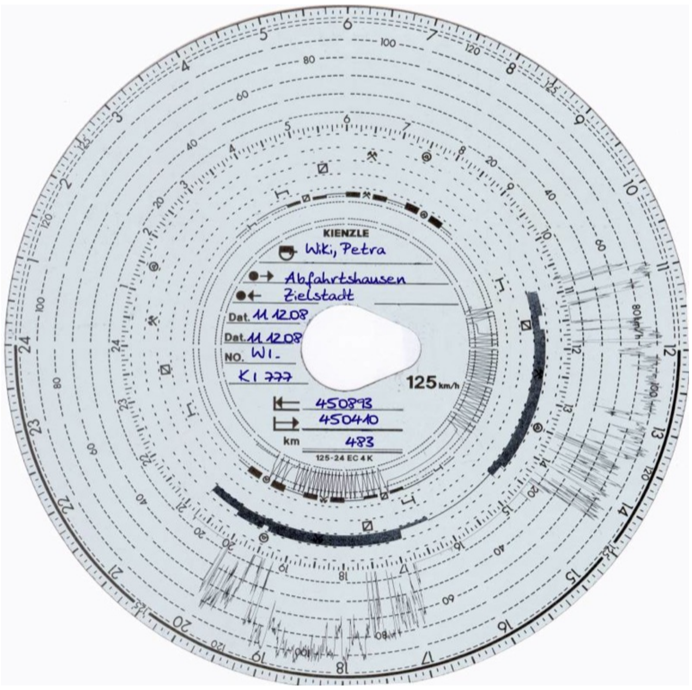


Integralrechnung

Differenzialrechnung abrunden

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Bei der Diskussion von Funktionen war die Ableitung ein wichtiger Begriff. Mit ihrer Hilfe kann man bekanntlich die momentane Änderungsrate einer Grösse,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

bestimmen. Im Folgenden wird nun umgekehrt diskutiert, wie man von der momentanen Änderungsrate einer Grösse auf die Gesamtänderung der Grösse schliessen kann. Wie wir später sehen werden, stellte es sich heraus, dass die Gesamtänderung einer Grösse als Flächeninhalt unter einer Kurve interpretiert werden kann.

Newton und Leibniz, die beiden Entdecker der Differentialrechnung trieben auch die hier vorgestellte Integralrechnung voran. Die symbolische Schreibweise $\int$ geht auf Leibniz zurück, wobei dieses Zeichen an das Wort Summe (lat. *ſumma*, „ſ" steht für ein langes s) erinnern soll. Wie wir sehen werden, geht es nämlich in der Integralrechnung darum, infinitesimal kleine Flächenstücke aufzusummieren. Die Notation $f(x)\,\mathrm{d}x$ bedeutet die Fläche einer „Säule" mit Höhe $f(x)$ und infinitesimal kleiner Breite $\mathrm{d}x$.

Übung 1.1.

Notiere für die gleichmässig beschleunigte Bewegung (a = konst) die Funktionsgleichungen für

a) die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit der Zeit.

b) die Geschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit der Zeit.

c) die Beschleunigung $a(t)$ in Abhängigkeit der Zeit.

und skizziere die Funktionen. Erkläre anschliessend den Zusammenhang zwischen $s(t)$, $v(t)$, und $a(t)$ und bestimme beim v-t- und a-t-Diagramm den Flächeninhalt zwischen dem entsprechenden Graphen und der x-Achse. Betrachte dazu das Zeitintervall $t \in [0, 2]$ und setze $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$.

1.1. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 1.1

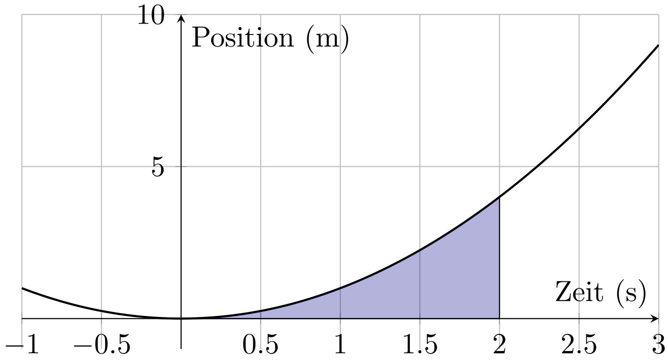
a) $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$

b) $v(t) = at + s_0$

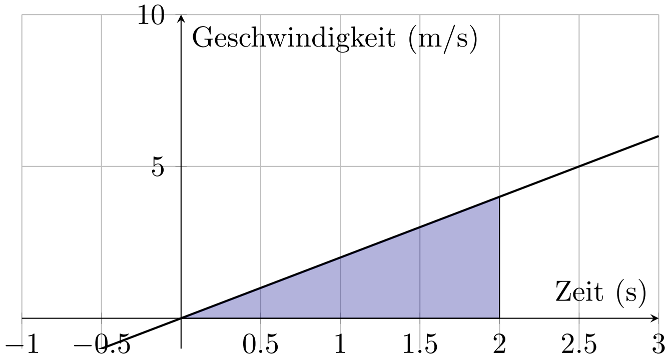
c) $a(t) = a$

Der Graph von $a(t)$ ist konstant und die beiden andern sehen so aus:

s-t Diagramm



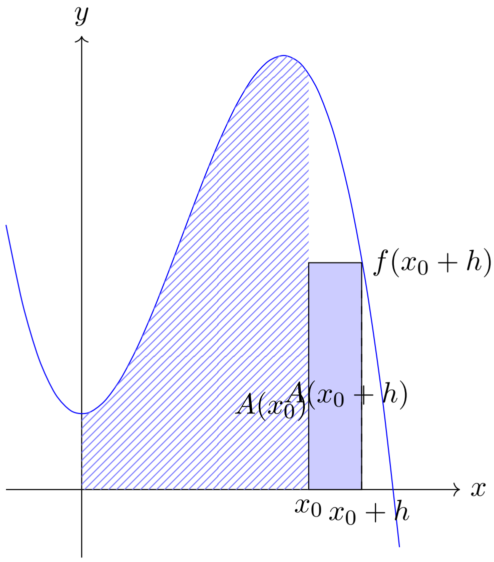
v-t Diagramm



Für $a = 2$ über dem Intervall $[0, 2]$ beträgt die Rechtecksfläche 4. Bei der Geschwindigkeit hat man $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

2. Stammfunktionen

Betrachten wir die Fläche $A(x_0)$ unter einer stetigen Funktion f über einen Intervall $[0, x_0]$, die wir uns wie folgt vorstellen:



Wir approximieren $A(x_0+h)$ für kleine h, indem wir, unter in Kauf nehmen eines Fehlers, zu $A(x_0)$ eine schmale Säule $h \cdot f(x_0 + h)$ addieren:

$$\begin{aligned} A(x_0 + h) &\approx A(x_0) + h \cdot f(x_0 + h) \\ A(x_0 + h) - A(x_0) &\approx h \cdot f(x_0 + h) \\ \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} &\approx f(x_0 + h) && (\lim_{h\to 0}) \\ \lim_{h\to 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) \end{aligned}$$

Links steht die Ableitung der Flächenfunktion, A‘, an der Stelle x_0. Die rechte Seite konvergiert, wegen der Stetigkeit von f, gegen $f(x_0)$. Es ist also für eine variable Obergrenze x:

$$A‘(x) = f(x).$$

Das heisst, die Flächenfunktion abgeleitet ergibt die Randfunktion f.

Definition 2.1: Stammfunktion

def:stammfunktion Gegeben sei eine auf dem Intervall I definierte Funktion f. $S(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$ im Intervall I, wenn $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = f$ für alle $x \in I$.

Bemerkung 2.0.1. Salopp: S ist Stammfunktion von f auf I, wenn S abgeleitet gleich f ist:

$$S'(x) = f(x)$$

Beispiel 2.0.1. Beispiele von Stammfunktionen sind:

a) $S(x) = \frac{x^3}{3}$ zu $f(x) = x^2$.

b) $S(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ zu $f(x) = x^2$.

c) $S(x) = -\cos(x)$ zu $f(x) = \sin(x)$

Übung 2.1.

Was ist eine Stammfunktion für e^x?

Obige Übung zeigt auch, wieso ich in der Definition von *einer* Stammfunktion von f gesprochen habe. Weil nämlich beim Ableiten eine additive Konstante wegfällt, gibt es zu einer Funktion f unendlich viele Stammfunktionen S. Wir formulieren

Satz 2.1

satz:inftystfktn Ist S eine Stammfunktion von f, so gilt für alle weiteren Stammfunktionen $\tilde{S}$ von f:

$$\tilde{S}(x) = S(x) + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Man betrachtet die Funktion H mit dem Funktionsterm $H(x) = F(x) - G(x)$, wobei F und G Stammfunktionen von f sind. Also gilt für die Steigungsfunktion $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ und somit $H(x) = c$, da eine Funktion, deren Graph immer parallel zur x-Achse verläuft, notwendigerweise konstant sein muss. □

Für den Zusammenhang Funktion - Stammfunktion benutzt man ein besonderes Symbol und schreibt:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

(lies: unbestimmtes Integral von $f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$)

Das Symbol $\int \ldots \mathrm{d}x$ steht für die Aufforderung, den Integranden f zu integrieren (integrare, lat. wiederherstellen), also die Stammfunktion von f zu bestimmen. Das $\mathrm{d}x$ gibt an, dass nach der Integrationsvariablen x integriert werden soll, im Sinne von

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t = \int f(u)\ du = \ldots.$$

Also

$$\int x^2 t\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} t + c,$$

hingegen

$$\int x^2 t\ \mathrm{d}t = x^2 \frac{t^2}{2} + c.$$

c bezeichnet man als **Integrationskonstante**.

Übung 2.2.

Ermittle zu f eine Stammfunktion F und benutze die Integralschreibweise. Bestätige dein Ergebnis durch entsprechende Differenziation.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x$

b) $f(x) = 3$

c) $f(t) = t^3 + 3t^2 - 4t + 1$

d) $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt{u}$

e) $v(s) = (1 - s)^3$

f) $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

g) $f(x) = (3x - 2)^4 + \sqrt{5x}$

h) $f(x) = \sin(x) + \cos(\frac{x}{2})$

i) $f(x) = \frac{3}{x}$

j) $f(t) = \mathrm{e}^t$

Übung 2.3.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2} - 5x$ with $F(4) = 25$.

b) $g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ with $G(1) = 3$.

c) $h(t)\cos(t) - \sin(t)$ with $H(\frac{\pi}{4}) = 0$.

d) $k(t) = \mathrm{e}^{3t}$ with $K(\ln 3) = 0$.

Übung 2.4.

Berechne

a) $\int (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{d}x$

b) $\int x^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

c) $\int \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$

d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$

e) $\int x\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{u^2}{4u^3-3}\,\mathrm{d}u$

Übung 2.5.

Bestätige durch Differentiation

a) $\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

b) $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + C$

c) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x(\ln(x) - 1) + C$

d) $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1) + C$

Übung 2.6.

Ein auf ein Riff aufgelaufener Öltanker verliert durch ein Leck Öl. Der Ölteppich breitet sich ungefähr mit der Geschwindigkeit

$$\frac{dR}{\mathrm{d}t} = \frac{8}{\sqrt{t}}, \quad t \geq 1$$

radial aus, wobei $R(t)$ den Radius des kreisförmigen Ölteppichs in Meter nach t Minuten angibt. Nach einer Minute beträgt der Radius bereits 15 Meter. Berechne den Radius nach 49 Minuten.

Nachdem für einige Funktionen bereits die Stammfunktionen konkret gebildet wurden, soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, dass es in diesem Zusammenhang zwei grundsätzliche Fragen gibt:

- Gibt es zu *jeder* Funktion f eine Stammfunktion F, d.h. ist jede Funktion integrierbar?
- Ist gegebenenfalls diese Stammfunktion auch berechenbar, d.h. kann man ihren Funktionsterm *explizit* angeben?

Ohne Beweis wollen wir lediglich zur ersten Frage bemerken: Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist auf entsprechenden Intervall auch integrierbar.

2.1. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 2.6

e^x ist Stammfunktion von sich selbst, da $(e^x)' = e^x$; insbesondere sind $e^x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ alles Stammfunktionen von e^x.

Notizen zu Übung 2.6

Einmal gross zentriert und dann in der inline Darstellung.

a)
$$\int -\frac{1}{2}x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}x^2 + C$$

b) $\int 3 \, \mathrm{d}x = 3x + C$

c) $\int t^3 + 3t^2 - 4t + 1 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + t^3 - 2t^2 + t + C$

d) $\int (\frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt{u}) \, \mathrm{d}u = \int (u^{-\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) \, \mathrm{d}u = u^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

e) $\int (1-s)^3 \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{4}(1-s)^4 + C$

f) $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

g) $\int (\sin(x) + \cos(\frac{x}{2})) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + 2\sin(\frac{x}{2}) + C$

h) $\int \frac{3}{x} \, \mathrm{d} = 3\ln(x) + C$

i) $\int e^t \, \mathrm{d}t = e^t + C$

Notizen zu Übung 2.6

1. $F(x) = -4x^{-1} - 2.5x^2 + C$ und daraus $C = -14$
2. $G(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + C$ und daraus $C = -14$
3. $H(t) = \sin(t) + \cos(t)$ und $C = -\sqrt{2}$
4. $K(t) = \frac{1}{3}e^{3t}$ und $C = -9$

Notizen zu Übung 2.6

a) $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$

b) $x^2 \sin(\varphi) + C$

c) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + C$

d) $\ln(x-3) + C$

e) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1} + C$

f) $\frac{1}{12}\ln(4u^3 - 3) + C$

Notizen zu Übung 2.6

Man sieht durch Differentiation, dass die vorgeschlagenen Stammfunktionen korrekt sind.

Notizen zu Übung 2.6

Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{dR}{\mathrm{d}t} &= \frac{8}{\sqrt{t}} \\ \mathrm{dR} &= \frac{8}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t && (\textstyle\int) \\ R &= 16\sqrt{t} + C \end{aligned}$$

Wegen $R(1) = 15$ ist $C = -1$. Nach 49 Minuten ist $R(49) = 111$.

3. Das bestimmte Integral

3.1. Flächenberechnung als Grenzwertprozess

Die Flächenberechnung, auch Integralrechnung genannt, befasst sich mit der Bestimmung krummlinig begrenzter Ebenenstücke. Dabei müssen die krummlinigen Grenzen als Graphen von Funktionen bekannt sein.

3.2. Definition

Definition 3.1: Bestimmtes Integral

Wenn alle Zwischensummenfolgen des Graphen von f gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, so heisst die Funktion f über $[a, b]$ integrierbar. Der gemeinsame Grenzwert heisst bestimmtes Integral von f über $[a, b]$, und man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a und b heissen Integralgrenzen.

3.3. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 3.1: Hauptsatz der Integral- & Differentialrechnung

Die Integralfunktion jeder stetigen Funktion ist differenzierbar. Ihre Ableitung ist gleich der Integrandfunktion.

Beweis. Eine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, geht vom Differenzenquotienten der Integralfunktion aus:

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h}.$$

Jetzt schreibt man I explizite

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$$

und wendet die Integraladditivität an, wobei l die Höhe des Zwischensummenrechtecks mit Breite h auf dem Intervall $[x, x+h]$ bezeichnet:

$$I'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hl}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} l = f(x),$$

da für $h \to 0$ wegen der Stetigkeit von f l gegen $f(x)$ strebt. □

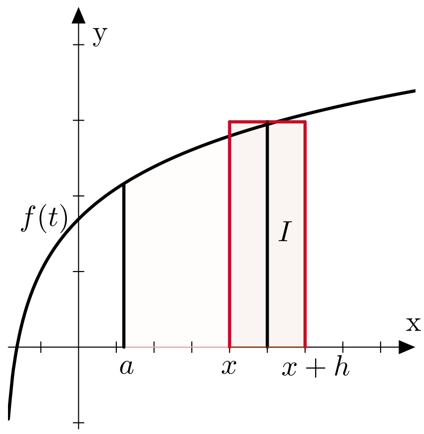


Abbildung 1: Zum Beweis des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung

Satz 3.3 wird in der Literatur oft als Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung bezeichnet.

Wir erhalten praktisch gratis mit obigem Beweis von Satz 3.3 folgenden

Satz 3.2: Flächenberechnung

satz:obenminusunten Ist $S(x)$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S(b) - S(a).$$

Beweis. Man zeigt ganz leicht, dass die additive Konstante wegfällt. □

Bemerkung 3.3.1. Der Satz offenbart uns folgendes Rezept zur Flächenberechnung zwischen einem Graphen mit Funktionsgleichung f und der x-Achse im Intervall $[a, b]$, ohne Grenzwerte beiziehen zu müssen:

1. Man bestimmt eine Stammfunktion S der Integrandfunktion f.
2. Man bestimmt die Werte dieser Stammfunktion für $x = a$ und $x = b$.
3. Die Differenz dieser Werte, $S(b) - S(a)$, ist gleich dem bestimmten Integral.

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S(x)\,|_a^b = S(b) - S(a)$$

Es genügt ein

Beispiel 3.3.1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\,|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -\cos(\frac{\pi}{2}) - (-\cos(0))\\ &= 0 - (-1) = 1\end{aligned}$$

Halten Sie sich bei den Rechnungen an die Schreibweise, die im obigen Beispiel verwendet wird.

Übung 3.1.

Skizziere und berechne den Flächeninhalt unter $f(x) = \cos(x)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$.

Übung 3.2.

Berechne den Flächeninhalt unter $f(x) = x^4$ zwischen 1 und 2.

Übung 3.3.

Achte jeweils darauf, ob der Integrand im Integrationsintervall überhaupt definiert ist, und berechne:

a) $\int_1^4 2\,\mathrm{d}x$

b) $\int_{-3}^8\,\mathrm{d}x$

c) $\int_{-5}^0 (3-u)^2\,\mathrm{d}u$

d) $\int_{0.001}^{0.1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

e) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$

f) $\int_1^9 (2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}})\ \mathrm{d}x$

g) $\int_{-3}^{-1} \frac{1+t}{t^3}\ \mathrm{d}t$

h) $\int_0^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x$

i) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$

j) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+2\cos x}\ \mathrm{d}x$

l) $\int_0^1 \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\ \mathrm{d}x$

Übung 3.4.

Berechne b aus:

a) $\int_0^b t^2\ \mathrm{d}t = 72$

b) $\int_1^b \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{3}{7}$

c) $\int_{\mathrm{e}}^b \frac{\mathrm{d}u}{u} = 1$

3.4. Flächen zwischen zwei Graphen

Wir haben bereits gesehen, dass sich auch krummlinig begrenzte Flächen zwischen zwei Graphen, deren Funktionsgleichungen bekannt sind, leicht berechnet werden können.

Übung 3.5.

Deute das bestimmte Integral als Masszahl eines Flächeninhaltes eines Gebietes, das zu skizzieren ist, und berechne seinen Wert. Überprüfe Dein Ergebnis, falls möglich, mit den aus der Elementarmathematik bekannten Formeln für Rechteck, Dreieck und Tapez.

a) $\int_1^5 3\ \mathrm{d}x$

b) $\int_2^4 3x\ \mathrm{d}x$

c) $\int_a^b ax\ \mathrm{d}x$

Übung 3.6.

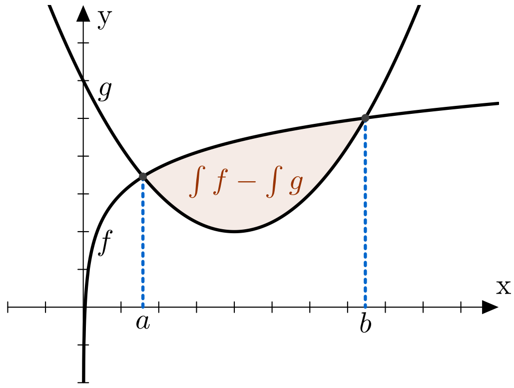


Abbildung 2: Fläche zwischen den Graphen von f und g

Berechne den Wert des Integrals

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x,$$

indem Du das Integral als Masszahl eines bestimmten Flächeninhalts interpretierst.

Übung 3.7.

Veranschauliche dir mit geometrischer Interpretation, dass $\forall x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Übung 3.8.

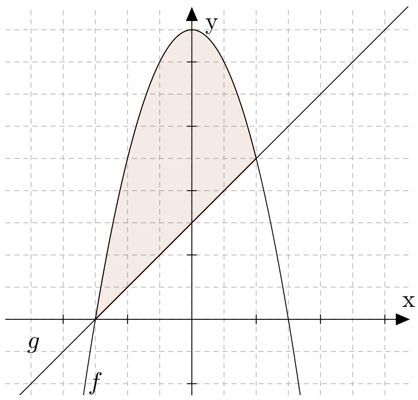
Berechne

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

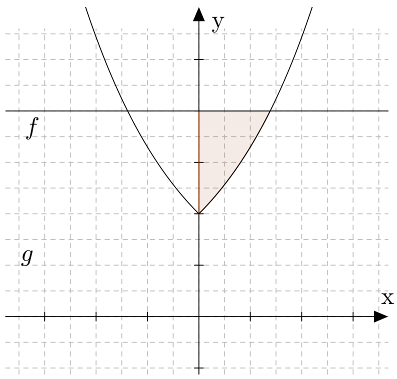
Übung 3.9.

Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche:

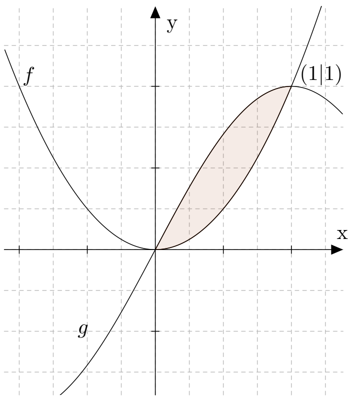
a) $f(x) = 9 - x^2$ und $g(x) = x + 3$



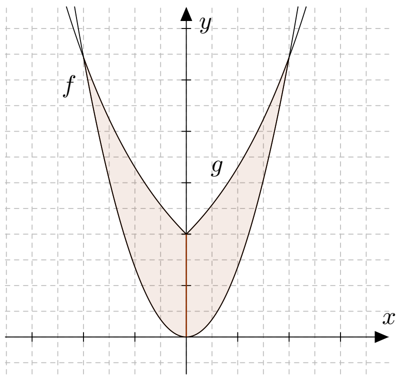
b) $f(x) = 2$ und $g(x) = e^x$



c) $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(ax)$



d) $f(x) = \mathrm{e}x^2$ und $g(x) = \mathrm{e}^x \quad (x \geq 0)$



Übung 3.10.

Für welchen Wert u halbiert die Gerade $x = u$ das Gebiet, das von

a) der Parabel $f(x) = x^2$, der x-Achse und der Geraden $x = 4$,

b) der Sinuskurve, der x-Achse und der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$

begrenzt wird?

Übung 3.11.

Ein wasserführender Stollen hat einen parabolischen Querschnitt mit 4.0 m Sohlenbreite und 3.8 m Scheitelhöhe. Wie viel m^3 Wasser kann der Stollen in einer Sekunde führen, wenn das Wasser höchstens mit einer Geschwindigkeit von 3.5 m/s bis zu $\frac{3}{4}$ der Scheitelhöhe fliessen darf?

3.5. Eigenschaften des bestimmten Integrals

Manchmal liegt das Gebiet, dessen Flächeninhalt zu berechnen ist, nicht oberhalb der x-Achse. Durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse — statt f betrachtet man die Funktion $-f$ — kann aber dieser Umstand behoben werden.

Ergibt sich beim Durchlaufen des Randes der zu bestimmenden Fläche in der Richtung von a nach b auf der x-Achse beginnend ein positiver oder negativer Umlaufsinn, so ist das entsprechende bestimmte Integral positiv bzw. negativ.

Beispiel 3.5.1.

$$\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

beziehungsweise

$$\int_2^0 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{0^3}{3} - \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$$

3.6. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 3.11

Die Skizze erledigt man mit `geogebra.org`. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)|_0^{frac\pi 2} = \sin(frac\pi 2) - \sin(0) = 0$.

Notizen zu Übung 3.11

Es ist $\int_1^2 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5|_1^2 = \frac{31}{5}$.

Notizen zu Übung 3.11

a) 6

b) 11

c) $-\frac{1}{3}(3-u)^3|_{-5}^0 = -\frac{1}{3}(3-0)^3 + \frac{1}{3}(3-(-5))^3 = -9 + \frac{256}{3}$

d) $-x^{-1}|_0.001^0.1 = -10 + 1000 = 990$

e) nicht definiert, da die Funktion in 0 nicht definiert ist.

f) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}}|_1^9 = 22\frac{2}{3}$

g) $-\frac{1}{2}t^{-2} - t^{-1}|_{-3}^{-1} = \frac{2}{9}$

h) $-\cos(x)|_0^\pi = 2$

i) $\ln(x)|_0.5^2 = 2\ln(2)$

j) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}|_0^1 = 0.5(1-\frac{1}{\mathrm{e}})$

k) $-\frac{1}{2}\ln(1+2\cos(x))|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\ln(3)$

l) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

Notizen zu Übung 3.11

a) $F(t) = \frac{1}{3}t^3 + C$, woraus $F(b) - F(0) = 72 = \frac{1}{3}b^3$ folgt. Somit $b = 6$.

b) $F(x) = -\frac{1}{x} + C$, $F(b) - F(1) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow -\frac{1}{b} = -\frac{4}{7}$, also $b = \frac{7}{4}$

c) $F(u) = \ln(u) + C$, $\ln(b) - 1 = 1$ und damit $b = \mathrm{e}^2$.

Notizen zu Übung 3.11

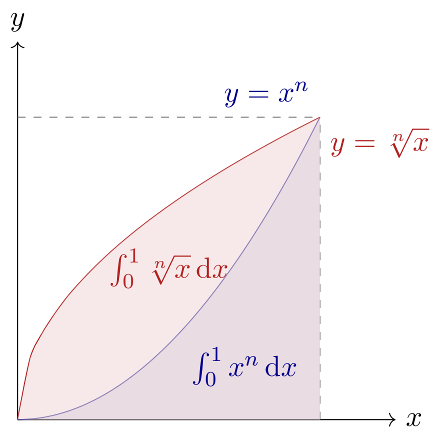
1. Es handelt sich um ein Rechteck mit Breite 3 und Länge 4. $\int_1^5 3\ \mathrm{d}x = 3x|_1^5 = 15 - 3 = 12$.
2. Hier hat man ein Dreieck mit Höhe 12 und Seite 2. $\int_2^4 3x\ \mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2|_2^4 = 24 - 6 = 18$
3. Trapez mit Breite $b - a$. $\int_a^b ax\ \mathrm{d}x = \frac{a}{2}x^2|_a^b = \frac{a^3}{2} - \frac{ab^2}{2} = \frac{a(a^2-b^2)}{2}$

Notizen zu Übung 3.11

Eine Stammfunktion ist schwierig zu finden, aber $y = \sqrt{4^2 - x^2}$ beschreibt Punkte $(x|y)$ auf dem Halbkreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 4, wie man leicht mit dem Satz von Pythogoras einsieht. Also ist $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi 4^2 = 4\pi$.

Notizen zu Übung 3.11

Die beiden Funktionen sind invers zueinander, ihre Graphen also symmetrisch bezüglich der Geraden $w(x) = x$. Ferner schneiden sie sich bei $(0|0)$ und $(1|1)$.



Notizen zu Übung 3.11

$-\cos(x)|_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0$. Die positiven und negativen Flächenanteile heben sich auf.

Notizen zu Übung 3.11

a) Zuerst muss man die Schnittpunkte ausrechnen:

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= x + 3 \\ 0 &= x^2 + x - 6 \\ 0 &= (x-2)(x+3) \end{aligned}$$

also $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$. Wir berechnen $\int_{-3}^{2}(-x^2+9-(x+3))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x|_{-3}^{2} = -\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^2 + 12 - (-\frac{1}{3}(-3)^3 - \frac{1}{2}(-3)^2 - 18) = -\frac{8}{3} - 2 + 12 - 9 + \frac{9}{2} + 18 = 20\frac{5}{6}$.

b) Schnittpunkt $2 = \mathrm{e}^x$, also $x = \ln(2)$. Damit $\int_0^{\ln(2)}(2-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = 1$.

c) Damit $g(1) = 1$ muss $a = \frac{\pi}{2}$. Somit $\int_0^1 (\sin(\frac{\pi}{2}x - x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x) - \frac{1}{3}x^3|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}$

d) Den Schnittpunkt vermuten wir bei $x = 1$ und liegen richtig; die Gleichung ist nicht analytisch lösbar. Wir berechnen also $2\int_0^1(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x^2)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{3}x^3)|_0^1$. Einsetzen und ausrechnen liefert $\frac{2}{3}\mathrm{e} - 1$.

Notizen zu Übung 3.11

a) Die Schnittpunkte sind bei 0 und 4. Die Fläche beträgt $\frac{64}{3}$.

b) $\int_0^{\pi/2}\sin(x)\,\mathrm{d}x = 1 = 2\int_0^u \sin(x)\,\mathrm{d}x$, $\frac{1}{2} = -\cos(u) + \cos(0)$. Also $\cos(u) = \frac{1}{2}$, $u = 60°$.

Notizen zu Übung 3.11

Wir berechnen den Querschnitt $\int_{-2}^{2}(-\frac{19}{20}x^2 + 3.8)\,\mathrm{d}x \approx 15.2$. Wegen den 75% haben wir eine Höhe von 2.95 Meter. $\int_{-1}^{1} -0.95x^2 + 0.95 \approx 1.27$. Damit ist die Querschnittsfläche knapp 14 Quadratmeter und der Durchfluss knapp 50 000 l/s.

4. Das unbestimmte Integral

Zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion gibt es zahlreiche Rechenregeln. Beim Integrieren sind für uns nur wenige Eigenschaften des Integrals von Bedeutung. Nun wird der Begriff des unbestimmten Integrals einer Funktion eingeführt, um die wichtigsten Eigenschaften des Integrals schlank notieren können.

Definition 4.1: Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f heisst unbestimmtes Integral. Man schreibt dafür

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zu einer Funktion f das unbestimmte Integral bilden, heisst die Funktion zu integrieren.

4.1. Eigenschaften des unbestimmten Integrals

Da das Integrieren im Allgemeinen ein schwieriges Unterfangen ist, ist man darauf bedacht, Formeln für häufig verwendete Funktionen bereitzustellen und Eigenschaften des Integrals zu formulieren.

Wir kennen bereits die Stammfunktionen zur Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ und der Sinus- bzw Cosinus-Funktion. Weitere Formeln können in der Formelsammlung nachgeschlagen werden.

Übung 4.1.

Wieso lässt man bei der Formel für die Stammfunktion von $f(x) = x^n$ den Fall $n = -1$ nicht zu?

Folgende Eigenschaft des Integrals kann manchmal nützlich sein.

Satz 4.1: Linearität des Integrals

Sind die Funktionen f und g auf dem Intervall I stetig und sind $a, b, c \in I$ sowie $k \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\int k \cdot (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x + k \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Offensichtlich stammt der Satz von den bereits bewiesenen Regeln — konstanter Faktor und Summenregel — für Ableitungen ab. □

Übung 4.2.

Bestimme die Integrale von $f(x) = 5x^2$ und $g(x) = x^2 - 2x$.

Übung 4.3.

Die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion begrenzen miteinander unendlich viele kongruente Ebenenstücke (siehe Abbildung 3 auf Seite 26). Berechne den Flächeninhalt eines solchen Ebenenstücks.

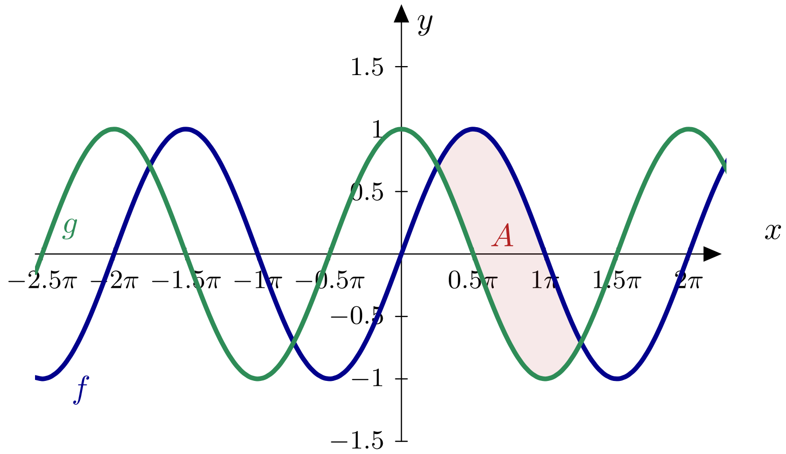


Abbildung 3: Veranschaulichung der Übung

4.2. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung 4.3

Würde man $\frac{1}{x}$ integrieren, so erwartete man x^0, was aber eine Konstante ist und daher abgeleitet 0 ergibt. Aus der Differentialrechung kennen wir $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Notizen zu Übung 4.3

$F(x) = \frac{5}{3}x^3 + C$ und $G(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$.

Notizen zu Übung 4.3

Wir berechnen als Schnittpunkt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \cos(x) \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= 1 \\ \tan(x) &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

und erkennen, dass der nächste Schnittpunkt bei $x = \frac{\pi}{4} + \pi$ liegt:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(x) - \cos(x))\,\mathrm{d}x &= (-\cos(x) - \sin(x))|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

A. Unter-, Ober- und Zwischenwertsummen

Beispiel A.0.1. Berechnen der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall $[0, 1]$. Wir approximieren den gesuchten Flächeninhalt mit n Rechtecken der Breite $\frac{1}{n}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$, welche dem gesuchten Ebenenstück einbeschrieben sind. Wir erhalten nach kurzer Rechnung

$$U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Um eine bessere Näherung zu erhalten, lassen wir n gegen Unendlich streben:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{3}.$$

Das bedeutet, dass der gesuchte Flächeninhalt mindestens ein Drittel beträgt. Nun nähern wir die gesuchte Fläche mit Rechtecken an, in welchen der Graph vollständig enthalten ist:

$$O_n = U_n + \frac{1}{n} \cdot 1.$$

Wiederum lassen wir n gegen Unendlich streben:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}.$$

Das heisst, dass die Fläche höchstens $\frac{1}{3}$ beträgt. Zusammen mit dem ersten Resultat also, dass die gesuchte Fläche exakt $\frac{1}{3}$ beträgt.

U_n nennt man sinnigerweise Untersumme und O_n Obersumme. Hier die Darstellungen von U_5 und O_5 angewendet auf $f(x) = x^2$ im Intervall $[0, 1]$.

Wenn, wie in unserem Beispiel, Ober- und Untersumme für n gegen Unendlich gegen den gleichen Wert konvergieren, dann sagt man:

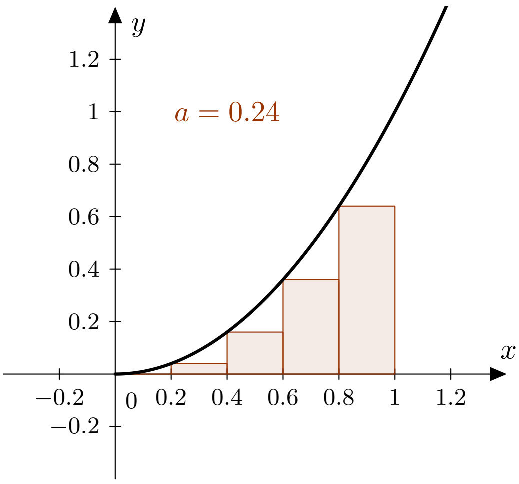
> „Das Integral von $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ existiert und hat den Wert $\frac{1}{3}$“.

Übung A.1.

Berechne die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0, b]$ mit $b \geq 0$. Du darfst annehmen, dass Ober- und Untersumme gegen den gleichen Wert konvergieren.

Übung A.2.

Berechne die Fläche zwischen $f(x) = x^2$ und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}_0^+, a \leq b$.



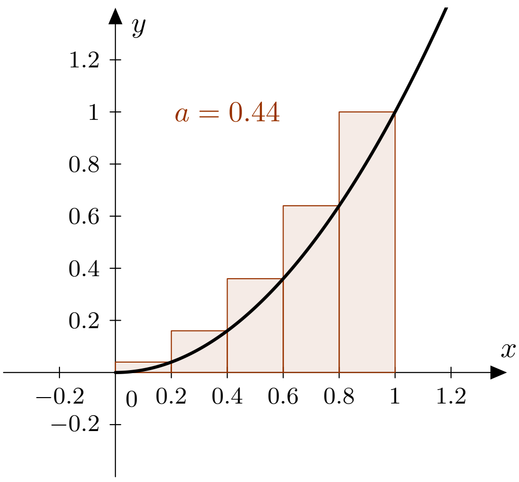


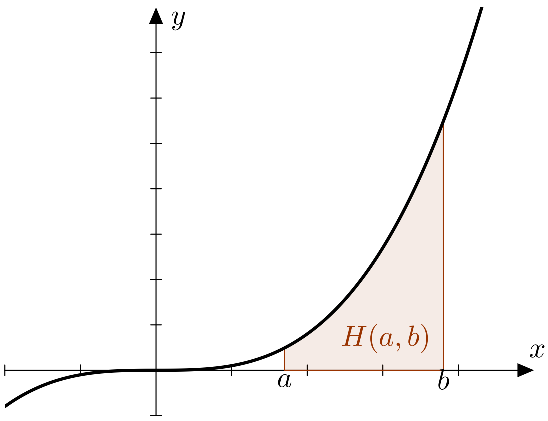
Abbildung 4: Unter- und Obersumme von x^2 über $[0, 1]$ mit Schrittweite 0.2

Übung A.3.

Zeichne den Graphen von $g(x) = x$. Berechne die Flächenfunktion $G(x)$ zwischen dem Graphen von g und der x-Achse auf dem Intervall $[0, x]$, welche den Wert der Fläche in Abhängigkeit von x angibt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen g und G?

Übung A.4.

Finde die Flächenformel H für den Wert der Fläche zwischen dem Graphen $h(x) = x^3$ und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$. H hängt natürlich von a und b ab: $H(a, b)$.



A.1. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung A.4

Die Untersumme ist

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^{n-1} \\ &= \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \\ &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

und konvergiert gegen $\frac{b^3}{3}$, da im Zähler der dominante Term $2n^3$ sich mit $6n^3$ im Nenner misst.

Notizen zu Übung A.4

Von der Fläche von 0 bis b ziehen wir die Fläche von 0 bis a ab: $F(b) - F(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

Notizen zu Übung A.4

An der Stelle x haben wir eine Dreiecksfläche $G(x) = x \cdot g(x) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2$. Es ist $G'(x) = g(x)$.

Notizen zu Übung A.4

Man findet Säulen vom Typ $\Delta x \cdot f((i-1)\Delta x) = \left(\frac{x}{n}\right)^4 (1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4) = \left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{4}(n-1)^2 \cdot n^2$. Das führt im Limit zu $H(x) = \frac{x^4}{4}$.

B. Existenz bestimmter Integrale

Es gilt der folgende

Satz 2.1

satz:integrierbar Jede über $[a, b]$ stetige Funktion f ist über diesem Intervall auch integrierbar.

Bemerkung B.0.1. Zwischen Differenzierbarkeit, Stetigkeit und Integrierbarkeit besteht folgender Zusammenhang:

- Jede differenzierbare Funktion ist stetig, und jede stetige Funktion ist integrierbar.
- Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind.
- Es gibt integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind.
- Es gibt Funktionen, die nicht integrierbar sind.

Übung B.1.

Finde charakteristische Beispiele zu den Aussagen aus obiger Bemerkung.

Notizen zu Übung B.1

Die Funktion $|x|$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen $(-1 \neq 1)$.

Die Funktion $\lfloor x \rfloor$ ist integrierbar aber nicht stetig an den Sprungstellen.

Die sogenannte Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgends stetig und nicht (Riemann-)integrierbar.

C. Partielle Integration

Wenn man sich mit komplexeren Funktionen bzw. Integranden konfrontiert sieht — insbesondere mit Produkten — dann kann folgendes Hilfsmittel zur Bestimmung des Integrals nützlich sein.

Satz 3.1: Partielle Integration

satz:partint Sind f und g „an der Stelle x differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$$

Beweis. Für einen Beweis beachte man die Ähnlichkeit zur bereits bewiesenen Produktregel für Ableitungen. □

Beispiel C.0.1. Wir bestimmen via partielle Integration eine Stammfunktion von $h(x) = x\cos(x)$. Setzen wir beispielsweise $\cos(x) = f'(x)$ und $x = g(x)$, dann gilt $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\sin(x) - (-\cos(x)) + c \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + c. \end{aligned}$$

Man kontrolliert durch Ableiten der eben gewonnen Stammfunktion die Korrektheit.

Übung C.1.

Finde eine Stammfunktion von $f(x) = x\sin(x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ und $h(x) = \sin^3(x)$.

Notizen zu Übung C.1

a) $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) - \int(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

b) $\int \sin(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\cos(x) + \int(\cos(x))^2\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\cos(x) + \int(1 - \sin^2(x))\,\mathrm{d}x$. Also $2\int \sin(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x = x - \sin(x)\cos(x) + C$, das man für das gesuchte Integral halbieren kann.

c) Ähnlich wie vorher kommt man schliesslich auf $\int \sin^3(x) = -\frac{1}{3}(\sin^2(x)\cos(x) + 2\cos(x)) + C$.

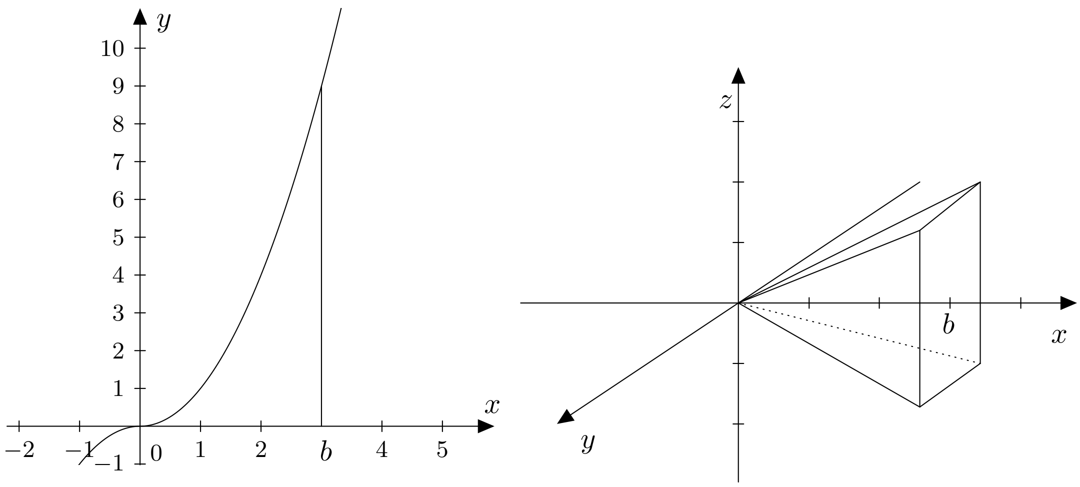


Abbildung 5: Fläche x^2 und Grundfläche Pyramide

D. Volumenberechnung

D.1. Volumen als Grenzwert

Betrachtet man das Integral

$$\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x,$$

und dazu Abbildung 5, so kann der Wert des Integrals unmittelbar als Masszahl für einen Flächeninhalt interpretiert werden.

Betrachtet man aber dasselbe Integral zusammen mit der zweiten Figur, so identifiziert man den Integranden x^2 mit dem Flächeninhalt eines Quadrates der Seitenlänge $|x|$, also als vertikalen Querschnitt einer quadratischen Pyramide an der Stelle x. Der Wert des Integrals erscheint jetzt als Volumen einer quadratischen Pyramide mit der Grundseite b und der Höhe b.

Diese anschauliche Idee kann verallgemeinert werden, um das Volumen eines Körpers zu berechnen, der im xyz-Koordinatensystem zwischen den parallelen Ebenen $x = a$ und $x = b$ liegt. Für jedes $x \in [a, b]$ sei die zugehörige Querschnittsfläche $Q(x)$ bekannt und die damit gebildete Funktion $Q : x \mapsto Q(x)$ im Intervall $[a, b]$ stetig. Mit dieser Funktion Q als Integrand lässt sich das Volumen V des Körpers berechnen:

$$V = \int_a^b Q(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Offensichtlich ist $V(a) = 0$ und $V(b)$ der gesuchte Wert für das Volumen des

Körpers. Analog zu der Berechnung eines Flächeninhaltes werden wir im folgenden zeigen, dass auch zwischen den Funktionen V und Q ein wichtiger Zusammenhang besteht:

$$V'(x) = Q(x).$$

Das Volumen einer Scheibe lässt sich durch

$$V(x+h) - V(x)$$

angeben.

Im Intervall $[x, x+h]$ wird die Querschnittsfunktion Q wegen ihrer Stetigkeit ein Minimum Q_{min} und ein Maximum Q_{max} annehmen. Auf diesen beiden Querschnittsflächen denkt man sich zwei Zylinder mit der Länge (Höhe) h, so dass sicher gilt:

$$Q_{min} \cdot h \leq V(x+h) - V(x) \leq Q_{max} \cdot h$$

und nach Division durch h

$$Q_{min} \leq \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leq Q_{max}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von Q ist

$$\lim_{h \to 0} Q_{min} = \lim_{h \to 0} Q_{max} = Q(x).$$

Demnach existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$$

und sein Wert stimmt mit $Q(x)$ überein. Mit anderen Worten: $V'(x) = Q(x)$, die Funktion V ist eine Stammfunktion von Q. Schliesslich gilt wegen $V(a) = 0$ für das gesuchte Volumen

$$V = V(b) = V(b) - V(a) = V(x)|_a^b = \int_a^b Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Übung D.1.

Ein Zylinder (Grundkreisradius r, Höhe h) liegt so im Koordinatensystem, dass die x-Achse zu seiner Mittelachse wird. Ermittle die Querschnittsfunktion $Q(x)$ und bestätige dann die Zylinderformel aus der Stereometrie.

Übung D.2.

Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius r. Zeige, dass $Q(x) = \pi(r^2 - x^2)$ und bestätige dann die Formel aus der Stereometrie.

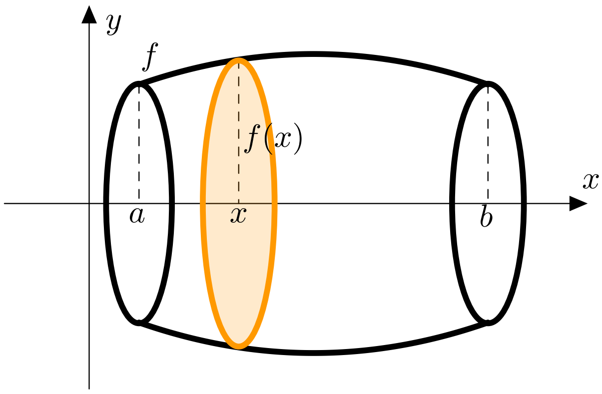


Abbildung 6: Rotationsvolumen

D.2. Rotationsvolumen

Der Graph einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ rotiere um die x-Achse. Die Querschnittsfläche an der Stelle x des so entstehenden Rotationskörpers ist inhaltsgleich der Fläche eines Kreises mit dem Radius $f(x)$:

$$Q(x) = \pi \, [f(x)]^2 \, .$$

Für das Volumen des Rotationskörpers gilt demnach:

$$V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

Übung D.3.

Berechne das Volumen

a) eines senkrechten Kreiskegels mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h,

b) eines Kegelstumpfes mit den Radien R und r und der Höhe h,

c) einer Kugel mit dem Radius r,

d) eines Kugelsegmentes mit dem Kugelradius R und der Höhe h.

Übung D.4.

Zeichne in einem Koordinatensystem die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$. Die durch die x-Achse, die Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = b$, $b > 1$ und die

Hyperbel begrenzte Fläche rotiere um die x-Achse. Berechne das Volumen $V(b)$ des Rotationskörpers. Gegen welchen Wert strebt $V(b)$ für $b \to \infty$? Beachte, dass dieser „Grenzkörper“ eine unendlich grosse Oberfläche hat.

Übung D.5.

Ein Fass wird sehr gut durch ein zwischen zwei Grenzen um die x-Achse rotierendes Parabelstück beschrieben. Dabei hat die Parabel die Gleichung $y = -ax^2 + b$. Ein Fass hat die Länge (Höhe) 1 m; der Durchmesser der Boden- bzw. Deckfläche beträgt 60 cm und sein grösster Durchmesser 80 cm. Berechne den Rauminhalt des Fasses.

Übung D.6.

Der Die Randfunktion eines Stromlinienkörpers wird durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4}(4 - x)\sqrt{x}.$$

zwischen $x = 0$ und $x = 4$ erfasst. Skizziere den Körper, berechne seinen grössten Durchmesser und sein Volumen.

Übung D.7.

a) Durch Drehung der Sinuskurve $y = \sin x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ um die x-Achse entsteht ein spindelförmiger Körper, dessen Volumen zu berechnen ist.

b) Der Graph der Funktion

$$f(x) = 1 + \sin(x) \quad (0 < x < \frac{3\pi}{2})$$

schliesst mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein, das um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen dieser „Zwiebelhaube“.

D.3. Notizen zu den Übungen

Notizen zu Übung D.7

Der Kegelrand ist eine Gerade mit Steigung $\frac{r}{h}$, also der Radius an der Stelle x ist $r_x = \frac{r}{h}x$ und $Q(x) = \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2$.

$$\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{h\pi}{3r}\left(\frac{r}{h}x\right)^3 |_0^h = \frac{h\pi}{3r}\left(\frac{r}{h}\cdot h\right)^3 - 0 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Notizen zu Übung D.7

Seien $-r \leq x \leq r$ und $y \geq 0$. Alle Punkte $P(x|y)$ auf dem Kreisrand haben die Distanz r. Daher gilt $r = \sqrt{x^2+y^2}$, woraus $y = f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ folgt. Für eine Kugelscheibe an der Stelle x ist $Q(x) = \pi(\sqrt{r^2-x^2})^2 = \pi(r^2-x^2)$. Statt von $-r$ bis r integrieren wir von 0 bis r und verdoppeln:

$$2\int_0^r \pi(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x = 2(-\frac{\pi}{3}x^3 + \pi r^2 x)|_0^r = -2\frac{\pi}{3}r^3 + 2\pi r^2 r - 0 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Notizen zu Übung D.7

a) $V_{rot} = \pi\int_0^h [\frac{r}{h}x]^2\,\mathrm{d}x = \pi(\frac{h}{r}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{r}{h}x\right)^3|_0^h = \frac{\pi}{3}r^2h.$

b) $V = \pi\left(\frac{(r-R)^2}{3}h + Rrh\right)$

c) $\frac{4}{3}\pi r^3$

d) $2\pi\left(\frac{2}{3}R^3 - R^2h + \frac{1}{3}h^3\right)$

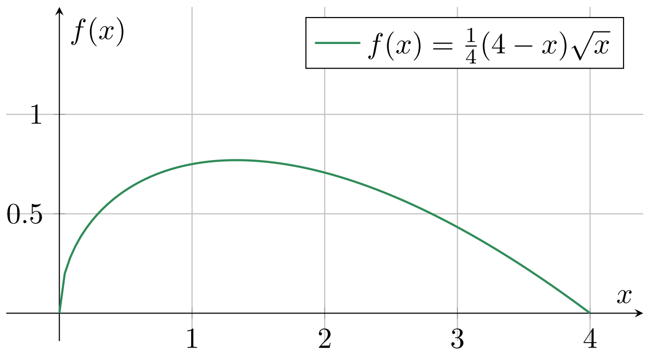
Notizen zu Übung D.7

$V = \pi\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi(1-\frac{1}{b})$, was gegen π strebt, wenn b gross wird.

Notizen zu Übung D.7

Die Randfunktion bestimmen wir zu $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$. Daraus folgt $V = 0.122\pi \approx 383\,\mathrm{l}$.

Notizen zu Übung D.7



Den Extremwert von f finden wir durch Ableiten und 0 setzen:

$$f'(x) = \frac{1}{4}(-\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - rac\sqrt{x}2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus folgt $x = \frac{4}{3}$ und für den Durchmesser $D = 2f(\frac{4}{3}) \approx 1.5$.

Das Volumen ist $V \approx 4.19$.

Notizen zu Übung D.7

a) $V = \frac{\pi^2}{2}$

b) $V = 2\pi + \frac{9\pi^2}{4}$.

Abbildungsverzeichnis