Jupyter gym1 Winkelfunktionen

June 23, 2020

1 Die Winkelfunktionen

1.1 Einleitung

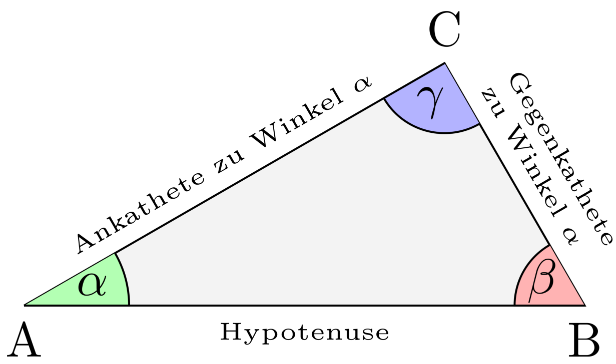
Übung : Betrachte ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel α; wähle zum Beispiel 35° oder so. Zeichne nun ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit denselben Winkeln aber unterschiedlichen Seitenlägen. Skizziere ein drittes dazu.

Übung: Bestimme nun — zum Beispiel durch Messen — je für deine drei Dreiecke das Verhältnis der längsten Seite h zur Seite g, die dem gewählten, spitzen Winkel α gegenüber liegt. Wieso sind alle drei Quotienten gleich?

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke und dem Strahlensatz muss natürlich gelten, dass die jeweiligen Verhältnisse gleich sind. Legt man also von Beginn an fest, dass ein Winkel 90° beträgt, so wird durch einen zweiten Winkel α der dritte Winkel β natürlich durch $90° - \alpha$ festgelegt. Dreiecke mit gleichen Innenwinkel sind ähnlich bis auf zentrische Streckung. Daher ist jeweils das Verhältnis von zwei Seiten konstant.

Bevor wir jetzt die Winkelfunktionen definieren, sei noch einmal das Vokabular im rechwinkligen Dreieck bereit gestellt. Sobald ein Dreieck einen rechten Winkel hat, dann gibt es eine längste Seite c, und die liegt dem rechten Winkel gegenüber. Diese längste Seite heisst **Hypotenuse**. Die beiden andern Seiten heissen **Katheten** . Für unsere Zwecke ist es praktisch, zwischen den beiden Katheten zu unterscheiden. Hat man im rechtwinkligen Dreieck einen Winkel gegeben, α, dann liegt eine Kathete dem Winkel gegenüber und die andere Kathete liegt an den Winkel. Wir nennen sie entsprechend **Gegenkathete** bzw. **Ankathete** .

[1]:
```
%%latex
\begin{center}
    %\fbox{
    \includegraphics[trim=0cm 0cm 0cm 0cm, clip, width=0.5\textwidth]{pictures/
 ↪katheten.png}%}
\end{center}
```



1.2 Die Winkelfunktionen

Beim ersten Lesen empfehle ich meine kurze Zusammenfassung, Trigonometrie in 7 Minuten, am Ende dieser Sequenz anzuschauen.

Da im rechtwinkligen Dreieck für gegebene Winkel α und somit $\beta = 90° - \alpha$ das Verhältnis von beispielsweise Gegenkathete zu Hypotenuse aufgrund der Ähnlichkeit immer gleich sein muss, hat man es mit einer Funktion zu tun, die zu jedem Winkel α den Wert des entsprechenden Verhältnis liefert. Man nennt diese Funktion **Sinus** des Winkels α und schreibt kurz

$$\sin(\alpha).$$

Übung : Berechne Sinus von 0°, 30°, 45°, 60° und 90°. Versuche die Werte exakt anzugeben. Dabei helfen eine Skizze und der Gedanke an Objekte mit den verlangten Winkeleigenschaften.

Übung : Gegeben seien die Hypothenuse $c = 5$ und die Gegenkathete $g = 3$. Bestimme alle Winkel dieses Dreiecks.

Übung : Eine Aufgabe aus der Physik mit Kräftezerlegung von der Leifi-Physik-Site.

1.3 Cos und Tan

Analog zum Sinus eines Winkels definiert man entsprechend den **Cosinus** als Verhätnis Ankathete zu Hypothenuse und den **Tangens** als Verhältnis Gegenkathete zu Ankathete.

Zu meiner Zeit im Gymnasium habe ich mir folgenden Spruch für die Winkelfunktionen gemerkt:

> GugelHopf, A Ha, Geht Auch!

Dies sind in der Reihenfolge sin, cos, tan die Buchstaben für die entsprechenden Verhältnisse $\frac{g}{h}$, $\frac{a}{h}$ und $\frac{g}{a}$.

Übung : Berechne wie oben für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60° und 90° jeweils die Cosinus- bzw. Tangens-Werte.

Übung : Zeige, dass $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Übung : Zeige, dass $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ für beliebige α. Hint: Verwende den Satz von Pythagoras.

Schliesslich gibt es unter Trigonometrie in 7 Minuten noch die oben bereits erwähnte Zusammenfassung.

1.4 Ausblick

Unten stehende Geogebra "Animation" zeigt, wie man in natürlicher Weise die Winkelfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ erweitern kann.

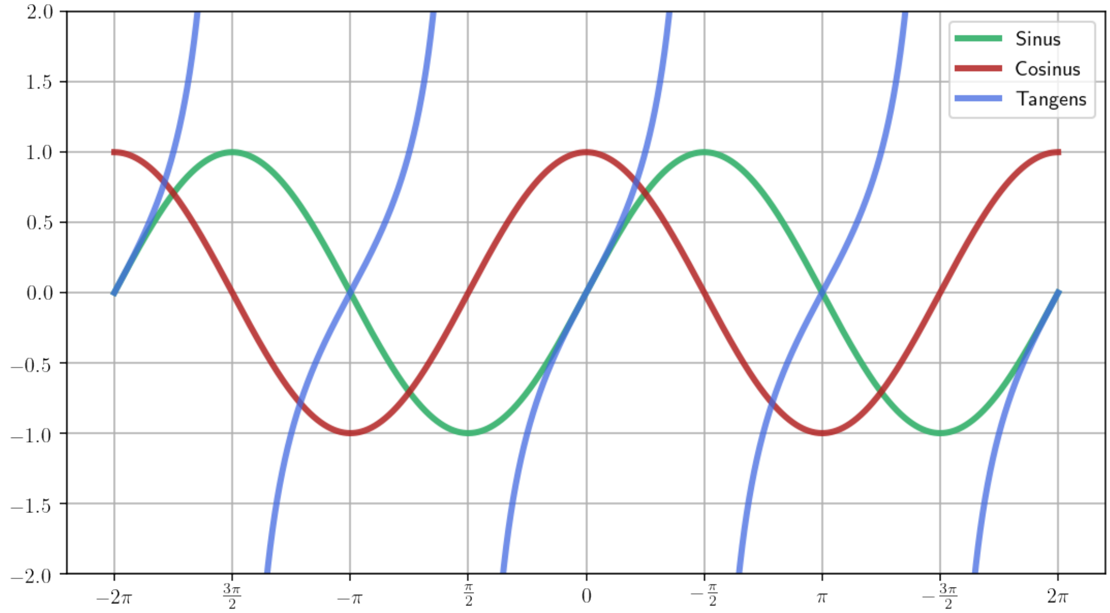
[2]:
```
from IPython.display import IFrame

IFrame("https://www.geogebra.org/m/w65bqWTe",900,500)
# Drück den roten Link um zum dynamischen Geogebra sheet geführt zu werden.
```

[2]:
```
<IPython.lib.display.IFrame at 0x7fb888971110>
```

Dabei sollte man noch den Begriff des **Bogenmass** einführen. Dieser erlaubt Mathematikern, die Argumente bei Winkelfunktionen einheitenfrei zu halten. Kurz und prägnant: Statt dem Winkel im Gradmass gibt man die Bogenlänge im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) an. Der Umfang eines Kreises mit Radius r beträgt bekanntlich $U = 2\pi r$. Das heisst man kann dann beispielsweise statt $360°$ einheitenlos 2π schreiben. Die restlichen Winkel erhält man natürlich als Proportionalität. Eine kommentierte Einführung ins Bogenmass gibts auf meinem Youtube-Kanal `gym math`.

[3]:
```
%config InlineBackend.figure_format = 'retina'
import matplotlib
matplotlib.rcParams["text.usetex"] = True
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.arange(-2*np.pi,2*np.pi,0.001)
y1 = np.sin(x)
y2 = np.cos(x)
y3 = np.tan(x)
y3[:-1][np.diff(y3) < 0] = np.nan # get rid of joining discontinuoties

fig = plt.figure(figsize=(9,5))

plt.plot(x,y1, color="#3CB371", alpha=0.95, label='Sinus', linewidth=3)
plt.plot(x,y2, color="#B22222", alpha=0.85, label='Cosinus', linewidth=3)
plt.plot(x,y3, color="#4169E1", alpha=0.75, label='Tangens', linewidth=3)

plt.xticks([-2*np.pi, -1.5*-np.pi, -np.pi, -0.5*-np.pi, 0, 0.5*-np.pi, np.pi, 1.
 ↪5*-np.pi, 2*np.pi], [r'$-2\pi$', r'$-\frac{3\pi}{2}$', r'$-\pi$',␣
 ↪r'$-\frac{\pi}{2}$', r'$0$', r'$\frac{\pi}{2}$', r'$\pi$',␣
 ↪r'$\frac{3\pi}{2}$', r'$2\pi$'])
plt.grid()
plt.ylim(-2,2)

fig.suptitle(r"Winkelfunktionen", fontsize=20)
plt.legend()
plt.show()
```

Winkelfunktionen



[ ]: