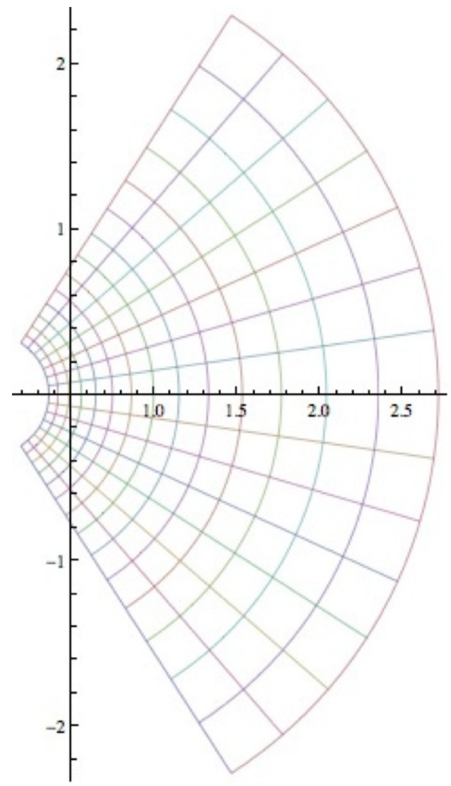
# Komplexe Potenzen

Angewandte Mathematik
Komplexe Funktionen
Potenzen
gymkl, WaJ

## 1 Euler'sche Formel und Exponentialdarstellung




Die Formel für das Argument eines Produkts von zwei komplexen Zahlen hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einer Eigenschaft der Exponentialfunktion. Es gilt nämlich

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

Somit ist die Verbindung zu komplexen Zahlen mit der Exponentialfunktion keine Überraschung.

**Definition 1.1.** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzt man

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha.$$

Das Theorem von Pythagoras zeigt, dass

$$\left|e^{i\alpha}\right| = 1.$$

Das bedeutet, dass die komplexen Zahlen $e^{i\alpha}$ auf dem Einheitskreis um den Ursprung liegen.

**Übung 1.** Verifizieren Sie obige Behauptung. Welchen Wert haben $e^{i\pi}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^i, e^{i(x+2\pi)}$.

Die Funktion $f(x) = e^{ix}$ ist $2\pi$-periodisch.

**Satz 1.1.** *Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann in der Form*

$$z = |z|\, e^{i \arg z}$$

*geschrieben werden.*

*Beweis.* Wir zeigen, dass das Argument und die Norm der beiden Zahlen $z$ und $|z|\, e^{i\arg z}$ gleich gross sind. Dann müssen die beiden Zahlen identisch sein. Es gilt

$$\arg\left(|z|\, e^{i\arg z}\right) = \arg e^{i\arg z} = \arg z$$

und

$$\left||z|\, e^{i\arg z}\right| = |z| \left|e^{i\arg z}\right| = |z| \cdot 1.$$

□

Nun wissen wir, dass jede komplexe Zahl zur Basis $e$ geschrieben werden kann. Praktisch wird dies erst, wenn die Potenzrechenregeln auch für komplexe Exponenten gelten. Dann wird nämlich die Multiplikation in $\mathbb{C}$ besonders einfach. Oh Wunder, es gilt

**Satz 1.2.** *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}.$$

*Beweis.* Übung □

Damit kann man nun die Multiplikation zweier komplexer Zahlen auf eine Multiplikation und Addition in $\mathbb{R}$ zurückführen.

**Satz 1.3.** *Für komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

Insbesondere hat man

**Satz 1.4** (Formel von De Moivre [1]). *Für $n \in \mathbb{N}$ und $z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ gilt*

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\alpha) + i\sin(n\beta)).$$

*Beweis.* $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{i\alpha n} = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ □

**Übung 2.** Berechne ohne DeMoivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3.$$

## 2 Wurzeln von komplexen Zahlen

**Übung 3.** Bestimme für $z = 1 + i$ die Werte $z^0, z^1, z^2, z^3$ und $z^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

**Beispiel 1.** Wir betrachten die Gleichung

$$z^5 = 32.$$

In $\mathbb{R}$ hat man die einzige Lösung $z_1 = 2$. Mit Hilfe der komplexen Zahlen kriegt man via

$$\left|z^5\right| = |z|^5 = 32$$

und

$$\arg z^5 = 5\arg z = 0 + k2\pi \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Daraus folgen die Bedingungen

$$|z| = 2$$

und

$$\arg z \in \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z}.$$

Wir erhalten damit fünf verschiedene Lösungen.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\cdot 0} \\ z_2 &= 2e^{i\cdot\frac{2\pi}{5}} \\ z_3 &= 2e^{i\cdot 2\frac{2\pi}{5}} \\ z_4 &= 2e^{i\cdot 3\frac{2\pi}{5}} \\ z_5 &= 2e^{i\cdot 4\frac{2\pi}{5}} \end{aligned}$$

[1] Abraham DeMoivre (1667 – 1754), franz. Mathematiker. Er hat erhebliche Beiträge auf den Gebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Trigonometrie geleistet.

Die Lösungen sind auf einem Kreis mit Radius 2 und die Differenzen zwischen den Argumenten Vielfache von $\frac{2\pi}{5}$, d.h. von $\frac{360°}{5} = 72°$. Daher gibt es keine weiteren Lösungen, weil z.B.

$$z_6 = 2e^{i5\frac{2\pi}{5}} = 2e^{i2\pi} = z_1.$$

Es sieht so aus, als gäbe es in $\mathbb{C}$ zu einer Gleichung $n$-ten Grades jeweils $n$ Lösungen; oder anders formuliert, als gäbe es im Allgemeinen $n$ verschiedene Wurzeln zur Zahl $z^n$. Dies führt zu

**Definition 2.1.** Sei $z \in \mathbb{C}$ verschieden von 0. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\varphi}$$

und $\varphi \geq 0$ der kleinste Winkel, so dass

$$n\varphi = \arg z + k2\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

**Bemerkung.** Für viele $z \in \mathbb{C}$ gilt somit

$$\arg \sqrt[n]{z} = \varphi = \frac{\arg z}{n}.$$

Es gilt

**Satz 2.1.** *Sei $Z \in \mathbb{C}$ mit $Z \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die $n$ Lösungen der Gleichung*

$$z^n = Z$$

*gegeben durch*

$$z_i = \sqrt[n]{|Z|}e^{\frac{i}{n}\arg z}e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$

*mit $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.*

**Übung 4.** Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = i.$$

Zeichne die Lösungen in die Gauss'sche Zahlenebene.

## Lösungen

1.) ✓, $-1, i, 0.54 + 0.84i, e^{ix}$
2.) $\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + (3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha))i$
3.) $1, 1+i, 2i, -2+2i$, $(2i)^{\frac{k}{2}}$ für $k$ gerade und $2^{\frac{k-1}{2}} + 2^{\frac{k-1}{2}}i$ mit Fallunterscheidung für Vorzeichen.
4.) $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, -i$