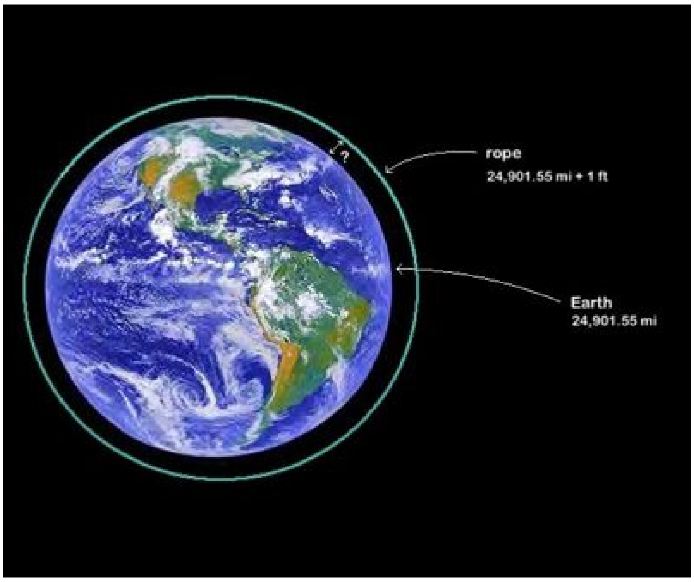


Lineare Funktionen und Optimierung

. . . und der Differenzenquotient

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionen

1.1. Grundlagen

Aus dem Alltag kennen Sie graphische Darstellungen von Funktionen. Zum Beispiel wird in den Nachrichten der SMI (Swiss Market Index) häufig als Graph illustriert.

Beispiel 1.

Jedem Datum wird ein bestimmter Index zugeordnet. Den Wert des Index zu einem bestimmten Zeitpunkt kann man auf der vertikalen Achse ablesen.

In der Mathematik versteht man unter einer Funktion folgendes.

Definition 1.1: Funktion

Eine *Funktion* ist eine Zuordnung, bei der jedem Element x einer Menge $\mathbb{D}$ eindeutig ein Element y einer Menge $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Man schreibt:

$$y = f(x)$$

(sprich: „y gleich f von x“)

Anschaulich stellt man eine Funktion mit Mengendiagrammen dar.

Definition 1.2: Unabhängige Variable, Argument

Die Menge $\mathbb{D}$ nennt man *Definitionsmenge*. Ein Element $x \in \mathbb{D}$ heisst *Argument* von f oder neudeutsch *input*. x wird auch als *unabhängige Variable* bezeichnet.

Definition 1.3: Abhängige Variable, Funktionswert

Die Menge $\mathbb{W}$ nennt man *Wertemenge* oder Bild von f. Ein Element $y \in \mathbb{W}$ heisst *Funktionswert* oder neudeutsch *output*. y wird auch häufig als *abhängige Variable* bezeichnet.

Beispiel 2. Beim SMI ordnet die Funktion f jedem Monat x genau eine Quote y zu.

Beispiel 3. Das Quadrieren ist eine Funktion. Jeder reellen Zahl x wird ihr Quadrat

$$y = x^2$$

zugeordnet.

1.2. Darstellungen

Will man beispielsweise als Funktion das Quadrieren von Zahlen darstellen, so kann dies auf verschiedene Arten geschehen. Die gebräuchlichsten Darstellungen von Funktionen — hier am Beispiel des Quadrierens der Werte $-2, -1, 0, 1, 2$ — sind:

- Schreibweise konkret mit Funktionswerte: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1, f(2) = 4$
- Darstellung als Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

- Darstellung als Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^2 \qquad \mathbb{D} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

- graphische Darstellung in einem Koordinatensystem:

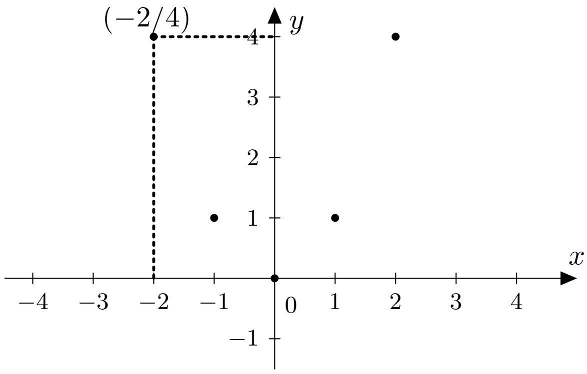


Abbildung 1: Graphische Darstellung im Koordinatensystem

1.3. Graph einer Funktion

Wir wollen präzise formulieren, was wir unter dem Graphen einer Funktion verstehen wollen. Zuerst eine Hilfsdefinition

Definition 1.4: Geordnetes Paar

Ein Paar $(x \,|\, y)$ heisst *geordnet*, wenn die Reihenfolge von x und y wesentlich ist.

Definition 1.5: Graph

Sei $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{W}$ eine Funktion. Die Menge aller geordneten Paare

$$G_f = \{\, (x \,|\, f(x)) \mid x \in \mathbb{D} \,\}$$

heisst *Graph* von f.

1.4. Einschränkungen des Definitionsbereichs einer Funktion

Für manche Beschreibungen von alltäglichen Zusammenhängen, die als Funktionen beschrieben werden, ist die Anpassung der Definitionsmenge der entsprechenden Funktion sinnvoll. Im Folgenden wird der Einfluss der Definitionsmenge auf die Funktion bzw. ihren Graphen veranschaulicht.

Beispiel 4. Wir betrachten den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^2$$

für verschiedene Definitionsmengen.

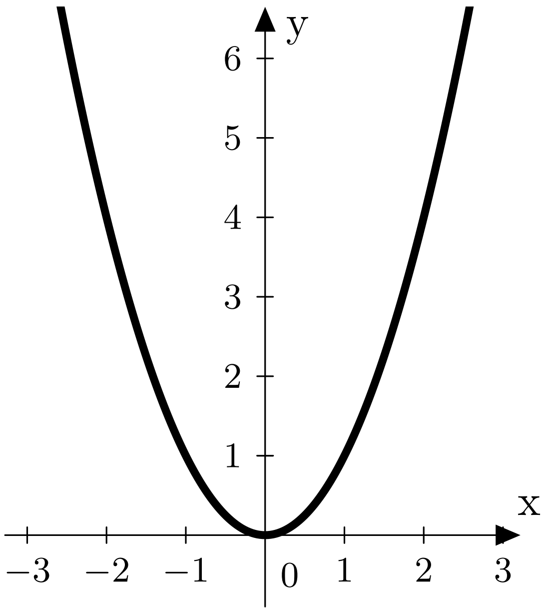


Abbildung 2: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Übung 1. (gerade) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = -x + 2.$$

(a) Berechne $f(1), f(0)$ und $f(-1)$.

(b) Zeichne den Graphen für (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für (ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Übung 2. (x hoch 3) Sei

$$f(x) = x^3.$$

Berechne einige Funktionswerte und skizziere den Graphen.

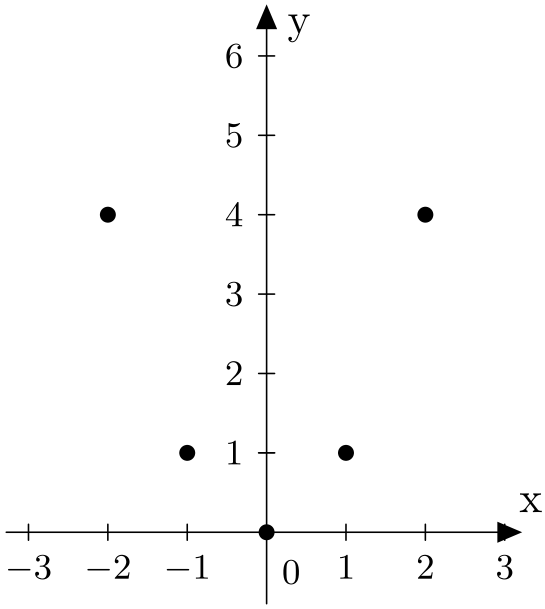


Abbildung 3: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

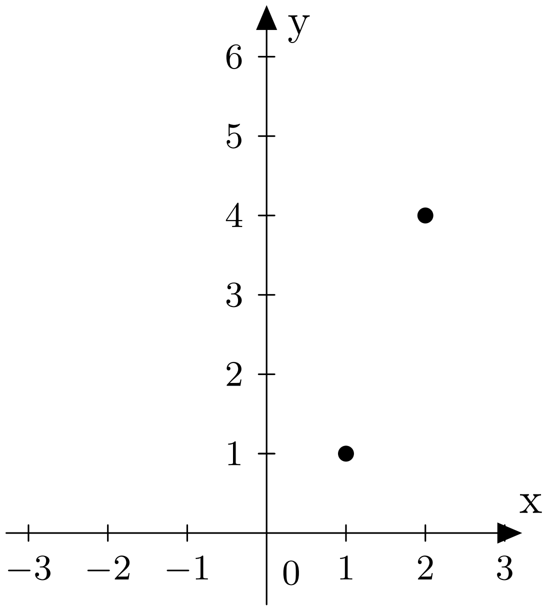


Abbildung 4: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Übung 3. (freier Fall) Gegeben sei die Funktion

$$s(t) = 20 - 5t^2.$$

(a) Berechne $s(-1), s(0), s(2)$ und $s(2)$

(b) Wann gilt $s(t) = 0$?

