13.3 Формулы Тейлора для основных элементарных функций

1. $f(x) = \sin x$. Функция $\sin x$ обладает производными всех порядков. Найдем для нее формулу Тейлора при $x_0 = 0$, т.е. формулу Маклорена (13.8). Было доказано (см. п. 10.1), что $(\sin x)^{(m)} = \sin(x + m\frac{\pi}{2})$, поэтому

$$f^{(m)}(0) = \sin\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 2k, \\ (-1)^k & \text{для } m = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, ..., \qquad (13.16)$$

и, согласно формуле (13.5),

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

,

при $x \longrightarrow 0, n = 0, 1, 2, ...$, или, короче,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \text{ при } x \longrightarrow 0.$$

Мы записали здесь остаточный член в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$, так как следующий за последним выписанным слагаемым член многочлена Тейлора, в силу (13.16), равен нулю.

2. $f(x) = \cos x$. Как известно (см. п. 10.1),

$$f^{(m)}(x) = \cos(x + \frac{m\pi}{2}),$$

поэтому

$$f^{(m)}(0) = \cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 2k+1, \\ (-1)^k & \text{для } m = 2k, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

при $x \longrightarrow 0$, или, короче,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

при $x \longrightarrow 0, n = 0, 1, 2, ...$

3. $f(x) = e^x$. Так как $(e^x)^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1, n = 0, 1, ...,$ следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \tag{13.17}$$

при $x \longrightarrow 0, n = 0, 1, 2, ...,$ или, короче,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ при } x \longrightarrow 0.$$

Отсюда, заменив x через -x, получим

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \tag{13.18}$$

при $x \longrightarrow 0, n = 0, 1, 2, ...$

4. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Сложив и вычтя (13.17) и (13.18), при $x \longrightarrow 0, n = 0, 1, 2, ...$ будем иметь

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

В силу единственности представления функции в указанном виде (см. п. 13.2), полученные соотношения являются формулами Тейлора для функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α – некоторое фиксированное число, а $x > -1$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n},$$

то

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1),$$

следовательно,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

при $x \longrightarrow 0$, или, короче,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \text{ при } x \longrightarrow 0, n = 1, 2, ... \tag{13.19}$$

Если $\alpha = n$ – неотрицательное целое $(n = 0, 1, 2, ...)$, то функция $f(x) = (1+x)^n$ является многочленом степени n, и имеет место тождество

$$f(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n), x \longrightarrow x_0,$$