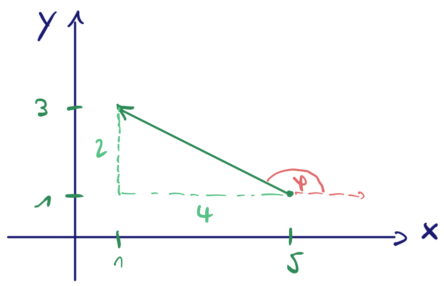
LÄNGE UND RICHTUNG

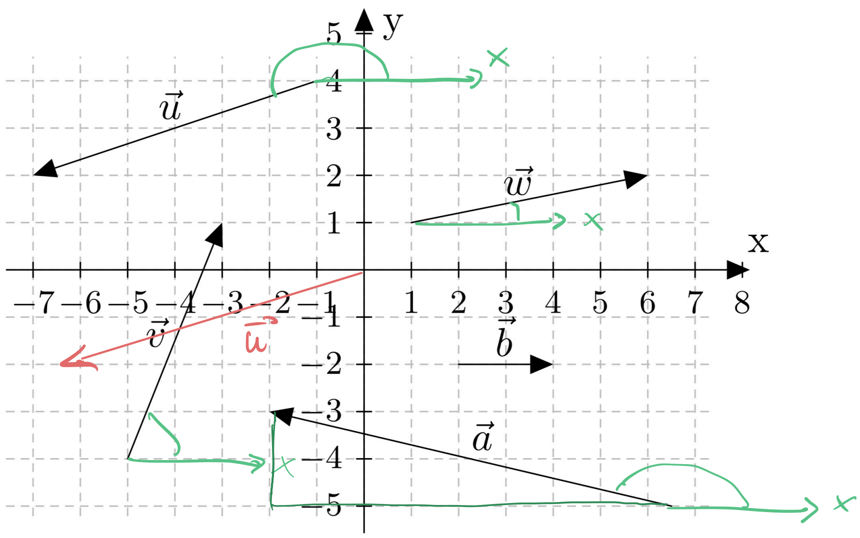


Länge: $\sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = \underline{\underline{2\sqrt{5}}}$

Richtung: $\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx 180° - 26.6°$

$= \underline{\underline{153.4°}}$

BETRAG UND RICHTUNG



z.B. $\vec{a}$:

Länge: $\sqrt{8^2+2^2} = \sqrt{68}$

$= 2\sqrt{17} \approx \underline{\underline{8.1}}$

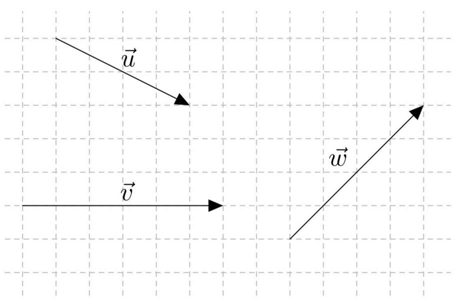
Richtung:

$\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{2}{8}\right)$

$\approx 180° - 14° = \underline{\underline{166°}}$

PFEILCHEN ZEICHNEN

Übung 5 (Pfeilchen zeichnen)**.** Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$.



Konstruiere

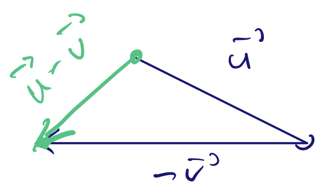
(a) $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$

(b) $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + 0.5\vec{w}$

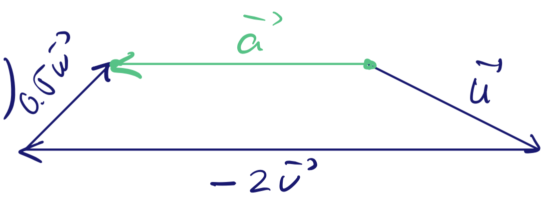
(c) $\vec{b} = 3\vec{u} + 1.5\vec{v} - 4\vec{w}$

(d) $\vec{c}$ so, dass $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{c} = \vec{w}$ gilt.

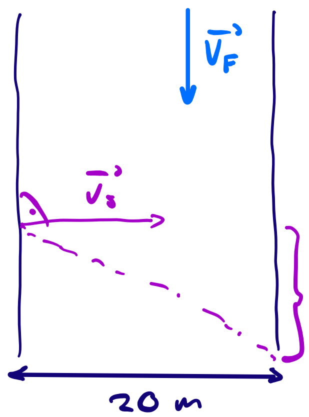
a)



b)



AB IN DIE AARE!



$|\vec{v_F}| = 1.2\ m/s$

$|\vec{v_s}| = 1.5\ m/s$

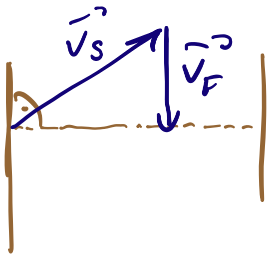
Schnellster Weg

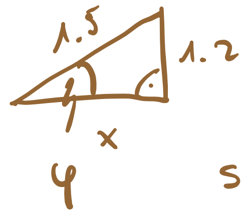
$$v = \frac{s}{t} \iff t = \frac{s}{v} = \frac{20}{1.5} = \underline{\underline{13\tfrac{1}{3}\ \text{sek}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = v \cdot t = 1.2 \cdot 13\tfrac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{40}{3} = \underline{\underline{16\ m}}$$

Abdrift



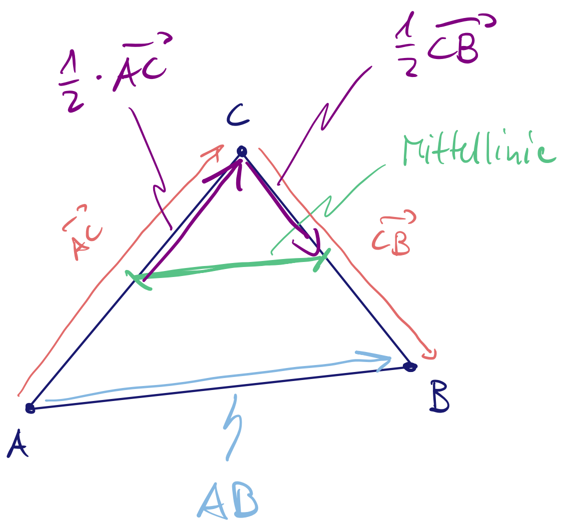


$$\sin(\varphi) = \frac{1.2}{1.5} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{1.2}{1.5}\right) \approx \underline{\underline{53^\circ}}$$

$$x = \sqrt{1.5^2 - 1.2^2} = \underline{\underline{0.9\ m/s}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{20}{0.9} \approx \underline{\underline{22\tfrac{2}{9}\ \text{sek}}}$$

BEWEIS MITTELLINIE



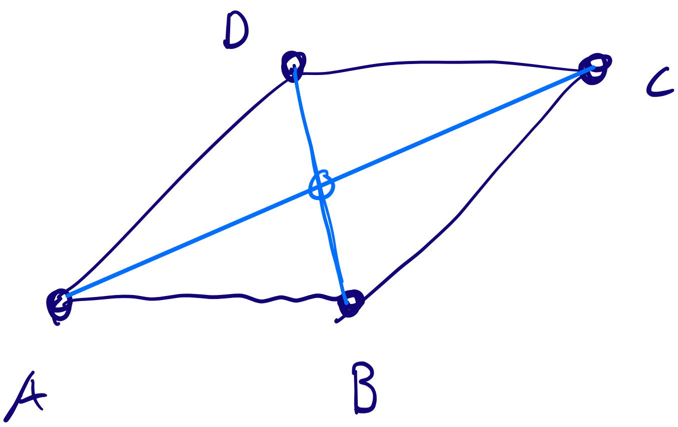
$$\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$$

$$\tfrac{1}{2}\vec{AC} + \tfrac{1}{2}\vec{CB} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{AC} + \vec{CB}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\vec{AB}$$

d.h. die Mittellinie ist halb so lang und parallel zur entsprechenden Grundlinie. $\square$

Beweis halbierte Diagonalen



Voraussetzung: 4-Eck und die beiden Diagonalen halbieren sich

Zeige: Dann muss es sich bei diesem Viereck um ein Parallelogramm handeln.

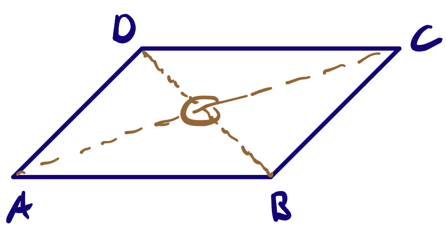
z.B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$

also sind DC und AB parallel und gleich lang. $\square$

Parallelogramm – Eigenschaft



Parallelogramm (Voraussetzung)

z.z.: Diagonalen halbieren sich

Wir wissen, dass z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Es ist $\overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{AC} + y \cdot \overrightarrow{DB}$ und

$\overrightarrow{DC} = (1-y) \cdot \overrightarrow{DB} + (1-x) \cdot \overrightarrow{AC}$

Somit $x \cdot \overrightarrow{AC} + y \cdot \overrightarrow{DB} = (1-x) \cdot \overrightarrow{AC} + (1-y) \cdot \overrightarrow{DB}$

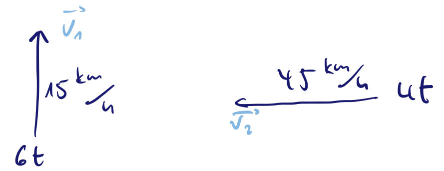
$\Rightarrow \quad x = 1-x \quad$ und $\quad y = 1-y$

$2x = 1 \qquad 2y = 1$

$x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}$ $\square$

D.h. die Diagonalen halbieren sich.

LASTWAGEN



Skript lesen! → Def Impuls und Satz Impulserhaltung

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{p}_{vor} = m_1 \cdot \vec{v_1} + m_2 \cdot \vec{v_2} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{10}_{6+4} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -180 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$

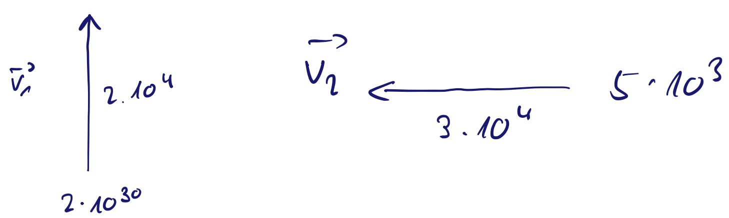
$$\begin{pmatrix} -180 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 v_x \\ 10 v_y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $v_x = -18$, $v_y = 9$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -18 \\ 9 \end{pmatrix}$ → $|\vec{v}| = \sqrt{18^2 + 9^2} =$

$\varphi = 180° - \arctan\left(\frac{9}{18}\right) =$

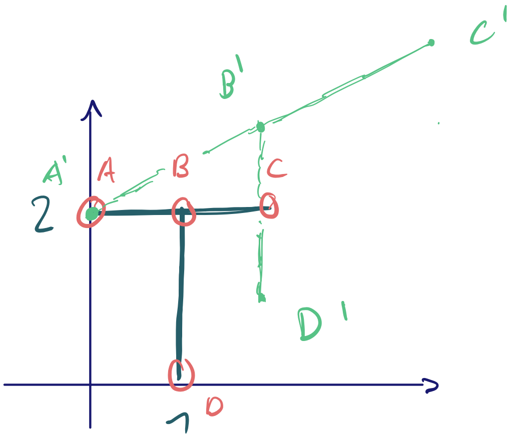
STERN



$$\vec{p}_{vor} = 2 \cdot 10^{30} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 10^4 \end{pmatrix} + 5 \cdot 10^{30} \cdot \begin{pmatrix} -3 \cdot 10^4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \cdot 10^{34} \\ 4 \cdot 10^{34} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{nach} = 7 \cdot 10^{30} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \overset{!}{=} 7 \cdot 10^{30} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2\frac{1}{7} \cdot 10^4 \\ \frac{4}{7} \cdot 10^4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}\ \text{nachher}}$$

VERZERRE!



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{e_x} + 2\vec{e_y}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_x} + 2\vec{e_y}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e_x} + 2 \cdot \vec{e_y}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{e_x} + 0 \cdot \vec{e_y}$$

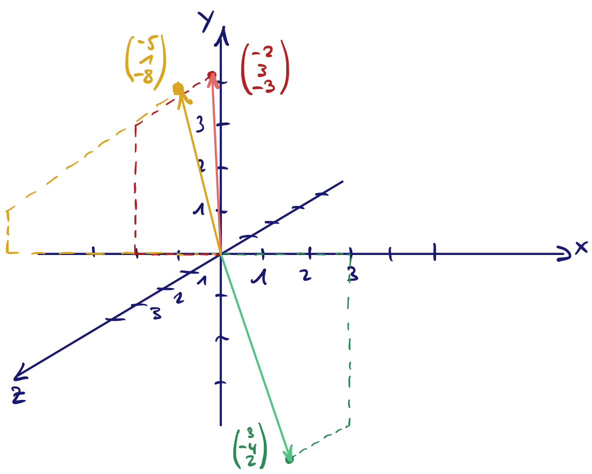
$$\rightarrow \quad \vec{A'} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B'} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C'} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D'} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ORTSVEKTOR UND BETRAG



a) $$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{9+16+4} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}$$

$$\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9+9} = \underline{\underline{\sqrt{22}}}$$

b) $$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+1+64} = \sqrt{90} = \underline{\underline{3\sqrt{10}}}$$

BASISVEKTOREN

$$\vec{e_x} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \vec{e_y} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \quad \vec{e_z} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Juhuu, 30

$\vec a = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} - 0.5\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}}}$, $|\vec a| = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$

PARALLEL?

$3\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\21\\12\end{pmatrix} = \vec w$ → parallel

b) $-0.5\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix} \neq \vec w$ → nicht parallel

PARALLEL EINRICHTEN

a) $\vec v = \begin{pmatrix}2\\-6\\15\end{pmatrix}$ → $4\cdot v_x = w_x$ → $\vec w = 4\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\15\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}8\\-24\\60\end{pmatrix}}}$

b) → $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot v_y = w_y$ → $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\vec v = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2/3\\2\\-5\end{pmatrix}}}$

ZWISCHEN PUNKTEN

a) $P(10|-6|7)$, $Q(2|-2|8)$ → $\vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}}}$ → $\vec{QP} = (-1)\cdot\vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}8\\-4\\-1\end{pmatrix}}}$

b) $|\vec{PQ}| = \sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{81} = \underline{\underline{9}}$

c) $\vec{PR} = R-P = \begin{pmatrix}x-10\\-1+6\\5-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-10\\5\\-2\end{pmatrix}$

→ $|\vec{PR}| = \sqrt{(x-10)^2+5^2+2^2} \overset{!}{=} 15$

$$\begin{aligned}(x-10)^2+25+4 &= 225\\ x^2-20x+100+29 &= 225\\ x^2-20x-96 &= 0\\ (x-24)(x+4) &= 0\end{aligned}$$

→ $x_1 = 24$, $x_2 = -4$ → $\underline{\underline{R(24|-1|5)}}$

UMFANG

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}15\\36\end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$ → $U = |\vec{AB}|+|\vec{AC}|+|\vec{BC}| = \sqrt{100}+\sqrt{1521}+\sqrt{1225}$

$= 10+39+35 = \underline{\underline{84}}$

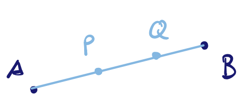
UND RÜCKWÄRTS

$\vec{PQ} = \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} = Q-P$ und $Q(-3|-5|2)$

→ $P = Q - \vec{PQ} = \begin{pmatrix}-3\\-5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-7\\-3\\-4\end{pmatrix}}}$

DRITTLE!

$A(-9|15|-2)$, $B(-12|-6|4)$



$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-3\\-21\\6\end{pmatrix}$ ⇒ $\vec{AP} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\2\end{pmatrix}$, $\vec{AQ} = \begin{pmatrix}-2\\-14\\4\end{pmatrix}$

→ Koords $\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

$\vec{Q} = \vec{A} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

DISTANZ

$P(x|0|0)$ mit $|\vec{AP}| = 2 \cdot |\vec{BP}|$

→ $\vec{AP} = \begin{pmatrix} x-12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{BP} = \begin{pmatrix} x-15 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\sqrt{(x-12)^2 + 12^2 + 6^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-15)^2 + 6^2 + 3^2}$$

$$(x-12)^2 + 12^2 + 6^2 = 4 \cdot [(x-15)^2 + 6^2 + 3^2]$$

$$x^2 - 24x + 144 + \cancel{144} + \cancel{36} = 4x^2 - 120x + 900 + \cancel{144} + \cancel{36}$$

$$0 = 3x^2 - 96x + 756 \quad \rightarrow \quad x_1 = 18 \;,\; x_2 = 14$$

→ Es gibt 2 Möglichkeiten: $P_1\,\underline{\underline{(18|0|0)}}$ und $P_2\,\underline{\underline{(14|0|0)}}$

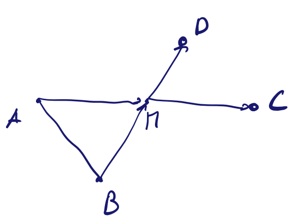
MITTELPUNKT UND PARALLELOGRAMM

a) $\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$

b) ausprobieren: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \vec{AB}$

→ d.h. die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind parallel und gleich lang. Dies impliziert den gleichen Fact für die beiden andern Seiten.

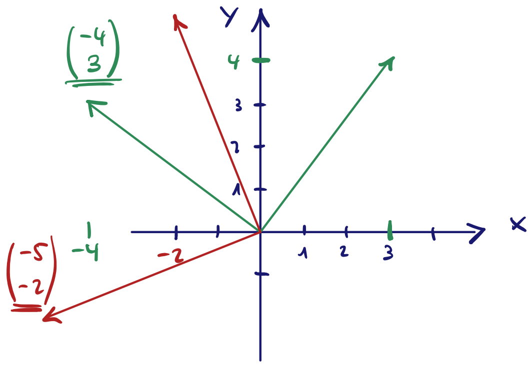
PARALLELOGRAMM ERSTELLEN

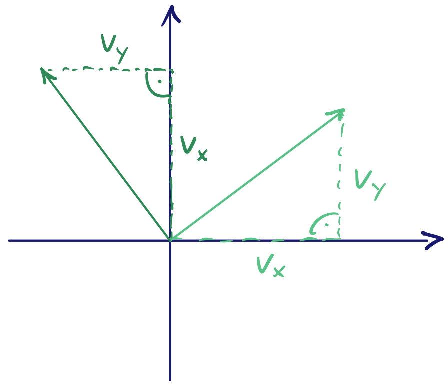


$\vec{C} = \vec{A} + 2\vec{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}}}$

$\vec{D} = \vec{B} + 2\vec{BM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

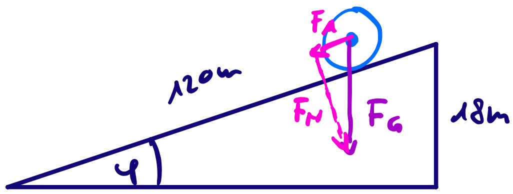
DREHE!



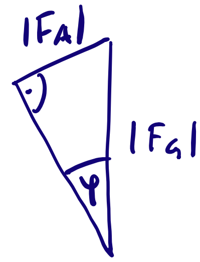


$$\vec{V}_{rot} = \begin{pmatrix} -V_y \\ V_x \end{pmatrix}$$

KEIL ERFORDERLICH?



$$\sin(\varphi) = \frac{18}{120} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{3}{20}\right)$$



$$|F_G| = 42\text{ kN} \qquad \vec{F_G} = \vec{F_A} + \vec{F_N}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{|F_A|}{|F_G|}$$

$$|F_A| = |F_G| \cdot \sin(\varphi) = 42'000 \cdot \frac{3}{20} = \underline{\underline{6'300\text{ N}}}$$

WINKEL BESTIMMEN

a) $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = (-6)\cdot(-3) + 8 \cdot 12 + 0 \cdot 4 = 18 + 96 + 0 = \underline{\underline{114}}$

$\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{100} = 10$, $\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{169} = 13$ $\rightarrow$ $\varphi = \arccos\left(\frac{114}{10 \cdot 13}\right) \approx \underline{\underline{28.7°}}$

b) $\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 13$, $\vec{e_x} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = -3$, $\vec{e_y} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 12$ ... $|\vec{e_x}| = 1$ ...