(c) Bestimme

(i) $s(2) - s(1)$

(ii) $\frac{s(3)-s(1)}{3-1}$

(iii) $\frac{s(2+h)-s(2)}{h}$

(d) Berechne allgemein für beliebiges t den Quotienten

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

und überlege dir, welchen Wert dieser Quotient für $h \to 0$ annimmt.

Übung 4. (exponentiell) Man weiss von einer Funktion vom Typ

$$N(t) = a \cdot b^t,$$

dass sie die Werte $N(0) = 10$ und $N(2) = 6.4$ annimmt.

(a) Bestimme die Parameter a und b.

(b) Berechne $N(1)$ und $N(-2)$.

(c) Skizziere den Graphen.

(d) Bestimme

(i) $\frac{N(2)-N(0)}{2}$

(ii) $\frac{N(3)-N(1)}{2}$

(iii) $\frac{N(t+h)-N(t)}{h}$

$f(x) = x^3$

$\rightarrow \quad f(0) = 0^3 = 0 \qquad (0|0)$

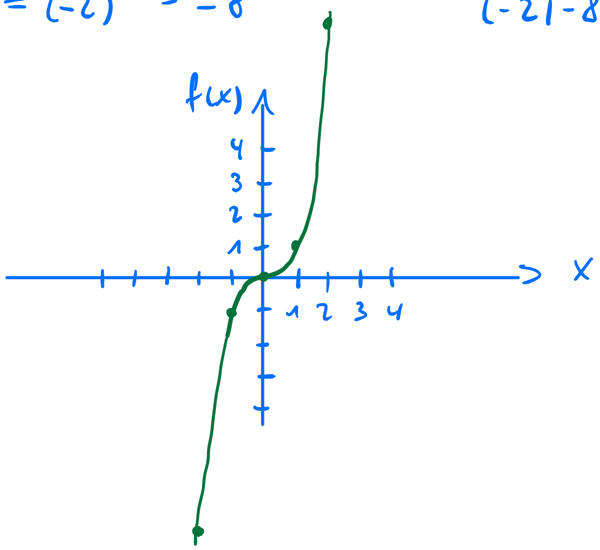
$f(1) = 1^3 = 1 \qquad (1|1)$

$f(-1) = (-1)^3 = -1 \qquad (-1|-1)$

$f(2) = 2^3 = 8 \qquad (2|8)$

$f(-2) = (-2)^3 = -8 \qquad (-2|-8)$

$\vdots$



$s(t) = 20 - 5t^2$

$s(-1) = 20 - 5\cdot(-1)^2 = 20 - 5 = \underline{\underline{15}}$

$s(0) = 20 - 5\cdot 0^2 = \underline{\underline{20}}$

$s(1) = 20 - 5\cdot 1^2 = \underline{\underline{15}}$

$s(t) = 0 = 20 - 5t^2 \quad | + 5t^2$

$\Rightarrow \quad 5t^2 = 20 \quad | : 5$

$t^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$t = \underline{\underline{\pm 2}}$

$$s(2)-s(1) = 20-5\cdot 2^2 - (20-5\cdot 1^2) = 0-15 = \underline{\underline{-15}}$$

$$\frac{s(3)-s(1)}{2} = \frac{20-5\cdot 3^2-(20-5\cdot 1^2)}{2} = \frac{-25-15}{2} = \underline{\underline{-20}}$$

$$\frac{s(2+h)-s(2)}{h} = \frac{20-5\cdot(2+h)^2-(20-5\cdot 2^2)}{h}$$

$$= \frac{20-5\cdot(4+4h+h^2)}{h} = \frac{20-20-20h-5h^2}{h}$$

$$= \frac{-20h-5h^2}{h} = \frac{-5h(4+h)}{h} = \underline{\underline{-5(4+h)}}$$

$$-5(4+h) \xrightarrow{h\to 0} (-5)\cdot 4 = \underline{\underline{-20}}$$

$$N(t) = a\cdot b^t \quad , \quad N(0) = 10 \quad , \quad N(2) = 6.4$$

$$N(0) = a\cdot b^0 = a = \underline{\underline{10}} \quad \to \quad N(t) = 10\cdot b^t$$

$$N(2) = 10\cdot b^2 = 6.4 \quad /:10$$

$$b^2 = 0.64 \quad /\sqrt{}$$

$$b = \underline{\underline{\pm 0.8}}$$

$\to \quad N(t) = 10\cdot 0.8^t \qquad$ (-0.8 ist für eine Funktion nonsense)

$$N(1) = 10\cdot 0.8^1 = \underline{\underline{8}} \quad , \quad N(-2) = 10\cdot 0.8^{-2} = 10\cdot \frac{1}{0.64} = \underline{\underline{\frac{25}{16}}}$$

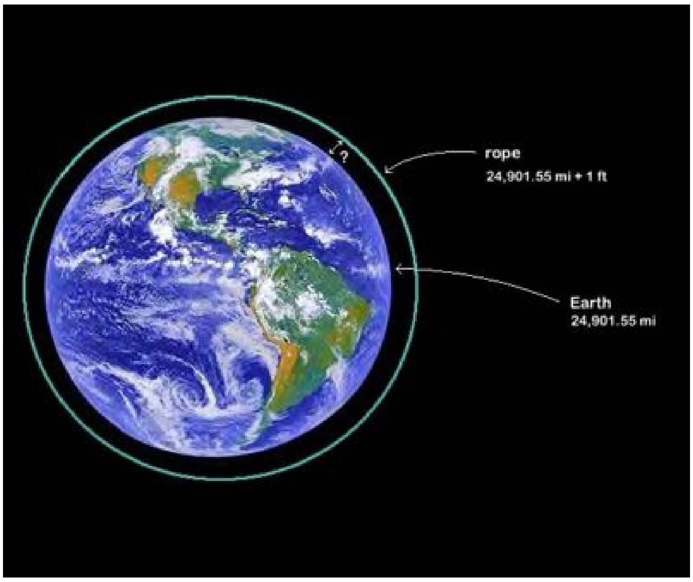
$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\frac{N(2)-N(0)}{2} = \frac{6.4-10}{2} = \frac{-3.6}{2} = \underline{\underline{-1.8}}$$

$$\frac{N(3)-N(1)}{2} = \frac{10\cdot 0.8^3 - 8}{2} = \underline{\underline{-1.44}}$$

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = \frac{10\cdot 0.8^{t+h} - 10\cdot 0.8^{t}}{h} = \underline{\underline{\frac{10\cdot 0.8^{t}\left(0.8^{h}-1\right)}{h}}}$$

2. Proportionalität



Wir betrachten eine spezielle Menge von Funktionen, die Proportionalitäten und umgekehrten Proportionalitäten.

Definition 2.1: Proportionalität

Eine Funktion der Form

$$f(x) = mx \qquad m \in \mathbb{R}$$

heisst *Proportionalität*. Der Parameter m heisst *Proportionalitätskonstante* oder Proportionalitätsfaktor.

Beispiel 5. Die Menge der nötigen Zutaten für ein Rezept in Abhängigkeit der Anzahl Essenden ist eine Proportionalität. (Spätzle-Eintopf)

Satz 2.1: Charakteristik Proportionalität

Die zu einer Proportionalität f gehörenden Zahlenpaare haben denselben Quotienten.

Beweis. Sei $f(x) = mx$ eine Proportionalität. Dann gilt für beliebige Zahlenpaare

$$(x \,|\, y) = (x \,|\, mx)$$

und damit für den Quotienten

$$\frac{y}{x} = \frac{mx}{x} = m$$

$\square$

Satz 2.2: Proportionalität enthält den Ursprung

Der Graph einer Proportionalität ist eine Gerade, die durch den Ursprung verläuft; oder eine Teilmenge davon.

Beweis. Dass es sich bei Graphen von Proportionalitäten um Geraden handelt, werden wir erst in der Tertia beweisen. Dass der Graph durch den Ursprung verläuft, sieht man wegen

$$f(0) = m \cdot 0 = 0,$$

d.h. $(0 \,|\, 0) \in G_f$, leicht ein. $\square$

Beispiel 6. Der Schweredruck P unter Wasser ist proportional zur Tiefe h unter der Wasseroberfläche. Aus der Physik kennt man die Beziehung

$$P(h) = \rho_w g h$$

wobei ρ_w die Dichte von Wasser und g den Ortsfaktor bezeichnet. $P(h)$ ist eine Proportionalität mit Proportionalitätskonstante $\rho_w g$.

