

# **Stochastik**

**Wahrscheinlichkeiten & Kombinatorik**



## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1. Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	5
1.2. Formalisierung . . . . .	7
1.2.1. Zufallsversuche . . . . .	7
1.2.2. Ereignisse . . . . .	7
<b>2. Wahrscheinlichkeit</b>	<b>9</b>
2.1. Gesetz der grossen Zahlen . . . . .	9
2.2. Erste Definition einer Wahrscheinlichkeit . . . . .	10
2.3. Definition nach Kolmogorov . . . . .	12
<b>3. Stochastische Prozesse</b>	<b>16</b>
3.1. Wahrscheinlichkeitsbaum . . . . .	16
3.2. Unendliche Prozesse . . . . .	17
<b>4. Bedingte Wahrscheinlichkeit</b>	<b>21</b>
4.1. Tulpen aus Amsterdam . . . . .	21
4.2. Einschränkung des Ereignisraumes . . . . .	22
4.3. Unabhängigkeit . . . . .	25
<b>5. Zufallsgrössen &amp; Lageparameter</b>	<b>27</b>
5.1. Zufallsvariable . . . . .	27
5.2. Erwartungswert . . . . .	28
5.3. Standardabweichung . . . . .	30
<b>6. Binomialverteilung</b>	<b>33</b>
<b>7. Testverfahren</b>	<b>37</b>
7.1. Was ist Randomness? . . . . .	37
7.2. Binomialtest . . . . .	38
7.2.1. Nullhypothese . . . . .	39
7.2.2. Signifikanz . . . . .	40
7.2.3. Fehler . . . . .	41
7.2.4. Fazit . . . . .	42
7.2.5. Konfidenzintervalle . . . . .	43
7.2.6. Zweiseitige Tests . . . . .	44
<b>A. Kombinatorik</b>	<b>47</b>
A.1. Problemstellungen . . . . .	47
A.2. Summen- und Produktregel . . . . .	49
A.3. Permutationen . . . . .	51

A.4.	Stichproben . . . . .	53
A.4.1.	Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen . . . . .	53
A.4.2.	Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen . . . . .	54
A.4.3.	Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen . . . . .	54
A.4.4.	Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen . . . . .	55
A.5.	Übersicht . . . . .	57
A.6.	Vermischte Aufgaben . . . . .	58
<b>B.</b>	<b>Der binomische Lehrsatz</b>	<b>59</b>
B.1.	Motivation . . . . .	59
B.2.	Das Pascal'sche Dreieck . . . . .	59
<b>C.</b>	<b>Aerzteinfo zu neuem CoVid-Schnelltest im Nov 2020</b>	<b>62</b>
<b>D.</b>	<b>Gesetz der grossen Zahlen</b>	<b>65</b>
D.1.	Die Tschebyscheff'sche Ungleichung . . . . .	65
D.2.	Herleitung . . . . .	66
D.3.	Konvergenz gegen die Wahrscheinlichkeit . . . . .	67
D.4.	Konvergenz gegen die Wahrscheinlichkeiten in Messungen . . . . .	68
D.5.	Missinterpretation des Gesetzes . . . . .	69
<b>E.</b>	<b>Alles ist Normalverteilt</b>	<b>70</b>
E.1.	Was ist eine Normalverteilung? . . . . .	70
E.2.	Die Standardnormalverteilung an einem Beispiel . . . . .	71
E.3.	Konvergenz gegen die Normalverteilung experimentell . . . . .	72
E.4.	Verschiedene Verteilungen normiert . . . . .	73
E.5.	Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	79

---

## 1. Einleitung

### 1.1. Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung — so wie wir sie heute verstehen — befasst sich mit der quantitativen Erfassung gewisser Aspekte zufälliger Ereignisse oder Beobachtungen. Was Zufall ist, wissen wir eigentlich nicht. Doch tritt dieses Phänomen in der Natur und in der sozialen Umwelt essentiell, wenn auch oft verborgen, in Erscheinung.

In unserer unsicheren Welt hängen viele Dinge vom Zufall ab: Die Erbfaktoren bestimmen in der Vielfalt ihrer Kombinationen unseren Charakter und unser Aussehen, die Wahl des Ehepartners oder des Berufs wird oft durch eine zufällige Begegnung entschieden. Kleinigkeiten lösen Unfälle aus, die durch einen Zufall glimpflich oder tödlich verlaufen können, und eine plötzliche Eingebung hat schon manchem den grossen Gewinn im Lotto gebracht.

Ursprünglich war das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ein Hilfsmittel für Glücksspiele (Würfelspiele, Kartenspiele, Roulette, Lotto etc.), die ja zu allen Zeiten und in allen Kulturen beliebt waren und noch immer sind. Das Würfelspiel war sogar schon in der Antike weit verbreitet. Als Würfel verwendete man Tierknochen, sogenannte Astragale (Sprungbeine von Schafen oder Ziegen).



Abbildung 1: Antike Würfel

Der eigentliche Beginn der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird üblicherweise mit PIERRE DE FERMAT (1601-1685) und BLAISE PASCAL (1623-1662) in Verbindung gebracht. Sie beschäftigten sich mit zwei jahrhundertelang ungelöst gebliebenen Problemen, die wir später in einer speziellen Aufgabe erörtern werden (Würfelpproblem, Teilungsproblem). 1655 erfuhr CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) von den beiden Problemen, und da PASCAL und FERMAT ihre Lösungen geheim hielten, entwickelte er eigene Lösungsmethoden, die er zusammen mit gelösten und ungelösten Aufgaben 1657 in einem ersten Buch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung veröffentlichte. Eine lehrbuchartige Darstellung fand die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem 1713 erschienenen Buch *De arte conjectandi* (etwa: Über die Kunst des Vermutens) von JAKOB BERNOULLI (1655-1705).

In diesem Buch entwickelt BERNOULLI zunächst die Kombinatorik und wendet diese dann auf Glücksspiele, aber auch auf wirtschaftliche Probleme an. Es enthält weiter das *Gesetz der grossen Zahlen*, mit dem eine Verbindung zur Statistik hergestellt werden kann. Einen gewissen Abschluss erreichte die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem 1812 erschienenen Werk *Théorie analytique des probabilités* von PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827). Die Wahrscheinlichkeit wird dabei definiert als der Quotient aus der Anzahl der im Sinne der Fragestellung günstigen zur Anzahl der möglichen Ausgänge. An

## 1. Einleitung

---

der Entwicklung der analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik waren ausser LAPLACE die folgenden Mathematiker beteiligt: ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754), CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1865), SIMEON DENIS POISSON (1781- 1840). Stichwortartig seien hier nur erwähnt: Normalverteilung, Fehlerrechnung, zentraler Grenzwertsatz, Poisson-Verteilung.



Abbildung 2: DANIEL BERNOULLI

Die weitere Herausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Disziplin ist insbesondere das Verdienst der russischen Mathematiker PAFNUTI LWOWITSCH TSCHEBYSCHEW (1821-1894), ANDREI MARKOW (1856-1922), ALEXANDER MICHAILOWITSCH LJAPUNOW (1857-1918) und ANDREI KOLMOGOROW (1903-1989). Ihnen verdankt die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Präzisierung einer Reihe wesentlicher Begriffsbildungen, insbesondere die axiomatische Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch KOLMOGOROW im Jahre 1933. KOLMOGOROW verzichtet darauf zu sagen, wie man eine Wahrscheinlichkeit erhält; es wird nur gesagt, wann eine reelle Zahl „Wahrscheinlichkeit“ heißen darf, und wie man mit diesen Zahlen dann rechnen kann.

Die modernen Naturwissenschaften sind ganz besonders auf Wahrscheinlichkeitsrechnungen angewiesen, zum Beispiel bei Problemen, die mit der Bewegung der Elementarteilchen zusammenhängen. Denn einzelne Teilchen bewegen sich in einer zufälligen Art, die nicht voraussehbar und nicht berechenbar ist. Moleküle treten aber praktisch immer in grossen Mengen auf, ihr kollektives Verhalten wird durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussehbar. Was einerseits für Milliarden von Gasmolekülen gilt, gilt andererseits auch für Millionen von Autofahrern. Man kann zwar nicht voraussagen, dass Molekül A mit Molekül B oder Autofahrer X mit Autofahrer Y kollidieren werden, aber es lässt sich berechnen, wie viele Gasmoleküle ungefähr in einer Sekunde oder wie viele Autofahrer ungefähr in einem Monat zusammenstoßen werden.

Mit den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelang es, zahlreiche Erscheinungen in einer der Realität noch besser angepassten Form mathematisch zu beschreiben, die schon erhaltenen Resultate zu interpretieren und auch zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik — man nennt dies *Stochastik* — werden in Zukunft eine Schlüsselstellung einnehmen. Nur auf ihren Grundlagen können aufstrebende moderne, theoretisch anspruchsvolle und praktisch bedeutsame Theorien und Techniken verstanden werden. So wurden in den letzten Jahrzehnten mehrere Disziplinen entwickelt, die sich mit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in verschiedenen Natur- und Gesellschaftswissenschaften, Medizin, Technik, Operation Research, Kybernetik und Ökonomie befassen, z.B. Bedienungstheorie, Zuverlässigkeitstheorie, Ent-

scheidungstheorie, Nutzentheorie, Optionstheorie, Spieltheorie, Informationstheorie, statistische Qualitätstheorie, Monte-Carlo-Simulation, Evolutionstheorie. Mit den heutigen Computern wächst die Anwendung von auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhenden Verfahren ständig.

## 1.2. Formalisierung

### 1.2.1. Zufallsversuche

Mit Zufallsgeräten führt man Zufallsversuche durch, indem man die verschiedenen Ausgänge oder Ergebnisse eines Zufallsexperiments beobachtet. Dabei versteht man unter einem Zufallsversuch einen (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholbaren Vorgang, dessen Ausgang sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt.

- Zu Beginn eines Fussballspiels entscheidet eine Münze darüber, welche Mannschaft die Seitenwahl erhält.
- Beim Spiel Backgammon entscheiden zwei Würfel darüber, wie viele Felder die Spielfiguren vorrücken dürfen.
- Beim *Einarmigen Banditen* ist es nicht so offensichtlich, wie die einzelnen Walzen gesteuert werden. Man hat aber den Eindruck, dass sie zufällig über Gewinn und Verlust entscheiden.

#### Definition 1.1: Stichprobenraum

Die Menge aller möglichen Versuchsausgänge  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  eines Zufallsversuchs bezeichnet man als *Stichprobenraum*  $\Omega$ .

#### Beispiele.

Münze:  $\omega_1 = \text{Kopf}$ ,  $\omega_2 = \text{Zahl}$ , also  $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$

Würfel:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

### 1.2.2. Ereignisse

Wenn man beim Roulette auf „impair“ setzt, ist man nicht so sehr daran interessiert, in welches Zahlenfach die Kugel fällt. Wichtig ist nur, ob das zufällige Ereignis eintritt, dass die ausgeloste Zahl ungerade ist, also die Kugel in eines der Fächer 1, 3, 5, ..., 33, 35

fällt. Diese gewinnbringenden Ausfälle bilden eine Teilmenge  $\mathbb{A}$  des Stichprobenraumes  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 35, 36\}$ .

Mengen eignen sich hervorragend zur Beschreibung von Zufallsversuchen. Die Ausdrücke der Mengensprechweise werden lediglich in entsprechende Ausdrücke übertragen.

**Definition 1.2: Ereignis**

Jede Teilmenge  $\mathbb{A} \subset \Omega$  heisst ein *Ereignis*.

Endet eine Durchführung des Zufallversuchs mit dem Ausgang  $\omega \in \mathbb{A}$ , so sagt man: Das Ereignis  $\mathbb{A}$  ist eingetreten. Ist  $\omega \notin \mathbb{A}$ , so sagt man: Das Ereignis  $\mathbb{A}$  ist nicht eingetreten oder das *Gegenereignis*  $\bar{\mathbb{A}} = \Omega \setminus \mathbb{A}$  ist eingetreten.

Unter den Ereignissen eines Zufallsversuchs gibt es zwei Sonderfälle, nämlich  $\mathbb{A} = \Omega$  und  $\mathbb{A} = \emptyset$ . Da  $\Omega$  alle möglichen Ereignisse enthält, tritt  $\Omega$  bei jeder Durchführung des Versuchs ein. Man bezeichnet  $\Omega$  deshalb auch als das *sichere Ereignis*. Da die leere Menge überhaupt kein Element enthält, kann dieses Ereignis bei keiner Durchführung des Versuchs eintreten. Man bezeichnet  $\emptyset$  deshalb auch als das *unmögliche Ereignis*. Beachten Sie  $\bar{\Omega} = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$  und  $\bar{\emptyset} = \Omega \setminus \emptyset = \Omega$ , d.h. das Gegenereignis vom sicheren Ereignis ist das unmögliche Ereignis und umgekehrt. Sind  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  zwei Ereignisse desselben Zufallsversuchs und endet die Durchführung des Zufallversuchs mit dem Ausgang  $\omega$ , so sagt man,

- falls  $\omega \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ : „Ereignis  $\mathbb{A}$  oder  $\mathbb{B}$  ist eingetreten“,
- falls  $\omega \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ : „Ereignis  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  ist eingetreten“.

Zwei Ereignisse  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  heissen *unvereinbar* genau dann, wenn sie nicht zugleich eintreten können, wenn also gilt  $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$ . Gegenereignisse  $\mathbb{A}$  und  $\bar{\mathbb{A}}$  sind stets unvereinbar.

**Übung 1** (Qualitätskontrolle). Bei einer Qualitätskontrolle werden drei produzierte Stücke der Reihe nach darauf untersucht, ob sie brauchbar (b) oder unbrauchbar (u) sind. Ermittle das folgende Ereignis:

- (a) Das zweite Stück ist unbrauchbar.
- (b) Mindestens zwei Stücke sind unbrauchbar.

# Würfe	2	5	10	20	30	40
Einsen/Würfe	0	0.6	0.4	0.7	0.6	0.63
# Würfe	60	80	100	120	140	160
Einsen/Würfe	0.67	0.66	0.65	0.62	0.62	0.63
# Würfe	180	200				
Einsen/Würfe	0.62	0.63				

Tabelle 1: Anzahl Einsen zu Anzahl Würfen beim Reissnagel-Werfen

## 2. Wahrscheinlichkeit

### 2.1. Gesetz der grossen Zahlen

Für *zwei* Verspätungen hatte ein Arrestant 200-mal einen Reissnagel zu werfen und zu notieren, ob er Stellung 0 oder 1 angenommen hat. Sein Ergebnisprotokoll siehst du in Tabelle 1 auf Seite 9.

**Übung 2.** Stelle diese Daten graphisch in Abbildung 4 auf Seite 10 dar.

Nach anfänglichen Schwankungen stabilisiert sich der Wert für die relative Häufigkeit der Ziffer 1, also die Anzahl Einsen/Anzahl Würfe, um den Wert 0.625 herum.

Auf Grund dieses Beispiels liegt es nahe, jedem Ausgang  $\omega$  eines Zufallversuchs eine Wahrscheinlichkeit  $P(\omega)$  zuzuordnen. Diese Wahrscheinlichkeit steht für den festen Wert, auf den sich die relative Häufigkeit des betreffenden Ausgangs konzentriert, wenn der Versuch oft wiederholt wird. Beim Reissnagel wurden diese Werte  $P(1) \approx 0.625$  und  $P(0) \approx 0.375$  empirisch durch Experimente ermittelt. Bei anderen Zufallsgeräten kann man die Wahrscheinlichkeit oft auf Grund ihrer Symmetrie angeben.

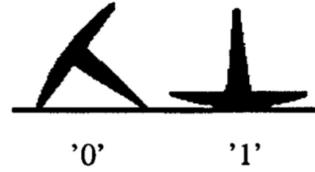


Abbildung 3: Stellungen 0 und 1 des Reissnagel

**Bemerkung.** Die Bezeichnung  $P$  erinnert an probability.

Die *relative Häufigkeit* ist eine experimentelle Messung der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

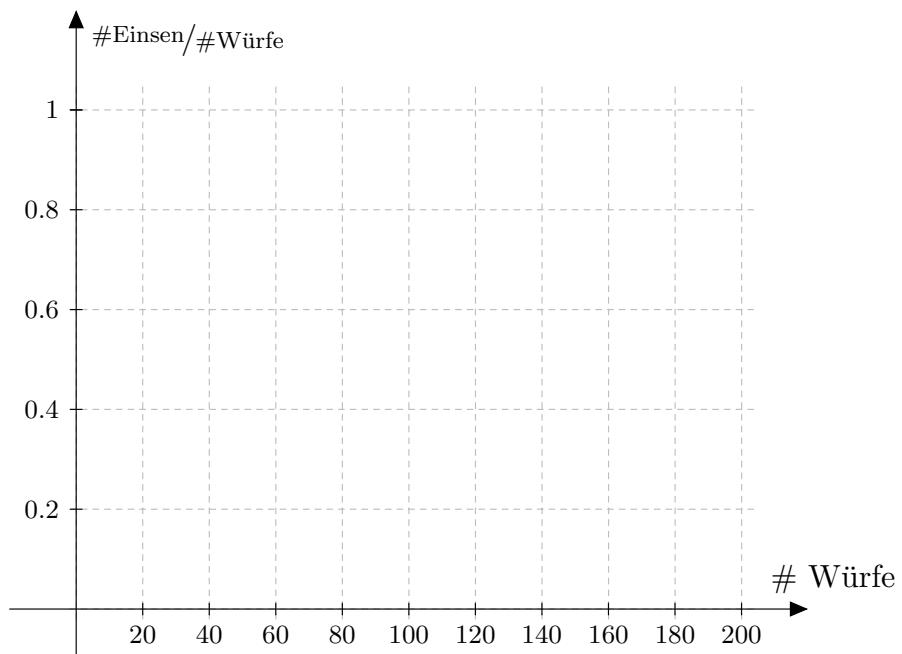


Abbildung 4: Graphische Darstellung des Reissnagel-Versuchs

lichkeit. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist dadurch als statistischer Begriff charakterisiert. Die Wahrscheinlichkeit, auf dem Mars lebendige Wesen anzutreffen, oder die Wahrscheinlichkeit, dass Cäsar in Grossbritannien war, entsprechen nicht unserem Wahrscheinlichkeitsbegriff, da er bei diesen Beispielen im qualitativen Sinn verwendet wird. Verlangt wird jedoch ein quantitativer Wahrscheinlichkeitsbegriff. Man kann nicht, wie es sonst in der Mathematik üblich ist, durch Rückführung auf andere Begriffe streng definieren, was man unter der Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses oder Ereignisses versteht. Denn die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses oder Ereignisses ist eine auf Erfahrungen beruhende Annahme. Deshalb ist es ohne zusätzliche Annahmen nicht möglich, den Zahlenwert für eine Wahrscheinlichkeit exakt zu ermitteln. Dennoch ist dieses Vorgehen gerechtfertigt, weil die so aufgebaute Wahrscheinlichkeitsrechnung sich bei zahllosen Anwendungen in den verschiedensten Gebieten glänzend bewährt hat und Vorhersagen, die man aufgrund wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen über zukünftige Ereignisse gemacht hat, sich immer wieder bestätigt haben.

## 2.2. Erste Definition einer Wahrscheinlichkeit

Nachdem jedem Ausgang  $\omega$  eines Zufallversuchs auf plausible Weise ein Wert als Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden konnte, liegt es nahe, entsprechend die Wahrscheinlich-

keit  $P(\omega)$  für ein Ereignis  $\omega$  zu definieren.

**Definition 2.1: Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses**

$P(\omega)$  ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ausgänge in  $\mathbb{A}$ .

**Beispiele.**

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine ungerade Zahl zu werfen?

Ereignis  $\mathbb{A} = \{\omega \mid \omega \text{ ist ungerade}\} = \{1, 3, 5\}$ , also  $P(\mathbb{A}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ .

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Jasskartenspiel einen Buben zu ziehen?

$$P(\mathbb{A}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

**Bemerkung.** Für die Sonderfälle, sicheres und unmögliches Ereignis, gilt:

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{und} \quad P(\emptyset) = 0.$$

**Übung 3** (Kopf oder Zahl?). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf

- (a) mit einer Münze Kopf, Kopf oder Zahl, Kopf und Zahl,
- (b) mit einem Würfel eine 3, eine Quadratzahl

zu werfen?

**Übung 4** (Geburten-Faust-Regel). In England gab es im Zeitraum von 1938-1947 6620794 Einzel-, 81133 Zwillings-, 667 Drillings- und 14 Vierlingsgeburten. Überprüfe die in der Gynäkologie übliche Regel:

Ist  $p$  die ungefähre Wahrscheinlichkeit für eine Zwillingsgeburt, so ist  $p^2$  die ungefähre Wahrscheinlichkeit für eine Drillingsgeburt und  $p^3$  die ungefähre Wahrscheinlichkeit für eine Vierlingsgeburt.

Ausgehend von der Erfahrungstatsache, dass die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses  $\mathbb{A}$  bei fortgesetzter Wiederholung eines Zufallversuchs einem bestimmten Wert zustreben, fasste RICHARD VON MISES (1883-1953) die Wahrscheinlichkeit von  $\mathbb{A}$  als Grenzwert der relativen Häufigkeiten bei unbegrenzter Wiederholung eines Zufallversuchs auf. Dies war die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit.

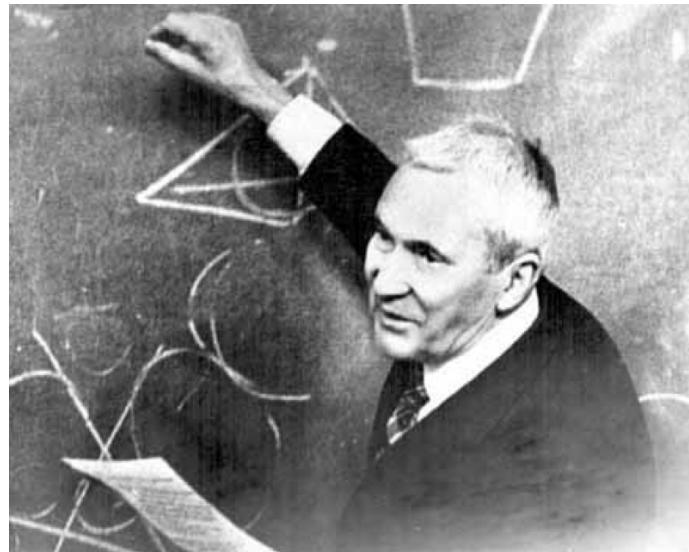


Abbildung 5: ANDREY KOLMOGOROV

### 2.3. Definition nach Kolmogorov

In dem weiteren Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie erwies sich diese Definition als ungeeignet, da unüberwindliche Schwierigkeiten auftraten. Der Limesbegriff im Sinne der Analysis lässt sich nämlich nicht auf eine vom Zufall beherrschte Folge anwenden, wo immer wieder *Ausreisser* möglich sind. Eine logisch befriedigende Fassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wurde erst durch den Verzicht auf eine direkte Definition möglich. KOLMOGOROV forderte lediglich gewisse Eigenschaften für Wahrscheinlichkeiten und zeigte 1933, dass sich bereits aus wenigen Axiomen eine Wahrscheinlichkeitstheorie entwickeln lässt. Demnach kann man in vereinfachter Form sagen:

#### Definition 2.2: Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorov



Ist  $P$  eine Funktion, die jedem Ereignis  $\mathbb{A}$  eines Stichprobenraumes  $\Omega$  genau eine reelle Zahl  $P(\mathbb{A})$  zuordnet, so heisst  $P$  eine *Wahrscheinlichkeitsfunktion* und jeder Funktionswert  $P(\mathbb{A})$  die *Wahrscheinlichkeit* von  $\mathbb{A}$ , genau dann, wenn folgende (Kolmogorow-)Axiome erfüllt sind:

- $P(\mathbb{A}) \geq 0, \forall \mathbb{A} \subset \Omega$  (Positivität)
- $P(\Omega) = 1$  (Normierung)
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \Omega \text{ mit } \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset \implies P(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = P(\mathbb{A}) + P(\mathbb{B})$  (Additivität)

Aus den Axiomen folgert man sofort

**Satz 2.1: Gegenwahrscheinlichkeit**

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$



*Beweis.* Wegen  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  und  $A \cup \bar{A} = \Omega$  gilt

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

also  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . □

**Beispiel 1.** Ein illustratives Beispiel für eine Anwendung ist die Suche nach der Antwort auf die Frage:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in 10 würfen mindestens einmal eine 6 zu werfen?

Dies zu berechnen ist ziemlich aufwändig. Denn man muss die Wahrscheinlichkeit berechnen, genau 1-mal eine 6, genau 2-mal eine 6, ..., genau 10-mal eine 6 in 10 Würfen zu realisieren; danach muss man noch die einzelnen Wahrscheinlichkeiten aufsummieren. Zudem ist die Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten — beispielsweise genau 3 6en in 10 Würfen — nicht trivial (Resultat 15.5%).

Einfacher geht es jetzt über das Gegenereignis von „mindestens 1-mal eine 6 zu werfen“; das ist nämlich „nie eine 6 in 10 Würfen“ zu erzielen. Es ist

$$P(\text{keine 6 in 10 Würfen}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0.1615.$$

Nun kann man mit obigem Satz einfach schliessen, dass die Wahrscheinlichkeit „in 10 Würfen mindestens 1-mal eine 6“ zu würfeln

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens eine 6 in 10 Würfen}) &= 1 - P(\text{keine 6 in 10 Würfen}) \\ &\approx 1 - 0.1615 = 0.8385 \approx 84\%, \end{aligned}$$

sein muss.

**Bemerkung.** Die Beziehung aus obigem Satz wird sehr oft benötigt, da in vielen Fällen die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses  $\bar{A}$  leichter zu berechnen ist als die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$ .

**Satz 2.2: günstig durch möglich**

Hat ein Zufallsversuch  $n$  mögliche Ausfälle  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  und ist jeder dieser Ausfälle gleich wahrscheinlich, also  $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ , so gilt für ein Ereignis  $\mathbb{A}$

$$P(\mathbb{A}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{\text{card}(\mathbb{A})}{\text{card}(\Omega)}.$$

*Beweis.* Brauche Kolmogorof-Additivität. □

**Definition 2.3: Klassische Wahrscheinlichkeit nach Laplace**

In obigem Fall gilt also für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $\mathbb{A}$ : Anzahl der günstigen Fälle für  $\mathbb{A}$  geteilt durch Anzahl der möglichen Fälle  $\Omega$ , oder kurz

$$P(\mathbb{A}) := \frac{|\mathbb{A}|}{|\Omega|} = \frac{g}{m}.$$

**Beispiele.** Würfeln mit einem guten Spielwürfel, Ziehen von Losen aus einer gut durchmischten Urne, Ziehen von Karten aus einem gut durchmischten Kartenspiel etc.

Die letzte Folgerung aus den Axiomen entspricht der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit, die von Laplace stammt. Diese Definition hat den Nachteil, dass man sich auf endlich viele Ereignisse, die alle noch gleich wahrscheinlich sein müssen, beschränken muss. Der axiomatische Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird heute in der Mathematik allgemein benutzt, weil man nicht mehr den Einschränkungen unterworfen und die klassische Definition als Sonderfall enthalten ist.

**Übung 5** (Energiearten). In einer Stadt werden von allen Gebäuden 15% elektrisch, 35% mit Öl, 25% mit Kohle und der Rest mit Erdgas beheizt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gebäude

- (a) mit Kohle,
- (b) nicht mit Öl,
- (c) weder mit Kohle noch mit Öl beheizt wird?

**Übung 6** (Urne mit 100 Kugeln). Eine Urne enthält 100 Kugeln mit den Nummern 00, 01, 02, ..., 98, 99. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Es sei X die erste und Y die

zweite Ziffer ihrer Nummer. Berechne die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = 3)$ ,  $P(Y \neq 4)$ ,  $P(X \neq Y)$ ,  $P(X < 4 \text{ und } Y < 3)$  und  $P(X \cdot Y > 49)$ .

**Übung 7** (Pferderennen). Die Pferde Adlatus, Bomber, Candy und Donner bestreiten ein Galopprennen. Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, ist doppelt so gross wie die von B, und die von B ist doppelt so gross wie die von C. Die Wahrscheinlichkeit, dass D gewinnt, ist dreimal so gross wie die von C. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- (a) A,
- (c) C,
- (b) B,
- (d) B oder C gewinnt?

Beim Aufgalopp verletzt sich Bomber und kann deshalb am Rennen nicht teilnehmen. Wie gross ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass D gewinnt?

**Übung 8** (Bauer sucht Schatz). Ein Bauer erfährt, dass auf seinem  $60 \text{ m} \times 40 \text{ m}$  grossen Acker irgendwo ein Schatz vergraben ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schatz

- (a) mindestens zehn Meter von der Mitte entfernt ist,
- (b) gefunden wird, wenn man zehn Löcher mit einem Durchmesser von 10 m gräbt?
- (c) Wie viele Löcher vom gleichen Durchmesser müsste man graben, um mit mindestens 80-prozentiger Sicherheit den Schatz zu finden?

Hinweis: Hier handelt es sich um eine geometrische Wahrscheinlichkeit, definiert durch das Verhältnis des Inhalts der günstigen Fläche zum Inhalt der möglichen Fläche. Auch diese Zuordnung erfüllt die drei Axiome von Kolmogorow!

### 3. Stochastische Prozesse

#### 3.1. Wahrscheinlichkeitsbaum

Im vorherigen Kapitel haben wir einstufige Zufallsversuche betrachtet: Der Zufallsversuch wurde nur einmal durchgeführt. *Stochastische* (griech., zufällige) *Prozesse* sind eine Folge von einstufigen Versuchen, also mehrstufige Zufallsversuche. Dabei kann der Ausgang auf einer bestimmten Stufe durchaus vom Ausgang der vorherigen Stufen abhängen. Der Ablauf eines stochastischen Prozesses kann in den meisten Fällen übersichtlich durch ein Baumdiagramm dargestellt werden.



**Beispiel 2.** Aus einer Urne mit drei roten und zwei grünen Kugeln wird eine Kugel gezogen und ihre Farbe notiert. Danach wird die Kugel wieder zurückgelegt und der Versuch wiederholt. Hier hängt die zweite Stufe nicht vom Ausgang der ersten Stufe ab. Der zugehörige Stichprobenraum ist  $\Omega = \{rr, rg, gr, gg\}$ . Die Figur 6 auf Seite 16 zeigt das Baumdiagramm dieses stochastischen Prozesses.

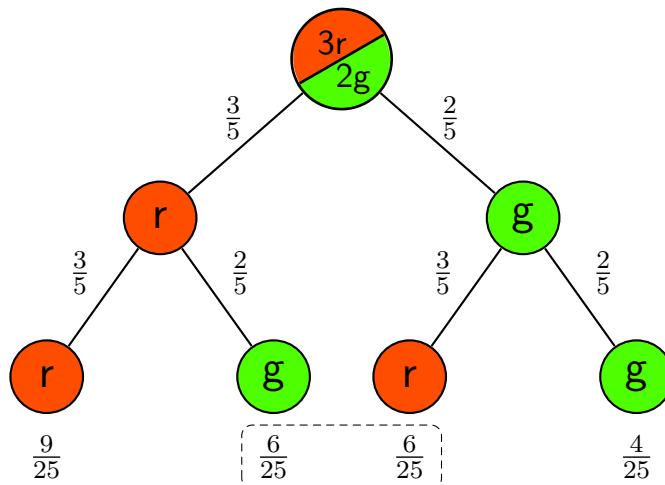


Abbildung 6: Wahrscheinlichkeitsbaum für die Urne (mit Zurücklegen)

Jedem Ausgang entspricht ein Pfad durch den Baum. Die Zweige der Pfade sind mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten belegt. Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten der Zweige, die von einem Knoten ausgehen, zusammen 1 ergeben.

Um eine vernünftige Definition für die Wahrscheinlichkeit eines Pades zu finden, stellt man sich vor, dass dieser zweistufige Prozess  $N$ -mal abläuft, wobei  $N$  eine grosse Zahl, z.B. 10000, bedeutet. In  $3/5$  der  $N$  Wiederholungen wird man zu dem Knoten  $r$  gelangen, also etwa 6000 mal.  $2/5$  dieser  $3/5 N$  Fälle führen von  $r$  zu  $g$ ; der Pfad  $rg$  wird also etwa

2400 mal durchlaufen. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Pfad ist somit

$$\frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot N}{N} = \frac{6}{25}.$$

### Satz 3.1: Pfadwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

*Beweis.* Den Beweis führt man wie oben im Beispiel, aber mit Variablen.  $\square$

**Übung 9** (Kugel ziehen ohne Zurücklegen). Berechne die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für den stochastischen Prozess, bei dem die zuerst gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird. Zeichne das zugehörige Baumdiagramm.

**Übung 10** (Anna aus Ananas). Aus der Urne  $\{A, N, A, N, A, S\}$  werden vier Buchstaben nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „ANNA“ zu erhalten? Zeichne auch ein Baumdiagramm.

**Übung 11** (Meteo). Für Wetterprognosen in Therwil gelten die Regeln: Wenn es heute trocken ist, dann ist es morgen mit der Wahrscheinlichkeit  $5/6$  wieder trocken. Wenn es heute regnet, dann regnet es morgen mit der Wahrscheinlichkeit  $2/3$ . Heute ist Sonntag, und es ist trocken. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am

- (a) Montag regnet,
- (b) Dienstag trocken ist,
- (c) Mittwoch regnet,
- (d) Donnerstag trocken ist?

Zeichne ein Baumdiagramm.

## 3.2. Unendliche Prozesse

**Übung 12** (Schuss auf Ziel).

- (a) Stan und Oliver schiessen gleichzeitig auf dasselbe Ziel. Die Trefferwahrscheinlichkeiten sind 80% bzw. 70%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ziel mindestens einmal getroffen wird?

- (b) Abel und Kain haben je zwei Kugeln. Sie schiessen abwechselnd auf eine Glasflasche. Abel beginnt. Ihre Trefferwahrscheinlichkeiten sind  $1/3$  bzw.  $1/4$ . Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel die Flasche zerstört?
- (c) wie (b), jedoch haben Abel und Kain beliebig viele Kugeln zur Verfügung.

Wenn zwei Leute gegensätzlicher Meinung sind, wird oft eine Münze geworfen, um eine Entscheidung herbeizuführen. Gelegentlich mag es vorkommen, dass der eine oder auch beide den Argwohn hegen, die Münze sei präpariert. Der Mathematiker JOHN VON NEUMANN hat einen schlauen kleinen Trick entwickelt, der es den Kontrahenten erlaubt, eine präparierte Münze zu verwenden und trotzdem ein faires Ergebnis zu erhalten. Die Münze wird zweimal geworfen. Wenn zweimal Kopf oder zweimal Zahl erscheint, wird die Münze wiederum zweimal geworfen. Wenn zuerst Kopf und dann Zahl erscheint, hat der eine der beiden Kontrahenten gewonnen, und wenn zuerst Zahl und dann Kopf erscheint, hat der andere gewonnen. Begründe, dass die Wahrscheinlichkeiten für diese beiden Ereignisse gleich hoch sind, auch wenn die Münze präpariert ist.

**Übung 13** (Astragale werfen). In der Antike dienten Lammknochen, sogenannte Astragale, als Würfel. Astragale können mit vier Seiten nach oben fallen. Durch Versuche in Museen kennt man die Wahrscheinlichkeiten dieser vier Seiten:  $p_1 \approx 0.1, p_2 \approx 0.1, p_3 \approx 0.4, p_4 \approx 0.4$ . Bei einem Spiel haben die Griechen und Römer vier Astragale auf einmal geworfen. Besonders begehrte war ein Wurf, bei dem alle vier verschiedenen Seiten oben liegen, ein *Venuswurf*. Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Venuswurf.

**Übung 14** (de Mère's Würfel und Pascal's Spielabbruch). Als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt das Jahr 1654, als der CHEVALIER DE MÈRE, ein Philosoph und Literat am Hof Ludwigs des XIV, dem Mathematiker BLAISE PASCAL zwei Fragen, die unter Glücksspielern schon seit Jahrhunderten umstritten waren, vorlegte.

- (a) Was ist wahrscheinlicher: bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine 6 zu werfen, oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen? De Mère glaubte, dass die Wahrscheinlichkeiten gleich sein müssten, da  $4 \div 6 = 24 \div 36$  ist.
- (b) Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für Kopf erhält Spieler A einen Punkt, für Zahl erhält Spieler B einen Punkt. Wer zuerst fünf Punkte erzielt, gewinnt den ganzen Einsatz. Nach sieben Würfen hat A 4 Punkte, B 3 Punkte erzielt. Das Spiel muss wegen eines unvorhergesehenen Ereignisses abgebrochen werden. Wie ist der Einsatz gerecht zu verteilen: nach den erreichten Punkten, also wie  $4 \div 3$ , oder nach den zum Sieg noch fehlenden Punkten, also wie  $2 \div 1$  (A fehlt noch ein Punkt, B fehlen noch zwei Punkte; also muss A doppelt so viel erhalten wie B.)?

Viele Lösungsversuche scheiterten nicht zuletzt an der unzweckmässigen Verwendung des

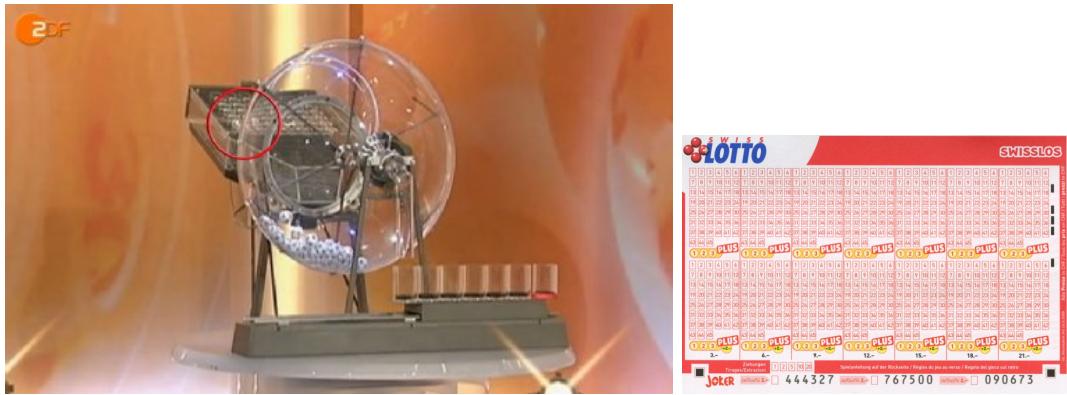


Abbildung 7: Oops, Lotto-Ziehung-Missgeschick; und Tippschein

Proportionaldenkens. Die exakte Lösung — auf verschiedenen Wegen — blieb PASCAL und FERMAT vorbehalten.

PASCAL hat sich übrigens in einem Brief über DE MÈRE so geäussert:

... denn er hat wohl Geist, aber er ist nicht Mathematiker, und das ist, wie Sie wissen, ein grosser Mangel!

**Übung 15** (Geburtstagsparadoxon). Es kann spannend sein, bei den einzelnen Teilaufgaben das Ergebnis jeweils zuerst zu raten.



- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in deiner Klasse mindestens 2 Personen am gleichen Jahrestag Geburtstag haben?
- (b) Bei einer Party sind  $k$  Gäste. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Gäste am gleichen Jahrestag Geburtstag haben? Schätze, wie viele Gäste anwesend sein müssten, damit diese Wahrscheinlichkeit grösser als 50% ist.

**Übung 16** (farbenblind). In einer Bevölkerung ist einer von 100 farbenblind. Wie viele Personen muss man untersuchen, um mit mindestens 95%-iger Sicherheit mindestens eine farbenblinde Person zu finden?

**Übung 17** (Lotto). Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Lottoziehung



- (a) 6 richtige
  - (c) eine richtige
  - (b) keine richtige
  - (d) 5 richtige
- zu tippen.



Abbildung 8: Poker Hand Rankings



**Übung 18** (Lotto Nachbarn). Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lottoziehung mit 42 Kugeln mindestens ein Paar Nachbarn vorkommen? (Beispiel: 2 13 20 21 34 41)



**Übung 19** (Draw Poker). Beim Pokern erhält jeder Spieler fünf Karten aus einem Kartenspiel mit 52 Karten (4 Farben zu je 13 Blatt). Die folgenden Konfigurationen sind von Bedeutung:

- (a) One Pair (z.B. 2 Könige)
- (b) Two Pair (z.B. 2 Achter, 2 Damen)
- (c) Three of a Kind (z.B. 3 Zehner)
- (d) Straight (5 fortlaufende Werte beliebiger Farbe, wobei das As als höchste Karte oder als 1 gelten kann)
- (e) Flush (5 Karten gleicher Farbe)
- (f) Full House (One Pair und Three of a Kind)
- (g) Four of a Kind/Poker (z.B. 4 Könige)
- (h) Straight Flush (5 fortlaufende Werte gleicher Farbe)

Berechne die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

---

## 4. Bedingte Wahrscheinlichkeit

### 4.1. Tulpen aus Amsterdam

Ein Hobbygärtner steckt 100 Tulpenzwiebeln unter denselben Verhältnissen fachgerecht in den Boden. Nach einiger Zeit sind daraus 87 herrliche Tulpen entstanden. Wenn man das Ereignis

A: aus der Zwiebel entsteht eine Tulpe

festlegt, so gilt für dieses Ereignis  $P(A) = 0.87$ . Der Hobbygärtner hatte nicht alle 100 Zwiebeln bei demselben Händler gekauft. 60 Zwiebeln stammten von einem Grossversand aus Holland, die restlichen 40 Zwiebeln waren ein Sonderangebot aus einem Gartencenter. Bei genauerer Untersuchung stellte der Gärtner fest, dass von den 13 Zwiebeln, die keine Tulpe hervorbrachten, nur deren 3 aus Holland kamen und die restlichen Zwiebeln aus dem Gartencenter stammten. Der Grossversand aus Holland lieferte also mit  $57/60 = 95\%$  gute Zwiebeln, während das Sonderangebot aus dem Gartencenter nur  $30/40 = 75\%$  gute Zwiebeln ergab. Bezeichnet man das Ereignis



B: Zwiebel kommt aus Holland,

so gilt  $P(B) = 0.6$ . Die Wahrscheinlichkeit  $P(A) = 0.87$  sollte man präziser als die *unbedingte* Wahrscheinlichkeit für das Entstehen einer schönen Tulpe bezeichnen. Mit dem Ereignis B zusammen lässt sich nämlich eine bedingte Wahrscheinlichkeit für A bilden; dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zwiebel eine Tulpe hervorbringt unter der Bedingung, dass sie aus Holland stammt. Man bezeichnet diese Wahrscheinlichkeit mit  $P(A|B)$ . Aus den obigen Überlegungen ergab sich  $P(A|B) = 0.95$ .

Diese bedingte Wahrscheinlichkeit darf nicht verwechselt werden mit der Wahrscheinlichkeit, aus einer Kiste mit allen 100 noch nicht eingepflanzten Zwiebeln eine gute, aus Holland kommende Zwiebel zu ziehen, denn diese Wahrscheinlichkeit ist

$$P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.95 = 0.57.$$

Man erkennt aber den Zusammenhang

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Die Tabelle 2 auf Seite 22 verdeutlicht noch einmal den Sachverhalt aus dem Beispiel.

	Holland	Gartencenter	
Tulpe	57	30	87
keine Tulpe	3	10	13
	60	40	100

Tabelle 2: Zuchterfolg bei Tulpen

## 4.2. Einschränkung des Ereignisraumes

### Definition 4.1: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei  $\mathbb{B}$  ein Ereignis mit  $P(\mathbb{B}) > 0$ . Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses  $\mathbb{A}$  unter der Bedingung, dass das Ereignis  $\mathbb{B}$  bereits eingetreten ist, oder kurz, die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von  $\mathbb{A}$  unter der Bedingung  $\mathbb{B}$ ,  $P(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ , wird definiert durch

$$P(\mathbb{A}|\mathbb{B}) := \frac{P(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}{P(\mathbb{B})}.$$

**Bemerkung.**  $P(A|B)$  ist die relative Wahrscheinlichkeit von A bezüglich des *reduzierten* Stichprobenraumes B.

**Übung 20** (Tulpen aus Amsterdam). A und B seien die Ereignisse aus dem Einführungsbeispiel.

- (a) Zeige:  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ .
- (b) Berechne  $P(B|A)$ . (Man sieht eine herrliche Tulpe. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zugehörige Zwiebel in Holland gekauft wurde.)

**Übung 21** (Lügendetektortest). Ein Lügendetektor-Test entscheide in 90% aller Fälle richtig, sowohl bei Schuldigen, als auch bei Unschuldigen. Um Diebstähle zu reduzieren, entlässt eine grosse Firma alle Angestellten, die beim Test durchfallen. Vor der Entlassungsaktion seien 5% aller Angestellten Diebe.

- (a) Wie viele unter den Entlassenen wären tatsächlich Diebe?
- (b) Wie viele Diebe würden nicht erfasst?

**Übung 22** (Sensitivität und Spezifität). Schreibe auf, was die Begriffe *Sensitivität* und *Spezifität* bedeuten. Kontrolliere deine Aussagen mithilfe der Angaben aus dem Skript auf Seite 24 (Übung HIV Test).

## 4.2. Einschränkung des Ereignisraumes

---

LEISTUNGSMERKMALE  
Klinische Leistung  
207 Nasenabstrichproben, von denen 107 als COVID-19 positiv und 100 als COVID-19 negativ durch RT-PCR Assay bestätigt wurden, wurden für den Test gewonnen und dann die Testergebnisse des Genrix SARS-CoV-2 Antigen Test Kits (Kolloidales Gold) mit denen der RT-PCR verglichen. Die Ergebnisse sind nachstehend aufgeführt:  
Positive prozentuale Übereinstimmung:

Ct-Wert	Anzahl der Proben	Anzahl der wirklich positiven Schnelltest Proben	Anzahl der falsch-negativen Schnelltest Proben	Empfindlichkeit des SARS-CoV-2 Antigen Schnelltests (CI)
≤30	80	80	0	100% (96-100)
≤32	91	91	0	100% (96-100)
≤34	101	100	1	99% (94-99)
≤36	107	105	2	98,13% (93-99)

Negative prozentuale Übereinstimmung:

Anzahl der Proben	Anzahl der wirklich negativen Schnelltest Proben	Anzahl der falsch-positiven Schnelltest Proben	Spezifität des SARS-CoV-2 Antigen Schnelltests (CI)
100	100	0	100% (96-100)

HERSTELLER

Abbildung 9: Beipackzettel Covid-19 Selbsttest

**Übung 23** (Covid-19 Selbsttest). Betrachte die Angaben zur Sensitivität und Spezifität auf dem folgenden Ausschnitt des Beipackzettels eines gängigen Tests (Abbildung 9 auf Seite 23)

- a) Bestimme die Spezifität und die niedrigste der angegebenen Sensitivitäten.

Nimm an, dass aktuell 5% der Bevölkerung an Covid-19 erkrankt ist.

- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person tatsächlich krank ist, wenn der Test positiv anzeigt (*positiv prädiktiver Wert*).  
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person tatsächlich gesund ist, wenn der Test negativ anzeigt (*negativ prädiktiver Wert*).

Seien wir jetzt in einer Pandemie und geschätzte 20% der Bevölkerung sei an Covid-19 erkrankt. Wir testen eine ganze Schule (ca. 1000 Personen).

- d) Erstelle dazu ebenfalls eine geeignete Tabelle mit den Werten für die richtig positiven, die falsch positiven, die richtig negativen und die falsch negativen Tests. Wie viele kranke Personen werden nicht erkannt?

**Übung 24** (geringe Spezifität). Die Corona Selbsttests haben eine sehr hohe Spezifität und eine hohe Sensitivität. Was bedeutet es für Patienten, wenn ein medizinischer Test eine hohe Sensitivität, aber eine nicht so hohe Spezifität hat?

**Übung 25** (Selbsttest 2020). Im Anhang C im Skript findest du Angaben zu zwei verschiedenen Covid-19 Selbsttests aus dem Jahr 2020.

- a) Rechne die Werte für die positive und negative Prädikation nach.

Die Sensitivität ist bei diesen Tests deutlich tiefer als beim neuen Test, auch die Spezifität ist beim zweiten Test niedriger.

- b) Wären die Testergebnisse für die ganze Schule genauso gut oder gar schlechter verglichen mit dem neuen Test? Erstelle dazu dieselben Tabellen wie in Aufgabe 2e).



**Übung 26** (HIV Test). Zur Beurteilung eines HIV-Tests seien folgende Werte gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand HIV positiv ist, beträgt  $1 \div 10\,000$ ; also

$$P(H) := 0.01\%.$$

Ferner kenne man die *Sensitivität* (Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv anzeigt, falls die Person tatsächlich positiv ist.):

$$P(p|H) = 99.9\%$$

und die *Spezifität* (Wahrscheinlichkeit, dass der Test negativ anzeigt, falls die Person tatsächlich negativ ist.):

$$P(\bar{p}|\bar{H}) = 99.7\%.$$

- (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person tatsächlich HIV positiv ist, wenn sie ein positives Testresultat erhalten hat.\* Schätze diese Wahrscheinlichkeit zuerst.
- (b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person tatsächlich negativ ist, unter der Voraussetzung, dass sie ein negatives Testergebnis erhalten hat.†

**Übung 27** (Wer steckt unter dem Tirolerhut). In einem bayrischen Touristenort sind zur Hochsaison drei Mal so viele Touristen wie Einheimische. Touristen tragen zu 70% einen Tirolerhut, Einheimische nur zu 25%.

- (a) Du fragst einen Menschen mit Tirolerhut nach dem Weg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mensch ein Einheimischer ist?
- (b) Du fragst einen Menschen ohne Tirolerhut nach dem Weg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mensch ein Einheimischer ist?

Was ist also günstiger, wenn du möglichst schnell eine verlässliche Wegauskunft haben möchtest?

Im Anhang C gegen Ende des Skripts (Seite 62) kann man Zahlen aus einem Ärzte-Communiqué zu einem neuen Covid19 Schnelltest, der damals im Nov 2020 eingeführt wurde, nachrechnen.

\*definiert als: *positiv prädiktiver Wert*

†definiert als: *negativ prädiktiver Wert*

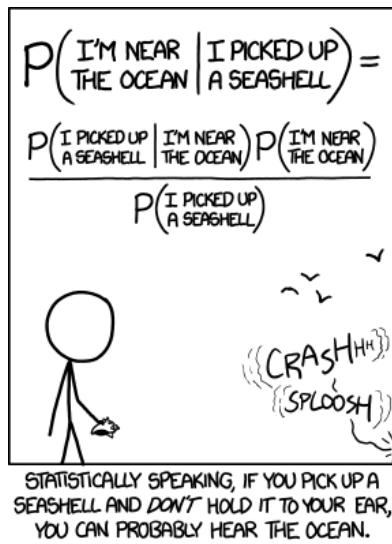


Abbildung 10: You're probably near the ocean.

### 4.3. Unabhängigkeit

Ein Ereignis A heisst *unabhängig* von einem Ereignis B, wenn das Eintreten von B die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A nicht beeinflusst, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit von A gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist. Diese Gleichung führt zu

#### Definition 4.2: Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

andernfalls heissen sie *abhängig*.

**Übung 28** (Blutgruppen und Geschlecht). Zur Untersuchung, ob die vier Hauptblutgruppen 0, A, B, AB vom Geschlecht abhängen, wurden die für Mitteleuropa gültigen Daten in der Tabelle 3 auf Seite 26 erhoben. Kann man daraus schliessen, dass die Verteilung der Blutgruppen vom Geschlecht unabhängig ist?

**Übung 29** (rothaarig und Geschlecht). Gibt es eine Abhängigkeit zwischen Haarfarbe und Geschlecht? Diskutiere dies aufgrund der Daten aus Tabelle 4 auf Seite 26, die aus einem nordeuropäischen Land stammen.



#### 4. Bedingte Wahrscheinlichkeit

---

	0	A	B	AB	
weiblich	817	723	176	92	1808
männlich	862	765	191	106	1924
	1679	1488	367	198	3732

Tabelle 3: Blutgruppen und Geschlechter

	hellblond	dunkelblond	rot	schwarz
weiblich	195	121	38	67
männlich	110	199	236	59

Tabelle 4: Testresultat Haarfarbe



**Übung 30** (Ziegenproblem). In einer Gameshow befinden sich hinter drei Türen A, B und C ein Auto und zwei Ziegen. Die Kandidatin wählt Tür A, der Showmaster öffnet Tür C, hinter der sich eine Ziege befindet. Dann bietet er der Kandidatin an, eventuell die Tür B zu wählen. Soll sie?

$\omega_i \in \Omega$	00	01	10	11
$P(\omega_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Peters Gewinn	5	-5	-5	5

Tabelle 5: Gewinn aus Peters Sicht beim Fünfliber-Spiel

## 5. Zufallsgrößen & Lageparameter

### 5.1. Zufallsvariable

Glücksspiele nennt man gerecht (fair), günstig oder ungünstig, je nachdem, ob der Gewinn, den man bei mehreren Spielen erwarten kann,  $= 0$ ,  $> 0$ , oder  $< 0$  ist. Zur Analyse eines Glücksspiels muss man von allen möglichen Ausgängen  $\omega_i$  die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $P(\omega_i)$  und die zugehörigen positiven oder negativen Gewinne kennen.

**Beispiel 3.** Als charakteristisches Beispiel wählen wir ein intuitiv gerechtes Spiel: Peter und Paul werfen je einen Fünfliber; bei gleichen Wurfbildern gewinnt Peter, andernfalls Paul beide Münzen. Die Tabelle 5 auf Seite 27 enthält alle zur Analyse wichtige Daten.



Aus dieser Tabelle lässt sich sofort eine Funktion  $X$ :  $\omega_i \mapsto X(\omega_i)$  erkennen. Diese Funktion ordnet jedem Ausgang  $\omega_i$  den zugehörigen Gewinn oder Verlust zu.

#### Definition 5.1: Zufallsvariable

Eine Funktion, deren Definitionsmenge der Stichprobenraum  $\Omega$  ist und deren Wertemenge die reellen Zahlen sind

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

nennt man eine *Zufallsvariable*.

**Bemerkung.** Der Name ist historisch bedingt. Eine Zufallsvariable ist eigentlich weder

$x_i$	5	-5
$P(X = x_i)$	0.5	0.5

Tabelle 6: Gewichtung der Zufallsvariablen beim Fünffiber-Spiel

zufällig noch variabel, sondern eine reelle Zahlenfunktion. Derartige Funktionen werden üblicherweise mit grossen Buchstaben X, Y, Z bezeichnet. Beachten Sie ebenfalls die Unterschiede zur Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Man bezeichnet die Funktionswerte der Zufallsvariablen X mit  $x_1, x_2, x_3, \dots$  und konzentriert sich auf die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die einzelnen Funktionswerte angenommen werden. Zu diesem Zweck erstellt man eine neue Tabelle, die die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsvariablen X angibt.

Mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X lässt sich der Durchschnittswert je Spielwiederholung berechnen. Dazu muss man jeden Gewinn mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit gewichten: Durchschnittsgewinn entspricht  $5 \cdot 0.5 + (-5) \cdot 0.5 = 0$ . Unser Gefühl, dass es sich um ein gerechtes Spiel handelt, also bei vielen Wiederholungen weder Gewinn noch Verlust zu erwarten ist, wird somit rechnerisch bestätigt.

## 5.2. Erwartungswert

### Definition 5.2: Erwartungswert

Allgemein bezeichnet man das mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Funktionswerte der Zufallsvariablen X als den *Erwartungswert*:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots$$

**Beispiel 4.** Zwei Würfel werden sehr oft geworfen. Welche Augensumme darf man durchschnittlich erwarten? Die Zufallsvariable X ordnet jedem

$$\omega_i \in \Omega = \{11, 12, \dots, 16, \dots, 66\}$$

die Augensumme der beiden Würfel zu. Die möglichen Funktionswerte der Zufallsvariablen sind  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, \dots, x_{11} = 12$ .

**Übung 31** (Relative Häufigkeiten). Ergänze in Tabelle 7 auf Seite 29 die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

$x_i$	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$						
$x_i$	8	9	10	11	12	
$P(X = x_i)$						

Tabelle 7: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Werfen von zwei Würfeln

Beachten Sie, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 100% beträgt. Für den Erwartungswert ergibt sich dann

$$E(X) = \frac{1}{36} \cdot (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1) = 7.$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird durch ein Stabdiagramm dargestellt. Für den Wurf mit zwei Würfeln ergibt sich das Bild 11 auf Seite 29.

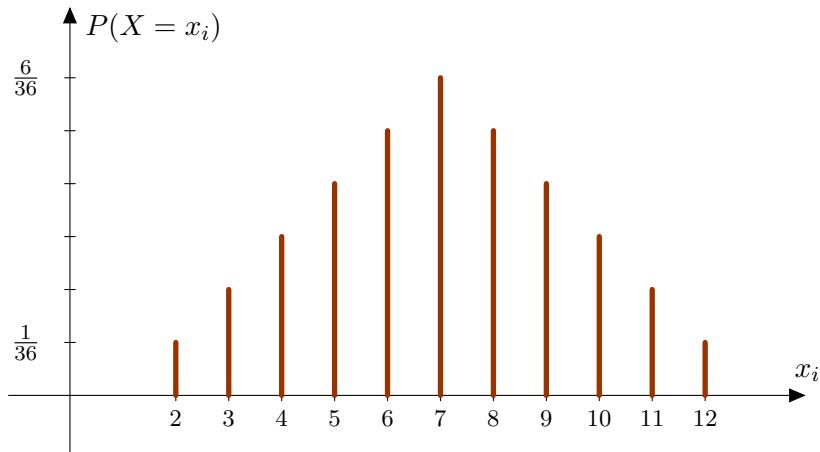


Abbildung 11: Häufigkeitsverteilung beim Würfeln mit zwei Würfel

**Übung 32** (Der Zufall regiert die Welt). Aus einer Urne mit fünf Kärtchen

$$\{\text{DER, ZUFALL, REGIERT, DIE, WELT}\}$$

wird eines der fünf Wörter zufällig gezogen. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen

- (a) W, deren Funktionswerte die Länge des gewählten Wortes angeben,

- (b) V, deren Funktionswerte die Anzahl der Vokale im gewählten Wort angeben,
- (c) X, deren Funktionswerte die Anzahl e im gewählten Wort angeben.

**Übung 33** (9 dritteln oder verdreifachen). Du hast jetzt 9 Franken. Eine Münze wird geworfen. Erscheint „Kopf“, wird dein Vermögen verdreifacht, erscheint „Zahl“, wird dein Vermögen gedrittelt. Welches Vermögen darfst du nach zweimaligem Werfen erwarten?

**Übung 34** (Chuck a Luck). In amerikanischen Casinos findet das Würfelspiel *Chuck a Luck* grossen Anklang. Der Spieler darf auf eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 setzen. Dann werden drei Würfel geworfen. Erscheint seine Zahl ein-, zwei- oder dreimal, so erhält er das ein-, zwei- oder dreifache seines Einsatzes und dazu seinen Einsatz zurück. Andernfalls verliert er natürlich seinen Einsatz. Berechne den zu erwartenden Gewinn bei einem Einsatz von 10\$.

**Übung 35** (Einarmiger Bandit). Ein Glücksspielapparat hat zwei Räder, die der Spieler durch Hebeldruck in Bewegung setzen kann. Auf jedem Rad sind vier Glocken, fünf Kirschen und ein Apfel in regelmässigen Abständen abgebildet. Der Apparat zahlt für zwei Äpfel Fr. 10.-, für zwei Glocken Fr. 2.- und für zwei Kirschen Fr. 1.- und man kriegt den Einsatz zurück. Der Einsatz beträgt Fr. 1.-. Wer gewinnt hier?



**Übung 36** (five all, quiet please!). Zwei gleich starke Tennisspieler müssen den Sieg in einem Tie-Break entscheiden. Es steht bereits 5:5. Wie viele Punkte müssen voraussichtlich noch bis zur Entscheidung gespielt werden?

### 5.3. Standardabweichung

Als Kennzahl für einen zu erwartenden Wert haben wir bereits den Erwartungswert. Im Folgenden wollen wir eine Masszahl für die *Streuung* um diesen Erwartungswert kreieren.

**Beispiel 5.** Zwei Maschinen A und B schneiden bei einem Probelauf Stahlstifte auf eine vorgegebene Länge von 10.0 mm zu. Untersuchungen über auftretende Abweichungen ergaben folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die anfallenden Längen:

Maschine A

$x_i$	9.8	9.9	10.0	10.1	10.2
$P(X = x_i)$	0.1	0.1	0.6	0.1	0.1

Maschine B

$y_i$	9.8	9.9	10.0	10.1	10.2
$P(Y = y_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

**Übung 37** (Werte, Erwartungswerte und Abweichungen). Stelle beide Verteilungen mit verschiedenen Farben im Koordinatensystem 12 graphisch dar und berechne die Erwartungswerte  $E(X)$  und  $E(Y)$ .

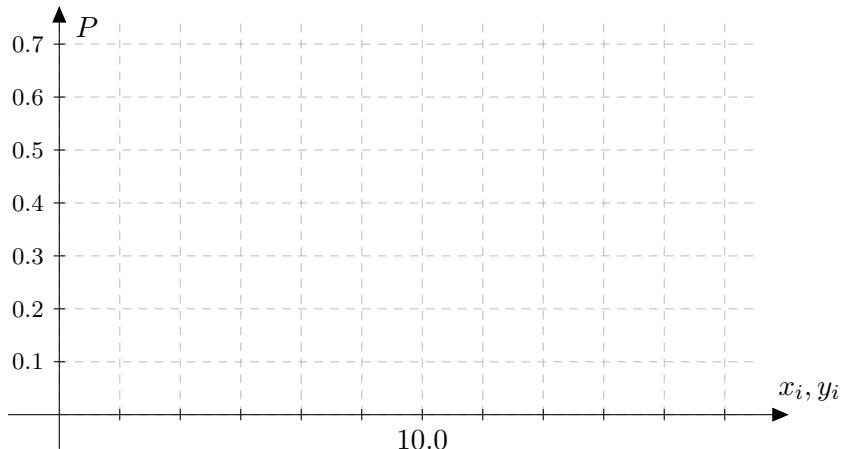


Abbildung 12: Relative Genauigkeit der Maschinen A und B

Obwohl die graphischen Darstellungen ganz verschieden aussehen, stimmen die Erwartungswerte mit dem Sollwert überein. Offensichtlich wird man aber die Maschine A bevorzugen. Der Erwartungswert gibt nur an, wo das *Zentrum* der Verteilung liegt, nicht aber, wie stark die Verteilung *um ihr Zentrum konzentriert* ist. Deshalb benötigt man eine Masszahl für die Abweichung der Funktionswerte der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert.

In der deskriptiven Statistik haben wir die Standardabweichung  $s$  kennengelernt. Um für die Zufallsvariable  $X$  ein entsprechendes Streuungsmaß zu erhalten, muss man sinngemäß den Mittelwert  $\bar{x}$  durch den Erwartungswert  $E(X)$ , die einzelnen Messwerte  $x_i$  durch die Funktionswerte der Zufallsvariablen  $X$  und die relativen Häufigkeiten ( $\frac{1}{n}$  bzw.  $\frac{n_i}{n}$ ) durch die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = x_i)$  ersetzen.

**Definition 5.3: Standardabweichung**

Der Ausdruck

$$\sigma = \sqrt{(E(X) - x_1)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (E(X) - x_n)^2 \cdot P(X = x_n)}$$

ist die *Standardabweichung* der Zufallsvariablen  $X$ .



**Übung 38** (Standardabweichung berechnen). Berechne für beide Maschinen aus dem obigen Beispiel die Standardabweichung der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  und bestätige somit, dass die Maschine A zu bevorzugen ist.

**Übung 39** (Blutdruck Medikament). Der Blutdruck in der Oberarmschlagader eines gesunden Menschen beträgt etwa 120 mm Quecksilbersäule. Eine Arzneimittelfirma lässt zwei Medikamente A und B zur Regulierung des Blutdrucks klinisch testen. Die Ergebnisse sind in der Tabelle festgehalten: Berechne für jedes Medikament den Erwartungswert

	$x_i, y_i$	105	110	115	120	125	130	135
A:	$P(X = x_i)$	0.04	0.09	0.16	0.40	0.20	0.07	0.04
B:	$P(Y = y_i)$	0.02	0.08	0.15	0.46	0.23	0.04	0.02

Tabelle 8: Medikamententest

und die Standardabweichung. Welches Medikament ist demnach vorteilhafter?

---

## 6. Binomialverteilung

Bei vielen Zufallsversuchen gibt es nur zwei mögliche Ausgänge: Mit einer Münze wirft man „Kopf“ oder „Zahl“, die gewürfelte Augenzahl ist eine 6 oder keine 6, die gezogene Karte ist ein Ass oder kein Ass, die Geburt eines Kindes ergibt eine Tochter oder einen Sohn, die Herzoperation gelingt oder gelingt nicht, ...

### Definition 6.1: Binomialverteilung

Ein Zufallsversuch mit genau zwei Ausgängen, also mit dem Stichprobenraum  $\Omega = \{\text{Erfolg, Misserfolg}\}$  oder kurz  $\{1, 0\}$ , heisst *Bernoulli-Versuch*. Man nennt in diesem Zusammenhang eine Zufallsvariable *binomialverteilt* (lat. binominis, zweinamig).

JAKOB BERNOULLI (1759 – 1809) war der erste Mathematiker, der die Wahrscheinlichkeitsprobleme, die aus dieser Art von Versuchen entstehen, systematisch untersuchte. Üblicherweise wird die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg mit  $p$  und die für einen Misserfolg mit  $q$  bezeichnet:  $P(1) = p$ ,  $P(0) = q$ , und damit  $p + q = 1$ .

Ein Bernoulli-Versuch werde  $n$ -mal wiederholt. Man spricht von einem  $n$ -stufigen Bernoulli-Versuch, wenn

- bei jeder Wiederholung des Bernoulli-Versuchs nur zwei Ausgänge möglich sind,
- $P(1) = p$  bei jeder Wiederholung *konstant* bleibt,
- die einzelnen Wiederholungen des Bernoulli-Versuchs voneinander unabhängig sind.

Bei einem  $n$ -stufigen Bernoulli-Versuch interessiert man sich nicht so sehr für die Reihenfolge der Erfolge und Misserfolge, sondern nur für deren Anzahl und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dafür. Beispielsweise hat eine Familie mit sechs Kindern vier Knaben und zwei Mädchen. Ich überlasse es dem Leser, ob man einen Knaben oder ein Mädchen als „Erfolg“ bezeichnen soll.

Wie gross ist bei einem  $n$ -stufigen Bernoulli-Versuch die Wahrscheinlichkeit für 0 oder 1 oder 2 oder  $n$  Erfolge? Um diese Frage zu beantworten, führt man die Zufallsvariable  $S_n$  ein, die jedem möglichen Ausgang des  $n$ -stufigen Versuchs die Anzahl Erfolge zuordnet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $S_n$  ist wieder in einer Tabelle, deren Lücken noch zu füllen sind, dargestellt:

**Übung 40** (binomial, nicht binominal!). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei 10 Würfen genau 3 mal eine 6 zu werfen?

$x$	0	1	2	3
$P(S_n = x)$	$q^n$			
$x$	4	$k$	$n - 1$	$n$
$P(S_n = x)$				$p^n$

Tabelle 9: Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$

**Satz 6.1: Binomialverteilung**

Ist bei einem Bernoulli-Versuch die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg  $p$  und für einen Misserfolg  $q = 1 - p$ , so ist bei einem  $n$ -stufigen Bernoulli-Versuch die Wahrscheinlichkeit für  $0 \leq k \leq n$  Erfolge

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

*Beweis.* Die Wahrscheinlichkeit für  $k$  Erfolge mit Einzel-Wahrscheinlichkeit  $p$  ist  $p^k$ ; es bleiben  $n - k$  Misserfolge mit Einzel-Wahrscheinlichkeit  $q$ , also dafür  $q^{n-k}$ . Der Fall von  $k$  Erfolgen gefolgt von  $n - k$  Misserfolgen tritt also mit der Wahrscheinlichkeit  $p^k \cdot q^{n-k}$  auf. Nun muss noch die Anzahl mögliche Reihenfolgen, in der diese Erfolge bzw. Misserfolge bei  $n$  Versuchen auftreten können, ermittelt werden. Dies entspricht der Anzahl möglichen Zeichenfolgen der Länge  $n$  mit zwei möglichen Ziffern (0 oder 1) pro Position, wobei eine Ziffer  $k$  mal und die andere  $n - k$  auftreten muss; davon gibt es  $\binom{n}{k}$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Übung 41** (Summe ist 100%). Formuliere zuerst in Worten unten stehende Gleichung, und begründe anschliessend, dass tatsächlich

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1.$$

**Übung 42** (Binomialverteilung anschaulich). Stelle die Binomialverteilung für  $n = 8$  und

- (a)  $p = 0.3$     (b)  $p = 0.5$     (c)  $p = 0.7$

durch ein Stabdiagramm graphisch dar. ( $k$  sei variabel.)

---

**Übung 43** (Urnen mit schwarzen und weissen Kugeln). Aus einer Urne mit zwei schwarzen und vier weissen Kugeln werden sechs Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, vier weisse und zwei schwarze Kugeln zu erhalten?

**Übung 44** (5 Würfel). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit fünf Würfeln mindestens zwei Sechsen zu erzielen?

**Satz 6.2**

Bei einer Binomialverteilung gilt für den Erwartungswert

$$E(S_n) = np.$$



*Beweis.*  $E(S_n) = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = np(p+q)^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np.$   $\square$

**Satz 6.3**

Für die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariablen gilt

$$\sigma = \sqrt{npq}.$$

*Beweis.* Ähnliche, aber umfangreichere Rechnung als beim Erwartungswert.  $\square$

**Bemerkung.** Beachte, wie einfach sich Kenngrössen wie Erwartungswert und Standardabweichung berechnen lassen, wenn eine Zufallsvariable binomialverteilt ist!

**Übung 45** (Werkstücke defekt). Werkstücke aus einer Fabrik sind mit der Wahrscheinlichkeit von 2% defekt. Wie gross ist die erwartete Anzahl defekte und die Standardabweichung bei einer Sendung von 10000 Werkstücken?

**Übung 46** (marry to divorce). If the probability is 60% that a marriage will end in a divorce within 20 years after its start, what is the probability that out of six couples just married, in the next 20 years

- (a) none,
- (b) all,

## *6. Binomialverteilung*

---

- (c) exactly two,
- (d) at least two

will be divorced? What is the mean and standard deviation for 1000 marriages?

**Übung 47** (wiederholte Laborversuche). In einem Laborversuch zeigt sich ein bestimmter Effekt mit der Wahrscheinlichkeit von 20%. Der Versuch wird zehnmal durchgeführt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Effekt

- (a) mindestens,
- (b) genau,
- (c) höchstens viermal eintritt?

**Übung 48** (Intervall-Wahrscheinlichkeit). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei zehnmaligem Würfeln zwischen 1 und 3 „6-en“ zu würfeln.

---

## 7. Testverfahren

### 7.1. Was ist Randomness?

Der Zufall kann vielerorts beobachtet werden. Er ist keineswegs auf die Disziplin Mathematik beschränkt. Beispielsweise spricht man auch in der Philosophie in diesem Zusammenhang von Zufall, freier Wille und Determinismus.

In der Mathematik hat man es gewagt, den Zufall zu quantifizieren, was ihn übersichtlicher und greifbarer werden lässt. Wenn wir einen Würfel werfen, dann wissen wir im Allgemeinen zwar nicht, welche Zahl erscheinen wird, aber wir können einen Wert angeben — die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis — mit der wir das gewünschte Resultat erwarten.

Nun, eine beliebte Aufgabe von mir ist, Schüler als Hausaufgabe eine Münze 100 mal werfen zu lassen und das Ergebnis zu notieren. Später wird die Folge darauf analysiert, ob sie wirklich zufällig entstanden ist oder nicht. Bevor wir uns überlegen, wie wir das machen könnten, betrachten wir zuerst zwei Bilder aus einer Lesung von PETER COLES (siehe Abbildung 13 auf Seite 37). Eines wurde durch eine Zufallsfunktion erzeugt, das andere nicht.

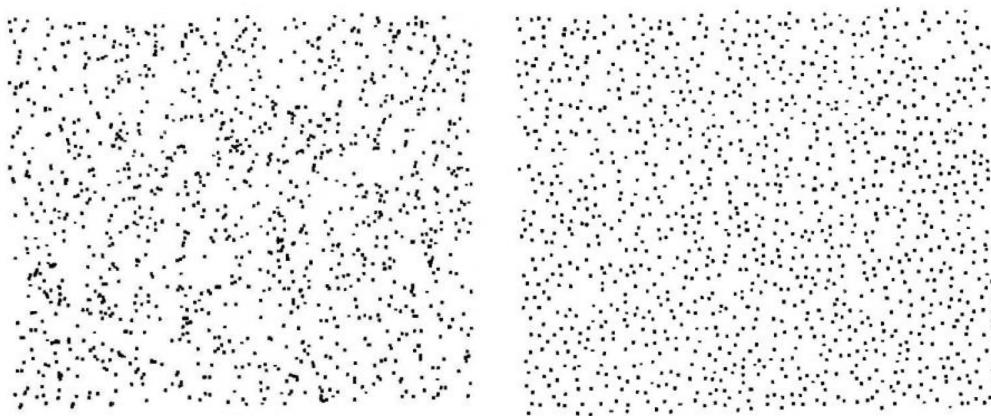


Abbildung 13: Welches ist das „random picture“?

Richtig, beim Bild rechts wurden die Punkte in den Abständen ausgelotet; das Bild links ist das random picture. Auffällig, aber auch charakteristisch, ist das „clumping“, das man bei zufälligen Prozessen beobachten kann. Beispielsweise kann dies auch bei den sogenannten Primzahlzwillingen beobachtet werden. Zum Beispiel scheint es so, als wären die Primzahlen random über die natürlichen Zahlen verteilt. Lustigerweise tauchen aber auch immer wieder Primzahlen auf, die bloss eine gerade Zahl einschliessen; zum Beispiel  $(3|5)$  oder  $(17|19)$ . Auch hier beobachten wir dieses Clumping-Phänomen. Und



Abbildung 14: Is it really random?

genau das wird Schülern bei der Münze-Werfen-Hausaufgabe zum Verhängnis. Nämlich denjenigen, die bloss eine Folge von Kopf und Zahl niederschreiben und denken, sie könnten den Zufall simulieren. Tatsächlich werden sie aber zu wenige, lange Folgen von Kopf bzw. Zahl in ihren Listen haben.

Im Folgenden möchte ich von 0 und 1 sprechen und nicht von Kopf und Zahl; einfach deshalb, weil's übersichtlicher ist. Nun, wie könnte man eine solche Folge testen? Am einfachsten beginnt man mit dem Zählen von 0 und 1. Bei 100 Würfen sollten die etwa in gleicher Anzahl vorkommen. Danach könnte man Paare zählen: 00, 01, 10 und 11 müssten etwa in gleicher Anzahl auftauchen. Einer meiner Favoriten ist der Poker-Test, bei dem man die Sequenz in 5-er Pakete aufteilt und dann guckt, ob die entsprechenden Pakete mit den Poker-Wahrscheinlichkeiten überein stimmen. Bei einer binären Sequenz wie dieser könnte man gucken, wie viele Full-Houses vorkommen? Eine gewisse Unsicherheit aber bleibt immer. Eine Sequenz, die all meinen Tests auf Muster erfolgreich standhält, ist dann bloss zu einer gewissen Wahrscheinlichkeit random, absolute Sicherheit gibt es nicht. Wie man mit solchen Versuchen und deren Ergebnissen umgeht, wenn man ein bestimmtes Merkmal testen will, das soll im nächsten Kapitel 7.2 anhand eines Beispiels und anhand eines bestimmten Testverfahrens illustriert werden.

## 7.2. Binomialtest

Beim Freiwurf handelt es sich um eine immer wiederkehrende Spielsituation. Aus diesem Grund kommt dem Freiwurftraining eine besondere Bedeutung zu. Aus Erfahrung weiss Nicole, dass sie im Training eine Freiwurftrefferquote von genau 40% hat. Daraus leiten wir eine Trefferwahrscheinlichkeit von

$$p_0 = 0.4$$

für Trainingsfreiwürfe ab.



Eine ausgewählte Spielerin geht davon aus, dass sie unter Druck — zum Beispiel in einer Wettkampfsituation — eine höhere Trefferquote bei

Freiwürfen hinkriegt als im Training. Ist dem wirklich so? Wie lässt sich diese Vermutung belegen?

### 7.2.1. Nullhypothese

Wir formulieren die beiden konkurrierenden Hypothesen zu ihrer Treffsicherheit:

- Nullhypothese  $H_0: p = 0.4$  (gleichbleibende Trefferwahrscheinlichkeit)
- Alternativhypothese  $H_A: p > 0.4$  (höhere Trefferwahrscheinlichkeit)

Wir nehmen an, dass  $H_0$  wahr ist. In einer Wettkampfsituation tritt Nicole  $n = 5$  mal zu einem Freiwurf an und trifft  $k = 3$  mal. Auf Grund der Nullhypothese sind im Mittel

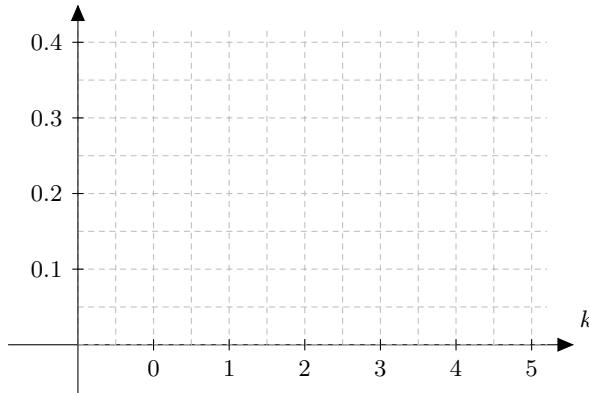
$$E = n \cdot p_0 = 2$$

Treffer zu erwarten. Ein Wert von  $k$  nahe bei  $E$  lässt keine Zweifel an der Richtigkeit von  $H_0$  aufkommen. Aber je stärker  $k$  von  $E$  abweicht, desto unhaltbarer wird  $H_0$ . Wir fassen alle Werte, die grösser oder gleich  $k$  sind im kritischen Bereich  $K$  zusammen:

$$K = \{k, k + 1, \dots, n\}.$$

$K$  enthält also alle Werte, die  $H_0$  schwächen und  $H_A$  stärken.

**Übung 49** (Verteilung eingetragen). Illustriere alle Wahrscheinlichkeiten  $k = 0, \dots, 5$  für  $n = 5$  und  $p = 0.4$  in unten stehendem Diagramm.



**Übung 50** (Wahrscheinlichkeit im kritischen Bereich zu landen). Berechne nun die Wahrscheinlichkeit  $\alpha_p$  dafür, dass wir bei  $n$  Versuchen ein Ereignis aus dem kritischen Bereich  $K$  erhalten, falls  $H_0$  wahr ist. Im Falle unserer Spielerin haben wir also  $n = 5$ ,  $K = \{3, 4, 5\}$  und  $p = 0.4$ .

### 7.2.2. Signifikanz

#### Definition 7.1: Signifikanzwert

Die Wahrscheinlichkeit, dass wir in  $n$  Versuchen ein Ereignis aus dem kritischen Bereich erhalten, heisst *Signifikanzwert*  $\alpha_p$  oder kurz *p-Wert*.

Je kleiner der *p-Wert* ist, desto weniger spricht für die Nullhypothese  $H_0$ . Es stellt sich daher die Frage, wie klein  $\alpha_p$  sein muss, damit man  $H_0$  verwirft? Sinnvolle Werte sind  $\alpha_p = 0.05$  oder  $\alpha_p = 0.01$ .

#### Definition 7.2: signifikant, hochsignifikant

Ist  $\alpha_p \leq 0.05$ , so heisst das beobachtete Ereignis *signifikant*. Ist  $\alpha_p \leq 0.01$ , so kriegt das beobachtete Ereignis sogar das Prädikat *hochsignifikant*.

**Bemerkung.** 5% gilt landläufig als Trennpunkt zwischen „kleinen“ und „grossen“ Wahrscheinlichkeiten. Die Hypothese  $H_0$  ist nicht zwingend falsch, wenn  $\alpha_p \leq 0.05$  ist. Wenn  $H_0$  jedoch richtig ist, dann haben wir ein Ereignis mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit beobachtet. Somit würde man eher die Alternative  $H_A$  der Nullhypothese  $H_0$  vorziehen.

**Bemerkung.** Beim Higgs-Boson wurde ein *p-Wert* von  $5\sigma$  zugrunde gelegt. Das bedeutete in diesem Fall, dass eine Wahrscheinlichkeit von ca.  $10^{-5}\%$  besteht, dass dieses Signal durch zufällige Hintergrundschwankungen (Rauschen etc.) zustande kam.



Im Beispiel unserer Spielerin hatten wir einen *p-Wert* von  $\alpha_p = 0.317$ . Dieser reicht also bei Weitem nicht aus, um  $H_0$  zu verwerfen und sie eine höhere Trefferquote in Wettkampfsituationen zu attestieren. Denn auch bei einer gleichbleibenden Trefferquote von  $p_0 = 0.4$  würde Nicole in fast jedem dritten Spiel drei oder mehr von fünf Freiwürfen verwerten.

**Übung 51** (Signifikanzwerte berechnen). Sie verwertet

- (a) 4 oder 5 von 5 Freiwürfen,
- (b) 5 von 5 Freiwürfen.

Berechne die beiden Signifikanzwerte.

Einzig für den letzten Fall ist  $\alpha_p \leq 0.05$ . Dieses Ereignis ist also statistisch signifikant und wir müssten die Nullhypothese  $H_0$  zugunsten der Alternative  $H_A$  verwerfen. Das

heisst, wir könnten bei fünf Treffern davon ausgehen, dass unsere Spielerin in Wettkampfsituationen tatsächlich besser trifft als im Training.

### 7.2.3. Fehler

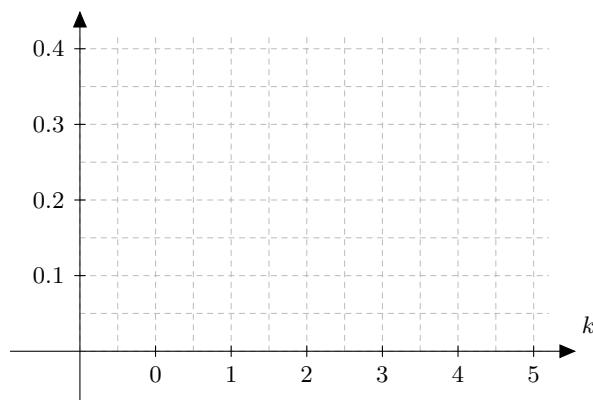
Die Nullhypothese  $H_0$  konkurriert mit der Alternativhypothese  $H_A$ . Müssen wir eine Entscheidung treffen und einer der beiden Hypothesen den Vorzug geben, so können uns Fehler unterlaufen.

- *Fehler erster Art:* Die Nullhypothese  $H_0$  ist wahr, wird aber fälschlicherweise zu Gunsten der Alternativhypothese  $H_A$  verworfen. Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler der ersten Art zu begehen, beträgt offensichtlich  $\alpha_p$ .
- *Fehler zweiter Art:* Die Nullhypothese  $H_0$  ist falsch, wird aber trotzdem beibehalten. Diesen Fehler bezeichnet man manchmal auch mit  $\beta$ . Die Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art hängt von der Wahl des Parameters  $p$  ab. Das wollen wir uns an unserem Trefferquotenbeispiel veranschaulichen.



Angenommen, die Spielerin verwertet in einer Wettkampfsituation tatsächlich alle 5 Freiwürfe. Die Gefahr, dass wir die Nullhypothese  $H_0$  fälschlicherweise verwerfen (Fehler erster Art) ist mit  $\alpha_p = 0.010$  so klein, dass wir sie in Kauf nehmen. Bei mindestens 4 Treffern hingegen ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler der ersten Art mit  $\alpha_p = 0.087$  zu gross, und wir bleiben bei der Nullhypothese  $H_0$ . Damit kann uns aber ein Fehler zweiter Art unterlaufen, den wir uns genauer anschauen wollen. Gehen wir also davon aus, dass die Spielerin tatsächlich ein Wettkampftyp ist und in Wettkampfsituationen eine Trefferquote von  $p = 0.6$  hat.

**Übung 52.** Illustriere alle Wahrscheinlichkeiten  $k = 0, \dots, 5$  für  $p = 0.6$  in unten stehendem Diagramm.



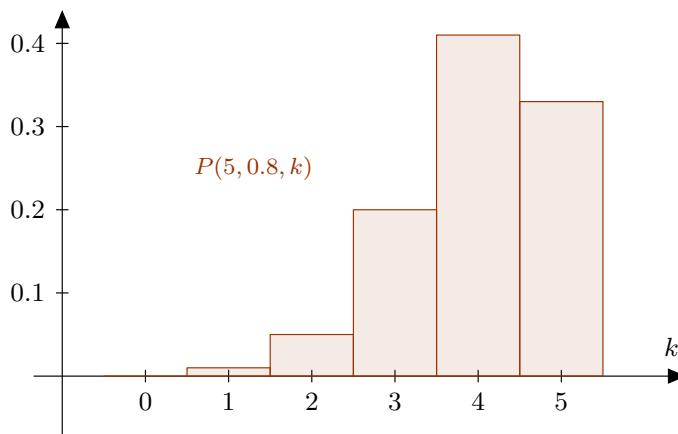


Abbildung 15: Verteilung für die Trefferquote 0.8 bei 5 Versuchen

Die Alternativhypothese  $H_A$  wäre somit wahr. Unsere Spielerin würde dann im Wettkampf mit der folgenden Wahrscheinlichkeit höchstens 4 von 5 Freiwürfen verwerten, was jedoch die Beibehaltung der Nullhypothese  $H_0$  bedeutet:

$$\sum_{k=0}^4 P(5, 0.6, k) = \text{binomcdf}(5, 0.6, 4) \approx 0.922.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art ist also immens gross. Selbst wenn sie in Wettkampfsituationen eine Trefferquote von  $p = 0.8$  hätte, würde die wahre Alternativhypothese  $H_A$  mit einer Wahrscheinlichkeit von über 67% abgelehnt werden, wie aus Abbildung 15 auf Seite 42 hervorgeht.

**Übung 53** (Fehler zweiter Art). Rechne den Fehler zweiter Art für  $p = 0.8$  nach.

#### 7.2.4. Fazit

Will die Spielerin mit der Versuchsanordnung von 5 Freiwürfen im Wettkampf zeigen, dass sie ein Wettkampftyp ist, dann entsteht das folgende Problem. Um die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art unter 5% zu bringen (Signifikanzniveau), muss Nicole wirklich gut treffen, damit wir die Nullhypothese  $H_0$  ablehnen. Sie muss so gut treffen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art sehr gross wird. Somit hat es eine wahre Alternativhypothese sehr, sehr schwer...



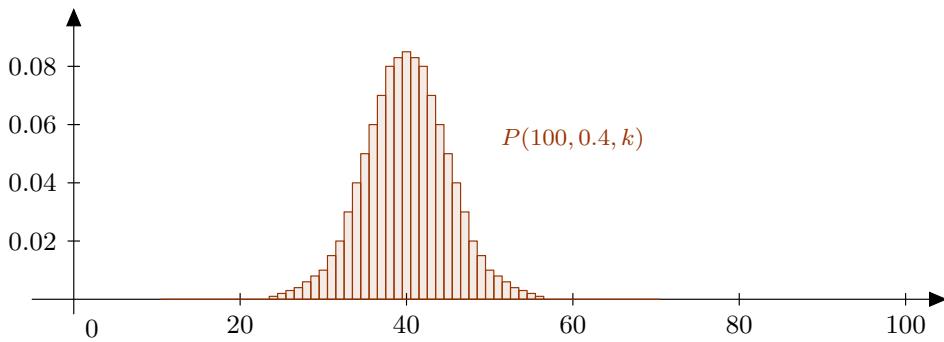


Abbildung 16: Verteilung für 100 Versuche mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 0.4

### 7.2.5. Konfidenzintervalle

Wir möchten den  $p$ -Wert unter 5% halten und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art auf ein „erträgliches Mass“ reduzieren.

**Bemerkung.** Für eine weitere Analyse ist nun folgende Tatsache wichtig. Es bezeichnen  $\mu$  bzw.  $\sigma$  wie üblich den Erwartungswert bzw. die Standardabweichung. Für eine Binomialverteilung — eine Normalverteilung — gilt, dass ca. 66% aller Ereignisse im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ , 95% in  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$  und 99% in  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  liegen.

**Übung 54** (Nicole wirft 100 mal). Rechne das vorgestellte Beispiel für 100 zugesprochene Freiwürfe (siehe Abbildung 16 auf Seite 43). Wie viele Treffer muss die Spielerin mindestens erzielen, damit der  $p$ -Wert unter 5% fällt und wir die Nullhypothese  $H_0$  verwerfen?

Angenommen, die Alternativhypothese  $H_A$  ist wahr und Nicole trifft in Wettkampfsituationen tatsächlich besser — mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.6$ . Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art, wenn wir die Nullhypothese  $H_0$  bis hin zur berechneten Grenze beibehalten?

**Übung 55** (25 Würfe). In der Wettkampfsituation können bloss 25 Freiwürfe beobachtet werden. Ab wie vielen Treffern lehnst du die Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha_p = 0.05$  ab? Ab welcher Trefferzahl lehnst du  $H_0$  bei  $\alpha_p = 0.01$  ab?

**Übung 56** (Fehler zweiter Art für 25 Würfe). Wie gross wird bei Übung 55 jeweils die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler der zweiten Art, wenn wir von einer tatsächlichen Wettkampftrefferwahrscheinlichkeit von  $p = 0.6$  ausgehen?

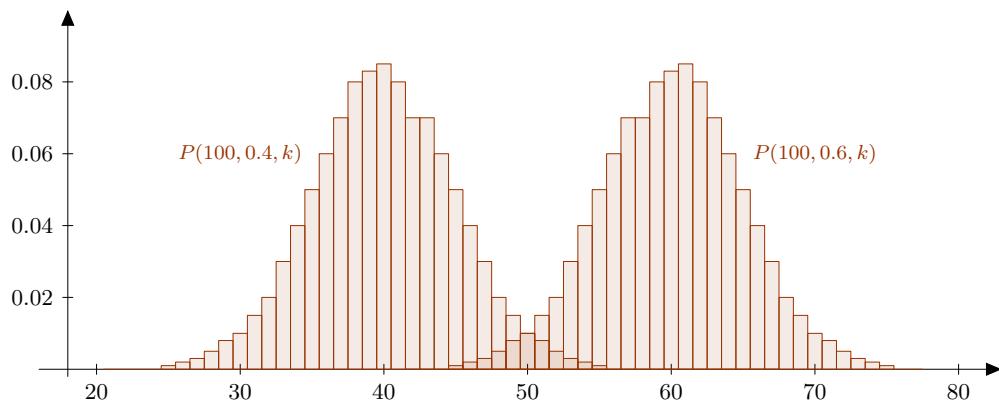


Abbildung 17: Illustration des Fehlers zweiter Art

**Übung 57** (Fehler erster und zweiter Art unter 5% drücken). Der Spielerin tatsächliche Wettkampftrefferwahrscheinlichkeit liege bei  $p = 0.5$ . Wie viele Wettkampffreiwürfe musst du beobachten, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler der ersten und der zweiten Art jeweils höchstens 5% betragen?

#### 7.2.6. Zweiseitige Tests



Der oben vorgestellte Test ist einseitig. Betrachte nun auch zweiseitige Tests und konsultiere Tabelle 10 auf Seite 45.

**Übung 58** (Zweiseitiger Test mit Münzwurf). Gegeben sei eine Münze. Die zu prüfende Nullhypothese sei, dass die Münze fair ist, dass also Kopf und Zahl gleich wahrscheinlich sind. Die Alternativhypothese sei, dass ein Ergebnis wahrscheinlicher ist, wobei nicht festgelegt wird, welches der beiden wahrscheinlicher sein soll. Das Zufallsexperiment zum Testen der Nullhypothese bestehe nun darin, dass die Münze zwanzig Mal geworfen wird.  $K$  bezeichne die Anzahl der Würfe, die „Kopf“ als Ergebnis liefern. Bei einer fairen Münze wäre zehnmal „Kopf“ zu erwarten. Als Statistik wählt man daher sinnvollerweise

$$X = |K - 10|,$$

was in Worten die Abweichung vom Mittelwert „Kopf“ einer fairen Münze ist. Angenommen, der Versuch liefert  $K = 14$  mal das Ergebnis „Kopf“, also  $X = 4$ . Unter der Nullhypothese ist die Anzahl der Köpfe binomialverteilt mit  $n = 20$  und  $p = 0.5$ .

Berechne den  $p$ -Wert. Ist die Münze wahrscheinlich „fair“; genauer: Wird die Nullhypothese verworfen? Wie sähe es für  $X = 5$  aus? (Quelle Wikipedia  $p$ -Wert, 2014)

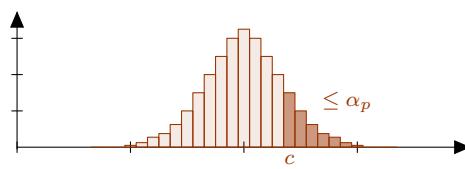
---

Ereignis  $k$  bei einem Signifikanzniveau  $\alpha_p$  und kritischem Wert  $c$ .

---

$$H_0: p = p_0 \text{ gegen}$$

$$H_A: p > p_0$$

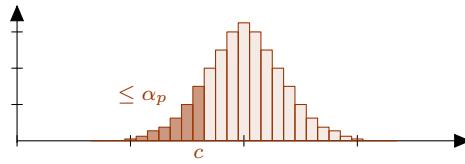


Einseitiger Test

---

$$H_0: p = p_0 \text{ gegen}$$

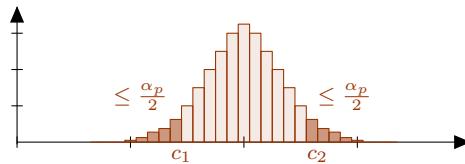
$$H_A: p < p_0$$



Zweiseitiger Test

$$H_0: p = p_0 \text{ gegen}$$

$$H_A: p \neq p_0$$




---

Tabelle 10: Einseitige und zweiseitiger Hypothesentest

**Übung 59** (Hellseherische Fähigkeiten auf dem Prüfstand). Ein statistischer Test zur Überprüfung von hellseherischen Fähigkeiten. Wir zeigen einer Person 25 Mal die Rückseite einer rein zufällig gewählten Spielkarte und fragen sie jeweils danach, zu welcher der vier Farben (Kreuz, Pik, Herz, Karo) die Karte gehört. Ab wie vielen Treffern können der Person bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha_p = 0.01$  hellseherische Fähigkeiten attestiert werden?

**Übung 60** (Coca Cola Deckel auf fairness testen). Der Deckel einer Cola-Falsche dient statt einer Münze als „Zufallsgenerator“. Um zu testen, ob dieses Verfahren fair ist, wird der Deckel 7mal geworfen und liefert

U U U U U U U

Formuliere  $H_0$  und  $H_A$  und teste diese.

---

## A. Kombinatorik

### A.1. Problemstellungen

- Warum wird den Schweizern der „Schieber“ auf die Dauer nicht langweilig? Weil es

$$21\,452\,752\,266\,265\,320\,000$$

verschiedene Spiele dieser Art gibt!

- Warum spielen jede Woche so viele Leute im deutschen Zahlenlotto „6 aus 49“? Weil sie nicht wissen, dass ihre Gewinnchance für sechs Richtige verschwindend klein ist, nämlich nur  $1 \div 13983816$ !
- Warum verwenden gewöhnliche Bankräuber für das Öffnen eines Safes Schweissbrenner? Weil sie viel zuviel Zeit bräuchten, sämtliche Kombinationen des Zahenschlosses durchzuprobieren!

Mit diesen und ähnlichen Problemen beschäftigt sich die Kombinatorik, ein Teilgebiet der Arithmetik. Sie untersucht, auf wie viele Arten bestimmte Objekte ausgewählt und wie diese Objekte angeordnet werden können. Wir wollen uns auf die Auswahl aus endlichen Mengen beschränken; Kombinatorik ist im wesentlichen finite Mathematik. Die zwei wichtigsten Probleme für die Kombinatorik sind:

- das *Existenzproblem*: Welche Möglichkeiten gibt es, Elemente einer endlichen Menge nach bestimmten Bedingungen auszuwählen oder anzugeordnen?
- das *Aufzählungsproblem*: Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür insgesamt?

Dabei kann sich durchaus ergeben, dass unter den gestellten Bedingungen gar keine Lösung existiert. Bei praktischen Aufgaben stellt sich zudem oft die Frage, wie man die Lösungen am besten klassifizieren kann bzw. welche Lösung ein Optimum für bestimmte Zwecke darstellt.

Mit den folgenden fünf Aufgaben sollen zunächst die wesentlichen Aufgabentypen der Kombinatorik, die in der Schulmathematik ihren Platz gefunden haben, vorgestellt werden. Diese Aufgaben werden später auf ein gemeinsames Modell, das Urnenmodell, zurückgeführt.

**Übung 61** (Tor und Sissi mischen). Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man mit den Buchstaben

- (a) T, O, R



Abbildung 18: TOTOgoal Tippspiel

(b) S, I, S, S, I

bilden, wenn jeweils alle Buchstaben zu verwenden sind?

**Übung 62** (TOTOGoal). Wie viele Prognosen können für die beiden ersten Fussballspiele eines Totozettels gegeben werden?

**Übung 63** (Öpfchueche). Für eine kleine Apfelwähle lässt sich Frau Gschwind von ihrem Kaufmann, der die Sorten *Gravensteiner* und *Delicious* — gemischt in einer grossen Kiste — verkauft, vier beliebige Äpfel geben. Wie viele verschiedene Apfelwählen könnten so entstehen?

Aus der Mannigfaltigkeit der kombinatorischen Aufgaben seien hier noch erwähnt:

- In any calendar year how many Friday the thirteenths can there be? (Minimum: 1, Maximum: 3)
- Wie viele „Gesichter“ hat der Zauberwürfel (Rubik’s Cube)?  
(43 252 003 274 489 856 000)
- Auf wie viele Arten lässt sich ein Franken in Kleingeld ( 1 Rp, 2 Rp, 5 Rp, 10 Rp, 20 Rp, 50 Rp) umwechseln? (4562)

Aus den bisherigen Aufgaben mag der Eindruck entstehen, dass es sich bei der Kombinatorik um eine „gehobene Unterhaltungsmathematik“ handelt. Tatsächlich gab es erst um 1900 ein erstes ernstzunehmendes Lehrbuch der Kombinatorik, das Lösungsmethoden für sämtliche klassische Aufgaben bereitstellte. Seit 1950 etwa ist die Kombinatorik zu ei-

ner anerkannten und selbständigen Disziplin innerhalb der Mathematik geworden. In anderen mathematischen Disziplinen (Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie, Graphentheorie etc.), aber auch in anderen Wissenschaften (Linguistik, Biologie, Physik, Nachrichtentechnik etc.) tauchten immer mehr Probleme auf, die nur mit kombinatorischen Mitteln zu lösen waren. Insbesondere erlaubten seit 1950 die Computer ein experimentelles Arbeiten, das ganz neue Lösungswege eröffnete. Ein schönes Beispiel dazu ist der Beweis des Vierfarbensatzes. 1852 wurde folgendes Problem formuliert:

Jede auf einem Stück Papier gezeichnete Landkarte lässt sich mit nur vier Farben so färben, dass niemals zwei aneinandergrenzende Länder dieselbe Farbe erhalten.

Erst 1976 konnte nach jahrelanger ständiger Verbesserung der Methoden mit 1200 Stunden Rechenzeit an drei Computern der Satz bewiesen werden.

## A.2. Summen- und Produktregel

Will man die Anzahl der Schüler einer Schule ermitteln so könnte man an einem bestimmten Morgen jeder Schüler, der durch die Eingangstüre kommt, einzeln zählen. Einfacher wäre es, die einzelnen Klassenbestände zu ermitteln und zu addieren. Die Idee ist folgende: Um die Anzahl der Elemente einer Menge  $G$  zu ermitteln, ist es oft einfacher, diese Menge zuerst in elementfremde Teilmengen  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$  zu zerlegen und dann die entsprechenden Zahlen zu addieren.

### Satz 1.1: Summenregel

$$\text{card}(G) = \text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_r)$$

wobei  $A_i \cap A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, r$ .

 in Restaurant bietet Menüs in vier Gängen an, die man nach freier Wahl zusammenstellen kann. Viel Vergnügen bei Ihrer Wahl auf drei Vorspeisen, zwei Zwischengängen, vier Hauptgerichten und drei Desserts.

## MENÜ

Feine Fenchelcremesuppe  
Indische Currysuppe

**Schildkrötensuppe „Lady Curzon“**

\* \* \*

**Schnecken nach Ellässer Art**

**Langustencocktail „Nizza“**

\* \* \*

**Porterhouse Steak**

**Flambierte Truthahnbrust**

**Seezunge „Marguerit“**

**Aladins Wunderpfanne**

\* \* \*

**Eischale „Blue Canary“**

**Crêpes à la papsanne**

**Irish coffee**

Nicht jede Zusammenstellung wird kulinarischen Regeln genügen, aber es gibt  $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 72$  verschiedene Menüs.

Verallgemeinerung: Kann ein Vorgang auf  $n_1$  verschiedene Arten ausgeführt werden, danach ein weiterer auf  $n_2$  verschiedene Arten, dem folgend ein dritter auf  $n_3$  verschiedene Arten, und so weiter, dann gibt es  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$  verschiedene Möglichkeiten, den so beschriebenen Gesamtvorgang auszuführen.

**Satz 1.2: Produktregel**

$$\text{Anzahl} = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$$

**Bemerkung.** Zur Visualisierung kann ein Baumdiagramm gezeichnet werden.



**Übung 64** (Viersteller mit ungeraden Ziffern). Wie viele vierstellige Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern gibt es?

**Übung 65** (Kurzwörter KVVKV). Wie viele „Wörter“ der Form KVVKV (K: Konsonant, V: Vokal) gibt es, wenn ein Buchstabe

- (a) mehrfach

- (b) nur einmal verwendet werden darf?

**Übung 66** (Autonummern). In der Schweiz enthalten die Nummernschilder der Autos in der Regel zwei Buchstaben (Kantonszeichen), denen sechs Ziffern folgen, wobei die erste nicht Null ist. Wie viele Schilder gibt es?

### A.3. Permutationen

In einer obigen Aufgabe hat man gesehen, dass die Buchstaben T, O und R auf sechs verschiedene Arten (TOR, TRO, ORT, OTR, RTO, ROT) angeordnet (permutiert) werden können. Auf die Anzahl 6 schliesst man mit der Produktregel: Für den ersten Buchstaben stehen drei Möglichkeiten (T, O oder R) zur Verfügung, für den zweiten bleiben noch zwei Möglichkeiten, für den dritten bleibt nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt gibt es also  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Allgemein gilt:

#### Satz 1.3: Permutation

Die Anzahl aller Permutationen von  $n$  verschiedenen Elementen ist

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \stackrel{\text{Def.}}{=} n!$$

**Bemerkung.** Zwei Permutationen gelten als verschieden, wenn mindestens zwei Elemente nicht an der gleichen Stelle stehen.

**Übung 67** (Ausrufezeichen). Berechne bzw. vereinfache:

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| (a) $\frac{10!}{3!}$                | (c) $n(n - 1)!$                                    |
| (b) $\frac{3 \cdot 4!}{4 \cdot 3!}$ | (d) $\frac{(n+3)!}{n!} \div \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ |

**Übung 68** (Naturbücher). Drei Physikbücher, vier Informatikbücher und fünf Mathe-matikbücher sollen auf ein Regal gestellt werden. Auf wie viele Arten geht dies, wenn die Bücher des gleichen Fachgebiets nebeneinander stehen sollen und alle Bücher verschieden sind?

**Übung 69** (round table).

- (a) Auf wie viel Arten können sich elf Personen in eine Reihe setzen?
- (b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn zwei Personen unbedingt nebeneinander sitzen wollen?



Abbildung 19: „Next time, let me handle the seating arrangements!“

(c) Löse (a) und (b) für die Sitzordnungen an einem runden Tisch.

Gegeben seien  $n$  Elemente, von denen genau  $k$  untereinander gleich sind. Diese  $k$  gleichen Elemente werden für einen Moment mit Indizes versehen, so dass man sie voneinander unterscheiden kann. Die Anzahl aller Permutationen ist dann  $n!$ , wobei aber jeweils  $k!$  Permutationen sich nur in den Stellungen der extra verschiedenen bezeichneten Elementen unterscheiden. Macht man die Indizierung rückgängig, so sind jeweils  $k!$  Permutationen nicht mehr voneinander verschieden. Also ist in diesem Fall die Anzahl der Permutationen  $\frac{n!}{k!}$ . Allgemein gilt:

**Satz 1.4: Permutation von  $k$  aus  $n$**

Die Anzahl der Permutationen von  $n$  Elementen, unter denen ein Element  $k_1$ -mal, ein zweites Element  $k_2$ -mal, ein drittes Element  $k_3$ -mal, …, ein  $r$ -tes Element  $k_r$ -mal vorkommt, ist

$$P_{n,k_1,\dots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots \cdot k_r!}$$

**Übung 70** (Mississippi). Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben von

- (a) OTTO
- (b) MISSISSIPPI
- (c) Deinen Namen für ein Anagramm permutieren?

**Übung 71** (Schiffsfahnen). Ein Signal kann durch sechs Fahnen, die untereinander hängen, gegeben werden. Wie viele verschiedene Signale kann man mit vier gleichen roten und zwei gleichen blauen Fahnen bilden?

## A.4. Stichproben

Die ersten Aufgaben aus dem Einführungskapitel sollen auf das Urnenmodell übertragen werden: In einer Urne sind  $n$  Lose, die irgendwie gekennzeichnet sind. Aus dieser Urne werden  $k$  Lose gezogen: eine *Stichprobe vom Umfang  $k$* .

Diese Ziehung kann auf vier verschiedene Arten erfolgen:

- A Jedes Los wird einzeln gezogen und nach einer Notiz wieder zurückgelegt. Es ergibt sich eine natürliche Ordnung; jedes Los kann mehrmals gezogen werden.

*Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen.*

- B Wie in A, jedoch wird das gezogene Los jeweils nicht zurückgelegt.

*Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.*

- C Die  $k$  Lose werden mit einem Griff gezogen, d.h. die natürliche Anordnung wie in A und B geht verloren.

*Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.*

- D Wie in A, jedoch verzichtet man auf die sich ergebende Ordnung. Wenn in einer Urne von jedem Los mindestens  $k$  Exemplare vorhanden sind, kann man auch wie in C mit einem Griff  $k$  Lose ziehen.

*Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen.*

### A.4.1. Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Unmittelbar aus der Produktregel ergibt sich für die Anzahl der geordneten Stichproben mit Zurücklegen:

$$A_{n,k} = n \cdot n \cdot n \cdots \cdot n = n^k$$

Bei der dualen Version werden nicht  $k$  Lose aus einer Urne gezogen, sondern  $k$  unterscheidbare Dinge auf  $n$  unterscheidbare Urnen beliebig verteilt. Dazu gibt es  $n \cdot n \cdot n \cdots \cdot n = n^k$ .

**Übung 72** (Münze). Wie viele Ergebnisse sind möglich, wenn man

- (a) eine Münze
- (b) einen Würfel

fünfmal wirft?

**Übung 73** (Safe). Bei einem Safeschloss sind fünf Einstellungen einer Ziffer von 1 bis 9 möglich. Wie viel Zeit benötigt man, um alle Einstellungen auszuprobieren, wenn man für eine Einstellung durchschnittlich vier Sekunden braucht?

#### A.4.2. Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Auch in diesem Fall ergibt sich die Anzahl der geordneten Stichproben ohne Zurücklegen unmittelbar aus der Produktregel:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

mit  $k \leq n$ .

Bei der dualen Version werden  $k$  unterscheidbare Dinge so auf  $n$  unterscheidbare Urnen verteilt, dass in jeder Urne höchstens ein Ding zu liegen kommt ( $k \leq n$ ). Dazu gibt es  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \cdot (n-k+1)$  Möglichkeiten. Statt „Urne“ sagt man bei dieser Version besser „Platz“. Die Permutationen von  $n$  verschiedenen Elementen sind ein Spezialfall der geordneten Stichprobe ohne Zurücklegen ( $k = n$ ). Damit gibt es auch  $n!$  verschiedene Möglichkeiten,  $n$  voneinander verschiedene Dinge auf  $n$  Plätze zu verteilen.

**Übung 74** (Sprinter). Acht Sprinter kämpfen bei den Olympischen Spielen um die Gold-, Silber- und Bronzemedaille. Auf wie viel Arten kann die Siegerehrung erfolgen?

**Übung 75** (Sonderfall). Wie sollte  $0!$  definiert werden?

#### A.4.3. Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

Für die Anzahl der ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen betrachte man noch einmal die Lösungen der Aufgaben aus dem Einführungskapitel.

Allgemein gilt: Jede der Stichproben vom Umfang  $k$ , die man mit einem Griff zieht, kann man auf  $k!$  Arten ordnen. Nach dieser aufoktroyierten Ordnung hat man gerade den Fall der geordneten Stichproben ohne Zurücklegen. Deshalb gibt es  $k!$  mal mehr geordnete als ungeordnete Stichproben. Die Anzahl der ungeordneten Stichproben ohne Zurücklegen beträgt demnach:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \div k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \stackrel{\text{Def.}}{=} \binom{n}{k}$$

wobei  $k \leq n$ .

**Übung 76** (Binomialkoeffizienten). Zeige durch Rechnung

(a)  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(b)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(c)  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

**Übung 77** (Delegation). Aus zehn Schülern soll eine Delegation von vier Mitgliedern und innerhalb der Delegation ein Sprecher bestimmt werden. Auf wie viele Arten geht dies? Löse die Aufgabe auf zwei Arten, verallgemeinere auf  $n$  Schüler und  $k$  Delegationsmitglieder und leite so eine allgemeine Beziehung her.

**Übung 78** (bye bye). Wie viele Händedrücke gibt es, wenn sich  $n$  Personen begrüßen und jeder jedem nur einmal die Hand gibt?

**Übung 79** (Jass). Auf wie viele Arten kann man die 36 Jasskarten an

- (a) zwei      (b) drei      (c) vier

Spieler verteilen?

#### A.4.4. Ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Für den schwierigsten Fall der ungeordneten Stichproben mit Zurücklegen formulieren wir die Anzahl-Apfelkuchen-Aufgabe ein wenig um: Auf wie viele Arten kann man Äpfel aus der Menge  $\{\text{Delicious, Gravensteiner}\}$  eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang vier entnehmen?

Bezeichnet man mit  $x_1 \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl  $D$  und mit  $x_2 \in \mathbb{N}_0$  die Anzahl  $G$ , so muss die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 = 4$$

ermittelt werden. Jede Lösung erhält man, wenn man in der Figur 1111 an geeigneter Stelle einen Trennstrich einsetzt. Zum Beispiel entspricht der Figur

$$111|1$$

die Lösung drei Delicious und ein Gravensteiner. Für die Setzung des Trennstriches gibt es fünf Möglichkeiten, da der Trennstrich sowohl am Anfang als auch am Ende der Figur gesetzt werden kann. Es gibt demnach  $\binom{5}{1} = 5$  Stichproben.

Bevor wir auf  $m$  Sorten und  $k$  Apfel verallgemeinern, betrachten wir noch ein weiteres Beispiel mit  $m = 4$  und  $k = 10$ . Die zugehörige Gleichung lautet:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Aus der mit vertikalen Trennstrichen versehenen Figur

$$111|11||11111$$

kann man die spezielle Lösung  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$  und  $x_4 = 5$  ablesen. In diesem Beispiel hat man drei Trennstriche anzubringen. Die vollständige Figur besteht dann aus zehn Einsen und drei Trennstrichen. Man hat aus 13 Plätzen 10 Plätze für die Einsen oder 3 Plätze für die Trennstriche auszuwählen, um alle gewünschten Stichproben zu erhalten. Dies geht auf  $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = 286$  Arten.

Im allgemeinen Fall sind  $(m-1)$  Trennstriche anzubringen; die vollständige Figur besteht aus  $k$  Einsen und  $(m-1)$  Trennstrichen. Schliesslich sind aus  $k + (m-1)$  Plätzen deren  $k$  für die Einsen oder deren  $(m-1)$  für die Trennstriche auszuwählen. Die Anzahl der ungeordneten Stichproben mit Zurücklegen beträgt also

$$A_{m,k} = \binom{m+k-1}{k} = \binom{m+k-1}{m-1}$$

**Übung 80** (zehn Unbekannte). Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 13 \quad (x \in \mathbb{N}_0)?$$

Bei der dualen Version sind  $k$  ununterscheidbare Dinge in  $m$  Urnen zu legen. Bezeichnet man die Dinge mit Einsen, so müssen in der Figur

$$11111\dots111$$

(m-1) Trennstriche als Markierungen für die Urnen gesetzt werden. Dazu gibt es, wie oben gezeigt,

$$\binom{m+k-1}{k} = \binom{m+k-1}{m-1}$$

Möglichkeiten.

**Übung 81** (Parlamentssitze). Auf wie viele Arten können 60 Parlamentssitze auf drei Parteien verteilt werden?

**Übung 82** (Kaninchen). Zehn ununterscheidbare Kaninchen sollen auf drei Käfige verteilt werden. Auf wie viele Arten geht dies, wenn

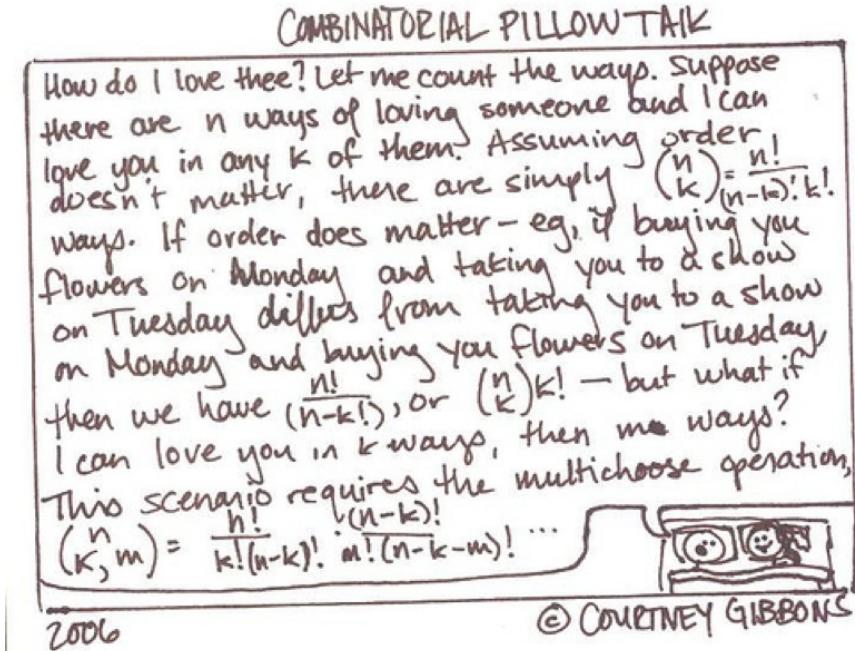


Abbildung 20: Combinatorial Pillow-Talk

- (a) keine Einschränkungen vorgeschrieben sind
- (b) kein Käfig leer sein darf
- (c) kein Kaninchen allein und kein Käfig leer sein darf

## A.5. Übersicht

Stichproben	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnet	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	$\binom{m+k-1}{m-1}$	$\binom{n}{k}$

Tabelle 11: Überblick der vier Fälle beim Ziehen

### A.6. Vermischte Aufgaben

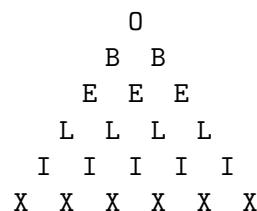
**Übung 83** (Dreisteller). Gegeben sind die Ziffern 1,2,3,4,5,6 und 7.

- (a) Wie viele dreistellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern lassen sich bilden?

Wie viele davon sind

- (b) kleiner als 600  
(c) kleiner als 600 und grösser als 300  
(d) gerade  
(e) ungerade  
(f) durch 5 teilbar  
(g) durch 25 teilbar?

**Übung 84** (Obelix). Wie oft kann man im Schema „Obelix“ ablesen?



**Übung 85** (Polypeptide).

- (a) Ein Polypeptid ist eine Kette mit 100 bis 30000 Gliedern. Die einzelnen Glieder sind Aminosäurenreste, von denen es 20 gibt. Wie viele Polypeptide könnte die Natur theoretisch bauen?
- (b) Die DNS und die RNS sind aus Triplets zusammengesetzt. Ein Triplet wird aus drei von vier möglichen Basen (Adenin, Guanin, Cytosin und Thymin bei der DNS bzw. Uracil bei der RNS) aufgebaut. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten hat die Natur für ein Triplet?

---

## B. Der binomische Lehrsatz

### B.1. Motivation

Von der Algebra her weis man, dass die Koeffizienten der Potenzen des Binoms  $(a+b)$  in einem interessanten dreieckigen Zahlenschema übersichtlich dargestellt werden können. Potenzen vom Typ  $(a+b)$  sehen in der sukzessiven Entwicklung wie folgt aus:

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\(a+b)^1 &= a+b \\(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\\dots &= \dots \\(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

### B.2. Das Pascal'sche Dreieck

Das Pascal'sche Dreieck gibt die Koeffizienten der zusammengefassten Summanden wieder:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & 1 & n & \dots & & n & 1\end{array}$$

**Bemerkung.** Man beachte, dass die Exponenten der Summanden für  $a$  von  $n$  bis 0 fallen, die von  $b$  steigen von 0 bis  $n$ .

**Übung 86.** Berechne die ersten fünf Zeilen des folgenden Schemas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}
 \end{array}$$

Aus der Lösung der Aufgabe erkennt man

**Satz 2.1: Pascal'sches Dreieck**

Berechnet man die  $n$ -te Potenz des Binoms  $(a+b)$ , so ist der Koeffizient von  $a^{n-k}b^k$  gleich  $\binom{n}{k}$  für  $0 \leq k \leq n$ .

*Beweis.* Um den Term mit  $a^{n-k}b^k$  zu bekommen, muss man aus den  $n$  Faktoren von  $(a+b)^n = (a+b)(a+b) \dots (a+b)$   $k$  mal den Summanden  $b$  auswählen. Aus den restlichen  $n - k$  Faktoren wird dann nur noch der Summand  $a$  berücksichtigt. Diese Auswahl kann auf  $\binom{n}{k}$  Arten erfolgen.  $\square$

**Satz 2.2: Binomischer Lehrsatz**

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \\
 &\quad \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n
 \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Die aus der Kombinatorik bekannten Zahlen  $\binom{n}{k}$  nennt man deshalb auch Binomialkoeffizienten.

**Übung 87.**

(a) Welche Eigenschaft der Binomialkoeffizienten ergibt sich aus der Tatsache, dass jede Zeile im Pascal'schen Dreieck symmetrisch ist?

(b) Zeige

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

für  $0 \leq k \leq n - 1$ . Interpretiere diese Beziehung im Pascal'schen Dreieck.

## C. Aerzteinfo zu neuem CoVid-Schnelltest im Nov 2020

### Einsatz der Antigen Schnelltests zur Diagnose von COVID-19 in Hausarztpraxen

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

Es gibt erhebliche Unsicherheiten und Diskrepanzen zwischen BAG und FMH über den effektivsten Einsatzbereich der neu verfügbaren Antigen Schnelltests zur Diagnose / Ausschluss einer COVID-19 Infektion. Die Infektiolog\*innen des KSW sind klar der Meinung, dass die Antigen Schnelltests ohne weitere Verzögerung in der Hausarztpraxis eingesetzt werden sollten.

Mit diesem Schreiben möchten wir den niedergelassenen Ärzt\*innen eine Richtschnur zur Verfügung stellen, wie und wo die Antigen-Schnelltests sinnvoll eingesetzt werden können. Diese Empfehlungen sind primär für niedergelassene Ärzt\*innen gedacht. Für Spitäler und Testzentren sind sie nur bedingt anwendbar.

Aktuell gibt es unabhängige Validierungsdaten des nationalen Referenzlabors CRIVE in Genf für zwei verschiedene Antigen Schnelltests: Panbio™ Covid-19 Ag Rapid Test (Abbott) und Standard Q COVID-19 Rapid Antigen Test (SD Biosensor/Roche). Beide Tests wurden je mit ca. 530 frischen Abstrichproben von vorwiegend erwachsenen und symptomatischen Testpersonen eines Genfer Testzentrums validiert und mit der PCR als Goldstandard verglichen. Die Performance dieser zwei Tests im Vergleich zur PCR ist sehr ähnlich.

#### Panbio™ Covid-19 Ag Rapid Test (Abbott):

Sensitivität: 85.5% (95% C.I: 78 – 91.2)

Spezifität: 100% (95% C.I: 99.1 – 100)

Positive Predictive Value\*: 100%

Negative Predictive Value\*: 95.8% (95% C.I: 93.7 – 97.2)

\*berechnet bei einer COVID-19 Prävalenz von 23% (mit PCR).

#### Standard Q COVID-19 Rapid Antigen Test (SD Biosensor/Roche):

Sensitivität: 89.0% (95% C.I: 83.7 – 93.1)

Spezifität: 99.7% (95% C.I: 98.4 – 99.9)

Positive Predictive Value\*: 99.4% (95% C.I: 96.0 – 99.9)

Negative Predictive Value\*: 94.1% (95% C.I: 91.5 – 96.0)

\* berechnet bei einer COVID-19 Prävalenz von 36% (mit PCR).

#### Kommentare:

**Spezifität:** Die Spezifität der Antigen Schnelltests ist ausgezeichnet, sodass bei der aktuellen Epidemiologie mit hoher Infektionsprävalenz im Kanton Zürich (→ hohe epidemiologische Vortestwahrscheinlichkeit) praktisch nie ein Bestätigungstest indiziert ist. Ist der Schnelltest positiv, kann man definitiv von COVID-19 ausgehen.

**Sensitivität:** Die Antigen Schnelltests sind 10-15% weniger sensitiv als die PCR. Dies ist für das epidemiologische Testen von Menschen mit leichten Symptomen ohne Risikofaktoren sekundär, denn verpasst werden fast ausschliesslich Personen mit niedriger Viruslast und fehlender oder sehr geringer Infektiosität. Die Sensitivität zur Erkennung aktuell infektiöser Personen, die isoliert werden müssen, liegt bei 95-98%.

Die Sensitivität der Antigen Schnelltests ist *NICHT* ausreichend, um bei hoher epidemiologischer und/oder klinischer Vortestwahrscheinlichkeit eine COVID-19 Erkrankung definitiv auszuschliessen (→ kein Einsatz als alleiniger *Rule-out-Test*). Da braucht es eine weiterführende Diagnostik mittels PCR, erweitertem Labor und Bildgebung.

**Voraussetzungen/Einschränkungen:**

- Einsatz bei Erwachsenen (Eine Empfehlung für Kinder wird durch Pädiatrie Schweiz vorbereitet)
- korrekt durchgeführter Nasopharyngealabstrich notwendig (durch geschulte Fachperson)
- Sensitivität ist kurz nach Symptombeginn deutlich höher als >5 Tage danach.

**Durchführung (link):** Der nasopharyngeale Abstrich sollte in einem separaten, häufig gelüfteten Raum stattfinden. Die Durchführung und Ablesung der Antigen Schnelltests ist einfach und kann in jedem Praxislabor ohne ausufernde Sicherheitsvorkehrungen gemacht werden. Chirurgische Maske, Handschuhe, Brille, sowie Hände- und Oberflächendesinfektion sind dazu ausreichend. Die Berichterstattung über das Resultat erfolgt via Online Meldeportal an das BAG (und von dort automatisch an die kantonalen Ämter) und andererseits an den Patienten, bevorzugt schriftlich als Dokumentation (u.a. hilfreich bei allfälliger Hospitalisation).

<https://www.globalpointofcare.abbott/de/product-details/panbio-covid-19-ag-antigen-test.html>

**Empfehlungen der KSW-Infektiologie:**

Wir empfehlen den Einsatz der Antigen Schnelltests in folgenden Situationen:

**A) Vergüteter Einsatz gemäss BAG:**

1) Symptomatische Personen gemäss klinischen Kriterien vom 2.11.2020, die alle folgenden vier Kriterien erfüllen: (link: BAG-Test- und Beprobungskriterien)

1. Symptombeginn vor weniger als 4 Tagen (Test möglichst rasch nach Symptombeginn)  
UND
2. Nicht zu den besonders gefährdeten Personen gehörend  
UND
3. Nicht im Gesundheitswesen mit direktem Patientenkontakt arbeitend  
UND
4. Ambulante Behandlung

2) Ausbruchsuntersuchung in einer Gesundheitsinstitution (auch von asymptomatischen Personen)

**B) Erweiterte Indikation in der ambulanten Medizin (Achtung: Aktuell keine gesicherte Vergütung der Antigen Schnelltests)**

3) Symptomatische Personen gemäss klinischen Kriterien vom 2.11.2020

- mit Risikofaktoren  
UND/ODER
- mit schwerer COVID-19 Erkrankung  
UND/ODER
- mit Risikotätigkeit im Gesundheitswesen  
UND
- unabhängig von der Symptombauer

Interpretationen:      Schnelltest positiv      → COVID-19 bestätigt  
                              Schnelltest negativ      → zusätzlich PCR notwendig

Kommentar: Einsatz des Antigen Schnelltests als typischer *Point-of-care* Test vergleichbar zum Streptokokken Schnelltest bei Tonsillo-Pharyngitis. Je nach Situation und Testresultat braucht es nach dem Schnelltest weiterführende Diagnostik mittels PCR, erweitertem Labor und/oder Bildgebung.

**Quintessenz:**

Aus unserer Sicht sind die Antigen Schnelltests eine sehr willkommene Ergänzung zur PCR-basierten Diagnostik und können durch die Schnelligkeit des Resultats in verschiedenen klinischen und epidemiologischen Situationen sinnvoll eingesetzt werden. Wir sind überzeugt, dass die zwei hier erwähnten Antigen Schnelltests genügend validiert sind, eine verlässliche Performance haben und dass deren korrekte Durchführung in jedem Praxislabor mit überschaubarem Aufwand ohne Gefährdung der Mitarbeiter\*innen möglich ist. Es macht keinerlei Sinn, den Einsatz der Antigen Schelltests in der aktuellen epidemiologischen Lage hinauszuzögern. Wir sind sogar der Meinung, dass es neben den vom BAG empfohlenen Anwendungsbereichen zusätzliche Situationen in der Hauarztpraxis gibt, bei denen sich diese Schnelltests als äusserst hilfreich erweisen könnten.

Mit kollegialen Grüßen.

PD Dr. med. Urs Karrer, PhD  
Chefarzt Infektiologie und Spitalhygiene  
Laborleiter Mikrobiologie  
Kantonsspital Winterthur

---

## D. Gesetz der grossen Zahlen

Was besagt das Gesetz der grossen Zahlen? Wikipedia sagt:

In ihrer einfachsten Form besagen diese Sätze, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses in der Regel um die theoretische Wahrscheinlichkeit eines Zufallsergebnisses stabilisiert, wenn das zugrundeliegende Zufallsexperiment immer wieder unter denselben Voraussetzungen durchgeführt wird. Die häufig verwendete Formulierung, dass sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit „immer mehr annähert“ ist dabei irreführend, da es auch bei einer großen Anzahl von Wiederholungen Ausreisser geben kann. Die Annäherung ist also nicht monoton.

Das wollen wir uns in diesem Abschnitt genauer anschauen.

### D.1. Die Tschebyscheff'sche Ungleichung

Wir brauchen für die folgende Argumentation die sogenannte Tschebyscheff-Ungleichung, die wir hier nicht streng beweisen wollen.

#### Satz 4.1: Tschebyscheff'sche Ungleichung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Erwartungswert

$$\mu := \text{E}(X)$$

und endlicher Varianz

$$\sigma^2 := \text{Var}(x).$$

Dann gilt für alle reellen Zahlen  $k > 0$ :

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Durch den Übergang zum komplementären Ereignis erhält man

$$P(|X - \mu| < k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

*Beweis.* Als kleine Begründung (handwaving) betrachten wir für den diskreten Fall Instanzierungen  $x_i, i \in I$  mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$ . Was bedeutet für eine beliebige Zahl  $k$

die Aussage  $P(|X - \mu| \geq k)$ ? Wir interessieren uns also für die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung der Zufallsvariablen  $X$  vom Erwartungswert  $\mu$  grösser als  $k$  ist. Nennen wir die Menge aller  $i \in I$ , so dass die Instanzierung der Zufallsvariablen grösser als  $k$  ist

$$K := \{i \in I \mid |x_i - \mu| \geq k\}.$$

Wir lösen uns vom Betrag durch  $(x_i - \mu)^2 \geq k^2$  was äquivalent zu

$$\frac{(x_i - \mu)^2}{k^2} \geq 1.$$

Jetzt schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \geq k) &= \sum_{i \in K} p_i \leq \sum_{i \in K} p_i \cdot \frac{(x_i - \mu)^2}{k^2} \leq \sum_{i \in I} p_i \cdot \frac{(x_i - \mu)^2}{k^2} \\ &= \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{i \in I} p_i (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{k^2} \cdot \sigma^2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt jetzt unmittelbar

$$P(|X - \mu| < k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

□

## D.2. Herleitung

Es gilt für eine Folge von i.i.d.<sup>‡</sup> Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  für ihr arithmetisches Mittel (Mittelwert)

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Beachte, dass  $\bar{X}$  selbst wiederum eine Zufallsvariable ist. Es ist natürlich  $E(\bar{X}) = \mu$  und für die Varianz gilt  $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ , da für unabhängige Zufallsvariablen die Varianz linear ist. Somit folgt mit der Tschebyscheff'schen Ungleichung

$$P(|\bar{X} - \mu| < k) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2},$$

was für  $n \rightarrow \infty$  zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| < k) \geq 1 = 1$$

wird. Das heisst: für eine grösser werdende Anzahl von i.i.d. Zufallsvariablen geht die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung ihres Mittelwerts vom Erwartungswert kleiner als eine beliebige positive Zahl  $k$  ist, gegen 100%.

---

<sup>‡</sup>independent and identically distributed

### D.3. Konvergenz gegen die Wahrscheinlichkeit

Beispielsweise gilt für Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen  $X_i$  mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ , dass ihr Mittelwert (relative Häufigkeit) gegen die Wahrscheinlichkeit konvergiert<sup>§</sup> (im Sinne von statistischer Konvergenz):

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p.$$

---

<sup>§</sup>Theorem von Bernoulli

#### D.4. Konvergenz gegen die Wahrscheinlichkeiten in Messungen

## Gesetz der grossen Zahlen

December 8, 2020

```
[1]: from scipy.stats import binom
[2]: binom(10,0.5).rvs(10)
[2]: array([4, 6, 4, 3, 5, 3, 6, 6, 3, 6])
[3]: bi = binom(30,0.4)
      bi.expect()
[3]: 11.999999999999917
[4]: bi.rvs(10)
[4]: array([13,  9, 14, 12, 10, 10, 12, 10,  9, 14])
[5]: sum(bi.rvs(1000000))/1000000
[5]: 12.000614
[]:
```

# Würfe	10	100	1 000	...	100 000
„Kopf“	4	43	440	...	47 000
rel. Häufigkeit	0.4	0.43	0.44	...	0.47
„Zahl“	6	57	560	...	53 000
$\Delta$	2	14	120	...	6 000

Tabelle 12: Münzwurf zur Illustration des Gesetzes der grossen Zahlen

## D.5. Missinterpretation des Gesetzes

Ein Missverständnis, dem viele Leute erliegen, will ich noch ansprechen. Das Gesetz der grossen Zahlen besagt *nicht*, dass man so was wie ausgleichende Gerechtigkeit hat, dass sich die Ergebnisse ausgleichen. Nimm zum Beispiel eine faire Münze, werfe sie ein paar Mal und notiere dabei wie oft Kopf gezeigt wird. Dieses Verhältnis geht gegen 0.5, wenn du die Anzahl der Würfe erhöhst (Gesetz der grossen Zahlen). Es wird aber nicht gesagt, dass sich Anzahl Kopf und Anzahl Zahl mit häufigerem Werfen ausgleichen werden. Betrachte dazu die Tabelle 12 auf Seite 69.

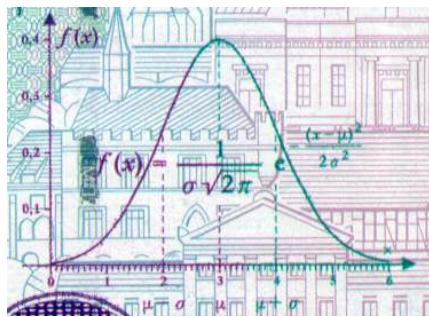


Abbildung 21: Ausschnitt aus einer 10DM Note; findest du die Glockenkurve?

## E. Alles ist Normalverteilt

### E.1. Was ist eine Normalverteilung?

Die Normal- oder Gauss-Verteilung<sup>¶</sup> ist die wohl wichtigste Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die zugehörige Dichte kennt man auch unter dem Namen Gauss'sche Glockenkurve.

Aus Wikipedia, wo die Bedeutung der Normalverteilung folgendermassen beschrieben wird:

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht unter anderem auf dem zentralen Grenzwertsatz, dem zufolge Verteilungen, die durch additive Überlagerung einer grossen Zahl von unabhängigen Einflüssen entstehen, unter schwachen Voraussetzungen annähernd normalverteilt sind.

Die Abweichungen der Messwerte vieler natur-, wirtschafts- und ingenieurwissenschaftlicher Vorgänge vom Erwartungswert lassen sich durch die Normalverteilung (bei biologischen Prozessen oft logarithmische Normalverteilung) in sehr guter Näherung beschreiben (vor allem Prozesse, die in mehreren Faktoren unabhängig voneinander in verschiedene Richtungen wirken).

---

<sup>¶</sup>benannt nach Carl Friedrich Gauss

## E.2. Die Standardnormalverteilung an einem Beispiel

Sei  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  eine Folge von i.i.d.<sup>¶</sup> Zufallsvariablen, deren Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  existieren.<sup>\*\*</sup> Im Falle von beispielsweise  $n = 10$  ist der Mittelwert

$$\frac{X_1 + \dots + X_{10}}{10}$$

selbst auch wieder eine Zufallsvariable mit einer gewissen Verteilung.

Für die folgende, theoretische Überlegung nehmen wir an, wir wüssten den Erwartungswert  $\mu$ . In der Praxis ist dies meist nicht der Fall und man versucht dieses  $\mu$  so gut wie möglich zu schätzen. Wir setzen

$$Y_i := X_i - \mu.$$

$Y_i$  ist also die Abweichung der Messung  $X_i$  vom Erwartungswert. Man kann dies beispielsweise als Messungenauigkeit oder Rauschen interpretieren. Für den Erwartungswert von  $Y_i$  folgt nun:

$$E(Y_i) = E(X_i - \mu) = E(X_i) - E(\mu) = E(X_i) - \mu = 0.$$

Die Varianz ändert sich natürlich bei der Verschiebung um  $\mu$  nicht:

$$\text{Var}(Y_i) = \text{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

Es folgt wegen der Unabhängigkeit der  $Y_i$

$$\text{Var}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \text{Var}(Y_1) + \dots + \text{Var}(Y_n) = n \cdot \sigma^2,$$

das heisst die Standardabweichung von  $Y_1 + \dots + Y_n$  ist

$$\sqrt{n\sigma^2} = \sqrt{n} \cdot \sigma.$$

Jetzt definieren wir uns eine neue Zufallsvariable

$$Z_n := \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n} \cdot \sigma}.$$

So ist  $E(Z_n) = 0$  und  $\text{Var}(Z_n) = 1$  (normiert). Diese neu definierte Zufallsvariable  $Z_n$  konvergiert für grösser werdende  $n$  immer gegen dieselbe Verteilung, nämlich der Standard-Normalverteilung! Und dies unabhängig davon, welcher Verteilung die  $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$  unterliegen.

---

<sup>¶</sup>independent, identically distributed

<sup>\*\*</sup>Man kann sich für die Fortsetzung zum Beispiel vorstellen, dass diese  $X_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  Messwerte seien.

### **E.3. Konvergenz gegen die Normalverteilung experimentell**

Es folgen ein paar Versuche unter verschiedenen Verteilungen. Das Programm `CRT(distr, nrandvals, mi`

macht dabei folgendes:

- zufällig für eine gewisse Verteilung  $n$  Werte generieren (rvs)
- Mittelwert zentrieren (expect)
- Standardabweichung normieren (std)
- mache das  $m$  mal
- Plot als Histogramm (relative Häufigkeiten)

**E.4. Verschiedene Verteilungen normiert****Alles ist Normalverteilung**

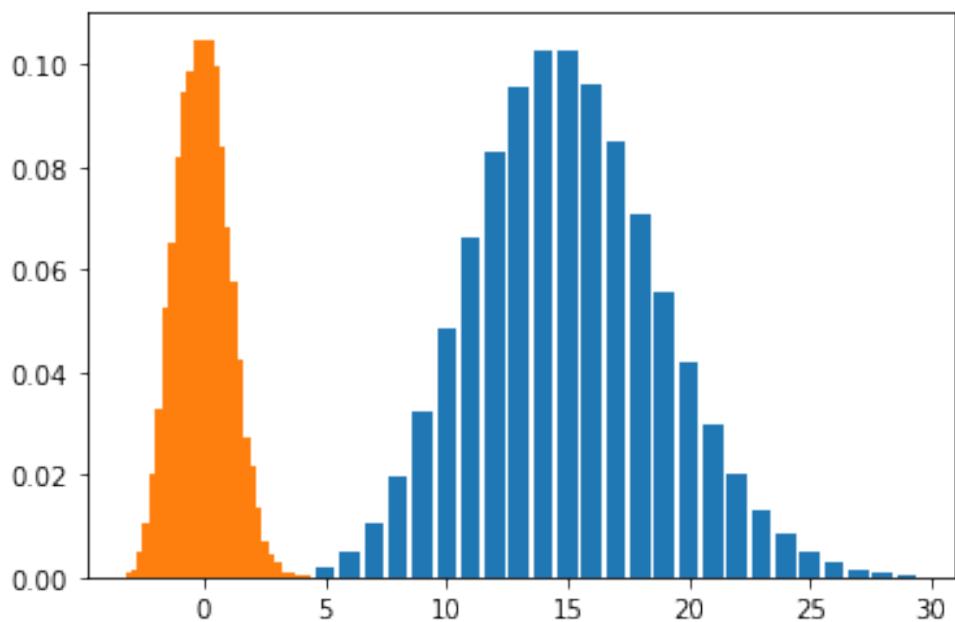
December 8, 2020

```
[1]: from numpy import sqrt, sum, histogram
from matplotlib.pyplot import bar

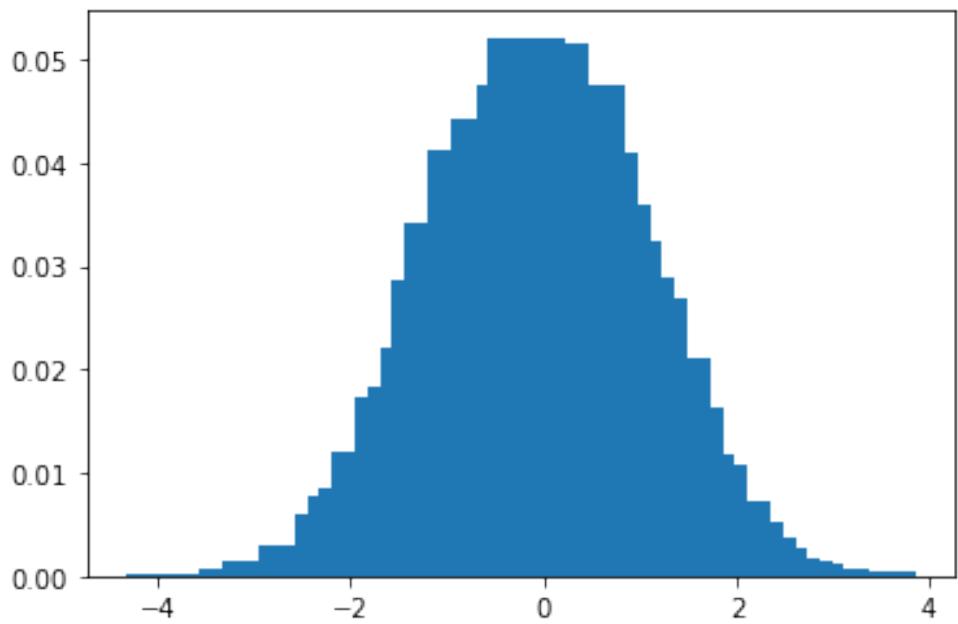
def CLT (dist, n, repeat):
    R = (dist.rvs((n, repeat)) - dist.expect()) / (sqrt(n) * dist.std())
    hist, bins = histogram(sum(R, axis=0), bins="auto")
    bar(bins[:-1], hist / sum(hist))

[2]: from scipy.stats import poisson, binom, expon

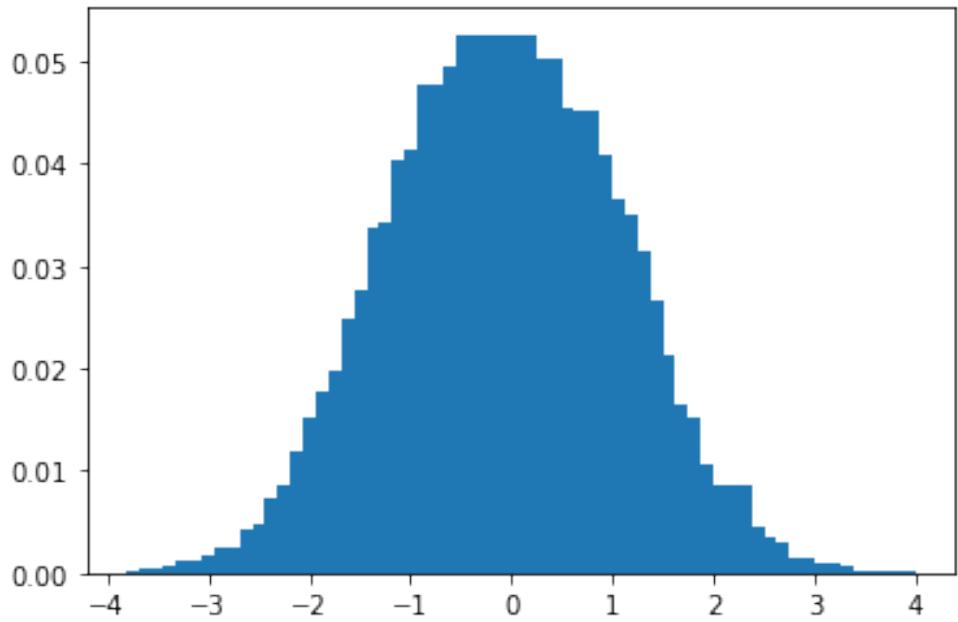
[3]: poi = poisson(15)
L = list(range(30))
bar(L, [poi.pmf(k) for k in L])
CLT(poi, 1, 10000)
```



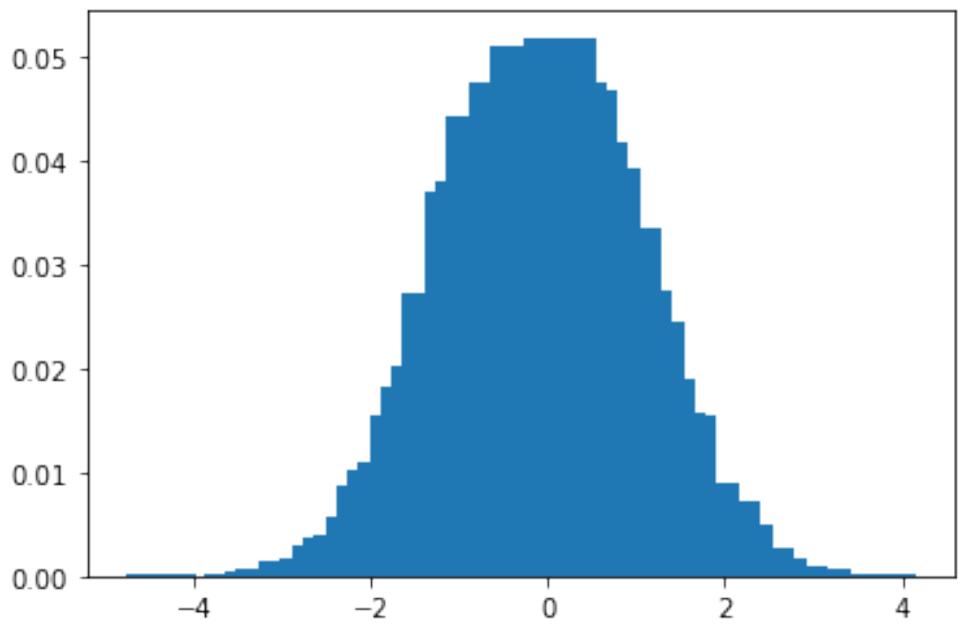
```
[4]: CLT(poi, 5000, 10000)
```



```
[5]: CLT(expon(scale=1/0.5), 5000, 10000)
```

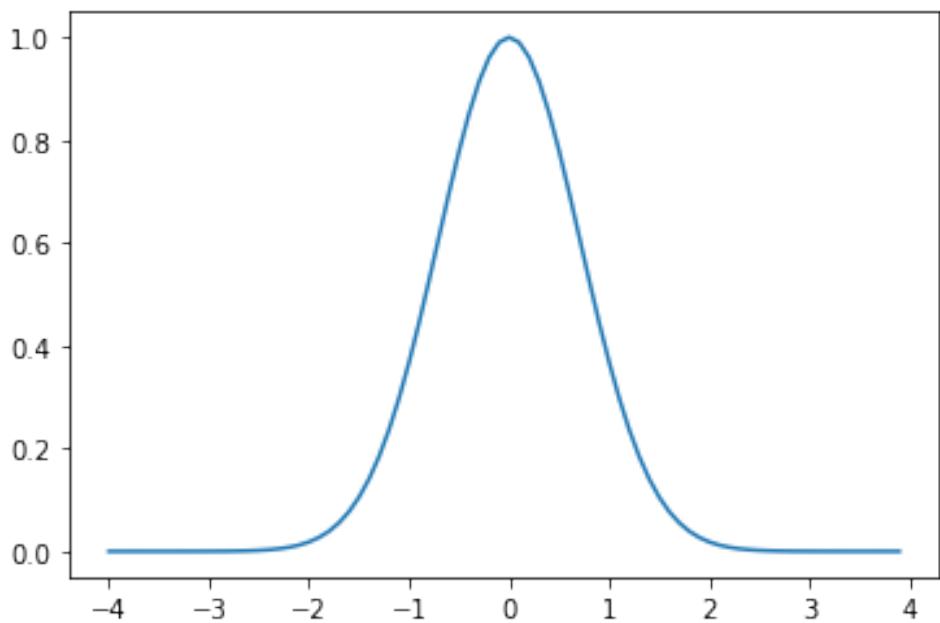


```
[6]: CLT(binom(30,0.1),5000,10000)
```



```
[7]: import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

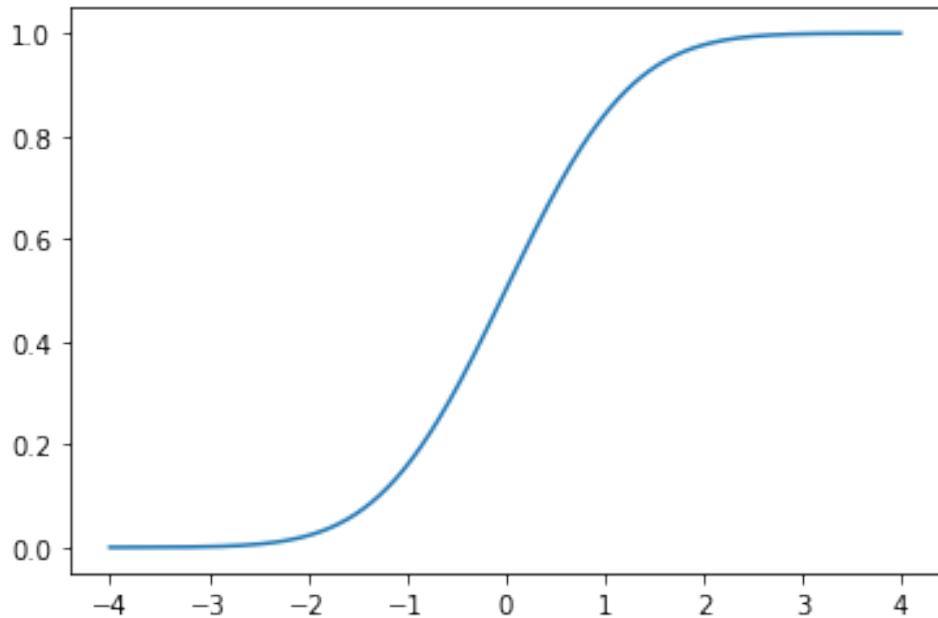
x = np.arange(-4.0, 4.0, 0.1)
plt.plot(x, np.exp(-x*x))
plt.show()
```



```
[8]: from scipy.stats import norm

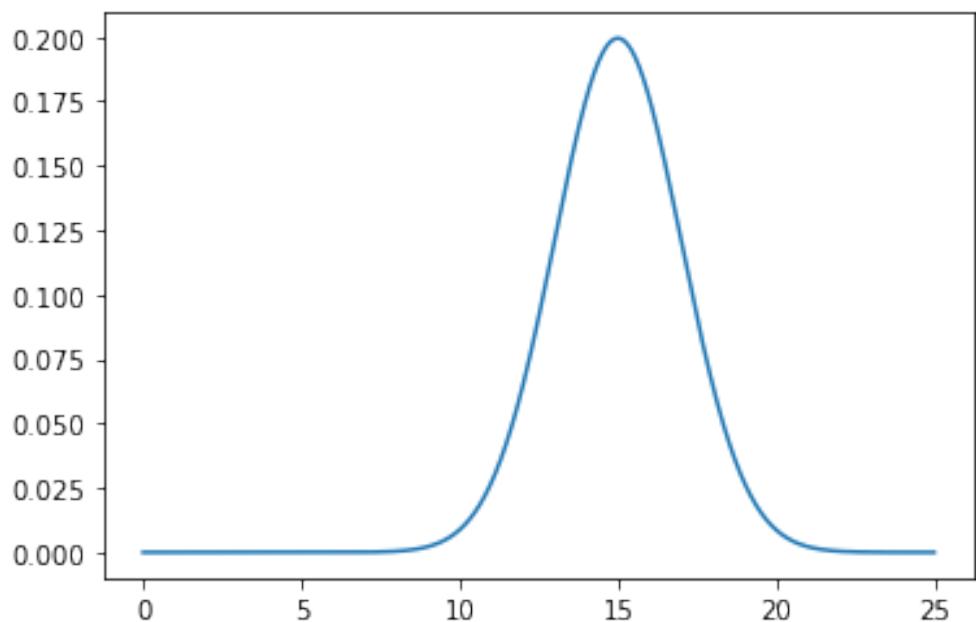
x_axis = np.arange(-4, 4, 0.01)
#  $N(0, 1)$  dichte
plt.plot(x_axis, norm.cdf(x_axis, 0, 1))
```

[8]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7ffe5070c550>]



```
[9]: x_axis = np.arange(0, 25, 0.001)
# Mean = 0, SD = 2.
plt.plot(x_axis, norm.pdf(x_axis, 15, 2))
```

[9]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7ffe60716790>]



```
[10]: normvolt = norm(loc=15, scale=2)
[11]: normvolt.cdf(13) + (1-normvolt.cdf(17))
[11]: 0.31731050786291415
[ ]:
```

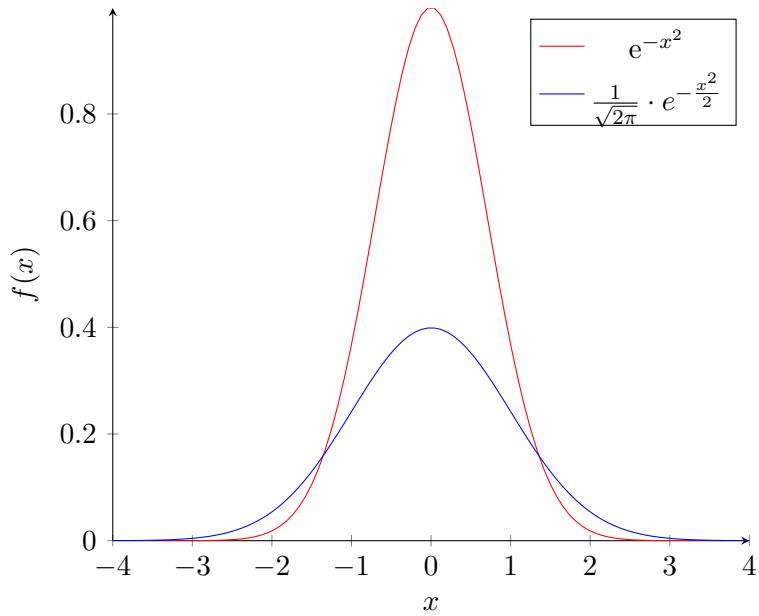


Abbildung 22: Glockenkurve und Standard-Normalverteilung

Man sieht, dass für jede der getesteten Verteilung eine zur unten abgebildeten Funktion ähnliche Kurve resultiert.

Grundsätzlich hat der Graph der Funktion

$$f(x) = e^{-x^2}$$

die Form einer Glockenkurve. Soll damit aber eine Wahrscheinlichkeitsverteilung abgebildet werden, so muss die Fläche unter  $f$  1 sein. Speziell für den Erwartungswert 0 und die Standardabweichung/Varianz 1 findet man die sogenannte *Standard-Normalverteilung*

$$\mathcal{N}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

In der Praxis möchte man noch die Parameter  $\mu$  (Erwartungswert) und  $\sigma$  (Standardabweichung) einstellen können. Dies führt zur Darstellung der *Normalverteilungsdichthe-funktion* mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ :

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

**Übung 88.** Als Repetition könnte man an dieser Stelle Extrema und Wendestellen von  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  bestimmen; falls nicht bereits geschehen.

Die Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

besitzt keine geschlossene Stammfunktion, weshalb man auf Tabellen zurückgreift. Wie oben gesehen kann man aber jede Zufallsvariable  $X$  durch die Transformation zu  $Z$  normieren, so dass nur die Standard-Normalverteilungsfunktion tabelliert werden muss.

## E.5. Der zentrale Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz (von LINDEBERG-LÉVY) ist ein bedeutendes Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er liefert die Begründung für das Phänomen, dass sich bei der additiven Überlagerung vieler unabhängiger Zufallseffekte zumindest approximativ eine Normalverteilung ergibt, wenn keiner der einzelnen Effekte einen dominierenden Einfluss auf die Varianz hat. Die in diesem wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne zu verstehende Konvergenz ist mit unseren Bezeichnungen die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \Phi(x)$$

für beliebiges  $x \in \mathbb{R}$ . Die zu den  $Z_n$  gehörende Verteilungsfunktion wird also mit wachsendem  $n$  durch die Normalverteilung approximiert.



## Abbildungsverzeichnis

1.	Antike Würfel . . . . .	5
2.	DANIEL BERNOULLI . . . . .	6
3.	Stellungen 0 und 1 des Reissnagel . . . . .	9
4.	Graphische Darstellung des Reissnagel-Versuchs . . . . .	10
5.	ANDREY KOLMOGOROV . . . . .	12
6.	Wahrscheinlichkeitsbaum für die Urne (mit Zurücklegen) . . . . .	16
7.	Oops, Lotto-Ziehung-Missgeschick; und Tippschein . . . . .	19
8.	Poker Hand Rankings . . . . .	20
9.	Beipackzettel Covid-19 Selbsttest . . . . .	23
10.	You're probably near the ocean. . . . .	25
11.	Häufigkeitsverteilung beim Würfeln mit zwei Würfel . . . . .	29
12.	Relative Genauigkeit der Maschinen A und B . . . . .	31
13.	Welches ist das „random picture“? . . . . .	37
14.	Is it really random? . . . . .	38
15.	Verteilung für die Trefferquote 0.8 bei 5 Versuchen . . . . .	42
16.	Verteilung für 100 Versuche mit einer Trefferwahrscheinlichkeit von 0.4 . .	43
17.	Illustration des Fehlers zweiter Art . . . . .	44
18.	TOTOGOAL Tippspiel . . . . .	48
19.	„Next time, let me handle the seating arrangements!“ . . . . .	52
20.	Combinatorial Pillow-Talk . . . . .	57
21.	Ausschnitt aus einer 10DM Note; findest du die Glockenkurve? . . . . .	70
22.	Glockenkurve und Standard-Normalverteilung . . . . .	78

## Tabellenverzeichnis

1.	Anzahl Einsen zu Anzahl Würfen beim Reissnagel-Werfen . . . . .	9
2.	Zuchterfolg bei Tulpen . . . . .	22
3.	Blutgruppen und Geschlechter . . . . .	26
4.	Testresultat Haarfarbe . . . . .	26
5.	Gewinn aus Peters Sicht beim Fünfliber-Spiel . . . . .	27
6.	Gewichtung der Zufallsvariablen beim Fünfliber-Spiel . . . . .	28
7.	Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Werfen von zwei Würfeln . . . . .	29
8.	Medikamententest . . . . .	32
9.	Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p$ . . . . .	34
10.	Einseitige und zweiseitiger Hypothesentest . . . . .	45
11.	Überblick der vier Fälle beim Ziehen . . . . .	57
12.	Münzwurf zur Illustration des Gesetzes der grossen Zahlen . . . . .	69