2 Polynome

Polynome[1] sind Terme. Beispiele:

$-8ab^2cd$	1-gliedriges Polynom oder *Monom*[2]
$5yz + 2z^3$	2-gliedriges Polynom oder *Binom*[2]
$-u - v - w$	3-gliedriges Polynom oder *Trinom*[2]
$x^5 - x^4 - 1.3x^2 + 7$	4-gliedriges Polynom

Das Monom $-8ab^2cd$ besteht aus dem "Namen" ab^2cd ($abbcd$) und dem *Koeffizienten*[3] -8.

Wir fassen das Polynom $x^5 - x^4 - 1.3x^2 + 7$ als die *Summe der Glieder* x^5, $-x^4$, $-1.3x^2$, 7 auf. Jedes dieser Glieder ist ein Monom.

Beispiele für Terme, die keine Polynome sind: $\frac{1}{x}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $|n-5|$, 2^y

Dagegen gilt ein Term, der zu einer Summe von Monomen oder einem einzelnen Monom äquivalent ist, ebenfalls als Polynom. Beispiele:

$$2(a^2 - 3a - 4) = 2a^2 - 6a - 8, \qquad \frac{c+d}{2} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d, \qquad |y^2| = y^2$$

Unter der *Normalform* eines Polynoms versteht man seine einfachste Darstellung als Summe von Monomen oder als einzelnes Monom.

2.1 Berechnung von Polynomwerten

1 Berechne den Wert des Binoms $a - b^2$ für
a) $a = 9,\ b = 4$ b) $a = 11,\ b = -3$ c) $a = -2,\ b = 5$ d) $a = b = -0.5$

2 Berechne den Wert des Trinoms $-x^2 + 4xy + 7$ für
a) $x = 3,\ y = 5$ b) $x = -2,\ y = 6$ c) $x = 0,\ y = -9.8$ d) $x = -1,\ y = -6$

1 Griech. polýs "viel", griech. nómos "Gesetz, Regel".
2 Griech. mónos "allein", lat. bis "zweimal", lat. tres "drei".
3 Lat. con (= cum) "zusammen mit", lat. efficiens "bewirkend".

3 Berechne die Polynomwerte $P(10)$, $P(0)$, $P(-10)$
a) $P(k) = 6k^3 + 7k^2 + 8k + 9$ b) $P(z) = z^3 - z^2 - 5z$

4 Berechne die Polynomwerte $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$
a) $P(a) = a^4 - 5a^2 + a + 4$ b) $P(b) = b^4 - b^3 + b^2 - b + 1$

Zu 5 – 8: Fülle die Tabelle aus.

5

	x	$5x-6$	$\frac{1}{2}x+8$	$-x^3+x^2$	$-x^2-10x-1$
a)	4				
b)	-4				
c)		19			
d)			7.5		

6

	a	b	$3a+4b$	a^2+b^2	a^2b-ab^2
a)	5	3			
b)	-2	-6			
c)	1		-25		
d)		3	0		

7

	$3y+1$	$6y+2$	$9y+3$	$-3y-1$	$-6y-2$
a)	10				
b)		16			
c)				20	
d)			4.5		

8

	z^2	$5z^2+7$	z^4	z^6-9z^2	z^8
a)	4				
b)	5				
c)		17			
d)			9		

2.2 Addition und Subtraktion von Polynomen

Glieder mit dem gleichen "Namen" kann man *zusammenfassen.*
Beispiel: $2ab - 5ab = -3ab$. Dabei werden die Koeffizienten addiert.

Glieder mit verschiedenen "Namen" kann man nicht zusammenfassen.
Beispiel: $2ab - 5a$ ist ein Binom, das nicht zu einem Monom umgeformt werden kann.

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.2 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

9 a) $10a - 5b - c - 17a - 6b + 9a - 7b - 12c + 8b$
b) $-x^2 + 35x - 24 - 3x^2 + 19 - 47x - 19 + 48x + 2x^2$

10 a) $4ab - 6.2ac + 5bc - 9.3ab - 1.5ac - 4bc + 9.4ab$
b) $xyz - \frac{3}{2}xy - x - \frac{25}{3}xyz - 11 + \frac{7}{6}xy - x - xy + \frac{25}{3}xyz$

11 a) $(4m - 17) + (11m - 6)$ b) $5n^2 + 8n + (n^3 - 5n^2)$
c) $x^2 - 3x - 2 + (-x^2 + x + 2)$ d) $(2ef + e - 5f) - 9e - 6f + 3$

12 a) $8u + (6v + w) + (-15u + 12w) + (-9v - 3w) + (7u - 4v)$
b) $8u + (6v + w - 15u) + 12w + (-9v) + (-3w + 7u - 4v)$
c) $8u + 6v + (w - 15u) + (12w - 9v - 3w + 7u) + (-4v)$
d) $(8u + 6v) + w + (-15u) + (12w - 9v - 3w + 7u - 4v)$

Zu 13 – 16: Addiere die untereinander stehenden Polynome.

13 a) $\begin{array}{r} 136a - 75b \\ -19a + 28b \end{array}$ b) $\begin{array}{r} -7r^2 - 6r \\ 15r^2 + r \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -3x^2y + \frac{7}{2}xy^2 \\ \frac{8}{3}x^2y - \frac{5}{2}xy^2 \end{array}$

14 a) $\begin{array}{r} -x^2 + 2x - 5 \\ 4x^2 - 3x + 8 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 2a - 7b - 9c \\ 5b - 6c - d \end{array}$ c) $\begin{array}{r} u^3 - u^2v + uv^2 \\ u^2v - uv^2 + v^3 \end{array}$

15 a) $\begin{array}{r} -6abc + 5ab - 4a - 13 \\ 9abc - 8ab - 2a + 10 \\ 7abc + 3ab - a - 12 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} -1.3z^2 - 2.4z - 1.9 \\ 7.6z^2 + 0.8z - 0.1 \\ -0.2z^2 + 1.6z + 5.4 \end{array}$

16 a) $\begin{array}{r} p^4 - 6p^3 - 12p^2 \\ p^3 - 6p^2 - 12p \\ - p^2 + 6p + 12 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 + y - 1 \\ x^2 - 6y^2 - 7x \\ xy + 2y^2 - 5x + 8 \end{array}$

17 a) $-(a + b)$ b) $-(11r + 13s + 8t)$ c) $-(x^3 + 4x^2 + 5x + 6)$
d) $-(-z)$ e) $-(-u + v - w - y)$ f) $-(2ab - 7ac - a + 9)$

18 Stelle die Werte der Binome $a + b$, $a - b$, $-a + b$, $-a - b$, $b + a$, $b - a$ für
a) $a = 29$, $b = 53$ b) $a = -47$, $b = 16$ c) $a = 61$, $b = -35$
d) $a = -28$, $b = -14$
in einer Wertetabelle zusammen.

19 a) $a - (b + c)$ b) $5k - (k + 3)$ c) $-n - (n^2 + 4n)$

20 a) $8y + 2 - (3y + 5)$ b) $2x + 4 - (x^3 + 4)$ c) $2.5a - 3.6b - (1.8b + c)$

21 a) $a - (b + c + d)$ b) $4x - 5y + 6z - (3x + 2y + 8z)$

22 a) $x^2 + 8x - (x^2 + 2x + 4)$ b) $2a^3 - 3a^2b - (a^2b + ab^2 + ab)$

23 a) $a - (b - c)$ b) $a - (-b + c)$ c) $a - (-b - c)$
d) $3m - (3m - 4)$ e) $\frac{1}{2}y - \left(-x - \frac{1}{3}y\right)$ f) $12t^2 - (-12t^2 + 5t)$

24 a) $z^2 - 4z - (2z - 3)$ b) $-5e + 7 - (-5e + 7)$ c) $p + q - (-p - q)$

25 a) $a - (-b + c - d)$ b) $a - (b - c - d + e)$
c) $4v - (-5u - 6v + 7w)$ d) $8x - 8y - 8z - (x - 2y + 3z)$

26 a) $-6g + 5 - (g^2 - 7g - 1)$ b) $a - 2b + 3c - 4d - (a - 2b + 3c - 4d)$

Zu 27 – 30: Subtrahiere das untere Polynom vom oberen.

27 a) $\begin{array}{r} 3a - 5b \\ 9a + 7b \end{array}$ b) $\begin{array}{r} -2c - d \\ 6c - d \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -8z + 7 \\ -8z - 12 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} x^2 + \frac{2}{3}y^2 \\ -x^2 - \frac{1}{5}y^2 \end{array}$

28 a) $\begin{array}{r} 5rs - 7rt - 9st \\ -6rs + rt - st \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1.6n^3 - 0.8n^2 + 2.7n - 3.2 \\ 1.2n^3 - 0.6n^2 - 1.5n + 4.8 \end{array}$

29 a) $\begin{array}{r} x - y + z \\ x - z \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 4a \\ 2a - 5b + c \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -e^2 + 9e \\ e^2 - 3 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 8p - 8q \\ 7q - 7r \end{array}$

30 a) $\begin{array}{r} 5at - 2bt - 3c \\ 5at - 2bt + 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8x \\ - 4x^3 + 6x^2 + 8x - 10 \end{array}$

31 $P_1 = a - 0.5b - 1.8c + 2d$, $P_2 = 1.4b - 0.6c - 3.5d + 2e$
a) $P_1 + P_2 = ?$ b) $P_1 - P_2 = ?$ c) $P_2 - P_1 = ?$

32 $P_1 = -5x^2 - 7xy - y^2 - 4x + 8y - 2, \quad P_2 = 5x^2 + xy - y^2 + 3x - 4y - 9$
a) Addiere die Polynome P_1 und P_2.
b) Subtrahiere das Polynom P_2 von P_1.
c) Subtrahiere das Polynom P_1 von P_2.

33 Setze in den Term $a - b$ und in den Term $b - a$ ein:
a) $a = -26,\ b = -15$ b) $a = 4.4,\ b = -3.9$
c) $a = 5x + 2y,\ b = 4x + y$ d) $a = 2t - 3,\ b = t + 6$
e) $a = v - 7,\ b = w - 5$ f) $a = z^2 + 2z - 4,\ b = 3z^2 - z + 8$

34 Setze in den Term $a - b - c$ ein:
a) $a = 14,\ b = 60,\ c = 29$
b) $a = -25,\ b = -37,\ c = -12$
c) $a = 4n - 5,\ b = 3n - 6,\ c = 2n - 7$
d) $a = x - 4y,\ b = -2x + 9z,\ c = 5y - 8z$
e) $a = u^2 - u + 3,\ b = 6u - 7,\ c = u^2 - 4u$
f) $a = p,\ b = q - r,\ c = r - q$

35 a) $2v - (5w + 10) - 4w - (8v - 7) - 1 + (6v - 9w)$
b) $a - (2b + 3c + 4) + (-5a + 6) - 7b - (-8a + 9b + 10c - 11)$

36 a) $\frac{1}{3} - (m^2 - m - 2.5) - 4m - \left(m^2 + \frac{5}{6}\right)$
b) $8x^2y - 2xy^2 - (7x^2y^2 + 4xy^2 - 5xy) - 16x^2y - (-13x^2y^2 + 8x^2y - 6xy^2)$

37 a) $a - (b - (c - d))$ b) $-(-(3p + 8) + 6p) + 8$
c) $15y - [5y - (2y - z)]$ d) $6.4r - [2.7 - (4.5r + 3.1)]$
e) $-[a - (6b + 4) + b] + 3a - 7$ f) $8x^2 - [4x - (3x^2 - 7x + 2)] + 9$

38 a) $-9s + 6t - [t - (5s - 8t) - (3s + 7t) - s]$
b) $12q^2 - (25q^2 - (17q - 20) - 13q^2) - (10q - 15)$

39 a) $6.75f - (3.2g - 1.05) - [2.54f - (f - 0.49g + 0.07)]$
b) $-\left[\frac{1}{10}x - \left(xy - \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}y\right)\right] + xy - \left(\frac{1}{15}x - \frac{1}{4}y\right)$

40 $45n^3 - (12n^2 + 3n - 1) - [45n^3 - (5n^2 + 10n - 1) - (-9n^2 + 16n + 3)] - 24n^2$

41 a) $+[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$
b) $+[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$
c) $-[(3a - 4) + (5b - 2)] + [(3a - 4) - (5b - 2)]$
d) $-[(3a - 4) + (5b - 2)] - [(3a - 4) - (5b - 2)]$

42 a) $(15x - 7y) - [5x - (10x + 8y) + 12] - [20x + y - (5x + 12)] - y$
b) $-[-(-2u^2 + 11u - 13) + 4u + 5] + 7u^2 - u - [3u - 8 - (-u^2 + 9)]$

43 a) $a - (b - (c - (d - e)))$
b) $1 - (2 - (3 - (4 - (5 - z))))$
c) $50k + 29 - \{18k - [44 - (7k + 36)]\} - 13k$

44 a) $-(3p + 8) + 5p - \{-6p + 2 - [9p - (p - 1) - 7] + 4p\}$
b) $2a^3 - \{4a - [4 - (6a^3 - 1) - a^2] - (3a^2 - 5) + 3a - [4a^3 - (2a^2 - 7a)]\}$
c) $20x^2 - (7xy - (3y^2 - (8x^2 + 11xy + 6y^2) - 12x^2) - 5y^2) - (9xy - 4y^2)$

2.3 Multiplikation und Division von Polynomen

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.3 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

45 a) $3(2a + 5b)$ b) $(-2)(9c - d)$ c) $(-n)(-n + 8)$
d) $(-x - 2y)(-3)$ e) $(4z - 1)z^2$ f) $(6s - 5t)(-0.5u)$

46 In welchen Aufgaben von Nr. 45 kann man ein Klammerpaar weglassen, ohne dass sich am Ergebnis etwas ändert?

47 a) $-5(7v - 9w)$ b) $-c(-a + b - c)$ c) $2p(p^2 - 1.5p - 4)$

48 a) $(8s + 3t)3u$ b) $(-x - y + z - 1)(-1)$ c) $(e + 2f - 6)ef$

49 Multipliziere das Polynom $x^2 - 0.8x + 2.4$ mit
a) 4 b) -4 c) $\frac{2}{3}$ d) $5x$ e) $-x^2$ f) $-0.5y$

50 Multipliziere das Polynom $2a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 8b^3$ mit
a) -1 b) 0 c) a d) $-b$ e) ab f) $-2.5r$

51 a) $3uv^2(u^4 - 3u^2v^2 - 2v^4)$ b) $-2abc(2a^2 + 4ab - b^2 - ac + 8c^2)$

52 a) $(-m^6 + m^4 - m^2 + 1)(-m)$ b) $-\frac{1}{3}xy^2z^3\left(\frac{5}{2}x^3y^2z - 6x^2y + \frac{3}{5}x\right)$

53 a) $(-1)(a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$ b) $b_3(-b_1 + b_2 - b_3 + b_4)$

54 a) $(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)x_4$ b) $y_1y_4(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

55 a) $4(a + 2b) + 3(a - 3b)$ b) $d(c - 11) - c(d - 9)$
c) $x - 5y - 8(x - y + z)$ d) $n^2 - n(n + 5) - 6(1 - n)$

56 a) $2(3u - v) - 3(2u + v)$ b) $a(9a + 10) - 5(a^2 + 2a - 3)$
c) $p(q - r) - q(p - r) - r(-p + q)$ d) $4(2x - 7y - 3z) - 7(x - 4y) + z$

Zu 57–78: $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

57 a) $(a+b)(c+d)$ b) $(x+4)(x+y)$ c) $(t+2)(t+5)$
d) $(e+f)(g-h)$ e) $(v-6)(w+1)$ f) $(p-q)(x+7)$

58 a) $(x_1+x_2)(y_1+y_2)$ b) $(n+8)(n-3)$ c) $(a-z)(b+z)$

59 a) $(a-b)(c-d)$ b) $(x-y)(z-5)$ c) $(k-2)(k-4)$

60 a) $(a_1-a_2)(b_1-b_2)$ b) $(u-3)(v-3)$ c) $(p-x)(p-y)$

61 a) $(-s_1+s_2)(t_1-t_2)$ b) $(-r+6)(-r+4)$ c) $(-f-g)(-g+1)$

62 a) $(a+b)(x+y)$ b) $(a-b)(x+y)$ c) $(a-b)(x-y)$
d) $(-a+b)(-x+y)$ e) $(-a-b)(x-y)$ f) $(-a+b)(-x-y)$

63 a) $(2c-7)(4d-1)$ b) $(5v-3w)(-6w+5)$ c) $\left(m+\frac{1}{6}\right)\left(4m-\frac{3}{5}n\right)$

64 a) $(3x-2y)(2x-3y)$ b) $(-11a+17)(-10b-17)$ c) $\left(\frac{3}{2}r-6\right)\left(\frac{2}{3}s+8\right)$

65 a) $(z^2-1)(z+1)$ b) $(st-9s)(-st+9t)$ c) $(4a^2-5b^2)(3a^2-b^2)$

66 a) $(p^3-p)(p^2-p)$ b) $(10x^2+5y)(2x-6y^2)$ c) $(k^4+0.4)(k^2-0.2)$

67 a) $(a+6)(a-2)$ b) $(c-9)(c+1)$ c) $(x-5)(x-3)$
d) $(b-7)(b-1)$ e) $(z+11)(z-11)$ f) $(8-t)(4-t)$

68 a) $(x-12)(x+5)$ b) $(p+2)(p-20)$ c) $(a-2)(a-9)$
d) $(1+n)(15-n)$ e) $(r-6)(r-6)$ f) $(y-3)(y+4)$

69 Berechne $a^2-10a+24$ sowie $(4-a)(6-a)$ für
a) $a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ b) $a=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ c) $a = 0,\ 16,\ -16,\ 2.5$

70 Berechne $2x^2+5x-3$ sowie $(x+3)(2x-1)$ für
a) $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ b) $x=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$ c) $x = 0,\ 10,\ -10,\ 0.6,\ \frac{1}{2}$

71 a) $(2a-5)(3a-1)$ b) $(9-4x)(-3+x)$ c) $(7i-1)(5i+1)$
d) $(-k+4)(-k+4)$ e) $(2d-1)(-3d+8)$ f) $\left(z+\frac{9}{10}\right)\left(z-\frac{5}{6}\right)$

72 a) $(5y-13)(y-7)$ b) $(10-3a)(3+10a)$ c) $(-5s-6)(5s-6)$
d) $(q-1.2)(q-0.4)$ e) $(-c-5)(-c-2)$ f) $\left(\frac{3}{2}r+3\right)\left(2r-\frac{4}{3}\right)$

73 a) $(a+2b)(3a-b)$ b) $(4x-y)(5x+2y)$ c) $(-c+d)(-c+12d)$

74 a) $(q-3r)(q-4r)$ b) $(2a+3c)(-a+6c)$ c) $(8s-9t)(10s+11t)$

75 a) $(t^2+2)(t^2+7)$ b) $(p^2-5)(3p^2-5)$ c) $(n^2-2)(2n^2+1)$

76 a) $(x^2-10)(x^2-10)$ b) $(-w^2+8)(4w^2+9)$ c) $(0.3z^2+6)(2z^2-1)$

77 a) $(3a^2+b^2)(a^2-3b^2)$ b) $(c^3-5)(c^3+4)$ c) $(x^2-2x)(-3x+1)$

78 a) $(x^2-2y^2)(x^2-8y^2)$ b) $(6r-1)(r^2+2r)$ c) $(m^2+4m)(m^2-3m)$

79 a) $(a-2b)(c-d+e)$ b) $(x-z-1)(2x+3y)$

80 a) $(p+q-r)(m-n)$ b) $(4a-b)(b-c-1)$

81 a) $(4x^2-5x+6)(3x-1)$ b) $(y-1)(4y^2+3y-1)$

82 a) $(a+1)(a^2-a-1)$ b) $(-6z^2+3z+4)(-5z+3)$

83 a) $(2x+4y-z)(3x-6y+z)$ b) $(-s^2+3s+1)(s^2-s+2)$

84 a) $(a-2b-3)(2a+3b-2)$ b) $(x^2+4x+5)(x^2-4x+5)$

85 $(5xy-2xz+yz)(xy+xz-2yz)$

86 $(3a^2-ab-4b^2)(-a^2+2ab+b^2)$

87 a) $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$ b) $(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$

88 a) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ b) $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

89 $(2x^3-4x^2+5x-3)(3x^2+2x+1)$

90 $(z^3-2z^2-5z+6)(z^3+2z^2-5z-6)$

91 a) $2(a+b)(c-d)$ b) $-4(p-2)(-p+s)$
c) $5(2x-1)(3x+1)$ d) $(y+3)(y-6)(-y)$

92 a) $-0.7(a-2)(4b+5)$ b) $2(0.5r-3)(r-0.5)$
c) $n(3n-1)(n-6)$ d) $(x-2y)(-x+3y)z$

93 a) $(a-b)(a+b)(x-y)$ b) $(k+1)(k+2)(k+3)$
c) $(g+2)(2v-1)(v+4)$ d) $(2x+1)(3x-1)(5x+2)$

94 a) $(1-c)(5-x)(5+x)$ b) $(3a-b)(a-b)(a+2b)$
c) $(z+2)(z-2)(z^2+4)$ d) $(n^2+1)(2n^2-3)(3n^2-2)$

95 a) $(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$ b) $(2x+3)(y-4)(3z+1)$
c) $(x+2)(x-3)(x+4)$ d) $(c+d)(c-8)(d-8)$

96 a) $(a+b)(s-t)(x+y)$ b) $(x-5)(x+6)(x-1)$
c) $(-x+2)(-y+3)(z-4)$ d) $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2)$

97 a) $(a+b)(a+2b)+(a-b)(a-2b)$ b) $(x+4)(x+5)-2x(x+7)$
c) $(c+d)(8u-v)-d(8u-v)$ d) $(2a-3)(4a-1)-(5a+4)(a-1)$

98 a) $(3x-y)(x+y)+(2x+y)(x-y)$ b) $5p(p-3)-(2p+1)(p-8)$
c) $(a-5)(b-5)-(a-6)(b-6)$ d) $7n(9n+28)-(7n-1)(9n+28)$

99 Berechne die Polynomwerte $P(3)$, $P(7)$, $P(10)$ und $P(-99.5)$.
a) $P(x)=(x-7.5)(x-6)-(x-8)(x-5.5)$
b) $P(t)=2t^2-(2t+5)(t-3)$

100 Berechne die Polynomwerte $P(11)$, $P(-2)$, $P(0)$ und $P(3.33)$.
a) $P(a)=(a-5)(a-8)-(a-10)(a-4)$
b) $P(x)=(4x+9)(4x+5)-(8x+15)(2x+3)$

101 a) $17r^2-(4r-2)(8r-5)+(3r-4)(5r+6)$
b) $(a-7)(a+1)(y+z)+(a-7)(a+1)(-z)$

102 a) $(2x+3)(3x-4)x-(x-11)(x-1)-6x^3$
b) $-(u-1)(2u-1)(3u-1)-1+6u(u^2-u+1)$

103 a) $4a^2-5[a(2a-9)-3(a+7)]+6(a-12)(a+1)$
b) $[(2m-15)(3m-4)-5(m^2-9m+12)](m-1)$

104 a) $13x-[-11y-3(5x-6y)+5(2x-7y)-26x]-12y$
b) $36-[r-(r+3)(r-2)][r^2-(r+3)(r-2)]+(r-6)r^2$

105 a) $40z-\{8z-(9z-4)-2[3z-(7z+1)-(z-9)]-(3z-5(5z-3)]\}$
b) $((((ax+b)x+c)x+d)x+e)x+f$

106 a) $(25u-13v)-\{15u-[14u-3(4u-5v)-8u]-7(2u+4v)\}$
b) $1-x(1-x(1-x(1-x(1-x(1-x)))))$

Zu 107, 108: $a=x-1$, $b=x+2$, $c=x-3$, $d=x+4$. Ersetze a, b, c, d im folgenden Term durch das entsprechende Binom in x und gib die Normalform des so entstandenen Polynoms an.

107 a) ab b) $b+cd$ c) $2a-bd$
d) $(a+b)c$ e) $ac+bc$ f) d^2-12

108 a) $a-bcd$ b) $ab-ac$ c) $a(b-c)$
d) c^2+3c e) $(4a-3c)(2b+d)$ f) $abcd$

Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation, d. h.
$a:b=x \quad\Leftrightarrow\quad a=xb; \quad (a:b)b=a; \quad (ab):b=a$

Der Divisionalgorithmus und Zerlegungen mit Rest folgen im Abschnitt 2.5, die Darstellung von Quotienten in Bruchform im Kapitel 5.

109 a) $(-58a):(-2)$ b) $21rs:3s$ c) $15ac:(-15a)$

110 a) $(-35x):7x$ b) $84d:(-6)$ c) $(-9ab):(-9ab)$

111 a) $3n:6n$ b) $-15y:20$ c) $-8cp:\left(-\frac{1}{2}c\right)$

112 a) $26z:\left(-\frac{2}{3}\right)$ b) $-54k:(-24k)$ c) $0.4ad:(-1.4d)$

113 a) $-19t^2:(-t)$ b) $-105px^2:1.5px$ c) $-21r^3:(-r^2)$

114 a) $-2ab^3:(-4ab)$ b) $119u^4z:(-7u^2)$ c) $-9.2m^2n^2:2.3mn$

115 a) $-5c^3d^4:5c^2d^2$ b) $-42w^5:(-3w^2)$ c) $-28ax^3y^4:16ax^2$

116 a) $6a^4n^4:\left(-\frac{1}{3}a^3n^4\right)$ b) $-x^3y^4z^5:x^2y^3z^4$ c) $-\frac{1}{8}mq^4:\left(-\frac{7}{2}q^3\right)$

117 a) $(8a-8b):8$ b) $(uv+vw):v$ c) $(15x^2+5x):\left(-\frac{5}{3}\right)$

118 a) $(6m+12n):6$ b) $(24a-20):\left(-\frac{4}{5}\right)$ c) $(-bt+ct):(-t)$

119 a) $(15ab - 10a) : 5a$ b) $(p^2 - p) : (-p)$
c) $(1.4x^4 + 2x^3z) : 0.1x^3$ d) $(-7cy + 3y) : (-3y)$

120 a) $(14r^2 - 35r) : (-7r)$ b) $(u^2v - uv) : uv$
c) $(-9ax^4 + 8bx^3) : (-6x^2)$ d) $(8apq - 12bpq) : \left(-\frac{1}{4}pq\right)$

121 a) $(18ab + 27ac - 36ad) : 9a$ b) $(10k^2 + 17k - 32) : (-1)$
c) $(-1.8x^5 + 2.4x^4 - 3x^3 + 3.6x^2) : (-2.4x^2)$

122 a) $(-12at + 20bt - 32ct) : (-4t)$ b) $(16z^3 - 35z^2 - 27z) : 42z$
c) $(70x^5y + 25x^4y^3 - 90x^3y^4 - 5x^2y) : (-5x^2y)$

123 a) $(a + c) : [-(a + c)]$ b) $(x - y) : (-y + x)$ c) $(r - 5) : (-r + 5)$

124 a) $(1 - z) : (z - 1)$ b) $(-m + n) : (-n + m)$ c) $(u^2 - 8) : (8 - u^2)$

125 a) $4x(y + z) : 2x$ b) $-15a^2(s - 3) : 5a$
c) $(d - 6)k : (-k)$ d) $-x^4y^3(8x + 12) : (-4x^3y^3)$

126 a) $abc(a + b - c) : ab$ b) $p^3(-2p + 1) : (-p)$
c) $-64n^2(x + y) : (-8n)$ d) $3z(z^2 + 10z - 24) : 6z$

127 a) $6cd^3(u - v) : 3d(u - v)$ b) $-21(2r - 5) : 7(5 - 2r)$
c) $2.5(a + b)(a - 2) : (a + b)$ d) $2.5(a + b)(a - 2) : (2 - a)$

128 a) $-34c(2x - y) : 51(-2x + y)$ b) $7.2(t - 5)^2 : 1.8(t - 5)$
c) $(a - b)^2(a + b) : \left[\frac{1}{2}(b - a)\right]^2$ d) $9mn^3(n - 6)(2n - 1) : 3mn(6 - n)$

129 $(12x^2 + 11x - 56) : (4x - 7)$
Hinweis: Bestimme die Koeffizienten a, b so, dass $(ax + b)(4x - 7) = 12x^2 + 11x - 56$.

130 Ist der Quotient ein Polynom? Bestimme dieses Polynom gegebenenfalls wie in Nr. 129.
a) $(8x^2 - 46x + 45) : (2x - 9)$ b) $(15x^2 + 28x + 8) : (3x + 4)$
c) $(-y^2 + 2y + 24) : (y - 6)$ d) $(z^2 - 2.5z - 21) : (2z + 7)$

Zu 131 – 134: Der Quotient soll ein Polynom sein. Bestimme dieses Polynom sowie die Zahl c.

131 a) $(18x^2 + cx + 14) : (3x + 2)$ b) $(x^2 + cx + 32) : (-x + 4)$

132 a) $(10x^2 + cx - 5) : (5x + 1)$ b) $(2x^2 + cx + 42) : (3x - 6)$

133 a) $(21x^2 - 37x + c) : (7x - 3)$ b) $(cx^2 + 3x - 10) : (x + 2)$

134 a) $(cx^2 - 20x + 25) : (2x - 5)$ b) $(x^2 + 3.6x + c) : (0.4x + 1.2)$

2.4 Formeln

$(a+b)^2$	$=$	$a^2 + 2ab + b^2$	
$(a+b)(a-b)$	$=$	$a^2 - b^2$	Binomische Formeln
$(a+b)^3$	$=$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
$(a+b+c)^2$	$=$	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomische Formel

In den Ergebnissen des Abschnitts 2.4 sind Polynome in der Normalform anzugeben.

Zu 135 – 138: Rechne auf 2 Arten.

135 a) $(10 + 3)^2$ b) $(2 + 0.4)^2$ c) $\left(6\frac{2}{3}\right)^2$ d) $(2x + 3x)^2$

136 a) $(1.8 + 1.2)^2$ b) $(100 + 1)^2$ c) $\left(4\frac{3}{4}\right)^2$ d) $(y + 5y)^2$

137 a) $(10 - 4)^2$ b) $(2 - 11)^2$ c) $(-1 - 20)^2$ d) $(5c - 2c)^2$

138 a) $(3 - 20)^2$ b) $(-30 + 5)^2$ c) $(1.7 - 0.2)^2$ d) $(a - a)^2$

139 a) $(2x + 3)^2$ b) $(4c + 5d)^2$ c) $(r^2 + 17)^2$

140 a) $(a + 11)^2$ b) $(3m^2 + 0.4)^2$ c) $(5b + 23)^2$

141 a) $(x + (-y))^2$ b) $(a - b)^2$ c) $(6n - 1)^2$

142 a) $(c - 2d)^2$ b) $(k^2 - k)^2$ c) $(10p^2 - 18)^2$

143 a) $(-a + b)^2$ b) $(-a - b)^2$ c) $(-s + 1.9)^2$

144 a) $(-8m - 7)^2$ b) $\left(-q + \frac{5}{6}\right)^2$ c) $(-22w - 5)^2$

145 a) $(2ab + 16)^2$ b) $(xy - yz)^2$ c) $\left(-2uv + \frac{3}{4}v\right)^2$

146 a) $(3r^2 - 6rs)^2$ b) $(-9p^3 + 4p^2)^2$ c) $(0.3a^2 + b^2)^2$

Zu 147, 148: Berechne $(a+b)(a-b)$ sowie a^2-b^2 für

147 a) $a=30,\ b=2$ b) $a=5,\ b=15$ c) $a=-20,\ b=3$
d) $a=4x,\ b=3x$

148 a) $a=17,\ b=3$ b) $a=17,\ b=-3$ c) $a=-8,\ b=0.4$
d) $a=t,\ b=t$

149 a) $(2x+5)(2x-5)$ b) $\left(r+\frac{2}{3}s\right)\left(r-\frac{2}{3}s\right)$ c) $(4y-1)(4y+1)$

150 a) $(a+7b)(a-7b)$ b) $(z^2-1)(z^2+1)$ c) $(8c+3d)(8c-3d)$

151 a) $(-3n+10)(-3n-10)$ b) $(-4a+12bc)(-4a-12bc)$

152 a) $(-0.6r+1)(-0.6r-1)$ b) $(-2u-11v)(-2u+11v)$

153 a) $(5n+4)(-5n+4)$ b) $(y-2z)(-y-2z)$

154 a) $(-8q-1)(8q-1)$ b) $(7a+10b)(10b-7a)$

155 a) $\left(\frac{7}{2}z^2+1\right)\left(\frac{7}{2}z^2-1\right)$ b) $(-m^3+m)(m^3+m)$
c) $(-xy-13)(-xy+13)$ d) $(1.4i-2.3)(1.4i+2.3)$

156 a) $(c^3-d^3)(c^3+d^3)$ b) $\left(9ab-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{3}{5}b+9ab\right)$
c) $(4p^4+1)(4p^4-1)$ d) $(-25n^2+6n)(-25n^2+6n)$

157 a) $(5x^2-8x)^2$ b) $\left(2e+3\frac{1}{3}\right)\left(2e-3\frac{1}{3}\right)$
c) $(17+4n)(17-4n)$ d) $(-a^2-b^2)(-a^2-b^2)$

158 a) $(9uv^2-1)(9uv^2+1)$ b) $(-6r^2+19)(-6r^2-19)$
c) $\left(\frac{7}{6}a-\frac{3}{7}b\right)\left(-\frac{3}{7}b+\frac{7}{6}a\right)$ d) $[(5x+2y)(5x-2y)]^2$

159 a) $(x+3y+4z)^2$ b) $(2a-b-3)^2$ c) $(-n^2+n+1)^2$

160 a) $(4a-1.5b+c)^2$ b) $(-u^2-2uv+2v^2)^2$ c) $[(p+1)(p+5)]^2$

161 a) $(a+b+c+d)^2$ b) $(x^3-x^2-x-4)^2$

162 a) $(5x-2y+z-1)^2$ b) $(a+b+c+d+1)^2$

163 a) $2c(c-5)^2$ b) $(x-y)(y-z)^2$ c) $\left(k+\frac{1}{4}\right)(2k-6)^2$

164 a) $(u-v)(u+3v)^2$ b) $(-p+2)^2(p+4)$ c) $(a+b)(a+b)^2$

165 a) $(a+b)^3$ b) $(c+10)^3$ c) $(2r+5s)^3$ d) $(z^2+3z)^3$

166 a) $(d+1)^3$ b) $(uv+v)^3$ c) $\left(m^2+\frac{1}{3}\right)^3$ d) $(10k+10)^3$

167 a) $(a-b)^3$ b) $(4g-1)^3$ c) $\left(\frac{1}{2}k-2\right)^3$ d) $(x^2-y^2)^3$

168 a) $(3n^2+2n)^3$ b) $(3n^2-2n)^3$ c) $(-3n^2+2n)^3$ d) $(-3n^2-2n)^3$

169 a) $(2n+5)(2n-5)(n+1)$ b) $(a-b)(x+y)(x-y)$
c) $(6z^2+1)(3z+2)(3z-2)$ d) $(r+3)(r-3)(r+4)(r-4)$

170 a) $(a+2)(a-2)(7b-8)$ b) $(4x+2)(4x-2)(x+1.5)(x-1.5)$
c) $(9c^2+d^2)(3c-d)(3c+d)$ d) $(p-5)^2(p+5)^2$

171 a) $(x+9)(x-9)-(y+9)(y-9)$ b) $(7e+4)^2+(7e-4)^2$
c) $(a+4b)(a-4b)-(a-5b)^2$ d) $(2uv)^2-(2u^2+v^2)^2$

172 a) $(2y+2z)^2-2(y+z)^2$ b) $(r^2+r)(r^2-r)+\left(r^3-\frac{1}{2}r\right)^2$
c) $(3x+8)^2-(3x-8)^2$ d) $(a^2-b^2)^2-(a+b)^2(a-b)^2$

173 $P(u,v)=u^2-(u+v)(u-v)$;
berechne die Polynomwerte $P(13,\ 9)$, $P(4,\ 7)$, $P(8,\ -12)$ und $P(-5.1,\ -6)$.

174 $P(x)=(x+9)^2-(x+7)(x+11)$;
berechne die Polynomwerte $P(3)$, $P(-15)$, $P(9)$ und $P(-7.5)$.

175 a) $(4a-b)^2-3(a+b)(a-b)-2b(-a+2b)$
b) $(2x+3y)^2+(4y-3x)^2-3(7y^2-x^2)-4(2x-y)^2$

176 a) $(5s-3)^2-(9s+1)(2s-7)-(s-3)^2-40s$
b) $6(n-1)(n+1)-(n^2+1)^2+n^4-2(-n+2)(-2n+1)$

177 $(x-y-z)^2+(-x+y-z)^2+(-x-y+z)^2$

178 a) $(r^2+r+4)^2+(r^2-r-5)^2$ b) $(-7a+b+6c)^2-(7a-b-6c)^2$

179 a) $(n+1)^3-(n-1)^3$ b) $(q^2+2)^3-6(q^2+1)^2$

180 a) $(-a+b)^3+b(2a-b)(2a+b)$ b) $(x-1)(x+8)^2-(x-4)^3$

181 a) $2m^2 - 17m - 5(m-2)(m-6) - [8(m-7) - 3(m+4)^2]$
b) $\{[3b - (b+4)(b-1)]^2 - b^4\}(b^2+2) + 8b^4$

182 a) $2c^2\{(a-c)^2 - [a(a-c) - c(a+c)]\}$
b) $(k+5)^2 - (2k+5)[(k-1)^2 - (k+2)(k-2)]$

Zu 183 – 188: Multipliziere mit Hilfe binomischer Formeln aus. Beispiel:
$[a+b+c][a-b+c] = [(a+c)+b][(a+c)-b] = (a+c)^2 - b^2$
usw.

183 a) $(x+3y-8z)(x+3y+8z)$ b) $(5m-n+5)(5m-n-5)$
c) $(r+s-7)(-r+s-7)$ d) $(u^2+uv+v^2)(u^2-uv+v^2)$

184 a) $(19f-g+21)(19f-g-21)$ b) $(-6a+b-c)(-6a+b+c)$
c) $(p^2-4p-2)(p^2+4p-2)$ d) $(-x^2-y^2+z^2)(x^2-y^2+z^2)$

185 a) $(a+b+c)(a-b-c)$ b) $(2u-5v-w)(2u+5v+w)$
c) $(x-y+z)(x+y-z)$ d) $(-r^2+r+6)(r^2+r-6)$

186 a) $(-5p-3q+1)(5p+3q+1)$ b) $(a-2b+3c)(a+2b-3c)$
c) $(-4u+v-7w)(-4u-v+7w)$ d) $(n^2+4n+8)(-n^2+4n-8)$

187 a) $(a+b+u+v)(a+b-u-v)$ b) $(x+y-z-3)(x-y-z+3)$

188 a) $(r^3+r^2-r+1)(r^3-r^2-r-1)$ b) $(cd+5c-d-4)(cd-5c+d-4)$

Zu 189, 190: Zeige, dass die angegebene Gleichung eine Termumformung darstellt.

189 a) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$
b) $x^2 - 3(x+y)^2 + 3(x+2y)^2 = (x+3y)^2$
c) $(u^2-v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2+v^2)^2$
d) $(r^2+s^2-t^2)^2 + (2rt)^2 + (2st)^2 = (r^2+s^2+t^2)^2$

190 a) $[(k+3)^2 + k^2] - [(k+1)^2 + (k+2)^2] = 4$
b) $n^2 + (n+1)^2 + [n(n+1)]^2 = [n(n+1)+1]^2$
c) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$= (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 + (ax+by+cz)^2$

191 Multipliziere zwei aufeinander folgende natürliche Zahlen gleicher Parität (also entweder zwei aufeinander folgende gerade oder zwei aufeinander folgende ungerade Zahlen) und addiere 1. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?

192 Multipliziere drei aufeinander folgende natürliche Zahlen und addiere dazu die mittlere dieser Zahlen. Betrachte mehrere Beispiele. Vermutung? Beweis?

Zu 193, 194: Verwende das Pascal-Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

u s w.

193 a) $(3c+d)^4$ b) $(e-5f)^4$ c) $(x+2y)^5$ d) $(-m+10)^5$
e) $\left(k+\frac{1}{2}\right)^6$ f) $(1-z^2)^6$ g) $(2r+s)^4 - (2r-s)^4$

194 a) $(-u+4v)^4$ b) $(n^2+n)^5$ c) $(0.1-p)^6$ d) $(a^3+b^3)^4$
e) $(i^2-3)^5$ f) $\left(t+\frac{1}{t}\right)^6$ g) $(h-1)^5 - (1-h)^5$

2.5 Faktorzerlegung von Polynomen

Die Darstellung eines Polynoms als Produkt heisst eine Faktorzerlegung:

Summe	$\xrightarrow{\text{faktorisieren}}$	Produkt
a^2+3a	$=$	$a(a+3)$
$4x^2-y^2$	$=$	$(2x+y)(2x-y)$
n^2+5n+6	$=$	$(n+2)(n+3)$

Faktorzerlegungen können zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen (Kapitel 3) oder Kürzen von Brüchen (Kapitel 5) nützlich sein.

In den meisten Aufgaben des Abschnitts 2.5 ist eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten zu finden; die Ausnahmen sind aus dem Zusammenhang ersichtlich (z. B. Nr. 205 – 214). Reine Zahlfaktoren müssen nicht weiter zerlegt werden. Wenn ein Polynom keine Faktorzerlegung hat (abgesehen von Zerlegungen mit dem Faktor 1 oder −1), heisst es *unzerlegbar* (*prim*).

Ausklammern

195 a) $5a+5b$ b) $6x-9$ c) $cd+ce$ d) u^2-uv

196 a) $20y-12$ b) $35a+48b$ c) $pq-qr$ d) $ct-dt^2$

197 a) $6ax+6ay$ b) $24z^3-16z^2$ c) $10c-21$ d) $108n^2+168n$

198 a) $3bt-9ct$ b) $21efg-35eg$ c) $81y^3+54y$ d) $126a^2b+96ab^2$

199 a) $8a+4$ b) z^2-z c) $6bc+2b$ d) x^2y^2-xy

200 a) $7e-7$ b) $2rs+s$ c) p^3+p^2 d) $36uvw+9uw$

201 a) $14f-21g+28$ b) $10at+15bt-6ct$ c) $xy-y^2-yz$

202 a) $15x-27y-12z$ b) $13r+65s-91$ c) $14np-12nq+21n$

203 a) $18a^2b+18ab^2-9ab$ b) $4x^2yz-10xy^2z+16xyz^2$

204 a) $42m^3n^2-70m^2n^3-42m^2n^2$ b) $3qr^2+3r^3+3r^2s-r^2$

Zu 205, 206: Klammere -1 aus.

205 a) $-y-2$ b) $-5c+d$ c) $-3m+4n-1$
d) $u-v-w$ e) $-7x^2+4x+11$ f) $-a_1-a_2+a_3-a_4$

206 a) $-mx+q$ b) $-6r-s-8t$ c) $-c^2-d^2+36$
d) $-b_1+b_2-b_3+b_4$ e) $z^5-z^4-z^3+z^2-z-1$

207 Klammere 2 aus.
a) $2n+\frac{4}{5}$ b) $4u+3v+2w$ c) $2a-\frac{5}{4}b+\frac{6}{7}$

208 Klammere 3 aus.
a) $3p-4$ b) $3x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}rs-\frac{2}{3}r-\frac{3}{4}s$

209 Klammere $\frac{1}{6}$ aus.
a) $\frac{1}{6}a+\frac{3}{2}b$ b) $\frac{1}{2}q^2-q+\frac{2}{3}$ c) $4c+5d-\frac{1}{6}$

210 Klammere -1.2 aus.
a) $-1.2t^2+3.6$ b) $6e-2.4f-8.4$ c) $-1.2x+y+1.5z$

Zu 211–214: Ausmultiplizieren und Ausdividieren mit Hilfe von Ausklammern

211 a) $(a+b)(4a+4b)$ b) $(2n-2)(3n-3)$ c) $(1.5u-1.5v)(6u+6v)$

212 a) $(7f-7g)(f-g)$ b) $(5r+5s)(8r-8s)$ c) $(2.5c+2.5)(0.4c+0.4)$

213 a) $(9xy+9y):(x+1)$ b) $(4.5ac-7.5ad):(3c-5d)$

214 a) $(18ab-12b^2):(3a-2b)$ b) $(0.7x^2y+2.8xy^2):(x+4y)$

215 a) $(a+2)x+(b-3)x$ b) $r(2u+3v)-r(u+v)$
c) $e^2(n-4)-e^2(2n-7)$ d) $(p^2-5p)z+(p^2+p)z$

216 a) $(8-t)y-(6-2t)y$ b) $(3a-5b)x+(b+1)x$
c) $(2k^3-k^2)r-(k^3-7k^2)r$ d) $d^2(e-f+g)-d^2(f+g-h)$

217 a) $a(x+y)+b(x+y)$ b) $m(u+v)-3(u+v)$
c) $cd(6c-d)-4(6c-d)$ d) $q(r-s)+(r-s)$

218 a) $(m+n)y+(m+n)z$ b) $2a(a-b)-b(a-b)$
c) $(5e-1)-c(5e-1)$ d) $(f+g)-d(f+g)$

219 a) $5p(3p-2)+(-3p+2)$ b) $x(y-z)-(z-y)$

220 a) $s(st-4)+t(4-st)$ b) $r(-r+2)+(r-2)$

221 a) $4x(a+b)-5y(a+b)-6(a+b)-3x(a+b)-(a+b)$
b) $3p^2(u-v)-2p(v-u)-8(u-v)+(u-v)$

222 a) $-a(x-y)+2b(x-y)-3c(x-y)+4(x-y)$
b) $7m(r+s)-3n(r+s)-4(r+s)-n(r+s)+(r+s)$

223 a) $4v(p+q)-8w(p+q)$ b) $(t^2-t)z+9(t^2-t)$
c) $a^3(2ab-c)+a^2(2ab-c)$ d) $10q(9e-6)-5(9e-6)$

224 a) $3w(2u-6v)+5(2u-6v)$ b) $2r^2(r-7)-r(-r+7)$
c) $a^2(xy+xz-x)-ab(xy+xz-x)+a(xy+xz-x)$

225 a) $(e-4f)(f+g)+2e(f+g)$ b) $(c-d)(n+5)+(c-d)(2n+3)$
c) $q(2x-3y)-(q+1)(-2x+3y)$ d) $(3a-5c)(m+4)-(a+c)(m+4)$

226 a) $8p(2p-5)-(2p+5)(2p-5)$ b) $(c^3+c^2)(r-3)+(c^3+c^2)(r-1)$
c) $(3u+v)(u-v)-(3u+v)(u-w)$ d) $(a-b)(5z-1)+(2b-2a)(z+4)$

Ausklammern in Teilsummen

227 a) $a(x+y)+2x+2y$ b) $bq+cq-(b+c)r$
c) $2u-v+5r(2u-v)$ d) $7k(4n-3)-4n+3$

228 a) $a(3a-2b)+9ac-6bc$ b) $4m(p+q)-p-q$
c) $(t-5)x-ty+5y$ d) $r^2-r+(r-1)s$

229 a) $au+av+bu+bv$ b) $j^2-jk+2j-2k$
c) $-2cx+cy-4dx+2dy$ d) $12st+16s-27t-36$
e) $24pz-39p-16qz+26q$ f) $35f^2-63fg-15f+27g$

230 a) $81ab+72ad+36bc+32cd$ b) $mn-m+n-1$
c) $8v^2-2vw-12v+3w$ d) $20xy-15xz-24y+18z$
e) $20r^2s+4rs^2-5r-s$ f) $-21ef-56eg+6fg+16g^2$

231 a) $4amx + 4amy + 4anx + 4any$ b) $6ab + 3a - 12b - 6$
c) $u^4 - u^3v - 2u^3w + 2u^2vw$ d) $40r^3s^2 - 60r^2s^2 + 16r^3s - 24r^2s$

232 a) $5act - 20adt + 15bct - 60bdt$ b) $-e^2fg - ef^2g + efg^2 + f^2g^2$
c) $28pq - 42p - 24q + 36$ d) $-18x^2y^2 + 36xy^2z + 30xy^3 - 60y^3z$

233 a) $mx + my + mz + nx + ny + nz$ b) $as + at + bs + bt + cs + ct$
c) $eu + fu - ev - fv + ew + fw$ d) $3kp + 3kq - 3kr - 6p - 6q + 6r$

234 a) $ar - a + br - b + cr - c$ b) $efm - efn - ef + egm - egn - eg$
c) $-px - py - pz + 5x + 5y + 5z$ d) $u^2 - uv - uw - u + v + w$

235 a) $2a^2 + 10ab - 12ac + 5a + 25b - 30c$ b) $2pr^2 + 4pr - 3qr^2 - 6qr - r^2 - 2r$

236 a) $22cv - 22ct + 66c - 33dv + 33dt - 99d$ b) $15mnx - 5mny + 10mnz - 3x + y - 2z$

Faktorzerlegung mit Hilfe von Formeln

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

237 a) $x^2 - y^2$ b) $4c^2 - 9d^2$ c) $z^2 - 225$ d) $36n^2 - 1$
e) $-a^2 + 324b^2$ f) $-u^2v^2 + 1$ g) $16p^2 - q^4$ h) $x^4 - y^4$

238 a) $16m^2 - 9n^2$ b) $25x^2 - 1$ c) $-4s^2 + 49t^2$ d) $121q^2 - 576$
e) $u^2v^2 - 64w^2$ f) $-p^2 + 289$ g) $r^4 - 1$ h) $-y^4z^2 + 81$

239 a) $6a^2 - 6b^2$ b) $9k^4 - 36k^2$ c) $n^3 - n$ d) $-50e^2 + 338$

240 a) $18z^2 - 2$ b) $75r^2 - 147$ c) $-c^4d^2 + 4c^2$ d) $x^6y^4 - x^2y^8$

241 a) $a(x^2 - y^2) + b(x^2 - y^2)$ b) $p^2u + 2p^2v - 4u - 8v$

242 a) $63km^2 - 28kn^2 + 45m^2 - 20n^2$ b) $cr^2 - c - dr^2 + d$

243 a) $x^2 - 2xy + y^2$ b) $36u^2 + 60uv + 25v^2$ c) $n^2 - 4n + 4$
d) $4c^2 + 28cd + 49d^2$ e) $9q^2 - 6q + 1$ f) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

244 a) $m^2 - 2m + 1$ b) $4f^2 - 20fg + 25g^2$ c) $x^2 + 16x + 64$
d) $16r^2 - 24rs + 9s^2$ e) $p^4 - 8p^2 + 16$ f) $36z + 81z^2 + 4$

245 a) $5a^2 - 10ab + 5b^2$ b) $xy^2 + 2xy + x$ c) $-3u^2 + 18uv - 27v^2$

246 a) $72n^2 + 168n + 98$ b) $-q^2r^2 + 4qr - 4$ c) $-c^4 - 2c^3d - c^2d^2$

247 a) $a^2 + 2ab + b^2 - 36z^2$ b) $p^2 - x^2 - 2x - 1$

248 a) $u^2 - 8uv + 16v^2 - 1$ b) $m^2 - q^2 + 10q - 25$

Klammeransatz bei geeigneten Trinomen

Beispiel: $a^2 + 8a + 15 = (a+3)(a+5)$

249 a) $x^2 + 9x + 20$ b) $d^2 + 20d + 91$ c) $r^2 - 15r + 54$
d) $n^2 - 26n + 144$ e) $n^2 - 24n + 144$ f) $3c^2 + 16c + 5$

250 a) $s^2 + 18s + 72$ b) $z^2 - 19z + 48$ c) $p^2 + 23p + 132$
d) $y^2 - 29y + 210$ e) $b^2 + 10b + 9$ f) $2x^2 - 5x + 2$

251 a) $a^2 + 2a - 24$ b) $u^2 - 3u - 40$ c) $t^2 - 6t - 7$
d) $x^2 - 25x + 84$ e) $x^2 + 25x - 84$ f) $4e^2 + 3e - 1$

252 a) $c^2 - 3c - 108$ b) $m^2 + 4m - 5$ c) $y^2 - y - 30$
d) $z^2 + 9z - 90$ e) $r^2 - 43r - 240$ f) $5k^2 - 2k - 3$

253 a) $b^2 + 20b + 51$ b) $t^2 + t - 156$ c) $x^2 - 4x + 16$
d) $v^2 - 7v - 98$ e) $p^2 - 7p - 120$ f) $2n^2 + 7n + 3$

254 a) $m^2 - m - 110$ b) $z^2 - 29z + 208$ c) $q^2 - 16q - 36$
d) $y^2 + 40y + 400$ e) $a^2 + 6a - 10$ f) $12r^2 - 8r + 1$

255 a) $5x^2 + 10x - 75$ b) $n^3 - n^2 - n$ c) $-4t^2 - 4t + 48$

256 a) $9z^4 - 36z^3 + 27z^2$ b) $-3k^2 - 3k - 60$ c) $2b^5 + 9b^4 - 5b^3$

257 a) $x^2 - 7xy + 10y^2$ b) $p^2 - 2pq - 8q^2$ c) $m^4 - 5m^2n - 24n^2$

258 a) $a^2 + 5ab + 4b^2$ b) $r^2 + 4rs - 21s^2$ c) $c^4 - 13c^2d^2 + 36d^4$

Vermischte und schwierigere Aufgaben zur Faktorzerlegung

259 a) $-16x^5 + x$ b) $n^3 - 19n^2 + 90n$ c) $fgh + fg + fh + f$

260 a) $625c^3 - 225cd^2$ b) $-3z^4 + 6z^3 + 24z^2$ c) $64st - 48s - 48t + 36$

261 Vervollständige die Zerlegung
a) $(36a-54b)^2$ b) $(r^2+r)(r^2+r-6)$ c) $(kx^2-ky^2)^3$

262 Zerlege die Polynome P, Q, $P+Q$ und PQ (vollständig)
a) $P=(5u+5v)^2$, $Q=(du+dv)^2$ b) $P=(2n-2)^3$, $Q=(3n-3)^3$

Zu 263, 264: Klammere zuerst einen Bruch aus, sodass der andere Faktor ein Polynom mit teilerfremden ganzen Koeffizienten ist.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+6=\frac{3}{4}(x^2-6x+8)=\frac{3}{4}(x-2)(x-4)$

263 a) $\frac{2}{3}a^2-\frac{3}{2}b^2$ b) $-1.25r^2-5r-5$ c) $\frac{7}{30}c^2+\frac{7}{6}c-\frac{28}{5}$

264 a) $4.8p^2-7.5$ b) $3m^2-2mn+\frac{1}{3}n^2$ c) $0.2q^2-2.4q+5.4$

265 a) $(a+b)^3-5(a+b)^2$ b) $(x+6y)^2+8x(x+6y)$

266 a) $u^2(4u+4)+(4u+4)^2$ b) $p(3w+3)+(p-5)(2w+2)$

267 a) $(2a-3b)^2-(3b-2a)$ b) $r(r-s)^2-(s-r)^3$

268 a) $(k-7)^2(k+2)+(-k+7)^3$ b) $s^2(t-5)+s(5-t)-2(t-5)$

269 a) $n(n+4)(n-8)-(n+4)(n-8)$ b) $(a+b)^2(a-c)-(a+b)(c-a)^2$

270 a) $(u-1)(2v-2)+(3-3u)(4-4v)$ b) $(x-y)(x^2-z^2)-(x^2-y^2)(x-z)$

271 a) $a(a+3)-10$ b) $(m+9)^2-36m$ c) $u^2(v-1)-(u^2-v)v$

272 a) $4pq-(p+q)^2$ b) $st(t-6)-4s(t+6)$ c) $2(e^2-fg)+e(f-4g)$

273 a) $a^2-2ab+b^2-c^2$ b) $9x^2-y^2-2yz-z^2$
c) $u^2-4uv+4v^2-1$ d) u^2-4v^2+4v-1

274 a) $r^2-4s^2+12st-9t^2$ b) $25c^2-d^2+10d-25$
c) w^2-8w-z^2+16 d) $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$

275 a) $c^2m^2-c^2n^2-d^2m^2+d^2n^2$ b) $8rt^2-2r-12st^2+3s$
c) $2uv-7uw+4v^2-49w^2$ d) $64a^2-80a+25-24ab+15b$

276 a) p^3+p^2-p-1 b) $27ef-18eg+9f^2-12fg+4g^2$
c) $b^2-6b-4c^2+12c$ d) $4r^2-9s^2+6s-1$

277 a) $(5x-4y+3)^2-(x+2y-1)^2$ b) $a^4-(13a-30)^2$

278 a) $81t^2-25(t^2+6t+9)$ b) $n^4-25n^2-60n-36$

279 a) $a^4-10a^2b^2+9b^4$ b) $x^4+x^2y^2+y^4$

280 a) z^4+4z^2-32 b) r^4-3r^2+1

Zu 281, 282: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

281 a) x^3-8 b) $375n^3-3$ c) a^3+b^3 d) p^6-q^6

282 a) y^3+1 b) $128c^4d-54cd^4$ c) $r^3+r^2-s^3-s^2$

283* Beweise:
a) Für jede natürliche Zahl n ist n^3-n durch 6 teilbar.
b) Für jede ungerade natürliche Zahl u ist u^3-u durch 24 teilbar.
c) Für jede Primzahl $p>3$ ist p^2-1 durch 24 teilbar.

284* a) Die beiden letzten Ziffern von 25^2 bilden die Zahl 25. Gibt es noch eine andere zweistellige Zahl mit der entsprechenden Eigenschaft?
b) Die drei letzten Ziffern von 125^3 bilden die Zahl 125. Bestimme alle weiteren dreistelligen Zahlen mit der entsprechenden Eigenschaft!

2.6 Der Divisionsalgorithmus für Polynome

Im Abschnitt 2.6 werden Polynome mit nur einer Variablen und beliebigen Koeffizienten (aus $\mathbb{R}$) betrachtet.

Ein Beispiel zum Divisionsalgorithmus:

$$\begin{array}{rlll}
(6x^3+29x^2+38x+35) & :(2x+7) = & 3x^2+4x+5 & \\
\underline{6x^3+21x^2} & & 6x^3+21x^2 & =(2x+7)\cdot 3x^2 \\
8x^2+38x+35 & & & \\
\underline{8x^2+28x} & & 8x^2+28x & =(2x+7)\cdot 4x \\
10x+35 & & & \\
\underline{10x+35} & & 10x+35 & =(2x+7)\cdot 5 \\
0 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(6x^3+29x^2+38x+35) & :(2x+7) & =3x^2+4x+5 \quad \Leftrightarrow \\
6x^3+29x^2+38x+35 & & =(3x^2+4x+5)(2x+7) \\
& & \text{(Faktorzerlegung)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(6x^3+29x^2+38x+44) & :(2x+7) & =3x^2+4x+5+9:(2x+7) \quad \Leftrightarrow \\
6x^3+29x^2+38x+44 & & =(3x^2+4x+5)(2x+7)+9 \\
& & \text{(Zerlegung mit Rest)}
\end{array}$$

Zu 285 – 288: Divisionen ohne Rest

285 a) $(6x^3-14x^2+17x-12):(3x-4)$ b) $(y^3-10y^2+16y+48):(y-6)$
c) $(n^4+5n-6):(n+2)$ d) $(c^3+1.5c^2-2c-20):(2c-5)$

286 a) $(4a^3-12a^2+a+4):(2a+1)$ b) $(z^3+9z^2-100):(z+5)$
c) $\left(4r^3+\frac{2}{3}r^2+\frac{5}{3}r+2\right):(3r+2)$ d) $(k^5-1):(k-1)$

287 a) $(x^4-8x^3+14x^2-7x-30):(x^2-3x+5)$
b) $(9p^4-31p^2+25):(3p^2+p-5)$

288 a) $(12a^4-15a^3-5.5a^2+9a-8):(4a^2-3a+2)$
b) $(u^5-3u^4-9u^2-16u+12):(u^2+4)$

289 Dividiere durch $x+3$ und notiere das Ergebnis in Form einer Zerlegung mit Rest (im Fall des Restes 0 als Faktorzerlegung).
a) $x^2+8x+24$ b) x^2+8x+3 c) x^3 d) $x^3-13x-12$

290 Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x+1$.

291 Wie Nummer 289, aber mit Division durch x.

292 Wie Nummer 289, aber mit Division durch $x-4$.

Zu 293 – 298: Notiere das Divisonsergebnis, gegebenenfalls mit Rest.

293 a) $(6a^3-17a^2+21a-30):(2a-5)$
b) $(n^4-3n-22):(n+2)$
c) $(6z^4+8z^3-19z^2-7z-12):(3z^2-2z-4)$
d) $(8x^7-10x^6+x^5-16x^4+2x^3+25x^2+14x-24):(2x^3-x^2+3x-4)$

294 a) $(-12y^3+8y^2+13y+3):(-2y+3)$
b) $(a^4-9a^3+6a^2-5a+12):(a-2)$
c) $(6p^5-3p^4+p^3+6p^2-13p+3):(3p^3-4p+1)$
d) $k^5:(k^2+k-1)$

295 a) $\left(x^2-\frac{7}{2}x-2\right):\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)$ b) $(a^3-4a^2+2a-1):(2a-1)$

296 a) $(2q^3+5q^2-4q-3):(q+0.5)$ b) $(y^3+y^2):(3y+1)$

297 a) $(x+4x^2+x^3):(x-2+x^2)$ b) $(r^3-6r^2+5r+8):(4-r)$

298 a) $2t^4:(2+t)$ b) $(1+z)^3:(1-z)^2$

Zu 299, 300: Finde mit Hilfe des Divisonsalgorithmus eine möglichst weit gehende Faktorzerlegung in Polynome mit ganzen Koeffizienten.

299 a) x^3-4x^2+x+6 b) n^4-7n^2+6n

300 a) $z^5-2z^4-4z^3+5z^2$ b) $-3a^3+9a^2-12$