$\varphi_x = \arccos\left(\frac{-3}{13}\right) \approx \underline{\underline{103.3°}}$, $\varphi_y = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) \approx \underline{\underline{22.6°}}$, $\varphi_z = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx \underline{\underline{72.1°}}$

KOORDINATENACHSEN

$\vec{e_x} \cdot \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$

Umkehrung

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \; \vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

z.B. mit Satz $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 28 + 3u_y + 8u_z \overset{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = -35 + 20u_y + 9u_z \overset{!}{=} 0 \qquad (2)$$

aus (1): $3u_y = -28 - 8u_z$

$$u_y = \frac{-28 - 8u_z}{3}$$

in (2): $-35 + 20 \cdot \frac{-28 - 8u_z}{3} + 9u_z = 0 \qquad / \cdot 3$

$$-105 + 20(-28 - 8u_z) + 27u_z = 0$$

$$-665 - 133u_z = 0 \qquad / + 133u_z$$

$$-665 = 133u_z \qquad / : 133$$

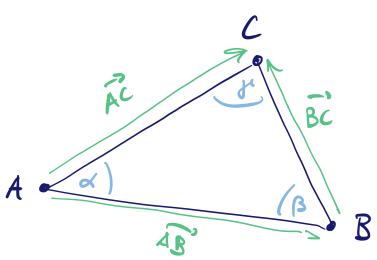
$$-5 = u_z \quad \Rightarrow \quad u_y = \frac{-28 - 8 \cdot (-5)}{3} = 4 \quad \rightarrow \quad \vec{u} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

Anwendung auf Dreicke im Raum

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 6 - 2 - 4 = \underline{\underline{0}}$$

Noch ein Dreieck im Raum

$A(2|1|-3)$, $B(-3|0|1)$, $C(7|-19|-1)$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AB}| = \sqrt{42}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AC}| = \sqrt{429}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{465}$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}\right) \qquad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -25 + 20 + 8 = 3$$

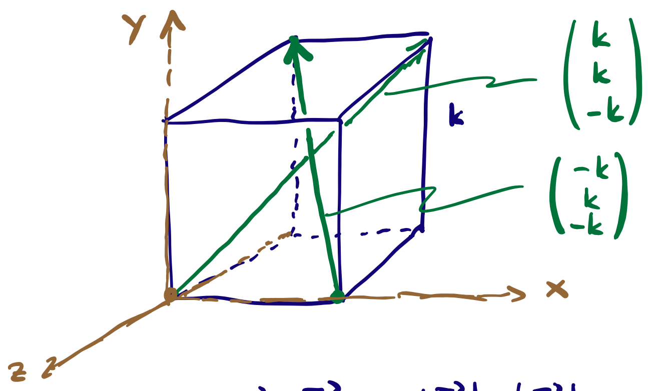
$$= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{429}}\right) \approx \underline{\underline{88.7^\circ}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\quad}\right) \qquad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 50 - 19 + 8 = 39$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\quad}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{42}\cdot\sqrt{465}}\right) \approx \underline{\underline{73{,}8^\circ}} \qquad \rightarrow \gamma = 180^\circ - 88{,}7^\circ - 73.8^\circ = \underline{\underline{17.5^\circ}}$$

WÜRFEL



$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos(\gamma)$$

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \cos(\gamma)$$

$$\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right) = \gamma$$

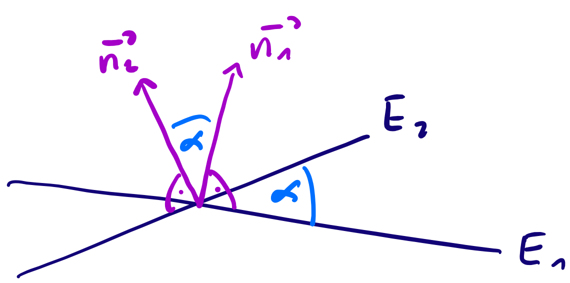
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -k \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -k \\ k \\ -k \end{pmatrix} = -k^2 + k^2 + k^2 = k^2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + k^2 + (-k)^2} = \sqrt{3k^2} = \sqrt{3}\,k = |\vec{w}|$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{k^2}{\sqrt{3}k\cdot\sqrt{3}k}\right) = \arccos\left(\frac{\cancel{k^2}}{3\cancel{k^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\approx \underline{\underline{70^\circ}}$$

DIAGONALEBENEN



grün $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$

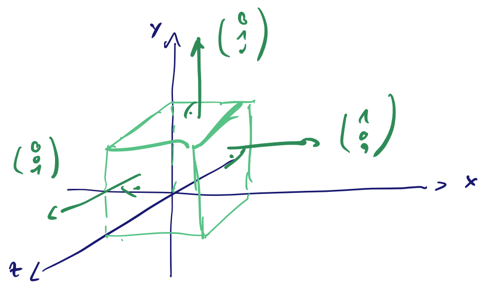
blau $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k \end{pmatrix} = 0 + k^2 + 0 = k^2$$

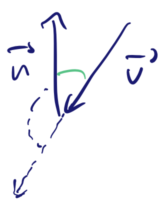
$$|\vec{n_1}| = \sqrt{k^2 + k^2 + 0} = \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}k = |\vec{n_2}|$$

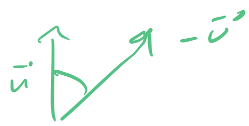
$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\cancel{k^2}}{2\cancel{k^2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{60°}}$$

LAMBERT



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$





$$\rightarrow -\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

front : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad \rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

$$\rightarrow H(\varphi) = 0.5 \cdot 1 \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{14}}}} \approx 0.133$$

deck : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \rightarrow H(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{14}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{14}}}} \approx 0.267$

side : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \rightarrow H(\varphi) = \underline{\underline{\frac{3}{2\sqrt{14}}}} \approx 0.401$

VEKTORPRODUKT

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x(v_y w_z - v_z w_y) + v_y(v_z w_x - v_x w_z) + v_z(v_x w_y - v_y w_x) =$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$\vec{u} \cdot \vec{w}$ analog

Rechtssystem

$$\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0 - 0\cdot 1\\ 0\cdot 0 - 1\cdot 0\\ 1\cdot 1 - 0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{e_z}$$ und/oder brauche die Rechte-Hand-Dreifinger-Regel

$$\vec{e_y} \times \vec{e_x} = -\vec{e_z}, \quad \vec{e_x} \times \vec{e_z} = -\vec{e_y}, \quad \vec{e_z} \times \vec{e_x} = \vec{e_y}, \quad \vec{e_y} \times \vec{e_z} = \vec{e_x}, \quad \vec{e_z} \times \vec{e_y} = -\vec{e_x}$$

Flächenformel

a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8-0\\0-6\\6+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-6\\10\end{pmatrix}$

$$\rightarrow |\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx \underline{\underline{14.14}}$$

Ferner: $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$, $|\vec{w}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

Winkel: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 3\cdot(-1) + 4\cdot 2 + 0 \cdot 2 = 5$

$$\rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{5}{5 \cdot 3}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5°$$

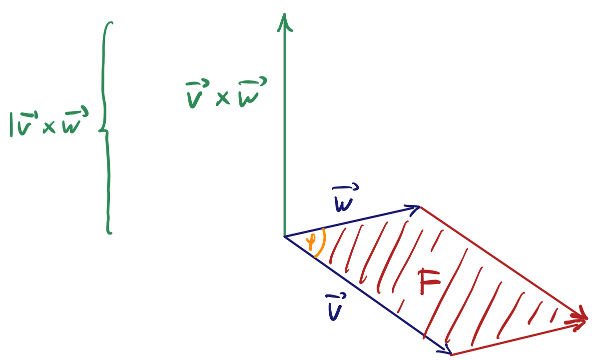
Fläche: $|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(70.5°) \approx 5 \cdot 3 \cdot 0.94 = 14.14$ ✓

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 - 24 - 36 = -60$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{49} = 7$, $|\vec{w}| = \sqrt{100} = 10$ $\quad \rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{-60}{7 \cdot 10}\right) \approx 149°$

$$\rightarrow |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(149°) \approx 7 \cdot 10 \cdot 0.515 \approx 36.1$$

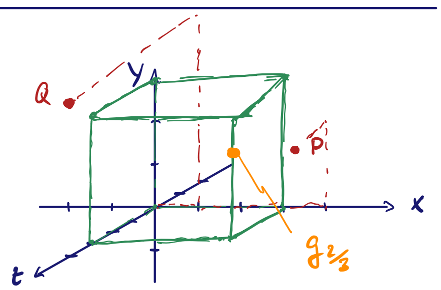
$$\rightarrow \begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18-48\\0+12\\16-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\12\\16\end{pmatrix} \quad \rightarrow \left|\begin{pmatrix}-30\\12\\16\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1300} \approx 36.1$$ ✓

Parallelogrammfläche



$$F = |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin(\varphi)$$

Konzept einer Strecke



Gerade g durch Q und P

$$\rightarrow g_t : \vec{Q} + t \cdot \vec{QP} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

Trifft die Gerade die Frontfläche mit $z = 3$? $(0 \leq x, y \leq 3)$

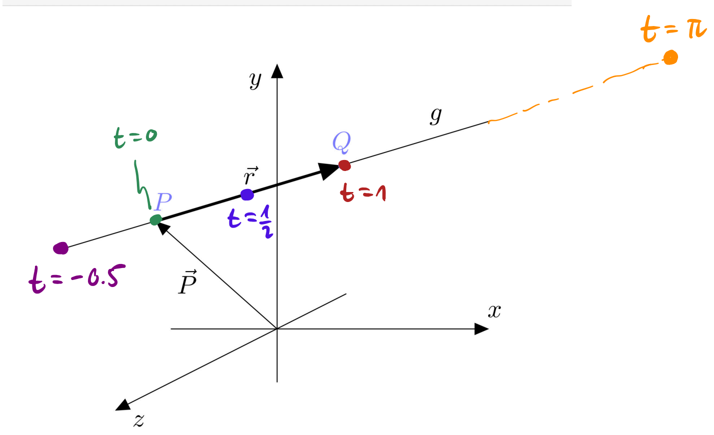
$\rightarrow$ $5 - 3t = 3 \iff 2 = 3t \iff t = \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ $g_{2/3}: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

d.h. die Kante verdeckt die Sicht.

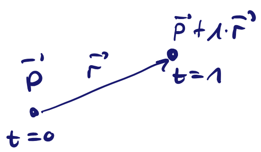
FINESSE

Weil eine Gerade unendlich viele verschiedene Parameterform-Darstellungen hat (Stützvektor und Richtungsvektor).

PUNKTE AUF DER GERADEN



PARAMETER

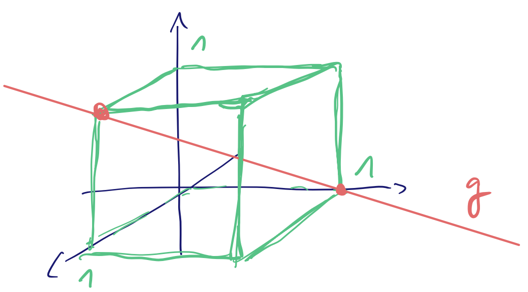


Strecke zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + \vec{r}$.

PARAMETERDARSTELLUNGEN

z.B. $g_t: \vec{P} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{P} + t \cdot \overrightarrow{QP}$

PARAMETERDARSTELLUNGEN 2



z.B. $g_t: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

oder $g_t: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

oder $g_t: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

RELATIVE LAGE

a) $g: \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} + \underset{0}{t} \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix}2\\1\\9\end{pmatrix} + \underset{2}{s} \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\quad s,t \in \mathbb{R}$

sicher nicht parallel, da $\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ nicht kollinear, damit auch nicht identisch

Schnittpunkt? $\quad g: \begin{pmatrix}6+4t\\1\\3+5t\end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix}2+2s\\1\\9-3s\end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix}6+4t\\1\\3+5t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2s\\1\\9-3s\end{pmatrix}$

$\rightarrow$

$$6+4t = 2+2s \quad (1)$$
$$1 = 1 \quad ✓$$
$$3+5t = 9-3s \quad (2)$$

aus (1):
$$2s = 4+4t \quad /:2$$
$$s = 2+2t$$

in (2):
$$3+5t = 9-3(2+2t) \quad /TU$$
$$3+5t = 9-6-6t \quad /TU$$
$$3+5t = 3-6t \quad /+6t-3$$
$$11t = 0$$
$$t = 0 \quad \rightarrow \quad s = 2$$

$\Rightarrow$ z.B. $g: \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}$

oder $h: \begin{pmatrix}2\\1\\9\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}}$

b) wegen $(-2) \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ sind die Richtungsvektoren parallel.

Ferner ist: $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\2\\3\end{pmatrix}$, also haben die Geraden einen Punkt gemeinsam.

D.h. insgesamt sind sie identisch.

c) $$\begin{pmatrix}-5\\16\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$$

parallel? $\to$ nein $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \neq \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$

Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} -5 + 2t &= 2 + 3s \quad (1)\\ 10 - 3t &= 2 - 2s \quad (2)\\ t &= 7 + 5s \quad (3) \end{aligned}$$

$\to$ (3) in (1):

$$\begin{aligned} -5 + 2\cdot(7+5s) &= 2 + 3s\\ -5 + 14 + 10s &= 2 + 3s \quad /-3s\\ 9 + 7s &= 2 \quad /-9\\ 7s &= -7 \quad /:7\\ s &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = 7 + 5\cdot(-1) = \underline{\underline{2}}$$

$$\to \begin{pmatrix}-5\\16\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$$

d.h. die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $\underline{\underline{\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}}}$.

d) $$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$g: \vec{p} + t\cdot\vec{r}$

Parallel? $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \neq \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

d.h. <u>nicht parallel</u>

Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - t = 3 + 2s \qquad (1)$$
$$2t = 1 - s \qquad (2)$$
$$2 + t = 3s \qquad (3)$$

$$(2): \quad 2t = 1 - s \qquad / +s$$
$$2t + s = 1 \qquad / -2t$$
$$s = 1 - 2t$$

$$\text{in } (1): \quad 1 - t = 3 + 2 \cdot (1 - 2t)$$
$$1 - t = 3 + 2 - 4t \qquad / +4t$$
$$1 + 3t = 5 \qquad / -1$$
$$3t = 4 \qquad / :3$$
$$t = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad s = 1 - 2 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$t = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}}} \quad \times$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \\ -15/3 \end{pmatrix}}}$$

d.h. es gibt keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind zueinander windschief.

ABSTÄNDE

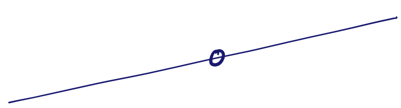
Der Richtungsvektor hat die Länge $\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$. Daher lauten die Koordinaten der Punkte

$g_{-2}: \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \underline{4} \end{pmatrix}$ und $g_2: \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ \underline{-4} \end{pmatrix}$

PARAMETER EINSCHRÄNKEN

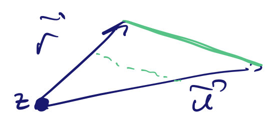
a) Strahl in Richtung $\vec{r}$, da $t^2 \in \mathbb{R}_0^+$

b)



gelochte Gerade (bei $\vec{P}$), da $\frac{1}{t} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

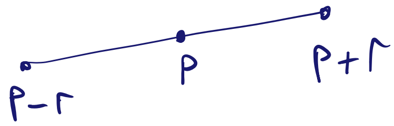
c) Strecke zwischen $\vec{r}$ und $\vec{u}$



(Ähnlichkeit)

d) Strecke zwischen $\vec{p}-\vec{r}$ und $\vec{p}+\vec{r}$

da $\sin(t) \in [-1, 1]$ $\forall t \in \mathbb{R}$



ABSTAND

$g: \; t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\t\\t\end{pmatrix}$ $\qquad R(3|0|0)$

$\rightarrow \; \vec{RG} = \begin{pmatrix}t-3\\t\\t\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{RG}| = \sqrt{(t-3)^2+t^2+t^2} = \sqrt{3t^2-6t+9}$

min $\sqrt{}$ $\rightarrow$ min Radikand $3t^2-6t+9$

Ist eine Parabel $\rightarrow$ Scheitelpunkt $\rightarrow$ $t_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 3} = 1$

$\Rightarrow \; P_{min} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}$

GERADLINIG GLEICHFÖRMIG

$t=1 \quad P_1(5|-4|7)$, $\quad t=3 \quad P_3(1|2|4)$

$\rightarrow g_t: \quad \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{P_1P_3}$, dann hat man den Geschwindigkeits-Vektor pro Sekunde

$\rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Ich würde jetzt den Stützvektor zum Zeitpunkt $t=0$ wählen:

$\rightarrow \; \vec{P_0} = \vec{P_1} - \vec{r} = \begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix}}}$

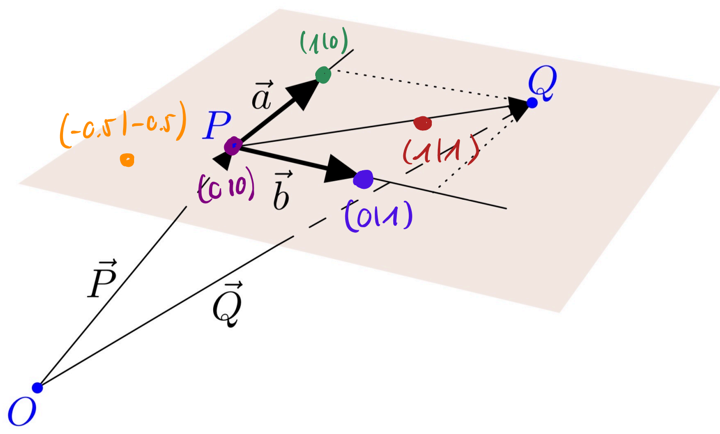
$\Rightarrow \; g_t: \; \underline{\underline{\begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1.5\end{pmatrix}}}$

xz-Ebene $\rightarrow y=0 \rightarrow$

$$\begin{aligned}-7+3t &= 0\\ 3t &= 7\\ t &= 7/3\end{aligned}$$

$\rightarrow g_{7/3}: \begin{pmatrix}7\\-7\\8.5\end{pmatrix} + \frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-3/2\end{pmatrix}$

BESTIMMTE PUNKTE

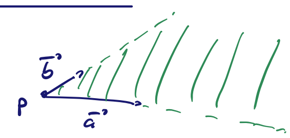


PARAMETERFORM

z.B. $\vec{A} + t \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} \quad = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

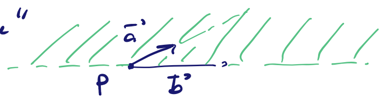
PARAMETER EINSCHRÄNKEN

a) 'Viertelebene'

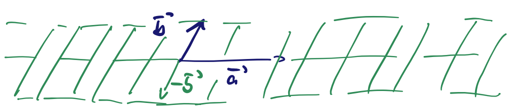


da, $s^2, t^2 \geq 0$

b) "Halbebene"



c) "BAND"



da $\quad -1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$

GERADEN

$g \cap h: \quad \begin{pmatrix} 3-4t \\ 1+t \\ 5+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2s \\ -1+3s \\ 4-s \end{pmatrix}$

$\overset{(y)}{\rightarrow} \quad 1+t = -1+3s$
$\qquad t = -2+3s$

$\overset{(x)}{\rightarrow} \quad 3-4(-2+3s) = 4+2s$
$3+8-12s = 4+2s$
$7 = 14s$
$s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

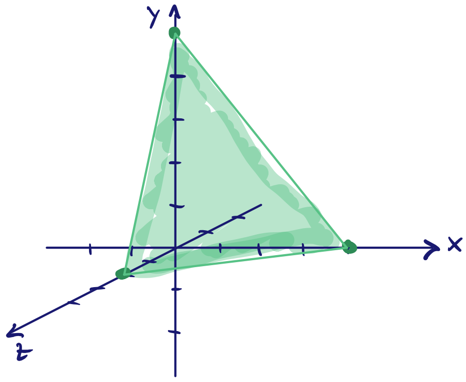
Check (z-Koordinate würde reichen): $\begin{pmatrix} 3-4\cdot(-\frac{1}{2}) \\ 1-\frac{1}{2} \\ 5+3\cdot(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2\cdot\frac{1}{2} \\ -1+3\cdot\frac{1}{2} \\ 4-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ✓

$\Rightarrow \underline{S(5|0.5|3.5)}$

Ebene: $\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 3.5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$

KOORDINATENFORM, THE HARD WAY

z.B. $\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$



Koordinatengleichung: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}10-0\\0+6\\0+15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\6\\15\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 10x + 6y + 15z + D = 0$

$(3|0|0) \in E: \quad 10\cdot 3 + 6\cdot 0 + 15\cdot 0 + D = 0$

$D = -30$

$\Rightarrow E: \quad \underline{10x + 6y + 15z - 30 = 0}$

$T \in E$? $\rightarrow 10\cdot(-12) + 6\cdot 15 + 15\cdot 4 - 30 = -120 + 90 + 60 - 30 = 0$, d.h. $\underline{T \in E}$.

KOORDINATENGLEICHUNG THE EASY WAY

a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} \rightarrow E: x - 2y - 3z + D = 0$, $P \in E: 2 - 2\cdot 2 - 3\cdot(-2) + D = 0 \Leftrightarrow D = -4$

$E: \quad \underline{x - 2y - 3z - 4 = 0}$

b) $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-4\end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+25\\-20+8\\10-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\-12\\10\end{pmatrix} \rightarrow E: 25x - 12y + 10z + D = 0$

$\rightarrow 25\cdot 0 - 12\cdot 0 + 10\cdot 4 + D = 0 \Leftrightarrow D = -40 \rightarrow E: \quad \underline{25x - 12y + 10z - 40 = 0}$

KOORDINATENGLEICHUNG

$\rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix}-8\\4\\8\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \rightarrow E: -2x + y + 2z + D = 0$, $P \in E: -2\cdot(-6) + 10 + 2\cdot 16 + D = 0 \Leftrightarrow D = -54$

$E: \quad \underline{-2x + y + 2z - 54 = 0}$

DURCHSTOSSPUNKT

a) $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21-8\\-20-9\\6+35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-29\\41\end{pmatrix} \rightarrow E: 13\cdot 1 - 29\cdot 2 + 41\cdot 6 + D = 0 \Leftrightarrow D = -201$

$\rightarrow E: 13x - 29y + 41z - 201 = 0 \rightarrow g \cap E: \quad 13(6-4u) - 29\cdot(4+3u) + 41(-5+7u) - 201 = 0$

$\Leftrightarrow 148u - 444 = 0 \Leftrightarrow u = 3$

$\rightarrow g_3: \underline{\begin{pmatrix}-6\\13\\16\end{pmatrix}}$

b) $2(3+2t) - (-4-t) + 3(-1+t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 8 + 8t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \rightarrow g_{-1}: \underline{\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}}$

c) $2(3+2t) - (5+t) + 3\cdot(-t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0 \rightarrow$ kein Schnittpunkt

REFLEXION

$P(4|5|-1)$, $\vec{r} = (-2|1|0.5)$

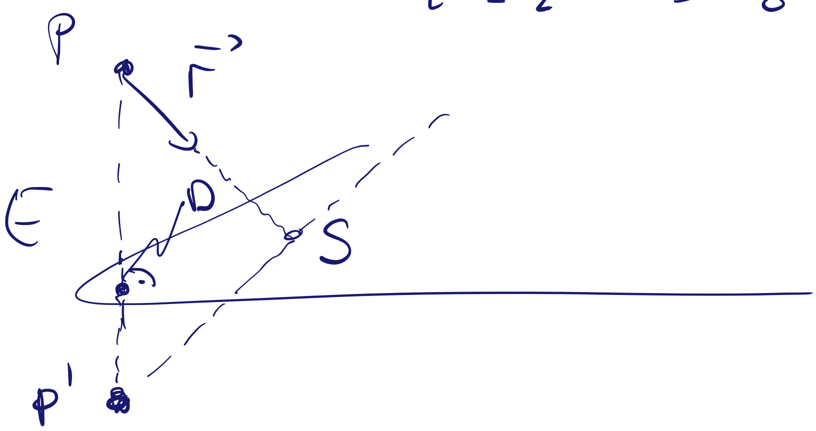
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$

xy - Ebene $\rightarrow$ $z = 0$ (Koordinatengleichung)

$\rightarrow$ Lichtstrahl : $l: \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0.5\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $l \cap E$: $-1 + 0.5t = 0$

$t = 2$ $\rightarrow$ $\underline{S = \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}}$



P' ? $\rightarrow$ $g: \vec{P} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$g \cap E$: $-1 + t = 0$

$t = 1$ $\Rightarrow$ $P' = \begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$

Richtung reflektierter Strahl $\vec{P'S} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix}}}$

Zusatz : Abstand P von E ?

$\rightarrow$ senkrecht messen $\rightarrow$ $\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$g \cap E = D = \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $\vec{PD} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $|\vec{PD}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \underline{\underline{1}}$

59

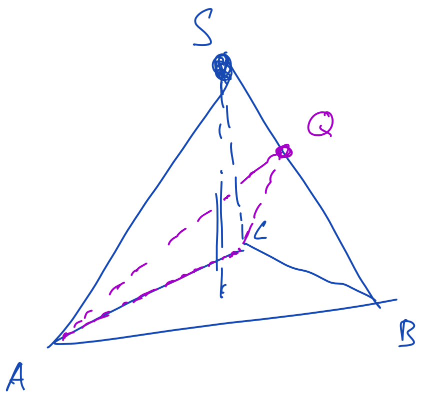
Übung 62. Von einer dreiseitigen Pyramide ABCS kennt man $\overrightarrow{AB} = (0\,|\,1\,|\,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2\,|\,1\,|\,0)$ und $\overrightarrow{AS} = (-2\,|\,0\,|\,2)$.

(a) Berechnen Sie die Winkel und den Flächeninhalt des Grundflächendreiecks ABC.

(b) Berechnen Sie den Winkel, den das Seitendreieck ABS mit dem Grundflächendreieck ABC einschliesst.

(c) Berechnen Sie Volumen und Höhe der Pyramide.

(d) Q sei derjenige Punkt der Seitenkante BS, für welchen der Flächeninhalt des Dreiecks ACQ minimal wird. Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AQ}$. (Anleitung: Setze $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BS}$)



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Winkel: $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|AB|\cdot|AC|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \underline{\underline{63.4^\circ}}$

$$\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|BA|\cdot|BC|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{0}{\dots}\right) = \underline{\underline{90^\circ}} \quad \rightarrow \gamma = \underline{\underline{26.6^\circ}}$

Fläche: $F = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{1}}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =: \vec{n_1}$$

b) $\vec{n_1} \measuredangle \vec{n_2} \qquad \vec{n_2} = \vec{AB}\times\vec{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\to \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{n_1\cdot n_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{2\cdot 2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{45^\circ}}$$

c) Höhe: $\vec{AS} = \lambda\cdot\vec{AB} + \mu\cdot\vec{AC} + x\cdot\vec{n_1}$

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\mu\\\mu\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\mu\\\lambda+\mu\\x\end{pmatrix} \to x=2,\ \mu=1,\ \lambda=-1$$

$$h = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{2}} \quad , \quad V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

d) $\vec{AQ} = \vec{AB} + t\cdot\vec{BS}$ $\qquad \vec{BS} = -\vec{AB} + \vec{AS} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$\to \vec{AQ} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2t\\-t\\2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2t\\1-t\\2t\end{pmatrix}$$

$$F(t) = \frac{1}{2}\left|\vec{AQ}\times\vec{AC}\right| \qquad \vec{AQ}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}-2t\\1-t\\2t\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2t\\-4t\\-2t+2-2t\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}-2t & \quad & -2\\ 1-t & \quad & 1\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4t^2+16t^2+16t^2-16t+4} = \frac{1}{2}\sqrt{36t^2-16t+4}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4(9t^2-4t+1)} = \sqrt{9t^2-4t+1}$$

Jetzt mit Differentialrechnung rechnen oder Scheitelpunkt von $\tilde{F}(t) = 9t^2-4t+1$ suchen

$$\to t_S = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad \vec{AQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-4/9\\7/9\\4/9\end{pmatrix}}}$$

Aufgabe 3 (Vektorgeometrie; 27 Punkte: a)4, b)4, c)6, d)6, e)7)

Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C (siehe Abbildung 2 auf Seite 4).

(a) Bestimme den Innenwinkel im Punkt A.

(b) Bestimme die Höhe h und finde den Schnittpunkt P der Höhenlinie mit der Seite AB.

(c) Bestimme die Geradengleichung der Geraden g durch die Punkte B und $U\,(10\,|\,-9.5\,|\,8)$. Finde anschliessend den Schnittpunkt dieser Geraden g mit der Seite AC.

(d) Bestimme den Abstand des Ursprungs O von der Ebene E, welche durch die Dreiecksfläche gegeben ist.

(e) Eine Lichtquelle im Ursprung O sendet einen Lichtstrahl in Richtung Dreieck, welcher dort im Punkt $S\,(3.25\,|\,1\,|\,0.5)$ reflektiert wird. Wo schneidet der reflektierte Strahl die xy-Ebene?

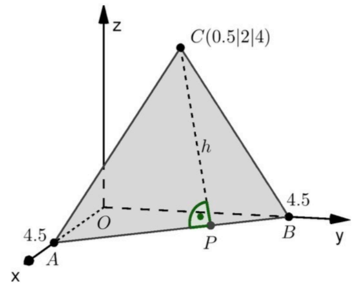


Abbildung 2: Das gegebene Dreieck zur Vektoraufgabe

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{18+9}{\sqrt{2\cdot 4.5^2}\cdot 6}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{27}{27\cdot\sqrt{2}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{45^\circ}}$$

b) $P \in g_{AB} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -4.5 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5-4.5t \\ 4.5t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{PA} = \begin{pmatrix} 4.5t \\ -4.5t \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{PC} = \begin{pmatrix} -4+4.5t \\ 2-4.5t \\ 4 \end{pmatrix}$

Höhe $\perp \vec{AB}$: $\vec{PA}\cdot\vec{PC} = 0 = -18t + 4.5^2t^2 - 9t + 4.5^2t^2 = 2\cdot 4.5^2t^2 - 27t$

$= t(2\cdot 4.5^2 t - 27) \Rightarrow t_1 = 0$, $t_2 = \frac{27}{2\cdot 4.5^2} = \frac{2}{3} \rightarrow \underline{\underline{P\begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}$

Höhe: $h = |\vec{PC}| = \sqrt{1^2+1^2+4^2} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$

c) $g_t: \begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}}}$, $h_s: \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 5t \\ 4.5-7t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5-2s \\ s \\ 2s \end{pmatrix} \Rightarrow$ (z): $4t = 2s$
$s = 2t$

in (x): $5t = 4.5 - 4t$

$9t = 4.5$

$t = 1/2$

(y): $4.5 - 7\cdot\frac{1}{2} = 1$ ✓

d) $E: \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4.5 \\ 4.5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-0 \\ 0+18 \\ -9+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} -4.5 & & -4 \\ 4.5 & & 2 \end{matrix}$

$\rightarrow \quad 2x + 2y + z + D = 0 \quad , \quad A \in E: \quad D = -9$

$E: \; 2x + 2y + z - 9 = 0$

$g_t: \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$

Schnittpunkt : $\quad 2 \cdot 2t + 2 \cdot 2t + 1 \cdot t - 9 = 0$

$9t = 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1 \quad \rightarrow \quad S(2|2|1)$

Abstand: $|\vec{S}| = \underline{\underline{3}}$

e) Reflexion : Spiegelung von O an E $\quad \rightarrow \quad t = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = L'$

$\Rightarrow \quad \vec{r'} = S - L' = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 \\ -3 \\ -1.5 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \ell'_t: \; \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad E_{xy}: \; z = 0$

$\rightarrow \quad 2 + 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad D_{xy} \underline{\underline{(3|0|0)}}$

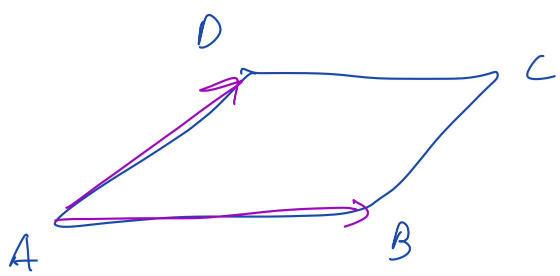
Übung 61. Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche kennt man den Grundkantenvektor $\overrightarrow{AB} = (5\,|\,0\,|\,0)$ sowie eine Komponente des zweiten Grundkantenvektors $\overrightarrow{AD} = (x\,|\,3\,|\,z)$.

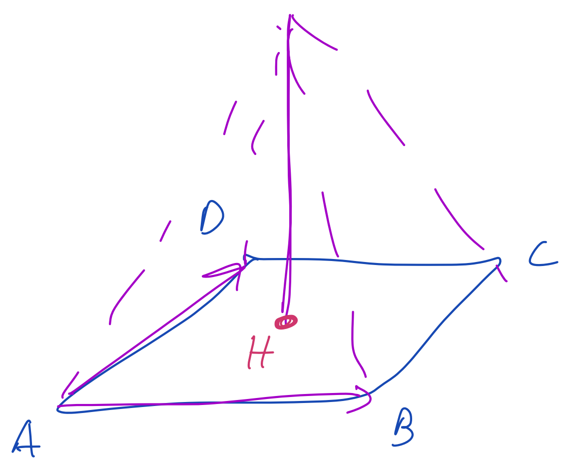
(a) Berechnen Sie die fehlenden Komponenten x und z.

(b) Berechnen Sie die Diagonalvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$.

(c) Berechnen Sie den Seitenkantenvektor $\overrightarrow{AS}$ (S bezeichne die Pyramidenspitze), wenn die Hähe der Pyramide 10 beträgt.

(d) Wie gross ist das Volumen der Pyramide?





a) $\vec{AD} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

quadratisch: $|\vec{AD}| = 5 = \sqrt{x^2 + 9 + z^2}$

$\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0 = 5x \iff x = 0 \implies z = \pm 4$

$\rightsquigarrow \quad \vec{AD} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}, \quad \vec{AD_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}, \quad \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}$

c) $\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \lambda \vec{HS}$, $\vec{HS} = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 5 & & 0 \\ 0 & & 3 \end{matrix}$

$$\vec{AS} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Höhe : $|\lambda \vec{HS}| = 10 = \lambda \cdot \sqrt{16+9} = 5\lambda \Rightarrow \lambda = 2$

$$\Rightarrow \vec{AS} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2.5 \\ -6.5 \\ 8 \end{pmatrix}}}$$

d) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 10 = \frac{250}{3} = \underline{\underline{83\frac{1}{3}}}$