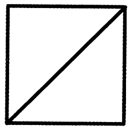
56. Die erste wirklich komplizierte Zahl

Aus zwei Gründen sind die durch Brüche darstellbaren Zahlen – die so genannten rationalen Zahlen – von fundamentaler Bedeutung. Erstens gibt es davon so viele, dass alle praktisch wichtigen Zahlen ohne große Verluste durch eine rationale Zahl ersetzt werden können. So darf man zum Beispiel ohne irgendwelche Nachteile bei der Berechnung des Saatguts für ein kreisrundes Beet die Kreiszahl π durch den Bruch $314/100$ ersetzen.

Und zweitens sind die Bruchzahlen sehr leicht zugänglich. Was $5/11$ ist, kann man Kindern schon ziemlich früh erklären. Die Pythagoräer vertraten sogar die Ansicht, dass *alle* für arithmetische und geometrische Probleme wichtigen Zahlen rational sein müssten. Immerhin konnten sie mit dieser Maxime viele wichtige Phänomene beschreiben. So entsteht zum Beispiel die pythagoräische Tonleiter dadurch, dass die Verhältnisse der Frequenzen der einzelnen Töne zueinander einfach zu beschreibende Brüche sind[52].



Deswegen wurde es damals als besonders schockierend empfunden, dass schon in ganz naiven Zusammenhängen Zahlen auftreten können, die *nicht* rational sind; solche Zahlen heißen *irrational*. Bekanntestes Beispiel ist sicher die Quadratwurzel aus 2. Sie ist die Länge der Diagonale in einem Quadrat mit Seitenlängen Eins. Niemand, der Geometrie betreiben möchte, kommt an ihr vorbei.

Der Nachweis der Irrationalität ist nicht leicht. Computer und beliebig lange Rechenzeit helfen nicht weiter. Warum sollte man die Wurzel aus Zwei nicht als Bruch von zwei Zahlen schreiben können, die jeweils viele Billionen Stellen haben?

Die Lösung ist ein indirekter Beweis. Das ist ein Verfahren, das auch Sherlock Holmes manchmal gute Dienste leistet: Angenommen, es wäre so und so, dann müsste auch das und das gelten; das stimmt aber nicht, und deswegen war die zuerst gemachte Annahme falsch.

Das Verfahren klappt auch im vorliegenden Fall, die technischen Einzelheiten finden Interessierte nachstehend.

Zum Beweis der Irrationalität gibt es auch eine Anekdote. Angeblich wurde das Ergebnis von den Pythagoräern mit der höchsten Geheimhaltungsstufe belegt, und der Entdecker – ein gewisser Hipposus – bezahlte das Rütteln an den Grundlagen des Zahlverständnisses mit dem Leben.

Warum ist $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellbar?

Die Wurzel aus 2 ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Wir wollen sie hier w nennen. Durch Ausprobieren kann man sich schnell eine ungefähre Vorstellung von der Lage von w machen. Zum Beispiel ist das Quadrat von 1.4,

[52] Vgl. Beitrag 26.

also die Zahl $1.4 \cdot 1.4 = 1.96$, kleiner als 2, und deswegen muss w größer als 1.4 sein. Andererseits ist das Quadrat von 1.5 gleich 2.25, also zu groß: Deswegen ist w sicher kleiner als 1.5.

Jeder Taschenrechner weiß es genauer, eine für alle praktischen Zwecke ausreichende Annäherung an den wirklichen Wert von w ist 1.414213562. Das ist immer noch nicht exakt gleich der Wurzel aus 2, denn

$$1.414213562 \cdot 1.414213562 = 1.999999998944727844$$

ist eine Winzigkeit zu klein.

Mathematiker haben sich schon vor über 2000 Jahren gefragt, ob es überhaupt eine Möglichkeit gibt, w als Bruch darzustellen[53].

Der nachstehende klassische Beweis nutzt nur die folgende Tatsache aus:

> Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade und das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.

Der eigentliche Beweis beginnt mit der Annahme, dass w ein Bruch ist, und dann wird so lange argumentiert, bis Unsinn herauskommt. (So wie Sherlock Holmes: Wenn der Mörder das Restaurant durch die Küche verlassen hätte, wäre er von den Köchen gesehen worden. Die haben aber nichts bemerkt. Also muss er einen anderen Fluchtweg genommen haben.)

Wir schreiben w als p/q mit natürlichen Zahlen p, q. In dem Bruch soll schon fleißig gekürzt worden sein, insbesondere soll mindestens eine der Zahlen p, q ungerade sein.

Es ist also $p = w \cdot q$, und wenn man diese Gleichung quadriert und sich an $w \cdot w = 2$ erinnert, gelangt man zu $2 \cdot q^2 = p^2$. Deswegen ist p^2 eine gerade Zahl, und das geht nach Vorbemerkung nur, wenn p selber schon gerade war. Wir schreiben p als $2 \cdot r$ und setzen das in $2 \cdot q^2 = p^2$ ein. Es folgt – wegen $p^2 = 4 \cdot r^2$ – zuerst $2 \cdot q^2 = 4 \cdot r^2$ und daraus durch Kürzen $q^2 = 2 \cdot r^2$. Also war q^2 und damit auch q gerade. Das geht aber nicht: Einerseits hatten wir doch so weit wie möglich im Bruch p/q gekürzt, und nun kommt heraus, dass sowohl p als auch q gerade ist!

So ist gezeigt, dass w nicht als Bruch geschrieben werden kann. Auch nicht mit astronomisch großen Zahlen, und auch nicht in 100 000 Jahren.

[53] Man beachte, dass jede Zahl mit endlicher Dezimalentwicklung auch als Bruch geschrieben werden kann. So ist 1.41 doch das Gleiche wie $141/100$. Insbesondere kann eine Zahl, die nicht als Bruch geschrieben werden kann, keine endliche Dezimalzahl sein.