МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

А. В. Грешнов, С. А. Малюгин, В. Н. Потапов

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

2-й семестр

Учебное пособие
2-е издание

Новосибирск
2012

УДК 517.1+517.2

Грешнов А. В., Малюгин С. А., Потапов В. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 2-й семестр, 2-е изд., испр. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 250 с.

В настоящем учебном пособии собраны задачи по темам, соответствующим программе 2-го семестра курса математического анализа, который читается на механико-математическом факультете НГУ.

Сборник задач предназначается для студентов и преподавателей математических и физических факультетов университетов, а также для всех интересующихся математическим анализом.

Во 2-м издании добавлены новые задачи и исправлены опечатки.

Рецензенты
д-р физ.-мат. наук, проф. С. К. Водопьянов (ИМ СО РАН),
д-р физ.-мат. наук М. Ю. Васильчик (НГТУ)

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации
Программы развития НИУ-НГУ

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457)

© Новосибирский государственный университет, 2-е изд., испр., 2012
© А. В. Грешнов, С. А. Малюгин, В. Н. Потапов, 2-е изд., испр., 2012

Оглавление

Предисловие

Этот сборник задач является продолжением "Сборника задач и упражнений по математическому анализу. 1-й семестр", изданного ранее. Соответственно нумерация разделов и задач продолжает нумерацию предыдущего сборника. Основу настоящего и предыдущего сборников составляют задачи, рассматривавшиеся на практических занятиях по курсу математического анализа, который читает профессор С. К. Водопьянов на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. Определения, формулировки теорем и порядок изложения материала в целом соответствуют этому курсу. Кроме того, в сборник задач дополнительно включены темы: внутренние метрики, нормированные поля и интегрирование в элементарных функциях. Доказательство теоремы Лиувилля о существовании элементарной первообразной вынесено в приложение.

Задачи сборника придумывались и собирались в течение нескольких лет, при этом были использованы различные источники — учебники, учебные пособия, задачники, монографии, интернет. Не представляется возможным дать точные ссылки на соответствующий источник для каждой задачи. В списке литературы указаны учебники и сборники задач, которые использовались при составлении этого сборника. Сборник задач может быть использован и как учебное пособие: в нём имеются все необходимые определения. Задачи, являющиеся важными теоремами, которые необходимы для понимания последующих разделов, выделены знаком (!). Если для решения задачи требуются знания из какого-либо последующего раздела, то после номера задачи в скобках указан номер этого раздела. Кроме того, в скобках указываются ссылки на некоторые задачи из первой части этого учебного пособия.

Авторы благодарят А. Е. Гутмана за многочисленные ценные замечания и студентов ММФ НГУ, которые решали собранные в этой книге задачи на семинарских занятиях, контрольных, зачётах и экзаменах, в результате чего отдельные формулировки были уточнены и некоторые опечатки исправлены.

14. Равномерная сходимость

Областью сходимости последовательности функций (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}$, называется подмножество[1] $X_1 \subseteq X$, состоящее из точек $x \in X$ таких, что имеется конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. В этом случае говорят, что последовательность функций (f_n) *поточечно сходится* к функции $f : X_1 \to \mathbb{R}$, которая называется *поточечным пределом* последовательности (f_n). Последовательность функций (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}$, *равномерно сходится* к функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $X_1 \subset X$ (используется обозначение $f_n \rightrightarrows f$ на X_1), если $\sup\limits_{x\in X_1} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Говорят, что *функциональный ряд* $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ сходится равномерно (поточечно) на множестве X, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ равномерно (поточечно) сходится на множестве X. Через $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ обозначается функция, равная сумме сходящегося ряда. Выражение $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n$ обозначает сумму двух сходящихся рядов, в которых суммирование ведётся по отрицательным и по неотрицательным индексам.

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. *Равномерной нормой* функции f называется величина $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.

14.1. (!) Докажите, что если последовательность f_n сходится равномерно к функции f на множестве X, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любой точки $x \in X$. Обратное неверно, рассмотрите последовательность $f_n(x) = x^n$ на $X = (0,1)$.

14.2. (!) Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$ для любой последовательности $x_n \in X$.

14.3. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ на множестве X при $n \to \infty$, то $(f_n + g_n) \rightrightarrows (f + g)$ на множестве X при $n \to \infty$.

[1] В этом параграфе подразумевается, что $X \subseteq \mathbb{R}$, однако, определения остаются справедливыми и в случае, когда X произвольное метрическое пространство (см. § 22).

14.4. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$ и функция g ограничена на множестве X, то $f_n \cdot g \rightrightarrows f \cdot g$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.5. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ на множестве X при $n \to \infty$, то

а) $\max\{f_n, g_n\} \rightrightarrows \max\{f, g\}$ на множестве X при $n \to \infty$;

б) $\min\{f_n, g_n\} \rightrightarrows \min\{f, g\}$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.6. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$ и $\varphi : Y \to X$, то $f_n \circ \varphi \rightrightarrows f \circ \varphi$ на множестве Y при $n \to \infty$.

14.7. Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : X \to Y$ и функция $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, то $\varphi \circ f_n \rightrightarrows \varphi \circ f$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.8. Приведите пример последовательности функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ и непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, но последовательность функций $\varphi \circ f_n$ не сходится равномерно на множестве X.

14.9. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, то $\ln(1 + f_n^2) \rightrightarrows \ln(1 + f^2)$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.10. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ на множестве X при $n \to \infty$, то $\sqrt{f_n^2 + g_n^2} \rightrightarrows \sqrt{f^2 + g^2}$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.11. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, то $\sqrt{|f \cdot f_n|} \rightrightarrows |f|$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.12. (!) Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$ и $|f(x)| \leq C$ для всех $x \in X$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x)| < C + \varepsilon$ для любых $n \geq n_0$, $x \in X$.

14.13. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ на множестве X при $n \to \infty$, причём функции f и g ограничены на множестве X, то $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$ при $n \to \infty$.

14.14. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$ и $|f(x)| \geq C > 0$ для всех $x \in X$, то существует такое n_0, что функции $1/f_n$ определены на X при $n \geq n_0$ и $1/f_n \rightrightarrows 1/f$ на множестве X при $n \to \infty$.

14.15. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n_0 \le n, m$ справедливо неравенство $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

14.16. (!) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых натуральных $n, m \ge n_0$ справедливо неравенство $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда найдётся такая функция $f : X \to \mathbb{R}$, что $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$ (**критерий Коши** равномерной сходимости).

14.17. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на множестве[2] X, $f, f_n \in C(X)$, и $x_n \to x$ при $n \to \infty$, $x_n, x \in X$. Докажите, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

14.18. Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, $a \in \operatorname{Lim} X$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеется предел $\lim\limits_{x \xrightarrow[X]{} a} f_n(x) = A_n$, то существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$.

14.19. (!) Докажите, что если $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, $a \in \operatorname{Lim} X$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется предел $\lim\limits_{x \xrightarrow[X]{} a} f_n(x) = A_n$, то существуют и равны пределы $\lim\limits_{x \xrightarrow[X]{} a} f(x)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

14.20. (!) Докажите, что если $f_n \in C(X)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$, то $f \in C(X)$.

14.21. (!)(§ 22) Докажите, что пространство $C[a, b]$ полное в равномерной норме.

14.22. Пусть $f, f_n \in C[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b) при $n \to \infty$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

14.23. Пусть $f \in C[a, b]$ и $f_n(x) = \sup\{f(y) \mid y \in [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap [a, b]\}$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$.

14.24. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X и $\omega(\delta) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \sup\limits_{|x-y|<\delta} |f_n(x) - f_n(y)|$. Докажите, что $\sup\limits_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| \le \omega(\delta)$.

---

[2] Здесь и далее через $C(X)$ обозначается множество функций, непрерывных на X.

14.25. Пусть функции f_n равномерно непрерывны на множестве X и $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$. Докажите, что функция f равномерно непрерывна на X.

14.26. Пусть двойная последовательность $(x_{n,k})$ такова, что $x_{n,k} \rightrightarrows b_k$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_{n,k} - b_k|) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = a_n \in \mathbb{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательности (a_n) и (b_k) сходятся, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$.

14.27. Пусть двойная последовательность $(x_{n,k})$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = a_n \in \mathbb{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_{n,k}| \le h_n$, причём ряд $\sum\limits_{n\ge1} h_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\ge1} a_n$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n,k} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

14.28. Пусть двойная последовательность функций $(f_{n,k})$ такова, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $f_{n,k} \rightrightarrows f_k$ на множестве X при $n \to \infty$ и $f_k \rightrightarrows f$ на множестве X при $k \to \infty$. Докажите, что найдётся такая строго возрастающая последовательность (n_k), что $f_{n_k,k} \rightrightarrows f$ на множестве X при $k \to \infty$ (**теорема о диагональной подпоследовательности**).

14.29. Пусть двойная последовательность функций $(f_{n,k})$ такова, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $f_{n,k} \rightrightarrows f_k$ на множестве X при $n \to \infty$ и $f_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ для любого $x \in X$. Докажите, что найдётся такая строго возрастающая последовательность (n_k), что $f_{n_k,k}(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ для любого $x \in X$.

14.30. Пусть $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ — некоторая нумерация рациональных чисел. Положим $f_{n,k} = \chi_{[q(k)+\frac{1}{n+k}, q(k)+\frac{2}{n+k}]}$ — индикатор отрезка. Докажите, что

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_{n,k}(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

б) для любой строго возрастающей последовательности (n_k) последовательность функций $f_{n_k,k}$ не сходится поточечно к тождественно нулевой функции.

14.31. Пусть $f \in C^1(a,b)$ и $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f'$ на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ при $n \to \infty$.

14.32. (!) Пусть монотонная (для каждого фиксированного $x \in [a,b]$) последовательность непрерывных функций (f_n) поточечно сходится к непрерывной функции f на отрезке $[a,b]$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n \to \infty$ (**теорема Дини**).

14.33. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция и $f_n(x) = \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n \to \infty$.

14.34. Пусть убывающая последовательность неотрицательных непрерывных функций (f_n) поточечно сходится к непрерывной функции f_0 на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$.

14.35. Пусть последовательность функций f_n поточечно сходится к функции f на отрезке $[a,b]$, причём функции f_n удовлетворяют условию Липшица с одинаковой константой L. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n \to \infty$.

14.36. Пусть последовательность функций (f_n) поточечно сходится к функции f_0 на отрезке $[a,b]$ и семейство функций $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ *равностепенно непрерывно* на $[a,b]$ т.е. $\sup\limits_{n\geq 0} \sup\limits_{|x-y|\leq\delta} (f_n(x) - f_n(y)) \to 0$ при $\delta \to 0$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n \to \infty$.

14.37. Пусть функции f_n равномерно непрерывны на множестве X и $f_n \rightrightarrows f$ на множестве X при $n \to \infty$. Докажите, что множество $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ является равностепенно непрерывным семейством функций.

14.38. Докажите, что равномерный предел последовательности почти периодических функций является почти периодической функцией (см. задачу 10.50).

14.39. Пусть функции $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонны при каждом $n \in \mathbb{N}$ и последовательность (f_n) поточечно сходится к функции $f \in C[a,b]$ на отрезке $[a,b]$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n \to \infty$.

14.40. Докажите, что в задачах 14.35 и 14.39 условие поточечной сходимости на отрезке можно заменить на условие поточечной сходимости на любом плотном в отрезке множестве.

14.41. Докажите, что многочлены разложения функции $f(x) = \sqrt{1-x}$ по формуле Тейлора в точке $x = 0$ сходятся равномерно к функции f на отрезке $[0, 1]$.

14.42. Докажите, что

а) существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$;

б) для любого $a > 0$ существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-a, a]$;

в) для любого $x_0 \in [a, b]$ и любой непрерывной функции f, которая аффинна на $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$, существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции f на отрезке $[a, b]$.

14.43. Пусть функция $f \in C[a, b]$ является *кусочно-аффинной*[3], т. е. отрезок $[a, b]$ разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых функция f является аффинной. Докажите, что существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции f.

14.44. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что найдётся последовательность кусочно-линейных непрерывных функций, равномерно сходящаяся к функции f на $[a, b]$.

14.45. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что найдётся последовательность ступенчатых[4] функций, равномерно сходящаяся к функции f на $[a, b]$.

14.46. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что существует последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к функции f на $[a, b]$ (**теорема Вейерштрасса**).

14.47. (§ 20) Пусть $f \in C^1[a, b]$ и $f'(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$. Докажите, что существует такая последовательность многочленов p_n, $p_n'(x) > 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [a, b]$, которая равномерно сходится к функции f на $[a, b]$.

---

[3] Кусочно-аффинные функции называют также кусочно-линейными.

[4] Функция называется ступенчатой (кусочно-постоянной), если её область определения можно разбить на непересекающиеся промежутки, на каждом из которых функция постоянна. Через Step(X) обозначается множество ступенчатых функций на промежутке $X \subseteq \mathbb{R}$.

14.48. Пусть p_n — последовательность многочленов степени не выше k и $p_n(x) \to p(x)$ при всех $x \in (a, b)$. Докажите, что p — многочлен степени не выше k и $p_n \rightrightarrows p$ на (a, b) при $n \to \infty$.

14.49. Путь последовательность (f_n) определена на отрезке $[0, 1]$ равенствами

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = (x f_{n-1}(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Докажите, что последовательность (f_n) сходится равномерно к непрерывной предельной функции на отрезке $[0, 1]$.

14.50. Докажите, что если $f_n \in \mathrm{Step}[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то функция f может иметь разрывы только 1-го рода.

14.51. Докажите, что любая функция, имеющая на отрезке разрывы только 1-го рода, может быть представлена как равномерный предел последовательности ступенчатых функций.

14.52. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ всевозможные функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей непрерывных функций. Докажите, что множество таких функций имеет мощность континуума.

14.53. Пусть функция f равномерно непрерывна на (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что найдётся такая последовательность функций f_n, удовлетворяющих условию Липшица, что $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b) при $n \to \infty$.

14.54. Функция $f : (a, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ называется *медленно меняющейся* при $x \to \infty$, если для любого $\lambda > 0$ существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1$. Пусть $g_n(\lambda) = \frac{f(\lambda n)}{f(n)}$, где $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — непрерывная, медленно меняющаяся функция. Докажите, что $g_n \rightrightarrows 1$ на любом отрезке $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, при $n \to \infty$.

14.55. (!) Исследуйте равномерную сходимость на $[0, 1]$ последовательности функций (f_n), где

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$;	г) $f_n(x) = \frac{xn}{1+n+x}$;
б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$;	д) $f_n(x) = \frac{xn}{1+n^2x^2}$;
в) $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$;	е) $f_n(x) = \frac{1}{xn+1}$.

14.56. Пусть $1 > \alpha > 0$. Исследуйте равномерную сходимость последовательности функций $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ на множествах:

а) $(0, 1-\alpha)$; г) $(1, 2)$;
б) $(0, 1)$; д) $(1, \infty)$;
в) $(1-\alpha, 1+\alpha)$; е) $(1+\alpha, \infty)$.

14.57. Докажите, что следующие функциональные последовательности сходятся поточечно, но не равномерно на $[0, \pi]$:

а) $(\sin x)^{\frac{1}{n}}$; б) $(\sin x)^n$; в) $(x \sin x)^{\frac{1}{n}}$.

14.58. Исследуйте равномерную сходимость последовательности функций (f_n) на множестве $(0, \infty)$, где

а) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$; в) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$;
б) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; г) $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$.

14.59. Исследуйте равномерную сходимость последовательности функций (f_n) на множествах $(0, 1)$, $(1/2, 2)$ и $(1, \infty)$, где

а) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; б) $f_n(x) = n(x^{1/n} - 1)$.

14.60. Исследуйте равномерную сходимость последовательности функций f_n на заданных множествах X, где

а) $f_n(x) = \frac{1}{x^2+nx+1}$, $X = [1, \infty)$ и $X = [0, 1]$;

б) $f_n(x) = \frac{n+x}{n+x+(nx)^{\frac{1}{3}}}$, $X = (1, \infty)$ и $X = [0, 1]$;

в) $f_n(x) = n \ln\bigl(1 + \frac{1}{nx}\bigr)$, $X = (0, 1)$ и $X = (1, \infty)$;

г) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $X = (-1, 1)$ и $X = (-\infty, \infty)$;

д) $f_n(x) = \frac{nx^2}{e^{nx}}$, $X = [1, \infty)$ и $X = [0, 1]$;

е) $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $X = (0, \frac{1}{2})$ и $X = (\frac{1}{2}, 1)$.

14.61. Исследуйте равномерную сходимость последовательностей функций:

а) $f_n(x) = x^2 \cos \frac{1}{nx}$ на $(0, \infty)$;
б) $f_n(x) = xe^{1/nx}$ на $[1, \infty)$;
в) $f_n(x) = \frac{1}{x^2} e^{x^3/n^2}$ на $[1, \infty)$;
г) $f_n(x) = nx^3 \sin \frac{1}{nx}$ на $(0, \infty)$;
д) $f_n(x) = \frac{1}{x} e^{-n/x}$ на $(0, 1)$;
е) $f_n(x) = x^4 \cos \frac{1}{nx}$ на $(0, \infty)$;
ж) $f_n(x) = xe^{1/(nx)^2}$ на $(0, 1]$;
з) $f_n(x) = nx^4 \sin \frac{1}{(nx)^4}$ на $(0, \infty)$;
и) $f_n(x) = \frac{1}{x} e^{\sqrt{x}/n}$ на $(0, 1]$;
к) $f_n(x) = \frac{1}{1+(n-x)^2}$ на $[0, \infty)$;
л) $f_n(x) = \sqrt{x^4 + \frac{1}{n^2}}$ на $(-\infty, \infty)$;
м) $f_n(x) = nx \ln(1 + \frac{1}{nx})$ на $[1, \infty)$;
н) $f_n(x) = e^{(x/n)^2}/x$ на $(0, 1]$;
о) $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{nx-1}{nx+1}$ на $[1, \infty)$.

14.62. (!) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ сходится равномерно на X тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geq n_0$ справедливо неравенство $\sup\limits_{x\in X} |\sum\limits_{k=n}^{m} f_k(x)| < \varepsilon$ (**критерий Коши** равномерной сходимости ряда).

14.63. (!) Пусть $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x)| \leq a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X (**признак Вейерштрасса** равномерной сходимости ряда).

14.64. Приведите пример такого неотрицательного равномерно сходящегося на $[0, 1]$ ряда $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, что числовой ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$ расходится.

14.65. (!) Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ сходится равномерно на X, то последовательность функций (f_n) сходится равномерно к 0 на множестве X.

14.66. Приведите пример равномерно сходящейся к нулю последовательности функций (f_n), для которой ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ сходится поточечно, но не равномерно.

14.67. Пусть последовательность (x_n), $x_n \in X$ такова, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x_n)$ расходится. Следует ли из этого, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ не является равномерно сходящимся на X?

14.68. (!) Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(x)|$ сходится равномерно на множестве X, то и ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

14.69. Докажите, что

а) ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$;

б) ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится на $\mathbb{R}$, но не равномерно.

14.70. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, составленный из монотонных функций, сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, если сходятся ряды $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(a)|$ и $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(b)|$.

14.71. Пусть ряд $\sum\limits_{n\geq 1} |\frac{1}{a_n}|$ сходится и $|a_n| > R > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{a_n - x}$ равномерно сходится на любом отрезке $[-b, b]$, где $0 < b < R$.

14.72. Исследуйте равномерную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x}{n2^n}$ на $(-1, 1)$ и $(-\infty, \infty)$;
б) $\sum\limits_{n\geq 1} \sin\frac{x}{n}$ на $(-1, 1)$ и $(-\infty, \infty)$;
в) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$ на $(-1, 1)$ и $(-\infty, \infty)$;
г) $\sum\limits_{n\geq 1} \sin\frac{x}{n^2}$ на $(-1, 1)$ и $(-\infty, \infty)$;
д) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x}{1+(nx)^2}$ на $(0, 1)$;
е) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+nx+x^2}$ на $(0, 1)$;
ж) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x\ln x}{n^2+\cos^2 x}$ на $(0, 1)$;
з) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln x}{n^2+n^x}$ на $(0, \infty)$.

14.73. Исследуйте равномерную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} nx^3e^{-nx}$ на $[0, 1]$;
б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{x^2}\ln(1 + \frac{x^2}{n^2})$ на $[1, \infty)$;
в) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x}{n}(1 - x)^n$ на $[0, 1]$;
г) $\sum\limits_{n\geq 1} nx^2e^{-nx}\sin\frac{1}{n}$ на $[0, \infty)$;
д) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(3x)^n(1/3-x)}{n}$ на $[0, 1/3]$;
е) $\sum\limits_{n\geq 1} (\frac{x^2}{1+nx^3})^3$ на $[0, \infty)$.

14.74. Исследуйте равномерную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} xe^{-nx}$ на $[0, 1]$;
б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x}{\ln n}e^{-nx}$ на $[0, 1]$;
в) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\ln(1 + \frac{x^2}{n^2})$ на $[1, \infty)$;
г) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x}{n}(1 - x + 1/n)^n$ на $[0, 1]$;
д) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}e^{-n(x-n)^2}$ на $\mathbb{R}$.

14.75. (!) Пусть $\sup\limits_{x\in X} |\sum\limits_{m=1}^{n} a_m(x)| \leq C_1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, последовательность $b_n(x)$ является монотонной при всех $x \in X$ и $\sup\limits_{x\in X} |b_n(x)| \leq C_2$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\sup\limits_{x \in X} \left| \sum\limits_{m=k}^{n} a_m(x) b_m(x) \right| \leq 4C_1C_2$ для любых $k, n \in \mathbb{N}$ (**неравенство Абеля**).

14.76. (!) Пусть ряд $\sum\limits_{n \geq 1} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, последовательность $b_n(x)$ является монотонной при всех $x \in X$ и равномерно ограниченной, т. е. $\sup\limits_{x \in X} |b_n(x)| \leq C < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на множестве X (**признак Абеля** равномерной сходимости ряда).

14.77. (!) Пусть частичные суммы ряда $\sum\limits_{n \geq 1} a_n(x)$ равномерно ограничены, т. е. для всех $n \in \mathbb{N}$ $\sup\limits_{x \in X} |\sum\limits_{m=1}^{n} a_m(x)| \leq C < \infty$, последовательность $(b_n(x))$ является монотонной при всех $x \in X$ и $b_n \rightrightarrows 0$ на множестве X при $n \to \infty$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на множестве X (**признак Дирихле** равномерной сходимости ряда).

14.78. Пусть ряд $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$ сходится, функция $b_1(x)$ ограничена, т. е. $\sup\limits_{x \in X} |b_1(x)| \leq C < \infty$, и $\sup\limits_{x \in X} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_{n+1}(x) - b_n(x)| \leq C_1 < \infty$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} a_n b_n(x)$ сходится равномерно на множестве X (**признак Харди** равномерной сходимости ряда).

14.79. (!) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ при $\pi > \varepsilon > 0$ и не сходится равномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

14.80. Пусть ряд $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X и сходится абсолютно в каждой точке множества X. Следует ли из этого, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} |f_n(x)|$ является равномерно сходящимся на множестве X? Рассмотрите $f_n(x) = (-1)^n (1 - x) x^n$ и $X = [0, 1]$.

14.81. Исследуйте равномерную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ при $\pi > \varepsilon > 0$;

б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cos nx}{n}$ на $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ при $\pi > \varepsilon > 0$;

в) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ на $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ при $\pi > \varepsilon > 0$.

14.82. Исследуйте равномерную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-\ln(x+n)}$ на $(0,1)$;

б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n+x}$ на $(0,1)$ и на $(1,\infty)$.

14.83. Исследуйте равномерную сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin 2n}{nx+(-1)^n}$ на $[2,\infty)$;

б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin n \sin(x/n)}{x}$ на $[1,\infty)$;

в) $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{\cos n}{nx+(-1)^{n(n+1)/2}}$ на $[1/2,\infty)$;

г) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{nx+2\sin nx}$ на $[1,2]$;

д) $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n+2\cos xn}$ на $(-\infty,\infty)$;

е) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos xn \sin x}{\sqrt{x+n}}$ на $(0,\infty)$;

ж) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{e^{n^2 x}-1}$ на $[0,\infty)$;

з) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(\frac{\pi n}{3})}{\sin(\frac{\pi n}{3})+nx}$ на $[1,\infty)$;

и) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{\cos^2 nx-1/2}{x\ln n}$ на $[1,2]$;

к) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\operatorname{arctg}(nx)\sin n}{x+n}$ на $[0,\infty)$;

л) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{nx+2\cos xn}$ на $(0,1)$;

м) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+\sin xn}$ на $(-\infty,\infty)$;

н) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(x/n)\sin n}{\sin x+\sqrt{n}}$ на $[1,2]$;

о) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x\sin nx}{e^{nx}}$ на $(0,1)$.

14.84. Пусть ряд $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ равномерно сходится на $[0,\infty)$.

14.85. Пусть ряд $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{e^{nx}}$ равномерно сходится на $[0,\infty)$.

14.86. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = b > 0$, то ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ равномерно сходится на $[b,\infty)$.

14.87. Вычислите

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{x^n}{x^n+1}.$$

14.88. Пусть $a \in \mathrm{Lim}(X)$, ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X и $A_n = \lim\limits_{x \xrightarrow[X]{} a} f_n(x)$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} A_n$ сходится и справедливо равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{x \xrightarrow[X]{} a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$.

14.89. Найдите область определения (т. е. область сходимости соответствующего ряда) и исследуйте функцию f на непрерывность, если

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathrm{arctg}(x/n))^2$;

б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} 2^{-n\ln x}$;

в) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}/x^2$;

г) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n^2})$;

д) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2}$;

е) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

14.90. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$

а) определена и непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

б) является периодической с периодом 1.

14.91. Докажите, что поточечный предел последовательности выпуклых функций является выпуклой функцией.

14.92. Пусть (f_n) — последовательность выпуклых непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, которая поточечно сходится к нулю. Докажите, что $f_n \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$.

14.93. Пусть (f_n) — последовательность выпуклых непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, которая поточечно сходится к непрерывной выпуклой функции f. Докажите, что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$.

14.94. Приведите пример последовательности выпуклых непрерывных функций на $[0, 1]$, которая сходится поточечно, но не равномерно на $[0, 1]$.

14.95. Приведите пример последовательности выпуклых функций на $\mathbb{R}$, которая сходится поточечно, но не равномерно к нулю на $\mathbb{R}$.

14.96. Докажите, что последовательность выпуклых, но не постоянных функций не может равномерно сходиться на $\mathbb{R}$ к 0.

14.97. Докажите, что любая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ является равномерным пределом последовательности, которая состоит из функций, представимых в виде разности двух выпуклых вниз функций.

14.98. Приведите пример непрерывной на отрезке функции, непредставимой в виде разности двух выпуклых вниз функций.

14.99. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и выпукла (вниз). Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует последовательность выпуклых (вниз) функций (f_n), $f_n \in C^k[a, b]$, такая что $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$.

14.100. (§ 20) Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и выпукла (вниз). Докажите, что функция f является равномерным пределом последовательности выпуклых (вниз) на отрезке $[a, b]$ многочленов.

14.101. (!) Пусть $f_n \in C^1(a, b)$, последовательность $(f_n(c))$ сходится в некоторой точке $c \in (a, b)$ и $f_n' \rightrightarrows g$ на (a, b) при $n \to \infty$. Докажите, что $f_n \rightrightarrows G$ на (a, b), причём $G' = g$.

14.102. (!) Пусть $f_n \in C^1(a, b)$ и ряд $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(c)$ сходится в некоторой точке $c \in (a, b)$. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'(x)$ сходится равномерно на (a, b), то ряд $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ сходится равномерно на (a, b), сумма ряда дифференцируема, причём $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\right)$.

14.103. Докажите, что если $f_n' \rightrightarrows f'$ на отрезке $[a, b]$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$, то $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $[a, b]$ при $n \to \infty$.

14.104. (§ 24) Пусть $f \in C^1[a, b]$ и $\|f\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$. Докажите, что $\| \cdot \|$ — норма в векторном пространстве $C^1[a, b]$ и пространство $C^1[a, b]$ с этой нормой является полным.

14.105. Пусть последовательность функций (f_n) удовлетворяет равенству $f_{n+1} = f_n'$ при любом $n \in \mathbb{N}$, причём $f_n \rightrightarrows f$ на $[0, 1]$ при $n \to \infty$ и $f(0) = 1$. Найдите функцию f.

14.106. Найдите область определения функции f и исследуйте её на дифференцируемость, если а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$;

б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{x^2+n^2}$;

в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{x^2+n}$;

г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{x+n}$.

14.107. Пусть $q:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}\cap[0,1]$ — некоторая биекция (нумерация рациональных чисел). Докажите, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-q(n)|}{2^n}$

а) непрерывна на $[0,1]$;

б) недифференцируема в рациональных точках;

в) дифференцируема в иррациональных точках.

14.108. Найдите область определения функции f и исследуйте её на дифференцируемость, если

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-xn^2}$;

б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx}e^{-xn}$;

в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{x^2}{n}}$;

г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-\frac{n}{x}}$;

д) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-xn^2}$;

е) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-xn}}{1+n^2}$.

14.109. Найдите область определения функции f и исследуйте её на дифференцируемость, если

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{n}$;

б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ln(x^2+n^2)$;

в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}$;

г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(\frac{x^2}{n^2}+1)$.

14.110. (!) Докажите, что *дзета-функция Римана* $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ бесконечно дифференцируема при $x>1$.

14.111. Докажите, что *тета-функция* $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}$ бесконечно дифференцируема при $x>0$.

14.112. Докажите, что функция *распределения Колмогорова* $K(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2x^2}$ бесконечно дифференцируема при $x\neq 0$.

14.113. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}$ бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

14.114. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$, где $|q| < 1$, бесконечно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}$.

14.115. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos nx$, где $|q| < 1$, бесконечно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}$.

14.116. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ бесконечно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}$.

14.117. Пусть функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ ограничены на множестве X и $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ на X. Докажите, что $f_n g_n \rightrightarrows fg$ на X.

14.118. Пусть $f \in C[a, b]$ — возрастающая (нестрого) функция. Докажите, что существует последовательность возрастающих многочленов (p_n), такая что $p_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

14.119. Пусть $f \in C[a, b]$ — выпуклая функция. Докажите, что существует последовательность выпуклых многочленов (p_n), такая что $p_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$.

14.120. Исследуйте на равномерную сходимость на множестве $(0, \infty)$ функциональную последовательность

а) $f_n(x) = \frac{n+x}{n+x+x^{1/3}\ln(n\ln n)}$; б) $f_n(x) = \frac{n+x}{n+x+x^{1/2}\ln^2 n}$.

15. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$. Ряд вида $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(\varphi(z))^n$ называется обобщённым степенным рядом. Множество значений параметра $z \in \mathbb{C}$, при которых ряд сходится, называют *областью сходимости* ряда. Аналогично определяются степенные ряды вещественного[5] аргумента $x \in \mathbb{R}$.

[5] В этом разделе комплексную переменную будем обозначать буквой z, а вещественную — буквой x; комплексный коэффициент будем обозначать c_n, вещественный — a_n.

Функции, которые можно представить сходящимися степенными рядами в некоторой окрестности любой точки из области определения, называют *аналитическими* функциями. Вещественную функцию называют *целой*, если она является аналитической на $\mathbb{R}$, комплексную — если она аналитическая на $\mathbb{C}$.

15.1. (!) Пусть $R = 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}$. Докажите, что степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Число R называется *радиусом сходимости ряда*.

15.2. (!) Докажите, что степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ сходится при любом $z \in \mathbb{C}$ (имеет радиус сходимости $R = \infty$) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|^{\frac{1}{n}} = 0$.

15.3. Пусть $R = 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}$. Приведите примеры

а) ряда $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, сходящегося во всех точках $|x| = R$;

б) ряда $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, расходящегося во всех точках $|x| = R$;

в) ряда $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, расходящегося в точке $x = R$ и сходящегося в точке $x = -R$.

15.4. (!) Докажите, что если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то он равен радиусу сходимости ряда $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$.

15.5. Докажите, что радиус сходимости R ряда $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ удовлетворяет неравенству

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \leq R \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

15.6. Определите радиусы сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 0} n^k c_n z^n$;　　в) $\sum\limits_{n\geq 0} n^n c_n z^n$;

б) $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n c_n z^n$;　　г) $\sum\limits_{n\geq 0} (1 + a^n) c_n z^n$.

15.7. Найдите радиусы сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$;

б) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p z^n$;

в) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!}{(1+i)(2+i)\dots(1+ni)} z^n$;

г) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(z+i+n)^n}{3^n(n-i)}$;

д) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2z)^n}{2+ni}$;

е) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} z^n$;

ж) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} z^n$;

з) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{i+n}{2in}\right)^n z^n$;

и) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(z-1)^n}{2n+(n-1)^2 i}$;

к) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(iz)^n}{2-ni}$.

15.8. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$; б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} x^n$.

15.9. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(1+(-2)^n)x^n}{2^n+3^n}$;

б) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2 x^n}{(3+(-1)^n)^n}$;

в) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(4^n+3^n)x^n}{1+(-2)^n}$;

г) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(3+(-2)^n)^n x^n}{n^3}$;

д) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(1+(-2)^n)x^n}{\sin(1/n)}$;

е) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(2+(-1)^n)^n x^n}{n^2}$.

15.10. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(x+1)^n}{(4n)^{\ln n}}$;

б) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{x^n}{2+\ln n}$;

в) $\sum\limits_{n\geq 2} x^n \ln\ln n$;

г) $\sum\limits_{n\geq 2} (x-1)^n (2n)^{\ln n}$.

15.11. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

б) $\sum\limits_{n\geq 1} (1+\frac{1}{n})^{n^2} e^{-nx}$;

в) $\sum\limits_{n\geq 0} ((-1)^n+1)^n \sin^n x$.

г) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}$;

д) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \operatorname{tg}^n x$;

15.12. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1}(3^{1/n}-1)x^n$; д) $\sum\limits_{n\geq 1}(2^{(-1)^n/n}-1)x^n$;
б) $\sum\limits_{n\geq 1}(n^{(-1)^n/n}-1)x^n$; е) $\sum\limits_{n\geq 1}(4^{1/n^2}-1)x^n$;
в) $\sum\limits_{n\geq 1}(3-(1+1/n)^n)^n x^n$; ж) $\sum\limits_{n\geq 1}(n^{1/n}-1)x^n$;
г) $\sum\limits_{n\geq 1}(1-n\sin\frac{1}{n})x^n$; з) $\sum\limits_{n\geq 1}(5^{1/n}-1)^n x^n$.

15.13. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^{2^n}$; б) $\sum\limits_{n\geq 1}2^n x^{n!}$.

15.14. Найдите области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}x^n$ (ряд Принсгейма).

15.15. Пусть $a_n\geq 0$, $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, причём $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$. Докажите, что степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0}a_n x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1.

15.16. Пусть r_1 — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n\geq 1}c_n z^n$, а r_2 — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n\geq 1}c'_n z^n$. Докажите, что

а) радиус сходимости r ряда $\sum\limits_{n\geq 1}c_n c'_n z^n$ удовлетворяет неравенству $r\geq r_1 r_2$;

б) если r_2, r_2 не равны 0 или ∞ одновременно, то радиус сходимости r ряда $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{c_n}{c'_n}z^n$ удовлетворяет неравенству $r\leq\frac{r_1}{r_2}$;

в) если $r_1\neq r_2$, то радиус сходимости r ряда $\sum\limits_{n\geq 1}(c_n+c'_n)z^n$ удовлетворяет равенству $r=\min(r_1,r_2)$. Покажите, что условие $r_1\neq r_2$ необходимо.

15.17. (!) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0}c_n z^n$ имеет радиус сходимости $R>0$. Докажите, что степенной ряд сходится равномерно в любом круге $\{|z|\leq b\}$, $b<R$ (**первая теорема Абеля**).

15.18. (!) Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ больше нуля. Докажите, что функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ непрерывна в точке $z = 0$.

15.19. (!) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ сходится при $|z| < R$. Докажите, что функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ непрерывна в любой точке $|z| < R$.

15.20. (!) Докажите, что вещественный степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ сходится равномерно на любом компакте, который содержится в области сходимости ряда.

15.21. Докажите, что комплексный степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ сходится равномерно на любом компактном треугольнике, который содержится в области сходимости ряда.

15.22. Докажите, что если степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, то $a_n = 0$ для всех n больших некоторого n_0.

15.23. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

15.24. (!) Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z_0^n$ сходится, то $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ (**вторая теорема Абеля**).

15.25. Областью определения функции $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется область сходимости ряда $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Докажите, что функция f непрерывна на области определения.

15.26. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$, $|A| < \infty$ и $a_n = o(1/n)$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ (**теорема Таубера**).

15.27. Найдите суммы рядов при $|x| < 1$:

а) $\sum\limits_{n\geq 0} e^{in\varphi}x^n$; в) $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(n\varphi)x^n$;

б) $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-in\varphi}x^n$; г) $\sum\limits_{n\geq 0} \cos(n\varphi)x^n$.

15.28. Суммой ряда $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ по Абелю называется $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Найдите суммы рядов по Абелю:

а) $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n$; в) $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(n\varphi)$;

б) $\sum\limits_{n\geq 0} e^{in\varphi}$; г) $\sum\limits_{n\geq 0} \cos(n\varphi)$.

15.29. Докажите, что если ряд имеет конечную сумму по Чезаро (см. задачу 6.117), то он имеет такую же сумму по Абелю (**теорема Фробениуса**).

15.30. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n n$ сходится по Абелю, но не сходится по Чезаро.

15.31. Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ равен $r > 1$ и $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при $|x| < r$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi(1/n)$ сходится тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = 0$.

15.32. Рассмотрим степенные ряды $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$, $\sum\limits_{n\geq 1} b_n x^n$, где $b_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s$.

а) Предположим, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} b_n x^n$ сходится при $|x| < 1$, но не сходится при $x = 1$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ сходится абсолютно при $|x| < 1$ и при этом

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = s.$$

б) Предположим, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} b_n x^n$ сходится при каждом $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$ сходится при каждом $x \in \mathbb{R}$, и при этом

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n} = s.$$

15.33. Пусть функция f бесконечное число раз дифференцируема в точке $x = x_0$. Степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ называется *рядом Тейлора* функции f в точке $x = x_0$. Верно ли, что ряд Тейлора произвольной бесконечно дифференцируемой функции имеет ненулевой радиус сходимости? Рассмотрите функцию $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}\cos(n^2 x)$.

15.34. (§ 20–21) Докажите, что ряд Тейлора в точке $x = 0$ бесконечно дифференцируемой функции $f(x) = e^{1/x^2} \int\limits_{1/x^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$, $f(0) = 0$, имеет нулевой радиус сходимости.

15.35. Пусть функция f бесконечное число раз дифференцируема в точке $x = x_0$. Верно ли, что ряд Тейлора $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ сходится к $f(x)$ при $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, где R — радиус сходимости ряда Тейлора? Рассмотрите функцию из задачи 9.231.

15.36. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Докажите, что продифференцированный почленно степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_{n+1}(n+1)x^n$ имеет тот же радиус сходимости. Приведите пример степенного ряда, область сходимости которого строго больше области сходимости ряда, продифференцированного почленно.

15.37. Докажите, что равенство $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ справедливо во всех точках сходимости второго ряда[6].

[6] В граничных точках области сходимости имеются в виду односторонние производные.

15.38. Найдите область определения I функции f, исследуйте на дифференцируемость функцию f как во внутренних точках множества I, так и в граничных, когда таковые принадлежат множеству I, если

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(3^{1/n^2}-1\big)x^n$; в) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{3^{1/n^2}}\Big)x^n$;

б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(2^{1/n^2}-1\big)x^n$; г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{2^{1/n^2}}\Big)x^n$.

15.39. (§ 20)(!) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$ имеет радиус сходимости $R>0$. Докажите, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ имеет первообразную на интервале $(-R,R)$, причём $\int f(x)\,dx=C+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, где C — некоторая константа.

15.40. (!) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$ имеет радиус сходимости $R>0$. Докажите, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ бесконечное число раз дифференцируема в точке $x=0$ и $f^{(n)}(0)=a_nn!$ для любого $n\in\mathbb{N}$.

15.41. Приведите пример функции, бесконечно дифференцируемой, но не аналитической в окрестности нуля.

15.42. (!) Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$ имеет радиус сходимости $R>0$. Докажите, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ дифференцируема бесконечное число раз на интервале $(-R,R)$.

15.43. (!) Докажите, что для любой аналитической (при $|x|<R$) функции $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, где R — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$, этот ряд является рядом Тейлора[7] функции f в точке $x=0$.

[7] Это утверждение, а также все последующие утверждения данного раздела о свойствах аналитических функций вещественной переменной верны и для аналитических функций комплексного переменного (см. [51]).

15.44. (!) Пусть f и g — бесконечное число раз дифференцируемые в точке $x = x_0$ функции, причём их ряды Тейлора $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum\limits_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ сходятся к $f(x)$ и $g(x)$ соответственно внутри интервала (x_0-R, x_0+R). Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n+b_n)(x-x_0)^n$ является рядом Тейлора функции $f+g$ и сходится к ней внутри интервала (x_0-R, x_0+R).

15.45. (!) Пусть f и g — бесконечное число раз дифференцируемые в точке $x = x_0$ функции, причём их ряды Тейлора $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ и $\sum\limits_{n\geq 0} b_n(x-x_0)^n$ сходятся к $f(x)$ и $g(x)$ соответственно внутри интервала (x_0-R, x_0+R). Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(x-x_0)^n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ является рядом Тейлора функции fg и сходится к ней внутри интервала (x_0-R, x_0+R).

15.46. Пусть $f \in C^\infty(a,b)$ и найдётся такое $C > 0$, что $|f^{(n)}(x)| \leq C^n$ при $x \in (a,b)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд Тейлора функции f в точке $x = x_0 \in (a,b)$ сходится к функции f в любой точке из интервала (a,b).

15.47. Пусть $f \in C^\infty(-R,R)$ и $\frac{R^n}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что ряд Тейлора функции f сходится к функции f в любой точке интервала $(-R,R)$.

15.48. Пусть $f \in C^\infty(-h,h)$, где $h > 1$ и $f^{(n)}(x) \geq 0$ при $x \in [-1,1]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ для любого $x \in (-1,1)$.

15.49. (!) Докажите, что

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \text{ при } x \in (-1,1].$$

15.50. Докажите равенства:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} = \ln 2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n} = \ln 3 - \ln 2$.

15.51. (!) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажите, что при $|x| < 1$ справедливо равенство $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha x^n$, где $C_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

15.52. Докажите равенство при $|x| < 1$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} C_{2n}^n (x^{2n} + x^{2n+1}).$$

15.53. Разложите функцию f в ряд Тейлора в точке $x = 0$ и найдите область сходимости ряда, где

а) $f(x) = e^{-x^2}$;

б) $f(x) = \cos^2 x$;

в) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$;

г) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;

д) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$;

е) $f(x) = \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$;

ж) $f(x) = \frac{1}{x^2+\sqrt{3}x+1}$.

15.54. Найдите ряд Тейлора в точке $x = 0$ функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и область его сходимости. Вычислите суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

15.55. Найдите ряд Тейлора в точке $x = 0$ функции $f(x) = \arcsin x$ и область его сходимости. Вычислите суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{4^n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2^n(2n+1)}$.

15.56. Найдите ряд Тейлора в точке $x = 0$ функции $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ и область его сходимости. Вычислите суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$.

15.57. Применяя дифференцирование, интегрирование и некоторые элементарные преобразования, найдите суммы степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

15.58. Разложите функцию f в ряд Тейлора в точке $x = 0$ и найдите область сходимости ряда, где

а) $f(x) = \sin x \cos x \cos 2x$; г) $f(x) = \cos(x-a)\cos(a-x)$;
б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}$; д) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;
в) $f(x) = e^x \sin x$; е) $f(x) = \operatorname{ch} x \cos x$.

15.59. Найдите ряд Тейлора в точке $x = 0$ функции $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$ и область его сходимости.

15.60. Найдите ряд Тейлора функции $f(x) = e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha)$ в точке $x = 0$ и область его сходимости. Докажите равенство $\operatorname{Im} e^{xe^{i\alpha}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sin \alpha n}{n!}$ для всех $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

15.61. Вычислите суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \alpha n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \alpha n}{n!}$.

15.62. Выясните, является ли функция f непрерывно дифференцируемой в точке $x = 0$, где

а) $f(x) = \begin{cases} x^{-2}(1 - \cos x), & x > 0, \\ 1/2, & x \le 0; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} \sin x, & x > 0, \\ 1, & x \le 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} \ln(1 + x), & x > 0, \\ 1 - x/2, & x \le 0. \end{cases}$

15.63. Выясните, является ли функция $f'(x)$ равномерно непрерывной на интервале $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}(e^x - 1), & x > 0, \\ 1 + x/2, & x \le 0. \end{cases}$$

15.64. (!) Докажите, что функция $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ имеет односторонние производные любого порядка в точке $x = 0$.

15.65. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{|x|} + \cos \sqrt{|x|}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

15.66. Докажите, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$, бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

15.67. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(-R, R)$ и существует такая последовательность $0 \neq x_n \to 0$ при $n \to \infty$, что $f(x_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $a_0 = 0$.

15.68. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(-R, R)$, $R > 0$, причём $f(x) = 0$ для всех $x \in (-R, R)$. Докажите, что $a_n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

15.69. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(-R, R)$ и существует такая последовательность $0 \neq x_n \to 0$ при $n \to \infty$, что $f(x_n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $a_n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

15.70. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Докажите, что для произвольного $R > \varepsilon > 0$ найдётся такое $C(\varepsilon) > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in (-R + \varepsilon, R - \varepsilon)$ справедливо неравенство $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{C(\varepsilon) k!}{(R - |x| - \varepsilon)^k}$.

15.71. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Докажите, что

а) ряд Тейлора функции f в точке $a \in (-R, R)$ имеет радиус сходимости $r \geq R - |a|$;

б) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ для всех $x \in (a - r, a + r)$. Этот ряд называется *переразложением* в точке $x = a$ исходного степенного ряда.

15.72. Пусть $|a_n| \leq \frac{C}{n!}$ для некоторого $C > 0$. Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причём $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ для всех $a, x \in \mathbb{R}$.

15.73. Пусть для двух степенных рядов $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_1)^n$ и $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_2)^n$ найдётся точка x_3 в пересечении M их кругов сходимости такая, что $f^{(n)}(x_3) = g^{(n)}(x_3)$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Докажите, что $f(x) = g(x)$ при $x \in M$.

15.74. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(-R, R)$ и $f \not\equiv 0$. Докажите, что все нули функции f на $(-R, R)$ имеют конечную кратность, т. е. если $f(x_0) = 0$, то $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

15.75. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на $(-R, R)$ и существует бесконечное число точек $x_n \in [-r, r] \subset (-R, R)$, в которых $f(x_n) = 0$. Докажите, что $a_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

15.76. Докажите, что если суммы двух степенных рядов совпадают на некотором множестве, имеющем предельную точку в пересечении их кругов сходимости, то они совпадают на всём пересечении кругов сходимости.

15.77. Доказать, что функцию $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно представить в виде отношения двух многочленов тогда и только тогда, когда существуют числа $m_0 \in \mathbb{N}$ и $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ такие, что для всех $m \geq m_0$ выполнено равенство $b_0 a_m + b_1 a_{m+1} + \cdots + b_n a_{m+n} = 0$.

15.78. Доказать, что функцию $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно представить в виде отношения двух многочленов, если последовательность a_n является периодической начиная с некоторого номера.

15.79. Пусть для двух степенных рядов $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющих радиусы сходимости R_1 и R_2 соответственно, выполняется равенство $|f(x)| = |g(x)|$ при $|x| < \min\{R_1, R_2\}$. Докажите, что $R_1 = R_2 = R$ и $f(x) = g(x)$ для любого $|x| < R$ или $f(x) = -g(x)$ для любого $|x| < R$.

15.80. Пусть степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$ и $a_0 \neq 0$. Докажите, что функция $1/f(x)$ представляется в виде степенного ряда с радиусом сходимости $r > 0$. Оцените величину r через R.

15.81. Докажите, что функция $\frac{1}{\cos x}$ представима в виде ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ в некоторой окрестности точки $x=0$. Докажите, что *числа Эйлера* E_{2n} удовлетворяют рекуррентным соотношениям $E_0=1$, $E_0+C_{2n}^2E_2+\dots+C_{2n}^{2n}E_{2n}=0$.

15.82. Докажите, что функция $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$, $f(0)=1$, представима в виде ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ в некоторой окрестности точки $x=0$. Докажите, что числа Бернулли B_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям $B_0=1$, $C_{n+1}^0B_0+C_{n+1}^1B_1+\dots+C_{n+1}^nB_n=0$.

15.83. Докажите, что функция $f(x)=x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, $f(0)=1$, представима в виде ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}(2x)^{2n}$ в некоторой окрестности точки $x=0$. Докажите, что числа Бернулли B_{2n+1} равны 0 при $n\geq 1$.

15.84. Докажите, что функция $\operatorname{tg} x$ представима в виде ряда Тейлора $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n(4^n-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$ в некоторой окрестности точки $x=0$.

15.85. Докажите, что функция $\frac{x}{\sin x}$ представима в виде ряда Тейлора $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4^n-2)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ в некоторой окрестности точки $x=0$.

15.86. Разложив функцию $f(x)=e^{2tx-x^2}$ в ряд Тейлора в точке $x=0$, докажите равенство $e^{2tx-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(t)}{n!}x^n$, где $H_n(t)$ — многочлен Эрмита (см. задачу 9.213).

15.87. Докажите равенство $H_{n+1}(t)-2tH_n(t)+2nH_{n-1}(t)=0$.

15.88. Используя разложение функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд Тейлора в точке $x=\frac{1}{2n+1}$, докажите неравенство $1<(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})<1+\frac{1}{12n(n+1)}$ для любого $n\in\mathbb{N}$.

15.89. Пусть функция f является аналитической на интервале $(a-r,a+r)$. Докажите, что найдётся такое $\varepsilon>0$, что для любого $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ справедливо равенство $f(x)=f(a)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}f^{(2n-1)}\left(\frac{x+a}{2}\right)$.

15.90. Пусть $f \in C^\infty(0,1)$ и для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ и $x \in (0,1)$ справедливо неравенство $f^{(n)}(x) \geq 0$. Докажите, что ряд Тейлора функции f сходится при $|x| \leq 1$ и сумма ряда совпадает с $f(x)$ при $x \in (0,1)$.

15.91. Рассмотрим последовательность (x_n) такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Докажите, что для любой последовательности (w_n) найдётся аналитическая (на $\mathbb{R}$) функция f такая, что $f(x_n) = w_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

15.92. Пусть радиус сходимости степенного ряда $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 1 и $a_n \geq 0$ для любого $n \geq 0$. Докажите, что не существует степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ с положительным радиусом сходимости, суммы которого равны $s(x)$ на некотором непустом интервале $(1-\varepsilon, 1)$ (**теорема Принсгейма**).

16. Суммируемые семейства и произведение рядов

Пусть I — некоторое множество. Семейство вещественных чисел $\{x_i\}_{i\in I}$ называется *суммируемым*, если существует число $s \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \text{ конечное } K \subseteq I \;\; \forall \text{ конечного } L,\; K \subseteq L \subseteq I \Rightarrow \left| \sum_{i\in L} x_i - s \right| < \varepsilon.$$

Число s называется суммой семейства и обозначается через $\sum\limits_{i\in I} x_i$. Произведением семейств чисел $\{x_i\}_{i\in I}$ и $\{y_j\}_{j\in J}$ будем называть семейство $\{x_i y_j\}_{i\in I, j\in J}$.

Говорят, что двойной ряд $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$ сходится к числу $s \in \mathbb{R}$, которое называется суммой двойного ряда и обозначается через $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} u_{ij}$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \in \mathbb{N} \; \left(n, m \geq n_0 \Rightarrow |\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_{ij} - s| < \varepsilon \right).$$

16.1. (!) Докажите, что если семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ суммируемо, то множество $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ не более чем счётно.

16.2. (!) Докажите, что бесконечное семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемо семейство $\{|x_i|\}_{i\in I}$. При этом $\left|\sum\limits_{i\in I} x_i\right| \leq \sum\limits_{i\in I} |x_i|$.

16.3. Докажите, что если семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ суммируемо, то семейство $\{x_i\}_{i\in J}$ суммируемо для произвольного подмножества $J \subseteq I$.

16.4. Рассмотрим семейство попарно непересекающихся множеств $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и положим $I = \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. Докажите, что семейство чисел $\{x_i\}_{i\in I}$ суммируемо тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in A$ суммируемы семейства $\{x_i\}_{i\in I_\alpha}$ и суммирумо семейство $\{s_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $s_\alpha = \sum\limits_{i\in I_\alpha} x_i$, при этом $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{\alpha\in A} s_\alpha$.

16.5. (!) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда суммируемо семейство $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, при этом $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

16.6. Пусть ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится и $S = \{\sum\limits_{n\in A} x_n \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$.

а) Докажите, что множество сумм S является замкнутым множеством без изолированных точек.

б) Докажите, что множество сумм S симметрично относительно числа $s/2$, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$.

16.7. (!) Пусть семейства чисел $\{x_i\}_{i\in I}$ и $\{y_j\}_{j\in J}$ суммируемы. Докажите, что семейство $\{x_i y_j\}_{i\in I, j\in J}$ суммируемо, причём

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_i\right) = \sum_{i\in I, j\in J} x_i y_j.$$

16.8. (!) Докажите, что двойной ряд $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится семейство $\{u_{ij}\}_{ij\in\mathbb{N}^2}$, причём суммы семейства и двойного ряда совпадают.

16.9. (!) Пусть ряды $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ и $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ сходятся абсолютно. Докажите, что двойной ряд $\sum\limits_{n,m\geq 1} a_n b_m$ сходится абсолютно и справедливы равенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_n b_m = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m.$$

16.10. Пусть степенные ряды $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют радиус сходимости $R > 0$. Докажите, что $f(x)g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ при $|x| < R$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

16.11. (!) *Произведение по Коши* двух числовых рядов $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ и $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ определяется как ряд $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Докажите, что произведение (по Коши) двух абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд.

16.12. (!) Докажите, что произведение (по Коши) сходящегося и абсолютно сходящегося ряда есть сходящийся ряд. Причём справедливо равенство

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (**теорема Мёртенса**).

16.13. Всегда ли произведение (по Коши) двух сходящихся рядов есть сходящийся ряд? Рассмотрите $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$.

16.14. Докажите, что если произведение (по Коши) двух сходящихся рядов есть сходящийся ряд, то его сумма равна произведению сумм двух этих рядов.

16.15. Докажите равенство $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$, где $|q| < 1$.

16.16. (!) Не пользуясь свойствами экспоненты, докажите равенство
$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$
для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

16.17. Докажите равенство $\mathcal{C} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k}(\zeta(k)-1)$, где $\mathcal{C}$ — константа Эйлера, $\mathcal{C} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ (см. задачу 5.184), ζ — дзета-функция Римана (см. задачу 14.110).

16.18. Используя определения функций $\sin x$ и $\cos x$ как сумм степенных рядов (см. § 8), докажите равенства

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1,$$
$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2.$$

16.19. Докажите, что произведение (по Коши) двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ и $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ расходится при $\alpha+\beta < 1$ и сходится при $\alpha + \beta > 1$.

16.20. Пусть $a_{nm} = \frac{(m-n)(m+n-1)!}{2^{m+n}m!n!}$, где $0! = 1$ и $a_{00} = 0$. Докажите равенства
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right) = 1, \quad \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}\right) = -1.$$

16.21. (!) Пусть сходящийся двойной ряд $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$ имеет сумму s, причём существуют пределы $s_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_{ij}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $s' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i$. Докажите, что справедливо равенство $s' = s$ (**теорема Принсгейма**).

16.22. Пусть $S_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} u_{ij}$. Докажите, что двойной ряд $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$ сходится к некоторому числу $s \in \mathbb{R}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m, p, q \in \mathbb{N}\ (n, m \geq n_0 \Rightarrow |S_{m+p,n+q} - S_{m,n}| < \varepsilon)$$

(**теорема Штольца**).

16.23. Докажите, что двойной ряд $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$, где $u_{ij} \geq 0$, сходится тогда и только тогда, когда сходятся все его строки, а также сходится ряд, составленный из их сумм, т. е. существуют пределы $s_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_{ij}$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $s' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} s_i$, причём двойной ряд $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$ сходится к s'.

16.24. Пусть для двойного ряда $\sum\limits_{i,j\geq 1} u_{ij}$ существуют конечные суммы:

1) $s_{i*} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_{ij}$ для любого $i \in \mathbb{N}$;

2) $s_{*j} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_{ij}$ для любого $j \in \mathbb{N}$;

3) $s' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} s_{i*}$.

Докажите, что тогда

а) для каждого $k \in \mathbb{N}$, последовательности $r_i^{(k)} = \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} u_{ij}$ образуют сходящийся ряд и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i^{(k)} = R_k$;

б) для того чтобы сходился ряд $\sum\limits_{j\geq 1} s_{*j}$, необходимо и достаточно существование конечного предела $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = R$;

в) для справедливости равенства $s' = \sum\limits_{j=1}^{\infty} s_{*j}$ необходимо и достаточно, чтобы $R = 0$ (**теорема Маркова**).

16.25. Выясните, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ сходится двойной ряд $\sum\limits_{n,m\geq 1} x^{nm}$.

16.26. Используя преобразования ряда в двойной ряд, докажите равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-(-1)^{n+1}q^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-(-1)^{n+1}q^n)^2}$ при любом $|q| < 1$.

16.27. Приведите пример степенного ряда $\sum\limits_{n,m\geq 0} c_{nm}x^n y^m$ относительно двух переменных, сходящегося в точках (a_1, a_2) и (b_1, b_2), но не в точке $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

16.28. Из известного равенства $e^{2xt-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$ для производящей функции e^{2xt-t^2} многочленов Эрмита H_n и теоремы Мёртенса (задача 16.12) выведите равенство $H_n(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k H_k(x)(2y)^{n-k}$.

17. Бесконечные произведения

Для любой последовательности (x_n), $x_n > 0$, выражение[8] $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ называется *бесконечным произведением*, а числа $p_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ называются *частичными произведениями*. Бесконечное произведение называется *сходящимся*, если последовательность (p_n) имеет предел $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$, причём $0 < p_n < \infty$. Предел $p = \prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ также называют бесконечным произведение последовательности (x_n). В случае $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n = 0$ говорят, что бесконечное произведение *расходится к* 0, в случае $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ — *расходится к* ∞.

17.1. Докажите равенства:

а) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$;

б) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$;

в) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{1}{2}$;

г) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2$;

д) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$;

е) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$.

17.2. Докажите равенства:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$;

б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

17.3. Докажите равенство

[8] В некоторых задачах предполагается, что конечное число сомножителей бесконечного произведения могут принимать отрицательные или нулевые значения. Приведённые здесь определения естественным образом распространяются на этот случай.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}\quad \text{при } 0<q<1.$$

17.4. Пусть $0 < q < 1$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Докажите, что a_n — количество представлений числа n в виде суммы различных натуральных чисел.

17.5. Докажите равенство

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1+1/n} = e^{\mathcal{C}}$, где $\mathcal{C}$ — константа Эйлера (см. задачу 16.17).

17.6. Вычислите:

а) $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$;

б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$;

в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a^{(-1)^n/n}$, $a>0$;

г) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.

17.7. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} \frac{1}{x_n}$, причём $\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$.

17.8. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} x_n^2$.

17.9. Докажите, что из сходимости бесконечных произведений $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ и $\prod\limits_{n\geq 1} y_n$ следует сходимость бесконечных произведений:

а) $\prod\limits_{n\geq 1} x_n y_n$; б) $\prod\limits_{n\geq 1} x_n/y_n$.

17.10. (!) Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \ln x_n$.

17.11. (!) Докажите, что если бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

17.12. (!) Пусть $t_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$.

17.13. Пусть $t_n > -1$. Будет ли сходимость ряда $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$ достаточной для, того чтобы сходилось бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$? Рассмотрите последовательность (t_n), $t_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

17.14. (!) Пусть $t_n > -1$ и ряды $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} t_n^2$ сходятся. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ сходится.

17.15. Докажите, что сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$, где $t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^n/2}$, в то время как ряды $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} t_n^2$ расходятся.

17.16. Докажите сходимость и вычислите бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$, где

$$t_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2k-1; \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

убедившись в том, что ряды $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} t_n^2$ расходятся.

17.17. Пусть $t_n > -1$, ряд $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$ расходится и ряд $\sum\limits_{n\geq 1} t_n^2$ сходится. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ расходится.

17.18. Пусть $t_n > -1$, ряд $\sum\limits_{n\geq 1} t_n$ сходится и ряд $\sum\limits_{n\geq 1} t_n^2$ расходится. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ расходится.

17.19. Пусть $t_n > -1$. Докажите, что ряды $\sum\limits_{n\geq 1} |\ln(1+t_n)|$ и $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+|t_n|)$ сходятся или расходятся одновременно.

17.20. (!) Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ сходится, если сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+|t_n|)$.

17.21. Докажите, что если бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+|t_n|)$ сходится, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_{\sigma(n)})$ сходится при любой перестановке[9] σ и предел $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+t_{\sigma(n)})$ не зависит от перестановки.

17.22. Пусть $\frac{\pi}{2} > x_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и сходится ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n^2$. Докажите, что сходятся бесконечные произведения:

а) $\prod\limits_{n\geq 1}\cos x_n$;
б) $\prod\limits_{n\geq 1}\frac{\sin x_n}{x_n}$;
в) $\prod\limits_{n\geq 1}\operatorname{ch} x_n$;
г) $\prod\limits_{n\geq 1}\frac{\operatorname{sh} x_n}{x_n}$.

17.23. Пусть $\frac{\pi}{4} > x_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}\operatorname{tg}(x_n + \frac{\pi}{4})$ сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n\geq 1}|x_n|$.

17.24. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, m, k \in \mathbb{N}\; \left(m \geq k \geq n \;\Rightarrow\; \left|1 - \prod_{i=k}^{m} x_n\right| < \varepsilon.\right)$$

17.25. Пусть $t_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\left(\frac{1}{t_{n+1}} - \frac{1}{t_n}\right) \to 1$ при $n \to \infty$. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ расходится.

17.26. Пусть $t_n \geq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+t_n)$ сходится. Докажите равенство

$$\lim_{x\to 1-0}\prod_{n=1}^{\infty}(1+t_n x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+t_n).$$

17.27. Выясните, сходятся ли бесконечные произведения:

а) $\prod\limits_{n\geq 1}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;
б) $\prod\limits_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;
в) $\prod\limits_{n\geq 1}(1+\frac{1}{n})^{1/n}$;
г) $\prod\limits_{n\geq 1} n^{(-1)^n/n}$;
д) $\prod\limits_{n\geq 1} n^{1/n^2}$;
е) $\prod\limits_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$.

[9] Имеется ввиду взаимно однозначное отображение $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

17.28. Выясните, сходятся ли бесконечные произведения:

а) $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{2}{n+\sqrt{2}}\right)e^{-2/n}$; в) $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{2}{n+\sqrt{2}}\right)^2 e^{-4/n}$;

б) $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n+\sqrt{3}}\right)^2 e^{-2/n}$; г) $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{3}{3+n}\right)e^{-3/n}$.

17.29. Выясните, при каких $\alpha,\beta>0$ сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}\frac{\alpha+n}{\beta+n}$.

17.30. Выясните, при каких $\alpha, x\in\mathbb{R}$ сходится бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{\alpha}$.

17.31. (!) Выясните, при каких $\alpha\in\mathbb{R}$ сходятся бесконечные произведения:

а) $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$; б) $\prod\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right)$.

17.32. Выясните, при каких $x\in\mathbb{R}$ сходятся бесконечные произведения:

а) $\prod\limits_{n\geq 1}|1+\frac{x^n}{n}|$; г) $\prod\limits_{n\geq 1}|1+n(x^2/2)^n|$;

б) $\prod\limits_{n\geq 1}|1-\frac{x^n}{n}|$; д) $\prod\limits_{n\geq 1}|1+(-1)^n\frac{x^n}{n}|$;

в) $\prod\limits_{n\geq 1}|1+\frac{x^n}{n\ln^2 n}|$; е) $\prod\limits_{n\geq 1}|1-(1+\frac{1}{n})^n x^n|$.

17.33. Выясните, при каких $x\in\mathbb{R}$ сходятся бесконечные произведения:

а) $\prod\limits_{n\geq 1}(x^2+n^2)^{1/n^2}$; б) $\prod\limits_{n\geq 1}|1+x^{\ln n}|$.

17.34. Докажите, что при любых $x, c\in\mathbb{R}$, $-c\notin\mathbb{N}$ бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}\left|\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right|$ сходится.

17.35. Докажите, что при любых $x\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{N}$ бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^k}\exp\left(\sum\limits_{m=1}^{k+1}\frac{n^{k-m}x^m}{m}\right)\right|$ сходится.

17.36. Докажите равенство $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^n}{e}=0$.

17.37. Пусть двупараметрическая последовательность $(x_{n,k})$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = a_n \in \mathbb{R}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\sup\limits_{k,k\geq n} |x_{n,k}| \leq h_n$, причём ряд $\sum\limits_{n\geq 1} h_n$ сходится. Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\geq 1}(1+a_n)$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{n=1}^{k}(1+x_{n,k}) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

17.38. (!) а) Используя формулу Муавра, докажите, что $\sin(2k+1)z = P_k(\sin^2 z)\sin z$, где P_k — многочлен степени k для любого $k \in \mathbb{N}$.

б) Для любого $k \in \mathbb{N}$ докажите равенство

$$P_k(y) = (2k+1)\prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{y}{\sin^2 \frac{n\pi}{2k+1}}\right).$$

в) Для любого $k \in \mathbb{N}$ докажите равенство

$$\sin x = (2k+1)\sin\frac{x}{2k+1}\prod_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2k+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2k+1}}\right).$$

г) Докажите, что при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство.

$\sin x = x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

д) Докажите, что при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{x}{4\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots =$$
$$= e^{-\frac{x}{\pi}\ln 2}\sin x.$$

17.39. Докажите, что при $x \neq \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\cos x = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$.

17.40. Докажите, что $\operatorname{sh} x = \pi x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

17.41. (!) Докажите равенства:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{\pi}{2}$ (**формула Валлиса**);

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\frac{3n}{3n+1}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

17.42. Докажите равенства:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$; б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

17.43. Докажите асимптотическое равенство $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1))$ при $n\to\infty$.

17.44. Пусть $\alpha>1$, $a_n>0$ для любого $n\in\mathbb{N}$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Докажите равенство

$$\lim_{n\to\infty}a_n n^p=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.$$

17.45. (!) Пусть $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Докажите, что:

а) последовательность (a_n) имеет предел $A=a_1\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $0<A<\infty$;

б) $A=\sqrt{2\pi}$;

в) $1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$;

г) $n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$, где $0<\theta_n<1$ для любого $n\in\mathbb{N}$ (**формула Стирлинга**).

17.46. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{((2n-1)!!)^{1/n}}$.

17.47. Докажите асимптотические равенства при $n\to\infty$:

а) $C_{2n}^n=\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1))$;

б) $\ln C_n^{\lfloor\alpha n\rfloor}=-(\alpha\ln\alpha+(1-\alpha)\ln(1-\alpha))n+o(n)$ для любого α, $0<\alpha<1$;

в) $\sum\limits_{k=\lfloor(1-\alpha)n\rfloor}^{\lfloor(1+\alpha)n\rfloor}C_{2n}^k=4^n(1+o(1))$ для любого $0<\alpha<1$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{m}C_{2n}^k\le\frac{2n-m}{2n-2m}C_{2n}^m$ при $m<n$;

д) $\sum\limits_{k=\lfloor n-\sqrt{n}\rfloor}^{\lfloor n+\sqrt{n}\rfloor}C_{2n}^k=4^n(1+o(1))$.

17.48. Пусть $n, r_j \in \mathbb{N}$, $r_1 + \dots + r_k = n$ и $r_j \to \infty$ для всех[10] $j = 1, \dots, k$. Докажите, что $\ln \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!} = -\left(\sum\limits_{j=1}^{k} r_j \ln \frac{r_j}{n}\right) + o(n)$.

17.49. Докажите, что для любых $a, b > 0$ справедливо равенство
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\prod\limits_{j=0}^{n-1}(a+jb)\right)^{1/n}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}(a+jb)} = \frac{2}{e}.$$

17.50. (!) Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n\ge 1} \frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$ сходится при любом $x > 0$. Функция $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$ называется *гамма-функцией Эйлера*.

17.51. (!) Докажите равенство при $x > 0$
$\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

17.52. (!) Докажите равенства:

а) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ для любого $x > 0$;

б) $\Gamma(n+1) = n!$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

17.53. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)x^\alpha} = 1$ для любого $\alpha \in (0,1)$.

17.54. (!) Докажите равенство $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ для любого $x \in (0,1)$ (**формула дополнения**).

17.55. Докажите равенство $\Gamma(\frac{2n-1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}\sqrt{\pi}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

17.56. Исходя из равенства $\frac{z^n-1}{z-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)$, докажите равенства:

а) $n = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right)$; б) $n = 2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}$.

17.57. Докажите равенства:

а) $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma(\frac{k}{n})\Gamma(\frac{n-k}{n}) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$; б) $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma(\frac{k}{n}) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}$.

[10] Запись $f(r_1, \dots, r_k) = o(g(r_1, \dots, r_k))$ при $r_j \to \infty$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $C > 0$, что $|f(r_1, \dots, r_k)| < \varepsilon |g(r_1, \dots, r_k)|$ при $r_j > C$.

17.58. Докажите, что для любого $x > 0$

а) значение выражения $\frac{n^{nx}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(x+\frac{n-1}{n})}{n\Gamma(nx)}$ не зависит от x;

б) $\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(x+\frac{n-1}{n}) = n^{\frac{1}{2}-nx}(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}\Gamma(nx)$;

в) $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)$.

17.59. Пусть $\mathcal{C}$ — константа Эйлера (см. задачу 16.17). Докажите, что при любом $x > 0$ справедливо равенство

$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\mathcal{C}x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})e^{-x/n}$ (**бесконечное произведение Вейерштрасса**).

17.60. Пусть $f_n \in C(a,b)$ и $\sup\limits_{x\in(a,b)}|f_n(x)| \le h_n$, причём ряд $\sum\limits_{n\ge1} h_n$ сходится.

Докажите, что:

а) функция $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+f_n(x))$ непрерывна на (a,b);

б) функция $F(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+f_n(x))$ непрерывна на (a,b).

17.61. Пусть $f_n \in D(a,b)$, ряд $\sum\limits_{n\ge1}|f_n(x_0)|$ сходится для некоторого $x_0 \in (a,b)$ и $\sup\limits_{(a,b)}|f_n'(x)| \le h_n$, причём ряд $\sum\limits_{n\ge1}h_n$ сходится. Докажите, что функция $F(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+f_n(x))$ дифференцируема на (a,b).

17.62. Рассмотрим бесконечное произведение $\prod\limits_{n\ge1} f_n(x)$, и пусть X — область сходимости этого бесконечного произведения. Докажите, что данное бесконечно произведение сходится равномерно на X, если ряд $\sum\limits_{n\ge1}^{\infty}|f_n(x)-1|$ сходится равномерно на X.

17.63. Пусть $\Gamma_n(x) = \frac{1\cdot2\cdots(n-1)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}n^x$. Докажите, что на любом компакте, не содержащем точек $0,-1,-2,\ldots$, последовательность $\Gamma_n(x)$ сходится равномерно.

17.64. Докажите, что функция Γ дифференцируема на $(0,\infty)$.

17.65. Докажите, что $\Gamma'(1) = -\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — константа Эйлера.

17.66. Найдите $\Gamma'(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

17.67. Найдите $\Gamma'(1/2)$.

17.68. Докажите, что функция $\ln \Gamma(x)$ выпукла.

17.69. Докажите, что функция $\ln \Gamma(x) = u(x)$ удовлетворяет уравнению Бора $u(x+1) - u(x) = \ln x$.

17.70. Докажите равенство $-\ln x - \mathcal{C}x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln(1+\frac{x}{n}) - \frac{x}{n}\right) = \ln \Gamma(x)$, где $\mathcal{C}$ — константа Эйлера. Докажите, что данный ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, принадлежащем $(0, \infty)$.

17.71. Докажите равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^m} = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \frac{d^m}{dx^m} \ln \Gamma(x)$ при $m \geq 2$.

17.72. Пусть $\pi(k)$ — число простых чисел, меньших либо равных k и p_n — n-е простое число, т. е. $\pi(p_n) = n$.

Докажите, что для любого $x > 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^x} \leq \prod_{n=1}^{\pi(k)} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

17.73. (!) Докажите, что при любом $x > 1$ бесконечное произведение $\prod\limits_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}$ сходится и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$ для любого $x > 1$ (см. задачу 14.110).

17.74. (!) Докажите, что бесконечное произведение $\prod\limits_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ и ряд $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ расходятся.

17.75. Докажите, что $\ln \zeta(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} = O(1)$ при $x \to 1+0$.

17.76. Докажите соотношения:

а) $\pi(n) \leq r + \lfloor n \rfloor - \sum\limits_{i=1}^{r} \lfloor \frac{n}{p_i} \rfloor + \sum\limits_{1 \leq i_1, i_2 \leq r} \lfloor \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \rfloor - \dots + (-1)^r \lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_r} \rfloor$ при любом $r \in \mathbb{N}$, $r < n$;

б) $\pi(n) \le r + 2^r + n \prod\limits_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i})$ при любом $r \in \mathbb{N}$, $r < n$;

в) $\pi(n) = o(n)$ при $n \to \infty$;

г) $\pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)$ при $n \to \infty$.

17.77. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ определим вероятность $P(A)$ равенством $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A \cap \{1, \ldots, n\}|$. Аналогично определим вероятность подмножеств множества $\mathbb{N}^2$. Докажите, что

$P\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x$ и y взаимно простые$\} = 1/\zeta(2)$.

17.78. Докажите, что для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

а) $\prod\limits_{p_k \le 2m+1} p_k \le C_{2m+1}^m \prod\limits_{p_k \le m+1} p_k$;

б) $\prod\limits_{p_k \le m+1} p_k \le 4^m$;

в) $\pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ при $n \to \infty$.

17.79. Обозначим через $\mathrm{ord}_p(n)$ степень простого числа p в разложении на простые множители числа $n \in \mathbb{N}$.

Докажите соотношения:

а) $\mathrm{ord}_p(n!) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$;

б) $\mathrm{ord}_p\left(C_{2n}^n\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor\right)$;

в) $\mathrm{ord}_p\left(C_{2n}^n\right) \le 1$ при $\sqrt{2n} < p$;

г) $\mathrm{ord}_p\left(C_{2n}^n\right) = 0$ при $2n/3 < p < n$;

д) $C_{2n}^n \le (2n)^{\pi(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor)} \prod\limits_{\sqrt{2n} < p_k \le 2n/3} p_k \prod\limits_{n \le p_k \le 2n} p_k$;

е) $\prod\limits_{n \le p_k \le 2n} p_k \ge 4^{n(\frac{1}{3} + o(1))}$ при $n \to \infty$.

Из пункта *е* вытекает асимптотический вариант *постулата Бертрана*: для любого $n \in \mathbb{N}$ в отрезке $[n, 2n]$ найдётся простое число.

17.80. Докажите[11], что $\pi(n) \ge \frac{cn}{\ln n}$ при $n \to \infty$ для некоторого $c > 0$.

[11] П. Л. Чебышёв доказал неравенства $0,92129\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1,10555\frac{n}{\ln n}$. Ш.-Ж. де ла Валле Пуссен и Ж. Адамар доказали, что $\pi(n) = \frac{n}{\ln n}(1 + o(1))$ при $n \to \infty$.

17.81. Используя задачу 17.40, докажите равенство $\ln\frac{\operatorname{sh}\pi x}{\pi x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{kn^{2k}}$ при любом $x \in (0,1)$.

17.82. Докажите, что при $x \in (0,2)$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

а) $\ln(1-e^{-\pi x}) + \frac{\pi x}{2} - \ln(\pi x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\zeta(2k)}{k2^{2k}}x^{2k}$;

б) $\frac{\pi x}{e^{\pi x}-1} + \frac{\pi x}{2} - 1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}}x^{2k}$;

в) $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\pi^{2k}\frac{2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}$, где B_{2k} — числа Бернулли (см. задачу 15.82).

17.83. Докажите равенство $\frac{\pi^2}{6} = \prod\limits_{p}(1-p^{-2})^{-1}$, где произведение берётся по всевозможным простым p.

18. Первообразные

Первообразной, или неопределённым интегралом, функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемая функция $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет равенству $F'(x) = f(x)$ для всех[12] $x \in (a,b)$. Произвольная первообразная функции f обозначается через $\int f(x)\,dx$.

18.1. (!) Докажите, что если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на (a,b).

18.2. (!) Докажите, что если[13] $\int f(x)\,dx = F(x)$ и $a \neq 0$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

18.3. (!) Докажите, что если $\int f(x)\,dx = F(x)$, $\int g(x)\,dx = G(x)$, то $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

18.4. (!) Пусть $u, v \in D^1(a,b)$. Докажите равенство $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx + C$ (**формула интегрирования по частям**).

[12] Первообразной иногда называют также непрерывную функцию, удовлетворяющую этому равенству всюду за исключением конечного числа точек (см. [12]).

[13] Здесь и всюду в этом разделе через C обозначается произвольная константа.

18.5. (!) Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, $\varphi \in D(\alpha,\beta)$ и $\int f(x)\,dx = F(x)$. Докажите, что $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$ (**формула замены переменных**).

18.6. (!) Проверьте равенства:

а) $\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ для любого $p \neq -1$.
б) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; д) $\int e^x\,dx = e^x + C$;
в) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; е) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$;
г) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; ж) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

18.7. (!) Проверьте равенства:

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; в) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} + C$;
б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; г) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + C$.

18.8. (!) Применяя подстановки $x = a\sin t$, $x = a\operatorname{tg} t$, $x = a\operatorname{ch} t$ и $x = a\operatorname{sh} t$, вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$; е) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$;
б) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; ж) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$;
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; з) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$; и) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$;
д) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; к) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

18.9. Применяя подстановки $x = a\cos^2 t$, $x = a\operatorname{ch}^2 t$ и $x = a\operatorname{sh}^2 t$, вычислите первообразные:

а) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$; в) $\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$;
б) $\int \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}\,dx$; г) $\int \sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx$.

18.10. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{4+3x^2}$; г) $\int \frac{dx}{7+2x+x^2}$; ж) $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$;
б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; з) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2+3x}}$.
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

18.11. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$; г) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$; ж) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$;
б) $\int xe^{x^2}\,dx$; д) $\int \cos^3 x\,dx$; з) $\int \frac{dx}{1+e^x}$;
в) $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$; е) $\int \sin^2 x\,dx$;

18.12. Вычислите первообразные:

а) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; д) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$;
б) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

18.13. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \ln x\,dx$; д) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$;
б) $\int x^2 e^x\,dx$; е) $\int x\cos x\,dx$;
в) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; ж) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;
г) $\int \arcsin x\,dx$; з) $\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

18.14. Вычислите первообразные:

а) $\int e^x \sin x\,dx$; в) $\int xe^x \cos^2 x\,dx$;
б) $\int xe^x \sin x\,dx$; г) $\int \sin(\ln x)\,dx$.

18.15. Вычислите первообразные:

а) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; г) $\int e^x \operatorname{arctg}(e^x)\,dx$;
б) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$; д) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$;
в) $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$; е) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx$.

18.16. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2+x^2}}$;
б) $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{5+2x+x^2}}$; д) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2+2x+x^2}}$;
в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x+x^2}}$; е) $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+x^2}}$.

18.17. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}$; г) $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{4x^2-x^4-1}}$;
б) $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{6x^2-x^4-1}}$; д) $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x\sqrt{4x^2+x^4-1}}$.
в) $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{1-5x^2+x^4}}$;

18.18. Вычислите первообразные:

а) $\int \sqrt{2+2x-x^2}\,dx$;
б) $\int \sqrt{2+2x+x^2}\,dx$;
в) $\int \sqrt{x^2+2x-1}\,dx$;
г) $\int x\sqrt{x^4+4x^2-5}\,dx$;
д) $\int x\sqrt{5-x^4+4x^2}\,dx$.

18.19. Вычислите первообразные:

а) $\int x\arcsin x\,dx$;
б) $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$;
в) $\int \arcsin\frac{1}{x}\,dx$;
г) $\int x\arcsin\frac{1}{x}\,dx$.

18.20. Вычислите первообразные:

а) $\int \arcsin(\sqrt{1-x})\,dx$;
б) $\int \operatorname{arctg}(1-\sqrt{x})\,dx$;
в) $\int \operatorname{arctg}(2+\sqrt{x})\,dx$;
г) $\int \arccos\sqrt{x}\,dx$;
д) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\,dx$;
е) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;
ж) $\int \sqrt{x}\operatorname{arctg}(\sqrt{x^3})\,dx$.
з) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

18.21. Выведите рекуррентные формулы для $n\in\mathbb{N}$:

а) $J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+(2n-1)J_n\right)$, где $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $a>0$;

б) $J_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2}}{n}-\frac{n-1}{n}a^2J_{n-2}$, где $J_n=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $n>2$;

в) $J_n=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\frac{n}{a}J_{n-1}$, где $J_n=\int x^ne^{ax}\,dx$, $a\neq 0$;

г) $J_n=x\ln^n x-nJ_{n-1}$, где $J_n=\int\ln^n x\,dx$;

д) $J_n=\frac{1}{n}((n-1)J_{n-2}-\cos x\sin^{n-1}x)$, где $J_n=\int\sin^n x\,dx$, $n>2$;

е) $J_n=\frac{1}{n}((n-1)J_{n-2}+\sin x\cos^{n-1}x)$, где $J_n=\int\cos^n x\,dx$, $n>2$.

18.22. (!) Пусть многочлен x^2+px+q не имеет вещественных корней. Вычислите $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$.

18.23. (!) Пусть многочлен x^2+px+q не имеет вещественных корней. Докажите, что при любых $a,b\in\mathbb{R}$ функция $\int\frac{ax+b\,dx}{(x^2+px+q)^n}$ представима в виде суммы $R(x)+C_1\ln(x^2+px+q)+C_2\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_3$, где $R(x)$ — некоторая *рациональная функция* (отношение двух многочленов), C_1, C_2, C_3 — некоторые константы.

18.24. (!) *Простейшей* рациональной функцией над полем $\mathbb{C}$ называются рациональные дроби вида $\frac{a}{(z-b)^n}$, $a, b \in \mathbb{C}$, над полем $\mathbb{R}$ простейшими рациональными дробями называются также рациональные функции вида $\frac{ax+h}{(x^2+bx+c)^n}$, $a, h, b, c \in \mathbb{R}$, где многочлен $x^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней.

а) Докажите, что простейшие рациональные функции $\frac{a}{(z-b)^n}$ линейно независимы над полем $\mathbb{C}$, т. е. из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{jk}}{(x-b_j)^k} \equiv 0$, $b_i \neq b_j$, следует, что $a_{jk} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

б) Докажите, что простейшие рациональные функции вида $\frac{x}{(x^2+bx+c)^n}$, $\frac{1}{(x^2+bx+c)^n}$, где многочлен $x^2 + bx + c$ не имеет вещественных корней, линейно независимы над полем $\mathbb{R}$.

18.25. (!) Докажите, что представление любой рациональной функции в виде линейной комбинации простейших рациональных функций единственно.

18.26. (!) Докажите, что для любая рациональная функция является линейной комбинацией простейших рациональных функций.

18.27. (!) Докажите, что первообразная любой рациональной функции представима в виде суммы рациональной функции и конечного числа выражений вида $c\,\mathrm{arctg}\,(\alpha x+\beta)$, $c\ln(x^2+\mu x+\nu)$ и $c\ln(\alpha x+\beta)$.

18.28. Пусть $Q(x)$ — многочлен, имеющий кратные корни, $Q_2(x)$ — многочлен, имеющий все те же (комплексные) корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни многочлена $Q_2(x)$ простые. Пусть $Q_1(x) = Q(x)/Q_2(x)$. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$, степени, меньшей чем степень многочлена $Q(x)$, справедливо равенство $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены степеней, меньших чем соответственно степени многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ (метод Остроградского).

18.29. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x^3+2x+5}{(x-2)(x+1)(x+4)}\,dx$;

б) $\int \frac{x^3+x+1}{x(x-1)(x-3)}\,dx$;

в) $\int \frac{x^3-x+1}{x(x+1)(x-2)}\,dx$;

г) $\int \frac{x^3+x-1}{(x-3)(x-1)(x+2)}\,dx$;

д) $\int \frac{x^3+3x+1}{(x+1)(x-1)(x-3)}\,dx$.

18.30. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{2x+5}{(x-1)(x-2)^2(x^2+1)}\,dx$;
б) $\int \frac{x+2}{(x^2-4)(x^2+1)^2}\,dx$;
в) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3(x^2+x+1)}\,dx$;
г) $\int \frac{x+1}{(x^2-1)^2(x^2+4)}\,dx$;
д) $\int \frac{2}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$;
е) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

18.31. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{x^4+1}$;
б) $\int \frac{dx}{x^6+1}$;
в) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$;
г) $\int \frac{x^2+x}{x^4-x^2+1}\,dx$.

18.32. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\,dx$;
б) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$;
в) $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$;
г) $\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$;
д) $\int \frac{x(2x^2+2x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx$;
е) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

18.33. Вычислите первообразные при $n \in \mathbb{N}$:

а) $\int \frac{x^2}{(x-1)^n}\,dx$;
б) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx$;
в) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx$;
г) $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$;
д) $\int \frac{dx}{x(x^n-1)^2}$.

18.34. Применяя формулу Муавра (см. задачу 8.58), вычислите первообразную $\int \frac{dx}{1+x^{2n}}$ при $n \in \mathbb{N}$.

18.35. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$, $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Докажите, что найдётся многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$, для которого верно равенство $\int \frac{P_n(x)}{y(x)} = Q_{n-1}(x)y(x) + C\int \frac{dx}{y(x)}$, где C — некоторая константа.

18.36. Пусть $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\int \frac{dx}{(x-d)^n y(x)}$ является элементарной функцией[14].

18.37. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$;
б) $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{4x-x^2-3}}\,dx$;
в) $\int \frac{x^2-x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$;
г) $\int \frac{x-x^2}{\sqrt{2x-x^2+3}}\,dx$;
д) $\int \frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;
е) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

[14] Определение и свойства элементарных функций рассмотрены в § 19.

18.38. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{5x^2+4x+1}}$; в) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{3x^2+4x+1}}$;
б) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{3x^2+2x-1}}$; г) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{4x-3x^2-1}}$.

18.39. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x-1}{(x^2+3x+2)\sqrt{2x^2+2x+1}}\,dx$; г) $\int \frac{3x+2}{(x^2+5x+6)\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$;
б) $\int \frac{2x+1}{(x^2-3x+2)\sqrt{2x^2-4x+3}}\,dx$; д) $\int \frac{3x-2}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$.
в) $\int \frac{1-2x}{(x^2-4)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$;

18.40. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}\,dx}{(x+1)^2}$;
б) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.
в) $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+1}}$;

18.41. Докажите, что вычисление первообразной вида $\int \frac{x\,dx}{(x^2+c)^n\sqrt{ax^2+b}}$ сводится к вычислению первообразной от рациональной функции подстановкой $t=\sqrt{ax^2+b}$.

18.42. Докажите, что вычисление первообразной вида $\int \frac{dx}{(x^2+c)^n\sqrt{ax^2+b}}$ сводится к вычислению первообразной от рациональной функции *подстановкой Абеля*
$t=(\sqrt{ax^2+b})'$.

18.43. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$; д) $\int \frac{dx}{(3-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$;
б) $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-2x+4)\sqrt{2+2x-x^2}}$; е) $\int \frac{dx}{(x^2+x+2)\sqrt{1+x^2+x}}$;
в) $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^{3/2}}$; ж) $\int \frac{dx}{(x^2-x+2)\sqrt{x-x^2+1}}$;
г) $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$; з) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+3}}$.

18.44. Докажите, что вычисление первообразной вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно свести к вычислению первообразной вида $\int \frac{P(x)\,dx}{(x^2+c)^n\sqrt{a_1x^2+b_1}}$, где $P(x)$ — некоторый многочлен, посредством дробно-линейной подстановки $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$.

18.45. Пусть $P(x), Q(x)$ — многочлены и $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$. Докажите, что первообразная $\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)y(x)}$ является элементарной функцией.

18.46. (!) Докажите, что вычисление первообразной вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где $R(x,y)$ — рациональная функция двух переменных, $a \neq 0$, $b^2-4ac \neq 0$, может быть сведена к первообразным от рациональных функций *подстановками Эйлера*:

а) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \pm t$ при $a > 0$;

б) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}t$ при $c > 0$;

в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x-x_0)t$, где x_0 — вещественный корень многочлена ax^2+bx+c.

18.47. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{5+4x+x^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2+2x+x^2}}$;

в) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{2+2x+4x^2}}$;

г) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{8+10x+4x^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{x+1-\sqrt{x^2+x+2}}$;

е) $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{4x^2-2x+1}}$;

ж) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+2}}$;

з) $\int \frac{dx}{2x+2+\sqrt{4x^2+6x+3}}$;

и) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

к) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}$.

18.48. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$;

б) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x^2+x})^2}$;

в) $\int \frac{x-1-\sqrt{x^2+x}}{x-1+\sqrt{x^2+x}}\,dx$;

г) $\int \frac{x-\sqrt{1-x+x^2}}{1-x+\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$;

д) $\int \frac{x+\sqrt{2-3x+x^2}}{1-x+\sqrt{2-3x+x^2}}\,dx$;

е) $\int \frac{x-\sqrt{2+3x+x^2}}{x+\sqrt{2+3x+x^2}}\,dx$.

18.49. Докажите, что первообразная $\int R(x, (x-a)^{p/n}(x-b)^{q/n})\,dx$, где $R(x,y)$ — произвольная рациональная функция двух переменных, $p, q, n, \frac{p+q}{n}$ — целые числа, является элементарной функцией.

18.50. Докажите, что первообразная $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$, где $R(x,y,z)$ — произвольная рациональная функция трёх переменных, является элементарной функцией.

18.51. Докажите, что первообразная $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)\,dx$, где $R(x,y)$ — произвольная рациональная функция двух переменных, является элементарной функцией.

18.52. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{(x-2)^{8/7}(x+1)^{6/7}}$;

б) $\int \frac{dx}{(x+2)^{5/6}(x+1)^{7/6}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x-1)^{8/9}(x+3)^{10/9}}$;

г) $\int \frac{dx}{(x-4)^{6/5}(x-1)^{4/5}}$.

18.53. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{1-(x+1)^{1/2}}{1+(x+1)^{1/3}}\,dx$;

б) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;

в) $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$;

г) $\int \frac{x\,dx}{(x^3(a-x))^{1/4}}$;

д) $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$;

е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$;

ж) $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$;

з) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$.

18.54. (!) Докажите, что интегралы вида $\int x^r(ax^q+b)^p\,dx$, где $r,q,p\in\mathbb{Q}$, $p=\frac{l}{k}$, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций *подстановками Чебышёва*[15]:

а) $t=(ax^q+b)^{1/k}$, если $\frac{r+1}{q}\in\mathbb{Z}$;

б) $t=(a+\frac{b}{x^q})^{1/k}$, если $p+\frac{r+1}{q}\in\mathbb{Z}$.

18.55. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^{2/3}}}$;

б) $\int \frac{dx}{x^3(1+\frac{1}{x})^{1/5}}$.

18.56. Докажите, что первообразная $\int \frac{dx}{(x^n+1)^{1/n}}$ является элементарной функцией.

18.57. Докажите, что первообразная $\int \frac{dx}{x(x^n+1)^{1/n}}$ является элементарной функцией.

18.58. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{(x^3+x^6)^{1/3}}$;

б) $\int \frac{dx}{(x^3+x^2)^{1/3}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x^4+x^6)^{1/4}}$;

г) $\int \frac{dx}{(x^4+x^2)^{1/4}}$;

д) $\int \frac{dx}{(x^4+x^3)^{1/4}}$;

е) $\int (x+x^3)^{1/3}\,dx$.

18.59. Вычислите первообразные:

[15] П.Л.Чебышёв доказал, что за исключением случаев а), б) и $p\in\mathbb{Z}$ рассматриваемая первообразная не является элементарной (см. [50]).

а) $\int \frac{dx}{(x^3+1)^{1/3}}$; д) $\int \frac{dx}{(8x^3-1)^{1/3}}$;

б) $\int \frac{dx}{(x^4+1)^{1/4}}$; е) $\int \left(\frac{1+x^2}{x^5}\right)^{1/3} dx$;

в) $\int \frac{dx}{(x^3+8)^{1/3}}$; ж) $\int \left(\frac{1-x^2}{x^5}\right)^{1/3} dx$;

г) $\int \frac{dx}{(8x^3+1)^{1/3}}$; з) $\int (x-x^3)^{1/3}\,dx$.

18.60. Вычислите первообразные:

а) $\int x^{2/3}\arccos x^{1/3}\,dx$; д) $\int x^{1/6}\arcsin x^{1/6}\,dx$;

б) $\int x^{2/3}\ln|x^{1/3}+\sqrt{1+x^{2/3}}|\,dx$; е) $\int x^{1/6}\ln|x^{1/6}+\sqrt{1+x^{1/3}}|\,dx$;

в) $\int x^{2/3}\ln|x^{1/3}+\sqrt{x^{2/3}-1}|\,dx$; ж) $\int x^{1/6}\ln|x^{1/6}+\sqrt{x^{1/3}-1}|\,dx$;

г) $\int x^{7/3}\arcsin x^{2/3}\,dx$; з) $\int x^{4/3}\arccos x^{1/3}\,dx$.

18.61. (!) Докажите, что вычисление первообразной $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где $R(x,y)$ — произвольная рациональная функция двух переменных, посредством *универсальной тригонометрической замены* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ сводится к вычислению первообразной от рациональной функции.

18.62. а) Пусть рациональная функция $R(x)$ — чётная, т.е. $R(x) = R(-x)$. Докажите, что $R(x)=R_1(x^2)$, где $R_1(x)$ — рациональная функция.

б) Пусть $R(x,y)$ — рациональная функция двух переменных, удовлетворяющая равенству $R(-x,-y)=R(x,y)$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$ Докажите, что вычисление первообразной $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ посредством замены $t=\operatorname{tg}x$ сводится к вычислению первообразной от рациональной функции.

18.63. Докажите, что первообразная $\int R(e^x)\,dx$, где $R(y)$ — произвольная рациональная функция, является элементарной функцией.

18.64. Докажите, что первообразная $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$, где $R(x,y)$ — произвольная рациональная функция двух переменных, является элементарной функцией.

18.65. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\int \frac{dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$;

б) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$; г) $\int \frac{\sin x\,dx}{a^2\sin^3 x+b^2\cos^3 x}$.

18.66. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{1-3\sin 2x+4\cos^2 x}$;

б) $\int \frac{dx}{2\sin 2x-1-3\cos^2 x}$;

в) $\int \frac{dx}{2\sin 2x-2-\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{dx}{2-3\sin 2x+2\cos^2 x}$;

д) $\int \frac{dx}{2-5\sin 2x+6\cos^2 x}$;

е) $\int \frac{dx}{1+5\cos^2 x+2\sin 2x}$;

ж) $\int \frac{dx}{3\sin 2x-2}$;

з) $\int \frac{dx}{2+\sin 2x}$.

18.67. (!) Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;

б) $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$;

в) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

г) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

д) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$;

е) $\int \frac{dx}{2\cos x-\sin x+5}$.

18.68. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{dx}{\sin x(\cos x+2)}$;

б) $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}\,dx$;

в) $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{\cos^2 x-6\cos x+5}$;

г) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{3+4\sin^2 x}$;

д) $\int \frac{dx}{\cos x(2\sin x+1)}$;

е) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$;

ж) $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

18.69. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{5\cos x-4\sin x}{\cos x(2+10\cos^2 x+5\sin 2x)}\,dx$;

б) $\int \frac{3\cos x+7\sin x}{\cos x(1+2\cos^2 x+2\sin 2x)}\,dx$;

в) $\int \frac{4\cos x+5\sin x}{\cos x(2-6\cos^2 x+\sin 2x)}\,dx$;

г) $\int \frac{6\cos x-5\sin x}{\cos x(1-4\cos^2 x-\sin 2x)}\,dx$;

д) $\int \frac{5\cos x-4\sin x}{\sin 2x(2\cos x+3\sin x)}\,dx$;

е) $\int \frac{3\sin x+7\cos x}{\sin 2x(\cos x+3\sin x)}\,dx$;

ж) $\int \frac{5\cos x+4\sin x}{\sin 2x(2\sin x-\cos x)}\,dx$;

з) $\int \frac{6\sin x-5\cos x}{\sin 2x(\cos x-2\sin x)}\,dx$.

18.70. Докажите, что для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, найдутся числа $A, B \in \mathbb{R}$, для которых верно равенство

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a_2\sin x + b_2\cos x}\,dx = Ax + B\ln|a_2\sin x + b_2\cos x| + C.$$

18.71. Докажите, что для любых $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, найдутся числа $A, B, C \in \mathbb{R}$, для которых верно равенство

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}\,dx = Ax + B\ln|a_2\sin x + b_2\cos x + c_2| + \\ + C\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}.$$

18.72. Докажите, что для любых $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 \in \mathbb{R}$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, найдутся числа $A, B, C \in \mathbb{R}$, для которых верно равенство

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x}\, dx = A \sin x + B \cos x +$$
$$+ C \int \frac{dx}{a_2 \sin x + b_2 \cos x}.$$

18.73. Для первообразной $J_n = \int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^n}$ докажите рекуррентную формулу

$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)} \left(\frac{a \sin x - b \cos x}{(a \cos x + b \sin x)^{n-1}} + (n-2) J_{n-2} \right)$,
при $a^2 + b^2 \neq 0$, $n \geq 2$.

18.74. Для первообразной $J_n = \int \frac{dx}{(a \cos x + c)^n}$ докажите рекуррентную формулу

$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2-c^2)} \left(\frac{a \sin x}{(a \cos x + c)^{n-1}} - (2n-3) c J_{n-1} + (n-2) J_{n-2} \right)$,
при $|a| \neq |c|$, $n \geq 2$.

18.75. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + 2 \sin x}\, dx$;   б) $\int \frac{\cos x + 2 \sin x}{4 \cos x + 3 \sin x - 2}\, dx$.

18.76. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}$;   в) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2 + \sin^2 x}}$.

б) $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}$;

18.77. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$;   г) $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;

б) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$;   д) $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1 + x^2)\, dx$.

в) $\int \frac{\ln x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}$;

18.78. Вычислите первообразные:

а) $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{x \sqrt{x^4+1}}$;   г) $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$;

б) $\int \frac{(x^2-1)\, dx}{x \sqrt{x^4+1}}$;   д) $\int \frac{(x-1)\, dx}{(1+x)\sqrt{x^3+x^2+x}}$;

в) $\int \frac{(x^2-1)\, dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$;   е) $\int \frac{(1+x^4)\, dx}{(1-x^4)^{3/2}}$.

18.79. Докажите, что для любого многочлена 3-й степени $P_3(x)$ и любой рациональной функции $R(x,y)$ первообразная $\int R(x,\sqrt{P_3(x)})\,dx$ либо является элементарной функцией, либо сводится заменой переменной к первообразной вида $\int R_1(t,\sqrt{P_4(t)})\,dt$, где $P_4(t)$ — многочлен 4-й степени и $R_1(x,y)$ — рациональная функция.

18.80. Докажите, что для любого многочлена 4-й степени $P_4(x)$ и рациональной функции $R(x,y)$ первообразную $\int R(x,\sqrt{P_4(x)})\,dx$ с помощью некоторой дробно-линейной подстановки $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$ можно преобразовать к виду $\int R_1(t,\sqrt{\delta(1+\lambda_1t^2)(1+\lambda_2t^2)})\,dt$, где $\delta=\pm1$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ и $R_1(x,y)$ — рациональная функция.

18.81. а) Докажите, что любая рациональная функция $R(x)$ может быть представлена в виде $R=R_1(x^2)+xR_2(x^2)$, где R_1,R_2 — некоторые рациональные функции.

б) Докажите, что для любого многочлена 4-й степени $P_4(x)$ и рациональной функции $R(x,y)$ первообразную $\int R(x,\sqrt{P_4(x)})\,dx$ можно представить в виде суммы элементарной функции и функции вида $\int\frac{R_1(t^2)\,dt}{\sqrt{\delta(1+\lambda_1t^2)(1+\lambda_2t^2)}}$, где $\delta=\pm1$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, и $R_1(x)$ — рациональная функция.

18.82. Докажите, что для любой рациональной функции $R(x)$ первообразную $\int\frac{R(x^2)\,dx}{\sqrt{\delta(1+\lambda_1x^2)(1+\lambda_2x^2)}}$ $(|\lambda_1|>|\lambda_2|>0)$ с помощью некоторой замены переменной можно преобразовать к виду $\int\frac{R_1(t^2)}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt$, где $k\in(0,1)$, и $R_1(x)$ — рациональная функция.

18.83. Пусть $I_n=\int\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. Докажите, что при $n\in\mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$(2n-1)k^2I_n-(2n-2)(k^2+1)I_{n-1}+(2n-3)I_{n-2}=\\
=x^{2n-3}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

18.84. Пусть $H_m=\int\frac{dx}{(x^2-a)^m\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$. Докажите, что при $m\in\mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$(2m-2)((k^2+1)a^2-a-a^3k^2)H_m-(2m-3)(3k^2a^2+1-2a(k^2+1))H_{m-1}+\\
+(2m-4)((k^2+1)-3k^2a)H_{m-2}-(2m-5)k^2H_{m-3}=\\
=\frac{x}{(x^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

18.85. Докажите, что для любого многочлена 3-й или 4-й степени $P(x)$ и рациональной функции $R(x,y)$ первообразную $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$ можно представить в виде суммы элементарной функции и линейной комбинации интегралов вида $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ и $\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, где $k \in (0,1)$, $h \in \mathbb{C}$, и новая переменная t выражается через x.

18.86. Докажите, что первообразные $\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ и $\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, где $k \in (0,1)$, $h \in \mathbb{C}$, подстановкой $t = \sin\varphi$ сводятся к линейным комбинациям интегралов

$$F(\varphi,k) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad F(0,k)=0;$$

$$E(\varphi,k) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad E(0,k)=0;$$

$$\Pi(\varphi,k,h) = \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \Pi(0,k,h)=0;$$

которые называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода в форме Лежандра*[16].

18.87. Выразите через элементарные функции и функции $F(\varphi,k)$, $E(\varphi,k)$ первообразные:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2-8x^4}}$; в) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$.

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

19. Интегрирование в элементарных функциях

Основными элементарными функциями[17] являются: все константы, линейная функция x, экспонента $\exp x$, логарифм $\ln x$, степенная функция x^α, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

[16] Известно, что эллиптические интегралы не являются элементарными функциями, за исключением конечного числа значений параметров (см. [50]).

[17] Здесь мы повторим некоторые понятия и свойства элементарных функций, изложенные ранее в § 8.

В этом параграфе будут рассматриваться функции комплексного переменного, что позволяет значительно уменьшить число основных элементарных функций. К *основным комплексным элементарным функциям* будем относить следующие: все комплексные константы, линейную функцию z, комплексную экспоненту $\exp z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ и комплексный логарифм $\log z = \ln|z| + i \arg z$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$. *Элементарной функцией от одной комплексной переменной* z называются функции, которые можно построить из основных комплексных элементарных функций с применением конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции. Все тригонометрические функции выражаются через $\exp z$ и $\log z$ (см. задачи 19.7, 19.8), в частности, справедливы формулы Эйлера $\cos z = (\exp(iz) + \exp(-iz))/2$, $\sin z = (\exp(iz) - \exp(-iz))/2i$. Через экспоненту и логарифм выражается также степенная функция $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$ $(z \in \mathbb{C})$. Так как множество точек разрыва функции $\log z$ совпадает с вещественной полупрямой $(-\infty, 0]$, то элементарная функция, содержащая логарифмы, также будет иметь на плоскости $\mathbb{C}$ линии разрывов.[18] Кроме этого, элементарная функция f может иметь и другие точки разрыва — особые точки (полюсы, существенно особые точки, неизолированные особые точки см. [51]). Все остальные точки плоскости $\mathbb{C}$ называются *регулярными* точками функции f. В окрестностях регулярных точек все основные элементарные функции, участвующие в построении данной элементарной функции f, раскладываются в сходящиеся степенные ряды. Поэтому элементарная функция f, как суперпозиция сходящихся степенных рядов, в достаточно малой окрестности своей регулярной точки тоже представляется сходящимся степенным рядом, т. е. является аналитической (см. § 15).

Производной функции f в точке z_0, заданной на некотором открытом подмножестве комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется предел $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Производные основных элементарных функций комплексного переменного имеют такое же аналитическое представление, как и производные от тех же функций вещественной переменной (см. задачи 19.1, 19.5). Поскольку правила дифференцирования суммы, произведения и композиции для функций комплексного переменного совпадают с соответствующими правилами для функций вещественной переменной (см. задачу 19.2), то производные всех элементарных функ-

[18]Для того чтобы избавиться от линий разрывов, логарифм и все элементарные функции, содержащие логарифмы, в теории функций комплексной переменной определяются на так называемых римановых поверхностях (см., например, [51]).

ций комплексного переменного имеют такое же аналитическое представление, как и производные тех же функций вещественной переменной. Аналитическая функция имеет производные всех порядков (см. задачу 15.40). Для комплексных аналитических функций справедлив принцип аналитического продолжения (см. [51]): если две аналитические функции f_1 и f_2, заданные на открытых (см. § 22) областях U_1 и U_2 плоскости $\mathbb{C}$, совпадают в некоторой окрестности точки z_0 из пересечения $U_1 \cap U_2$, которое является односвязным (см. § 22), то f_1 и f_2 являются ограничением на U_1 и U_2 единственной аналитической функции f, определённой на $U_1 \cup U_2$ (см. также задачу 15.76). Следовательно из справедливости равенства $f(z) = g'(z)$ в окрестности некоторой точки следует его справедливость в любой односвязной области плоскости $\mathbb{C}$, в которой имеет смысл правая и левая часть равенства.

Говорят, что в некоторой окрестности аналитическая функция $g(z)$ является *неопределённым интегралом* аналитической функции $f(z)$ (и пишут $\int f(z)\,dz = g(z)$), если в этой окрестности выполняется равенство $g'(z) = f(z)$. Функцию $g(z)$ называют также *первообразной* функции $f(z)$. Любая элементарная функция имеет в некоторой окрестности своей регулярной точки первообразную, являющуюся аналитической функцией (см. задачи 15.36, 19.9). Но не для любой элементарной функции $f(z)$ существует первообразная, являющаяся элементарной функцией. Если первообразная функции $f(z)$ элементарна, то говорят, что $f(z)$ *интегрируема в элементарных функциях.* Основным инструментом в доказательстве неинтегрируемости в элементарных функциях служит *теорема Лиувилля* (см. приложение).

Обозначим через $\mathbb{C}\langle z\rangle$ поле рациональных функций от комплексной переменной z. Функция $f(z)$ называется *трансцендентной* над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, если она не является корнем никакого многочлена с коэффициентами из поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$. Зафиксируем некоторую рациональную функцию $a(z)$, не являющуюся константой. Пусть $R(z, w)$ — ещё одна рациональная функция двух комплексных переменных. Теорема Лиувилля (см. приложение) позволяет установить является ли первообразная $\int R(z, Y)\,dz$, где $Y = \log a(z)$ или $Y = \exp a(z)$ элементарной функцией. Так как функция $\log a(z)$ (или $\exp a(z)$) трансцендентна над $\mathbb{C}\langle z\rangle$ (см. задачи 19.12, 19.17), её можно рассматривать как независимую переменную. Любую рациональную функцию $R(z, Y)$ можно представить в виде (см. задачу 19.22)

$$R(z, Y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{Q_{j,k}(z, Y)}{(L_j(z, Y))^k} + Q_0(z, Y), \tag{A}$$

где $Q_{j,k}$, L_j, Q_0 — многочлены по переменной Y с коэффициентами из поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$, причём L_j неприводимы над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ (т. е. не имеют корней в этом поле), взаимно просты и имеют коэффициент 1 при старшей степени, кроме этого, $\deg Q_{j,k} < \deg L_j$ при $k = 1, \ldots, m_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $\deg Q_{j,k}$ и $\deg L_j$ — степени многочленов по переменной Y.

Для фиксированного j часть суммы $\sum\limits_{k=1}^{m_j} Q_{j,k}(z, Y)/(L_j(z, Y))^k$ называют *примарной составляющей* разложения (A), а число m_j *кратностью* этой составляющей. Выражение $Q_0(z, Y)$ называется *полиномиальной частью* разложения на простые дроби. Задачу интегрируемости в элементарных функциях можно решать независимо для каждой из примарных составляющих и полиномиальной части (см. приложение). Вопрос об интегрируемости в элементарных функциях примарной составляющей разложения произвольной кратности сводится к вопросу об интегрируемости примарной составляющей кратности 1, который, в свою очередь, решается с помощью теоремы Лиувилля (см. приложение). Вопрос об интегрируемости в элементарных функциях полиномиальной составляющей разобран в задачах 19.40 и 19.41.

19.1. (!) Докажите, что функция $\exp z$ дифференцируема и $(\exp z)' = \exp z$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

19.2. (!) Докажите, что для произвольных дифференцируемых функций f и g комплексного переменного функции $f + g$, $f \cdot g$ и $f \circ g$ также являются дифференцируемыми, причём справедливы равенства

а) $(f + g)' = f' + g'$;

б) $(f \cdot g)' = fg' + gf'$;

в) $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

19.3. (!) Докажите, что $\exp(\log z) = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

19.4. (!) Докажите, что $\log(\exp z) = z - 2ik\pi$, если $(2k - 1)\pi < \operatorname{Im} z \leq (2k + 1)\pi$.

19.5. (!) Докажите, что функция $\log z$ непрерывна и дифференцируема на открытом множестве $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, причём $(\log z)' = \frac{1}{z}$, и разрывна во всех точках множества $(-\infty, 0] = \{x+iy |\ y = 0, -\infty < x \leq 0\}$.

19.6. (!) Докажите, что для любого $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ в круге радиуса R, где R равно расстоянию от точки z_0 до множества $(-\infty, 0]$, функция $\log z$ представляется сходящимся степенным рядом $\log z = = \log z_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-z_0)^n}{n z_0^n}$.

19.7. (!) Докажите, что $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$.

19.8. (!) Выразите функции $\arcsin z$ и $\arccos z$ через комплексный логарифм и степенную функцию.

19.9. (!) Докажите, что в некоторой окрестности точки z_0, принадлежащей области определения аналитической функции f, существует первообразная функции f, являющаяся аналитической функцией, и что любые две первообразные функции f отличаются на комплексную константу.

19.10. (!) Исследуя асимптотическое поведение функции $\log a(z)$, когда z стремится к одной из особых точек функции $a(z)$, докажите, что $\log a(z)$ не является рациональной функцией от z.

19.11. Приведите чисто алгебраическое решение предыдущей задачи, не использующее асимптотических свойств функции $\log z$. То есть покажите, что равенство $b'(z) = a'(z)/a(z)$ противоречиво, если $a(z), b(z)$ – рациональные функции и $a(z)$ не является константой.

19.12. (!) Докажите, что функция $\log a(z)$ является трансцендентной над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, т.е. она не может удовлетворять ни одному уравнению

$$(\log a(z))^n + a_1(z)(\log a(z))^{n-1} + \cdots + a_n(z),$$

где $a_k(z)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — рациональные функции (достаточно рассмотреть случай, когда многочлен $Y^n + a_1(z)Y^{n-1} + \cdots + a_n(z)$ неприводим над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$).

19.13. Пусть $L(z, Y)$ — многочлен над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, $\deg L > 0$ и $Y = \log a(z)$. Докажите, что $Q = L(z, Y)'$ — многочлен над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ и $\deg Q \geq \deg L - 1$. Здесь и далее символ $'$ означает полную производную по переменной z, т. е. $L' = (L(z, \log a(z)))'$.

19.14. Пусть $L(z, Y)$ — многочлен над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, $\deg L > 0$ и $Y = \log a(z)$, $0 \neq a(z), b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$. Докажите, что многочлен $(L(z, Y))'$ взаимно прост с многочленом $L(z, Y)$ тогда и только тогда, когда многочлен $(b(z)L(z, Y))'$ взаимно прост[19] с многочленом $b(z)L(z, Y)$.

[19] Говорят, что два многочлена взаимно просты над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, если их общими делителями являются только константы.

19.15. Докажите, что если многочлен $L(z,Y)$ неприводим над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ и имеет коэффициент 1 при старшей степени, то многочлены $L(z,\log a(z))$ и $L(z,\log a(z))'$ взаимно просты.

19.16. Докажите, что если многочлен $L(z,Y)$ неприводим над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, то многочлены $L(z,\log a(z))$ и $L(z,\log a(z))'$ взаимно просты.

19.17. (!) Докажите, что функция $\exp a(z)$ является трансцендентной над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.18. Пусть $L(z,Y)$ — многочлен над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, $\deg L > 0$ и $Y = \exp a(z)$. Докажите, что $Q = L(z,Y)'$ — многочлен над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ и $\deg Q = \deg L$.

19.19. Пусть $L(z,Y)$ — многочлен над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, $\deg L > 0$ и $Y = \exp a(z)$, $0 \neq a(z), b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$. Докажите, что многочлен $L(z,Y)'$ взаимно прост с многочленом $L(z,Y)$ тогда и только тогда, когда многочлен $(b(z)L(z,Y))'$ взаимно прост с многочленом $b(z)L(z,Y)$.

19.20. Рассматривая $Y = \exp a(z)$ как новую независимую переменную, докажите, что если многочлен $L(z,Y)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}\langle z\rangle$ неприводим над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ и не равен многочлену $a_0(z)Y$, то $L(z,Y)'$ и $L(z,Y)$ взаимно просты.

19.21. Докажите, что если многочлены $L_1(z,Y)$ и $L_2(z,Y)$ взаимно просты над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$, то найдутся такие многочлены U и V, что $UL_1 + VL_2 = 1$.

19.22. Докажите, что любую рациональную функцию $R(z,Y)$ можно разложить единственным образом по переменной Y на простые дроби[20], т. е.

$$R(z,Y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{Q_{j,k}(z,Y)}{(L_j(z,Y))^k} + Q_0(z,Y),$$

где $Q_{j,k}$, L_j, Q_0 — многочлены по переменной Y с коэффициентами из поля $\mathbb{C}\langle z\rangle$, причём многочлены L_j неприводимы над $\mathbb{C}\langle z\rangle$, взаимно просты и имеют коэффициент 1 при старшей степени, кроме этого, $\deg Q_{j,k} < \deg L_j$ при $k = 1,\dots,m_j$, $j = 1,\dots,n$, где $\deg Q_{j,k}$ и $\deg L_j$ — степени многочленов по переменной Y.

[20] Здесь и далее в этом разделе полагаем, что функция $Y = Y(z)$ трансцендентна над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.23. Выразите первообразную функции $\frac{z}{(z+\log z)^3}$ через сумму элементарной функции и первообразной от $\frac{b(z)}{z+\log z}$, где $b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$. Найдите функцию $b(z)$.

19.24. Выразите первообразную от $\frac{z^m}{(\log z)^n}$ через сумму элементарной функции и первообразной от $\frac{b(z)}{\log z}$ и найдите функцию $b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.25. Докажите, что многочлен $Y^2 + z$ неприводим над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.26. Сведите задачу вычисления $\int \frac{dz}{((\log z)^2+z)^2}$ к задаче вычисления $\int \frac{a(z)\log z+b(z)}{\log^2 z+z}\,dz$, где $a(z), b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.27. Установите, являются ли элементарными функциями первообразные от функций из задач 19.23, 19.24, 19.26.

19.28. Проинтегрируйте выражение

$$\frac{1}{(\log^2 z+1)^2} + \frac{\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{2}\right)\log z - \frac{1}{2}}{\log^2 z+1},$$

либо докажите, что его интегрирование в элементарных функциях невозможно.

19.29. (!) Первообразная $\mathrm{li}(z) = \int \frac{1}{\log z}\,dz + C$ называется интегральным логарифмом. Докажите, что интегральный логарифм — не элементарная функция[21].

19.30. Докажите, что функция $\int \frac{a(z)\,dz}{\log z}$ является элементарной тогда и только тогда, когда $a(z) = \frac{C}{z}$.

19.31. Докажите, что неопределённый интеграл от $\frac{\log z}{z-a}$ не является элементарной функцией при $a \neq 0$.

19.32. Докажите, что функция $\int \ln\sin z\,dz$ не является элементарной.

19.33. Докажите, что функция $\int \ln(a+b\cos z)\,dz$ не является элементарной при $b \neq 0$.

19.34. Пусть $R(x,y)$ — непостоянная рациональная функция двух переменных с вещественными коэффициентами. Докажите, что функция $\int \ln R(\sin z,\cos z)\,dz$ не является элементарной.

[21] В качестве вещественной функции $\mathrm{li}(x)$ первообразная выбирается так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0+0} \mathrm{li}(x) = 0$ (см. также задачу 21.90).

19.35. С помощью подходящей замены переменных сведите задачу интегрирования функции $\frac{\arcsin^2 t}{t}$ к задаче интегрирования функции $\frac{s+1}{s(s-1)} \log^2 s$ и докажите, что интегралы от этих функций не элементарны.

19.36. (!) Докажите, что интегральная экспонента $\mathrm{Ei}(z) = \int \frac{\exp z}{z}\, dz$ не является элементарной функцией. Выразите функцию $\mathrm{Ei}(z)$ через функцию $\mathrm{li}(z)$.

19.37. Докажите, что функция $\int \frac{p(\exp(z))\, dz}{z}$ является элементарной тогда и только тогда, когда многочлен $p(z) \equiv \mathrm{const}$.

19.38. Докажите, что функции $\int \frac{z}{\exp z + a}\, dz$ $(a \in \mathbb{C}, a \neq 0)$ не являются элементарными.

19.39. Не производя логарифмической замены переменной z, докажите, что первообразная функции $\frac{z}{(e^z+a)^n}$ не элементарна при $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

19.40. (!) Из теоремы Лиувилля (см. приложение) следует, что если интеграл от многочлена $Q(z, Y) = \sum\limits_{k=1}^{m} q_k(z) Y^k$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}\langle z \rangle$ элементарен, то он является многочленом той же степени. Докажите, что $\int Q(z, \log a(z))\, dz$ является элементарной функцией в том и только в том случае, когда найдутся рациональные функции $b_k(z)$, удовлетворяющие следующей системе дифференциальных уравнений: $q_m = b'_m$, $q_k = b'_k + (k+1)a'/a$ $(k = 0, \ldots, m-1)$.

19.41. (!) Из теоремы Лиувилля (см. приложение) следует, что если интеграл от *многочлена Лорана* $Q(z, Y) = \sum\limits_{k=-n}^{m} q_k(z) Y^k$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}\langle z \rangle$ элементарен, то он является многочленом Лорана тех же степеней. Докажите, что $\int Q(z, \exp a(z))\, dz$ является элементарной функцией в том и только в том случае, когда найдутся рациональные функции $b_k(z)$, удовлетворяющие следующей системе дифференциальных уравнений: $b'_k(z) + k b_k(z) a'(z) = q_k(z)$, $k = -n, \ldots, m$.

19.42. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \neq 0$. Докажите, что рациональное решение уравнения

$$b'(z) + \alpha z^m b(z) = \beta$$

должно иметь нулевую полиномиальную составляющую, т. е. если $b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$, то $b(z)$ — правильная дробь.

19.43. Докажите, что если $b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$ является правильной дробью, то $b(z)$ имеет хотя бы одну особую точку, т. е. существуют $n \in \mathbb{N}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$, такие, что $b(z) = \frac{c(z)}{(z-z_0)^n}$, где $c(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$ и $c(z_0)$ является ненулевым числом из $\mathbb{C}$ (такая особая точка называется *полюсом порядка* n).

19.44. Докажите, что рациональная функция $b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$, имеющая хотя бы одну особую точку $z_0 \in \mathbb{C}$, не может быть решением уравнения из задачи 19.42.

19.45. Докажите, что уравнение из задачи 19.42 не имеет рациональных решений $b(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.46. (!) Докажите, что первообразная функции $\exp(\alpha z^2)$ $(\alpha \neq 0)$ не является элементарной функцией[22].

19.47. (!) Докажите, что функция $\mathrm{Si}(z) = \int \frac{\sin z\, dz}{z}$ не является элементарной[23].

19.48. Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных. Докажите, что функция $\int \frac{R(\sin z, \cos z)\, dz}{z}$ является элементарной тогда и только тогда, когда $R(x, y) \equiv \mathrm{const}$.

19.49. Докажите, что первообразные функций $\cos z^2$, $\sin z^2$ (неопределённые интегралы Френеля) не элементарны.

19.50. Не производя логарифмической замены переменной z, докажите, что первообразная функции $\frac{\exp z}{z^2+a}$ не элементарна.

19.51. Докажите, что первообразные функций $\frac{\cos z}{z^2+a}$, $\frac{z \sin z}{z^2+a}$ (неопределённые интегралы Лапласа) не являются элементарными.

19.52. Докажите, что первообразные функций $\sin \frac{1}{z}$, $\cos \frac{1}{z}$, $\exp \frac{1}{z}$ не являются элементарными.

19.53. Найдите все $m, n \in \mathbb{Z}$, для которых первообразные функций $z^m \cos z^n$, $z^m \sin z^n$, $z^m \exp z^n$ являются элементарными.

[22] Пусть $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-z^2/2)\, dz$, $\Phi_0(0) = 0$. Сужение функции Φ_0 на вещественную ось называется функцией *плотности нормального распределения*.

[23] Первообразная $\mathrm{Si}(z)$ выбирается так, чтобы $\mathrm{Si}(0) = 0$.

19.54. Пусть $p(z)$ и $q(z)$ — многочлены, не обращающиеся в нуль в нуле. Докажите, что функция $\int \frac{p(z)\sin z\,dz}{q(z)z}$ не является элементарной.

19.55. Докажите, что первообразная функции $\frac{z}{\sin z}$ не является элементарной.

19.56. Пусть $a(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$. Докажите, что функции $\int \frac{a(z)\,dz}{\sin z}$ и $\int \frac{a(z)\,dz}{\cos z}$ являются элементарными тогда и только тогда, когда $a(z) \equiv \mathrm{const}$.

19.57. Докажите, что функция $\int \frac{(\log(1+\exp(z))^{1/3}\,dz}{1+\log(1+\exp(z))}$ не является элементарной.

19.58. (!) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Докажите, что $z^\alpha \notin \mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.59. (!) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $a(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$, $a(z) \neq \mathrm{const}$. Докажите, что $(a(z))^\alpha \notin \mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.60. (!) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Докажите, что функция z^α является трансцендентной над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.61. Докажите, что функция $\int \frac{z^\alpha\,dz}{z-a}$ является элементарной тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{Q}$.

19.62. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ и $a(z) \in \mathbb{C}\langle z\rangle$. Докажите, что функция $\int z^\alpha a(z)\,dz$ является элементарной тогда и только тогда, когда $a(z) = \sum\limits_{k=-n}^{m} \beta_k z^k$, $\beta_k \in \mathbb{C}$.

19.63. Используя асимптотические свойства функций $\exp(z)$ и $\exp(1/z)$, докажите их *алгебраическую независимость* над $\mathbb{C}\langle z\rangle$, т.е. докажите, что если для некоторого многочлена P справедливо равенство $P(z, \exp(z), \exp(1/z)) \equiv 0$, то $P(t_1, t_2, t_3) \equiv 0$.

19.64. Докажите, что функция $\int \frac{\alpha\exp z+\beta\exp(1/z)}{z^2}\,dz$ не является элементарной.

19.65. Докажите, что первообразная функции f не является элементарной, где

а) $f(z) = \frac{\alpha\exp(z)+\beta\exp(1/z)}{z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$;

б) $f(z) = \exp(\cos z)\cos(\sin z)\cos nz$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $f(z) = \exp(\cos z)\sin(\sin z)\cos nz$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) $f(z) = \exp(\cos z)\cos(\sin z)\sin nz$, $n \in \mathbb{Z}$;

д) $f(z) = \exp(\cos z)\sin(\sin z)\sin nz$, $n \in \mathbb{Z}$.

19.66. (!) Используя асимптотические свойства функций $\exp(z)$ и z^α при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, докажите их алгебраическую независимость над $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.67. Докажите, что функция $\int z^{\alpha-1} \sin z\, dz$ является элементарной тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{N}$.

19.68. Интеграл $\int z^{\alpha-1} \exp z\, dz$ называется неполной гамма-функцией. Докажите, что неполная гамма-функция элементарна тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{N}$.

19.69. Докажите, что функции $\exp z$ и $\exp(\exp z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}\langle z\rangle$.

19.70. Докажите, что следующие функции не является элементарными:

а) $\int \exp z \exp(z \exp z)\, dz$; б) $\int z^z\, dz$.

19.71. Выразите через $\mathrm{Ei}(z)$, $\mathrm{li}(z)$, $\mathrm{Si}(z)$, $\Phi_0(z)$ и элементарные функции следующие первообразные:

а) $\int \frac{dz}{\log^2 z}$;
б) $\int \exp(z) \log z\, dz$;
в) $\int \frac{z\, dz}{\log z}$;
г) $\int \frac{\exp(z)\, dz}{z^3}$;
д) $\int \frac{\exp(-z^2)\, dz}{z^2}$;
е) $\int z^2 \exp(-z^2)\, dz$;
ж) $\int (1 - \frac{1}{z^2}) \exp(-\frac{1}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2}))\, dz$;
з) $\int \exp(-\frac{1}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2}))\, dz$;
и) $\int \frac{\sin^3 z\, dz}{z}$;
к) $\int \frac{\sin z\, dz}{z^3}$.

19.72. Выразите через $\mathrm{li}(z)$ и элементарные функции неопределённый интеграл $\int \frac{2\log^2 z - \log z - z^2}{\log^3 z - z^2 \log z}\, dx$.

19.73. Выразите через $\mathrm{Ei}(z)$, $\mathrm{li}(z)$, $\mathrm{Si}(z)$, $\Phi_0(z)$ и элементарные функции следующие первообразные:

а) $\int \Phi_0^2(z)\, dz$;
б) $\int \Phi_0(z)\, dz$;
в) $\int z\Phi_0(z)\, dz$;
г) $\int \exp(-z^2/2)\Phi_0(z)\, dz$;
д) $\int \mathrm{Si}(z)\, dz$;
е) $\int \sin z\, \mathrm{Si}(z)\, dz$;
ж) $\int \mathrm{li}(z)\, dz$.

20. Интеграл Римана

Пусть $\mathcal{P}$ — множество, состоящее из ограниченных промежутков[24] в $\mathbb{R}$ и их конечных объединений. *Аддитивной функцией промежутков*

[24] Промежутками называются множества вида $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), где $a \leq b$.

называется функция $\mu : \mathcal{P} \to [0, \infty)$, удовлетворяющая условию *конечной аддитивности*: если множества $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ попарно не пересекаются, то $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(P_i)$. *Мерой* называется аддитивная функция промежутков $\mu : \mathcal{P} \to [0, \infty)$, удовлетворяющая условию *счётной аддитивности*: если множества $P_1, \ldots, P_n, \ldots \in \mathcal{P}$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(P_i)$.

Мерой Лебега μ_L называется мера, удовлетворяющая условиям $\mu_L([a,b]) = \mu_L((a,b]) = \mu_L([a,b)) = \mu_L((a,b)) = b-a$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ (см. задачи 20.21, 20.22).

Говорят, что множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет *нулевую меру Лебега* и пишут $\mu_L(A) = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся счётный (или конечный) набор промежутков $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ такой, что $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_L(P_n) < \varepsilon$. Говорят, что некоторое утверждение $\Phi(x)$ справедливо *почти всюду* (п. в.) на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, если множество $X \setminus \{x \in X \mid \Phi(x)\}$ имеет нулевую меру Лебега.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *измеримым по Жордану относительно меры* μ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два множества $P, Q \in \mathcal{P}$ таких, что $P \subseteq A \subseteq Q$ и $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Для множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ понятие измеримости по Жордану определяется аналогичным образом: вместо промежутков рассматриваются n-мерные параллелепипеды. Если множество A измеримо по Жордану относительно меры μ, то его мера $\mu(A)$ определяется как $\inf\limits_{P} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(P_i)$, где инфимум берётся по всем таким конечным наборам промежутков (параллелепипедов) $P = \{P_i\}$, что $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$.

Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если найдутся такой набор чисел $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ и такой набор попарно непересекающихся промежутков $P_1, \ldots, P_n$, что $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \chi_{P_i}$, где χ_A — характерестическая функция (индикатор) множества A. Будем обозначать через $\mathrm{Step}[a,b]$ множество ступенчатых функций, определённых[25]на отрезке $[a,b]$. Конечный набор попарно непересекающихся промежутков $\{P_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *разбиением* отрезка $[a,b]$, если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i = [a,b]$.

---

[25] В случае, когда ступенчатая функция $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ рассматривается, как определённая на всём $\mathbb{R}$, мы подразумеваем, что она равна 0 вне отрезка $[a,b]$

Говорят, что функция $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ является ступенчатой относительно разбиения $P = \{P_i\}$ отрезка $[a,b]$, если она постоянна на каждом промежутке P_i, $i = 1,\ldots,n$. *Элементарный интеграл* ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ (относительно некоторой меры μ) определяется равенством $\int\limits_a^b \varphi\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^n y_i\mu(P_i)$, где $\varphi = \sum\limits_{i=1}^n y_i\chi_{P_i}$ (см. задачу 20.2).

Обозначим через $B[a,b]$ множество ограниченных функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Интегральной нормой Римана*[26] функции $f \in B[a,b]$ называется величина

$$\|f\|_\mu = \inf\left\{\int\limits_a^b \varphi\,d\mu \,\middle|\, \varphi \in \mathrm{Step}[a,b], |f(x)| \le \varphi(x)\,\text{для любого}\,x \in [a,b]\right\}.$$

Для неограниченных на $[a,b]$ функций полагаем $\|f\|_\mu = \infty$. Через $\|\cdot\|_\ell$ будем обозначать интегральную норму Римана, соответствующую мере Лебега μ_L.

Функция $f \in B[a,b]$ называется *интегрируемой по Риману* относительно меры[27] μ, если найдётся такая последовательность ступенчатых функций (φ_n), $\varphi_n \in \mathrm{Step}[a,b]$, что $\|f - \varphi_n\|_\mu \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае (см. задачу 20.46) имеется конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n\,d\mu$, который называется *интегралом*[28] *от функции f на отрезке* $[a,b]$ *по мере* μ и обозначается через $\int\limits_a^b f\,d\mu$. Полагаем $\int\limits_a^b f\,d\mu = -\int\limits_b^a f\,d\mu$ при $a > b$. Если $\mu = \mu_L$ — мера Лебега, то пишут $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ или $\int\limits_a^b f$. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, если на этом отрезке интегрируема функция $f \cdot \chi_{[a,b]} \in B[a,b]$. Множество интегрируемых на отрезке $[a,b]$ по мере μ функций обозначается через $R(\mu,[a,b])$, или $R[a,b]$, если $\mu = \mu_L$ — мера Лебега.

[26] Строго говоря, интегральная норма Римана является не нормой, а полунормой на множестве $B[a,b]$ (см.§ 25). В 3-й части данного учебного пособия будет введена интегральная норма Лебега, которую нередко называют просто интегральной нормой.

[27] Аналогично можно определить интеграл по любой аддитивной функции промежутков.

[28] Когда мера μ является мерой Лебега, этот интеграл называется интегралом Римана. Отметим, что приведённое выше определение интеграла по произвольной мере не является частным случаем традиционного определения интеграла Римана — Стилтьеса (см. [47]).

Параметризованной кривой называется непрерывная функция $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Если отображение γ инъективно, то кривая называется *простой кривой Жордана*. Если отображение γ инъективно на (a,b) и $\gamma(a) = \gamma(b)$, то кривая называется *замкнутой кривой Жордана*. *Длина* $L(\gamma)$ кривой Жордана γ определяется как точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую, т. е.

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|_2 \mid a = t_0 \le \dots \le t_n = b, n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $\|(a_1, \dots, a_n)\|_2 = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Через $L(\gamma, [c,d])$, где $[c,d] \subset [a,b]$, будем обозначать длину кривой $\gamma|_{[c,d]}$.

Если длина кривой конечна, то кривая называется *спрямляемой*.

Вариацией функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ на отрезке $[a,b]$ называется величина $\bigvee\limits_a^b(f) = \sup \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, где супремум берётся по всевозможным наборам $x_1 = a \le x_2 \le \dots \le x_{n+1} = b$. Функцию f называют функцией *ограниченной вариации*, если $\bigvee\limits_a^b(f) < \infty$. Множество всех функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ обозначается через $BV[a,b]$.

20.1. Меры и разбиения

20.1. (!) Докажите, что для любых двух разбиений $\{P_i\}$ и $\{Q_j\}$ отрезка $[a,b]$ найдётся разбиение $\{S_k\}$ отрезка $[a,b]$, которое является *подразбиением* разбиений $\{P_i\}$ и $\{Q_j\}$, т. е. любой промежуток из разбиений $\{P_i\}$ и $\{Q_j\}$ является объединением некоторого набора промежутков из разбиения $\{S_k\}$.

20.2. (!) Докажите, что элементарный интеграл по мере μ определён корректно, т. е. если функция $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ является ступенчатой относительно двух разбиений $\{P_i\}$ и $\{Q_j\}$ отрезка $[a,b]$, т. е. $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \chi_{P_i}(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} z_j \chi_{Q_j}(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mu(P_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} z_j \mu(Q_j)$.

20.3. (!) Докажите, что для любых двух функций $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$ найдётся разбиение $\{P_i\}$, относительно которого они обе являются ступенчатыми.

20.4. (!) Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$. Докажите, что

а) $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathrm{Step}[a,b]$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

б) $\varphi \cdot \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$;

в) $\phi \in \mathrm{Step}[a,b]$, где $\phi(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$;

г) $\phi \in \mathrm{Step}[a,b]$, где $\phi(x) = \min\{\varphi(x), \psi(x)\}$.

20.5. Пусть[29] $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$. Докажите, что $g \circ \varphi, h(\psi, \varphi) \in \mathrm{Step}[a,b]$.

20.6. (!) Докажите, что $\|\chi_{[c,d]}\|_\mu = \int\limits_a^b \chi_{[c,d]}\, d\mu = \mu([c,d])$ для любых $c, d \in [a,b]$.

20.7. (!) Докажите, что для любой ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ верно равенство $\int\limits_a^b |\varphi|\, d\mu = \|\varphi\|_\mu$.

20.8. (!) Докажите, что для любой ступенчатой функции $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ верно неравенство $|\int\limits_a^b \varphi\, d\mu| \le \int\limits_a^b |\varphi|\, d\mu$.

20.9. Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$. Докажите, что $\|\varphi + \psi\|_\mu \le \|\varphi\|_\mu + \|\psi\|_\mu$.

20.10. (!) Докажите, что если $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$ и $\varphi(x) \le \psi(x)$ для любого $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b \varphi\, d\mu \le \int\limits_a^b \psi\, d\mu$ для любой меры μ.

20.11. (!) Докажите, что элементарный интеграл — линейная операция, т. е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$ справедливо равенство $\int\limits_a^b (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int\limits_a^b \varphi\, d\mu + \beta \int\limits_a^b \psi\, d\mu$.

20.12. (!) Докажите, что элементарный интеграл аддитивен, т. е. для любых $\varphi \in \mathrm{Step}[a,c]$ и $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ справедливо равенство $\int\limits_a^b \varphi\, d\mu + \int\limits_b^c \varphi\, d\mu = \int\limits_a^c \varphi\, d\mu + \varphi(b)\mu(\{b\})$.

[29] Если предполагать, что областью определения ступенчатых функций является $\mathbb{R}$, то необходимо потребовать, чтобы $g(0) = 0$ и $h(0,0) = 0$.

20.13. (!) Пусть $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ является ступенчатой относительно разбиения $P = \{P_i\}$ отрезка $[a,b]$. Пусть $t > 0$ и $J = \{i \in \mathbb{N} \mid |\varphi(P_i)| \geq t\}$. Докажите неравенство $\sum\limits_{i \in J} \mu(P_i) \leq \frac{1}{t} \int\limits_a^b |\varphi| \, d\mu$.

20.14. (!) Докажите, что любой элемент множества $\mathcal{P}$ может быть представлен как конечное объединение непересекающихся промежутков.

20.15. (!) Докажите, что множество $\mathcal{P}$ является *кольцом*, т. е. удовлетворяет следующим условиям:

а) если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \cup B \in \mathcal{P}$;

б) если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \cap B \in \mathcal{P}$;

в) если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$.

20.16. Докажите, что $\mu(\varnothing) = 0$ для любой аддитивной функции промежутков.

20.17. Пусть B — промежуток, $Q_1, \ldots, Q_n$ — конечный набор попарно непересекающихся промежутков и $Q_i \subseteq B$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(Q_i) \leq \mu(B)$ для аддитивной функции промежутков μ.

20.18. (!) Пусть $A, B \in \mathcal{P}$ и $A \subseteq B$. Докажите, что $\mu(A) \leq \mu(B)$ для любой аддитивной функции промежутков μ.

20.19. (!) Пусть B — промежуток, $Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$ — счётный набор попарно непересекающихся промежутков и $Q_n \subseteq B$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n) \leq \mu(B)$ для любой аддитивной функции промежутков μ (свойство счётной квазиаддитивности[30]).

20.20. Пусть B — промежуток, $Q_1, \ldots, Q_n$ — конечный набор промежутков и $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(Q_i) \geq \mu(B)$ для любой аддитивной функции промежутков μ.

20.21. (!) Пусть $Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$ — счётный набор промежутков и $[a,b] \subseteq$ $\subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_L(Q_n) \geq \mu_L([a,b]) = b - a$ (свойство счётной полуаддитивности).

[30] Иногда это свойство называют субаддитивностью.

20.22. (!) Докажите, что мера μ_L, обладающая свойством $\mu_L([a,b]) = \mu_L((a,b]) = \mu_L([a,b)) = \mu_L((a,b)) = b-a$ для любых $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, существует и единственна.

20.23. (!) Докажите, что не более чем счётное множество имеет нулевую меру Лебега.

20.24. (!) Найдите интегральную норму функции Дирихле (см. задачу 7.89) на отрезке $[0,1]$ относительно меры Лебега.

20.25. (!) Докажите, что если $\mu_L(A) = 0$, то $\mu_L(B) = 0$ для любого подмножества $B \subseteq A$.

20.26. Докажите, что объединение конечного числа множеств нулевой меры Лебега является множеством нулевой меры Лебега.

20.27. (!) Докажите, что объединение счётного числа множеств нулевой меры Лебега является множеством нулевой меры Лебега.

20.28. Докажите, что в определении множества нулевой меры Лебега достаточно рассматривать только открытые промежутки.

20.29. Пусть $Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$ — счётный набор попарно непересекающихся промежутков и $Q_n \subseteq [a,b]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если множество $[a,b] \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n\right)$ имеет нулевую меру Лебега, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_L(Q_n) = b-a$.

20.30. Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастающая (возможно, нестрого) функция. Определим $\mu([a,b]) = \mu((a,b]) = \mu([a,b)) = \mu((a,b)) = F(b) - F(a)$ для любых для любых $a,b \in \mathbb{R}$. Докажите, что

а) функцию μ можно единственным образом доопределить по аддитивности на множество $\mathcal{P}$ и доопределение является аддитивной функцией промежутков;

б) если F — непрерывная функция, то функция $\mu : \mathcal{P} \to [0,\infty)$ счётно-аддитивна, т. е. является мерой.

20.31. Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастающая (возможно, нестрого) функция и[31] $F_{\leftarrow}(c) = \lim\limits_{x \to c+0} F(x)$, $F_{\rightarrow}(c) = \lim\limits_{x \to c-0} F(x)$. Определим $\mu_F([a,b]) = F_{\leftarrow}(b) - F_{\rightarrow}(a)$, $\mu_F((a,b]) = F_{\leftarrow}(b) - F_{\leftarrow}(a)$, $\mu_F([a,b)) =$

[31] Если $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, то полагаем, что $F_{\rightarrow}(a) = F(a)$ и $F_{\leftarrow}(b) = F(b)$.

$= F_{\to}(b) - F_{\to}(a)$ и $\mu_F((a,b)) = F_{\to}(b) - F_{\leftarrow}(a)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что

а) функцию μ_F можно единственным образом доопределить по аддитивности на множество $\mathcal{P}$ и доопределение является аддитивной функцией промежутков;

б) функция $\mu_F : \mathcal{P} \to [0, \infty)$ счётно-аддитивна, т. е. является мерой.

20.32. Будет ли функция

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in A; \\ 0, & \text{если } 0 \notin A \end{cases}$$

а) аддитивной функцией промежутков?

б) мерой[32]?

в) найдётся ли такая функция F, что $\delta = \mu_F$?

20.33. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — конечное множество. Докажите, что функция $\nu_M(A) = |A \cap M|$ является мерой[33].

20.34. Мера λ называется *атомической*, если $\lambda(A) = \sum\limits_{x \in A} \lambda(\{x\})$ для любого множества $A \in \mathcal{P}$. Докажите, что существует не более чем счётное число точек (атомов) $x \in \mathbb{R}$, для которых $\lambda(\{x\}) > 0$.

20.35. Мера ν называется *безатомной*, если $\nu(\{x\}) = 0$ для любой точки $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что для любой меры μ имеется единственное представление $\mu = \nu + \lambda$, где ν — безатомная, а λ — атомическая мера.

20.36. Любая ли аддитивная функция промежутков представима в виде μ_F из задачи 20.31? Рассмотрите функцию

$$\nu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\varepsilon, 0) \subseteq A \text{ для некоторого } \ \varepsilon < 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

20.37. Докажите, что функция ν, определённая в задаче 20.36, не счётно-аддитивна, т. е. не является мерой.

[32] Мера δ называется мерой Дирака.

[33] Здесь $|\cdot|$ — мощность множества.

20.38. Пусть μ — мера. Докажите, что

$$\lim_{x\to b-0}\mu((a,x))=\mu((a,b));$$

$$\lim_{x\to b+0}\mu((a,x))=\mu((a,b]);$$

$$\lim_{x\to a-0}\mu([x,b))=\mu([a,b));$$

$$\lim_{x\to b+0}\mu([x,a))=\mu((a,b)).$$

20.39. Пусть μ — мера. Определим функцию

$$F(x)=\begin{cases}\mu([0,x)), & \text{если } x\ge 0,\\ -\mu([x,0)), & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Докажите, что функция F возрастает, полунепрерывна слева и $\mu_F\equiv\mu$ (см. задачу 20.31).

20.2. Свойства интеграла Римана

20.40. (!) Пусть $f\in B[a,b]$. Докажите, что $\|f\|_\mu=\||f|\|_\mu$.

20.41. (!) Пусть $f,g\in B[a,b]$ и $|f(x)|\le|g(x)|$ для всех $x\in[a,b]$. Докажите, что $\|f\|_\mu\le\|g\|_\mu$.

20.42. (!) Докажите, что $\|\alpha f\|_\mu=|\alpha|\|f\|_\mu$ для любых $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in B[a,b]$.

20.43. (!) Докажите, что для любых $f,g\in B[a,b]$ справедливы неравенства

а) $\|f+g\|_\mu\le\|f\|_\mu+\|g\|_\mu$;

б) $|\|f\|_\mu-\|g\|_\mu|\le\|f-g\|_\mu$.

20.44. (!) Пусть $f,f_n\in B[a,b]$ и $\|f-f_n\|_\mu\to 0$ при $n\to\infty$. Докажите, что $\|f_n\|_\mu\to\|f\|_\mu$ при $n\to\infty$.

20.45. Приведите пример функции $f\in B[a,b]$, которая не равна нулю тождественно, но $\|f\|_\ell=0$[34].

[34] Таким образом, интегральная норма на множестве $B[a,b]$ не удовлетворят аксиоме нормы нормированного векторного пространства: $\|f\|=0\Rightarrow f=0$ (см. § 25).

20.46. (!) Докажите, что интеграл Римана для функций из $R(\mu,[a,b])$ определён корректно, т. е.

а) если $\|f-\varphi_n\|_\mu \to 0$ при $n\to\infty$, то существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n\,d\mu$;

б) если $\|f-\varphi_n\|_\mu \to 0$ и $\|f-\psi_n\|_\mu \to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \psi_n\,d\mu$.

20.47. (!) Докажите, что $\mathrm{Step}[a,b] \subseteq R(\mu,[a,b])$ для любой меры μ и для любой ступенчатой функции элементарный интеграл совпадает с интегралом Римана по мере μ.

20.48. Докажите, что характерестическая функция любого конечного множества интегрируема относительно произвольной меры.

20.49. (§ 25) Пусть $\mathrm{Step}[a,b]$ множество ступенчатых функций в $R(\mu,[a,b])$. Докажите, что $\overline{\mathrm{Step}[a,b]} = R(\mu,[a,b])$.

20.50. (!) Вычислите норму (относительно меры Лебега) функции Дирихле χ на отрезке $[0,1]$.

20.51. (!) Исследуйте интегрируемость по Риману функцию Дирихле χ на отрезке $[0,1]$ (см. задачу 7.89).

20.52. (!) Докажите, что если $f\in R(\mu,[a,b])$, то $|f|\in R(\mu,[a,b])$.

20.53. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\|f\|_\mu=0$. Докажите, что $f\in R(\mu,[a,b])$.

20.54. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\|f\|_\mu=0$. Докажите, что $\int\limits_a^b f\,d\mu = \int\limits_a^b |f|\,d\mu = 0$.

20.55. (!) Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\|f\|_\ell=0$. Докажите, что $f(x)=0$ п.в.

20.56. Пусть $f\in R[a,b]$ и $f(x)=0$ п.в. Докажите, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b |f| = 0$.

20.57. Пусть $A\subset\mathbb{R}$. Докажите, что если $\|\chi(A)\|_\ell=0$, то $\mu_L(A)=0$.

20.58. (!) Пусть $f\in R(\mu,[a,b])$. Докажите, что $\int\limits_a^b |f|\,d\mu = \|f\|_\mu$.

20.59. (!) Пусть $f \in R(\mu, [a,b])$. Докажите, что $|\int\limits_a^b f\, d\mu| \leq \int\limits_a^b |f|\, d\mu$.

20.60. Пусть $|f| \in R[a,b]$. Верно ли, что $f \in R[a,b]$?

20.61. Пусть $f \in R(\mu, [a,b])$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varphi, \psi \in \mathrm{Step}[a,b]$, что $|f(x) - \varphi(x)| \leq \psi(x)$ и $\int\limits_a^b \psi(x)\, d\mu < \varepsilon$.

20.62. (!) Пусть $f \in B[a,b]$, определим множества

$$A = \left\{ \int\limits_a^b \varphi\, d\mu \mid \varphi \in \mathrm{Step}[a,b], \forall x \in [a,b]\ \varphi(x) \leq f(x) \right\} \text{ и}$$

$$B = \left\{ \int\limits_a^b \psi\, d\mu \mid \psi \in \mathrm{Step}[a,b], \forall x \in [a,b]\ f(x) \leq \psi(x) \right\}.$$

Докажите, что $f \in R(\mu, [a,b])$ тогда и только тогда, когда $\sup A = \inf B$. Причём в этом случае $\sup A = \inf B = \int\limits_a^b f\, d\mu$ (**критерий Дарбу**).

20.63. Пусть λ — атомическая мера с множеством атомов $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Докажите, что любая ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема на нём на мере λ, причём $\int\limits_a^b f\, d\lambda = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i)\lambda(\{x_i\})$.

20.64. (!) Пусть $f \in R(\mu, [a,b])$ и $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a,b]$. Докажите неравенство $m\mu([a,b]) \leq \int\limits_a^b f\, d\mu \leq M\mu([a,b])$.

20.65. (!) Пусть $f, g \in R(\mu, [a,b])$ и $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in [a,b]$. Докажите неравенство $\int\limits_a^b f\, d\mu \leq \int\limits_a^b g\, d\mu$.

20.66. Пусть $f \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\, dx > 0$. Докажите, что найдутся $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$, что $f(x) > 0$ для любого $x \in [\alpha, \beta]$.

20.67. (!) Пусть $f, g \in R(\mu, [a,b])$. Докажите, что $(f+g) \in R(\mu, [a,b])$ и $\int\limits_a^b (f+g)\, d\mu = \int\limits_a^b f\, d\mu + \int\limits_a^b g\, d\mu$.

20.68. (!) Пусть $f \in R(\mu, [a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\alpha f \in R(\mu, [a,b])$ и $\int\limits_a^b \alpha f\, d\mu = \alpha \int\limits_a^b f\, d\mu$ (задачи 20.67 и 20.68 обеспечивают линейность операции интегрирования).

20.69. Пусть $f \in R[a,b]$. Докажите, что $f \cdot \chi_{[\alpha,\beta]} \in R[\alpha,\beta]$ для любых $\alpha, \beta \in [a,b]$.

20.70. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая функция с периодом $T > 0$ и $f \in R[0,T]$. Докажите, что $f \in R[a,b]$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

20.71. Пусть $f, g \in R(\mu, [a,b])$. Докажите, что $u, v \in R(\mu, [a,b])$, где $u(x) = \max\{f(x), g(x)\}, v(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

20.72. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ и $f \in R[a,c]$. Докажите, что справедливо равенство $\int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f$ (аддитивность интеграла Римана).

20.73. Пусть $f \in B[a,b]$ и $f \in R[\alpha,\beta]$ для любых $\alpha, \beta \in (a,b)$. Докажите, что $f \in R[a,b]$. Останется ли данное утверждение верным, если функция не ограничена при $x \to b - 0$?

20.74. Пусть $\int\limits_a^b |f| = 0$ докажите, что $\int\limits_\alpha^\beta f = 0$ для любых $\alpha, \beta \in [a,b]$.

20.75. (!) Пусть $f \in R[a,b]$, $P \subset [a,b]$ — промежуток. Докажите, что функция, определённая равенством $\mu(P) = \int\limits_\alpha^\beta |f(x)|\, dx$, где $[\alpha,\beta] = \overline{P \cap [a,b]}$, является аддитивной функцией промежутков.

20.76. (!) Докажите, что $f \in R(\mu, [a,b])$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$, что $\sum\limits_i \operatorname{osc}_f(\Delta_i)\mu(\Delta_i) < \varepsilon$, где $\operatorname{osc}_f(P) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in P\}$.

20.77. (!) Докажите, что любая непрерывная функция на отрезке интегрируема по Риману относительно любой меры, т. е. $C[a,b] \subset R(\mu, [a,b])$.

20.78. Докажите, что любая функция, имеющая на отрезке только конечное число разрывов, каждый из которых 1-го рода, интегрируема по Риману относительно любой меры.

20.79. (!) Докажите, что любая монотонная функция на отрезке интегрируема по Риману относительно любой меры.

20.80. Докажите, что любая функция, имеющая на отрезке разрывы только 1-го рода, интегрируема по Риману относительно любой меры (см. задачу 20.322).

20.81. Приведите пример монотонной и непрерывной на интервале (a, b) функции, которая не является интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$.

20.82. Пусть $f \in B[a, b]$ и $\sum\limits_i \operatorname{osc}_f(\Delta_i)\mu_L(\Delta_i) > 0$ для некоторого разбиения $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$. Докажите, что найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{P_j\}$ отрезка $[a, b]$, если $\mu(P_i) < \delta$ для всех j, то $\sum\limits_j \operatorname{osc}_f(P_j)\mu_L(P_j) < 2\sum\limits_i \operatorname{osc}_f(\Delta_i)\mu_L(\Delta_i)$.

20.83. (!) Докажите, что $f \in R[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$, такого что $\mu_L(\Delta_i) < \delta$ для всех i и произвольных точек $\xi_i \in \Delta_i$ *сумма Римана* функции f удовлетворяет неравенству $\left|\sum\limits_i f(\xi_i)\mu_L(\Delta_i) - \int\limits_a^b f\right| < \varepsilon$.

20.84. Докажите, что $f \in R[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{[x_i, x_{i+1})\}$ отрезка $[a, b]$, такого что $0 < x_{i+1} - x_i < \delta$ для всех i, сумма Римана функции f удовлетворяет неравенству $\left|\sum\limits_i f(\xi_i)\mu_L(\Delta_i) - \int\limits_a^b f\right| < \varepsilon$, где $\xi_i = x_i$ или $\xi_i = x_{i+1}$.

20.85. Пусть $f \in R[a, b]$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\{[x_i, x_{i+1})\}$ отрезка $[a, b]$, такого что $0 < x_{i+1} - x_i < \delta$ для всех i, справедливо неравенство $\left|\prod\limits_i e^{f(\xi_i)\mu_L(\Delta_i)} - \exp\left(\int\limits_a^b f\right)\right| < \varepsilon$, где ξ_i — произвольная точка из промежутка Δ_i.

20.86. (!) Докажите, что $f \in R[a, b]$ тогда и только тогда, когда функция f ограничена и для всех $\varepsilon > 0, \delta > 0$ найдётся такое разбиение $\{\Delta_i\}$ отрезка $[a, b]$, что $\sum\limits_{i \in I} \mu_L(\Delta_i) < \varepsilon$, где $I = \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{osc}_f(\Delta_i) > \delta\}$.

20.87. Докажите, что $f \in R[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция f ограничена и для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ множество $A(\varepsilon) = \{x \in [a,b] \mid \operatorname{osc}_f(x) > \varepsilon\}$ может быть покрыто конечным числом интервалов, суммарная длина которых не превышает δ.

20.88. (!) Докажите, что $f \in R[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция f ограничена и непрерывна почти всюду на $[a,b]$, т. е. за исключением множества лебеговой меры 0 (**критерий Лебега** интегрируемости по Риману).

20.89. Пусть $A \subset [0,1]$ и множество $\operatorname{Lim}(A)$ не более чем счётно. Докажите, что характеристическая функция χ_A интегрируема по Риману.

20.90. Докажите, что если $f \in R[a,b]$ и $f(x) > 0$ почти всюду на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

20.91. Докажите, что если $f \in R[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ почти всюду на $[a,b]$ и множество $\{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\}$ не является множеством нулевой меры Лебега, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

20.92. Выясните, интегрируема ли по Риману функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{x} - \lfloor\frac{1}{x}\rfloor$;
в) $f(x) = \ln^2 x - \lfloor\ln^2 x\rfloor$;
б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \lfloor\frac{1}{\sin^2 x}\rfloor$;
г) $f(x) = \operatorname{sgn}\sin\frac{1}{x}$.

20.93. Выясните, интегрируема ли по Риману функция Римана ρ (см. задачу 7.92).

20.94. Выясните, интегрируема ли по Риману функция $\chi_A : [0,1] \to \mathbb{R}$, где

а) $A = \{1/2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
б) $A = \{k/2^n \mid k, n \in \mathbb{N}\}$.

20.95. Докажите, что если $f, g \in R[a,b]$, то $f \cdot g \in R[a,b]$.

20.96. Докажите, что $|f| \in R[a,b]$ тогда и только тогда, когда $f^2 \in R[a,b]$.

20.97. Докажите, что если $f \in R[a,b]$, $g \in C(f([a,b]))$ и $f([a,b])$ — отрезок, то $g \circ f \in R[a,b]$.

20.98. Пусть $f \in R[a,b]$, $g \in R(f([a,b])$ и $f([a,b])$ — отрезок. Следует ли из этого, что $g \circ f \in R[a,b]$? Расмотрите пример, когда $g \equiv \chi_{\{0\}}$ и $f \equiv \varrho$ — функция Римана.

20.99. Пусть $f \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f^2 = 0$. Докажите, что $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции f.

20.100. (!) Докажите, что для любой функции $f \in R[0,1]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

20.101. Приведите пример ограниченной функции $f \notin R[0,1]$, для которой существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

20.102. Докажите, что для любой функции $f \in R[0,1]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

20.103. Докажите, что для любой функции $f \in R[0,1]$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 x f(x)\,dx.$$

20.104. Докажите, что для любой монотонной функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ справедливо асимптотическое равенство при $n \to \infty$

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

20.105. Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ выпукла вниз[35]. Докажите неравенства

[35]Если функция f выпукла вверх, то оба неравенства заменяются на противоположные.

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}.$$

20.106. Пусть $f \in C^2[1,\infty)$, $f(x) \ge 0, f'(x) \ge 0, f''(x) \le 0$ при любом $x \in [1,\infty)$. Докажите асимптотическое равенство при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n) + \int\limits_1^n f(x)\,dx + O(1).$$

20.107. Пусть функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла вниз. Докажите, что для любой функции $f \in R[a,b]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b h(f(x))\,dx \ge h\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right).$$

20.108. Пусть $f \in C^1[a,b]$ и $\alpha_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. Докажите существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n$ и найдите его.

20.109. Пусть $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся функция $f \in C[a,b]$, удовлетворяющая неравенству $\|f - \varphi\|_\mu < \varepsilon$.

20.110. Пусть $f \in R[a,b]$. Докажите, что найдётся такая последовательность функций $f_n \in C[a,b]$, что $\|f - f_n\|_\mu \to 0$ при $n \to \infty$.

20.111. Пусть $f \in R[a,b]$. Докажите, что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0.$$

20.112. Пусть $f \in C[a,b]$ и для любой функции $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$. Докажите, что $f \equiv 0$.

20.113. Пусть $f \in R[a,b]$ и для любой функции $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$. Докажите, что $f = 0$ п.в.

20.114. Пусть $f \in R[a,b]$ и для любой функции $\varphi \in C[a,b]$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$. Докажите, что $f = 0$ п.в.

20.115. Пусть $f \in C[a,b]$ и для любой функции $\varphi \in C^1[a,b]$ такой, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = 0$. Докажите, что $f \equiv \mathrm{const}$.

20.116. Пусть $f \in R[a,b]$ и для любой функции $\varphi \in C^1[a,b]$ такой, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = 0$. Докажите, что $f = \mathrm{const}$ п.в. (**лемма Дюбуа — Реймона**).

20.117. Пусть $f \in C[a,b]$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b |f(x)|^n\,dx\right)^{1/n} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

20.118. (!) Пусть $f_n \in R(\mu,[a,b])$ и $\|f_n - f\|_\mu \to 0$ при $n\to\infty$. Докажите, что $f \in R(\mu,[a,b])$.

20.119. Пусть $f_n \in R[a,b]$, $\sup\limits_{x\in[a,b],n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \le M$ и $\|f_n - f\|_\ell \to 0$ при $n\to\infty$. Докажите, что найдётся такая функция $\widehat{f} \in R[a,b]$, что $\|\widehat{f} - f\|_\ell = 0$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |\widehat{f}(x)| \le M$.

20.120. (!) Пусть $f_n \in R(\mu,[a,b])$ и $\|f_n - f\|_\mu \to 0$ при $n\to\infty$. Докажите, что $\int\limits_a^b f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n\,d\mu$.

20.121. (!) Пусть $f_n \in R(\mu,[a,b])$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Докажите, что $\|f_n - f\|_\mu \to 0$ при $n\to\infty$.

20.122. (!) Пусть $f_n \in R[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Докажите, что $f \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n$.

20.123. Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{при } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{при } x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Пусть $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$. Докажите, что

а) (f_n) — фундаментальная (относительно интегральной нормы Римана) последовательность в $R[0,1]$;

б) не существует такой функции $f \in R[0,1]$, что $\|f - f_n\|_\ell \to 0$ при $n \to \infty$.

20.124. Пусть $f, g \in R[a,b]$. Будем писать $f \underset{R}{\sim} g$, если $\|f - g\|_\ell = 0$. Докажите, что отношение $\underset{R}{\sim}$ является отношением эквивалентности на множестве $R[a,b]$.

20.125. Пусть $f, g \in R[a,b]$. Докажите, что $f \underset{R}{\sim} g$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)$ п.в.

20.126. Пусть $f, g, f_1, g_1 \in R[a,b]$, $f \underset{R}{\sim} f_1$ и $g \underset{R}{\sim} g_1$. Докажите, что

а) $(f+g) \underset{R}{\sim} (f_1 + g_1)$;

б) $\min\{f, g\} \underset{R}{\sim} \min\{f_1, g_1\}$;

в) $\max\{f, g\} \underset{R}{\sim} \max\{f_1, g_1\}$.

20.127. (§ 25) Рассмотрим $\widetilde{R}[a,b]$ — множество классов эквивалентности (см. 20.55) функций из $R[a,b]$. Докажите, что поэлементное (т. е., например, сумма двух функций из классов $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ принадлежит классу $\widetilde{f+g}$) определение

а) сложения;

б) умножения на число;

в) интегральной нормы;

г) интеграла

для классов эквивалентности из $\widetilde{R}[a,b]$ будет корректным, т. е. указанные операции не зависят от выбора элемента класса эквивалентности.

20.128. (§ 22) Докажите, что функция $\varrho_\ell(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \|\widetilde{f} - \widetilde{g}\|_\ell$, $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{R}[a,b]$ является метрикой на множестве $\widetilde{R}[a,b]$.

20.129. (§ 22) Пусть $B_M \subset \widetilde{R}[a,b]$ состоит из всех классов эквивалентности, которые содержат хотя бы одну такую функцию f, что $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \le M$. Докажите, что множество B_M замкнуто и нигде не плотно.

20.130. (§ 22) Докажите, что $\widetilde{R}[a,b]$ как метрическое пространство является множеством 1-й категории.

20.131. (§ 22) Докажите, что метрическое пространство $\widetilde{R}[a,b]$ не является полным ни в какой метрике, эквивалентной метрике ϱ_ℓ (см. задачу 20.128).

20.3. Первообразная Римана и вычисление интегралов

20.132. (!) Пусть $f \in R[a,b]$. Докажите, что функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

20.133. (!) Пусть $f \in R[a,b]$ непрерывна в $x_0 \in (a,b)$. Докажите, что функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в x_0, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

20.134. Пусть $f \in R[a,b]$, $x_0 \in (a,b]$ и существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$. Докажите, что функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ имеет левую производную в точке x_0 и $F'_-(x_0) = A$.

20.135. (!) Пусть отображение $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица и $\varphi'(x) = 0$ для любых $x \in [a,b]\backslash A$, где $\mu_L(A) = 0$. Докажите, что $\varphi(x) \equiv \mathrm{const}$.

20.136. (!) Функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *первообразной Римана* функции $f \in R[a,b]$, если F удовлетворяет условию Липшица и найдётся такое множество $A \subset [a,b]$, $\mu_L(A) = 0$, что $F'(x) = f(x)$ для любых $x \in [a,b]\backslash A$. Докажите, что функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной Римана функции f.

20.137. (!) Докажите, что если функции F и G — первообразные Римана функции $f \in R[a,b]$, то $F - G \equiv \mathrm{const}$.

20.138. (!) Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(a) = 0$ и $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in (a,b)$. Докажите, что если $f \in R[a,b]$, то $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$.

20.139. (см. 23.22) Приведите пример функции $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ такой, что $F'(x)$ существует и равна нулю для любых $x \in [a, b] \setminus A$, где A — некоторое множество нулевой меры Лебега, однако $F(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Таким образом, в задаче 20.138 условие дифференцируемости всюду не может быть заменено на условие дифференцируемости почти всюду.

20.140. Пусть $f \in R[a, b]$ и $\int\limits_a^x f(t)\,dt = 0$ для любых $x \in [a, b]$. Докажите, что $f(x) = 0$ почти для всех $x \in [a, b]$.

20.141. (!) Пусть F и G — первообразные Римана функций $f \in R[a, b]$ и $g \in R[a, b]$ соответственно. Докажите, что $fG, Fg \in R[a, b]$ и справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,dx$.

20.142. Пусть $u, v \in C[a, b]$ и $\int\limits_a^b (u(x)f'(x) + v(x)f(x))\,dx = 0$ для любой функции $f \in C^1[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$. Докажите, что функция u дифференцируема и $u'(x) = v(x)$ при $x \in (a, b)$.

20.143. Пусть функция f монотонно возрастает на $[a, b]$. Докажите, что функция f имеет первообразную Римана F и функция F выпукла вниз.

20.144. Докажите, что первообразная непрерывной периодической функции есть сумма периодической и аффинной функций.

20.145. Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция, $f'(x) \neq 0$ и f^{-1} — её обратная функция. Докажите, что $\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$, где F — первообразная Римана функции f.

20.146. Вычислите первообразную Римана функции $|x|$.

20.147. Вычислите первообразную Римана функции $\lfloor x \rfloor$.

20.148. (!) Пусть $\varphi \in C^1[a, b]$ и множество $A \subset [a, b]$ имеет меру Лебега 0. Докажите, что $\mu_L(\varphi(A)) = 0$.

20.149. Пусть функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна (см. задачу 20.328) и множество $A \subset [a,b]$ имеет меру Лебега 0. Докажите, что $\mu_L(\varphi(A)) = 0$.

20.150. Пусть $\varphi \in C^1(a,b)$ и множество $A \subset (a,b)$ имеет меру Лебега 0. Докажите, что $\mu_L(\varphi(A)) = 0$.

20.151. Пусть $\varphi : (a,b) \to (c,d)$, $\varphi \in C^1(a,b)$, $\varphi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$ и множество $B \subset (c,d)$ имеет меру Лебега 0. Докажите, что $\mu_L(\varphi^{-1}(B)) = 0$.

20.152. (!) Пусть $\varphi \in D(a,b)$ и $A = \{x \in (a,b) \mid \varphi'(x) = 0\}$. Докажите, что $\mu_L(\varphi(A)) = 0$ (**лемма Сарда**).

20.153. Пусть $f \in C[c,d]$, $\varphi \in C^1[a,b]$ и $\varphi([a,b]) \subseteq [c,d]$. Докажите равенство[36]

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

20.154. (!) Пусть $f \in R[c,d]$, $\varphi \in C^1[a,b]$ и $\varphi([a,b]) \subseteq [c,d]$, F — первообразная Римана функции f (см.задачу 20.136). Докажите, что

а) $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[a,b]$;

б) $F(\varphi(t))$ — первообразная Римана функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$;

в) $\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$.

20.155. Пусть $f \in R[c,d]$, отображение $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ монотонно и удовлетворяет условию Липшица, причём производная φ' непрерывна почти всюду на $[a,b]$. Докажите, что $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$.

20.156. Пусть $f \in R[c,d]$, отображение $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ удовлетворяет условию Липшица, причём производная φ' непрерывна почти всюду на $[a,b]$. Докажите, что $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$.

---

[36]Здесь и далее полагаем, что если $c < d$, то $\int\limits_d^c f = -\int\limits_c^d f$.

20.157. Пусть $f \in R[-a, a]$ — чётная функция. Докажите, что $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

20.158. Пусть $f \in R[-a, a]$ — нечётная функция. Докажите равенство $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

20.159. Докажите, что одна из первообразных чётной функции является нечётной функцией и все первообразные нечётной функции являются чётными функциями.

20.160. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая функция с периодом $T > 0$ и $f \in R[0, T]$. Докажите, что $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

20.161. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая функция с периодом $T > 0$ и $f \in R[0, T]$. Пусть найдётся такое $A > 0$, что $\int\limits_{a}^{A+a} f\,dx \geq 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\int\limits_{a}^{T+a} f\,dx \geq 0$.

20.162. Пусть $f \in R[a, b]$. Докажите равенство $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$.

20.163. Найдите первообразные функций:

а) $\operatorname{sgn} x$; б) $x - \lfloor x \rfloor$.

20.164. Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ с помощью замены $x = \sin t$ и выбирая в качестве новых пределов интегрирования:

а) 0, $\pi/2$; б) π, $\pi/2$;

в) $-\pi$, $\pi/2$.

20.165. В интеграле $\int\limits_{0}^{2\pi} f(t) \cos t\,dt$ выполните замену переменной $x = \sin t$.

20.166. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$;

б) $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\, dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$.

20.167. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1-3\sin 2x+12\cos^2 x}$;

б) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2\sin 2x-1-4\cos^2 x}$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sin 2x-2-5\cos^2 x}$;

г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sin 2x-2}$;

д) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2-3\sin 2x+4\cos^2 x}$;

е) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2+\sin 2x}$;

ж) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2-2\sin 2x+6\cos^2 x}$;

з) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+5\cos^2 x+2\sin 2x}$.

20.168. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx$;

б) $\int\limits_{1/2}^{2} (1 + x - \frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}\, dx$.

20.169. (§ 21) Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{1+x^2}$.

20.170. Пусть $f \in C[0,1]$, докажите равенства:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = -\int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\, dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\, dx$.

20.171. Пусть $f \in C[0,1]$, докажите равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin 2x)\cos x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos^2 x)\cos x\, dx.$$

20.172. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

20.173. Пусть $f \in R[0,1]$ — убывающая на $[0,1]$ функция, $\alpha \in (0,1)$. Докажите неравенство

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \geq \alpha \int_0^1 f(x)\,dx.$$

20.174. Пусть $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n\, dx$. Докажите рекуррентную формулу $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$.

20.175. Докажите равенства

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ — чётное;} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

Выведите из них формулу Валлиса (см. задачу 17.41).

20.176. Докажите равенство

$\int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$.

20.177. Докажите равенство

$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x \cos^{2n-1} x\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{2(m+n-1)!}$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$.

20.178. Докажите равенство

$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2m+1} n!m!(m+n)!}$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$.

20.179. Пусть $P_n(x)$ — многочлены Лежандра (см. задачу 9.205). Докажите равенства:

а) $\int\limits_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ при $m \neq n$;

б) $\int\limits_{-1}^1 P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

20.180. Пусть $T_n(x)$ — многочлены Чебышёва (см. задачу 2.13). Докажите равенства:

а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$ при $m \neq n$;

б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ при $n \in \mathbb{N}$.

20.181. (!) Пусть $f \in C^{n+1}[a,b]$. Докажите, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

для любых $x, x_0 \in [a,b]$ (**формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме**).

20.182. Пусть $f \in C^1[a,b]$. Докажите, что $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int\limits_a^b f(x)\sin(tx)\,dx\right) = 0$.

20.183. Пусть $f \in R[a,b]$. Докажите, что $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int\limits_a^b f(x)\sin(tx)\,dx\right) = 0$ (**лемма Римана — Лебега**).

20.184. Пусть $f \in R[a,b]$. Докажите, что $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int\limits_a^b f(x)\sin^2(tx)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

20.185. Пусть (α_n) — последовательность из 0 и 1, для которой имеется предел $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}$. Докажите, что для любых функции $f \in R[0,1]$ и числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq n_0$ и любых $\xi_i \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(\xi_i) - \alpha\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

20.186. Используя подходящие суммы Римана, вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$.

20.187. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$.

20.188. (§ 21) Используя сумму Римана функции $\ln x$, вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^{1/n}}{n}$.

20.189. Докажите равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}C_n^k\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}=e$.

20.190. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{((n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{1/n}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{((1+\sqrt{1+n^2})(2+\sqrt{2^2+n^2})\cdots(n+\sqrt{n^2+n^2}))^{1/n}}{n}$.

20.191. Докажите, что $\sum\limits_{m=2}^{n}\frac{1}{m\ln m}=(1+o(1))\ln(\ln n)$ при $n\to\infty$.

20.192. Пусть $\ln_1 x=\ln x$, $\ln_{k+1}x=\ln(\ln_k x)$ и число $N_k>0$ удовлетворяет равенству $\ln_k N_k=1$. Докажите асимптотическое равенство $\sum\limits_{m=\lceil N_k\rceil}^{n}\frac{1}{m\ln_1 m\cdots\ln_k m}=(1+o(1))\ln_{k+1}n$ при $n\to\infty$.

