① trivial

② $A(2|0|3)$, $B(1|-1|5)$, $C(3|-2|0)$

Ich nehme $\vec{A}$ als Stütze und $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ als Spannvektoren.

$\rightarrow E: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Sie dürfen nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen.

③ a) Viertelebene, da $s^2, t^2 \geq 0 \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

b) Halbebene mit $t^2 \geq 0$

c) Band, wegen $-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$

④ $g: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g \cap h: \rightarrow$

$3 - 4t = 4 + 2s \quad (1)$

$1 + t = -1 + 3s \quad (2) \quad \rightarrow t = -2 + 3s$

$\rightarrow 3 - 4(-2 + 3s) = 4 + 2s$

$11 - 12s = 4 + 2s$

$7 = 14s \rightarrow s = \frac{1}{2} \rightarrow t = -\frac{1}{2}$

Check 3: $5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 3 \overset{\checkmark}{=} 4 + \frac{1}{2} \cdot (-1)$

Schnittpunkt: $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

Die Ebene wird durch die Richtungsvektoren aufgespannt:

$\rightarrow E: \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

⑤ $(3|0|0)$, $(0|5|0)$, $(0|0|2) \rightarrow E: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Koordinatenform: $\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\6\\15\end{pmatrix} \rightarrow 10x+6y+15z+D=0$

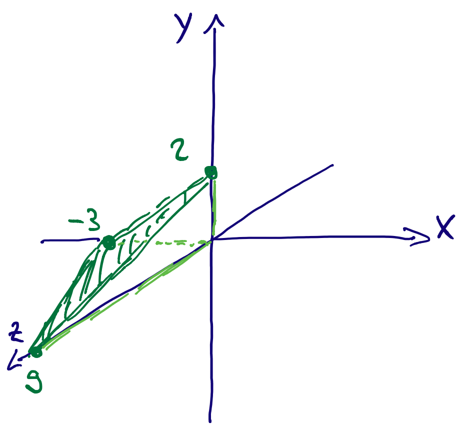
$\longrightarrow 10\cdot 3 + D = 0 \rightarrow D = -30 \rightarrow E: 10x+6y+15z-30 = 0$

$T \in E$? : $10\cdot(-12)+6\cdot 15+15\cdot 4-30 = -120+90+60-30 = 0$ ja

(6) $E: 6x-9y-2z+18=0$

x-Achse: $6x+18=0 \rightarrow x=-3$, y-Achse: $y=2$, z-Achse: $z=9$

Spurgerade $z=0$: $\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, ...



$$V = \frac{G\cdot h}{3} = \frac{3\cdot 9}{6}\cdot 2 = 9$$

Beweis Satz 15.1.: Seien $P_1, P_2 \in E$ und $\vec{n} = (A \mid B \mid C)$

$\rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}p_{2x}-p_{1x}\\p_{2y}-p_{1y}\\p_{2z}-p_{1z}\end{pmatrix} \in E \rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = A(p_{2x}-p_{1x})+\dots+C(p_{2z}-p_{1z})$

$= A\,p_{2x} + B\,p_{2y} + C\,p_{2z} - (A\,p_{1x} + B\,p_{2y} + C\,p_{2z})$

Wegen $P_1, P_2 \in E$ gilt z.B. für P_1: $Ap_{1x}+Bp_{1y}+Cp_{1z}+D=0$, also $D = -(Ap_{1x}+Bp_{1y}+Cp_{1z})$; analog für P_2

$\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2} = -D-(-D) = 0$, also ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E. □

Beweis zu Satz 15.2. : Sei $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E. Nimm zwei beliebige Punkte $P, Q \in E$. Der Vektor $\vec{PQ}$ liegt in E und es muss $\vec{n} \cdot \vec{PQ} = 0$ gelten:

$\vec{n} \cdot \vec{PQ} = n_x(q_x - p_x) + n_y(q_y - p_y) + n_z(q_z - p_z) = 0$

$\rightarrow n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z - (n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) = 0$

$\rightsquigarrow n_x q_x + n_y q_y + n_z q_z + D - (n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z + D) = 0$

$\rightarrow$ Wegen $P, Q \in E$ folgt $n_x = A$, $n_y = B$ und $n_z = C$ $\square$

7 $P(2|2|-2)$ $\quad E: x - 2y - 3z = 0$

parallel sein heisst, "denselben" Normalenvektor aufzuweisen:

$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow E': x - 2y - 3z + D = 0$

$\xrightarrow{P \in E'} 2 - 4 + 6 + D = 0 \rightarrow D = -4 \rightarrow E': x - 2y - 3z - 4 = 0$

b) $A(0|0|4)$, $B(2|0|-1)$, $C(4|5|0)$

$\rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow E: 25x - 12y + 10z + D = 0$

$\xrightarrow{A \in E} 40 + D = 0 \rightarrow D = -40 \rightarrow E: 25x - 12y + 10z - 40 = 0$

8 $\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow E: -2x + y + 2z + D = 0$

$P(-6|10|16) \rightarrow 12 + 10 + 32 + D = 0 \rightarrow D = -54$

$\rightarrow E: -2x + y + 2z - 54 = 0$

9 a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -29 \\ 41 \end{pmatrix} \rightarrow E: 13x - 29y + 41z + D = 0$

$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \in E} 13 - 58 + 246 + D = 0 \rightarrow D = -101 \rightarrow E: 13x - 29y + 41z - 101 = 0$

$g: \begin{pmatrix} 6 - 4t \\ 4 + 3t \\ -5 + 7t \end{pmatrix} \rightarrow 13(6 - 4t) - 29(4 + 3t) + 41(-5 + 7t) - 101 = 0$

$\rightarrow 78 - 52t - 116 - 87t - 205 + + 287t - 101 = 0$

$\rightarrow -344 + 148t = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow D = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$; Rest analog

(10) $A(4|1|2)$, $B(2|6|3)$, $C(-3|2|4)$ $\quad P(0|0|5)$, $Q(3|9|-1)$

$$\rightarrow E \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 33 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \rightarrow E: 3x - y + 11z + D = 0$$

$A \in E$

$$\rightarrow 3 \cdot 4 - 1 + 11 \cdot 2 + D = 0 \rightarrow D = -33 \rightarrow E: 3x - y + 11z - 33 = 0$$

$$g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 3(t) - (3t) + 11(5 - 2t) = 55 - 22t = 0 \rightarrow t = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow D = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 6/5 \\ 4\ 1/5 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ vermutlich nein (prüfe noch, ob D im Δ liegt)

(11) a) $E_1: x - 2y + z + 3 = 0$, $E_2: x + y - 3z - 2 = 0$

Wähle aus E_1 $A(-3|0|0)$, $B(0|\frac{3}{2}|0)$, $C(0|0|-3)$.

$$\rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow g_1: \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2: \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{g_1 \cap E_2} (-3+3t) + \left(\frac{3}{2}t\right) - 2 = 0 \rightarrow 4.5t - 5 = 0 \rightarrow t = \frac{10}{9}$$

$$\rightarrow g_1\left(\frac{10}{9}\right) = \begin{pmatrix} 3.\overline{3} \\ 1.\overline{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{g_2 \cap E_2} (-3 + 3s) - 3 \cdot (-3s) - 2 = 0 \rightarrow 12s - 5 = 0 \rightarrow s = \frac{5}{12}$$

$$\rightarrow g_2\left(\frac{5}{12}\right) = \begin{pmatrix} -1.75 \\ 0 \\ -1.25 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Schnittgerade}: \begin{pmatrix} 3.\overline{3} \\ 1.\overline{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5.0\overline{8} \\ 1.\overline{6} \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

(12) $E_1: x - 2y = 4$, $E_2: x - y + z = -5$, $E_3: px + y + 3z + q = 0$

$$E_1 = E_2: \quad x - 2y - 4 = x - y + z + 5$$

$$0 = y + z + 9 \quad \rightarrow y = -z - 9$$

$$E_1 = E_3 : \quad x - 2y - 4 = px + y + 3z + q$$

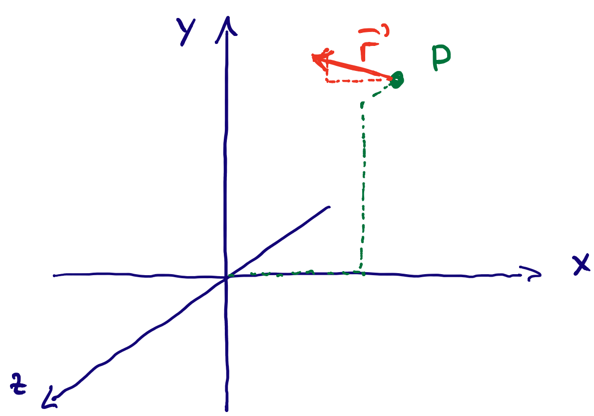
$$0 = x(p-1) + 3y + 3z + q + 4$$

$$= x(p-1) + 3(-9-z) + 3z + q + 4$$

$$= x(p-1) + q - 23$$

$$\Rightarrow p = 1, \quad q = 23$$

(13) $P(4|5|-1)$, $\vec{r}'(-2|1|0.5)$



xy Ebene $\rightarrow z = 0$

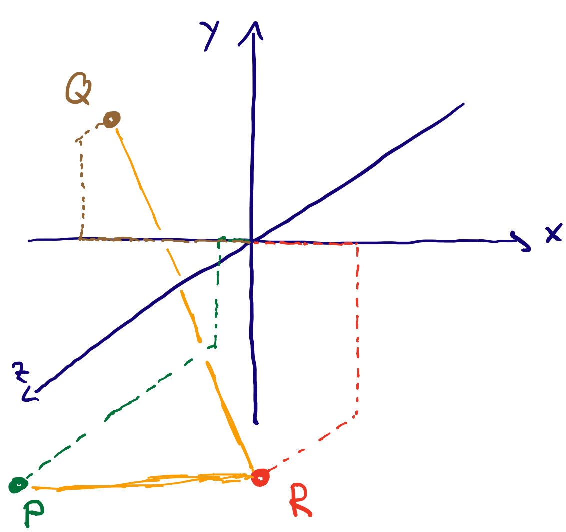
Lichtstrahl $\ell : \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

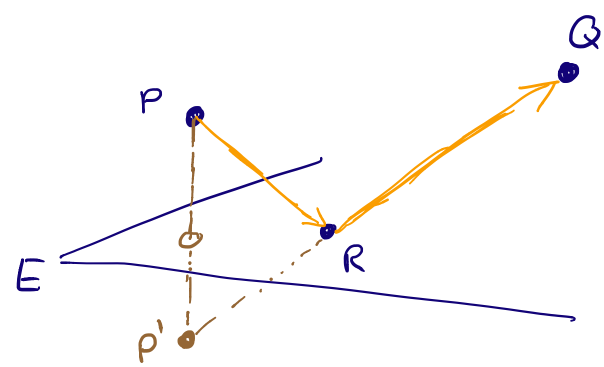
$\rightarrow -1 + 0.5t = 0 \rightarrow t = 2$

Reflexionspunkt : $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtung reflektiert $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

(14) $P(-1|-3|7)$, $R(3|-5|3)$, $Q(-5|3|-1)$





$\rightarrow \vec{RQ} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

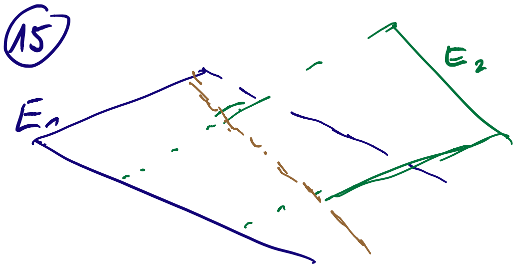
$\vec{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