Bemerkung. Wenn für die Argumentation bloss wichtig ist, dass es sich um eine Proportionalität handelt und der Wert der Konstanten keine Rolle spielt, schreibt man kurz „$\sim$“. Im obigen Beispiel würde man kurz schreiben

$$P \sim h$$

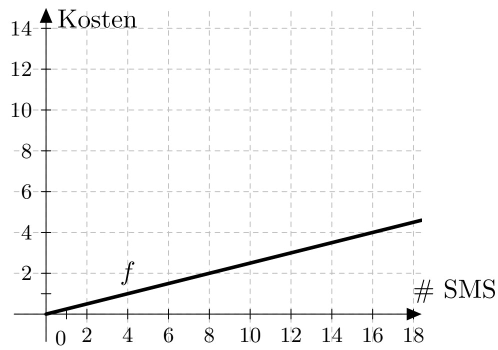
3. Lineare Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir die Menge der Proportionalitäten erweitern. Wir erinnern uns daran, dass Proportionalitäten die Form $f(x) = mx$ haben und ihre Graphen Geraden — oder Teilmengen davon — sind, die durch den Ursprung gehen.

Beispiel 7. Für ein Handy-Abonnement zahlt man eine Grundgebühr von 10 Franken pro Monat. Jede SMS kostet den Abonnementen 25 Rappen. Wir stellen die anfallenden Kosten in Abhängigkeit der verschickten SMS dar. Dabei gehen wir schrittweise vor und wählen der Einfachheit halber als Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$.

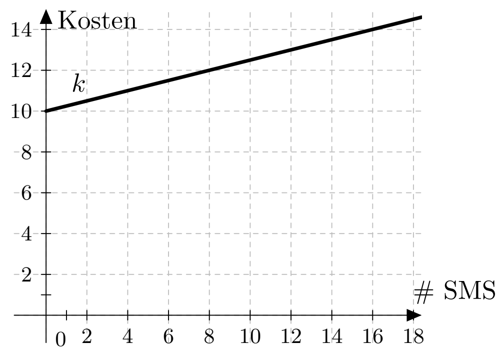
(a) Würde man keine Grundgebühr zahlen, sondern nur die versendeten SMS, dann lautet die Kostenfunktion (Einheiten in Franken)

$$f(x) = 0.25x.$$



(b) Mit Grundgebühr erhalten wir die Kostenfunktion

$$k(x) = 0.25x + 10$$



Im vorangegangenen Beispiel sieht man, dass die Addition der Grundgebühr eine Verschiebung des Graphen parallel zur y-Achse um 10 bewirkt:

$$k(x) = 0.25x + 10 = f(x) + 10$$

Die Funktion k kann also aus der Proportionalität f durch die Addition einer Konstanten erhalten werden.

3.1. Mathematische Beschreibung

Definition 3.1: Lineare Funktion

Eine Funktion der Form

$$f(x) = mx + b \qquad m, b \in \mathbb{R}$$

heisst *lineare Funktion*. Den Parameter m nennt man *Steigung*, den Parameter b Ordinatenabschnitt oder *y-Achsenabschnitt*.

Bemerkung. Man erinnere sich an die Definition der Steigung allgemein. Sie ist das Verhältnis der Höhendifferenz zur Strecke horizontal zwischen zwei Punkten.

Bemerkung. Proportionalitäten sind spezielle affine Funktionen, nämlich affine Funktionen mit $b = 0$. In andern Worten: Die Menge der Proportionalitäten ist eine Teilmenge der Menge der affinen Funktionen.

Bemerkung. Affine Funktionen werden oft fälschlicherweise als lineare Funktionen bezeichnet.

Satz 3.1: Gerade

Der Graph einer affinen Funktion

$$f(x) = mx + b$$

ist eine Gerade, die die y-Achse bei b schneidet.

Beweis. Wiederum verschieben wir den Beweis, dass der Graph eine Gerade ist, auf später (oder man überlegt sich dies mit einem einfachen Ähnlichkeitsargument basierend auf der Definition der Steigung). Der y-Achsen-Schnittpunkt liegt wegen

$$f(0) = m \cdot 0 + b = b$$

im Punkt $(0 \,|\, b)$. □

Bemerkung. Weil der Graph einer affinen Funktion eine Gerade ist, reichen zwei Punkte um dessen Funktionsgleichung bestimmen zu können bzw. um dessen Graphen skizzieren zu können.

Bemerkung. Die Information aus letztem Satz ist vor allem hilfreich, um Graphen von affinen Funktionen rasch skizzieren zu können. Hat man nämlich die Funktionsgleichung

$$f(x) = mx + b$$

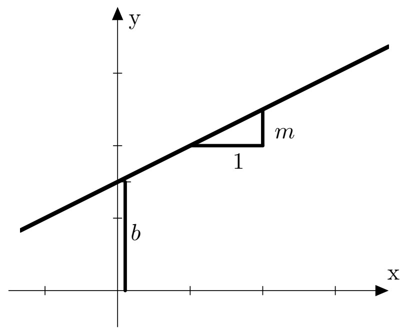


Abbildung 5: Steigung und y-Achsen-Abschnitt

gegeben, so kann man den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse direkt ablesen: $(0 \,|\, b)$. Danach trägt man von dort aus die Steigung ab. Dazu geht man eine Einheit in x-Richtung und m Einheiten in y-Richtung, was einen zweiten Punkt ergibt. Selbstverständlich kann man auch um mehr als eine Einheit „nach vorne gehen", wenn die Höhe Proportional angepasst wird.

3.2. Funktionsgleichung aus zwei gegebenen Punkten bestimmen

Beispiel 8. Wir bestimmen die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die Punkte $P = (-1 \,|\, 1)$ und $Q = (3 \,|\, 2)$ geht. Weil der Graph eine Gerade ist, muss ihre Funktionsgleichung die Form

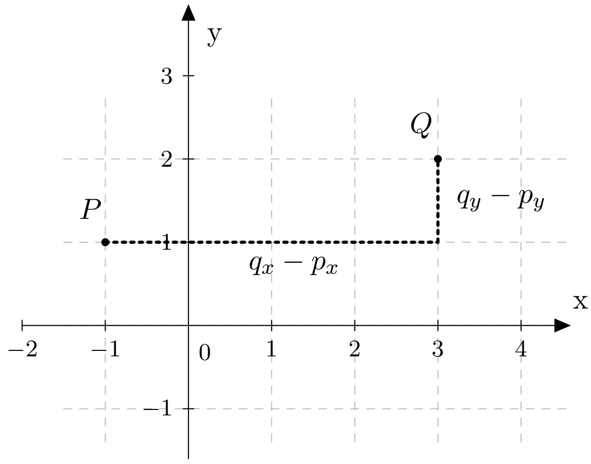
$$f(x) = mx + b$$

haben.

Die Differenz der x-Werte der beiden Punkte ist $q_x - p_x = 3 - (-1) = 4$ und die der y-Werte $q_y - p_y = 2 - 1 = 1$. Daher ergibt sich für die Steigung

$$m = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Strecke horizontal}} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{1}{4}$$

.



Also müssen wir nur noch den Parameter b bestimmen. Da sowohl P als auch Q Elemente des Graphen sind, erfüllen beide die gesuchte Funktionsgleichung. Man nimmt einen der beiden Punkte, z.B. P, setzt diesen ein und löst nach b auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x + b && (m = \tfrac{1}{4} \text{ einsetzen}) \\ 1 &= \frac{1}{4} \cdot (-1) + b && (\text{Punkt } P \text{ einsetzen}) \\ 1 &= -\frac{1}{4} + b && (+\tfrac{1}{4}) \\ \frac{5}{4} &= b \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung der Geraden durch P und Q lautet also:

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

4. Systeme von linearen Gleichungen

Wir setzen unser Handy-Abonnement-Beispiel fort.

Beispiel 9. Wir vergleichen zwei Angebote der Anbieter „Klementine“ und „SwissPhone“.

- Klementine bietet ein Abo mit einer Grundgebühr von 10 Franken und jede SMS ˆ 25 Rappen an.
- SwissPhone offeriert eine Grundgebühr von 20 Franken und jede SMS ˆ 15 Rappen.

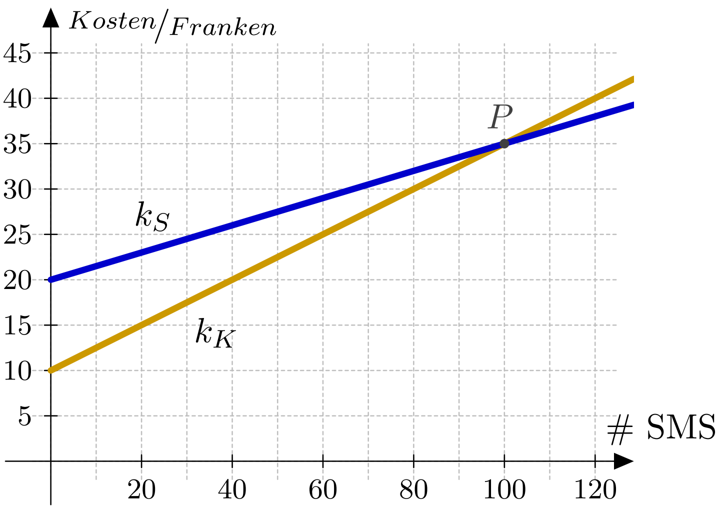
Frage: Welchen Anbieter wählen Sie?

Wir schätzen Anzahl SMS, die wir pro Monat verschicken, und vergleichen die beiden Anbieter. Für Klementine haben wir die Kostenfunktion

$$k_K(x) = 0.25x + 10$$

und für SwissPhone

$$k_S(x) = 0.15x + 20$$



Wir sehen, dass ab einer gewissen Anzahl SMS, der ursprünglich teurere Anbieter SwissPhone billiger ist als Klementine. Deshalb wollen wir die Anzahl SMS bestimmen, für den die Kosten bei beiden Anbietern gleich ausfallen. In andern Worten: Wir bestimmen denjenigen x-Wert, für den

$$k_K(x) = k_S(x)$$

gilt. Dies ist gerade der Schnittpunkt P der Graphen der beiden Funktionen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} k_K(x) &= k_S(x) && \text{(Bedingung Schnittpunkt)} \\ 0.25x + 10 &= 0.15x + 20 && (-0.15x - 10) \\ 0.1x &= 10 && (\cdot 10) \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Für 100 verschickte SMS pro Monat sind beide Anbieter gleich teuer; die Kosten betragen dann

$$k_K(100) = 0.25 \cdot 100 + 10 = 35\,\text{Franken}$$

Das heisst, ab 101 verschickten SMS pro Monat ist SwissPhone billiger.

In der vorangegangenen Aufgabe lag das Kernproblem darin, für beide Funktionen ein Paar $(x \,|\, y)$ zu bestimmen, dass beide Funktionsgleichungen gleichzeitig erfüllt. Weiter erkannten wir, dass diese Lösung der Schnittpunkt der Graphen der beiden Funktionen ist. Im Folgenden werden Methoden vorgestellt, wie man solche Lösungen berechnen kann.

4.1. Systeme mit 2 linearen Gleichungen und 2 Unbekannten

Wir stellen uns bildlich die wichtigsten Begriffe bereit, ohne dafür die mathematisch korrekten Definitionen zu verwenden.

Gleichungen, die zusammen betrachtet werden sollen, nennt man ein System von Gleichungen. Grundsätzlich gilt, dass man so viele Gleichungen braucht, wie maximal Variablen auftauchen, um ein System von Gleichungen numerisch lösen zu können. Eine Gleichung heisst linear, wenn jede Variable separat mit dem Exponenten 1 vorkommt.

Beispiel 10. Eine lineare Gleichung ist zum Beispiel

$$x + 2y + \sqrt{3}z = 5^3$$

Hingegen sind

$$x + y^2 + \sqrt{z} = 5^3$$

und

$$x + yz = 5^3$$

keine linearen Gleichungen.

Zuerst betrachten wir den einfachsten Fall, nämlich ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Beispiel 11. Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$

$$y - x = -5 \tag{2}$$

Dies ist ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Es gibt nun verschiedene Methoden, die Lösung $(x \,|\, y)$ dieses Systems zu berechnen. Bevor wir aber die Lösung bestimmen, überlegen wir uns, wie viele Lösungen für ein beliebiges System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten existieren können:

Wir können annehmen, dass in beiden Gleichungen beide Variablen x und y auftauchen. (Ansonsten würden wir einfach diejenige mit nur einer Unbekannten nehmen, nach dieser auflösen, in die andere einsetzen und hätten nun bloss noch eine Gleichung mit einer Unbekannten.) Wenn beide Variablen vorkommen, löst man beide Gleichungen nach y auf und kann sie als affine Funktionen interpretieren:

$$y = -2x + 1 \tag{1'}$$
$$y = x - 5 \tag{2'}$$

Da die Lösungen den Schnittpunkten der beiden zugehörigen Geraden entsprechen können drei Fälle eintreten:

- Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- Die Geraden sind Parallel und verschieden.
- Die Geraden fallen zusammen.

Daher kann es eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen geben.

4.2. Lösungsmethoden

4.2.1. Gleichsetzungsmethode

Um unser Gleichungssystem

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$
$$y - x = -5 \tag{2}$$

zu lösen, können wir beide Gleichungen separat nach einer der beiden Variablen auflösen, zum Beispiel nach y:

$$y = -2x + 1 \tag{1'}$$
$$y = x - 5 \tag{2'}$$

Anschliessend setzt man die beiden gleich und löst auf:

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= x - 5 && (+2x + 5) \\ 6 &= 3x && (\div 3) \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Die Lösung $x = 2$ setzt man nun in einer der beiden Gleichungen ein, um y zu bestimmen:

$$y = 2 - 5 = -3$$

Das heisst, das Zahlenpaar $(2 \mid -3)$ ist Lösung des Gleichungssystems $(1), (2)$.

4.2.2. Substitutionsmethode

Man wählt eine der beiden Gleichungen

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$
$$y - x = -5 \tag{2}$$

aus und löst diese, zum Beispiel (1), nach einer Variablen auf, hier nach y:

$$y = -2x + 1 \tag{1'}$$

Danach ersetzt man in der andern Gleichung die Variable durch den gewonnenen Term und löst auf:

$$\begin{aligned} y - x &= -5 && \text{(1') in (2)} \\ -2x + 1 - x &= -5 && (-1) \\ -3x &= -6 && (\div(-3)) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Schliesslich setzt man die Lösung $x = 2$ in eine der Gleichungen ein und erhält

$$y = -2 \cdot 2 + 1 = -3$$

also $(2 \,|\, -3)$ als Lösung.

4.2.3. Additionsmethode

Bei dieser Methode addiert man beide Gleichungen miteinander oder subtrahiert eine Gleichung von der andern. Dabei präpariert man die Gleichungen vorher so, dass mindestens eine Variable in beiden Gleichungen bis auf Vorzeichen denselben Koeffizienten hat.

Ich demonstriere die Methode auf zwei Arten. Beim Gleichungssystem

$$y + 2x = 1 \tag{1}$$
$$y - x = -5 \tag{2}$$

kann ich direkt (2) von (1) subtrahieren.

$$3x = 6 \qquad \text{(2)} - \text{(1)}$$

und erhalte $x = 2$ und daraus $y = -3$.

Will ich aber gleiche Koeffizienten vor dem x, dann multipliziere ich die Gleichung (2) mit 2.

$$
\begin{aligned}
y + 2x &= 1 && (1)\\
2y - 2x &= -10 && 2 \cdot (2)
\end{aligned}
$$

und addiere die beiden Gleichungen.

$$3y = -9 \qquad (1) + (2)$$

Das heisst $y = -3$ und erhält unmittelbar $x = 2$.

Bemerkung. Alle Methoden führen natürlich bei gegebenem Gleichungssystem auf die selbe Lösung.

Bemerkung. Die oben aufgeführten Methoden sind auch auf Systeme von n linearen Gleichungen mit n Lösungsvariablen anwendbar. Dabei wird jeweils pro eine Ausführung eine Variable eliminiert. So kann man sukzessive die Anzahl Variablen und Gleichungen reduzieren, bis schliesslich eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, die man löst. Danach können rückwärts schrittweise alle vorhandenen Variablen berechnet werden. Dieses Vorgehen wird im nächsten Abschnitt für drei Gleichungen mit drei Unbekannten demonstriert.

4.3. Systeme von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten

Ich demonstriere das Vorgehen zum Lösen an folgendem Gleichungssystem. Ziel ist es, bei jeder Kombination von Gleichungen aus dem System eine Variable zu eliminieren.

Beispiel 12. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x + 3y - 4z &= -5 && (1)\\
3x - 5y + 2z &= 4 && (2)\\
4x + y - 2z &= 5 && (3)
\end{aligned}
$$

Ich wähle die Additionsmethode, weil die Koeffizienten der Variable z danach schreien. Die Additionen $(2) + (3)$ und $(1) + 2 \cdot (2)$ vereinfachen das System auf 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$
\begin{aligned}
7x - 4y &= 9 && (4)\\
8x - 7y &= 3 && (5)
\end{aligned}
$$

und z ist eliminiert. Für das weitere Vorgehen wähle ich erneut die Additionsmethode und präpariere die Gleichungen so, dass y eliminiert werden kann. $7 \cdot (4)$ und $4 \cdot (5)$ liefert

$$49x - 28y = 63 \tag{4'}$$
$$32x - 28y = 12 \tag{5'}$$

und $(4') - (5')$ liefert noch eine Gleichung mit einer Unbekannten.

$$17x = 51 \qquad \div 17$$
$$x = 3 \tag{6}$$

Nun setzt man $x = 3$ ein um die Werte für y und z zu erhalten.

$$21 - 4y = 9 \qquad (6) \text{ in } (4)$$
$$12 = 4y \qquad \div 4$$
$$3 = y \tag{7}$$

Wir kennen $x = 3$ und $y = 3$ und berechnen z mit Gleichung (1).

$$6 + 9 - 4z = -5 \qquad (6) \text{ und } (7) \text{ in } (1)$$
$$20 = 4z \qquad \div 4$$
$$5 = z \tag{8}$$

Damit erhalten wir die Lösung $(3 \,|\, 3 \,|\, 5)$.

Bemerkung. Die Form der obigen Lösung, $(x \,|\, y \,|\, z)$, heisst Zahlentripel.

Übung 5. (GlSys 3) Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1.4 \qquad (1) \\ 3x - 2y - z &= 1.2 \qquad (2) \\ 5x + 4y + 3z &= 1.4 \qquad (3) \end{aligned}$$

4.4. Regeln zum Lösen von Gleichungssystemen

Beim Lösen von n Gleichungen mit n Unbekannten geht man wie folgt vor:

1. Reduktion

    1. Aus dem Ausgangssystem stellt man mittels Koeffizienten- oder Substitutionsmethode ein Gleichungssystem von $n - 1$ Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten her.

2. Auf analoge Weise bestimmt man daraus ein Gleichungssystem von $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ Unbekannten und fährt so fort, bis man

n. eine Gleichung mit einer Unbekannten hat.

2. Lösungen

   1. Man löst die erhaltene Gleichung mit einer Unbekannten.

   2. Man setzt die im 1. Schritt erhaltene Lösung in eine Gleichung mit 2 Unbekannten ein und fährt so fort, bis man

   n. die n. Unbekannte bestimmt hat.

3. Kontrolle

Stichwort $\rightarrow$ ReLöKo

Übung 6. (GlSys 4) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 6 && (1) \\ y + 4z - u &= 10 && (2) \\ -x + z + 4u &= 18 && (3) \\ 4x - y + u &= 6 && (4) \end{aligned}$$

A. Weitere Kommentare und Übungen zu linearen Funktionen und Gleichungen

A.1. Begriffe und Beispiele

Eine **lineare Gleichung** ist eine Gleichung, in der die gesuchte Zahl x nur mit einer anderen Zahl, festen multipliziert wird, und eine weitere Zahl addiert wird, etwa

$$3x - 12 = 0$$

Die Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0$$

hingegen ist *keine* linear Gleichung, da das x in der Potenz 2 vorkommt. Die Gleichungen

$$\frac{2}{x} - 1 = 0$$

und

$$3\sqrt{x} - 4 = 2$$

sind ebenfalls keine lineare Gleichungen.

Im allgemein wir jede Gleichung linear genannt, welche auf die Form

$$\boxed{a \cdot x + b = 0}$$

gebracht werden kann, wobei a und b fest Werte sind. Im Prinzip können Terme x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, und weitere kompliziertere Terme schon vorkommen, müssen aber durch geschicktes Umformen eliminiert werden können. Zum Beispiel, die Gleichung

$$x^2 + 3x - 1 = x^2$$

kann durch subtrahieren von x^2 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen auf die lineare Gleichung

$$3x - 1 = 0$$

zurückgeführt werden.

Wie lassen sich lineare Gleichungen lösen? Immer nach dem selben Prinzip: *"Bringe x auf die eine Seite, und die Zahlen auf die andere Seite des Gleichheitszeichen."*

Beispiel 13. Die Gleichung

$$3x - 4 = 0$$

kann wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 0 \quad | + 4 \\ 3x &= 4 \quad | : 3 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Manchmal ist, wie oben schon erwähnt, die Linearität der Gleichung versteckt, und es muss durch Umformen zuerst in die richtige Form gebracht werden. Wir geben vier typische Beispiele:

Beispiel 14. Die Variabel x ist auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen:

$$0.5x - 3 = 2x + 1$$

Wiederum, bringe alle x auf die eine Seite, und alle Zahlen auf die andere Seite des Gleichheitszeichen:

$$\begin{aligned} 0.5x - 3 &= 2x + 1 \quad | - 2x \\ -1.5x - 3 &= 1 \quad | + 3 \\ -1.5x &= 4 \quad | : -1.5 \\ x &= \frac{4}{-1.5} = -2.\overline{6} \end{aligned}$$

Beispiel 15. Manchmal sind mehrere x auf beiden Seiten, und mehr als eine Zahl

$$0.5x - 3 + 4x + 5 = 2.4x + 1 - 3x + 2 - 6x$$

Dann gilt es, die beiden Seiten zuerst zu vereinfachen, daher die x-en und Zahlen zusammenzufassen. Erinnere dich daran, wie die x-e zusammengefasst werden. Zum Beispiel, betrachte den algebraischen Ausdruck $3x + 0.5x$. Wir können die Zusammenfassen zu $3x + 0.5x = 3.5x$. Warum? Denke an Äpfel: 3 Äpfel und 0.5 Äpfel sind 3.5 Äpfel. Der formale Weg geht wie folgt:

$$3x + 0.5x = x(3 + 0.5) = x \cdot 3.5 = 3.5x$$

Wir lösen nun die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0.5x - 3 + 4x + 5 &= 2.4x + 1 - 3x + 2 - 6x \quad | simplify \\ 4.5x + 2 &= -6.6x + 3 \quad | + 6.6x \\ 11.1x + 2 &= 3 \quad | - 2 \\ 11.1x &= 1 \quad | : 11.1 \\ x &= \frac{1}{11.1} = 0.09009... \end{aligned}$$

Beispiel 16. Die rechte und/oder linke Seite enthält x^2 oder andere Potenzen

$$2x^2 + 4x - 3 = 2 - x + 2x^2$$

Im Moment ist die einzigen Hoffnung, dass sich diese Terme wegkürzen. Hier ist eine Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 3 &= 2 - x + 2x^2 \quad | - 2x^2 \\ 4x - 3 &= 2 - x \quad | + x \\ 5x - 3 &= 2 \quad | + 3 \\ 5x &= 5 \quad | : 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Beispiel 17. Das x erscheint im Nenner eines Bruchs

$$\frac{4}{x} - 3 = 2$$

Die idee hier ist, beide Seiten mit x zu multiplizieren, damit wir das x im dem Nenner wegbringen:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} - 3 &= 2 \quad | + 3 \\ \frac{4}{x} &= 5 \quad | \cdot x \\ 4 &= 5x \quad | : 5 \\ \frac{4}{5} &= x \end{aligned}$$

Beachte, dass wir schon im ersten Schritt beide Seiten mit x multiplizieren könnten:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} - 3 &= 2 \quad | \cdot x \\ x \cdot (\frac{4}{x} - 3) &= 2x \\ 4 - 3x &= 2x \quad | + 3x \\ 4 &= 5x \quad | : 5 \\ \frac{4}{5} &= x \end{aligned}$$

A.2. Übungen

Übung 7. Falls linear, löse die Gleichung nach x auf.

a) $6x - 10 = x - 5$

b) $-x - 2 = x + 3$

c) $3 - 4x = 5 - 2x - 16$

d) $15x - 73 - 24x = 59 - 16 + 20x$

e) $56x - 43 - 52 - 19x = 7 - 72x - 56x + 165x - 112$

f) $92 - 13x - x^2 = 52 - 3x - x^2$

g) $14 - (10 - x) = 0$

h) $14 - (x - 15) = 2 - (6x + 13)$

i) $5(4x + 9) - 6(2x - 5) = 75$

j) $10 - 6(x - 14) = 20 - 3(2x - 25)$

k) $(15x - 3)^2 = x(225x - 15)$

l) $(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x - 3)$

m) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2$

n) $x^2 - 3x + 14 = x(x + 7)$

o) $(2x - 3)^2 = (2x + 3)^2 + 12$

p) $\frac{x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{6}$

q) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3}$

r) $\frac{3}{x} + 1 = 2$

s) $\frac{7}{x} - 4 = \frac{2}{x} + 2$

t) $\frac{2}{x} + x = x + 7$

Übung 8. Finde die Gleichung, und löse sie.

a) Die Summe fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist 960. Finde diese Zahlen.

b) Die Differenz zweier natürlichen Zahlen ist 3, die Differenz der Quadrate 381. Finde diese Zahlen.

c) Eine Treppe in den ersten Stock hat 22 Stufen. Würde jede Stufenhöhe um $1.6cm$ erhöht, bräuchte es nur 20 Stufen. Wie hoch sind die Treppenstufen?

d) Ein Baum hat die Höhe $2.5m$ ist irgendwo in der Mitte gebrochen, und zwar so, dass der obere Teil nun den Boden $50cm$ entfernt vom Stamm berührt. Auf welche Höhe ist die Bruchstelle des Baums?

e) Ein Zug mit Geschwindigkeit $72km/h$ verlässt den Bahnhof A um $15:00$ und fährt Richtung Bahnhof B. Um $15:15$ fährt ein andere Zug mit Geschwindigkeit $88km/h$ vom Bahnhof B in Richtung A. Die Distanz zwischen A und B betrage $120km$. Wann kreuzen sich die Züge?

f) Hahnen 1 füllt den Pool in 1 Stunde, Hahnen 2 in 2 Stunden, Hahnen 3 in 3 Stunden, und Hahnen 4 in 4 Stunden. Wie lange dauert es den Pool zu füllen, wenn alle Hahnen gleichzeitig aufgedreht werden?

A.3. Lösungsskizzen

Aufgabe 1: Nicht alle Schritte sind aufgeschrieben ...

a) $6x - 10 = x - 5 \rightarrow 5x = 5 \rightarrow x = 1$

b) $-x - 2 = x + 3 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = -2.5$

c) $3 - 4x = 5 - 2x - 16 \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7$

d) $15x - 73 - 24x = 59 - 16 + 20x \rightarrow -29x = 116 \rightarrow x = -4$

e) $56x - 43 - 52 - 19x = 7 - 72x - 56x + 165x - 112 \rightarrow 0 = 10(?) \rightarrow \textit{no solution}$

f) $92 - 13x - 4x^2 = 52 - 3x - 4x^2 \rightarrow 10x = 40 \rightarrow x = 4$

g) $14 - (10 - x) = 0 \rightarrow 4 + x = 0 \rightarrow x = -4$

h) $14 - (x - 15) = 2 - (6x + 13) \rightarrow -x + 29 = -6x - 11 \rightarrow 5x = -40 \rightarrow x = -8$

i) $5(4x + 9) - 6(2x - 5) = 75 \rightarrow 20x + 45 - 12x + 30 = 75 \rightarrow\rightarrow 8x = 0 \rightarrow x = 0$

j) $10 - 6(x - 14) = 20 - 3(2x - 25) \rightarrow 10 - 6x + 84 = 20 - 6x + 75 \rightarrow 94 = 95(?) \rightarrow \textit{no solution}$

k) $(15x - 3)^2 = x(225x - 15) \rightarrow 225x^2 - 90x + 9 = 225x^2 - 15x \rightarrow 75x = 9 \rightarrow x = 0.12$

l) $(x-5)(x-2) = (x-4)(x-3) \rightarrow x^2-7x+10 = x^2-7x+12 \rightarrow 10 = 12(?) \rightarrow \textit{no solution}$

m) $(x+3)(x-5) = (x-3)^2 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow 4x = 24x = 6$

n) $x^2 - 3x + 14 = x(x+7) \rightarrow x^2 - 3x + 14 = x^2 + 7x \rightarrow 10x = 14 \rightarrow x = 1.4$

o) $(2x-3)^2 = (2x+3)^2 + 12 \rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 + 12x + 9 + 12 \rightarrow -24x = 12 \rightarrow x = -0.5$

p) $\frac{x}{4} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + \frac{x}{6} \rightarrow \frac{x}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x}{6} = -\frac{1}{5} \rightarrow \frac{3x-6x-2x}{12} = -\frac{1}{5} \rightarrow \frac{-5x}{12} = -\frac{1}{5} \rightarrow x = \frac{12}{25} = 0.48$

q) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3} \rightarrow x + 3 = \frac{5(2x-8)}{3} \rightarrow 3(x+3) = 5(2x-8) \rightarrow 3x + 9 = 10x - 40 \rightarrow 7x = 49 \rightarrow x = 7$

r) $\frac{3}{x} + 1 = 2 \rightarrow \frac{3}{x} = 1 \rightarrow x = 3$

s) $\frac{7}{x} - 4 = \frac{2}{x} + 2 \rightarrow \frac{5}{x} = 6 \rightarrow 6x = 5 \rightarrow x = 0.8\overline{3}$

t) $\frac{2}{x} + x = x + 7 \rightarrow 2 + x^2 = x^2 + 7x \rightarrow 7x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$

Aufgabe 2:

a) Es sei x die kleinste dieser Zahlen. Die fünf Zahlen sind also x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$. Die Summe ist 960, also

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) = 960$$

whas wir vereinfachen zu

$$5x + 10 = 960$$

Die Lösung ist

$$x = \frac{950}{5} = 190$$

Kontrolle: $190 + 191 + 192 + 193 + 194 = 960$

b) Es sei x die kleinere der zwei Zahlen. Die grössere Zahl ist also $x+3$, da die Differenz 3 sein muss. Wir erhalten die Gleichung

$$(x+3)^2 - x^2 = 381$$

Um sie zu lösen, zuerst ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - x^2 &= 381 \\ x^2 + 6x + 9 - x^2 &= 381 \quad \mid -9 \\ 6x &= 372 \quad \mid :6 \\ x &= \frac{372}{6} = 62 \end{aligned}$$

Kontrolle: $65^2 - 62^2 = 381$.

c) Zeichne die Situation! Die Gleichung ist wie folgt, wobei x die original Stufenhöhe ist:

$$20(x + 1.6) = 22x$$

Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} 20(x + 1.6) &= 22x \\ 20x + 32 &= 22x \quad \mid -20x \\ 32 &= 2x \quad \mid : 2 \\ 16 &= x \end{aligned}$$

Die originale Stufenhöhe ist also $16cm$.

d) Zeichen die Situation! Es wird die folgenden Gleichung erhalten, wobei x die Höhe der Bruchstelle ist (in cm):

$$x^2 + 50^2 = (250 - x)^2$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} x^2 + 50^2 &= (250 - x)^2 \\ x^2 + 2500 &= 250^2 - 500x + x^2 \quad \mid -x^2 \\ 2500 &= 62\,500 - 500x \quad \mid -62\,500 \\ -60\,000 &= -500x \quad \mid : (-500) \\ 120 &= x \end{aligned}$$

Die Höhe der Bruchstelle ist $120cm = 1.2m$.

e) Zeichne die Situation, wobei t die Zeit in Stunden ist, die die vergangene Zeit seit $15:15$ misst. Die Gleichung ist $102 - 160t = 0$, und somit $t = \frac{102}{160} = 0.6375h = 38.25min$. Die Züge kreuzen sich also um $15:53$ and 15 seconds.

f) Das Volumen des Pools sein V. Wir haben dann

Hahnen 1	$\rightarrow$	$1\,h$ füllt V	$\rightarrow$		$\rightarrow$	$x\,h$ füllt $x \cdot V$
Hahnen 2	$\rightarrow$	$2\,h$ füllt V	$\rightarrow$	$1\,h$ füllt $\frac{1}{2}V$	$\rightarrow$	$x\,h$ füllt $\frac{x}{2} \cdot V$
Hahnen 3	$\rightarrow$	$3\,h$ füllt V	$\rightarrow$	$1\,h$ füllt $\frac{1}{3}V$	$\rightarrow$	$x\,h$ füllt $\frac{x}{3} \cdot V$
Hahnen 4	$\rightarrow$	$4\,h$ füllt V	$\rightarrow$	$1\,h$ füllt $\frac{1}{4}V$	$\rightarrow$	$x\,h$ füllt $\frac{x}{4} \cdot V$

Sind alle Hahnen offen, wie viel Wasser ist zur Zeit x im Pool? Genau

$$xV + \frac{x}{2}V + \frac{x}{3}V + \frac{x}{4}V$$

Wir müssen nun x so bestimmen, dass der Pool voll ist, also

$$xV + \frac{x}{2}V + \frac{x}{3}V + \frac{x}{4}V = V$$

Wir können V ausklammern und erhalten

$$V \cdot (x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}) = V \cdot 1$$

und die Gleichung zu lösen ist

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

Finde den gemeinsamen Nenner:

$$\begin{aligned}
x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} &= 1 \\
\frac{12x}{12} + \frac{6x}{2} + \frac{4x}{12} + \frac{3x}{12} &= 1 \\
\frac{12x + 6x + 4x + 3x}{12} &= 1 \quad | \cdot 12 \\
25x &= 12 \quad | : 25 \\
x &= \frac{12}{25} = 0.48
\end{aligned}$$

Es braucht also 0.48 Stunden, oder 28.8 Minuten.

B. Antiproportionalität

Definition 2.1: Umgekehrte Proportionalität

Eine Funktion der Form
$$f(x) = \frac{c}{x} \qquad c \in \mathbb{R}$$
heisst *Antiproportionalität* oder umgekehrte Proportionalität.

Beispiel 18. Teilt man einen Kuchen unter x Personen auf, so ist die Stückgrösse y in Abhängigkeit der Personen eine Antiproportionalität.

Satz 2.1: Charakteristik der umgekehrten Proportionalität

Die zu einer umgekehrten Proportionalität gehörenden Zahlenpaare sind Produktgleich.

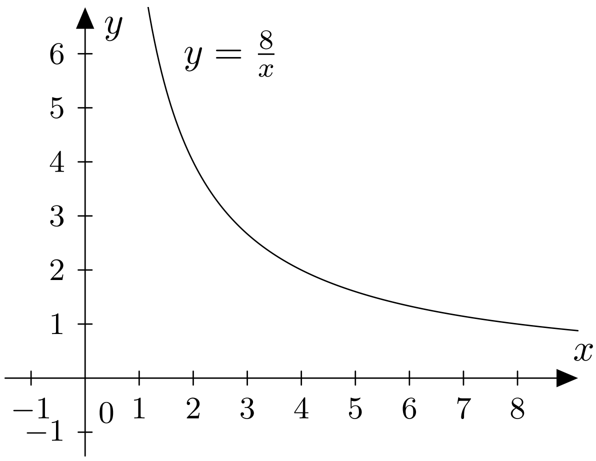


Abbildung 6: Antiproportionalität

Beweis. Ist $f(x) = \frac{c}{x}$ eine Antiproportionalität, so gilt für ein Zahlenpaar $(x \mid y)$

$$x \cdot y = x \cdot \frac{c}{x} = c$$

$\square$

Satz 2.2: Hyperbel

Der Graph einer Antiproportionalität ist eine Hyperbel oder eine Teilmenge davon.

Beispiel 19. Um ein Passwort zu knacken wird 1 Computer eingesetzt. Er braucht dafür ungefähr 8 Tage. Wenn 2 Computer parallel rechnen, brauchen sie dafür 4 Tage. Setzt man x Computer ein, dann brauchen sie dafür

$$y = \frac{8}{x}$$

Tage.

C. Lineare Optimierung

C.1. Planungspolygone

In Unternehmen müssen häufig Entscheidungen gefällt werden, wie z.B. über die Fertigung neuer Produkte, über die Rationalisierung von Produktionsabläufen, über die Errichtung von Zweigwerken usw. Solche Entscheidungen können nicht durch Probieren getroffen werden, da dies in den meisten Fällen zu aufwendig und zu teuer — bzw. der Zeitverlust, der durch das Probieren verursacht würde — nicht mehr vertretbar wäre. Man versucht deshalb mathematische Verfahren als Entscheidungshilfen heranzuziehen. Ein solches Verfahren ist das lineare Optimieren. Unter **Optimierung** versteht man die Festlegung eines bestimmten Programms, mit dessen Hilfe der günstigste Wert für ein vorgegebenes Ziel erreicht wird. Dabei spielen Restriktionen (Nebenbedingungen), die sich oft durch Ungleichungen ausdrücken lassen, eine wichtige Rolle.

Nicht nur in der Schweiz wird sehr viel über die Probleme der Energieversorgung diskutiert. Anhand dieses Problems soll das Prinzip der linearen Optimierung erläutert werden. In einer Region stehen verschiedene Energiequellen zur Verfügung. Der Energiebedarf wird weiterhin ansteigen und man muss zusätzliche Kraftwerke errichten. Das Ziel der Planung heisst: Bau von Kraftwerken, die bei minimaler Belastung der Umwelt — auch in der Zukunft —, also minimalen Kosten, den Energiebedarf der Region decken. Verschiedene Typen (Wasser-, Kohle-, Atomkraftwerke u.a.) stehen zur Auswahl. Bei der Planung müssen folgende Bedingungen beachtet werden:

- die Spitzenleistung der verschiedenen Kraftwerkstypen,
- die jährliche Energiemenge, die die verschiedenen Kraftwerkstypen liefern können,
- die Höhe der Bauinvestitionen für die verschiedenen Typen,
- die jährlichen Betriebskosten,
- die Kosten für die Sicherheitseinrichtungen (Luftfilter, Entsorgung etc.).

Bemerkung. Die Alternative zum K-Pfad (Kernenergie, kapitalintensive Energieproduktion und Konzentration der Erzeugungsanlagen) ist der S-Pfad. Das „S“ steht für Sparen, für Sonnenenergie und für sanfte, d.h. erneuerbare Energiearten. Dass der S-Pfad machbar ist, es also auch ohne Kernenergie möglich ist, den privaten Konsum weiter zu steigern, haben viele Studien nachgerechnet und belegt. Die Gesellschaft kann ohne Verlust an Lebensqualität auf dem S-Pfad in eine Zukunft gehen, in der Energie umweltfreundlich, sozialverträglich und ohne Risiko produziert werden kann.

An diesem obigen Beispiel erkennt man, dass eine Optimierungsaufgabe aus zwei Teilen besteht. Einmal aus dem Ziel (hier: minimale Kosten), das durch den Optimierungsprozess erreicht werden soll, zum anderen aus den Bedingungen, die das Erreichen des Ziels beeinflussen. So wird die lineare Optimierung zu einer der wichtigsten Grundlagen der Unternehmensforschung (Operations Research).

Das beste ökonomische Verhalten muss bei bestimmten Bedingungen gefunden werden. Industrie und Handel müssen dafür sorgen, Produktivität und Gewinn so hoch wie möglich und die Kosten für die Erzeugung, Verwaltung und den Transport so niedrig wie möglich zu halten. In der Praxis sind die Nebenbedingungen meist so zahlreich, dass man nur mit Hilfe von Computern die optimale Lösung finden kann. Die heutigen Computersysteme können Probleme mit mehreren Tausenden von Variablen und Restriktionen lösen. Jedes Rechenzentrum hat derartige Computerprogramme, die auf dem Simplex-Algorithmus beruhen. Dieser Algorithmus wurde erst 1950 von dem Amerikaner DANTZIG entwickelt. Insbesondere die Öl-Multis haben mit dieser Methode gute Geschäfte gemacht, indem sie ihre Tankerflotten mit geringsten Kosten auf schnellsten Wegen zu den jeweils gewinnträchtigsten Märkten dirigierten. 1978 fand der sowjetische Mathematiker KACHIJAN ein neues Verfahren, das den im Vergleich recht umständlichen Simplex-Algorithmus ersetzen wird, da es sehr viel schneller zur optimalen Lösung gelangt und damit die Behandlung noch komplexerer Probleme (u.a. nichtlineare Optimierung) ermöglicht.

Wir betrachten hier verhältnismässig einfache Probleme, die sich mit graphischen Methoden lösen lassen: Von einer Funktion Z (genannt **Zielfunktion**) werden extremale Werte bestimmt, wobei die Nebenbedingungen (lineare Ungleichungen) zu beachten sind. Diese Bedingungen ergeben, graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt, das sogenannte **Planungspolygon**.

Beispiel 20. Eine Fabrik stellt die beiden Modelle „analog“ und „digital“ eines Taschenradios her. Jedes Radio der Analogausführung bringt einen Gewinn von Fr. 15.-, das der Digitalausführung Fr. 45.-. Die Tagesproduktion der Firma unterliegt den folgenden Einschränkungen: Von der Analogausführung können höchstens 1200, von der Digitalausführung höchstens 700, von beiden zusammen höchstens 1400 Stück hergestellt werden. In der Analogausführung wird eine Verstärkerstufe, in der Digitalausführung werden zwei Verstärkerstufen eingebaut. Pro Tag stehen aber höchstens 1800 Verstärkerstufen zur Verfügung.

Wie viele Analog- bzw. Digitalradios soll die Firma pro Tag herstellen, wenn ihr Gewinn möglichst gross sein soll? Werden die Anzahl der pro Tag hergestellten Analoggeräte mit x und die Anzahl der Digitalgeräte mit y bezeichnet, so können die erwähnten

Nebenbedingungen (Restriktionen) als ein Ungleichungssystem formuliert werden:

$$x \leq 1200 \tag{3}$$
$$y \leq 700 \tag{4}$$
$$x + y \leq 1400 \tag{5}$$
$$x + 2y \leq 1800 \tag{6}$$

Ausserdem gelten noch die Bedingungen

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

da ja die Anzahlen x und y nicht negativ sein können.

Zunächst wird das **Planungspolygon**, die Lösungsmenge des Ungleichungssystems, erstellt:

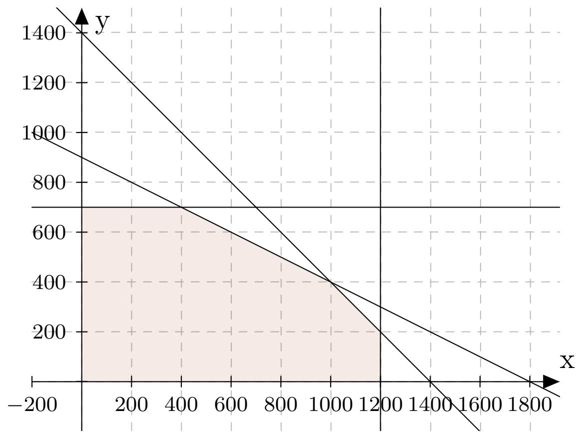


Abbildung 7: Planungspolygon

Für den Gewinn der Firma in Abhängigkeit von x und y hat man den Funktionsterm

$$G(x, y) = 15x + 45y.$$

G heisst **Zielfunktion** und ist eine affine Funktion mit 2 Variablen. Alle Paare $(x \mid y)$, die die obigen Bedingungen erfüllen, stellen zulässige Lösungen des Problems dar. Gesucht wird aber dasjenige Paar $(x \mid y)$ (x, y sind natürliche Zahlen), für das der Gewinn $G(x, y)$ maximal wird.

Durch Umformen des Zielfunktionsterms erhält man

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{G}{45}$$

eine affine Funktionsschar. Die entsprechende Graphen sind parallele Geraden mit den y-Achsenabschnitten $\frac{G}{45}$. Gesucht ist ein Punktepaar $(x|y)$, das einerseits das Ungleichungssystem erfüllt, und für das andererseits der y-Achsenabschnitt $\frac{G}{45}$ und damit auch G möglichst gross wird. Man erhält die Lösung $(x \mid y)$, indem man eine Gerade der Geradenschar, etwa die durch die Punkte $(0|100)$ und $(300|0)$, $m = -\frac{1}{3}$, auswählt, und sie solange längs der y-Achse nach oben verschiebt, bis sie mit der Begrenzungslinie des Planungspolygons nur noch einen Punkt oder eine Strecke gemeinsam hat. Wie aus der

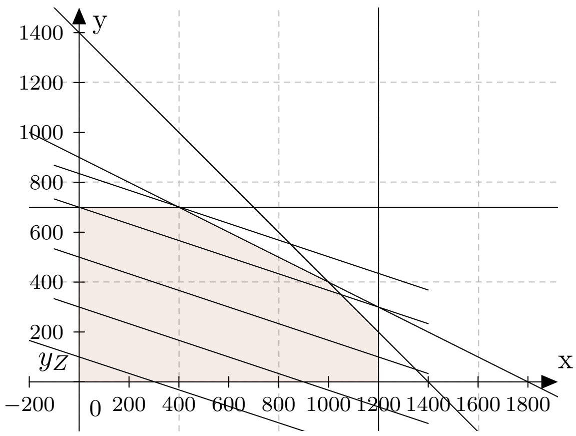


Abbildung 8: Zielgerade und Optimum

Zeichnung abzulesen ist, entpuppt sich das Paar $(400 \mid 700)$ als optimale Lösung des Problems. Die Firma erzielt einen maximalen Gewinn, wenn sie pro Tag 400 Analogradios und 700 Digitalradios herstellt. Den entsprechenden Gewinn berechnet man mit Hilfe der Zielfunktion:

$$G(400, 700) = 15 \cdot 400\,\text{Fr.} + 45 \cdot 700\,\text{Fr.} = 37\,500\,\text{Fr.}$$

Die optimale Lösung kann auch rechnerisch ermittelt werden, indem man den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Geraden berechnet (Lösen eines Gleichungssystems mit 2 Unbekannten).

Bemerkung. Man hätte die Lösung auch direkt erkennen können. Wählt man nämlich die maximale Anzahl produzierbare Digitalradios, 700, dann wird man den grösstmöglichen Gewinn erzielen, weil die Digitalradios im Verkauf mehr einbringen als die Analogvariante. Ist dem wirklich so?

Übung 9. Die Konkurrenz zwingt die Firma ihren Preis für die Digitalausführung so zu senken, dass ihr Gewinn nur noch 25 Fr. pro Stück beträgt. Wie soll die Firma reagieren?

Übung 10. Ein landwirtschaftlicher Weidebetrieb hat sich auf die Haltung von Kühen und Jungvieh spezialisiert. In den Ställen des Betriebs können höchstens 70 Kühe und 500 Stück Jungvieh gehalten werden.

Für die Ernährung einer Kuh sind 0.25 ha, für ein Jungvieh 0.10 ha Weideland nötig. Insgesamt hat der Betrieb 50 ha Weideland.

Für die Pflege der Kühe und des Jungviehs stehen drei Arbeiter zur Verfügung, die insgesamt 8000 Arbeitsstunden im Jahr leisten. Für eine Kuh sind 100 Arbeitsstunden, für ein Stück Jungvieh 10 Arbeitsstunden je Jahr notwendig. Der Gewinn bei einer Kuh beträgt 400 e, bei einem Jungvieh 50 e im Jahr.

Wie viele Kühe und wie viel Stück Jungvieh muss der Betrieb halten, damit der Gesamtgewinn möglichst gross wird?

C.2. Regeln zum Lösen von Aufgaben zur linearen Optimierung

Eine Aufgabe zur linearen Optimierung löst man wie folgt:

1. Annahme:
   - Man stellt die gegebenen Daten tabellarisch dar
   - und definiert die Unbekannten.
2. Ungleichungen:
   - Man übersetzt die im Aufgabentext umschriebenen Bedingungen in die Formelsprache der Mathematik.
3. Planungspolygon:
   - Man stellt die Lösungen des Ungleichungssystems graphisch dar.

   Dabei verwendet man folgende Tatsachen:

   - Punkte, deren Koordinaten $(x \mid y)$ die Ungleichung $y > mx+b$ bzw. $y < mx+b$ erfüllen, bilden eine Halbebene, die oberhalb bzw. unterhalb des Graphen der Funktion $y = mx + b$ liegt.
   - Der mengentheoretische Durchschnitt aller Halbebenen, die sich aus den Ungleichungen ergeben, bilden das sogenannte Planungspolygon.

4. Zielfunktion:
   - Man drückt die Grösse z, die optimal werden soll, mit den Unbekannten aus.
   - Man löst die Gleichung nach y auf
   - und zeichnet den zugehörigen Graphen für ein frei wählbares z im gleichen Koordinatensystem wie das Planungspolygon ein.
5. Optimum:
   - Man untersucht, welche Parallele zur Zielgerade das Planungspolygon in mindestens einem Punkt P schneidet und ein optimales z liefert.
   - P ist der optimale Punkt; man berechnet seine Koordinaten.
   - Falls die Koordinaten von P nicht ganze Zahlen sind, die gesuchten Unbekannten jedoch ganzzahlig sein sollten, muss man die Umgebung von P in einer zusätzliche Skizze vergrössert darstellen, damit man gegebenenfalls richtig runden kann.
6. Antwort:
   - Man liest die Aufgabenstellung erneut.
   - Man beantwortet die gestellten Fragen mit einem Text.

Stichwort → `AUPZOA`

C.3. Weitere Übungen

Übung 11. Zur Erhaltung seiner Gesundheit benötigt der Mensch wöchentlich mindestens 70 mg Vitamin H und 150 mg Vitamin B. In einer Apotheke gibt es Tabletten, von denen die eine Sorte 10 mg H und 30 mg B je Gramm enthält, die andere 20 mg H und 10 mg B. Die erste Sorte kostet 50 Rappen pro Gramm, die zweite 40 Rappen pro Gramm. Wie viel Gramm von jeder Sorte wäre wöchentlich nötig, um den Bedarf auf diese Weise mit möglichst geringen Kosten zu decken?

Übung 12. Einer Forschungsexpedition stehen in ihren Behältern 21 600 cm^3 für Batterien für das Funkgerät zur Verfügung. Der Expeditionsleitung werden zwei Sorten von Batterien gleicher Leistung mit den Grössen 200 cm^3 und 300 cm^3 angeboten. Die Batterien kosten 10 Fr. bzw. 5 Fr. pro Stück. Mehr als 500 Fr. darf man für den Batteriekauf aber nicht ausgeben. Die Batterie der ersten Sorte hält 18 Stunden, die der zweiten

Sorte 16 Stunden. Wie viele Batterien jeder Sorte sollen eingekauft werden, damit die Funkanlage möglichst lange benutzt werden kann?

Übung 13. Die Bepflanzung einer Hektare Ackerland mit Kartoffeln erfordert einen Arbeitsaufwand von einem Tag und Kosten von 10 Fr., diejenige mit Getreide einen Arbeitsaufwand von 4 Tagen und 20 Fr. Kosten. Der Ertrag einer Hektare Kartoffelacker beträgt 40 Fr. und derjenige einer Hektare Getreideacker 120 Fr.. Ein Bauer besitzt einen Acker von 100 Hektaren, hat 1100 Fr. zur Verfügung und rechnet mit 160 Arbeitstagen. Wie viele Hektaren muss er mit Kartoffeln, wie viele mit Getreide bepflanzen und wie viele muss er brach liegen lassen, damit der Gesamtertrag möglichst gross wird? Wie hoch wird sein Gesamtertrag?

Übung 14. Ein Mensch braucht pro Tag 70 g Eiweiss, 60 g Fett, 400 g Kohlenhydrate. Ein Brot enthält pro 100 g 10 g Eiweiss, 4 g Fett und 40 g Kohlenhydrate. Eine Schokolade enthält pro 100 g 8 g Eiweiss, 30 g Fett und 60 g Kohlenhydrate. Stelle ein Nahrungsmittelpaket mit minimalem Gewicht zusammen, das jeweils von den genannten Nährstoffen wenigstens die tägliche Mindestmenge enthält. Wie gross wird dieses Minimalgewicht?

Übung 15. Eine Fleischfabrik verfrachtet täglich 17 800 kg Frischfleisch und 11 000 kg tiefgekühltes Fleisch an verschiedene Metzgereien. Für den Versand stehen 2 Typen von Lieferwagen zur Verfügung:

Typ I 600 kg Frischfleisch, 300 kg tiefgekühltes Fleisch,

Typ II 500 kg Frischfleisch, 400 kg tiefgekühltes Fleisch

Die Transportkosten pro km betragen beim Typ I 4 Franken, beim Typ II 4.80 Franken. Wie viele Wagen jeden Typs sollten eingesetzt werden, um die Transportkosten möglichst niedrig zu halten? Wie hoch sind diese Transportkosten?

Übung 16. An einer Stassenkreuzung gibt die Ampel A zwei Fahrspuren, die Ampel B drei Fahrspuren frei. Aufgrund der Ergebnisse von Verkehrszählungen soll die Grünphase von B länger als die von A, aber weniger als doppelt so lang als die von A sein. Es wird angenommen, dass durchschnittlich ein Fahrzeug pro Sekunde auf jeder Fahrspur an jeder Ampel vorbeifährt. Wegen der Fussgänger sollen beide Grünphasen zusammen nicht länger als 60 Sekunden betragen. Wie müssen die beiden Ampeln geschaltet werden, damit in den Grünphasen möglichst viele Fahrzeuge die Kreuzung passieren können? Wie viele Fahrzeuge können in den Grünphasen maximal die Kreuzung passieren?

Abbildungsverzeichnis