92. Cogito, ergo sum

René Descartes war eine bemerkenswerte Persönlichkeit. Er beschloss schon in jungen Jahren, sein Leben ganz der Wissenschaft zu widmen. Im „Discours de la méthode" von 1637 findet man nicht nur die Grundlagen seiner Philosophie („Cogito, ergo sum"). Das Werk hat auch drei gewichtige Anhänge, in denen er in vielen konkreten Fallstudien die Fruchtbarkeit seiner neuen Methode demonstrieren wollte.

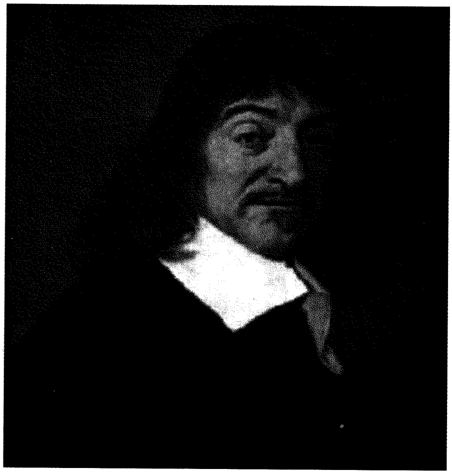

Abbildung 77: René Descartes, 1596 – 1650

Einer dieser Anhänge widmet sich der Geometrie. Da finden sich einige Gedanken, die für die weitere Entwicklung der Mathematik ganz fundamental sein sollten. Der wichtigste ist zweifellos der, Geometrie und Algebra miteinander in Beziehung zu setzen. Descartes erkannte, dass sich geometrische Fragestellungen in Gleichungen übersetzen lassen und dass das Lösen von Gleichungen in vielen Fällen eine geometrische Interpretation hat. Dieser Ansatz erwies sich als sehr fruchtbar, denn so konnte man hoffen, Probleme durch Übersetzung in ein anderes Gebiet lösen zu können. Als besonders spektakuläres Beispiel, in dem dieses Verfahren angewendet wird, gilt der Beweis von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises[83]. Da die Kreiszahl π zu den besonders komplizierten Zahlen gehört und nur vergleichsweise einfache Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, kann niemand einen Kreis mit geometrischen Konstruktionen in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.

Das war zur Zeit von Descartes allerdings noch Zukunftsmusik, man wusste noch viel zu wenig über Zahlen. Selbst negative Größen spielten noch eine Sonderrolle,

[83] Vgl. Beitrag 33.

und beim Bearbeiten der auftretenden Gleichungen musste ziemlich schwerfällig zwischen „richtigen“ und „falschen“ Lösungen unterschieden werden, je nachdem, in welchem Zahlbereich sie zu finden waren.

Die stürmische Entwicklung der Naturwissenschaften im 17. Jahrhundert ist ohne die Vorarbeiten von Descartes undenkbar. Kaum zu glauben, dass er „eigentlich“ ein mathematischer Laie war, der sich sein gesamtes Wissen selbst angeeignet hatte.

Übrigens: Das „kartesische Koordinatensystem“, das wir alle in der Schule kennen gelernt haben, ist bei Descartes noch nicht zu finden. Es dauerte noch bis zum 18. Jahrhundert, bis man erkannte, dass man die verschiedenen, auf Einzelfälle zugeschnittenen Konstruktionen in der „Géometrie“ auf diese Weise einheitlich behandeln kann.

Der Satz des Pythagoras wird „übersetzt“

Als Beispiel für die Kraft der Übersetzung Geometrie-Algebra soll gezeigt werden, wie man den *Satz von Pythagoras* ganz einfach beweisen kann, wenn man ihn in Gleichungen für Zahlen übersetzt.

Es soll also gezeigt werden, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten a, b, c die berühmte Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Dabei soll, wenn die Seitenlängen a und b verschieden sind, b die größere Zahl sein.

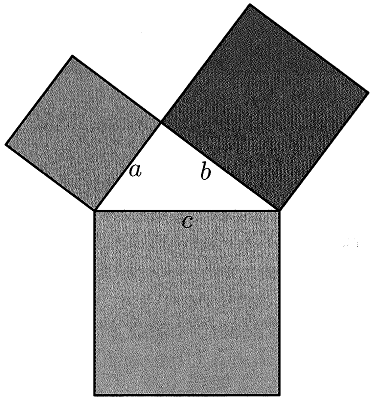

Abbildung 78: Der Satz des Pythagoras: Es ist $a^2 + b^2 = c^2$

Schlüssel zur Lösung ist die Betrachtung eines Quadrats mit der Kantenlänge c, in das vier unserer Dreiecke eingezeichnet sind:

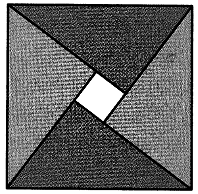

Abbildung 79: Der Satz des Pythagoras: So kann man den Beweis sehen

Die vier Dreiecke lassen in der Mitte ein kleineres, schräg liegendes Quadrat frei. Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass es die Kantenlänge $b - a$ hat. Das bedeutet: Die Fläche des großen Quadrats ist gleich vier mal der Dreiecksfläche plus ein Quadrat mit der Kantenlänge $b - a$. Da ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b die Fläche $a \cdot b/2$ hat, heißt das in Formeln:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2.$$

Damit sind wir in der Algebra angekommen. Erinnert man sich noch daran, dass $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ gilt, so haben wir wirklich

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2 = 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2 = a^2 + b^2$$

bewiesen.

Eine kompliziertere geometrische Argumentation wurde damit durch eine einfache Rechnung ersetzt.

Durch das Beispiel sollte nicht der Eindruck entstehen, dass sich Descartes nur mit vergleichsweise einfachen Problemen beschäftigt hätte. Im Gegenteil, die allermeisten der von ihm in der „Géometrie“ behandelten Fragen sind so tiefliegend, dass eine Lösung für viele Mathematiker auch heute – nach fast vierhundert Jahren – noch schwierig zu finden wäre.