55. Die schönste Formel wurde im 18. Jahrhundert in Berlin entdeckt

Vor einigen Jahren gab es eine Umfrage unter Mathematikern: Was ist die schönste Formel? Zur Auswahl standen Beispiele aus verschiedenen Bereichen der Mathematik, am Ende siegte eine Formel, die auf den Mathematiker Euler zurückgeht. Sie stammt schon aus dem 18. Jahrhundert, Euler war damals Mathematiker am Hof Friedrichs des Großen in Berlin.

Um sie zu verstehen, muss daran erinnert werden, was denn eigentlich die wichtigsten Zahlen der Mathematik sind. Da sind zunächst natürlich die Null und die Eins, denn erstens kann man damit alle anderen Zahlen aufbauen, und zweitens sind ihre Eigenschaften beim Arbeiten mit Zahlen unersetzlich. Das liegt im Wesentlichen daran, dass die Addition einer Null und die Multiplikation mit Eins keine Auswirkungen haben.

Weiter braucht man sicher die Kreiszahl π (Pi), man lernt sie schon in der Schule bei der Kreisberechnung kennen. Auch ist für die Beschreibung von Wachstumsvorgängen die Zahl e $(= 2.7181\ldots)$ unerlässlich: Exponentielles Wachstum (Bakterien) und exponentielle Abnahme (beim radioaktiven Zerfall) gehören zu den grundlegenden mathematischen Modellierungen, in beiden kommt die Zahl e vor. Schließlich ist seit einigen Jahrhunderten klar, dass man den Bereich der Zahlen um die komplexen Zahlen erweitern muss, um alle Gleichungen lösen zu können. Das gilt nicht nur für schwierigere mathematische Untersuchungen, komplexe Zahlen gehören auch zum Handwerkszeug von – zum Beispiel – Elektroingenieuren.

$$0=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

Bemerkenswerterweise gibt es nun einen Zusammenhang zwischen den Zahlen 0, 1, π, e und der wichtigsten komplexen Zahl i: Rechnet man nämlich Eins plus e hoch i mal π aus, bestimmt man also $1 + e^{i\cdot\pi}$, so kommt exakt Null heraus. Das ist die Eulersche Formel.

Für Mathematiker hat sie deswegen eine besondere Bedeutung, weil sie symbolisch für die Einheit der Mathematik steht. Es ist nämlich fast schon ein bisschen mysteriös, dass es zwischen Zahlen, die für völlig verschiedene Zwecke maßgeschneidert wurden, einen einfach zu beschreibenden Zusammenhang gibt.

Die schönste Formel: der Beweis

Zu fast allen Zahlen, die in der schönsten Formel auftreten, gibt es in den „Fünf Minuten Mathematik“ Informationen: zu π (Beitrag 16), zur Null (Beitrag 28), zu e (Beitrag 42) und zu i (Beitrag 94). Wie ist Euler denn darauf gekommen?

Um die Formel zu verstehen, muss man einiges über Funktionen wissen. Es wird eine wichtige Rolle spielen, dass man komplizierte Ausdrücke manchmal durch einfache Summen ganz gut annähern kann. Ein Beispiel: Wenn eine Zahl x „klein genug“ ist, so kann man die Wurzel aus $1+x$ durch $1+x/2$ annähern. Für $x = 0.02$ wollen wir das nachprüfen: Es ist $\sqrt{1.02}$ gleich $1.00995\ldots$, und das ist sehr nahe bei $1 + x/2 = 1.01$. Wenn man es noch genauer machen möchte, kann man noch einen Summanden mit einem Vielfachen von x^2 hinzufügen, noch genauer wird es, wenn man auch x^3 berücksichtigt usw.

Hier interessiert die Exponentialfunktion. Für e^z erhält man die besten Annäherungen, wenn man zwei, drei oder noch mehr Summanden der folgenden Summe betrachtet:

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

(Zur Erinnerung: Es ist $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ usw.) Da der Fehler bei immer mehr Summanden beliebig klein wird, schreibt man dafür auch

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

Für die Sinus- und Cosinus-Funktion gibt es auch entsprechende Formeln:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots ;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots .$$

Wenn man dann mit der Formel für e^z den Ausdruck e^{ix} berechnet, wobei i die imaginäre Einheit ist, so ergibt sich unter Beachtung von $i^2 = -1$ (siehe Beitrag 94), dass

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots + \\
&\quad\; i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots\Big) \\
&= \cos x + i \sin x .
\end{aligned}$$

Nun muss man nur noch speziell $x = \pi$ einsetzen und wissen, wie die trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß berechnet werden: Dort ist $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$. So folgt wirklich $e^{i\pi} = -1$, das ist im Wesentlichen die Eulersche Formel.