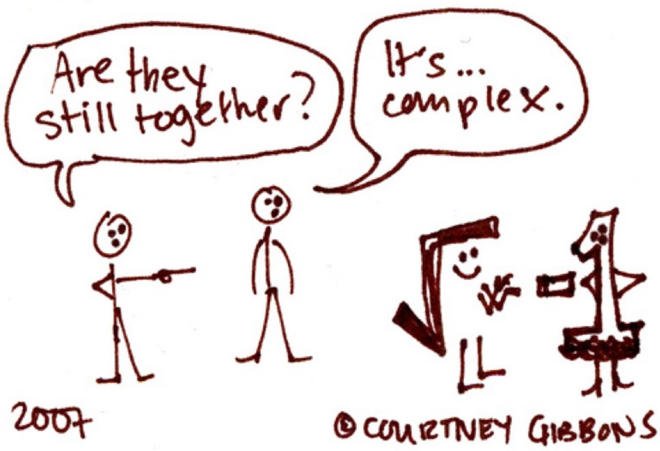


Komplexe Zahlen

Vom Unvorstellbaren zum Imaginären

Inhaltsverzeichnis

1. Entdeckung

1.1. Historisches und Impact

Um 1530 stösst eine Gruppe italienischer Mathematiker beim Lösen von Gleichungen auf unbekannte Zahlen, die nicht fürs Zählen oder Messen von Dingen gebraucht werden können. Die Zahlen schienen nutz- und sinnlos. Der französische Philosoph René Descartes teilte die damals gängige Meinung der Mathematiker und gab diesen Zahlen einen Namen: imaginäre Zahlen.

Abbildung 1: „Do I really Exist?“

Nach langem Widerstand wurden im 19.-ten Jahrhundert die imaginären Zahlen akzeptiert und bald darauf entdeckte man ihre Nützlichkeit. Heute sind imaginäre Zahlen aus der Mathematik und Technik nicht mehr wegzudenken. Ohne imaginäre Zahlen gäbe es Radio/Fernsehen in der heutigen Form nicht. Auch die digitale Fotographie oder das Internet wären nicht realisierbar. Ferner lieferten die imaginären Zahlen enorme Fortschritte in der Insulinforschung, Virenforschung oder DNA-Analyse. Alle Wissenschaften, die auf komplexe, umfangreiche Simulationen angewiesen sind — z.B. Meteorologie, Geologie, Klimatologie, ... — sind auf imaginäre Zahlen angewiesen.

1.2. Weshalb genügt die Menge der reellen Zahlen zum Rechnen nicht?

Um die Notwendigkeit der imaginären Zahlen besser zu erkennen, scheint es mir sinnvoll, noch einmal auf die Entstehung unserer bereits bekannten Zahlenmengen zurück zu blicken.

In den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ kann problemlos addiert werden; das Ergebnis liegt wieder in $\mathbb{N}$:

$$a, b \in \mathbb{N} \implies a + b \in \mathbb{N}.$$

Man sagt, dass die natürlichen Zahlen **abgeschlossen** bezüglich der Addition sind. Ferner sind sie auch abgeschlossen bezüglich der Multiplikation. Will man Abgeschlossenheit bezüglich der Subtraktion, so müssen wir unsere Menge mit negativen Zahlen zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitern, für eine abgeschlossene Division zu $\mathbb{Q}$. Die positiven reellen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich des Potenzierens, d.h. es gilt

$$a \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R} \implies a^r \in \mathbb{R}^+.$$

Fordert man schliesslich die Abgeschlossenheit aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bezüglich des Potenzierens, so stellt sich die Frage, wie man die bislang sinnlosen Ausdrücken $(-1)^{\frac{1}{2}}$ definieren soll/kann. Damit hätte man eine „Zahl“, welche die Gleichung

$$x^2 = -1$$

lösen würde.

Die komplexen Zahlen stellen eine sinnvolle Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar — genau wie $\mathbb{R}$ eine Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ darstellt, oder $\mathbb{Q}$ eine Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, und diese wiederum eine Erweiterung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Erinnern Sie sich, dass Sie viele Probleme erst lösen konnten, nachdem Sie die reellen Zahlen kannten? Genauso ist es mit den komplexen Zahlen. Viele Probleme, die in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen, werden im Bereich der komplexen Zahlen endlich lösbar. Darüber hinaus erlaubt die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen eine elegante Beschreibung von geometrischen Abbildungen und führt zu einer Vielzahl neuer Fragestellungen.

2. Komplexe Zahlen

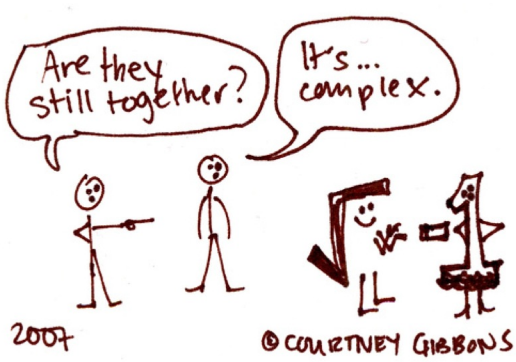


Abbildung 2: Imaginäre Zahl

Im Zahlbereich der reellen Zahlen können Sie uneingeschränkt alle Ihnen vertrauten Rechenoperationen ausführen. Alle? Nein! So stossen Sie zum Beispiel beim Wurzelziehen an eine Grenze des Zahlbereichs: Die Gleichung

$$x^2 = -1$$

ist unlösbar. Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 ist. Allgemeiner gilt: Quadratische Gleichungen sind manchmal lösbar und manchmal nicht. Um diesen Mangel zu beheben, soll eine neue Zahl eingeführt werden. Das heisst, der Zahlbereich der reellen Zahlen soll erweitert werden. Ganz ähnlich wurde seinerzeit auch der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auf den Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erweitert. Ausgangspunkt war damals die Frage nach der Lösung der Gleichung

$$x^2 = 2.$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$, den rationalen Zahlen. Es gibt keine Bruchzahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Deshalb wurde eine neue Zahl eingeführt, welche die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar macht. Sie wurde mit $\sqrt{2}$ bezeichnet und hat die Eigenschaft, dass sie mit sich selbst multipliziert 2 ergibt:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

2.1. Das Permanenzprinzip

Auf diese Weise wurde der Zahlbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen erweitert. Es entstand der weitaus umfassendere Zahlbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, der unter anderem auch alle Wurzeln enthält. Bei dieser Erweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ wurden drei wesentliche Punkte eingehalten:

1. Die alten Zahlen sind ein Teil der neuen Zahlen. So sind beispielsweise die rationalen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen. Mit Symbolen ausgedrückt schreiben wir das als $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Alle Rechenoperationen, die mit den alten Zahlen möglich sind, sind auch mit den neuen Zahlen möglich. Die Erweiterung von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen erzeugt keine Einschränkungen.

3. Für die neuen Zahlen gelten dieselben Rechenregeln wie für die alten. So können Sie mit den reellen Zahlen genauso rechnen wie mit den rationalen Zahlen.

Es ist vernünftig, dieses **Permanenzprinzip** bei der Erweiterung eines Zahlbereichs zu fordern. Denn wir wollen so wichtige Eigenschaften wie die Gültigkeit der Rechenregeln nicht verlieren.

2.2. Die imaginäre Einheit i

In $\mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$x^2 = -1$$

nicht lösbar, da das Quadrat einer von Null verschiedenen reellen Zahl stets positiv ist.

Wir wollen den Bereich der reellen Zahlen nun so erweitern, dass die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar ist. Dazu führen wir eine neue Zahl ein, welche diese Gleichung lösbar macht. Diese neue Zahl nennen wir **imaginäre Einheit** und bezeichnen sie mit dem Symbol i. Sie soll die Eigenschaft haben, dass sie mit sich selbst multipliziert -1 ergibt:

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1.$$

Was können wir uns nun unter diesem i vorstellen? Mit Sicherheit ist i keine reelle Zahl, denn wie oben bereits gesagt, ist das Quadrat einer reellen Zahl niemals negativ. Es gilt aber $\mathrm{i}^2 = -1$, denn wir haben ja gefordert, dass i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ sein soll. Wir wissen also nicht, wie i „aussieht“. Wir können aber bereits mit i rechnen.

Beispiel 1. Nach dem dritten Punkt des Permanenzprinzips sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ ja weiterhin gültig sein. So können wir zum Beispiel i^3 berechnen:

$$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = (-1) \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}.$$

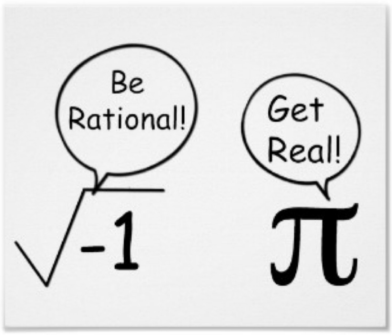


Abbildung 3: π and i

Übung 1 (Rechne mit i)**.** Berechne

(a) i^2

(b) i^4

(c) i^5

(d) $(-\mathrm{i})^2$

(e) $-\mathrm{i}^2$

(f) $-\mathrm{i}^4$

Früheren Mathematikern war die Zahl i übrigens etwas unheimlich. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) beispielsweise nannte sie „ein Amphibium zwischen Sein und Nicht-sein“, für Leonhard Euler (1707-1783) war sie eine „unmögliche Zahl“, und noch Carl Friedrich Gauss (1777-1855) bezeichnete sie im neunzehnten Jahrhundert als „Schatten von Schatten“. Da i also eine „unmögliche Zahl“ war, das heisst keine reelle Zahl, nannte man sie *imaginär* (von lateinisch imaginarius = eingebildet). Die Bezeichnung geht auf René Descartes (1596-1650) zurück.

Definition 2.1: Imaginäre Einheit

Die Zahl i mit

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

heisst *imaginäre Einheit.*

2.3. Komplexe Zahlen

Nachdem wir nun die imaginäre Einheit i kennen gelernt haben, wollen wir diese mit den reellen Zahlen verknüpfen. Dazu bilden wir die so genannten **komplexen Zahlen**. Das

Wort komplex steht hier für „zusammengesetzt“ (von lateinisch complexus: verflochten).

Beispiel 2.

$$1+3\mathrm{i}, \quad -1+3\mathrm{i}, \quad 2-5\mathrm{i}, \quad \frac{3}{4}+7\mathrm{i}, \quad -\sqrt{3}+\pi\mathrm{i}$$

sind komplexe Zahlen. Sie alle sind zusammengesetzt aus einem reellen Anteil (bei $1+3\mathrm{i}$ ist das beispielsweise 1) und einem imaginären Anteil (bei $1+3\mathrm{i}$ ist das beispielsweise $3\mathrm{i}$).

Definition 2.2: Komplexe Zahl

Eine Zahl z der Form

$$z = a + b\mathrm{i}$$

heisst *komplexe Zahl*. a und b sind dabei reelle Zahlen. i steht für die imaginäre Einheit.

Wir betrachten noch einmal die komplexe Zahl $2-5\mathrm{i}$. Bei dieser Zahl spielen offensichtlich die 2 und die -5 eine besondere Rolle. Wenn Ihnen jemand sagt: ‚Bei der komplexen Zahl z ist der rein reelle Anteil 2, und vor der imaginären Einheit steht -5“, dann wissen Sie genau, um welche komplexe Zahl es sich handelt; es kann nur $2-5\mathrm{i}$ sein. Jede komplexe Zahl $a+b\mathrm{i}$ ist durch die reellen Zahlen a und b eindeutig festgelegt. Um komplexe Zahlen auf diese Art beschreiben zu können, führen wir zwei neue Begriffe ein: Unter dem *Realteil* einer komplexen Zahl wollen wir in Zukunft den rein reellen Anteil der Zahl verstehen. Der Realteil der komplexen Zahl $2-5\mathrm{i}$ ist also 2. Wir schreiben auch $\mathrm{Re}(2-5\mathrm{i}) = 2$. Unter dem *Imaginärteil* einer komplexen Zahl wollen wir in Zukunft den Teil der Zahl verstehen, der vor der imaginären Einheit i steht. Der Imaginärteil der komplexen Zahl $2-5\mathrm{i}$ ist also -5. Wir schreiben auch $\mathrm{Im}(2-5\mathrm{i}) = -5$.

Übung 2 (Re und Im)**.** Gib Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen an. Verwende dazu die Schreibweisen Re und Im. (Schreibe also beispielsweise $\mathrm{Re}(3+2\mathrm{i}) = 3$, $\mathrm{Im}(3+2\mathrm{i}) = 2$.)

(a) $-1+4\mathrm{i}$

(b) $2-5\mathrm{i}$

(c) $\frac{3}{4}+7\mathrm{i}$

(d) $\sqrt{7}+\frac{5}{6}\mathrm{i}$

(e) $\sqrt{5}\mathrm{i}$

(f) $-\frac{1}{6}$

(g) i

(h) 0

Zum Schluss halten wir die Definitionen der neuen Begriffe noch einmal fest.

Definition 2.3: Real- und Imaginärteil

Es sei
$$z = a + bi$$
mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Dann heisst a der *Realteil* und b der *Imaginärteil* von z. Man schreibt $\mathrm{Re}(z) = a$ bzw. $\mathrm{Im}(z) = b$.

Übung 3 (Re plus Im)**.** Für welche komplexen Zahlen z gilt

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)?$$

Übung 4 (Re von Im)**.** Für welche Zahlen z gilt

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Im}(z)) = 0?$$

Bemerkung. Man beachte, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl z reell sind. Zahlen der Form bi heissen *rein imaginär*.

2.4. Die komplexen Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass wir für die reelle Zahl $-\frac{1}{6}$ auch als komplexe Zahl $-\frac{1}{6} + 0\mathrm{i}$ auffassen können. Die reellen Zahlen sind gerade die komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0. In andern Worten: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen, für die üblicherweise die Abkürzung $\mathbb{C}$ verwendet wird.

Bemerkung. Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$. Es gilt

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Übung 5 (Zahlenmengen)**.** Zu welchen Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gehören die Zahlen

(a) 2

(b) $-\sqrt{3}$

(c) $3 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

(d) 0

(e) $4\mathrm{i}$

(f) i^8

3. Wie rechnet man mit komplexen Zahlen?

3.1. Addition und Subtraktion

Wir betrachten die Addition von komplexen Zahlen an einem Beispiel.

Beispiel 3. Wir möchten $3 + \mathrm{i}$ und $1 - 2\mathrm{i}$ addieren:

$$(3 + \mathrm{i}) + (1 - 2\mathrm{i}).$$

Nach dem Permanenzprinzip sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ weiterhin gültig sein. Wie würden Sie im Reellen addieren, wenn i eine Variable wäre? Ganz klar, Sie würden die beiden rein reellen Ausdrücke (d.h. die 3 und die 1) zusammenfassen, und ebenso die beiden rein imaginären Ausdrücke (d.h. i und $-2\mathrm{i}$). Das Gleiche tun wir auch hier. Wir schreiben

$$(3 + \mathrm{i}) + (1 - 2\mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i} = (3 + 1) + (\mathrm{i} - 2\mathrm{i}) = 4 - \mathrm{i}.$$

Bemerkung. Bei der Subtraktion funktioniert das Zusammenfassen der rein reellen Ausdrücke und der rein imaginären Ausdrücke analog.

Übung 6 (subtrahieren)**.** Berechne $(3 + \mathrm{i}) - (1 - 2\mathrm{i})$.

Übung 7 (addieren und subtrahieren)**.** Berechne

(a) $(4 + 3\mathrm{i}) + (2 + \mathrm{i})$

(b) $(\frac{1}{4} + 2\mathrm{i}) + (\frac{1}{5} - \mathrm{i})$

(c) $(\sqrt{5} + 3\mathrm{i}) + (-2 + \mathrm{i}) - (4\mathrm{i})$

(d) $(4 + 3\mathrm{i}) - (2 + 3\mathrm{i})$

(e) $\mathrm{Re}((-2 + \mathrm{i}) - (-2 - 3\mathrm{i}))$

(f) $\mathrm{Im}(7 - (4 + 3\mathrm{i}) - (5 - 4\mathrm{i}))$

Übung 8 (mission impossible)**.** Lässt sich 1 als Summe von zwei rein imaginären Zahlen schreiben?

Definition 3.1: Addition

Die Summe bzw. Differenz zweier komplexer Zahlen $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ erfolgt komponentenweise, indem man die Realteile und die Imaginärteile separat addiert bzw. subtrahiert. Es gilt

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$$

bzw.

$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\mathrm{i}$$

3.2. Multiplikation

Wir multiplizieren zwei komplexe Zahlen miteinander.

Beispiel 4. Nach dem Permanenzprinzip muss zum Beispiel

$$(3 + \mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i}) = 3 - 6\mathrm{i} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2$$

gelten. Nach Definition von $\mathrm{i}^2 = -1$ folgt

$$3 - 6\mathrm{i} + \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 3 - 5\mathrm{i} - (-2) = 5 - 5\mathrm{i}.$$

Übung 9 (multiplication rule)**.** Berechne für $v = 1 + \mathrm{i}$, $w = 4\mathrm{i}$ und $z = 2 - 5\mathrm{i}$ die Ausdrücke

(a) $v \cdot z$

(b) $v(w - z)$

(c) $\mathrm{Re}(vwz)$

(d) $\mathrm{Im}(v + wz)$

Übung 10 (swap)**.** Wahr oder falsch: Wird eine komplexe Zahl mit $(-\mathrm{i})$ multipliziert, dann werden Real- und Imaginärteil vertauscht.

Wir halten fest:

Satz 3.1: Multiplikation

Sind $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ zwei komplexe Zahlen, dann gilt

$$(a + b\mathrm{i}) \cdot (c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}.$$

Beweis. easy □

Leider ist die Regel für die Multiplikation nicht so einfach wie für die Addition und Subtraktion, wo Real- und Imaginärteile separat addiert werden.

Übung 11 (Produkt)**.** Zeige: Im Allgemeinen gilt nicht $\mathrm{Re}(z \cdot w) = \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w)$.

3.3. Konjugiert komplexe Zahlen

Bevor wir uns die Division von komplexen Zahlen genauer ansehen, führen wir einen neuen Begriff ein. Jede komplexe Zahl besitzt eine so genannte *konjugiert komplexe Zahl*. Dieser Begriff wird sich bei der Division als sehr nützlich erweisen, und er wird in späteren Kapiteln ebenfalls immer wieder von Bedeutung sein.

Beispiel 5. Als Beispiel betrachten wir die Zahl $5+3\mathrm{i}$. Die zu $5+3\mathrm{i}$ konjugiert komplexe Zahl ist $5-3\mathrm{i}$. Die Realteile der beiden Zahlen sind gleich, die Imaginärteile der beiden Zahlen sind entgegengesetzt gleich, d.h. sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

†berraschend ist nun das Produkt der beiden Zahlen.

Übung 12 (konjugiert komplex)**.** Berechne $(5+3\mathrm{i}) \cdot (5-3\mathrm{i})$.

Bemerkung. Das Produkt der beiden konjugiert komplexen Zahlen ist reell! Dies ist die bedeutendste Eigenschaft konjugiert komplexer Zahlen und wird sich immer wieder als nützlich erweisen.

Definition 3.2: Konjugiert komplex

Es sei $z = a + b\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl. Die zu z *konjugiert komplexe Zahl* ist die Zahl

$$a - b\mathrm{i}.$$

Man schreibt dafür auch $\bar{z}$. (lies: „z bar“)

Übung 13 (rechne)**.** Seien $w = 3\mathrm{i}$ und $z = \frac{1}{2} + 4\mathrm{i}$. Berechne

(a) $\bar{z}$

(b) $\overline{w}$

(c) $\overline{w+z}$

(d) $\overline{w^2 - z}$

Übung 14 (z bar)**.** Zeige, dass für für alle komplexen Zahlen z gilt:

(a) $z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$

(b) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

(c) $\bar{\bar{z}} = z$

Übung 15 (Achsen)**.** Welche Zahlen sind durch die Gleichung $z + \bar{z} = 0$ festgelegt? Welche Zahlen erfüllen $z - \bar{z} = 0$?

3.4. Division

Beispielsweise möchten wir $3 + \mathrm{i}$ durch $1 - 2\mathrm{i}$ teilen. Gesucht ist also

$$(3 + \mathrm{i}) \div (1 - 2\mathrm{i}) = \frac{3 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}.$$

Nach dem Permanenzprinzip sollen die Rechenregeln aus $\mathbb{R}$ weiterhin gültig sein.

Zunächst einmal stört, dass im Nenner des Bruchs i vorkommt. Durch eine reelle Zahl, z.B. 5 zu teilen wäre nämlich ganz einfach:

$$(3 + \mathrm{i}) \div 5 = (3 + \mathrm{i}) \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

Die Frage lautet also: Wie lässt sich aus dem Nenner $1 - 2\mathrm{i}$ eine reelle Zahl herstellen?

Wir benutzen die Tatsache, dass eine Zahl mal ihr konjugiert Komplexes eine reelle Zahl ergibt und erweitern also den Bruch mit der zu $1 - 2\mathrm{i}$ konjugiert komplexen Zahl $1 + 2\mathrm{i}$. Dadurch wird der Nenner reell; das i „verschwindet“. Im Zähler entsteht zwar ein Produkt von komplexen Zahlen, das man aber durch Multiplizieren leicht berechnen kann. In der Tat:

$$\frac{3 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} = \frac{(3 + \mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{1 + 7\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

Übung 16 (Division)**.** Berechne die folgenden Ausdrücke

(a) $\frac{3+2\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}}$

(b) $\frac{\mathrm{i}}{-4-4\mathrm{i}}$

(c) $\frac{1}{\mathrm{i}}$

(d) $\frac{3+4\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$

Satz 3.2: Division

Sind $a + b\mathrm{i}$ und $c + d\mathrm{i}$ zwei komplexe Zahlen und $c + d\mathrm{i} \neq 0$, dann gilt

$$(a + b\mathrm{i}) \div (c + d\mathrm{i}) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2}.$$

Beweis. Einfache Rechnung □

Damit kennen wir nun alle vier Grundrechenarten mit komplexen Zahlen.

Übung 17 (Die vier Grundrechenarten)**.** Berechne für $v = 5\mathrm{i}$, $w = 3 - 2\mathrm{i}$ und $z = 6 + 4\mathrm{i}$ die folgenden Ausdrücke

(a) $z^2 - vw$

(b) $\frac{z-w}{z+w}$

(c) $\mathrm{Re}(zw(z + v))$

(d) $\overline{\left(\frac{vw}{z}\right)}$

4. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen

Mit komplexen Zahlen kann man grundsätzlich rechnen wie mit reellen Zahlen. Man kann mit ihnen alle quadratischen Gleichungen lösen. Aber das ist bei weitem nicht alles: Komplexe Zahlen und ihre Operationen lassen sich auch geometrisch darstellen. Mit der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen kann man neue Zusammenhänge erkennen, die das Lösen weiterführender Fragen ermöglichen.

4.1. Die Gauss'sche Zahlenebene

Wir haben komplexe Zahlen definiert als Zahlen der Form $z = a+b\mathrm{i}$, wobei i die imaginäre Einheit ist, und a und b reelle Zahlen sind. Jede komplexe Zahl z ist also durch ein reelles Zahlenpaar $(a \,|\, b)$ eindeutig festgelegt, und umgekehrt gehört zu jeder komplexen Zahl z ein reelles Zahlenpaar $(a \,|\, b)$. Daher liegt es nahe, die geometrische Darstellung komplexer Zahlen in einer Ebene zu manifestieren.

Definition 4.1: Gauss'sche Zahlenebene

Jeder komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ wird der Punkt $(a \,|\, b)$ in der Zahlenebene zugeordnet. Diese Ebene heisst *Gauss'sche Zahlenebene*. Die waagrechte Achse nennt man *reelle Achse*. Die senkrechte Achse heisst *imaginäre Achse*. Der Koordinatenursprung heisst *Nullpunkt*.

Bemerkung. Die komplexe Ebene wird zu Ehren von Carl Friedrich Gauss (1777-1855) *Gauss'sche Zahlenebene* genannt. Erst C.F. Gauss verhalf der Veranschaulichung dieser früher unvorstellbaren Zahlen zum Durchbruch und verschaffte ihnen bei Mathematikerinnen und Mathematikern volle Anerkennung.

Offensichtlich entspricht die reelle Achse allen reellen Zahlen (also dem ursprünglichen Zahlenstrahl) und die imaginäre Achse allen rein imaginären Zahlen.

So liegt zum Beispiel die Zahl 1 eine Einheit rechts des Nullpunkts auf der reellen Achse und die Zahl i eine Einheit oberhalb des Nullpunkts auf der imaginären Achse.

Übung 18 (Argand Diagramm)**.** Zeichne die folgenden komplexen Zahlen in die Gauss'sche Zahlenebene.

(a) $3\mathrm{i}$

(b) $-2-\mathrm{i}$

(c) 3

(d) $3-2\mathrm{i}$

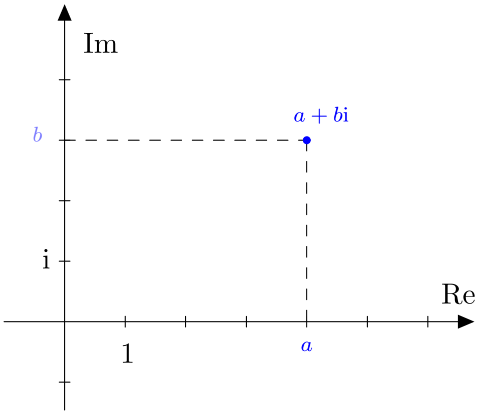
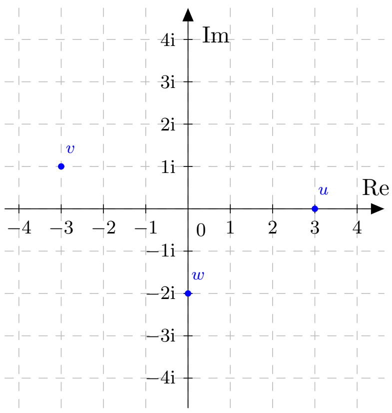


Abbildung 4: Die Gauss'sche Zahlenebene $\mathbb{C}$

Übung 19 (oder Gauss'sche Zahlenebene)**.** Wie lauten die dargestellten Zahlen u, v, w?



Übung 20 (minus und bar)**.** Welche geometrische Abbildung in der Gauss'schen Zahlenebene entspricht dem Bilden der entgegengesetzten Zahl $-z$, bzw. dem Bilden der konjugiert komplexen Zahl $\bar{z}$?

Bemerkung. Die entgegengesetzte Zahl $-w$ zu w, bzw. die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ zu z spielt beim Lösen von quadratischen Gleichungen eine wichtige Rolle. Mit w ist stets auch $-w$ eine Lösung von $w^2 = D$, auch wenn die Diskriminante D nicht reell ist. Denn es ist $(-w)^2 = w^2 = D$. Ist z eine nicht reelle Lösung der quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ mit reellen Koeffizienten a, b, c, dann ist stets auch $\bar{z}$ eine Lösung dieser Gleichung. Dies geht aus der Lösungsformel hervor. Nicht reelle Lösungen einer quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten liegen in der Gauss'schen Zahlenebene symmetrisch bezüglich der reellen Achse.

4.2. Die Addition in der Gauss'schen Zahlenebene

Komplexe Zahlen werden addiert, indem man die Real- und die Imaginärteile separat addiert.

Übung 21 (geometrisch addieren)**.** Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + \mathrm{i}$ und $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

(a) Zeichne z_1, z_2 und $z_1 + z_2$ ein und verbinde die entsprechenden Punkte jeweils mit dem Nullpunkt.

(b) Interpretiere das Addieren von z_1 mit z_2 geometrisch.

Jedem Zahlenpaar $(a \,|\, b)$ lässt sich aber eindeutig der (Orts-)Vektor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

zuordnen. Wir können also jeder komplexen Zahl eindeutig einen Vektor in der Gauss'schen Zahlenebene zuordnen. Dieser Vektor kann dargestellt werden durch den Pfeil mit dem Anfangspunkt 0 und dem Endpunkt z.

Der Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$ entspricht in der Gauss'schen Zahlenebene die Vektoraddition der zugehörigen Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Denn Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten separat addiert. Die erste Komponente entspricht dem Realteil, die zweite dem Imaginärteil.

Genauso können wir die Subtraktion zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 geometrisch interpretieren. Auch hier gilt nämlich: Komplexe Zahlen werden subtrahiert, indem man die Realteile und Imaginärteile separat subtrahiert — genau wie bei der Subtraktion von Vektoren. Die Subtraktion der Vektoren zu z_1 und z_2 wird in der Praxis so konstruiert, dass man zum Vektor zu z_1 den zu z_2 entgegengesetzten Vektor, d.h. den Vektor zu $-z_2$, addiert. Denn es ist $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Übung 22 (Geometrie)**.** Zeichne ein Bild zur vektoriellen Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen.

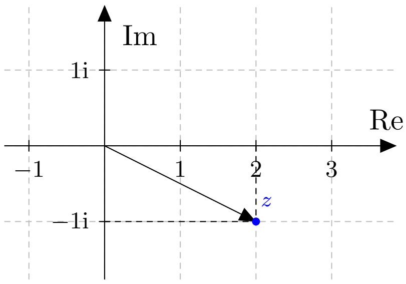
Übung 23 (S-Multiplikation)**.** Es sei z eine komplexe Zahl. Begründe mit Hilfe einer Skizze und der geometrischen Interpretation der Addition die Formeln

(a) $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ (b) $\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) = \mathrm{Im}(z)$

4.3. Der Betrag einer komplexen Zahl

Wie wir gesehen haben, lässt sich jeder komplexen Zahl z eindeutig ein Vektor in der Gauss'schen Zahlenebene zuordnen. Auch die Lönge des Vektors hat eine Entsprechung bei den komplexen Zahlen. Man spricht vom **Betrag**, in Zeichen $|z|$, der komplexen Zahl z. Dieser Begriff spielt im Folgenden eine zentrale Rolle.

Beispiel 6. Wir betrachten $z = 2 - \mathrm{i}$.



Die Länge $|z|$ des zugehörigen Vektors, d.h. der Abstand des Punktes $2-i$ zum Nullpunkt, ist nach dem Satz von Pythagoras

$$|z| = |2 - \mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Bemerkung. Ferner gilt für $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 .$$

Allgemein definiert man daher in natürlicher Weise:

Definition 4.2: Betrag

Es sei $z = a + b\mathrm{i}$ eine komplexe Zahl. Die Länge des zugehörigen Vektors nennt man den *Betrag* der komplexen Zahl z. Man schreibt $\bar{z}$. Es ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \geq 0.$$

Übung 24 (Permanenz)**.** Zeige, dass das Permanenzprinzip erfüllt ist.

Übung 25 (abs)**.** Berechne

(a) $|-\pi|$

(b) $|\mathrm{i}|$

(c) $|1.5 + 2\mathrm{i}|$

(d) $|-3 - 4\mathrm{i}|$

Wir haben gesehen, dass sich die Differenz $z_1 - z_2$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 als Pfeil von z_2 nach z_1 darstellen lässt.

Bemerkung. Der Ausdruck $|z_1 - z_2|$ kann geometrisch als Abstand der Punkte z_1 und z_2 interpretiert werden.

Damit kennen wir sowohl die geometrische als auch die algebraische Sichtweise komplexer Zahlen.

5. Die Darstellung in Polarform

In diesem Abschnitt lernen Sie eine zweite Darstellungsform für komplexe Zahlen kennen. Mit Hilfe dieser neuen Darstellungsform erhalten auch die Multiplikation und Division eine geometrische Bedeutung. Dies ermöglicht eine elegante Beschreibung von geometrischen Abbildungen und erleichtert die Potenzierung wesentlich.

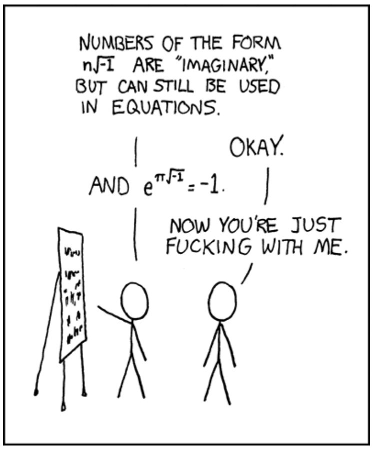
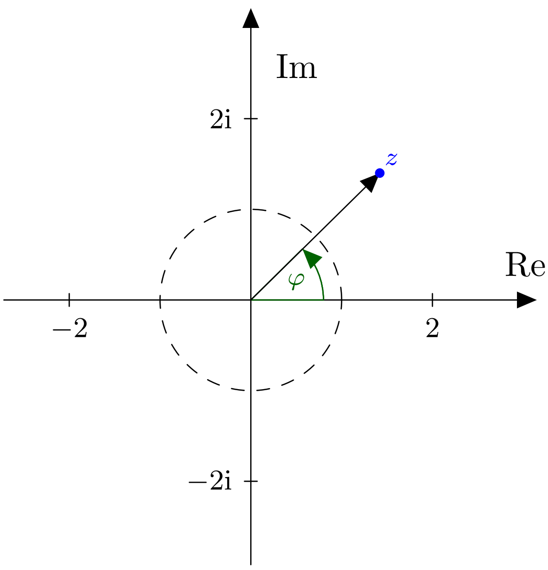


Abbildung 5: Die schönste Formel der Welt!

Wie wir gesehen haben, lässt sich jede komplexe Zahl z in der Gauss'schen Zahlenebene als Vektor darstellen. Dieser Vektor ist durch die Angabe des Real- und des Imaginärteils der komplexen Zahl z eindeutig festgelegt. Ein solcher vom Nullpunkt ausgehender Vektor lässt sich aber auch als Zeiger auffassen. Dieser Zeiger ist eindeutig festgelegt durch die Zeigerlänge r und den Winkel φ, den der Zeiger mit der positiven reellen Achse einschliesst. Als Beispiel betrachten wir den Zeiger mit der Länge $r = 2$ und dem Winkel $\varphi = 45°$.



Dieser Zeiger besitzt 2-mal die Länge des zugehörigen Einheitszeigers. Er hat die Länge 1 und schliesst mit der positiven reellen Achse den gleichen Winkel wie z ein, also in unserem Beispiel $\varphi = 45°$. Für die komplexe Zahl z, die dem Zeiger mit der Länge $r = 2$ und dem Winkel $\varphi = 45°$ entspricht, schreiben wir

$$z = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}45°}.$$

$e^{i45°}$ ist im Moment noch als reine Schreibweise aufzufassen. Erst später werden wir diesen Ausdruck beleuchten. Positive Winkel werden im Gegenuhrzeigersinn gemessen, negative Winkel im Uhrzeigersinn. Es ist dabei üblich, die Winkel im Bogenmass anzugeben. Im obigen Beispiel gilt dann

$$z = 2 \cdot e^{i45°} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Übung 26 (Pythagoras)**.** Prüfe das letzte Gleichheitszeichen mit einer Skizze und dem Satz von Pythagoras.

Übung 27 (Zeige, dass...)**.** Zeichne jeweils den entsprechenden Zeiger in eine Gauss'sche Zahlenebene ein. Notiere die Zahl auch in Normalform.

(a) $z_1 = 3 \cdot e^{i\pi}$ (b) $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$ (c) $z_3 = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (d) $z_4 = 3 \cdot e^{i3\pi}$ (e) $z_5 = 1 \cdot e^{i\cdot 0}$

Definition 5.1: Polarform

Es sei $z \neq 0$ eine komplexe Zahl. z wird eindeutig durch die Länge $r = |z|$ des zugehörigen Vektors und den Winkel φ, den der Vektor mit der positiven reellen Achse einschliesst, beschrieben. Man schreibt $z = re^{i\varphi}$ und bezeichnet dies als die *Polarform* von z. Der Winkel φ zwischen 0 und 2π wird als *Argument* von z bezeichnet. Man schreibt $\varphi = \arg(z)$.

Bemerkung. φ und $\varphi + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ergeben stets dieselbe komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$. In der Regel verwenden wir für φ Winkelwerte zwischen 0 und 2π. Jedoch ist es manchmal zweckmässig, mit negativen Winkelwerten zu rechnen.

Übung 28 (polar)**.** Gib folgende Zahlen in Polarform an: $3, 3i, -3, -3i$.

Übung 29 (Argument)**.** Es sei $z = 4 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Bestimme $|z|, \arg(z), \arg(-z), \arg(\bar{z})$.

Übung 30 (Pfeilchen)**.** Zeichne die komplexen Zahlen

$$z_n = 1 \cdot e^{i\cdot n\frac{\pi}{3}}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$ in eine Gauss'sche Zahlenebene ein. Was für eine Figur bilden die Punkte $z_0, \ldots, z_5$.

5.1. Polarform und Normalform

Bei der Bearbeitung der letzten Aufgaben hat sich die Frage aufgedrängt: Wie bestimmt man in weniger einfachen Fällen aus der Polarform $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ die Normalform $z = a + b\mathrm{i}$? Die Antwort ergibt sich mit Hilfe trigonometrischer Funktionen.

Übung 31 (Basics)**.** Leite die Formeln für a und b her, wenn die Polarform $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ bekannt ist.

Es gilt also

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\cos(\varphi) + \mathrm{i}r\sin(\varphi) = a + b\mathrm{i}.$$

Bemerkung. Da $re^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ ist, können wir daraus ablesen, dass

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$$

gelten muss. Diese Formel verknüpft die Exponentialfunktion, den Cosinus, den Sinus und die imaginäre Einheit i auf ganz überraschende Weise. In der Literatur wird dafür oft der Ausdruck

$$\mathrm{cis}(\varphi)$$

anstelle von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ verwendet.

Beispiel 7. Wir betrachten $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$. Es ist $r = 4$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ und damit

$$z = 4(\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\tfrac{3\pi}{4})) = -2\sqrt{2} + \mathrm{i}2\sqrt{2}.$$

Bemerkung. Da der Cosinus und der Sinus 2π-periodisch sind (d.h. $\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos(\varphi)$ sowie $\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \sin(\varphi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$), ist die obige Formel auch für negative Winkel oder solche grösser als 2π richtig.

Übung 32 (Normalform)**.** Berechne die Normalform der Zahlen

(a) $1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$

(b) $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$

(c) $\sqrt{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}}$

(d) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$

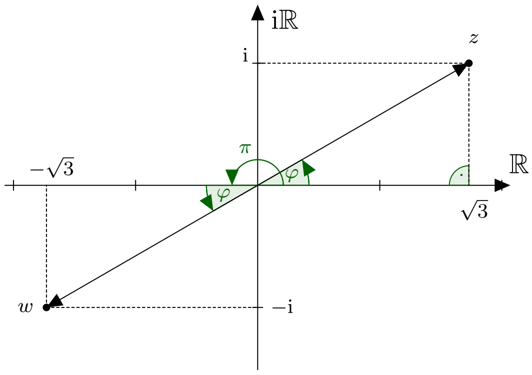
Wir wissen nun also, wie man aus der Polarform einer komplexen Zahl die Normalform bestimmen kann. Wie aber geht man umgekehrt vor? Wie erhält man aus der Normalform $z = a + b\mathrm{i}$ die Polarform $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$?

Übung 33 (Basics once again)**.** Leite zu $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ die Polardarstellung her. Zeichne.

Bemerkung. Bei der Berechnung der Polarform aus der Normalform muss man etwas vorsichtig sein. Zur Veranschaulichung berechnen wir die Polarform zu $w = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$. Es ist zwar wiederum $r = |z| = 2$ und

$$\tan(\varphi) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

was erneut zu $\varphi = \frac{\pi}{6}$ führt. Ein Blick auf die Vektordarstellung von w zeigt aber, dass w im dritten Quadranten liegt und der zugehörige Winkel daher $\tilde{\varphi} = \varphi + \pi = \frac{7\pi}{6}$ beträgt.



Wir müssen also zum Winkel φ noch π addieren, um in den richtigen Quadranten zu gelangen. Die Mehrdeutigkeit kommt daher zustande, dass der Tangens π-periodisch ist.

Satz 5.1

satz:polnorm Es sei $z \in \mathbb{C}$. Ist $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ in Polarform gegeben, dann ist die Normalform

$$z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)) = r\cos(\varphi) + \mathrm{i}r\sin(\varphi)).$$

Ist $z = a + b\mathrm{i}$ in Normalform gegeben, dann ist in der Polarform

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und

$$\varphi = \tan^{-1}(\tfrac{b}{a}),$$

bis auf ein additives π.

Übung 34 (Polarform)**.** Berechne die Polarform der Zahlen

(a) $1+\mathrm{i}$ (b) $-5+3\mathrm{i}$ (c) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ (d) $\sqrt{7}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

Übung 35 (und nochmal)**.** Es sei $z=2+4\mathrm{i}$ und $w=-1+2\mathrm{i}$. Berechne

(a) $\arg(z\cdot w)$ (b) $\left|\frac{z}{w-3\mathrm{i}}\right|$ (c) die Polarform von $\frac{w}{z}$

6. Die Multiplikation und Division in Polarform

Die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen können wir geometrisch als Vektoraddition, bzw. -subtraktion ihrer zugehörigen Vektoren interpretieren. Mit Hilfe der Polarform lässt sich nun auch die Multiplikation, bzw. Division zweier komplexer Zahlen geometrisch deuten.

Übung 36 (Multiplikation polar)**.** Es sei $z_1=\frac{2}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ und $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

(a) Berechne das Produkt $z_1\cdot z_2$ in Polar- und Normalform.

(b) Wie lautet die Vorschrift für die Multiplikation in Polarform?

Die obige Aufgabe lässt vermuten: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Um diese Vermutung zu bestätigen, betrachten wir nun die Multiplikation in allgemeiner Form.

Übung 37 (juhuu!)**.** Zeige die Vermutung mit $z_1=r_1\operatorname{cis}(\varphi_1)$ und $z_2=r_2\operatorname{cis}(\varphi_2)$.

Satz 6.1: Multiplikation polar

Sind $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ zwei komplexe Zahlen, dann gilt

$$z_1\cdot z_2=(r_1r_2)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Bemerkung. Diese Rechenvorschrift kann man sich leicht merken, wenn man $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ als „e hoch i mal φ“ interpretiert. Für Potenzen mit gleicher Basis gilt nämlich nach dem Potenzgesetz: $\mathrm{e}^m\cdot\mathrm{e}^n=\mathrm{e}^{m+n}$.

Übung 38 (Potenzieren)**.** Berechne folgende Ausdrücke:

(a) $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \cdot 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ (b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$ (c) $\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^2$

Übung 39 (Moivre)**.** Es sei $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ eine komplexe Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Wie lautet die Polarform z^n?

Übung 40 (de Moivre)**.** Berechne $(1+\mathrm{i})^6 + (1-\mathrm{i})^6$. Verwende einmal das Pascalsche Dreieck und gehe ein ander mal über die Polarform, um zu potenzieren.

Übung 41 (Einheit)**.** Es sei $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 0$ eine komplexe Zahl. Mit welcher Zahl muss z multipliziert werden, damit das Produkt 1 ergibt.

Bemerkung. Für die n-te Potenz, bzw. für den Kehrwert einer komplexen Zahl $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ gilt:

$$z^n = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi},$$

bzw.

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^{-1} = r^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\varphi)}.$$

Mit diesem Resultat lässt sich die Division zweier komplexer Zahlen trivialerweise auf die Multiplikation zurückführen. Im Grunde genommen ist eine Divison ja eine Multiplikation mit dem enstprechenden inversen Element.

Satz 6.2: Division polar

Sind $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ zwei komplexe Zahlen, dann gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Übung 42 (Rechnen)**.** Berechne für $v = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, $w = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ die folgenden Ausdrücke und gib das Ergebnis in Polarform an.

(a) $\frac{v \cdot w}{z}$ (b) w^{-3} (c) $z^2 \div v^5$

Übung 43 (beide Formen haben ihre Vor- und Nachteile)**.** Bestimme das Ergebnis des folgenden Ausdrucks in Polarform und in Normalform:

$$\frac{\mathrm{i}^{10}}{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^4}.$$

Übung 44 (Division einfach gemacht)**.** Zeige: Sind z_1 und $z_2 \neq 0$ komplexe Zahlen, so ist $\overline{z_1 \div z_2} = \overline{z_1} \div \overline{z_2}$.

7. Alle quadratischen Gleichungen sind lösbar!

In diesem Kapitel lernen Sie eine erste wichtige Anwendung der komplexen Zahlen kennen: Im Bereich der komplexen Zahlen sind *alle* quadratischen Gleichungen lösbar! Dies ist eine verblüffende Tatsache. Wir haben mit der Definition von i die Lösbarkeit einer quadratischen Gleichung gefordert, nämlich $x^2 = -1$. Nun zeigt sich, dass damit alle quadratischen Gleichungen lösbar sind. So ist das häufig in der Mathematik: Ein kleiner Schritt hat eine grosse Wirkung.

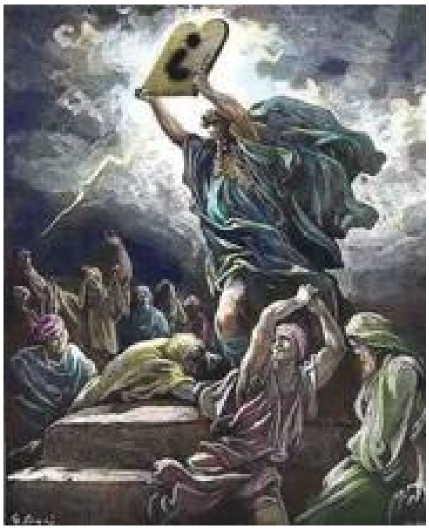


Abbildung 6: Gleichungen sind lösbar

Bemerkung. Effektiv sind nun sogar alle Polynomgleichungen n-ten Grades lösbar. Eine Entdeckung von, na wem wohl, Carl Friedrich Gauss.

7.1. Beispiele für quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen

Zu Beginn sind wir von der Gleichung

$$z^2 = -1$$

ausgegangen. Diese quadratische Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar — wohl aber in $\mathbb{C}$, wie Sie jetzt wissen. Sie besitzt die Lösung i. Wir schreiben für die Unbekannte nun z statt x, um anzudeuten, dass wir auch Lösungen in $\mathbb{C}$ zulassen wollen. Offensichtlich ist aber auch

$$(-\mathrm{i})^2 = (-1)^2 \cdot \mathrm{i}^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Also ist $-\mathrm{i}$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung $z^2 = -1$. Insgesamt besitzt die quadratische Gleichung $z^2 = -1$ zwei Lösungen, nämlich

$$z_1 = \mathrm{i} \text{ und } z_2 = -\mathrm{i}.$$

Bemerkung. Weitere Lösungen sind nicht möglich: $z^2 = -1$ ist äquivalent zu der Gleichung $z^2 - (-1) = 0$, und es gilt

$$0 = z^2 - (-1) = z^2 - \mathrm{i}^2 = (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}),$$

wobei im letzten Schritt die dritte binomische Formel benutzt wurde. Ein Produkt ist aber genau dann null, wenn einer der beiden Faktoren null ist. Also gibt es nur die beiden Lösungen $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$.

Wie gehen wir nun bei der Gleichung

$$z^2 = -2$$

vor? Ganz einfach, wir schreiben $z^2 = 2\cdot(-1)$ und finden die beiden konjugiert komplexen Lösungen

$$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{i} \text{ und } z_2 = -\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

Übung 45 (QuadrGL komplex)**.** Gib alle Lösungen der folgenden Gleichungen an.

(a) $z^2 = -4$

(b) $z^2 + 3 = 0$

(c) $6z^2 = 15$

(d) $z^3 = -8z$

7.2. Quadratisches Ergänzen

Im vorigen Abschnitt haben wir quadratische Gleichungen betrachtet, in denen z nur als z^2 vorkam. Wir konnten sie leicht lösen, indem wir sie auf die Form $(\dots)^2 = \text{Zahl}$ gebracht haben. Im Allgemeinen ist eine quadratische Gleichung aber von der Form

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit a, b, c reell und $a \neq 0$. Wie lässt sich eine solche Gleichung lösen? Als Beispiel sehen wir uns die folgende quadratische Gleichung an:

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Lässt sich diese Gleichung auch auf die soeben behandelte Form $(\dots)^2 = \text{Zahl}$ bringen? Denn dann können wir versuchen, unsere Lösungsmethode aus dem vorigen Abschnitt auf diese Gleichung anzuwenden. Um die linke Seite der Gleichung als Quadrat zu schreiben, benutzen wir die Methode des quadratischen Ergänzens. In unserem Beispiel funktioniert dies wie folgt:

$$0 = z^2 - 6z + 13 = [z^2 - 6z] + 13 = [(z-3)^2 - 9] + 13 = (z-3)^2 + 4$$

Die Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$ ist somit äquivalent zur Gleichung $(z-3)^2 + 4 = 0$. Auf den ersten Blick sieht die umgeformte Gleichung viel komplizierter aus als zuvor, aber bei näherer Betrachtung lässt sie sich wie die im vorigen Abschnitt behandelten Gleichungen lösen.

Übung 46 (ergänzt)**.** Bestimme alle Lösungen von

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

Die Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$ besitzt also die beiden Lösungen

$$z_1 = 3 + 2\mathrm{i} \text{ und } z_2 = 3 - 2\mathrm{i}.$$

7.3. Die allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Die allgemeine quadratische Gleichung ist von der Form

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Übung 47 (Repe)**.** Leite die Lösungsformel für quadratische Gleichungen her. Tipp: Benutze quadratische Ergänzung.

Übung 48 (zauberformelhaft)**.** Finde alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 + \frac{1}{2}z + 3 = 0.$$

Übung 49 (erweitere QuadrGL)**.** Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen

(a) $z^2 - 4z + 20 = 0$ (b) $\frac{4}{5}z - \frac{1}{5}z^2 = -9$ (c) $2z^2 - z + 1 = 0$

Übung 50 (netter Zusammenhang)**.** Zeige: Ist

$$az^2 + bz + c = 0$$

eine quadratische Gleichung mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann ist das Produkt der Lösungen reell.

Übung 51 (umgekehrt)**.** Die Gleichung

$$z^2 - 2z + a = 0$$

mit $a \in \mathbb{R}$ habe die Lösung $z_1 = 1 + \mathrm{i}$. Bestimme a und die zweite Lösung z_2.

Bemerkung. Die obige Lösungsformel gilt nach dem Permanenzprinzip auch für quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, d.h. für Gleichungen $az^2 + b^z + c = 0$ mit a, b, c komplex.

Übung 52 (und komplex)**.** Findest du die Lösungen von

$$z^2 - z + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{i} = 0?$$

A. Punktmengen in der Gauss'schen Zahlenebene

Übung 53 (Abstände)**.** Zeichne in der Gauss'schen Zahlenebene und markiere in verschiedenen Farben die Menge aller Punkte z mit

(a) $|z| = 1$

(b) $|z+1| = 1$

(c) $|z-(1+\mathrm{i})| = 1$

(d) $|z-1| = |z-3|$

Bemerkung. Für eine komplexe Zahl z ist die Gleichung

$$|z-m| = r$$

mit m komplex und r positiv ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r in der Gauss'schen Zahlenebene.

Beispielsweise kann die Einheitskreisscheibe, inklusive Rand, durch

$$|z| \leq 1$$

dargestellt werden. Oder die Menge aller Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene ohne die Kreisscheibe mit Radius 2 um $(-1\,|\,0)$ ist gegeben durch

$$|z+1| > 2.$$

Bei diesen einfachen Beispielen kann man intuitiv erkennen, wie die Punktmenge aussieht. Wie findet man die Punktmenge bei nichttrivialen Bedingungen?

Beispiel 8. Wir bestimmen rechnerisch, welche Punktmenge durch die Gleichung

$$\left|\frac{z-3}{z+1}\right| \geq 1$$

bestimmt ist. Das können wir mit verschiedenen †berlegungen erreichen.

1. Methode Man rechnet die Beträge aus

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-3}{z+1}\right| &\geq 1\\
|z-3| &\geq |z+1|\\
\sqrt{(a-3)^2+b^2} &\geq \sqrt{(a+1)^2+b^2}\\
a^2-6a+9+b^2 &\geq a^2+2a+1+b^2\\
8 &\geq 8a\\
a &\leq 1
\end{aligned}$$

D.h. die Lösung sind alle Punkte in der Halbebene $a \leq 1$ ohne $z = -1$.

2. Methode Man benutzt die Beziehung $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, woraus

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-3}{z+1}\right|^2 &\geq 1 \\
\frac{(z-3)(\bar{z}-3)}{(z+1)(\bar{z}+1)} &\geq 1 \\
z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 &\geq z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 \\
8 &\geq 4(z+\bar{z}) = 8a \\
a &\leq 1
\end{aligned}$$

3. Methode Man überlegt sich, was die Ungleichung geometrisch bedeutet. Hier sind alle Zahlen z gesucht, für die der Abstand von 3 grösser oder gleich dem Abstand von -1 ist. Diese Punkte liegen offensichtlich in der Halbebene $a \leq 1$.

Übung 54 (Apollonios-Kreis)**.** Zeichne die Menge aller Punkte

$$\left|\frac{z-5}{z+1}\right| \geq 2,$$

einen sogenannten *Apollonios-Kreis*[1]

Wir schreiben allgemein für den Kreis k mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}$

$$k(M, r) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - M| = r \,\},$$

wobei $r \in \mathbb{R}$.

Aus der Betragsfunktion erkennen wir die *Kreisgleichung*, denn aus $|z-M|^2 = r^2$ folgt die Form

$$z\bar{z} - M\bar{z} - \bar{M}z + s = 0.$$

Ohne den Produktterm $z\bar{z}$ stellt

$$p\bar{z} + \bar{p}z + s = 0$$

eine *Gerade* dar:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{s}{2b}.$$

Übung 55 (Kehrwert)**.** Zeige:

$$|z| = 1 \implies \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

[1] In der Geometrie ist der **Kreis des Apollonios** ein spezieller geometrischer Ort, nämlich die Menge aller Punkte, für die das Verhältnis der Entfernungen zu zwei vorgegebenen Punkten einen vorgegebenen Wert hat.

Übung 56 (Punktmengen)**.** Bestimme die Punktmenge gegeben durch die Gleichungen

(a) $|z-1+\mathrm{i}|<2$

(b) $\left|\frac{z+\mathrm{i}}{z-3\mathrm{i}}\right| \leq 1$

(c) $\left|\frac{z-2}{z+2\mathrm{i}}\right| = 1$

(d) $\left|\frac{z-5\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| \geq 2$

Übung 57 (Kreis)**.** Stellt die Gleichung

$$z\bar{z}-(3-\mathrm{i})\bar{z}-(3+\mathrm{i})z-6=0$$

einen Kreis dar? Falls ja, bestimme Mittelpunkt und Radius.

Übung 58 (Geraden)**.** Welche Punktmenge wird durch

$$|z-1|+|z+1|=4$$

dargestellt?

B. e hoch i mal phi

Wir haben für die Polarform einer komplexen Zahl die Schreibweise $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ („r-mal Einheitszeiger mit Winkel φ“) eingeführt. Dabei handelte es sich bis jetzt um eine reine Schreibweise. Von der Interpretation „e hoch i mal φ“ haben wir bei allen Herleitungen oder Beweisen keinen Gebrauch gemacht. In diesem Abschnitt werden wir plausibel machen, dass die komplexe Zahl $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ tatsächlich als e hoch i mal φ zu verstehen ist. Die Zahl

$$\mathrm{e} = 2.718281828459\ldots$$

wurde nach dem Schweizer Mathematiker und Physiker Leonhard Euler (1707-1783) benannt. Diese sogenannte **Eulersche Zahl** e ist definiert als

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Dies wird durch Tabelle 1 auf Seite 34 verdeutlicht. Die Zahlen $(1+\frac{1}{n})^n$ nähern sich für n gegen unendlich immer mehr und ausschliesslich der bestimmten Zahl $2.718\ldots$. Allgemeiner gilt für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n,$$

was im Spezialfall $a=1$ mit dem Obigen übereinstimmt. In diesem Ausdruck treten nur Grundrechenoperationen auf, die auch in $\mathbb{C}$ ausgeführt werden können. Wegen des Permanenzprinzips sollte also auch e^z mit $z \in \mathbb{C}$ definiert sein.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
10	2.59...
100	2.70...
1000	2.716...
100000	2.71826...
100000000	2.71828...

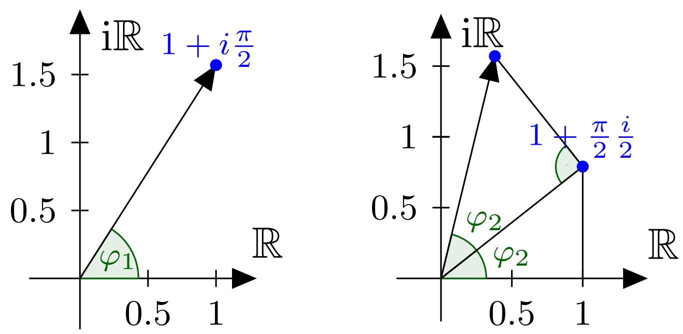
Tabelle 1: Approximation an e

Beispiel 9. Wir versuchen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^n$$

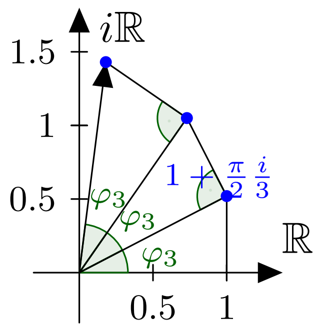
zu bestimmen. Wir betrachten die Entwicklung in Tabelle 2 auf Seite 35.

Geometrisch sehen die ersten drei Näherungen wie folgt aus:



n	$(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\cdot\frac{\pi}{2})^n$
1	$1+\mathrm{i}\cdot 1.570796\dots$
2	$0.383149\dots+i\cdot 1.570796\dots$
10	$0.014381\dots+\mathrm{i}\cdot 1.129518\dots$
100	$0.000130\dots+\mathrm{i}\cdot 1.012411\dots$
1000	$0.000001\dots+\mathrm{i}\cdot 1.001234\dots$
100000	$0.000000\dots+i\cdot 1.000012\dots$

Tabelle 2: Approximation an $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$



Für die Polarform $r_n e^{\mathrm{i}\varphi_n}$ des Faktors $(1+\frac{\mathrm{i}}{n}\cdot\frac{\pi}{2})$ gilt

$$r_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}\cdot\pi^2 4}, \quad \tan\varphi_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Daraus folgt

$$r_n^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi_n} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)^n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi_n}.$$

Erstens gilt nun für grosse n näherungsweise $\tan\alpha\approx\alpha$, d.h. $\varphi_n\approx\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$ und damit

$$n\varphi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

und zweitens ist $(1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4})^n\approx 1^n+n\cdot 1^{n-1}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}$, d.h.

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)^n \approx 1+\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi^2}{4} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Übung 59 (Näherungen)**.** Begründe die oben verwendeten Näherungen.

Damit gilt also die Definition der Euler'schen Zahl auch für komplexe Zahlen.

Bemerkung. Setzt man $\varphi = \pi$, so erhält man

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1.$$

Man kann diese Gleichung auch schreiben als

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$

Diese Gleichung wird von vielen Mathematikern als „die schönste Formel“ bezeichnet, denn in ihr treten die fünf Zahlen $0, 1, \mathrm{e}, \pi$ und i auf — die fünf wichtigsten Zahlen für Mathematiker — sowie die Operationen Addition, Multiplikation und Potenzieren.

C. Vorsicht mit neuen Zahlen

Wir haben die imaginäre Einheit i definiert als Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Warum sollten wir nicht ähnlich bei anderen Gleichungen vorgehen, die im Reellen keine Lösung besitzen?

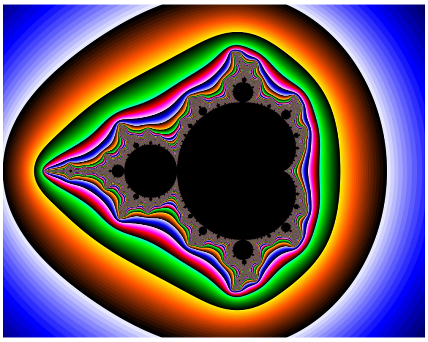


Abbildung 7: Apfelmännchen

Beispiel 10. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$x \cdot 0 = 1.$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung in $\mathbb{R}$, denn das Produkt einer reellen Zahl mit 0 ist immer 0.

Analog zu unserem Vorgehen bei der Definition der imaginären Einheit definieren wir nun eine Zahl j, die eine Lösung der obigen Gleichung sein soll. Es soll also gelten

$$j \cdot 0 = 1.$$

Mit dieser Zahl j soll man nach den üblichen Regeln rechnen können (Permanenzprinzip). Dann gilt zum Beispiel:

$$(0 + 0) \cdot j = 0 \cdot j = 1.$$

Es ist aber auch

$$(0+0)\cdot j = 0\cdot j + 0\cdot j = 1+1 = 2.$$

Das heisst $1 = 2$ und widerspricht dem Rechnen in $\mathbb{R}$. Also gibt es in $\mathbb{R}$ keine sinnvolle Erweiterung, in der die Gleichung $x \cdot 0 = 1$ eine Lösung besitzt.

Wir haben Glück, dass es mit i so gut funktioniert! Und vielleicht verstehen Sie jetzt auch, warum so viele Mathematiker und Mathematikerinnen sich so lange mit den imaginären Zahlen schwer getan haben. Man konnte ja nie wissen, ob man nicht irgendwann auf einen Widerspruch stösst!

Übung 60 (gleich 0)**.** Zeige, dass die Gleichung

$$10^x = 0$$

keine reelle Lösung haben kann.

D. i ist nicht die Wurzel aus -1

In vielen Lehrbüchern findet man die Schreibweise $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Was ist problematisch an dieser Schreibweise? Wenn man $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ schreibt, dann ist man natürlich auch in Versuchung, die üblichen Rechenregeln für Wurzeln von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ zu übertragen. Das führt allerdings zu Schwierigkeiten. Die Wurzelrechnung ist im Komplexen etwas komplexer.

Beispiel 11. Verwendet man in $\mathbb{C}$ die üblichen Wurzelregeln aus $\mathbb{R}$, dann erhält man

$$-1 = \mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

$-1 = 1$ steht offensichtlich im Widerspruch zum Rechnen in $\mathbb{R}$. Die Schreibweise $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ist deshalb irreführend und sollte nicht verwendet werden.

Übung 61 (Wurzeln)**.** Überlege dir, wo in der obigen Rechnung der Fehler stecken muss. Welche Operation ist demnach in $\mathbb{C}$ nicht erlaubt?

E. Ist i positiv oder negativ?

Aus dem Reellen wissen Sie: Eine von null verschiedene, reelle Zahl ist entweder positiv oder negativ. Überdies gilt: Reelle Zahlen lassen sich der Grösse nach ordnen.

Wie stehst mit i? Sicher ist $\mathrm{i} \neq 0$, denn $0^2 = 0$, aber $\mathrm{i}^2 = -1$. Also kommt $\mathrm{i} > 0$ oder $\mathrm{i} < 0$ in Frage. Nehmen wir an, dass $\mathrm{i} > 0$. Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit i folgt

$$\mathrm{i}^2 > 0,$$

wobei das Ungleichheitszeichen wegen der Annahme $\mathrm{i} > 0$ unverändert bleibt. Also haben wir $-1 > 0$, was im Widerspruch zum Rechnen in $\mathbb{R}$ steht. Dann müsste also $\mathrm{i} < 0$ gelten?

Übung 62 (Ordnung geht verloren)**.** Zeige, dass $\mathrm{i} < 0$ auch nicht sein kann.

Bemerkung. Die Zahl i ist also weder positiv noch negativ.

Die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ wird also mit dem Verzicht auf Ordnung bezahlt. In $\mathbb{C}$ gelten die Anordnungsaxiome nicht mehr.

F. Die logarithmische Spirale

In der Natur und im Alltag kommen eine Vielzahl von Spiralformen vor. Die Kerne von Sonnenblumen sind spiralförmig um den Mittelpunkt angeordnet, Schneckenhäuser wachsen spiralförmig, Luftschlangen sind als Spirale aufgewickelt.

Abbildung 8: Sonnenblume und logarithmische Spirale

Übung 63 (Spiral)**.** Es sei

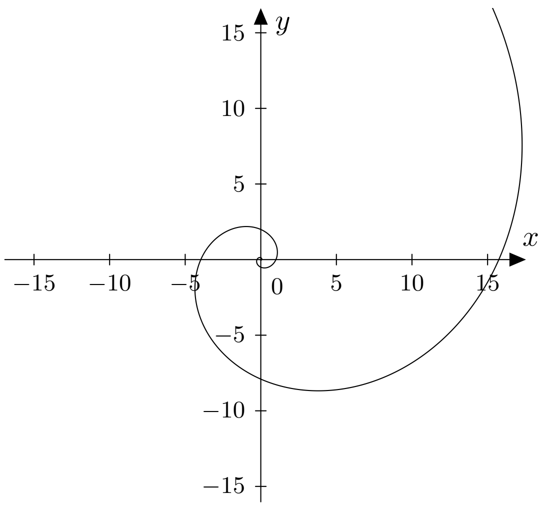
$$z = 1 + \mathrm{i}.$$

Berechne $z^2, z^3, \ldots, z^8$ und zeichne die entstehenden Zahlen zusammen mit z als Punkte in ein Koordinatensystem. Verbinde anschliessend die Punkte durch Strecken.

Was Sie erhalten ist bereits eine Annäherung an eine logarithmische Spirale. Eine vollständige logarithmische Spirale erhält man, wenn man von den diskreten Exponenten $1, 2, \ldots, 8$ zu einem kontinuierlichen Exponenten $t \in \mathbb{R}$ übergeht. Statt $z^1, z^2, \ldots$ betrachten wir z^t mit $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 12. Wir betrachten
$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$
kontinuierlich. Es ist
$$(1+\mathrm{i})^t = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^t = 2^{\frac{t}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}t} =: w(t).$$
Zu jedem Wert t kann die Zahl $w(t)$ bestimmt werden und der zugehörige Punkt in der Gauss'schen Zahlenebene eingezeichnet werden. Alle diese Punkte bilden eine Spirale, eine so genannte **logarithmische Spirale**



Übung 64 (Spirale im Kleinen)**.** Überlege dir, wie die logarithmische Spirale in einer Umgebung von 0 aussieht.

Auf den ersten Blick erscheint es sinnvoll, die folgende Vorschrift zu verwenden: Wenn z eine nicht reelle Zahl ist, dann betrachten wir die Kurve $w(t) = z^t, \quad t \in \mathbb{R}$.

Übung 65 (versandet)**.** Was passiert, wenn man $z = \mathrm{i}$ wählt? Welche anderen komplexen Zahlen verwendet man demnach auch nicht, um eine logarithmische Spirale zu erzeugen?

Definition 6.1: Logarithmische Spirale

Es sei z eine nicht reelle Zahl mit $|z| \neq 1$. Die durch die Gleichung

$$w(t) = z^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegebene Kurve heisst *logarithmische Spirale.*

Bemerkung. Es gab einen Mathematiker, der von der logarithmischen Spirale so begeistert war, dass er sie in seinen Grabstein gemeisselt haben wollte. Dass sein Wunsch nicht erfüllt wurde, ist noch heute im Baseler Münster zu sehen. Welche Spirale Jakob Bernoullis Grabstein ziert und warum können Sie beispielsweise in dem Buch von Johanna Heitzer nachlesen. Dort finden Sie auch eine Erklärung, warum man diese Art von Spirale „logarithmisch“ nennt. Alternativ dazu können Sie unter „Jakob Bernoulli“ und „logarithmische Spirale“ im Internet recherchieren.

G. Mathematische Motten

Dass Motten und andere Nachtfalter von starken Lichtquellen angezogen werden, weiss jeder, der einmal im Sommer mit einer Lichtquelle im Freien gesessen hat oder sich im Freiluftkino über die Insektenschatten auf der Leinwand ärgern musste. Entomologen benutzen diese Tatsache beim so genannten Lichtfang. Warum ist das aber so? Wussten Sie, dass Motten auch von Lichtquellen abgestossen werden können? Und was hat das Ganze eigentlich mit logarithmischen Spiralen zu tun?

Warum Motten vom Licht angezogen werden, ist noch nicht vollständig geklärt. Die plausibelste Theorie nimmt an, dass Motten sich bei ihren nächtlichen Flügen an natürlichen Lichtquellen orientieren. Der Mond oder auch helle Sterne bilden eine solche Lichtquelle. Man nimmt an, dass Motten geradeaus fliegen, indem sie zu den Lichtstrahlen dieser Lichtquellen einen konstanten Flugwinkel einhalten. Da der Mond nämlich sehr weit entfernt ist, sind die Lichtstrahlen, die von ihm bei uns auf der Erde ankommen, in guter Näherung Parallelen. Wenn die Motte also einen konstanten Winkel zu ihnen einhält, fliegt sie automatisch geradeaus. Das Mondlicht fällt schräg von links oben ein. Die Motte fliegt mit dem konstanten Flugwinkel α zu diesem Mondlicht. Was passiert nun, wenn sich eine helle Lichtquelle wie etwa eine Kerze oder eine Lampe in der Nähe befindet? Wir nehmen idealisiert an, dass diese Lichtquelle punktförmig ist.

Übung 66 (Motte)**.** Zeichne die Flugbahn der Motte in eine Skizze ein. Berücksichtige dabei, dass die Motte zu den Lichtstrahlen stets den konstanten Flugwinkel α einhält.

Bei der Bearbeitung der vorangegangenen Aufgabe 66 haben Sie festgestellt, dass sich die Motte spiralförmig auf die Lichtquelle zubewegt. Die Form der Spirale sollte Ihnen bekannt vorkommen. Es handelt sich um eine logarithmische Spirale. Logarithmische Spiralen haben nämlich die Eigenschaft, dass sie jede vom Ursprung ausgehende Gerade immer unter dem gleichen Winkel schneiden. In unserem Beispiel sind die vom Ursprung ausgehenden Geraden die Lichtstrahlen der künstlichen Lichtquelle. Die logarithmische Spirale ist die Flugbahn der Motte.

H. Juliamengen

Wahrscheinlich haben Sie schon solche Bilder gesehen oder den Namen gehört: Seit man Juliamengen auf dem Computer berechnen kann, sind Postkarten und Poster von den farbig schillernden Gebilden sehr beliebt.

Wir beginnen mit einem einfachen Rezept. Sie könnten dieses Rezept beispielsweise einem Computer einprogrammieren. Es lautet folgendermassen:

1. Nimm eine komplexe Zahl. (Diese Zahl nennen wir den *Startwert.*)

$$z_0 = c$$

2. Quadriere diese Zahl und subtrahiere 1 von der quadrierten Zahl.

$$z_1 = c^2 - 1$$

3. Nimm die so entstandene neue Zahl und wiederhole die Schritte 2. und 3. bis in alle Unendlichkeit...

$$z_{k+1} = z_k^2 - 1, \quad z_0 = c$$

Bemerkung. Wenn Sie dieses Rezept wirklich programmieren wollten, müssten Sie natürlich noch eine Abbruchbedingung einbauen. Beispielsweise könnten Sie eine Anweisung schreiben „Höre nach tausend Wiederholungen auf". Sonst läuft das Programm unendlich lange.

