepunkt. Man spricht dann von einem Wendepunkt von f an der Stelle x_0, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Bemerkung 7.2.1. Ein Terrassenpunkt ist also ein spezieller Wendepunkt, nämlich ein Wendepunkt mit Horizontaltangente.

7.3. Überblick

- Hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, dann gilt
$$f'(x_0) = 0$$
- Hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, dann gilt
$$f''(x_0) = 0$$
- Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, und zwar
  - ein Maximum, falls
$$f''(x_0) < 0$$
  - ein Minimum, falls
$$f''(x_0) > 0$$
- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f einen Wendepunkt in x_0.

Bemerkung 7.3.1. Die Umkehrung dieser Sätze gilt nicht.

Übung 7.1.

Überprüfe obige Aussage anhand einfacher Gegenbeispiele. Betrachte

$$f(x) = x^3 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4$$

in $x_0 = 0$.

Übung 7.2.

Zeige, dass eine beliebige quadratische Funktion keinen Wendepunkt hat.

Übung 7.3.

Bestimme die Nullstellen, Extrema und Wendestellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

Zeige zuerst, dass bei $x = 1$ eine Nullstelle ist und wende anschliessend Polynomdivision an, um die restlichen zu finden.

Übung 7.4.

Gib dir eine ganzrationale Funktion vor (z.B. $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$) und untersuche diese nach Nullstellen, Extrema und Wendestellen. Überprüfe deine Berechnungen z.B. mit GeoGebra.

Übung 7.5.

Zeichne die Sinusfunktion

$$f(x) = \sin(x)$$

im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$. Gib danach für f Nullstellen, Symmetrie, Extrema und Wendestellen auf dem Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ an. Zeichne mit einer andern Farbe ins gleiche Koordinatensystem die erste und zweite Ableitung von f ein.

Übung 7.6.

Die Funktion

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine beherrschende Rolle im Zusammenhang mit der Normal- oder Gauss'schen Verteilung.

a) Definitions- und Wertemenge,

b) Überprüfe, dass g symmetrisch zur y-Achse ist.

c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

d) Extremwerte

e) Wendepunkte des Graphen

f) Skizziere den glockenförmigen Graphen von f mit den Informationen aus dieser Übung.

7.4. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 7.1.

a) Für $f(x) = x^3$ ist $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$. Aber f hat in $x = 0$ keine Extremalstelle, dafür aber eine Wendestelle; genauer eine Terrassenpunkt.

b) Aus $g(x) = x^4$ folgt $g'(x) = 4x^3$, $g''(x) = 12x^2$, $g'''(x) = 24x$ und $g''''(x) = 12$. g hat keine Wendestelle, aber ein Extremum.

Notizen zu Übung 7.2. Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ beliebig mit $a \neq 0$. Es ist $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$ und $f'''(x) = 0$, also kann f keinen Wendepunkt haben.

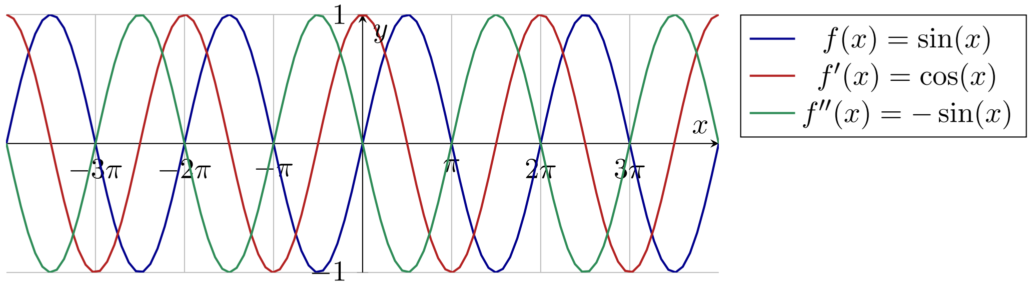
Notizen zu Übung 7.3. Es ist $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$. Mit Polynomdivision finden wir

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \div (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
-x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^2 + x)} \\
-6x + 6 \\
\underline{-(-6x + 6)} \\
0
\end{array}$$

Es folgt $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$ und also $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Wir haben alle Nullstellen. Für die Extrema brauchen wir erst $f'(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 5 = 0$, also $x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3}$. Die Wendestellen berechnen wir zu $f''(x) = 6x - 4 \overset{!}{=} 0$, also $x = \frac{2}{3}$; $f'''(x) = 6$. Man kann die Extremwerte noch klassifizieren.

Notizen zu Übung 7.4. Es ist $f(-1) = -4 + 3 + 1 = 0$, also ist $x_1 = -1$ Nullstelle. $(4x^3 - 3x + 1) \div (x + 1) = 4x^2 - 4x + 1 = 0$ und es folgt $x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}$. Extremwerte $f'(x) = 12x^2 - 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{6}$, $f''(x) = 24x$. Wendestelle bei 0. Man kann die Extremwerte noch klassifizieren.

Notizen zu Übung 7.5. Nullstellen sind bei $\sin(x) = 0$ und es folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Extrema bei $\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\mathbb{Z}$ und Wendestellen bei $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.



Notizen zu Übung 7.6.

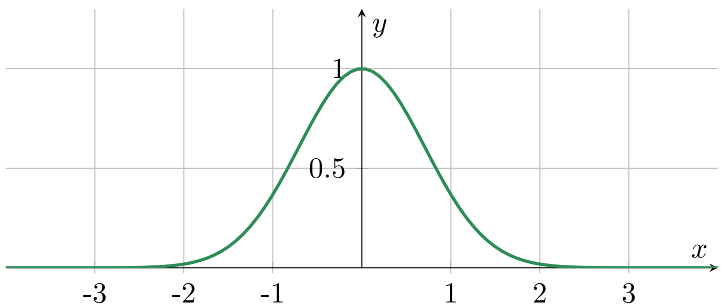
a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = (0, 1]$

b) $g(-x) = \mathrm{e}^{-(-x)^2} = \mathrm{e}^{-x^2} = g(x)$, also symmetrisch zur x-Achse

c) $g'(x) = 0$ ist notwendig. $g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, da $\mathrm{e}^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Betrachten wir noch $g''(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2) = 2\mathrm{e}^{-x^2}(2x^2 - 1)$ und somit $g''(0) = 2\mathrm{e}^0(-1) = -2 < 0$ impliziert ein Maximum bei $x = 0$.

d) Für Wendestellen müssen wir $g''(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}(2x^2 - 1) \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ lösen, done.

e) Der Graph sieht vielleicht so aus:



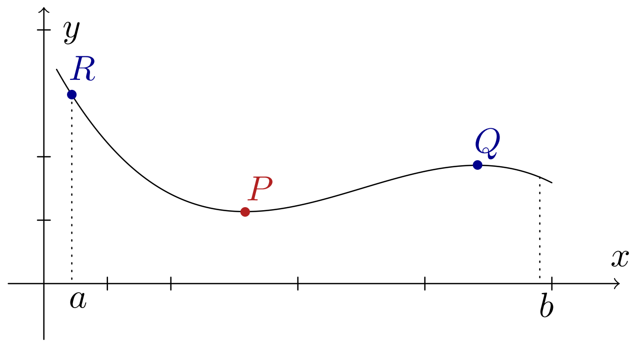


Abbildung 10: Randextremwert

8. Extremwertaufgaben

Man begegnet in unserer Umwelt sehr oft gewissen Grössen, die entweder zu minimieren (Kosten, Zeiten, Kraftaufwand,...) oder zu maximieren (Gewinne, Ausnutzung, Nutzeffekt,...) sind. Handelt es sich dabei um mehrere Variablen, die durch lineare Ungleichungen miteinander verbunden sind, so konnten diese Aufgaben mathematisch mit der linearen Optimierung gelöst werden. Im folgenden lässt sich der reale Zusammenhang durch eine differenzierbare Funktion mit nur einer Variablen beschreiben. Die Differenzialrechnung liefert dann mit ihren Methoden der Extremwertermittlung die Lösung des gestellten Problems.

Bemerkung 8.0.1. Bei manchen Problemstellungen können Randextrema vorkommen: Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 10 auf Seite 52 erreicht im Punkte R die Funktion ihr globales Maximum (Randextremum). Im Punkt Q erreicht sie ein lokales Maximum, während sie in P sowohl ein globales als auch ein lokales Minimum erreicht.

Übung 8.1.

Zerlege die Zahl 144 so in zwei Summanden, dass

a) ihr Produkt möglichst gross,

b) die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

Notizen zu Übung 8.1.

a) Die beiden Summanden sind x und $y = 144 - x$. Das Produkt ist somit $xy = x(144 - x) = -x^2 + 144x$. Das Maximum ist der Scheitelpunkt $x_S = -\frac{144}{-2} = 72$ und somit $y = 72$. Das kriegt man auch über $(-x^2 + 144x)' = -2x + 144 = 0$.

b) Dazu untersuchen wir die Funktion $g(x) = x^2 + (144 - x)^2 = 2x^2 - 288x + 144^2$ und leiten ab: $g'(x) = 4x - 288 = 0 \Leftrightarrow x = 72$, also auch $y = 72$.

Übung 8.2.

Zeichne in einem Koordinatensystem die Parabel mit der Gleichung

$$f(x) = 6 - \frac{x^2}{4}$$

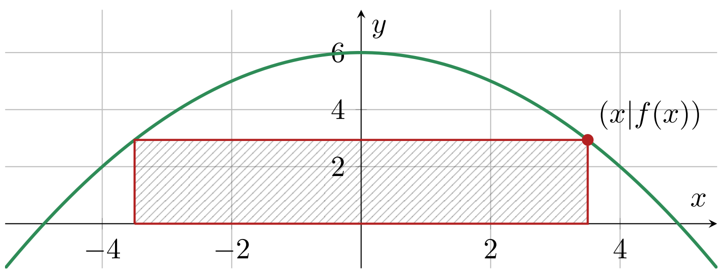
Dem Abschnitt der Parabel, der oberhalb der x-Achse liegt, ist ein Rechteck mit möglichst grossem

a) Inhalt,

b) Umfang

einzubeschreiben.

Notizen zu Übung 8.2.



a) Der Inhalt ist $A(x) = xy = x(6 - 0.25x^2) = -0.25x^3 + 6x$. Maximal wird er bei $A'(x) = -0.75x^2 + 6 = 0$, also $x = \pm 2\sqrt{2}$. Damit ist $A(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$.

b) $U(x) = 2x \cdot 2f(x) = 4x(6 - 0.25x^2) = -x^3 + 24x$. Somit $U'(x) = -3x^2 + 24$, also $x = 2\sqrt{2}$.

Übung 8.3.

Eine kreiszylinderförmige Büchse hat den Inhalt 1 l. Welche Abmessungen hat diese

Büchse, wenn ihre Oberfläche, bestehend aus Mantel und Grundflächen, minimal werden soll?

Notizen zu Übung 8.3. $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ und $V = \pi r^2 h$. Es folgt $h = \frac{V}{\pi r^2}$ und eingesetzt $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$. Daher $4\pi r - \frac{2V}{r^2} \stackrel{!}{=} 0$ und daraus

$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{2V}{r^2} \\ r^3 &= \frac{V}{2\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \end{aligned}$$

Das ergibt für einen Liter Inhalt $r \approx 5.4\,\text{cm}$. Die Höhe beträgt

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}V}{2}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}}}^2 = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$$

Übung 8.4.

Ein Heizkessel besteht aus einem Zylinder mit aufgesetzter Halbkugel. Er soll 2000 Liter fassen und möglichst wenig Wärme abstrahlen. Berechne seine Höhe und den Radius des Zylinders bzw. der Halbkugel.

Notizen zu Übung 8.4. Wir müssen die Oberfläche minimieren: $O(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = \pi r(3r + 2h) = 3\pi r^2 + 2\pi rh$. Aus der Nebenbedingung für das Volumen haben wir

$$\begin{aligned} V(r,h) &= \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 \\ V - \frac{2}{3}\pi r^3 &= \pi r^2 h \\ h &= \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2\pi r^3}{3\pi r^2} = \frac{3V - 2\pi r^3}{3\pi r^2} \end{aligned}$$

und damit

$$O(r) = 3\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2 + 2\pi r\frac{3V - 2\pi r^3}{3\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{2V}{r} - \frac{4\pi r^2}{3} = \frac{2V}{r} + \frac{5\pi r^2}{3}$$

Wir finden den Minimalwert von 0 für r über die Ableitung

$$O'(r) = -\frac{2V}{r^2} + \frac{10\pi}{3}r \stackrel{!}{=} 0.$$

Lösen nach r:

$$\begin{aligned}
-\frac{2V}{r^2} + \frac{10\pi}{3} r &= 0 \\
\frac{10\pi}{3} r &= \frac{2V}{r^2} \\
r^3 &= \frac{3V}{5\pi} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}
\end{aligned}$$

Für $V = 2\,\mathrm{m}^3$ ergibt dies $r \approx 1.56\,\mathrm{m}$; für

$$\begin{aligned}
h &= \frac{3V - 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)^3}{3\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)^2} = \frac{3V - \frac{6V}{5}}{3\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)^2} = \frac{\frac{9V}{5}}{3\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{3V}{5\pi}}{\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}} = r
\end{aligned}$$

Übung 8.5.

Ein Auto beansprucht in einem Tunnel mindestens einen Strassenabschnitt der Länge $L + s_R + s_B$, wobei L der durchschnittlichen Länge eines Autos, $s_R = tv$ dem Reaktionsweg, $s_B = \frac{v^2}{2a}$ dem Bremsweg, also $s_R + s_B$ dem Anhalteweg entsprechen. (a: Bremsverzögerung, t: Reaktionszeit, v: Momentangeschwindigkeit) Ein Stau vor dem Tunnel kann am schnellsten abgebaut werden, wenn ein maximaler Autodurchfluss im Tunnel erzeugt wird. Der Autodurchfluss D wird durch die Anzahl Autos, die pro Stunde maximal in den Tunnel einfahren können, definiert:

$$D(v) := \frac{3600v}{L + tv + \frac{v^2}{2a}}$$

a) Für welche Geschwindigkeit wird dieser Durchfluss maximal? Wie viele Autos können pro Stunde in den Tunnel einfahren? (Realistische Werte: $L = 5\,\mathrm{m}, a = 5\,\mathrm{m/s^2}, t = 1.2\,\mathrm{s}$)

   Hinweis: Statt des Maximums von D kann einfacher das Minimum von $\frac{1}{D}$ ermittelt werden.

b) Wie ändert sich das Resultat, wenn die Reaktionszeit sich ändert, die Fahrzeuglänge sich vergrössert, gute Bremsen ($a = 8\,\mathrm{m/s^2}$) vorhanden sind?

Notizen zu Übung 8.5. Wir nehmen $\left(\frac{3600v}{L+tv+\frac{v^2}{2a}}\right)^{-1} = \frac{L+tv+\frac{v^2}{2a}}{3600v}$ und leiten ab:

$$\frac{(t+\frac{v}{a})3600v-(L+tv+\frac{v^2}{2a})\cdot 3600}{(3600v)^2} = \frac{(t+\frac{v}{a})-(L/v+t+\frac{v}{2a})}{3600v} = \frac{\frac{v}{2a}-\frac{L}{v}}{3600v}$$

Wir haben den Extremwert bei $\frac{v}{2a}-\frac{L}{v}=0 \Leftrightarrow v=\sqrt{2La}$. Nach unserem Modell spielen nur die Bremsen und die Fahrzeuglänge eine Rolle.

Übung 8.6.

Die Funktion

$$f(t) = c\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

mit $c>0, b>a>0, t\geq 0$ wird gebraucht, um die Konzentration einer Drogeninjektion in die Blutbahn in Abhängigkeit der Zeit t zu beschreiben.

a) Überprüfe den Funktionsterm für $t=0$ und zeige, dass $f(t)>0$ für $t>0$ ist.

b) Zu welchem Zeitpunkt (in Abhängigkeit der drei Parameter a, b und c) erreicht die Konzentration ihr Maximum?

Notizen zu Übung 8.6.

a) $f(0)=0$ und weil $b>a$ ist $e^{-at}>e^{-bt}$ und mit $c>0$ also $f(t)>0$.

b) Einen Extremwert hat man unter der Bdeingung: $\dot{f}(t)=c(e^{-at}(-a)+e^{-bt}(b))=0$. Es folgt $\frac{b}{a}=e^{(b-a)t}$ und somit $(b-a)t=\ln(\frac{b}{a})$. Schliesslich $t=\frac{\ln(\frac{b}{a})}{b-a}$

Übung 8.7.

Durch die Funktionen vom Typ

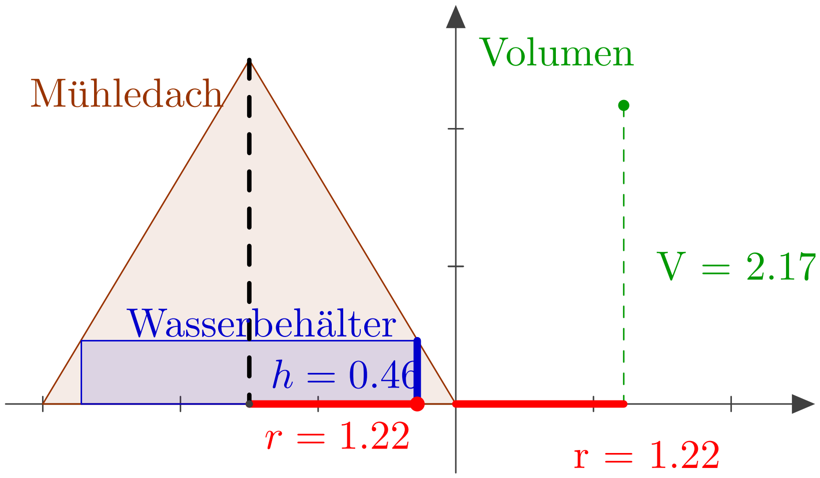
$$f(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$

mit $t>0$ lassen sich Schwingungen beschreiben, die durch nicht zu starke Reibung abgebremst werden. Berechne das erste Maximum und das erste Minimum der Funktion, falls $A=1$, $\alpha=0.3$ und $\omega=2$.

Notizen zu Übung 8.7. $\dot{f}(t)=A(e^{-\alpha t}\cdot(-\alpha)\sin(\omega t)+e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\cdot\omega)\stackrel{!}{=}0$. Daher muss $\frac{\sin(\omega t)}{\cos(\omega t)}=\frac{\omega}{\alpha}$ und schliesslich $t=\frac{1}{\omega}\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$.

Übung 8.8.

In einer alten Mühle soll ein Kaffee eröffnet werden. Den zylinderförmigen Wassertank, der im kegelförmigen Dach untergebracht wird, will man so bauen, dass sein Volumen möglichst gross wird. Der Durchmesser des Dachs beträgt 3 m und die Höhe 2.5 m. Wie müssen die Abmessungen des Tanks gewählt werden und welches Volumen fasst er?



Notizen zu Übung 8.8. Die Dachschräge modellieren wir zu $f(x) = -\frac{2.5}{1.5}x + 2.5$. Das Volumen des Behälters ist $V = \pi r^2 \cdot (-\frac{2.5}{1.5}r + 2.5) = -\frac{5\pi}{3}r^3 + \frac{5\pi}{2}r^2$. Der Extremwert $V'(r) = -5\pi r^2 + 5\pi r \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $r_1 = 0$ und $r_2 = 1$. Wir nehmen also $r = 1$ und damit $h = -\frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$, $V = \frac{5\pi}{6}$.

A. Klassiker Tetrapack

Übung A.1.

bschliessend zu Extremalaufgaben wollen wir untersuchen, ob die Liter-Milchbeutel optimale Abmessungen haben, das heisst bei zur Verfügung stehendem Verpackungsmaterial den grösstmöglichen Volumeninhalt aufweisen. Wir werden dabei auf ein Ergebnis stossen, dass uns auf den ersten Blick erstaunen mag.

B. Symmetrie

Wir unterscheiden zwei Arten von Symmetrien, die bei Graphen von Funktionen auftauchen können. Diese Charakterisierungen gelten für Funktionen allgemein, nicht bloss für ganzrationale Funktionen.

B.1. Achsialsymmetrie bezüglich y-Achse

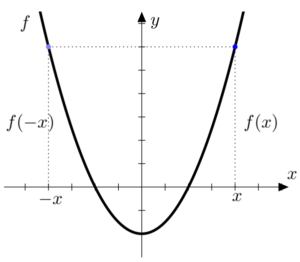
Satz 2.1: Achsialsymmetrie

Der Graph einer Funktion f ist genau dann achsialsymmetrisch zur y-Achse, wenn

$$f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt.

Beweis. Man veranschauliche sich den Sachverhalt an einem kleinen Bildchen. □



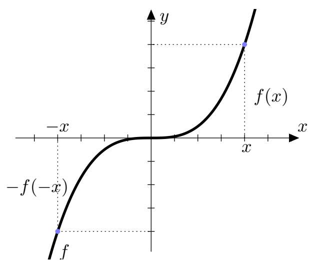


Abbildung 11: Achsensymmetrie bezüglich y-Achse, Zentralsymmetrie zu Ursprung

B.2. Zentralsymmetrie bezüglich Ursprung

Satz 2.2: Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn

$$-f(-x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt.

Beweis. Man veranschauliche sich den Sachverhalt ebenfalls an einem kleinen Bildchen. □

Um das qualitative Verhalten einer Funktion besser zu verstehen, lohnt es sich, ihren Graphen zu betrachten. Dazu müsste man die Werte aus einer umfangreichen Wertetabelle in ein Koordinatensystem übertragen. In vielen Fällen kann man den Graphen schnell skizzieren, wenn man nur einige markante Punkte des Graphen kennt und untersucht, wie sich die Funktionswerte verhalten, falls die x-Werte gegen ∞ bzw. $-\infty$ streben.

Übung B.1.

Nenne eine gerade und eine ungerade Winkelfunktion.

Notizen zu Übung B.1. Man nehme beispielsweise Sinus als punktsymmetrische Funktion zum Ursprung und Cosinus als achsialsymmetrische Funktion zur y-Achse.

C. Mathematik und Wirtschaft

Die in den Wirtschaftswissenschaften häufig benutzten Funktionen sind

- Kostenfunktion $K(x)$
- Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$
- Preisfunktion $p(x)$
- Erlösfunktion $E(x) = x \cdot p(x)$
- Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$
- Angebotsfunktion $p_A(x)$
- Nachfragefunktion $p_N(x)$

Verändert man eine Produktion von x_0 Einheiten auf x_1 Einheiten, so entsteht ein Kostenzuwachs ΔK. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x_1) - K(x_0)}{x_1 - x_0}$$

entspricht dem durchschnittlichen Kostenzuwachs. Wenn die Funktion K differenzierbar ist, gibt der differenzialquotient

$$K'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{K(x_0 + h) - K(x_0)}{h}$$

die Grenzkosten, auch marginale Kosten genannt, bei der Produktion von x_0 Einheiten an.Durch $K'(x_0)$ erhält man die Produktionskosten für eine zusätzliche Einheit, wenn schon x_0 Einheiten produziert werden. In ganz ähnlicher Weise sind marginaler Preis, Grenzerlös, Grenznutzen oder Grenzneigung zum Konsum durch Differenzialquotienten definiert. Beispielsweise gibt

$$\frac{dG(x_0)}{\mathrm{d}x}$$

in erster Näherung an, um wie viele Einheiten sich der Gewinn verändert, wenn die unabhängige Variable, die Ausbringung eines Gutes, sich um eine Einheit, von x_0 auf $x_0 + 1$, verändert.

D. Vom Regenbogen

Eine Extremwertaufgabe, die im Regenbogen steckt.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis