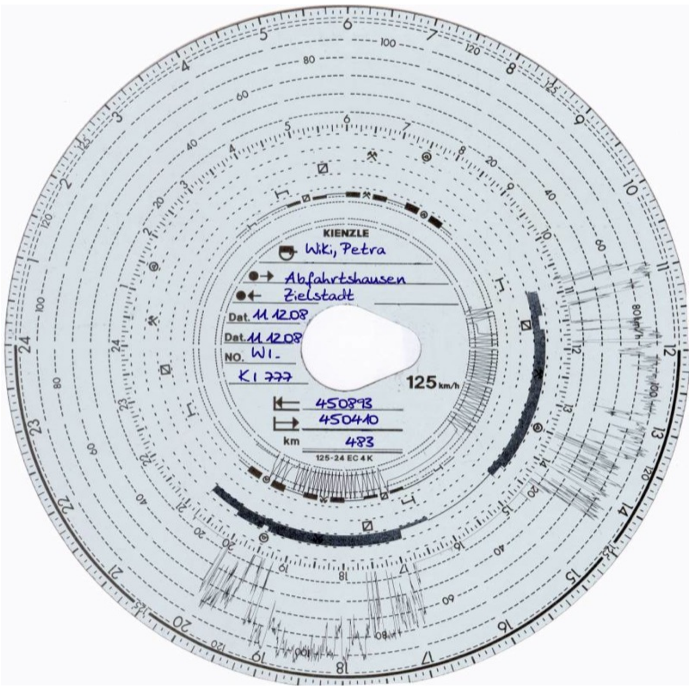


Integralrechnung

Differenzialrechnung abrunden

Inhaltsverzeichnis

1. Was heisst Integral?

Bei der Diskussion von Funktionen war bis anhin die Ableitung ein zentraler Begriff. Mit ihrer Hilfe kann man die momentane Änderungsrate einer Grösse bestimmen:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Im Folgenden wird nun umgekehrt diskutiert, wie man von der momentanen Änderungsrate einer Grösse auf die Gesamtänderung der Grösse schliessen kann. Es stellt sich heraus, dass die Gesamtänderung einer Grösse als Flächeninhalt unter einer Kurve interpretiert werden kann. Deshalb sucht man nach Methoden zur Bestimmung solcher Flächeninhalte.

Lokomotiven, Cars oder Lastwagen müssen mit einem Fahrtenschreiber ausgerüstet sein, einem Messgerät, das zu jedem Zeitpunkt t die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs aufzeichnet. Damit wird es den Untersuchungsbehörden im Falle eines Unglücks bzw. der Polizei bei einer Verkehrskontrolle ermöglicht festzustellen, wo sich das Fahrzeug zu einem bestimmten Zeitpunkt seiner Fahrt gerade befand, vorausgesetzt, dass seine Route und die Startzeit bekannt sind. Hauptsächlich wird überprüft, ob die Fahrer ihre gesetzlich vorgeschriebenen Ruhezeiten einhalten.

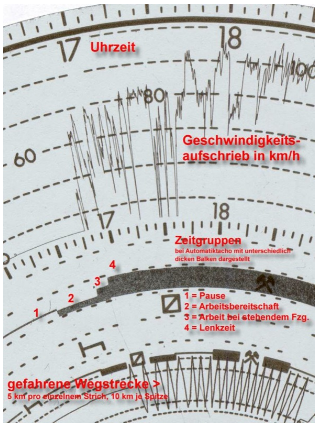


Abbildung 1: Fahrtenschreiber

In der Differentialrechnung ermittelt man aus der Weg-Zeit-Funktion durch Differenziation die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = s'(t).$$

Allgemein gesprochen: Von einer gegebenen Funktion f wird der Differentialquotient (bzw. die Ableitung f') berechnet und dessen Eigenschaften untersucht. Dabei zeigt sich, dass nur die Funktionswerte in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 Einfluss auf den Wert des Differentialquotienten an dieser Stelle x_0 nehmen.

Bemerkung. In der Differentialrechnung werden nur lokale Eigenschaften der Funktion untersucht.

Das Beispiel mit dem Fahrtenschreiber verlangt aber genau umgekehrt die Rekonstruktion des Bewegungsverlaufes: Aus $v(t)$ soll $s(t)$ ermittelt werden.

In der Integralrechnung sucht man zu einer gegebenen Funktion f die „Antiableitung“, also eine Funktion F, deren Ableitung gerade f entspricht. Man muss aus den Änderungsdaten, die durch f gegeben sind, die ursprüngliche Funktion F rekonstruieren. Durch diese Rekonstruktion kann der Gesamtzuwachs der Funktion, der Gesamteffekt ihrer Änderungen, berechnet werden.

Newton und Leibniz, die beiden Entdecker der Differentialrechnung trieben auch die hier vorgestellte *Integralrechnung* voran. Die symbolische Schreibweise $\int$ geht auf Leibniz zurück, wobei dieses Zeichen an das Wort Summe (lat. *ſumma*, „ſ“ steht für ein langes s) erinnern soll. Wie wir sehen werden, geht es nämlich in der Integralrechnung darum, infinitesimal kleine Flächenstücke aufzusummieren. Die Notation $f(x)\,\mathrm{d}x$ bedeutet die Fläche einer „Säule“ mit Höhe $f(x)$ und infinitesimal kleiner Breite $\mathrm{d}x$.

Beispiele.

- Berechnung des zu jedem Zeitpunkt zurückgelegten Weges, wenn die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion bekannt ist.
- Berechnung der zu jedem Zeitpunkt erzielten Geschwindigkeit, wenn die Beschleunigungs-Zeit-Funktion bekannt ist.
- Berechnung von Flächen- und Rauminhalten.
- Berechnung von Schwerpunkten von Flächen und Körpern.
- Berechnung der Arbeit, wenn die wirkende Kraft als Funktion des Weges bekannt ist.
- Berechnung der Gesamtkosten, wenn die Grenzkosten jeweils bekannt sind.

Bemerkung. In der Integralrechnung werden nicht lokale, sondern globale Eigenschaften einer Funktion untersucht.

Übung 1 (Standardbeispiel)**.** Notiere für die gleichmässig beschleunigte Bewegung ($a =$ konst) die Funktionsgleichungen für

(a) die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit der Zeit.

(b) die Geschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit der Zeit.

(c) die Beschleunigung $a(t)$ in Abhängigkeit der Zeit.

und skizziere die Funktionen. Erkläre anschliessend den Zusammenhang zwischen $s(t)$, $v(t)$, und $a(t)$ und bestimme beim $v-t$- und $a-t$-Diagramm den Flächeninhalt zwischen dem entsprechenden Graphen und der x-Achse. Betrachte dazu das Zeitintervall $t \in [0, 2]$ und setze $a = 2\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$.

2. Stammfunktionen

Definition 2.1: Stammfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall I definierte Funktion f. $S(x)$ heisst *Stammfunktion* von $f(x)$ im Intervall I, wenn $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = f$ für alle $x \in I$.

Bemerkung. Salopp: S ist Stammfunktion von f, wenn S abgeleitet gleich f ist:

$$S'(x) = f(x)$$

Beispiele. Beispiele von Stammfunktionen sind:

- $S(x) = \frac{x^3}{3}$ zu $f(x) = x^2$.
- $S(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ zu $f(x) = x^2$.
- $S(x) = -\cos(x)$ zu $f(x) = \sin(x)$

Das obige Beispiel zeigt auch, wieso ich in der Definition von *einer* Stammfunktion von f gesprochen habe. Weil nämlich beim Ableiten eine additive Konstante wegfällt, gibt es zu einer Funktion f unendlich viele Stammfunktionen S. Man kann ja so viele verschiedene Konstanten hinzufügen wie es reelle Zahlen gibt. Wir halten dies kurz fest, in folgendem

Satz 2.1

Ist S eine Stammfunktion von f, so gilt für alle weiteren Stammfunktionen $\tilde{S}$ von f:

$$\tilde{S}(x) = S(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Man betrachtet die Funktion H mit dem Funktionsterm $H(x) = F(x) - G(x)$, wobei F und G Stammfunktionen von f sind. Also gilt für die Steigungsfunktion $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ und somit $H(x) = c$, da eine Funktion, deren Graph immer parallel zur x-Achse verläuft, notwendigerweise konstant sein muss. □

Man kann also zu einer Funktion f beliebig viele Stammfunktionen angeben, wenn man zu irgendeiner Stammfunktion F beliebige Konstanten addiert. In der Praxis ist es üblich, nur mit Repräsentanten aus der Menge

$$\{\, F(x) + c \mid F'(x) = f(x), c \in \mathbb{R} \,\},$$

der Menge aller Stammfunktionen der Funktion f, zu arbeiten. Für den Zusammenhang Funktion - Stammfunktion benutzt man ein besonderes Symbol und schreibt:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + c$$

(lies: unbestimmtes Integral von $f(x)\ \mathrm{d}x = \dots$)

Das Symbol $\int \dots \mathrm{d}x$ steht für die Aufforderung, den Integranden f zu integrieren (integrare, lat., wiederherstellen), also die Stammfunktion von f zu bestimmen. Das $\mathrm{d}x$ gibt an, dass nach der Integrationsvariablen x integriert werden soll, im Sinne von

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t = \int f(u)\ du = \dots .$$

Also

$$\int x^2 t\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} t + c,$$

hingegen

$$\int x^2 t\ \mathrm{d}t = x^2 \frac{t^2}{2} + c.$$

c bezeichnet man als **Integrationskonstante**.

Übung 2 (Stammfunktion)**.** Ermittle zu f eine Stammfunktion F und benutze die Integralschreibweise. Bestätige dein Ergebnis durch entsprechende Differenziation.

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}x$

(b) $f(x) = 3$

(c) $f(t) = t^3 + 3t^2 - 4t + 1$

(d) $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt{u}$

(e) $v(s) = (1 - s)^3$

(f) $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

(g) $f(x) = (3x - 2)^4 + \sqrt{5x}$

(h) $f(x) = \sin(x) + \sin(\frac{x}{2})$

(i) $f(x) = \frac{3}{x}$

(j) $f(t) = \mathrm{e}^t$

Übung 3 (Antiableitung)**.** Find the antiderivative F of

(a) $f(x) = \frac{4}{x^2} - 5x$ with $F(4) = 25$.

(b) $g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ with $G(1) = 3$.

(c) $h(t) \cos(t) - \sin(t)$ with $H(\frac{\pi}{4}) = 0$.

(d) $k(t) = \mathrm{e}^{3t}$ with $K(\ln 9) = 0$.

Übung 4 (integrieren)**.** Berechne

(a) $\int (ax^2 + bx + c)\ \mathrm{d}x$

(b) $\int x^2 \cos(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$

(c) $\int e^{-2t}\ \mathrm{d}t$

(d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$

(e) $\int x\mathrm{e}^{x^2+1}\ \mathrm{d}x$

(f) $\int \frac{u^2}{4u^3-3}\ \mathrm{d}u$

Übung 5 (Umkehrung)**.** Bestätige durch Differentiation

(a) $\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

(b) $\int \cos^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$

(c) $\int \ln(x)\ \mathrm{d}x = x(\ln(x) - 1) + C$

(d) $\int x\ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) + C$

Übung 6 (Öl)**.** Ein auf ein Riff aufgelaufener Öltanker verliert durch ein Leck Öl. Der Ölteppich breitet sich ungefähr mit der Geschwindigkeit

$$\frac{dR}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{\sqrt{t}}, \quad t \geq 1$$

radial aus, wobei $R(t)$ den Radius des kreisförmigen Ölteppichs in Meter nach t Minuten angibt. Nach einer Minute beträgt der Radius bereits 15 Meter. Berechne den Radius nach 49 Minuten.

Nachdem für einige Funktionen bereits die Stammfunktionen konkret gebildet wurden, soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass es in diesem Zusammenhang zwei grundsätzliche Fragen gibt:

- Gibt es zu *jeder* Funktion f eine Stammfunktion F, d.h. ist jede Funktion integrierbar?
- Ist gegebenenfalls diese Stammfunktion auch berechenbar, d.h. kann man ihren Funktionsterm *explizit* angeben?

Ohne Beweis wollen wir lediglich zur ersten Frage bemerken: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist auf entsprechenden Intervall auch integrierbar.

3. Das bestimmte Integral

3.1. Flächenberechnung als Grenzwertprozess

Die Flächenberechnung, auch Integralrechnung genannt, befasst sich mit der Bestimmung krummlinig begrenzter Ebenenstücke. Dabei müssen die krummlinigen Grenzen als Graphen von Funktionen bekannt sein.

3.2. Definition

Wir verallgemeinern das im Unterricht gezeigte Verfahren auf die Fläche unter dem Graphen einer beliebigen Funktion f zwischen a und b.

Definition 3.1: Bestimmtes Integral

Wenn alle Zwischensummenfolgen des Graphen von f gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, so heisst die Funktion f über $[a, b]$ *integrierbar*. Der gemeinsame Grenzwert heisst *bestimmtes Integral* von f über $[a, b]$, und man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a und b heissen *Integralgrenzen*.

Bemerkung. Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes `S` in Anlehnung an die Berechnung durch Zwischen*summen*.

4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Bevor wir auf den Hauptsatz zu sprechen kommen, führen wir hilfreiche Begriffe ein.

Definition 4.1: Integralfunktion

Unter der *Integralfunktion* einer integrierbaren Funktion f versteht man die Funktion

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Übung 7 (Integralfunktion)**.** Bestimmen Sie die Integralfunktion von

(a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = x$

Die Beispiele aus obiger Übung lassen vermuten:

Satz 4.1: Hauptsatz der Integral- & Differentialrechnung

Die Integralfunktion jeder stetigen Funktion ist differenzierbar. Ihre Ableitung ist gleich der Integrandfunktion.

Beweis. Eine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, geht vom Differenzenquotienten der Integralfunktion aus:

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h}.$$

Jetzt schreibt man I explizite

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t}{h}$$

und wendet die Integraladditivität an, wobei l die Höhe des Zwischensummenrechtecks mit Breite h auf dem Intervall $[x, x+h]$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} I'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, \mathrm{d}t}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hl}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} l = f(x), \end{aligned}$$

da für $h \to 0$ wegen der Stetigkeit von f l gegen $f(x)$ strebt. □

Satz 4 wird in der Literatur oft als Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung bezeichnet.

Wir erhalten praktisch gratis mit obigem Beweis von Satz 4 folgenden

Satz 4.2: Flächenberechnung

Ist $S(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = S(b) - S(a).$$

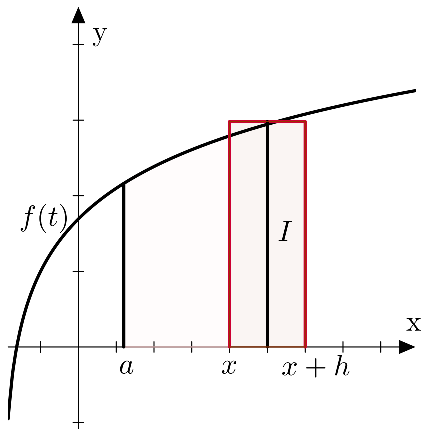


Abbildung 2: Zum Beweis des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung

Beweis. Man zeigt ganz leicht, dass die additive Konstante wegfällt. □

Bemerkung. Dies ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für einen Maturanden. Der Satz offenbart uns folgendes Rezept zur Flächenberechnung zwischen einem Graphen mit Funktionsgleichung f und der x-Achse im Intervall $[a, b]$, ohne Grenzwerte beiziehen zu müssen:

1. Man bestimmt eine Stammfunktion S der Integrandfunktion f.
2. Man bestimmt die Werte dieser Stammfunktion für $x = a$ und $x = b$.
3. Die Differenz dieser Werte, $S(b) - S(a)$, ist gleich dem bestimmten Integral.

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S(x)\,|_a^b = S(b) - S(a)$$

Es genügt ein

Beispiel 1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\,|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0)) \\ &= 0 - (-1) = 1\end{aligned}$$

Halten Sie sich bei den Rechnungen an die Schreibweise, die im obigen Beispiel verwendet wird.

Übung 8 (Flächeninhalt)**.** Skizziere und berechne den Flächeninhalt unter $f(x) = \cos(x)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Übung 9 (Fläche)**.** Berechne den Flächeninhalt unter $f(x) = x^4$ zwischen 1 und 2.

Übung 10 (integriere)**.** Achte jeweils darauf, ob der Integrand im Integrationsintervall überhaupt definiert ist, und berechne:

(a) $\int_1^4 2 \,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-3}^8 \,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-5}^0 (3-u)^2 \,\mathrm{d}u$

(d) $\int_{0.001}^{0.1} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(e) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$

(f) $\int_1^9 (2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}) \,\mathrm{d}x$

(g) $\int_{-3}^{-1} \frac{1+t}{t^3} \,\mathrm{d}t$

(h) $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$

(i) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

(j) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+2\cos x} \,\mathrm{d}x$

(l) $\int_0^1 \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \,\mathrm{d}x$

Übung 11 (Grenzen)**.** Berechne b aus:

(a) $\int_0^b t^2 \,\mathrm{d}t = 72$

(b) $\int_1^b \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}$

(c) $\int_0^b (8t + 2\sin t) \,\mathrm{d}t = \pi^2 + 2$

(d) $\int_{\mathrm{e}}^b \frac{\mathrm{d}u}{u} = 1$

4.1. Flächen zwischen zwei Graphen

Wir haben bereits gesehen, dass sich auch krummlinig begrenzte Flächen zwischen zwei Graphen, deren Funktionsgleichungen bekannt sind, leicht berechnet werden können.

Übung 12 (geometrisch)**.** Deute das bestimmte Integral als Masszahl eines Flächeninhaltes eines Gebietes, das zu skizzieren ist, und berechne seinen Wert. Überprüfe Dein Ergebnis, falls möglich, mit den aus der Elementarmathematik bekannten Formeln für Rechteck, Dreieck und Tapez.

(a) $\int_1^5 4 \,\mathrm{d}x$ (b) $\int_2^4 3x \,\mathrm{d}x$ (c) $\int_a^b ax \,\mathrm{d}x$

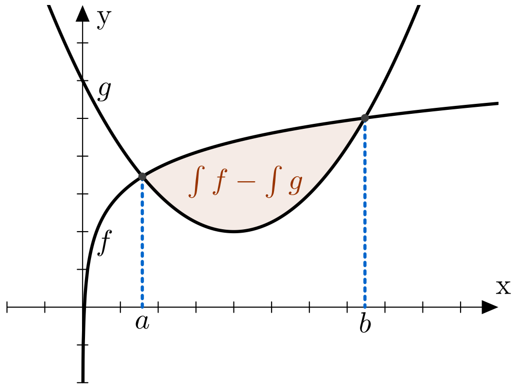


Abbildung 3: Fläche zwischen den Graphen von f und g

Übung 13 (Kreis)**.** Berechne den Wert des Integrals

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, \mathrm{d}x,$$

indem Du das Integral als Masszahl eines bestimmten Flächeninhalts interpretierst.

Übung 14 (Inverse)**.** Veranschauliche Dir mit geometrischer Interpretation, dass $\forall x \in \mathbb{N}$ gilt:

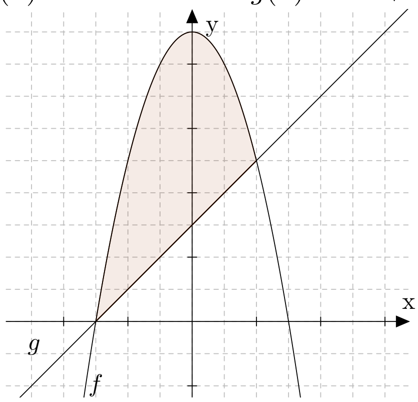
$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt[n]{x}\, \mathrm{d}x = 1.$$

Übung 15 (sin)**.** Berechne

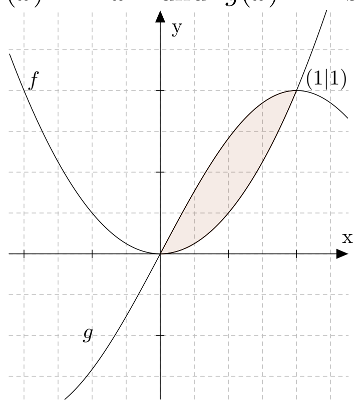
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, \mathrm{d}x.$$

Übung 16 (Obere minus Untere)**.** Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche:

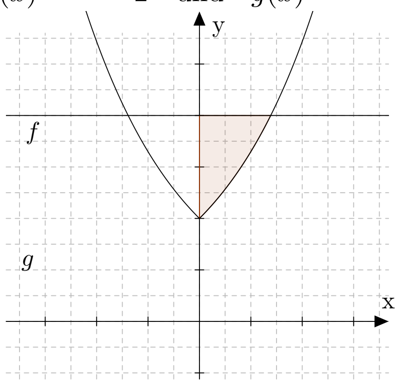
(a) $f(x) = 9 - x^2$ und $g(x) = x + 3$



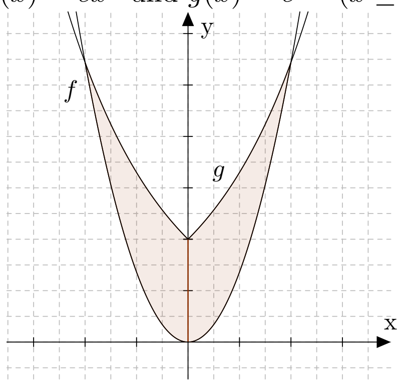
(c) $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(ax)$



(b) $f(x) = 2$ und $g(x) = e^x$



(d) $f(x) = ex^2$ und $g(x) = e^x \quad (x \geq 0)$



Übung 17 (halbe Sachen)**.** Für welchen Wert u halbiert die Gerade $x = u$ das Gebiet, das von

(a) der Parabel $f(x) = x^2$, der x-Achse und der Geraden $x = 4$,

(b) der Sinuskurve, der x-Achse und der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$

begrenzt wird?

Übung 18 (Stollen)**.** Ein wasserführender Stollen hat einen parabolischen Querschnitt mit 4.0 m Sohlenbreite und 3.8 m Scheitelhöhe. Wie viel m^3 Wasser kann der Stollen in einer Sekunde führen, wenn das Wasser höchstens mit einer Geschwindigkeit von 3.5 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ bis zu $\frac{3}{4}$ der Scheitelhöhe fliessen darf?

4.2. Eigenschaften des bestimmten Integrals

Manchmal liegt das Gebiet, dessen Flächeninhalt zu berechnen ist, nicht oberhalb der x-Achse. Durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse — statt f betrachtet man die Funktion $-f$ — kann aber dieser Umstand behoben werden.

Ergibt sich beim Durchlaufen des Randes der zu bestimmenden Fläche in der Richtung von a nach b auf der x-Achse beginnend ein positiver oder negativer Umlaufsinn, so ist das entsprechende bestimmte Integral positiv bzw. negativ.

Beispiel 2.

$$\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

beziehungsweise

$$\int_2^0 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{0^3}{3} - \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$$

5. Das unbestimmte Integral

Zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion gibt es zahlreiche Rechenregeln. Beim Integrieren sind für uns nur wenige Eigenschaften des Integrals von Bedeutung. Nun wird der Begriff des unbestimmten Integrals einer Funktion eingeführt, um die wichtigsten Eigenschaften des Integrals schlank notieren können.

Definition 5.1: Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heisst *unbestimmtes Integral*. Man schreibt dafür

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zu einer Funktion f das unbestimmte Integral bilden heisst die Funktion *integrieren*.

Der folgende Satz sagt aus, dass das Differenzieren die Umkehrung des Integrierens ist.

Satz 5.1

Ist die Funktion f integrierbar, so gilt

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

5.1. Eigenschaften des unbestimmten Integrals

Da das Integrieren im Allgemeinen ein schwieriges Unterfangen ist, ist man darauf bedacht, Formeln für häufig verwendete Funktionen bereitzustellen und Eigenschaften des Integrals zu formulieren.

Wir kennen bereits die Stammfunktionen zur Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ und der Sinus- bzw Cosinus-Funktion. Weitere Formeln können in der Formelsammlung nachgeschlagen werden.

Übung 19 (Lücke schliessen)**.** Wieso lässt man bei der Formel für die Stammfunktion von $f(x) = x^n$ den Fall $n = -1$ nicht zu?

Folgende Eigenschaft des Integrals kann manchmal nützlich sein.

Satz 5.2: Linearität des Integrals

Sind die Funktionen f und g auf dem Intervall I stetig und sind $a, b, c \in I$ sowie $k \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int k \cdot (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\, \mathrm{d}x + k \cdot \int g(x)\, \mathrm{d}x$$

In Worte gefasst bedeutet dies, dass ein konstanter Faktor vor das Integralzeichen gezogen werden kann, und dass Summen gliedweise integriert werden dürfen. Beachten Sie, dass die Summenregel auch für Differenzen gilt, da jede Differenz als Summe geschrieben werden kann (zB $5 - 3 = 5 + (-3)$).

Beweis. Offensichtlich stammt der Satz von den bereits bewiesenen Regeln — konstanter Faktor und Summenregel — für Ableitungen ab. □

Übung 20 (straightforward)**.** Bestimme die Integrale von $f(x) = 5x^2$ und $g(x) = x^2 - 2x$.

Übung 21 (sincos)**.** Die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion begrenzen miteinander unendlich viele kongruente Ebenenstücke (siehe Abbildung 4 auf Seite 17). Berechnen Sie den Flächeninhalt eines solchen Ebenenstücks.

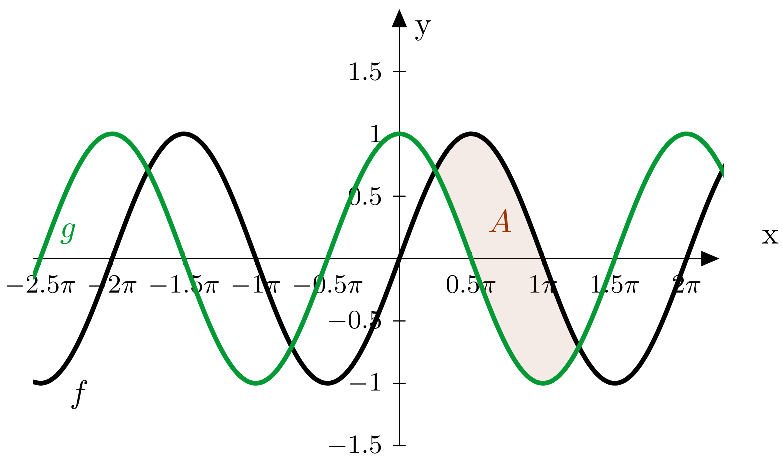


Abbildung 4: Veranschaulichung der Übung

A. Unter-, Ober- und Zwischenwertsummen

Beispiel 3. Berechnen der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall $[0, 1]$. Wir approximieren den gesuchten Flächeninhalt mit n Rechtecken der Breite $\frac{1}{n}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$, welche dem gesuchten Ebenenstück einbeschrieben sind. Wir erhalten nach kurzer Rechnung

$$U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Um eine bessere Näherung zu erhalten, lassen wir n gegen Unendlich streben:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{3}.$$

Das bedeutet, dass der gesuchte Flächeninhalt mindestens ein Drittel beträgt. Nun nähern wir die gesuchte Fläche mit Rechtecken an, in welchen der Graph vollständig enthalten ist:

$$O_n = U_n + \frac{1}{n} \cdot 1.$$

Wiederum lassen wir n gegen Unendlich streben:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}.$$

Das heisst, dass die Fläche höchstens $\frac{1}{3}$ beträgt. Zusammen mit dem ersten Resultat also, dass die gesuchte Fläche exakt $\frac{1}{3}$ beträgt.

U_n nennt man sinnigerweise Untersumme und O_n Obersumme. Hier die Darstellungen von U_5 und O_5 angewendet auf $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

Wenn, wie in unserem Beispiel, Ober- und Untersumme für n gegen Unendlich gegen den gleichen Wert konvergieren, dann sagt man:

> „Das Integral von $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ existiert und hat den Wert $\frac{1}{3}$“.

Übung 22 (Zwischensummen)**.** Berechne die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0, b]$ mit $b \geq 0$. Sie dürfen annehmen, dass Ober- und Untersumme gegen den gleichen Wert konvergieren. Für Interessierte: Welche Eigenschaft muss f haben, damit sicher $O_\infty = U_\infty$?

Übung 23 (Zwischensummen 2)**.** Berechne die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}_0^+, a \leq b$.

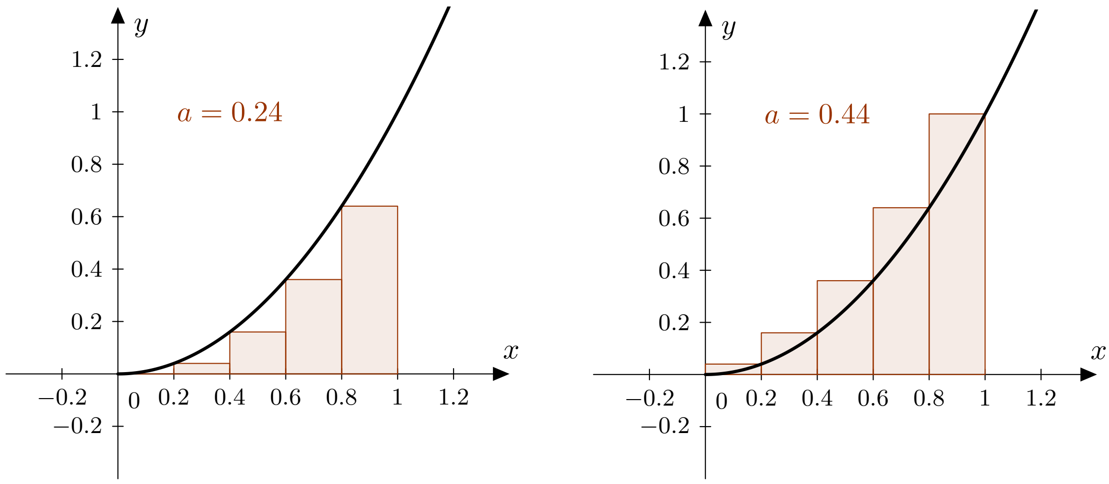
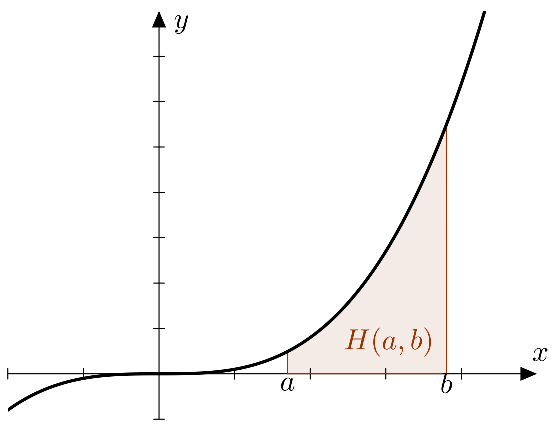


Abbildung 5: Unter- und Obersumme von x^2 über $[0, 1]$ mit Schrittweite 0.2

Übung 24 (Stammfunktion)**.** Zeichne den Graphen von $g(x) = x$. Berechne die Flächenfunktion $G(x)$ zwischen dem Graphen von g und der x-Achse auf dem Intervall $[0, x]$, welche den Wert der Fläche in Abhängigkeit von x angibt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen g und G?

Übung 25 (hoch 3)**.** Finde die Flächenformel H für den Wert der Fläche zwischen dem Graphen $h(x) = x^3$ und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$. H hängt natürlich von a und b ab: $H(a, b)$.



Bemerkung. Wir vermuten, dass für die Fläche unter $f(x) = x^n$ zwischen a und b gilt:

$$F = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

B. Existenz bestimmter Integrale

Die Anwendung der Definition bestimmter Integrale ist im allgemeinen schwierig. Es gilt aber der folgende

Satz 2.1

Jede über $[a, b]$ stetige Funktion f ist über diesem Intervall auch integrierbar.

Bemerkung. Zwischen Differenzierbarkeit, Stetigkeit und Integrierbarkeit besteht folgender Zusammenhang:

- Jede differenzierbare Funktion ist stetig, und jede stetige Funktion ist integrierbar.
- Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind.
- Es gibt integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind.
- Es gibt Funktionen, die nicht integrierbar sind.

Übung 26 (Spezialfälle)**.** Finde charakteristische Beispiele zu den Aussagen aus obiger Bemerkung.

C. Partielle Integration

Wenn man sich mit komplexeren Funktionen konfrontiert sieht, insbesondere mit Produkten, dann kann folgendes Hilfsmittel zur Bestimmung des Integrals nützlich sein.

Satz 3.1: Partielle Integration

Sind f und g „an der Stelle x differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

Beweis. Für einen Beweis beachte man die Ähnlichkeit zur bereits bewiesenen Produktregel für Ableitungen und argumentiere. □

Beispiel 4. Wir bestimmen via partielle Integration eine Stammfunktion von $h(x) = x\cos(x)$. Setzen wir beispielsweise $\cos(x) = f'(x)$ und $x = g(x)$, dann gilt $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\sin(x) - (-\cos(x)) + c \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + c.\end{aligned}$$

Man kontrolliert durch Ableiten der eben gewonnen Stammfunktion die Korrektheit.

Übung 27 (partiell, and again)**.** Finde eine Stammfunktion von $f(x) = x\sin(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = \sin^3(x)$.

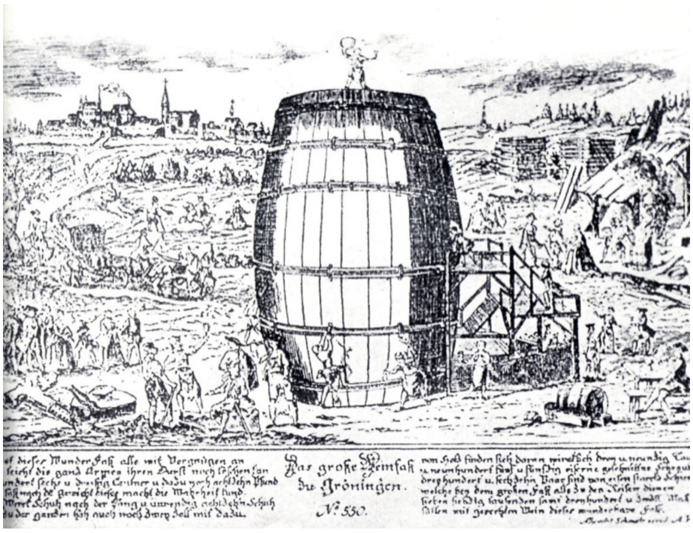


Abbildung 6: Weinfass Halberstadt

D. Kepler'sche Fassregel

Die Keplersche Fassregel ist die einfachste, aber dennoch brauchbare Resultate liefernde Regel für die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals. Johannes Kepler erzählt in seinem Buch „Neue Stereometrie der Weinfässer“:

> Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Weinlese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4. Tag der Verkäufer mit der Messrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalt nach bestimmte.... Ich bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Fass mit etwas breitem Boden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermählter nicht unzweckmässig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen.“

Die Keplersche Fassregel erweist sich als Spezialfall der Simpsonregel für $n = 2$. Man

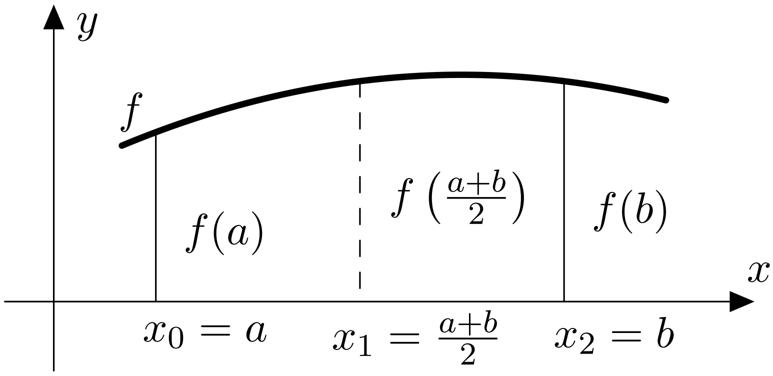


Abbildung 7: Keplersche Fassregel

erhält so mit Hilfe geometrischer Überlegungen (vgl. auch Abbildung 7 auf Seite 23)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx K = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Bemerkung. Für ganzrationale Funktionen von höchstens 3. Grad gibt K sogar den exakten Wert an.

Übung 28 (Rollt das Fass rein!)**.** Wende die Keplersche Fassregel an auf das Integral

(a) $\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Vergleiche die Resultate mit dem exakten Wert.

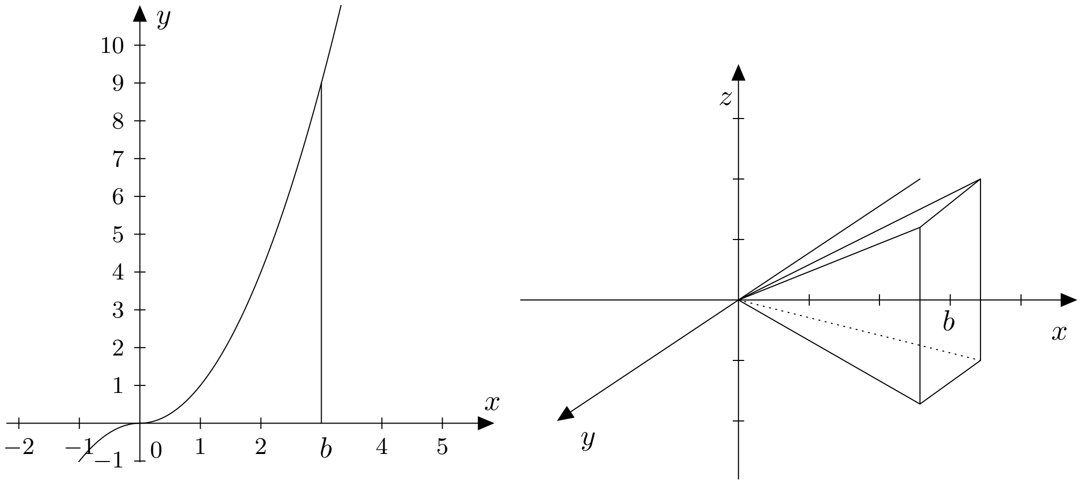


Abbildung 8: Fläche x^2 und Grundfläche Pyramide

E. Volumenberechnung

E.1. Volumen als Grenzwert

Betrachtet man das Integral

$$\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x,$$

und dazu Abbildung 8, so kann der Wert des Integrals unmittelbar als Masszahl für einen Flächeninhalt interpretiert werden. Schraffiere ihn.

Betrachtet man aber dasselbe Integral zusammen mit der zweiten Figur, so identifiziert man den Integranden x^2 mit dem Flächeninhalt eines Quadrates der Seitenlänge $|x|$, also als vertikalen Querschnitt einer quadratischen Pyramide an der Stelle x. Der Wert des Integrals erscheint jetzt als Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Grundseite b und der Höhe b.

Diese anschauliche Idee kann verallgemeinert werden, um das Volumen eines Körpers zu berechnen, der im xyz-Koordinatensystem zwischen den parallelen Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt. Für jedes $x \in [a, b]$ sei die zugehörige Querschnittsfläche $Q(x)$ bekannt und die damit gebildete Funktion $Q : x \mapsto Q(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig. Mit dieser Funktion Q als Integrand lässt sich das Volumen V des Körpers berechnen:

$$V = \int_a^b Q(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Offensichtlich ist $V(a) = 0$ und $V(b)$ der gesuchte Wert für das Volumen des

Körpers. Analog zu der Berechnung eines Flächeninhaltes werden wir im folgenden zeigen, dass auch zwischen den Funktionen V und Q ein wichtiger Zusammenhang besteht:

$$V'(x) = Q(x).$$

Das Volumen einer Scheibe lässt sich durch

$$V(x+h) - V(x)$$

angeben.

Im Intervall $[x, x+h]$ wird die Querschnittsfunktion Q wegen ihrer Stetigkeit ein Minimum Q_{min} und ein Maximum Q_{max} annehmen. Auf diesen beiden Querschnittsflächen denkt man sich zwei Zylinder mit der Länge (Höhe) h, so dass sicher gilt:

$$Q_{min} \cdot h \leq V(x+h) - V(x) \leq Q_{max} \cdot h$$

und nach Division durch h

$$Q_{min} \leq \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leq Q_{max}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von Q ist

$$\lim_{h \to 0} Q_{min} = \lim_{h \to 0} Q_{max} = Q(x).$$

Demnach existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$$

und sein Wert stimmt mit $Q(x)$ überein. Mit anderen Worten: $V'(x) = Q(x)$, die Funktion V ist eine Stammfunktion von Q. Schliesslich gilt wegen $V(a) = 0$ für das gesuchte Volumen

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = V(x)|_a^b = \int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Übung 29 (Zylinder)**.** Ein Zylinder (Grundkreisradius r, Höhe h) liegt so im Koordinatensystem, dass die x-Achse zu seiner Mittelachse wird. Ermittle die Querschnittsfunktion $Q(x)$ und bestätige dann die Zylinderformel aus der Stereometrie.

Übung 30 (Kugel)**.** Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r. Zeige, dass $Q(x) = \pi(r^2 - x^2)$ und bestätige dann die Formel aus der Stereometrie.

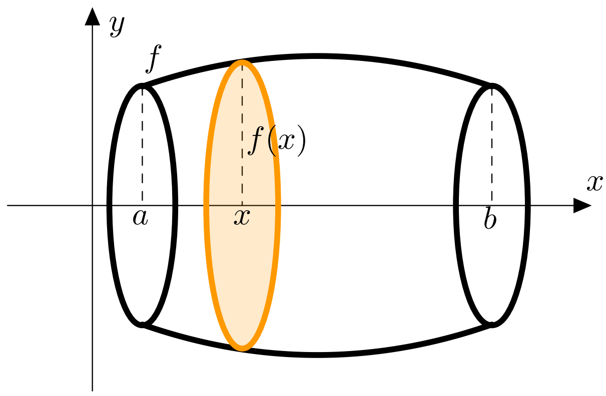


Abbildung 9: Rotationsvolumen

E.2. Rotationsvolumen

Der Graph einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ rotiere um die x-Achse. Die Querschnittsfläche an der Stelle x des so entstehenden Rotationskörpers ist inhaltsgleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius $f(x)$:

$$Q(x) = \pi \left[f(x)\right]^2 .$$

Für das Volumen des Rotationskörpers gilt demnach:

$$V(x) = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Übung 31 (checkmate!)**.** Berechne das Volumen

(a) eines senkrechten Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h,

(b) eines Kegelstumpfes mit den Radien R und r und der Höhe h,

(c) einer Kugel mit dem Radius r,

(d) eines Kugelsegmentes mit dem Kugelradius R und der Höhe h.

Übung 32 (hyperbolisch)**.** Zeichne in einem Koordinatensystem die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$. Die durch die x-Achse, die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$, $b > 1$ und die Hyperbel begrenzte Fläche rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen $V(b)$ des Rotationskörpers. Gegen welchen Wert strebt $V(b)$ für $b \to \infty$? Beachte, dass dieser „Grenzkörper“ eine unendlich grosse Oberfläche hat.

Übung 33 (in vinos veritas)**.** Ein Fass wird sehr gut durch ein zwischen zwei Grenzen um die x-Achse rotierendes Parabelstück beschrieben. Dabei hat die Parabel die Gleichung $y = -ax^2 + b$. Ein Fass hat die Länge (Höhe) 1 m; der Durchmesser der Boden- bzw. Deckfläche beträgt 60 cm und sein grösster Durchmesser 80 cm. Berechne den Rauminhalt des Fasses.

Übung 34 (Tropf)**.** Der Die Randfunktion eines Stromlinienkörpers wird durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4}(4-x)\sqrt{x}.$$

zwischen $x = 0$ und $x = 4$ erfasst. Skizziere den Körper, berechne seinen grössten Durchmesser und sein Volumen.

Übung 35 (Träne)**.**

(a) Durch Drehung der Sinuskurve $y = \sin x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ um die x-Achse entsteht ein spindeIförmiger Körper, dessen Volumen zu berechnen ist.

(b) Der Graph der Funktion

$$f(x) = 1 + \sin(x) \quad (0 < x < \frac{3\pi}{2})$$

schliesst mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, das um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen dieser „Zwiebelhaube“.

Abbildungsverzeichnis