Beispiel 13. Als Startwert nehmen wir die Zahl 2. Wir schreiben $z_0 = 2$. Damit drücken wir aus, dass 2 der Startwert unserer Zahlenfolge ist. Nach dem Rezept sollen wir 2 nun quadrieren und anschliessend 1 abziehen. Dadurch erhalten wir $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Diesen neuen Wert nennen wir z_1. Es ist also $z_1 = 3$. Gemäss dem Rezept sollen wir nun wieder den zweiten und dritten Schritt ausführen, diesmal mit der Zahl 3 statt 2. Wir erhalten $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$. Diese Zahl nennen wir z_2. Es ist also $z_2 = 8$. Wir können nun immer weiter fortfahren und erhalten neue Zahlen z^3, z^4, z^5, usw. Insgesamt erhalten wir eine Zahlenfolge $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \ldots$.

Übung 67 (Folge)**.** Berechne mit dem TR die Folgeglieder z_3 bis z_6.

Wir können die Zahlenfolge, die auf diese Weise entsteht, durch eine Rechenvorschrift angeben:

$$z_0 = 2, \quad z_{k+1} = z_k^2 - 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Wie Sie in †bung 67 gesehen haben, werden bei der Folge oben die Folgeglieder immer grösser. Ist das immer so? Was passiert, wenn wir statt 2 einen anderen Startwert z_0 wählen?

Übung 68 (Startwerte)**.** Berechne für folgende Startwerte z_1 bis z_4.

(a) $z_0 = 0$ (b) $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ (c) $z_0 = \frac{1}{2}$

Übung 69 (Beträge)**.** Berechne zu den Zahlenfolgen aus Übung 68 die Folge der Beträge.

Bei dem ersten Beispiel ist der Fall klar: Die Beträge wechseln immer zwischen 0 und 1. Bei dem zweiten Beispiel ist das Verhalten nicht ganz so klar. Aber immerhin scheint es so zu sein, dass die Beträge immer grösser werden. Dass das tatsächlich der Fall ist, müsste man natürlich beweisen. Wir wollen uns hier aber mit der Vermutung zufrieden geben, dass es so ist. Bei dem dritten Beispiel scheint es so zu sein, dass die Beträge immer kleiner als 1 bleiben. Das ist tatsächlich so. †berlegen Sie sich einmal, warum das so ist.

Wenn Sie weitere Startwerte wählen, werden Sie feststellen, dass Sie neue Folgen erhalten, die sich verschieden verhalten. Manche pendeln zwischen einigen wenigen Werten hin und her, manche werden betragsmässig immer grösser, und bei manchen scheinen die Beträge der Zahlen einen bestimmten Wert nie zu überschreiten, selbst wenn sie nicht nur zwischen zwei Werten hin und her schwanken. Im nächsten Abschnitt wollen wir das ausnutzen, um eine Juliamenge zu erhalten.

Wir benutzen nun unsere Zahlenfolgen, um die Punkte der Gauss'schen Zahlenebene auf eine bestimmte Art und Weise zu färben. Dabei gehen wir nach folgendem Schema vor: Wir nehmen eine komplexe Zahl z_0 in der Gauss'schen Zahlenebene. Diese Zahl nehmen wir als Startwert für eine Folge von Zahlen, die nach dem oben beschriebenen Rezept berechnet wird. Jetzt färben wir den Punkt z_0 in der Gauss'schen Zahlenebene entweder

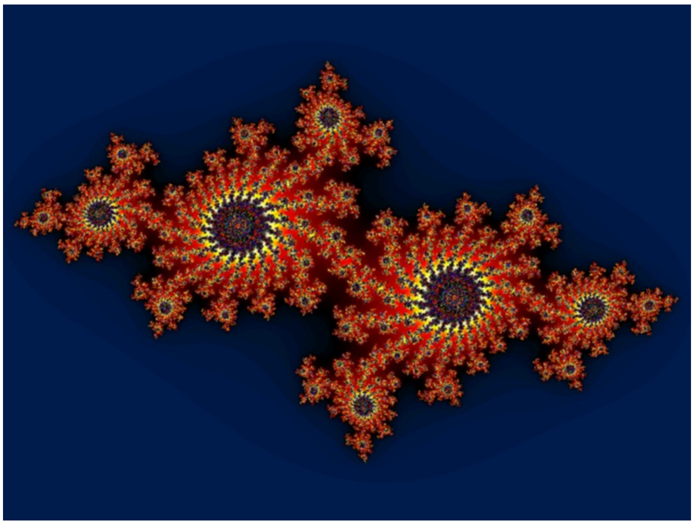
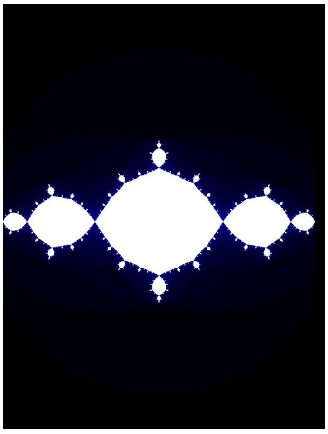


Abbildung 9: Eine Juliamenge

schwarz oder weiss. Und zwar entscheiden wir nach folgendem Kriterium: Wachsen die Beträge der (theoretisch unendlich vielen) Zahlen in der Folge über alle Grenzen, so färben wir den Punkt schwarz. Andernfalls färben wir den Punkt weiss. Nach und nach führen wir dies mit allen Punkten der Gauss'schen Zahlenebene durch. Wir erhalten so ein schwarz-weisses Muster. Alle weissen Punkte in der Ebene zusammen sind eine Juliamenge! Und so sieht sie aus:



Die reelle und imaginäre Achse haben wir weggelassen. Schliesslich geht es uns nur um das Prinzip — wir wollen nicht genau berechnen, wo die Randpunkte auf den Achsen liegen. Das ist übrigens auch gar nicht so einfach.

H.1. Weitere Juliamengen

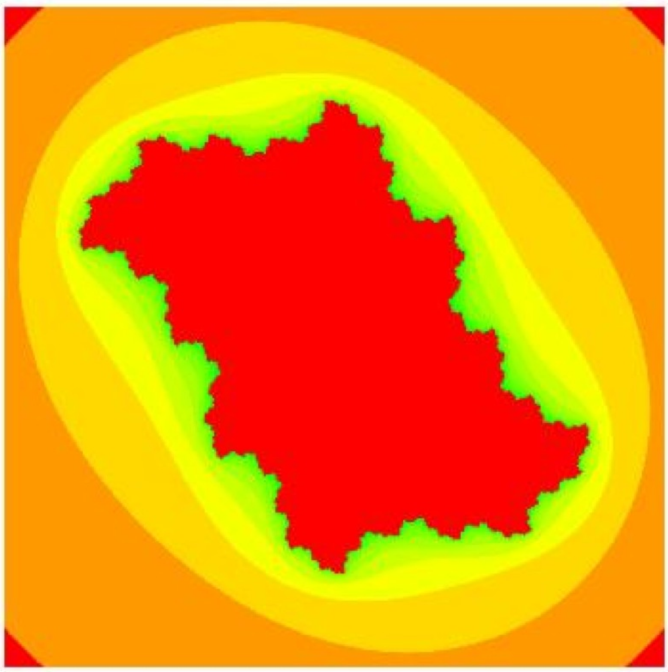
Es gibt nicht nur eine Juliamenge, sondern unendlich viele verschiedene. Sehen wir uns doch noch einmal die Rechenvorschrift an, die zu unserer Juliamenge gehört. Zu einem Startpunkt z_0 haben wir die Folgenglieder der zugehörigen Folge berechnet durch

$$z_{k+1} = z_k^2 - 1 \quad \forall n \geq 0.$$

Wir haben von dem Quadrat eines Folgenglieds immer 1 abgezogen. Oder anders ausgedrückt: -1 dazu addiert. Jetzt wollen wir die Rechenvorschrift ein wenig abändern: Wir addieren nicht mehr -1 dazu, sondern $\frac{1}{2}\mathrm{i}$. Warum auch nicht? Wir berechnen dann zu einem Startpunkt z_0 die Folgenglieder der zugehörigen Folge durch die Vorschrift

$$z_{k+1} = z_k^2 + \frac{1}{2}\mathrm{i} \quad \forall n \geq 0.$$

Danach gehen wir ganz genauso vor wie im ersten Beispiel: Wir färben einen Punkt der Ebene schwarz, wenn die Beträge der zugehörigen Folgenglieder über alle Grenzen anwachsen, und andernfalls weiss. Dadurch erhalten wir wieder eine Juliamenge. Sie sieht so aus:



Bemerkung. Dieses Bild wurde mit Mathematica erzeugt:

```
Julia[zo_] :=
  Module[{z = zo, i = 0},
    While[i < 100 && Abs[z] < 2,
    z = z^2 + c; i++]; i]; c = 0.5*I;
    DensityPlot[Sqrt[Julia[x + I y]],
    {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5},
 PlotPoints -> 275, Mesh -> False,
 Frame -> False,
 ColorFunction -> Hue]
```

Auf diese Weise können wir unendlich viele Juliamengen erzeugen. Die allgemeine Formulierung der Rechenvorschrift, mit der wir zu einem Startpunkt z_0 die Folgenglieder der zugehörigen Folge berechnen, lautet

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, \quad \forall n \geq 0,$$

wobei c eine komplexe Zahl sein soll. Für jede komplexe Zahl c erhalten wir eine Juliamenge. Wie die Mengen für $c = -1$ und für $c = \frac{1}{2}\mathrm{i}$ aussehen, haben wir schon gesehen.

Bilder von Juliamengen sind deshalb so beliebt, weil sie bunt sind und schön aussehen. Was haben eigentlich die schwarz-weissen Muster mit diesem Farbenrausch zu tun? Das ist nur eine von vielen Fragen, denen wir hier nicht mehr nachgehen. Genau wie die Frage, wie Sie denn nun selbst Bilder von Juliamengen auf dem Computer erzeugen können, oder woher der Name „Juliamenge" kommt. Und was ist mit der *Mandelbrotmenge*? Die taucht doch im Zusammenhang mit Juliamengen auch immer wieder auf. Und was haben Juliamengen mit Fraktalen zu tun?

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis