Задания вступительного испытания матмеха СПбГУ

Григорий Михайлович Шепелев shegeley@gmail.com

Аннотация. Задачи со вступительных испытаний в СПбГУ для претендентов на перевод из других ВУЗов на математические направления на матмех. Для некоторых направлений происходит еще тестирование по программированию). Источники: канал студсовета матмеха СПбГУ в Телеграме, личное участие в испытании.

Вступительное испытание — 2018 год (зима)

Для первого курса и выше: 1-4; для второго и выше: 1-6; для третьего и выше: 1-7.

1. Докажите неравенство: $(A \triangle B) \cup = (A \cup C) \triangle (B \cup C)$
2. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти обратную матрицу n-ой степени матрицы $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0$
3. $$\lim_{n \to \infty} \frac{(n^2 - \sqrt{n} + 1) \cdot \cos(\frac{1}{n})}{2 + 7 + 12 + \cdots + (5n - 3)} = ?$$
4. Исследовать на монотонность и найти точки экстремума $f(x) = \sqrt{x^2 - |1 - x|}$
5. $$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot e^{-|x-1|} \, dx = ?$$
6. Решить уравнение: $y'' + 2' + y = x^2 e^{-x}$
7. Пусть случайная величина $X \approx N(0, 1), Y \approx Bern(0.5), Z \approx U[0, 1]$ независимы. $D(1 + 2X - Y | Z - 0.5) = ?$

Вступительное испытание — 2019 год (лето)

Для первого курса и выше: 1-4; для второго и выше: 1-6; для третьего и выше: 1-7.

1. Пусть A, B, C — множества. Доказать: $A - (B \cup C) \subset (A - B) \cup (A - C)$. На числовых множествах покажите, что обратное вложение вообще говоря неверно.
2. Найти определитель n-го порядка матрицы с элементами $a_{i,j} = min(i,j)$

   Прим. автора: подразумевается матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3. $$\lim_{n \to \infty} \frac{(1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2))^{e^{\frac{1}{n}}}}{n^2} = ?$$
4. Найти точную нижнюю и верхнюю границу $f(x) = |x - 2| x e^{-x}$ на $(-\infty, \infty)$
5. Для всех $n \in \mathbb{N}$ найти $\int_{-1}^{1} |x|^{4n+1} \cdot \cos(\pi x^{2n+1})\, dx$
6. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x} + 5 \sin x$
7. Пусть $X1, X2, \dots \approx Y[-a, c], a > 0$ независимы, причем $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 > 1) = 1/3$. Найти a.