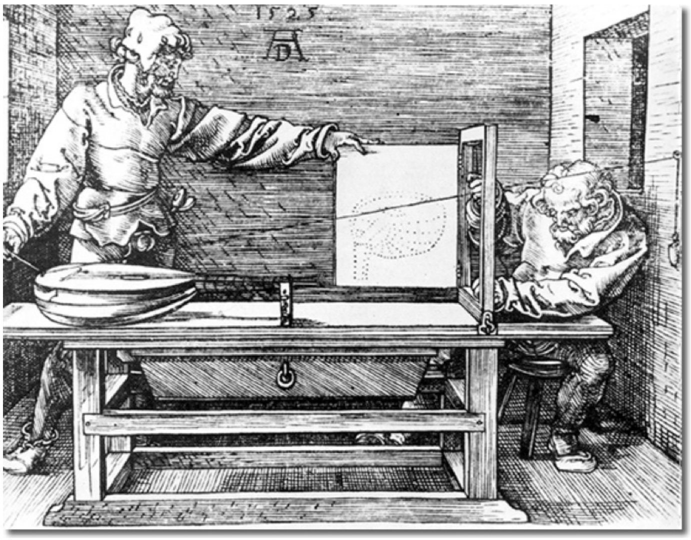


Stereometrie

3D

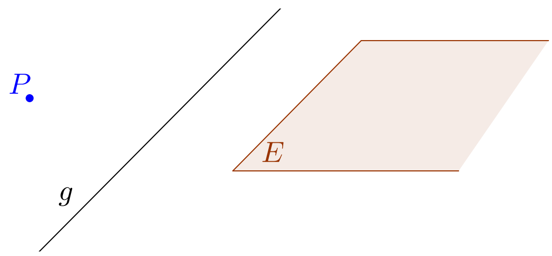
Inhaltsverzeichnis

1 Räumliche Geometrie

1.1 Die Raumelemente

Bemerkung. Färben Sie in den folgenden Figuren und Ihren Skizzen, soweit sinnvoll, die Geraden und Ebenen jeweils mit verschiedenen Farben.

1.1.1 Punkt, Gerade, Ebene



Eine Gerade ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt. Man schreibt etwa $g = (A, B)$ für diejenige Gerade, welche durch die Punkte A und B geht.

Übung 1.

(a) Von den Punkten A, B, C, D liegen die ersten drei auf einer Geraden. Wie viele Geraden sind durch diese Punkte bestimmt?

(b) Wie viele Geraden sind durch die Eckpunkte eines Würfels bestimmt?

(c) Wie viele Geraden sind durch n Punkte in allgemeiner Lage bestimmt?

Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch:

- drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen (drei nicht kollineare Punkte)
- eine Gerade und ein Punkte, der nicht auf ihr liegt
- zwei sich schneidende Geraden
- zwei parallele Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben

Übung 2.

(a) Von 6 Punkten liegen genau 5 in einer Ebene. Wie viele Ebenen sind durch diese 6 Punkte bestimmt?

(b) Wie viele Ebenen sind durch die 8 Eckpunkte eines Würfels bestimmt? Wie viele dieser Ebenen enthalten genau 4, wie viele genau 3 Eckpunkte?

(c) Wie viele Ebenen sind durch n Punkte in allgemeiner Lage bestimmt?

(d) Wie viele Ebenen sind durch n parallele Geraden im Raum im allgemeinen bestimmt?

Übung 3. Gegeben ist ein Punkt P auf einer Geraden g im Raum. Ist die zu g senkrechte Gerade durch P eindeutig bestimmt?

1.1.2 Gerade und Gerade

Für die gegenseitige Lage zweier Geraden g und h im Raum sind vier Fälle zu unterscheiden:

- g und h haben keinen Punkt gemeinsam, und es gibt eine Ebene, in der sie beide enthalten sind; g und h sind parallel, $g \cap h = \emptyset$.
- g und h haben alle Punkte gemeinsam, d.h., sie sind identisch, $g = h$.
- g und h haben genau einen Punkt gemeinsam, d.h., g und h schneiden sich, $g \cap h = \{S\}$.
- g und h haben keinen gemeinsamen Punkt, und sie sind in keiner gemeinsamen Ebene enthalten, d.h., g und h sind zueinander windschief.

Übung 4. Verbinden Sie vier nicht in einer Ebene liegende Punkte zu einem Viereck. Was lässt sich über die Diagonalen sagen?

Übung 5. Die Geraden g und h seien mit der Geraden s windschief. Sind dann g und h windschief?

1.1.3 Gerade und Ebene

Für die gegenseitige Lage einer Geraden g und einer Ebene E sind drei Fälle zu unterscheiden:

- g und E haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt, d.h., g ist parallel zu E, $g \cap E = \emptyset$.
- alle Punkte von g liegen in E, d.h., g liegt in E, g ist parallel zu E.

- g und E haben genau einen gemeinsamen Punkt, d.h., g schneidet die Ebene E (Durchstosspunkt D), $g \cap E = \{D\}$

Übung 6. g und h seien zwei zu einer Ebene E parallele Geraden. Welche Aussagen sind richtig:

(a) $g \| h$

(b) $g \perp h$

(c) $g \cap h = \emptyset$

(d) g und h sind windschief

(e) es lässt sich keine Aussage machen

Übung 7. Die Ebenen E_1 und E_2 seien parallel ohne gemeinsamen Punkt. Wie liegt die Gerade r zu E_2, wenn r

(a) parallel zu E_1 ist

(b) E_1 schneidet

(c) in E_1 liegt?

1.1.4 Ebene und Ebene

Für die gegenseitige Lage zweier Ebenen E_1 und E_2 sind drei Fälle zu unterscheiden.

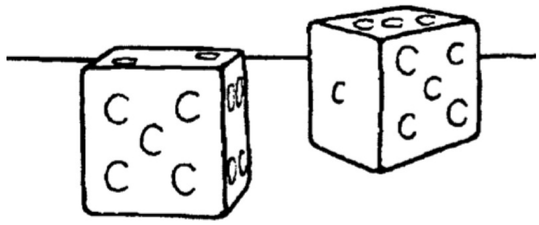
- E_1 und E_2 haben keinen gemeinsamen Punkt; sie sind parallel, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
- E_1 und E_2 haben alle Punkte gemeinsam, d.h., sie sind identisch; $E_1 = E_2$.
- E_1 und E_2 haben eine Gerade gemeinsam, d.h. sie schneiden sich (Schnittgerade s); $E_1 \cap E_2 = \{s\}$

Übung 8. Wie viele Schnittgeraden ergeben sich durch n Ebenen in allgemeiner Lage?

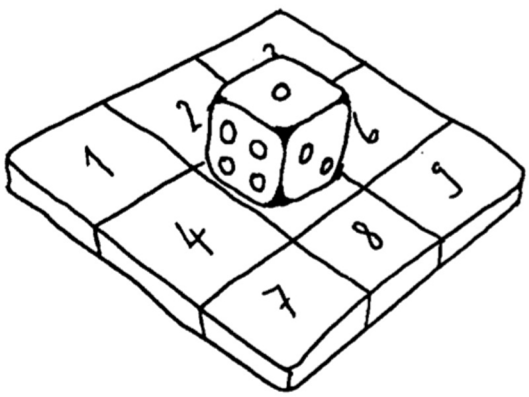
Übung 9. g und h seien windschiefe Geraden. Die Gerade s schneidet sowohl g als auch h. Wie viele Ebenen sind durch diese drei Geraden bestimmt?

Übung 10. Die Geraden r und s seien windschief. R ist ein Punkt auf r, S ein Punkt auf s. Welches ist die Schnittgerade der Ebenen $E_1 = (R, s)$ und $E_2 = (S, r)$?

Übung 11. Auf die Seiten eines Würfels wurden die Ziffern 1 bis 6 willkürlich verteilt. Kann man aus den beiden Ansichten des Würfels erkennen, welche Ziffer sich gegenüber der 1 befindet?

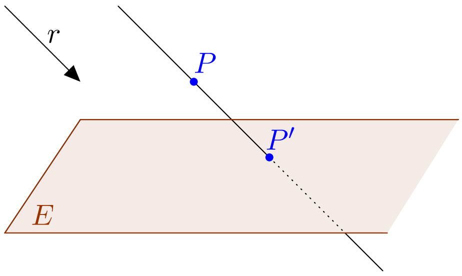


Übung 12. Kippe den Würfel aus dem mittleren Feld auf- oder abwärts, nach links oder rechts, jedoch nie diagonal. Nach sechs Kippbewegungen soll der Würfel mit der Augenzahl 6 nach oben auf dem Feld 1 liegen. Ist das mšglich?



1.2 Die Parallelprojektion

Definition 1. Durch den Punkt P wird ein Projektionsstrahl parallel zur Projektionsrichtung r gelegt. Den Durchstosspunkt P' mit der Bildebene nennt man das Bild oder die**Projektion** von P.



Bemerkung. Die Sonnenstrahlen liefern ein anschauliches Modell paralleler Projektionsstrahlen.

1.2.1 Projektion einer Geraden

Durch jeden Punkt der Geraden g wird ein Projektionsstrahl gelegt. Diese Strahlen liegen in einer Ebene, der projizierenden Ebene.

Das Bild einer Geraden ist im allgemeinen wieder eine Gerade. Das Bild einer projizierenden Geraden ist ein Punkt.

Definition 2. Der Durchstosspunkt einer Geraden mit der Bildebene E heisst **Spurpunkt** der Geraden.

Bilder von parallelen Geraden sind wieder parallel. Streckenverhältnisse bleiben bei der Projektion erhalten.

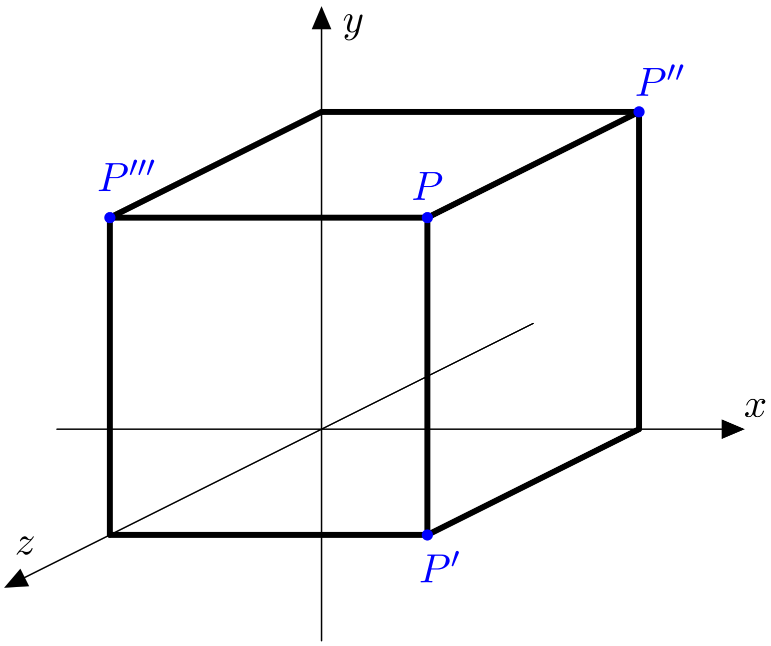
1.2.2 Projektion einer Ebene

Das Bild einer Ebene ist im allgemeinen die ganze Bildebene. Das Bild einer projizierenden Ebene ist eine Gerade.

Definition 3. Die Schnittgerade einer Ebene mit der Bildebene E heisst **Spur** der Ebene.

1.3 Das räumliche Koordinatensystem

Wir legen einen Würfel auf die Zeichenebene (Bildebene) und projizieren ihn parallel auf die Zeichenebene. Die entstehende Parallelprojektion des Würfels ist eine zweidimensionale Darstellung des dreidimensionalen Würfels.



xy-Ebene: Grundrissebene
yz-Ebene: Aufrissebene
xz-Ebene: Seitenrissebene
P', P'', P''': Grund-, Auf-, Seitenriss von P

Die drei Koordinatenachsen werden aus den drei Würfelkanten gebildet, die in einer Ecke zusammenlaufen. Die y- und die z-Achse liegen in der Bildebene. Die x-Achse wird in die Bildebene projiziert und somit verzerrt.

Aus der Figur erkennt man, dass jeder Punkt P des Raumes durch die Angabe dreier Koordinaten x, y und z eindeutig beschrieben werden kann. Man schreibt:

$$P\,(x\,|\,y\,|\,z)\,.$$

Übung 13. Wo befinden sich die Figuren, die bei der zweidimensionalen Darstellung in wahrer Gršsse abgebildet werden?

Übung 14. Zeichnen Sie die Raumbilder der folgenden Punkte:

$$A(-8|1|-3), B(4|3|1), C(3|-1|4), D(0|4|3).$$

Wie lauten die Koordinaten der drei Projektionen dieser Punkte?

Übung 15. Zeichne das Schrägbild eines Würfels. Verbinde die Mittelpunkte der Seitenflächen miteinander, um das Schrägbild eines Oktaeders zu erhalten.

Lösungen

1.) 4; 28; $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.) 11; 20; $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$; $\frac{n(n-1)}{2}$.

3.) f

4.) windschief

5.) f

6.) f; f; f; f; ✓.

7.) $r||E_1||E_2$; $r \cap E_2 = \emptyset$; $r||E_2$.

8.) $\frac{n(n-1)}{2}$

9.) 2

10.) $g = (S, R)$

11.) 2

12.) $2, 3, 6, 5, 2, 1$

13.) xy-Ebene

2 Projektive Geometrie

Im späten 13. Jahrhundert entstanden in Italien die Stadtrepubliken Florenz, Venedig, Mailand und Genua. Sie erlangten politische und wirtschaftliche Bedeutung und hatten dadurch entscheidenden Anteil daran, dass sich ein neues Menschenbild durchsetzen konnte. Die christlichen Schriftsteller des Mittelalters hatten die Bedeutung des menschlichen Lebens in der Vorbereitung auf das Jenseitige gesehen und gelehrt, dass sich der Mensch möglichst vom Diesseitigen abwenden sollte. Intensive Studien der Schriften der griechischen und römischen Antike, also eine Wiederentdeckung der Antike (Renaissance =Wiedergeburt), führten aber dann zu einer neuen Auffassung, die dem einzelnen Menschen Verantwortung übergab und ihn in den Mittelpunkt der Welt stellte. Auch die Kunst, die durch die erstarkten Stadtrepubliken besonders gefördert wurde, wandte sich dem Diesseitigen zu und rückte den Menschen und seine natürliche Umgebung in den Mittelpunkt des künstlerischen Schaffens. Dabei musste ein zentrales geometrisches Problem gelöst werden:

> Wie kann man die dreidimensionale reale Welt auf einer zweidimensionalen Leinwand darstellen?

Gesucht wurde eine Methode, die einem Bild den Anschein der Dreidimensionalität verleiht, also ein realistisches Abbild schafft. Die Lösung fand man in der Entdeckung der Zentralperspektive bzw. perspektivischen Darstellung. Dadurch erhielten die Bilder eine grosse räumliche Tiefe und natürliche Echtheit.

Die mittelalterlichen Malereien waren „konzeptional“, der wichtigste Gegenstand wurde bevorzugt behandelt, selbst wenn dadurch das Bild verzerrt wurde. Typisch für diesen nicht perspektivischen Malstil ist die Illumination aus dem 12. Jahrhundert eines unbekannten Malers. Die Burg verschwindet fast vor den Schiffen angreifender Krieger, die Schiffe oben im Bild, die sich in weiter Entfernung am Horizont befinden, sind genau so gross wie die Schiffe im Vordergrund.

Die Künstler der Renaissance waren meist zugleich Maler, Goldschmiede, Architekten, Ingenieure und Festungsbaumeister. Sie entwarfen und bauten Kirchen, Hospitäler, Paläste, Klöster, Brücken, Dämme, Kanäle, Waffen etc. Da sie perspektivische Darstellungen dringend für die Ausübung ihres Berufes brauchten, fanden diese Artefici notgedrungen Lösungen für die Grundprobleme der darstellenden Geometrie. So wurden die Künstler des 15. Jahrhunderts auch zu bedeutenden Mathematikern ihrer Zeit.

Giottodi Bondone (1266-1337), Van Eyck (1390-1441), Brunelleschi (1377-1446), Alberti (1404-1472) hatten bereits erste, für die Zukunft tragbare Erfolge bei der Meisterung des Problems der Perspektive erzielt.

Der Florentiner Filippo Brunelleschi, der berühmte Baumeister der Domkuppel,

Abbildung 1: Johannes Apokalypse, Tafel 39, Bramberger Buchmalerei

beispielsweise wollte öffentlich beweisen, dass Flächenkunst die Vollkommenheit angewandter Mathematik erreichen kann. Um dies zu beweisen, hatte er unter anderem eine Tafel gemalt, für die man einen Standort nahe dem Hauptportal und in der Mittelachse des Domes zu wählen hatte.

Alles, was man von dieser Stelle aus, durch das geöffnete Portal hindurch vom Baptisterium und dessen Nachbarbauten sehen konnte, hatte er auf der Tafel mit Farben festgehalten. Die Tafel war in der Mitte vorsichtig gelocht und wurde dem Interessenten zusammen mit einem Spiegel ausgehändigt.

Mit der einen Hand fasste man den Spiegel, mit der anderen die Tafel. Wenn man deren unbemalte Rückseite so vors Auge hielt, dass man durch das kleine Loch blicken konnte, und sich gleichzeitig mittels des vor die Vorderseite gehaltenen Spiegels das Gemalte widerspiegeln liess, erhielt man den Eindruck, genau diejenige Wirklichkeit vor sich zu sehen, die man, wenn der Spiegel weggenommen wurde, real vor sich sah. Der Täuschungseffekt war um so erstaunlicher, als er sich sogar auf Bewegliches bezog. Brunelleschi hatte nämlich den Himmelsbezirk auf seiner Tafel mit Silberfolie belegt, so dass im Spiegelbild mit der Starrheit der Architektur der Wandel der Wolken kontrastierte. Das Abbild erschien, über alle lineare und farbige †bereinstimmung hinaus, auch noch lebendig.

Die Ideen Brunelleschis wurden von Alberti weiterentwickelt; er schreibt den ersten allgemeinen Traktat über die Perspektive. Zur vollen Meisterschaft in der Kunst der Perspektive brachten es aber erst später Leonardo da Vinci (1452- 1519) in Italien und Albrecht Dürer (1471-1528) in Deutschland.

Der Schlüssel zur dreidimensionalen Darstellung liegt in dem Prinzip 'Projektion und Schnitt': Der Maler stellt sich vor, dass von jedem Punkt der zu malenden Szene aus ein Lichtstrahl in sein Auge fällt (Zentralprojektion). Zwischen die zu malende Szene und seinem Auge wird eine Glasscheibe, die seiner Leinwand entspricht, aufgestellt. Auf dieser Glasscheibe werden nun Punkt für Punkt die Stellen markiert, in denen die Projektions- oder Sehstrahlen die Scheibe durchdringen (Durchstosspunkte). Die Menge aller derartigen Punkte ist ein „Schnitt“. Die Renaissance-Künstler hatten entdeckt, dass bei der Betrachtung eines „Schnittes“ derselbe Eindruck entsteht, als wenn man die Szene direkt anschaut. Denn das Licht, das von einem Objektpunkt ausgeht und in unser Auge fällt, verläuft geradlinig; die Lichtstrahlen, die von den entsprechenden Punkten auf der Glasscheibe ausgehen, verlaufen auf denselben Geraden. Deshalb muss derselbe Eindruck entstehen. Der Maler hatte jetzt nur noch den „Schnitt“, der auf der Glasscheibe erscheint, auf die Leinwand, die nicht durchsichtig und zweidimensional ist, zu übertragen, um ein realistisches Bild zu erzielen. Dürer benutzte für dieses Prinzip das Wort *Perspektive* (perspicere, lat.: hindurchsehen) und illustrierte dies sehr schön auf mehreren Holzschnitten, die aus seinem Lehrbuch „Underweysung der messung mit dem zirkel und richtscheyed ... “ (1525) stammen.

Da die Abbildung vom Standpunkt des Künstlers und der Placierung der Glasscheibe abhängt, gibt es verschiedene Darstellungen von der gleichen Szene. Die dargestellten Objekte können verschiedene Grösse haben; ein Bild kann die Szene aus frontaler Sicht zeigen, ein anderes Bild kann dieselbe Szene mehr von der Seite her zeigen. Der Photoapparat ist übrigens ein hervorragendes Beispiel, um das Prinzip "Projektion und Schnittßu demonstrieren: Unser Auge, das Projektionszentrum, entspricht der Linse, der 'Schnitt' erscheint auf dem Film. Aus verschiedenen Stellungen erhält man leicht vom gleichen Objekt verschiedene Bilder.

Nach der Wahl des Standpunktes und der Position der Glasscheibe gilt es nun, das Bild auf die Leinwand zu übertragen. Da aber meist die zu malende Szene nur in des Künstlers Vorstellung existiert und die Leinwand nicht durchsichtig ist, braucht der Künstler Regeln, die stehen durch die Winkel, die die Linien mit der Bildebene bilden. Auf dem Bild von Raffael findet man unter anderem Aristoteles, Plato (mit den Zügen Leonardos), Euklid, Epikur, Pythagoras, Empedokles, Heraklit, Diogenes.

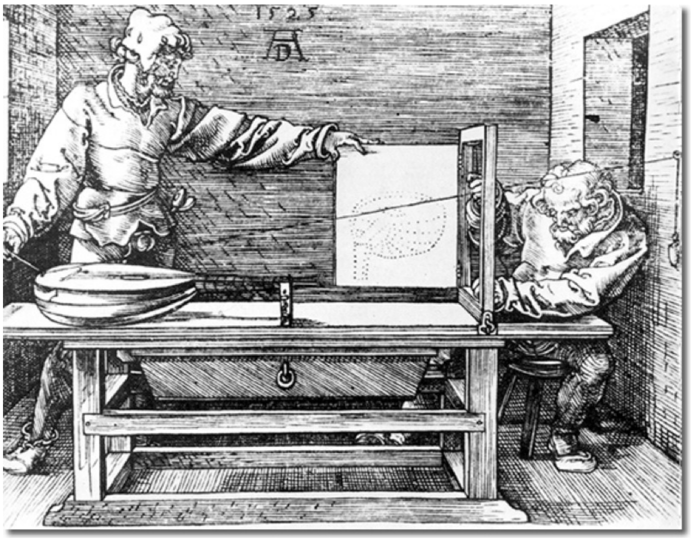


Abbildung 2: Aus Albert Dürers: Underweysung der messun mit dem zirkel und richtscheyed... (1525)

Die erwähnten Grundsätze beschreiben nur die einfachsten Dinge, die man wissen muss, um realistisch zu malen. Wie aber erscheinen Kurven auf der Glasscheibe (Leinwand)? Zum Beispiel zeigt das Bild von Lorenzo di Pietro, dass ein Kreis im allgemeinen nicht als Kreis gemalt werden kann. Er erscheint als Ellipse oder als Parabel- oder Hyperbelbogen auf dem Bild. Dies hängt eben davon ab, wo der Kreis sich relativ zum Beobachter befindet. (Stichwort: Kegelschnitte) Man erkennt, dass realistisches Malen angewandte Mathematik ist. Beim Betrachten eines so konzipierten Bildes sollte man deshalb unbedingt die Position einnehmen, die der Maler bei der Planung des Bildes verwendet hat. Die Bilder der Renaissance-Künstler sind meist in Kunstmuseen zu finden, sie könnten genau so gut in naturwissenschaftlichen Museen hängen. Liebhaber der Kunst der Renaissance sind bewusst oder unbewusst auch Liebhaber der Naturwissenschaften und der Mathematik!

