Maturitätsprüfung 2015
Angewandte Mathematik
Klassen 15b&i/WaJ
Zeit: 3 Stunden

- **Der Lösungsweg muss ersichtlich sein. Alle Ausrechungen gehören auf das Lösungsblatt. Jede Aufgabe ist auf einer neuen Seite zu beginnen.**
- **Zugelassene Hilfsmittel sind das ausgehändigte Formelbuch *Formeln, Tabellen und Begriffe* sowie ein Taschenrechner (TI 82/83).**
- **Für die Note 6 werden 69 Punkte verlangt.**

Aufgabe 1 *((Bienen und Mandelbäume, 16 Punkte: a)9, b)7))*

Betrachte ein Differentialgleichungssystem einer Symbiose (z.B. Bienen und Mandelbäume), bei dem die Funktionen für die jeweiligen Populationsgrössen x und y zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$ folgende Differentialgleichungen erfüllen:

$$x'(t) = 0.6x(t) + 0.4y(t)$$
$$y'(t) = 0.2y(t) + 0.8x(t)$$

(a) Bestimme die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

(b) Wie lauten die Lösungsfunktionen, wenn zu Beginn ein Bienenvolk mit 40 000 Individuen zu einem Mandelhain mit 10 000 Bumen gebracht wird? Kommentiere das Langzeitverhalten des Systems.

Aufgabe 2 *((Epidemie, 14 Punkte: a)5, b)9))*

Eine einfache Modellierung einer Epidemie führe auf die Differentialgleichung

$$\frac{dK}{dG} = -1 + \frac{p}{rG}$$

wobei K für die Anzahl „Erkrankte“ und G für die Anzahl „Gesunde“ steht.

(a) Leite obige Differentialgleichung aus folgenden Annahmen her:

- Die Zahl derer, die infiziert werden, ist proportional (Proportionalitätskonstante r) zum Produkt der Gesunden G und Kranken K.
- Aus der Klasse der Kranken gehen mit einem konstanten Faktor — nennen wir ihn p — Individuen in die Klasse der Immunen I über.
- Die Population ist konstant.

Hinweis: Notiere zuerst Gleichungen für $\frac{dK}{dt}$ und $\frac{dG}{dt}$.

(b) Löse obige Differentialgleichung mit den Startwerten G_0 und K_0 nach K. Diskutiere anschliessend das Langzeitverhalten für K. Gibt es einen kritischen Wert, bei dem die Epidemie „stagniert“? In andern Worten: Gibt es einen Wert, ab dem die Zahl der Kranken stetig abnimmt?

Aufgabe 3 *((RSA, 15 Punkte: a)1, b)8, c)6))*

In dieser Aufgabe soll das Verschlsselungsverfahren RSA behandelt werden.

(a) Für was stehen die Buchstaben RSA?

(b) Erkläre die Funktionsweise von RSA mit public key (n, e) und private key d. Kommentiere insbesondere die Wahl bzw. Berechnung von n, e und d. Wieso gilt RSA als sicher? Zeige schliesslich allgemein, dass RSA korrekt arbeitet. Dabei darfst du den kleinen Satz von Fermat als bekannt voraussetzen.

(c) Bestimme mit den Primzahlen 13 und 19 den public key und den private key und verschlüssle anschliessend $\mathtt{C} = 3$. Wähle dazu $e = 17$.

Aufgabe 4 *((Ursprungsaffinitäten, 19 Punkte: a)4, b)3, c)3, d)2, e)7))*

Betrachte im $\mathbb{R}^2$ die Matrizen der affinen Ursprungsabbildungen

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \delta : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Beschreibe die Abbildungen σ und δ geometrisch.

(b) Bestimme die Abbildungsmatrix der Verkettung $\sigma \circ \delta$.

(c) Bestimme die Umkehrabbildung von δ und damit das Urbild von $P'(1\,|\,1)$.

(d) In welchen Verhältnissen stehen jeweils Flächeninhalte zu ihren Bildflächeninhalten unter der Abbildung σ?

(e) Bestimme alle Fixpunkte und Fixgeraden von σ.