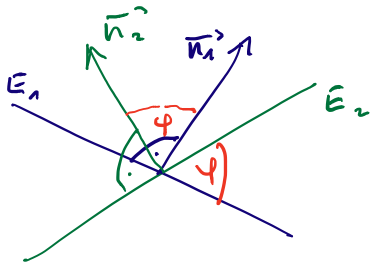
$$\Rightarrow P' = R - \tfrac{1}{2}\vec{RQ} = \begin{pmatrix}3\\-5\\3\end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-8\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-9\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{PP'} = \begin{pmatrix}8\\-6\\-2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}4\\-3\\-1\end{pmatrix} \perp E \rightarrow E: 4x-3y-z+D=0$$

$$\xrightarrow{R\in E} 4\cdot 3 - 3\cdot(-5) - 3 + D = 0 \rightarrow D = -24 \rightarrow E: 4x-3y-z-24=0$$

(15)





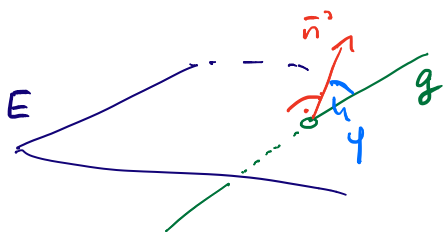
$$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{n_1\cdot n_2}\right)$$

(16) $E_1: 2x+3y+4z-6=0 \qquad E_2: 3x-2y-z+4=0$

$$\rightarrow \vec{n_1} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{n_2} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{14}}\right) =$$

Für b) nimmt man $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(17)



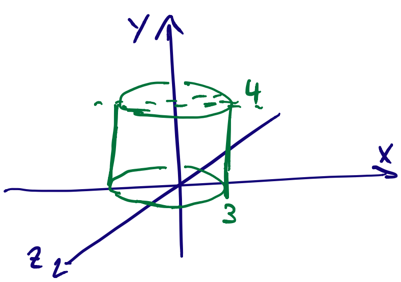
$g: \vec{s} + t\vec{r} \qquad E \sim \vec{n}$

$$\psi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r\cdot n}\right)$$

(18) a) $E: 2x+3y+4z-6=0 \quad , \quad g: \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{30}}\right) =$$

(19)

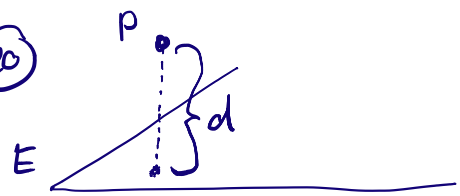


$A(0|4|4)$, $P(6|-4|12)$, $Q(1|1|4)$

$l: \begin{pmatrix}6\\-4\\12\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-8\end{pmatrix}$ für Schatten von Q

Für Schatten von A nimmt man den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-6\\8\\-8\end{pmatrix}$

(20)



Ich nehme die Gerade $P + t\cdot\vec{n}$ und schneide sie mit E:

$$A(p_x + At) + B(p_y + Bt) + C(p_z + Ct) + D = 0$$

$$t(A^2 + B^2 + C^2) + Ap_x + Bp_y + Cp_z + D = 0$$

$$\rightarrow \quad t_s = -\frac{Ap_x + Bp_y + Cp_z + D}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{\vec{n}\cdot\vec{P} + D}{n^2}$$

Ferner: $d = |t_s \cdot |\vec{n}|| = |t_s \cdot n| \Rightarrow d = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{P} + D}{n}\right|$ $\square$

(21) $A(10|-9|7)$ $\quad E: 2x - 2y + z + 6 = 0 \quad \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$d = \left|\frac{20 + 18 + 7 + 6}{3}\right| = \left|\frac{51}{3}\right| = 17$$

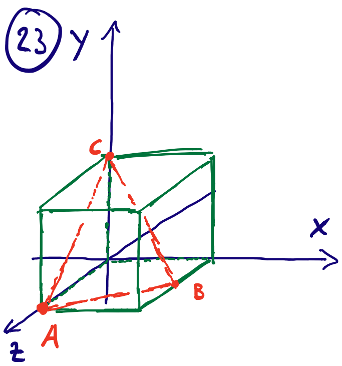
(22) $E: 2x - y + 2z - 9 = 0 \quad \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) $d = \left|\frac{-9}{3}\right| = 3$

b) $d = \left|\frac{12 + 24 - 9}{3}\right| = 9$, $\quad t_s = -\frac{27}{9} = -3$

Fusspunkt: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(23)



b) $A(0|0|1)$, $B(1|0|0.5)$, $C(0|1|0)$

c) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow E: x + 2y + 2z + D = 0 \xrightarrow{A \in E} D = -2 \rightarrow E: x + 2y + 2z - 2 = 0$

$\rightarrow d = \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

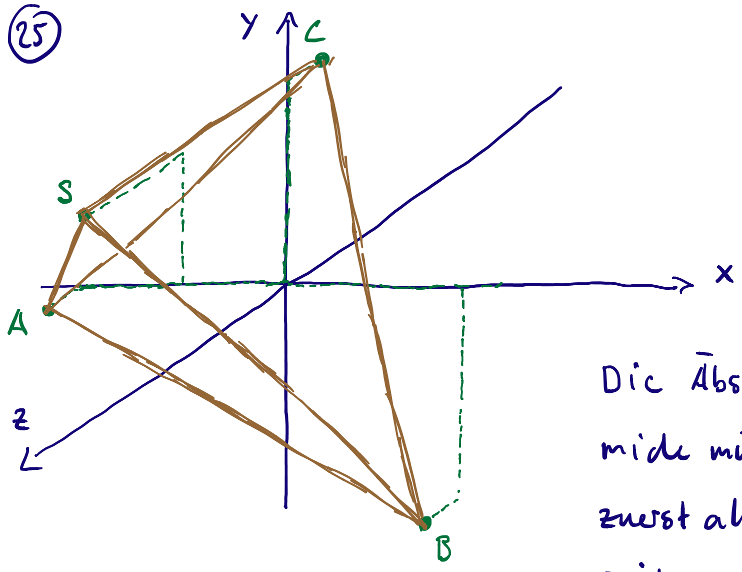
d) $d = \left|\frac{3}{3}\right| = 1$

e) rechnen ...

(24) $P(13|4|9)$, $E: 12x+2y+5z=0$ $\to$ Normale: $\begin{pmatrix}13\\4\\9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\2\\5\end{pmatrix}$

Nun setzt man die Abstände zu E_1 und E_2 gleich und löst die Betragsgleichungen: $|d_1| = |d_2|$

(25)



$A(-12|0|-2)$
$B(12|-12|-2)$
$C(0|12|-2)$
$S(-4|4|6)$

Die Abstände von allen Seiten der Pyramide müssen gleich sein. Ich bestimme zuerst alle Ebenengleichungen für die Seiten:

$$ABS: \vec{SB} \times \vec{SA} = \begin{pmatrix}16\\-16\\-8\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\-4\\-8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\to x+2y-2z+D=0 \xrightarrow{A \in E} D=8 \to E_{ABS}: x+2y-2z+8=0$$

Analog: $E_{ABC}: z+2=0$, $E_{ACS}: 2x-2y-z+22=0$
$E_{BCS}: -2x-y-2z+8=0$

Für die 4 Ebenen setzt man beispielsweise $d_1=d_2$, $d_1=d_3$ und $d_1=d_4$, was ein 3×3 Gleichungssystem liefert. Als Lösung habe ich $x=-3$, $y=3$, $z=1$ erhalten; also liegt der Mittelpunkt in $M(-3|3|1)$. Der Radius folgt als Abstand von M zu einer der 4 Seitenebenen und ist 3.