Abbildung 3 zeigt ein konkretes Beispiel, nämlich, wie man Eisenbahnschienen mit Schwellen zeichnet, die in eine Landschaft eingebettet sind. Wie sind die Schienen oder die Telegraphenmasten zu positionieren, wo sollen sie im Horizont verschwinden? Man wählt einen Brennpunkt F verschieden vom Hauptpunkt V und zeichnet die Gerade FV. Die Figur zeigt zwei mögliche Wahlen; in dem einen Fall fällt FV mit dem Horizont zusammen, im anderen Fall ist FV senkrecht zum Horizont.

Nun nimmt man einen Anfangspunkt 0 und einen Punkt U auf den Schienen so, dass OU eine Einheitsstrecke wird, an der alle anderen Strecken entlang der Schienen gemessen werden. Als nächstes zeichnet man eine Parallele g zu FV und projiziert die Punkte 0 und U durch F auf g. Die Gerade g dient jetzt als perspektivischer Massstab, um

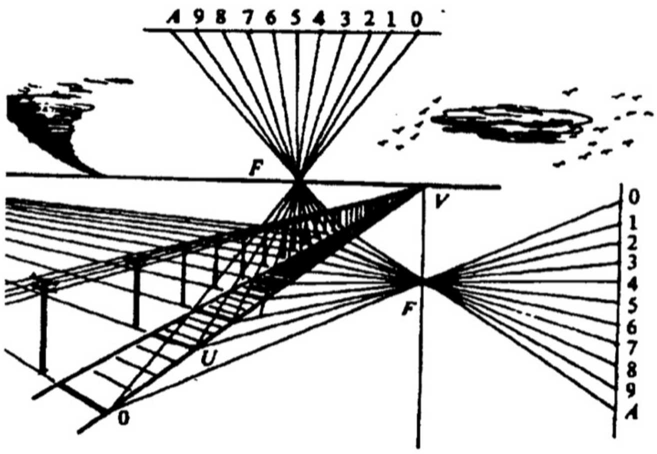


Abbildung 3: Eisenbahn

die Schwellenabstände entlang der Schienen abzumessen. Eine Folge von äquidistanten Punkten auf g, zurückprojiziert durch den Brennpunkt F ergibt eine korrekte Perspektive für die Punkte mit gleichen Abständen auf den Eisenbahnschienen. Betrachtet man die in der Realität vorhandenen Rechtecke, die aus den beiden Schienen und je zwei Schwellen gebildet werden, so erkennt man:

Das Bild ist weder kongruent, noch ähnlich, noch flächengleich zu der Originalfigur. Die Perspektive ist nicht winkeltreu.

Die Bilder seit der Renaissance zeigen, dass man die geometrische Struktur des Originals auf der Leinwand gut erkennen kann. Dies liegt darin begründet, dass es geometrische Eigenschaften gibt, die invariant gegenüber Projektionen sind, also Eigenschaften, die im Bild unverändert erscheinen und daher ihre Identifizierung ermöglichen. Diese Eigenschaften aufzuzeigen und zu untersuchen ist die Aufgabe der projektiven Geometrie. Eine der frühesten Entdeckungen der projektiven Geometrie ist der berühmte Dreieckssatz des französischen Architekten und Ingenieurs Gerard Desargues (1593-1662). Dieser Satz zeigt die signifikante Eigenschaft, die zwei Schnitten derselben Projektion eines Dreiecks zukommt.

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in zwei verschiedenen, aber nicht parallelen Ebenen so gelegen sind, dass die Verbindungslinien einander entsprechender Punkte in einem Punkt 0 kongruent sind (die Dreiecke befinden sich in perspektiver Lage), dann schneiden sich die Verlängerungen entsprechender Seiten in drei kollinearen Punkten R, S und T.

Der Satz von Desargues ist auch richtig, wenn die beiden Dreiecke in einer Ebene liegen.

Die Bilder seit der Renaissance zeigen, dass man die geometrische Struktur des Originals auf der Leinwand gut erkennen kann. Dies liegt darin begründet, dass es geometrische Eigenschaften gibt, die invariant gegenüber Projektionen sind. Diese Eigenschaften aufzuzeigen und zu untersuchen ist Aufgabe der projektiven Geometrie.

Übung 16. Wie lautet der Dreieckssatz von GERARD DESARGUES? Skizzieren Sie die Situation.

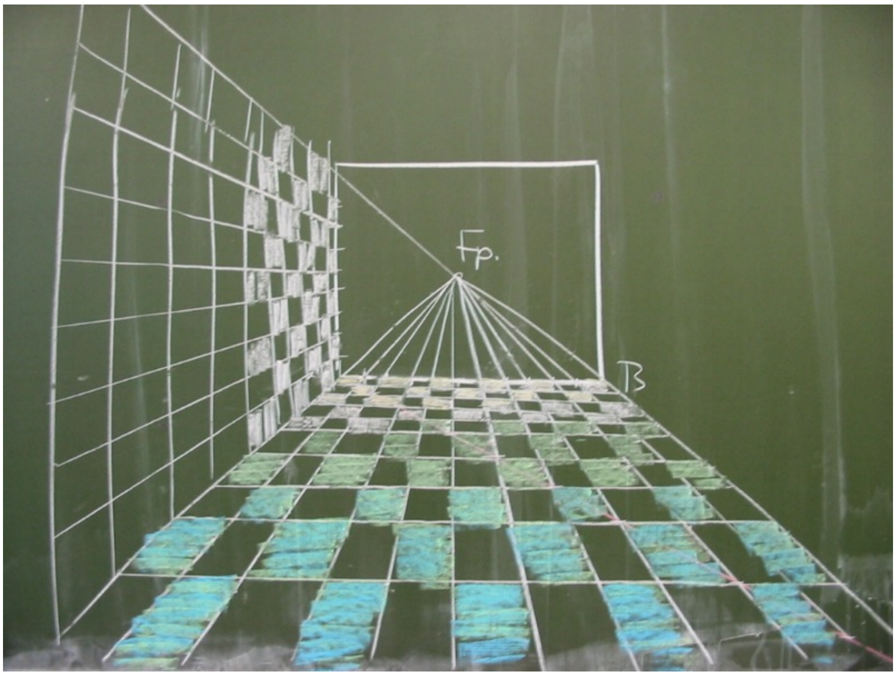


Abbildung 4: Wandtafelskizze zur Konstruktion des Fluchtpunktes

Viele Künstler machen sich die Theorien der Perspektive zu nutze oder spielen damit. Hier noch einige Beispiele:

Lösungen

1.) Die Verbindungslinien zwischen korrespondierenden Eckpunkten zweier in einer Ebene liegenden Dreiecke schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn die Schnittpunkte der entsprechenden verlängerten Seiten auf einer Geraden liegen.

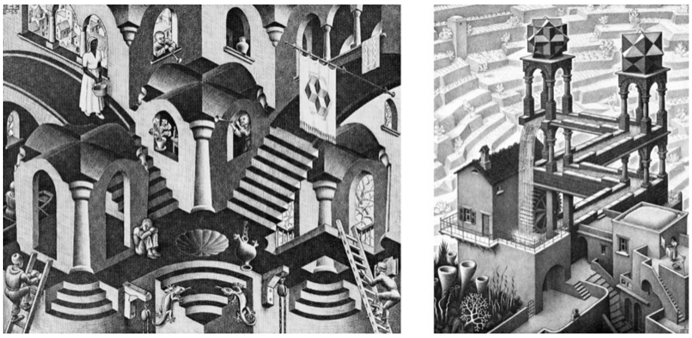


Abbildung 5: Bilder von Escher

Abbildung 6: Bild von William Hogarth (1697–1764)

3 Stereometrie

Die Stereometrie (griech., Körpermessung) beschäftigt sich im Gegensatz zur Planimetrie mit der Form, gegenseitigen Lage und Grösse geometrischer Gebilde des Raumes. Im engeren Sinne ist sie die Lehre von der Ausmessung der Körper.

Körper sind Teile des Raumes, die durch ihre Oberfläche vom übrigen Raum abgegrenzt werden. Körper haben also ein bestimmtes Volumen und eine bestimmte Oberfläche. Die einfachen Körper — Würfel, Quader, Zylinder, Kugel — waren schon bei allen Völkern der vorgeschichtlichen Zeit bekannt und wurden praktisch genutzt (Hausbau, Fruchtspeicher, Gefässe, religiöse Zwecke etc.). Sowohl die Babyionier (3500 bis 200 v.u.Z.) als auch die Ägypter (3000 bis 500 v.u.Z.) haben Volumen und Oberfläche von Würfeln, Zylindern, Pyramiden, Pyramidenstümpfen, Kegeln und prismatischen Körpern, wenn auch teilweise nur in guter Näherung, berechnen können. Euklid (350 v.u.Z.) führte die ersten planmässigen, rein mathematischen Untersuchungen durch. Die Berechnung des Volumens und der Oberfläche einer Kugel gelang aber erst Archimedes (287 - 212 v.u.Z.).

3.1 Volumen und Oberfläche

3.1.1 Prismen

Übung 17. Berechne Volumen V, Oberfläche O und Raumdiagonale d eines

(a) Würfels mit Kantenlänge k

(b) eines Quaders mit Kantenlänge a, b, c

3.1.2 Pyramiden

Übung 18. Die Cheopspyramide hat als Grundfläche ein Quadrat mit Seitenlänge 233 m. Sie war ursprünglich 148 m hoch; heute ist sie auf einer Höhe von 137 m abgestumpft.

(a) Der Bau soll 100000 Mann 20 Jahre beschäftigt haben. Welche Gesteinsmasse wurde dabei bewegt? (Dichte des Gesteins: $\rho_S = 2.7\,\text{g}/\text{cm}^3$)

(b) Welche Abmessung hat die heutige Plattform?

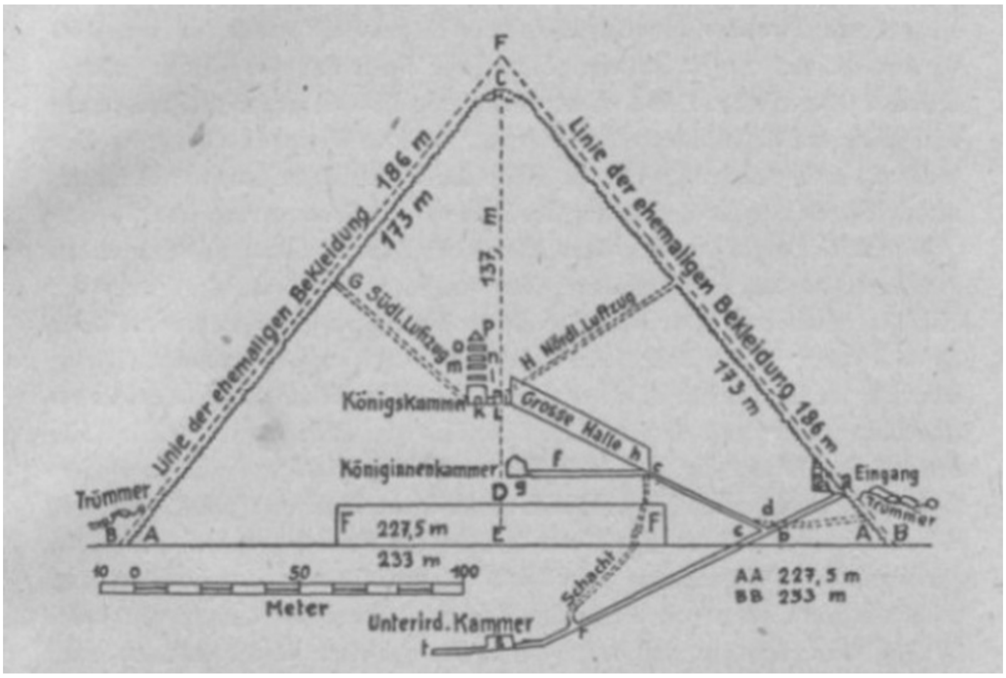


Abbildung 7: Cheopspyramide

Übung 19. Ein Zelt hat die Gestalt eines regelmässigen sechsseitigen Pyramidenstumpfs mit den Grundkanten $a = 4.8\,\text{m}$ und $b = 3.6\,\text{m}$. Die Seitenkante misst jeweils $s = 2.4\,\text{m}$.

(a) Welchen Raum umschliesst das Zelt?

(b) Wieviel Zeltstoff war zur Herstellung nötig?

3.1.3 Gerader Kreiszylinder

Übung 20. Ein rechteckiges Blatt mit den Seitenlängen a und b kann auf zwei Arten zu einem Zylinder gebogen werden. Wie gross ist das Verhältnis der

(a) Volumina (b) Mäntel

Übung 21. Eine Plakatsäule ist 2.6 m hoch und hat einen Durchmesser von 1.2 m. Wie gross ist die mögliche Reklamefläche?

Übung 22. Wie viel Blech benötigt man für eine Konservendose (Durchmesser 10 cm, Inhalt 1 Liter), wenn für Verschnitt etc. noch 15% zugeschlagen werden?

Übung 23. Eine Rolle Eisendraht (Dichte: $7.8\,\mathrm{g/cm^3}$) wiegt 135 N. Wie lang ist der Draht, wenn seine Dicke 2.4 mm beträgt?

Übung 24. Die Metallverkleidung eines Kamins muss mit einer Spezialfarbe zweimal gestrichen werden. Die Kaminverkleidung ist ein Zylinder mit einem Durchmesser von 150 cm und einer Höhe von 18 m. Beim ersten Anstrich rechnet man mit 1 kg Farbe für $15\,\mathrm{m}^2$; beim zweiten Anstrich genügen 70% der Menge des ersten Anstrichs. Wie viele Dosen (ˆ 5 kg bzw. 10 kg) Farbe werden benötigt?

Übung 25. Zeichne die Parabel mit der Gleichung $y = 4 - x^2$ für $-2 < x < 2$. Lasse das Parabelstück um die y-Achse rotieren, so dass ein Paraboloid entsteht, und berechne dessen Volumen. Hinweis: Betrachte einen Zylinder mit dem Radius 2 und der Höhe 4, aus dem ein kongruentes Rotationsparaboloid — durch die Parabel $y = x^2$ entstanden — herausgefräst wird, und wende das Prinzip von Cavalieri an.

3.1.4 Gerader Kreiskegel

Übung 26. Von einem geraden Kreiskegel kennt man den Radius $r = 5\,\mathrm{cm}$ und das Volumen $V = 1000\,\mathrm{cm}^3$. Berechne h, s, M und O.

Übung 27. Wie tief taucht ein Holzkegel ($r = 5\,\mathrm{cm}$, $h = 12\,\mathrm{cm}$, Dichte $0.8\,\mathrm{g/cm^3}$) mit der Spitze nach unten in Wasser ein?

Übung 28. Wie gross ist der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes, der den abgewickelten Mantel eines Kegels mit r=6 cm und h=8 cm darstellt?

Übung 29. Ein Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel 120¡ und dem Radius 8 cm wird zu einem Kegel zusammengebogen. Wie gross wird dessen Volumen?

3.1.5 Kugel

Die Berechnung des Volumens der Kugel erfolgt mit dem Prinzip von Cavalieri. Als Vergleichskörper nimmt man denjenigen Körper, der entsteht, wenn man aus einem Zylinder (Radius r, Höhe r) einen Kegel herausfräst. Man schneidet die Halbkugel und den Vergleichskörper mit einer Ebene, die vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand a hat. Als Schnittflächen ergeben sich für die Halbkugel

$$A = \pi r'^2 = \pi(r^2 - a^2),$$

für den Vergleichskörper

$$A = A_{Kreisring} = \pi r^2 - \pi a^2$$

Für das Volumen der Kugel gilt deshalb:

$$\begin{aligned} V_{Halbkugel} &= V_{Zylinder} - V_{Kegel} \\ &= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3, \end{aligned}$$

also

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Übung 30. Berechne den Radius einer Kugel mit $1\,\mathrm{m}^3$ Rauminhalt.

Übung 31. Leite eine Formel für das Materialvolumen einer Hohlkugel in Abhängigkeit vom Kugelradius rund der Wanddicke d her. Welche Glieder der Formel können bei sehr kleinem d vernachlässigt werden? Deute die entstehende Näherungsformel und leite somit die Formel für die Oberfläche einer Kugel ab.

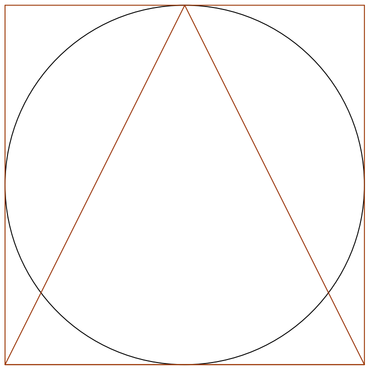
Übung 32. Der Inhalt der Gesamtaustauschfläche der menschlichen Lunge beträgt ungefähr $140\,\mathrm{m}^2$. Wie viele kugelförmige (durchschnittlicher Durchmesser $0.3\,\mathrm{mm}$) Lungenbläschen besitzt demnach ein Mensch?

Übung 33. Wie verhalten sich die

(a) Radien (b) Oberflächen (c) Volumina

der In- und Umkugel eines Würfels?

Übung 34. Die Figur hat Archimedes in seinen Grabstein meisseln lassen.



Der Römer Cicero hat eineinhalb Jahrhunderte nach dem Tode von Archimedes dessen Grab an diesem Zeichen erkannt. Worauf soll dieses Zeichen wohl aufmerksam machen?

Übung 35. Ein kugelförmiger ...ltropfen von 4 mm Durchmesser breitet sich auf einer Wasseroberfläche zu einer Schicht von 1.2 m^2 Flächeninhalt aus. Berechne die Höhe dieser Schicht.

Lösungen

1.) k^3, $6k^2$, $\sqrt{3}k$; abc, $2(ab+ac+bc)$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2.) über 7 Mio.Tonnen; knapp 300 m^2.

3.) 96 m^3; 71.5 m^2

4.) $a \div b$; $1 \div 1$.

5.) 9.8 m^2

6.) 6.4 dm^2

7.) 390 m

8.) 10 Kübel

9.) 16.76

10.) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$, $s = \sqrt{h^2 + r^2}$, $M = \pi r s$, $O = M + \pi r^2$

11.) 11.14 cm

12.) $216°$

13.) $1516.5\,\mathrm{cm}^3$

14.) $0.62\,\mathrm{m}^3$

15.) $\frac{4}{3}\pi(3r^2d - 3rd^2 + d^3)$

16.) 124 Mio.

17.) $1 \div \sqrt{3}$; $1 \div 3$; $1 \div 3\sqrt{3}$.

18.) Kegel$\div$Kugel$\div$Zylinder$= 1 \div 2 \div 3$.

19.) 28 nm

4 Polyeder

Als Polyeder (griech., Vielflächner) bezeichnet man Körper, die nur von ebenen Vielecken begrenzt werden. Beispiele sind Würfel, Pyramiden, Prismen; ein Zylinder ist kein Polyeder.

Besteht eine Oberfläche eines konvexen Polyeders aus lauter kongruenten Vielecken und treffen in dessen Ecken immer die gleiche Anzahl Flächen zusammen, so spricht man von *regelmässigen Polyedern.* Ihre Anzahl ist beschränkt und kann ermittelt werden, wenn man bedenkt:

- Die Summe aller Kantenwinkel an jeder Körperecke muss kleiner als 360!‘ sein.
- In jeder Körperecke stossen mindestens 3 Flächen zusammen.

Somit folgt: Wird das Polyeder von regelmässigen Dreiecken begrenzt, so kann eine Ecke nur von 3, 4 oder 5 Seitenflächen gebildet werden (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder). Wird das Polyeder von regelmässigen Vierecken (Hexaeder) oder regelmässigen Fünfecken (Dodekaeder) begrenzt, so kann eine Ecke nur durch 3 Seitenflächen gebildet werden. Andere Möglichkeiten gibt es nicht mehr.

Übung 36. Begründen Sie diese Folgerungen.

Satz 1. *Es gibt genau* 5 *regelmässige Polyeder.*

Für den griechischen Philosophen Plato (427–347 v. Chr.) waren diese fünf Körper Grundbausteine seines Weltsystems: Sie entsprachen den vier Elementen Feuer, Erde,

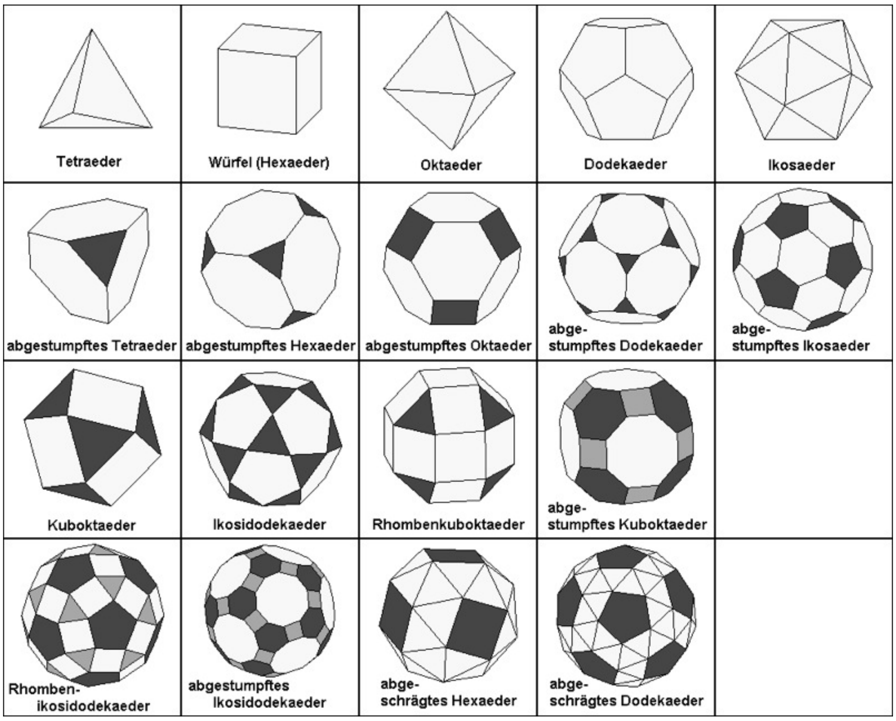


Abbildung 8: Die fünf regelmässigen Polyeder mit verwandten

Wasser und Luft. Das Dodekaeder entsprach einer Schale, die das ganze Universum einhüllt. Daher werden die fünf regelmässigen Polyeder auch *platonische Körper* genannt.

Diese Idee Platons kann als erster bekannter Versuch interpretiert werden, die Welt mit einem Atombild zu erklären. PLATON stellte auch Regeln auf, wie die einzelnen Elemente miteinander reagieren oder ineinander übergeführt werden können.

Die platonischen Körper beeindrucken durch ihre vollkommene Gestalt; selbst die Natur bevorzugt beispielsweise bei Kristallformen deren Gestalt.

Der Astronom JOHANNES KEPLER (1471–1528) benutzte diese regelmässigen Polyeder als Modell für die Bahnen der Planeten. Eine der Erdbahn zugeordnete Kugel bildet den Ausgang. Ihr wird ein Dodekaeder umbeschrieben; auf dessen Umkugel liegt die Bahn des Mars. Das dieser Kugel umbeschriebene Tetraeder enthält auf seiner Umkugel die Bahn des Jupiter, und der dieser Kugel umbeschriebene Würfel bestimmt eine Umkugel, auf der die Bahn des Saturn verläuft. Das der Erdbahnkugel einbeschriebene Ikosaeder trägt auf seiner Inkugel die Bahn der Venus und das dieser Inkugel einbeschrieben Oktaeder enthält auf seiner Inkugel die Bahn des Merkurs.

Übung 37. Welche der Figuren stellen aufgeklappte Würfel dar?

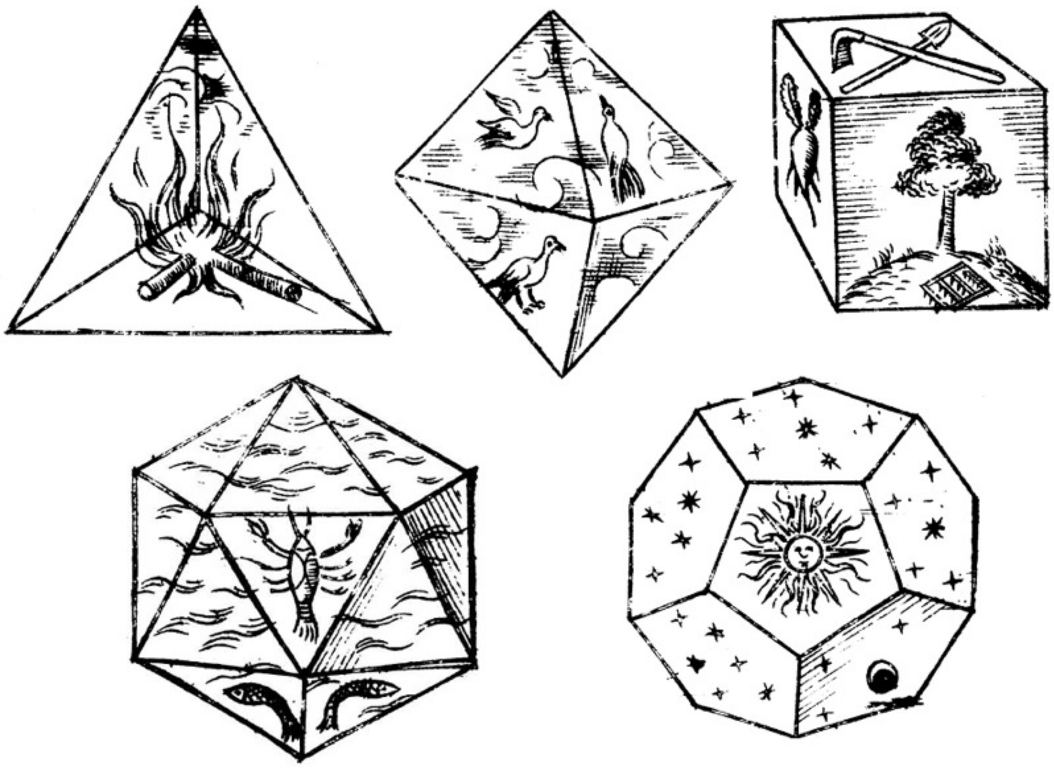


Abbildung 9: Die fünf platonischen Körper und ihre Bedeutung als Elemente

Übung 38. Besorge dir ein mittelstarkes glattes farbiges Zeichenpapier, ein Eisenlineal und ein Messer zum Schneiden und Einritzen. Zeichne die Netze der platonischen Körper und bauen Sie sich saubere Modelle.

Übung 39. Zeichne zu jedem platonischen Körper ein Schrägbild. Benutzen Sie beim tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder einen Würfel, der diesen Körper umgibt, beim Dodekaeder einen Würfel, der innerhalb des Dodekaeders liegt. Vergleichen Sie mit den Modellen aus der Schulsammlung.

Übung 40. Füllen Sie folgende Tabelle aus:

Abbildung 10: Fluorkristalle (Würfel)

Abbildung 11: Fluorkristalle (Oktaeder) auf Quarzkristallrasen

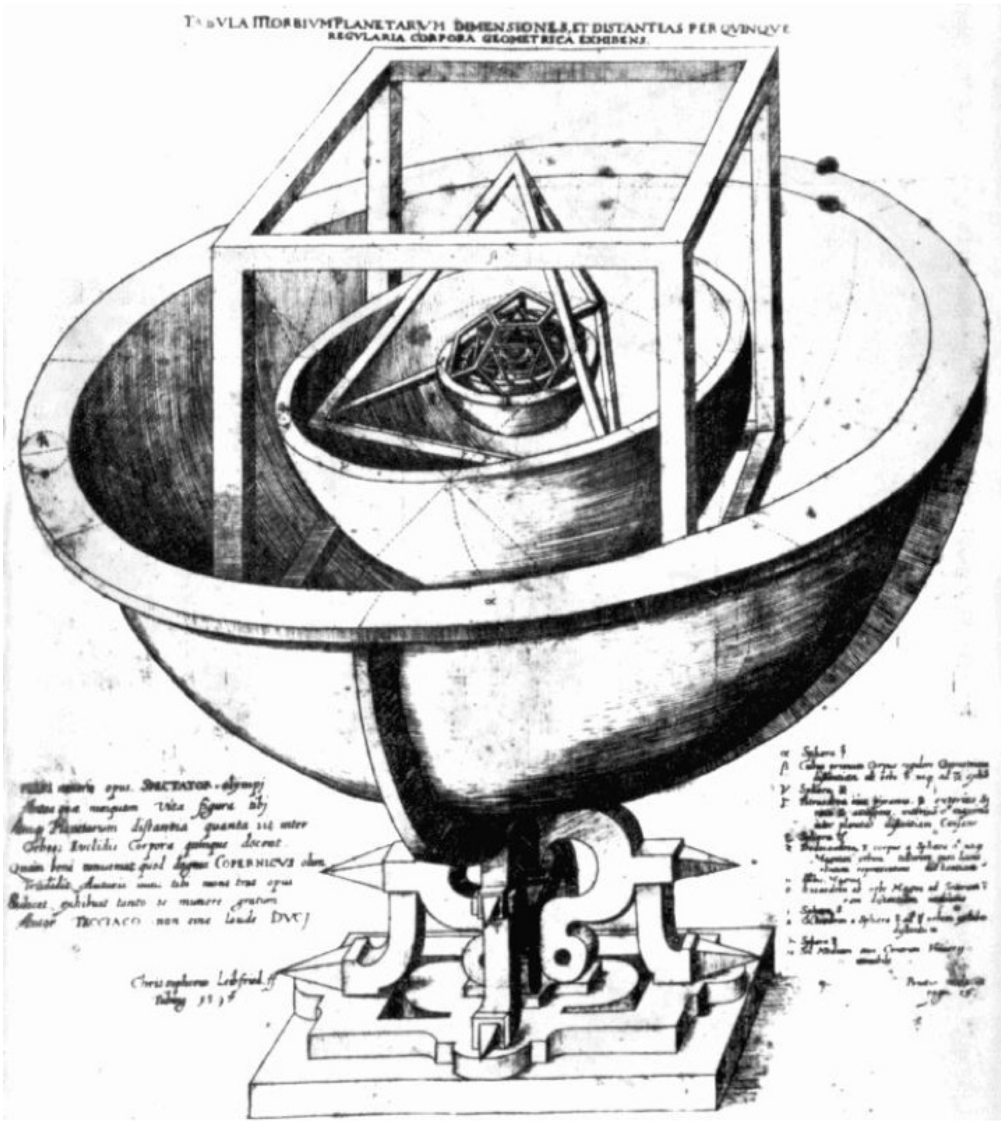


Abbildung 12: Planetenbahnmodell von Kepler

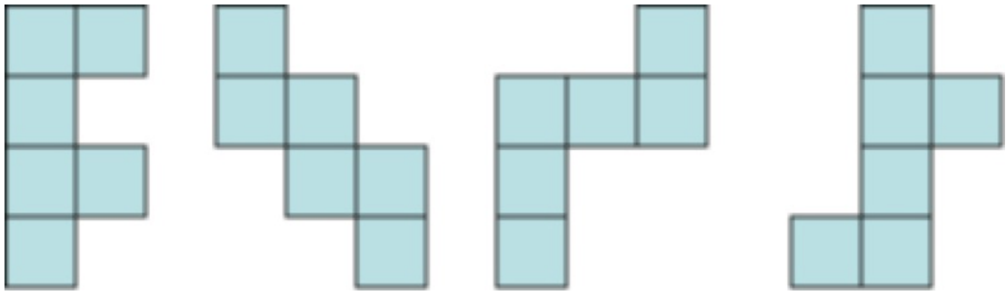


Abbildung 13: Würfelnetze

Körper	**Ecken**	**Flächen**	**Kanten**
Tetraeder			
Hexaeder			
Oktaeder			
Dodekaeder			
Ikosaeder			

Erkläre die Namen der platonischen Körper. Was fällt bei den Zahlen in der Tabelle auf? Bestimme zusätzlich alle Symmetrien.

4.1 Der Euler'sche Polyedersatz

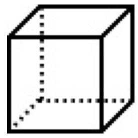
Obwohl sich die griechischen Mathematiker intensiv mit den Polyedern beschäftigt haben, wurde der folgende Satz erst von Leonard Euler (1707–1783) entdeckt.

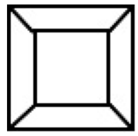
Satz 2. *Es sei E die Anzahl Ecken, K die Anzahl Kanten und F die Anzahl Seitenflächen eines beliebigen Polyeders. Dann gilt:*

$$E - K + F = 2.$$

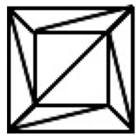
Beweis. Wir haben diesen Satz bereits bei den platonischen Körper bestätigt. Die folgenden Beweisschritte werden am Beispiel eines Würfels demonstriert. Man stelle sich dabei vor, dass die Oberfläche des Polyeders aus einer Gummihaut besteht.

1. Nach Herausnehmen einer Fläche ($F \to F-1$) kann man die Oberfläche so stark deformieren, dass sie schliesslich flach in der Ebene liegt.

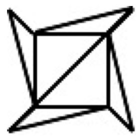




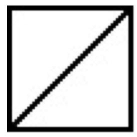
2. Triangulation: In jedem Vieleck, das nicht schon ein Dreieck ist, wird eine Diagonale eingezeichnet: ($K \to K+1, F \to F+1$) $E-K+F$ bleibt konstant.



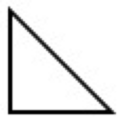
3. Bei den Dreiecken, die nur eine Kante auf der Randlinie haben, wird alles entfernt, was nicht zugleich zu anderen Dreiecken gehört: ($K \to K-1, F \to F-1$) $E-K+F$ bleibt konstant.



4. Bei den Dreiecken, die zwei Kanten auf der Randlinie haben, wird auch alles entfernt, was nicht zugleich zu anderen Dreiecken gehört: ($E \to E-1, K \to K-2, F \to F-1$) $E-K+F$ bleibt konstant.



5. Die Punkte 3. und 4. werden so lange wiederholt, bis zuletzt nur noch ein Dreieck mit $E-K+F=1$ übrig bleibt.



Bei diesen Operationen hat sich der Wert von $E-K+F=1$ nicht verändert. Berücksichtigt man noch Punkt 1., so muss für das Polyeder $E-K+F=2$ gelten. □

Übung 41. Zeichne die entsprechende Beweisfiguren für das Tetraeder.

Übung 42. Ein konvexes Polyeder hat 14 Flächen und 24 Ecken. Wie viele Kanten hat es?

Lösungen

1.) klar

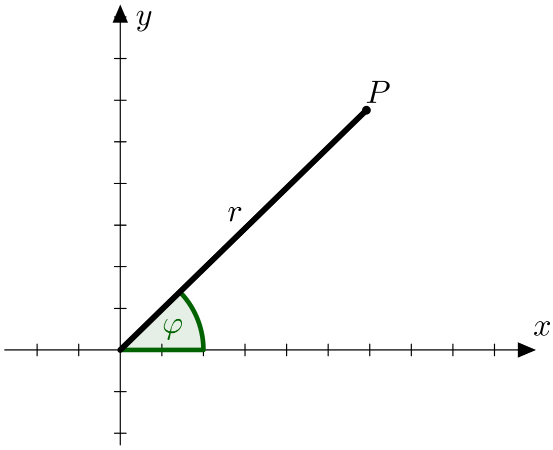
2.) f, ✓, f, ✓

5.) $4, 4, 6;\ 8, 6, 12;\ 6, 8, 12;\ 20, 12, 30;\ 12, 20, 30.$

7.) 36

5 Polarkoordinaten

Die Lage eines Punktes P, verschieden von $(0 \,|\, 0)$, in einem rechtwinkligen Koordinatensystem kann nicht nur durch seine kartesischen Koordinaten $(x \,|\, y)$, sondern auch durch seinen Abstand $r > 0$ vom Ursprung und einem Richtungswinkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig angegeben werden.



Das Paar $(r \,|\, \varphi)$ nennt man die **Polarkoordinaten** von P.

Übung 43. Stelle Formeln für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten $(x \,|\, y)$ in Polarkoordinaten und vice versa auf.

Übung 44. Berechne die Polarkoordinaten der Punkte $K_1 = (3 \,|\, 0)$ und $K_2 = (-3 \,|\, -4)$, sowie die kartesischen Koordinaten der Punkte $P_1 = \left(7 \,|\, \frac{\pi}{2}\right)$ und $P_2 = \left(5 \,|\, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Übung 45. Zeichne die Kurven der Gleichungen. Benutze gegebenenfalls eine Wertetabelle.

(a) $r = 4$

(b) $\varphi = 60!‘$

(c) $r = \cos(2\varphi)$

(d) $r = 10\sin(3\varphi)$

(e) $r = 5(1 - \cos\varphi)$

(f) $r = 4\cos(2\varphi)/\cos\varphi$

Übung 46. Zeichne die Kurve, die durch folgende Parametergleichung gegeben ist

$$x = 2(t - \sin t)$$
$$y = 2(1 - \cos t)$$

mit $t \in \mathbb{R}$. Diese Kurve wird als *Helena der Mathematik* bezeichnet.

Lösungen

1.) $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\,|\, \tan^{-1}(\frac{y}{x})\right)$; $(r \cos\varphi \,|\, r \sin\varphi)$

2.) $(3\,|\,0!`)$, $(5\,|\,233.13!`)$, $(0\,|\,7)$, $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\,|\,-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.) Kreis; Gerade; Lemniskate; dreizackige Blume; Kardioide; Strphoide.

4.) Zykloide.