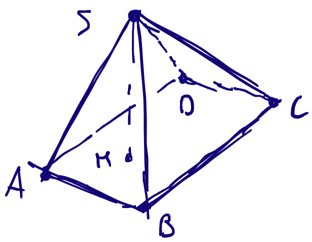
(Eine wunderbare Übung zur Repetition des Quartastoffs)

26 a) $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ (1) $\rightarrow 5 = \sqrt{3^2+z^2} \rightarrow z = \pm 4$

$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ (2) $\rightarrow 5x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$

$\vec{BD} = -\vec{AB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix}$

c) 

$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{MS}$

$\vec{MS} = \lambda(\vec{AB} \times \vec{AD})$

$|\vec{MS}| = 10$

$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix}0\\-20\\15\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$

$\rightarrow |\vec{MS}| = \left|\lambda\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}\right| = \lambda \cdot \sqrt{25} = 5\lambda = 10 \rightarrow \lambda = 2$

$\rightarrow \vec{MS} = 2\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-8\\6\end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{AS} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2.5\\-6.5\\8\end{pmatrix}$

d) $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 10 = 83\frac{1}{3}$

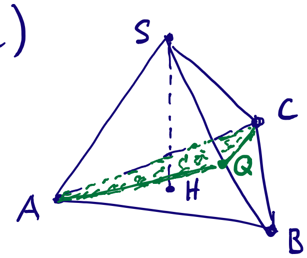
27 a) $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}\right) = 63.4°$ $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{AB \cdot BC}\right) = 90°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 26.6°$, $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(\alpha) = 1$

b) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{AB} \times \vec{AS} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{2}}\right) = 45°$

c)



$$\vec{AH} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} \qquad \vec{AH} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ \lambda+\mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HS} \cdot \vec{AB} = 0 \quad , \quad \vec{HS} \cdot \vec{AC} = 0$$

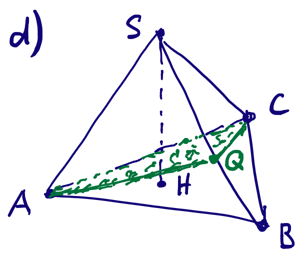
$$\vec{HS} = -\vec{AH} + \vec{AS} = \begin{pmatrix} 2\mu-2 \\ -\lambda-\mu \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\mu-2 \\ -\lambda-\mu \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda - \mu = 0 \rightarrow \lambda = -\mu$$

$$\begin{pmatrix} 2\mu-2 \\ -\lambda-\mu \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\mu + 4 - \lambda - \mu = 0 \rightarrow 4 - \lambda - 5\mu = 0 \rightarrow \mu = 1 \rightarrow \lambda = -1$$

$$\rightarrow \vec{AH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{HS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| \cdot \left| \vec{HS} \right| = \frac{2}{3}$$

d)



$$\vec{AQ} = \vec{AB} + \eta \vec{BS} \quad , \quad A = \frac{1}{2} \left| \vec{AC} \times \vec{AQ} \right|$$

$$= \begin{pmatrix} -2\eta \\ 1-\eta \\ 2\eta \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \times \vec{AQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\eta \\ 1-\eta \\ 2\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\eta \\ 4\eta \\ 4\eta-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{4\eta^2 + 16\eta^2 + 16\eta^2 - 16\eta + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{36\eta^2 - 16\eta + 4}$$

$$= \sqrt{9\eta^2 - 4\eta + 1} = A(\eta)$$

Jetzt kann man die Parabel minimieren → Scheitel

$$\rightarrow \eta_s = -\frac{-4}{2 \cdot 9} = \frac{2}{9} \quad \rightarrow \vec{AQ} = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 7/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$