20.193. Пусть f,g — монотонные неотрицательные функции. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\geq\int\limits_a^b f(x)\,dx\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

20.194. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна и положительна. Докажите равенство

$$\lim_{n\to\infty}(f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n))^{1/n}=\exp\left(\int\limits_0^1\ln f(x)\,dx\right).$$

20.195. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\ln(1+x^n)\,dx$.

20.196. Вычислите:

а) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^3}dt$; в) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^3}\sqrt{2-t^3}dt$;

б) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{1-t^4}dt$; г) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\cos x}\sqrt{1+t^4}dt$.

20.197. Вычислите:

а) $\frac{d}{dx}\int\limits_1^x \frac{t}{\ln(tx)}\,dt$; в) $\frac{d}{dx}\int\limits_1^{x^2} \frac{\sin(xt)}{t}\,dt$.

б) $\frac{d}{dx}\int\limits_1^{x^3} \frac{e^{xt}}{t}\,dt$;

20.198. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2\,dt}{\operatorname{tg} x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x e^{(t^2)}\,dt}{\sin\ x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \sqrt{\cos t}\,dt}{\operatorname{tg} x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x e^{t^4}\,dt}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt}{x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{1-t^4}\,dt}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^3} \sqrt{2-t^3}\,dt}{x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{1+t^4}\,dt}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$; к) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{e^t}{t^2}\,dt$.

20.199. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

20.200. Докажите, что $\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2x}e^{x^2}(1+o(1))$ при $x\to\infty$.

20.201. Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ при $x\to\infty$ справедливо равенство

$\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt = e^{x^2}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^3}+\dots+\frac{(2n-3)!!}{2^n x^{2n-1}}+O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)\right)$.

20.202. Докажите, что $\operatorname{li}(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} = \frac{x}{\ln x}(1+o(1))$ при $x\to 0+0$.

20.203. Докажите, что $n\in\mathbb{N}$ при $x\to 0+0$ справедливо равенство

$\operatorname{li}(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}+\dots+\frac{n!}{\ln^n x}+O\left(\frac{1}{\ln^{n+1} x}\right)\right)$.

20.204. Разложите функцию f в ряд Тейлора в точке $x=0$, где а) $f(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$; г) $f(x)=\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt$;

б) $f(x)=\int\limits_0^x \cos(t^2)\,dt$; д) $f(x)=\int\limits_0^x \operatorname{ch}(t^2)\,dt$;

в) $f(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$; е) $f(x)=\int\limits_0^x \ln(1+t^2)\,dt$.

20.205. Пусть $f,g\in R[a,b]$, $g(x)\ge 0$ и $f(x)=g(x)(1+o(1))$ при $x\to a+0$. Докажите, что $\int\limits_a^x f(t)\,dt=\left(\int\limits_a^x g(t)\,dt\right)(1+o(1))$ при $x\to a+0$.

20.206. Пусть $f,g\in R[a,b]$, $g(x)\ge 0$ и $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a+0$. Докажите, что $\int\limits_a^x f(t)\,dt=o\left(\int\limits_a^x g(t)\,dt\right)$ при $x\to a+0$.

20.207. Пусть $f\in R[0,a]$ для любого $a>0$ и $f(x)=x(1+o(1))$ при $x\to\infty$. Докажите, что $\int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt=x(1+o(1))$ при $x\to\infty$.

20.208. Пусть $f\in R[0,a]$ для любого $a>0$, $f(0)>0$, функция f возрастает и $\int\limits_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt=x(1+o(1))$ при $x\to\infty$. Докажите асимптотическое равенство $f(x)=x(1+o(1))$ при $x\to\infty$.

20.4. Оценки величины определённых интегралов

20.209. Пусть $f\in C[a,b]$, μ — некоторая аддитивная функция промежутков. Докажите существование такого $\xi\in[a,b]$, что $\int\limits_a^b f\,d\mu=$ $=f(\xi)\mu([a,b])$.

20.210. (!) Пусть $g,fg\in R(\mu,[a,b])$ и $g(x)\ge 0$ при $x\in[a,b]$. Докажите неравенство $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)\int\limits_a^b g\,d\mu\le\int\limits_a^b fg\,d\mu\le\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)\int\limits_a^b g\,d\mu$ (**первая теорема о среднем**).

20.211. (!) Пусть $f\in C[a,b]$, $g\in R[a,b]$ и $g(x)\ge 0$ при $x\in[a,b]$. Докажите, что $fg\in R[a,b]$ и найдётся такое число $\xi\in[a,b]$, для которого справедливо равенство $\int\limits_a^b fg=f(\xi)\int\limits_a^b g$.

20.212. (!) Пусть $g \in R[a,b]$, f — первообразная Римана некоторой функции $\varphi \in R[a,b]$, $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Докажите, что $fg \in R[a,b]$ и найдётся такое число $\xi \in [a,b]$, для которого справедливо равенство $\int\limits_a^b fg = f(a)\int\limits_a^\xi g + f(b)\int\limits_\xi^b g$.

20.213. Пусть $g, f, f_n \in R[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Докажите, что $fg, f_n g \in R[a,b]$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\int\limits_a^b f_n g \to \int\limits_a^b fg$ при $n \to \infty$.

20.214. Пусть $g \in R[a,b]$ и функция f монотонна на $[a,b]$. Определим функцию f_n как ломаную, которая в точках излома $x_k = a + \frac{k(b-a)}{2^n}$, $k = 0, \ldots, 2^n$, совпадает с функцией f, т. е. $f_n(x_k) = f(x_k)$. Докажите, что $\int\limits_a^b f_n g \to \int\limits_a^b fg$ при $n \to \infty$.

20.215. (!) Пусть $g \in R[a,b]$ и функция f монотонна на $[a,b]$. Докажите, что $fg \in R[a,b]$ и найдётся такое число $\xi \in [a,b]$, для которого справедливо равенство $\int\limits_a^b fg = f(a)\int\limits_a^\xi g + f(b)\int\limits_\xi^b g$ (**вторая теорема о среднем**).

20.216. (!) Пусть $g \in R[a,b]$, функция f неотрицательна и возрастает на $[a,b]$. Докажите, что найдётся такое число $\xi \in [a,b]$, для которого справедливо равенство $\int\limits_a^b fg = f(b)\int\limits_\xi^b g$.

20.217. (!) Пусть $g \in R[a,b]$, функция f неотрицательна и убывает на $[a,b]$. Докажите, что найдётся такое число $\xi \in [a,b]$, для которого справедливо равенство $\int\limits_a^b fg = f(a)\int\limits_a^\xi g$.

20.218. Определите, положительны или отрицательны следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{arctg} x \sin x \, dx$; б) $\int\limits_{1/2}^2 e^x \ln x \, dx$.

20.219. (!) Докажите неравенство $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx > 0$.

20.220. Вычислите с точностью до $0,01$ интегралы:

а) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_0^1 \cos x^2\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \operatorname{sh}(x^2)\,dx$.

20.221. Вычислите с точностью до $0,01$ интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \cos^{100} x\,dx$; б) $\int\limits_0^2 \sin^{100} x\,dx$.

20.222. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{1+x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{1+x^{2n}}{1+x^n}\,dx$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

20.223. Для произвольного $p > 0$ найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

20.224. Докажите, что $\left|\int\limits_a^b \sin(t^2)\,dt\right| \le 1/a$ при $a > 0$.

20.225. Пусть $f \in C^1[a,b]$, $f'(a) > 0$ и производная f' возрастает. Докажите неравенство $\left|\int\limits_a^b \sin(f(x))\,dx\right| \le \frac{2}{f'(a)}$.

20.226. Пусть $p : [0,\infty) \to [0,\infty)$ монотонно возрастает и $A > 0$. Докажите неравенство $\int\limits_0^A \sin(p(x))\,dx \ge 0$.

20.227. Пусть $f \in R[0,a]$ для любого $a, 0 < a < \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Найдите $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^1 f(tx)\,dx$.

20.228. Пусть $f \in C^2[a,b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a+hk$ при $k = 0,1,\ldots,n$. Докажите, что найдётся точка $\xi \in [a,b]$, для которой выполнено равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{(b-a)hf'(\xi)}{2}$ (**формула прямоугольников**).

20.229. Пусть $f, g \in C[0, \infty)$, $f(x) > 0$ при $x \geq 0$ и функция g возрастает. Докажите, что функция $\varphi(x) = \frac{\int_0^x g(t)f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ возрастает при $x \geq 0$.

20.230. Пусть $f \in C^2[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + hk$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Докажите, что найдётся точка $\xi \in [a, b]$, для которой выполнено равенство $\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) - \frac{(b-a)h^2 f''(\xi)}{12}$ (**формула трапеций**).

20.231. Пусть $f \in D^4[a, b]$ и $K_a^b(f) = (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))\frac{b-a}{6}$. Докажите, что

а) если f — многочлен степени не выше 3, то $K_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx$;

б) $|K_a^b(f) - \int_a^b f(x)\,dx| \leq \frac{c(b-a)^5}{2880}$, где $c = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

20.232. Пусть $f \in D^4[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, где $n = 2m$ и $x_k = a + hk$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{c(b-a)h^4}{180}, \text{ где } c = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \text{ (**формула Симпсона**).}$$

20.233. (!) Пусть $f, g \in R[a, b]$. Докажите **неравенство Коши — Буняковского**

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}.$$

20.234. (!) Пусть $f, g \in R[a, b]$, $p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите **неравенство Гёльдера**

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

20.235. Пусть $f, g \in R[a,b]$ и $\|g\|_\ell \neq 0$. Докажите, что

а) неравенство Коши — Буняковского является равенством тогда и только тогда, когда $f = \lambda g$ п.в. для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$;

б) неравенство Гёльдера является равенством тогда и только тогда, когда $f(x) = \lambda \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{p-1}$ п.в. для некоторого $\lambda \geq 0$.

20.236. (!) Пусть $f, g \in R[a,b]$, $p \geq 1$. Докажите **неравенство Минковского**

$$\left(\int\limits_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$

20.237. Пусть $f \in C^1[a,b]$ и $f(a) = 0$. Докажите неравенство

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)|^2 \leq (b-a)\int\limits_a^b (f'(x))^2\,dx.$$

20.238. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $\varphi_n(x) = \frac{1}{n!}(bx)^n(a-bx)^n$. Докажите, что

а) числа $\varphi_n^{(i)}(0)$ и $\varphi_n^{(i)}(a/b)$ — целые при любых $i, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

б) $I_n = \int\limits_0^\pi \varphi_n(x)\sin x\,dx \to 0$ при $n \to \infty$;

в) если $\pi = a/b$, то $I_n \in \mathbb{N}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом доказано[37], что $\pi \notin \mathbb{Q}$;

д) $J_n = \int\limits_0^r \varphi_n(x)e^x\,dx \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $r \in \mathbb{R}$;

е) если $e^{a/b} = p/q$, $a \neq 0$, то $qJ_n \in \mathbb{N}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Таким образом доказано[38], что $e^{a/b} \notin \mathbb{Q}$.

20.239. Пусть $I_n = \frac{1}{n!}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t\,dt$. Докажите, что

а) $I_{n+1} = (4n+2)I_n - \pi^2 I_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$;

б) $I_n = P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен степени не выше n с целыми коэффициентами;

в) если $\pi = a/b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b^n I_n = 0$;

г) $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$.

[37] Трансцендентность числа π доказана Ф. Линдеманом в 1882 г.

[38] Трансцендентность числа e доказана Ш. Эрмитом в 1873 г.

20.240. Пусть $J_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t\,dt$. Докажите, что

а) $J_n(x) = A_n(x)e^x + B_n(x)$, где A_n, B_n — многочлены степени n с целыми коэффициентами;

б) $e^r \notin \mathbb{Q}$ при любом $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

20.5. Приложение интеграла Римана к вычислению длин кривых

20.241. (!) Пусть каждой функции $f \in C[a,b]$ и каждому элементу $P \subset \mathcal{P}$ сопоставлено число $S(f,P) \in \mathbb{R}$, причём выполнены условия

1) функция $S(f,P)$ удовлетворяет условию конечной аддитивности[39] при любой фиксированной функции f;

2) $S(f,P) = \alpha\mu_L(P)$ для любой постоянной функции $f(x) \equiv \alpha$ и любого промежутка P;

3) $S(f,P) \le S(g,P)$ для любого промежутка P и любых функций $f, g \in C([a,b])$ таких, что $f(x) \le g(x)$.

Докажите, что $S(f,[a,b]) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ для любой функции $f \in C[a,b]$ и отрезка $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$.

20.242. Докажите, что если $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — ломаная, то её длина $L(\gamma,[a,b])$ равна сумме длин[40] составляющих её отрезков.

20.243. (!) Пусть $\gamma(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — кривая, удовлетворяющая условию Липшица. Докажите, что кривая γ спрямляема.

20.244. (!) Докажите, что $L(\gamma,[a,c]) = L(\gamma,[a,b]) + L(\gamma,[b,c])$ для любой кривой Жордана $\gamma : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ и числа b, где $a < b < c$.

20.245. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — кривая Жордана, P — ограниченный промежуток. Докажите, что функцию, определённую равенством $\mu(P) = L(\gamma, \overline{P \cap [a,b]})$, можно продолжить до аддитивной функции промежутков.

[39] В отличие от аддитивной функции промежутков функция $S(f,P)$ может принимать отрицательные значения.

[40] Длина вектора v равна $\|v\|_2$.

20.246. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — ломаная. Докажите, что

$$\min_{t\in[a,b]} \|\gamma'_+(t)\|_2(b-a) \le L(\gamma,[a,b]) \le \max_{t\in[a,b]} \|\gamma'_+(t)\|_2(b-a).$$

20.247. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — ломаная. Докажите, что

$\|\gamma'_+(t)\|_2 \in \mathrm{Step}[a,b]$ и $L(\gamma,[a,b]) = \int\limits_a^b \|\gamma'_+(t)\|_2\,dt$.

20.248. (!) Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — кривая Жордана и $\gamma \in C^1[a,b]$. Докажите, что $\min\limits_{t\in[a,b]} \|\gamma'(t)\|_2(b-a) \le L(\gamma,[a,b]) \le \max\limits_{t\in[a,b]} \|\gamma'(t)\|_2(b-a)$.

20.249. (!) Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — кривая Жордана и $\gamma \in C^1[a,b]$. Докажите, что $L(\gamma,[a,b]) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|_2\,dt$.

20.250. (!) Пусть $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1[a,b]$ и $\gamma'_i(t) > 0$ при любом $t \in [a,b]$ и $i = 1,\ldots,n$. Докажите неравенство $L(\gamma,[a,b]) \le \le \sqrt{n}\|\gamma(b)-\gamma(a)\|_2$.

20.251. (!) Докажите, что длина графика $G = \{(x,f(x)) \mid x \in [a,b]\}$ непрерывно дифференцируемой функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ равна $\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$.

20.252. (!) Найдите длины графиков функций $f : [0,a] \to \mathbb{R}$, если

а) $f(x) = x^{3/2}$;	г) $f(x) = \operatorname{ch} x$;
б) $f(x) = x^2$;	д) $f(x) = e^x$;
в) $f(x) = \sqrt{x}$;	е) $f(x) = \ln\cos x$, $a < \frac{\pi}{2}$.

20.253. Найдите длины кривых, заданных параметрически:

а) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, где $t \in [0,2\pi]$;

б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, где $t \in [0,2\pi]$ (циклоида);

в) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, где $t \in [0,2\pi]$ (эвольвента);

г) $x = \operatorname{ch}^3 t$, $x = \operatorname{sh}^3 t$, где $t \in [0,a]$;

д) $x = \operatorname{ch} t - 1$, $x = \operatorname{sh} t - t$, где $t \in [0,a]$.

20.254. (!) Пусть кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана в полярных координатах $(r,\varphi) = (r(\varphi),\varphi)$, где $r \in C^1[a,b]$. Докажите, что $L(r,[a,b]) = = \int\limits_a^b \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$.

20.255. Выведите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной в полярной системе координат как $(r, \varphi(r))$, $r_1 \le r \le r_2$.

20.256. Вычислите длину кривой, заданной в полярных координатах:

а) $r = \varphi$, где $\varphi \in [0, a]$ (спираль Архимеда);

б) $r = e^{\varphi}$, где $\varphi \in [0, a]$ (логарифмическая спираль);

в) $r = 1 + \cos\varphi$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$ (кардиоида);

г) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, где $\varphi \in [0, 3\pi]$.

20.257. Вычислите длину кривой, заданной в полярных координатах, где $\varphi \in [0, 2\pi]$:

а) $r(\varphi) = 1 - \cos\varphi$;
б) $r(\varphi) = 2 + 2\cos\varphi$;
в) $r(\varphi) = 2 - 2\sin\varphi$;
г) $r(\varphi) = 1 + \sin\varphi$.

20.258. Найдите длину дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

20.259. Выразите длину дуги эллипса с полуосями $a > b > 0$ через длину графика функции $f(x) = c\cos\frac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ и через функцию $E(\varphi, k)$ (см. задачу 18.86).

20.260. Выразите через эллиптические интегралы (см. задачу 18.86) длины кривых:

а) $x = at - b\sin t$, $y = a - b\cos t$, где $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$;

б) $r^2(\varphi) = 2a\cos 2\varphi$, где $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$;

в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $y \in [0, b], x \in [a, \sqrt{2}a]$;

г) $r(\varphi) = a\cos\varphi + b$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$.

20.261. Вычислите длину кривой $x(t) = \int\limits_0^t \cos\sqrt{u}\,du$, $y(t) = \int\limits_0^t \sin\sqrt{u}\,du$ при $t \in [0, a]$.

20.262. (§ 21) Выясните, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ кривая $(x, x^{\alpha}\sin\frac{1}{x})$, $x \in [0, 1]$, спрямляема.

20.6. Приложения интеграла Римана к вычислениям площадей и объёмов

20.263. (!) Пусть μ — аддитивная функция промежутков, $f \in R[a,b]$ и для любого промежутка $P \subseteq [a,b]$ справедливо неравенство

$$\inf\{f(x) \mid x \in P\}\mu_L(P) \leq \mu(P) \leq \sup\{f(x) \mid x \in P\}\mu_L(P).$$

Докажите, что $\mu([a,b]) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

20.264. (!) Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f(x) \geq 0$ при любом $x \in [a,b]$. Докажите, что $f \in R[a,b]$ тогда и только тогда, когда подграфик $L_f = \{(x,y) \mid x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ функции f является измеримым по Жордану множеством, причём $\mu_L(L_f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

20.265. Пусть неотрицательная функция $y(x)$ задана параметрически кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ и $x \in C^1[\alpha,\beta]$. Докажите, что площадь подграфика функции $y(x)$ на промежутке $[x(\alpha), x(\beta)]$ равна $\left|\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt\right|$.

20.266. Найдите площадь арки циклоиды $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

20.267. (§ 21) Найдите площадь петли декартова листа $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$, $t \in [0,\infty)$.

20.268. (!) Докажите, что класс G измеримых по Жордану множеств является кольцом, т. е. если $A, B \in G$, то множества $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат классу G.

20.269. Приведите пример последовательности измеримых по Жордану множеств (A_n), $A_n \subset [0,1]$, объединение которых не измеримо по Жордану.

20.270. Приведите пример множества $A \subset [0,1]$ лебеговой меры нуль, неизмеримого по Жордану.

20.271. Докажите, что если в определении измеримости по Жордану вместо прямоугольников использовать треугольники, то класс измеримых по Жордану множеств не изменится.

20.272. Пусть φ — ортогональное преобразование $\mathbb{R}^2$ и $S \subset \mathbb{R}^2$ — измеримое по Жордану множество. Докажите, что множество $\varphi(S)$ — измеримое множество и $\mu_L(S) = \mu_L(\varphi(S))$.

20.273. Пусть φ — линейное преобразование $\mathbb{R}^2$ и $S \subset \mathbb{R}^2$ — измеримое по Жордану множество. Докажите, что множество $\varphi(S)$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^2$.

20.274. Докажите, что ограниченное множество $A \subseteq \mathbb{R}^2$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет нулевую меру Лебега.

20.275. (!) Докажите, что кольцо

$$C = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b,\ c \le \sqrt{y^2 + z^2} \le d\}$$

измеримо по Жордану и найдите его объём (меру Лебега).

20.276. Пусть $S \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ — некоторое измеримое по Жордану множество. Определим тело $C \subset \mathbb{R}^3$, образованное вращением фигуры S вокруг оси Ox, как $\{(x, y, z) \mid (x, \sqrt{y^2 + z^2}) \in S\}$[41]. Докажите, что множество C измеримо по Жордану.

20.277. (!) Телом $C \subset \mathbb{R}^3$, образованным вращением кривой[42] $(x, f(x))$ вокруг оси Ox, где $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, называется тело вращения подграфика функции $|f|$, т. е. множество
$C = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b]; \sqrt{y^2 + z^2} \le |f(x)|\}$.

Докажите, что если $f \in R[a, b]$, то множество C измеримо по Жордану.

20.278. (!) Пусть $F(\alpha)$ — площадь сечения плоскостью $x = \alpha$ тела $C \subset \mathbb{R}^3$, образованного вращением связной измеримой по Жордану фигуры S, и функция F непрерывна. Докажите, что объём (мера Лебега) тела $C \subset \mathbb{R}^3$ равен $\int\limits_a^b F(x)\,dx$, где $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — проекция фигуры S на ось Ox.

20.279. (!) Докажите, что объём (мера Лебега) тела $C \subset \mathbb{R}^3$, образованного вращением кривой $(x, f(x))$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox, равняется $\pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

[41] Аналогичным образом определяется тело вращения фигуры вокруг любой прямой, когда фигура находится по одну сторону от прямой.

[42] Обычно полагают функцию f непрерывной.

20.280. Найдите объём конуса с радиусом основания r и высотой h.

20.281. Докажите, что объём полушара радиуса r равен объёму цилиндра с радиусом основания r и высотой r, из которого удалили конус с теми же основанием и высотой (задача Архимеда). Найдите объём шара радиуса r.

20.282. Докажите, что объём тела, образованного вращением фигуры $S = \{(x, y) \mid 0 \le a \le x \le b,\ y \in [0, f(x)]\}$ вокруг оси Oy, где $f \in C[a, b]$ — неотрицательная функция, равен $2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$.

20.283. Докажите, что объём тела, образованного вращением заданной в полярных координатах фигуры
$S = \{(r, \varphi) \mid 0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ r \in [0, r(\varphi)]\}$
вокруг оси Ox, где $r \in R[\alpha, \beta]$, равен $\frac{2\pi}{3} \int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$.

20.284. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой:

а) $y = \cos^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;
б) $y = 1/\sin^2 x,\ \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$;
в) $y = \sin^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;
г) $y = 1/\cos^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

20.285. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x^2,\ 0 \le x \le \sqrt{\pi}$, и осью Ox.

20.286. Найдите объём тел, образованных вращением а) вокруг оси Oy и б) вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, и осью Ox.

20.287. Найдите объём тел, образованных вращением а) вокруг оси Oy и б) вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = 2x - x^2$, $0 \le x \le 2$, и осью Ox.

20.288. Найдите объём тел, образованных вращением а) вокруг оси Oy и б) вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = x^2,\ 0 \le x \le 1$, и прямой $y = x$.

20.289. (§ 21) Найдите объём тел, образованных вращением вокруг а) оси Oy и б) вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = e^x$, $0 \le x < \infty$, и осями координат.

20.290. (!) Найдите объём внутренности эллиптического параболоида, т. е. тела, образованного вращением параболы $y^2 = 2px$, где $p > 0$, $x \in [0, a]$, вокруг оси Ox.

20.291. Найдите объём тела, образованного вращением ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

а) вокруг оси Ox, $x \in [a, c]$ (двуполостный гиперболоид);

б) вокруг оси Oy, $y \in [-c, c]$ (однополостный гиперболоид).

20.292. Найдите объём эллипсоидов ($a > b > 0$), образованных

а) вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $x = a\cos t, y = b\sin t,\ 0 \le t < \pi$, и осью Ox;

б) вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = a\cos t, y = b\sin t,\ -\pi/2 \le t < \pi/2$, и осью Oy.

20.293. Найдите объём тел, образованных вращением вокруг оси Oy и вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $x = a^2\sin^3 t$, $y = b^2\cos^3 t$, где $0 \le t < \pi/2$, и осями координат.

20.294. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда $r(\varphi) = \varphi$, где $\varphi \in [0, \pi]$.

20.295. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$, где $a > 0$, $\varphi \in [0, \pi]$ (кардиоида).

20.296. Найдите объём тела, образованного вращением фигуры $S = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \le 2(x^2 - y^2)\}$, ограниченной лемнискатой Бернулли,

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

20.297. Найдите объём тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной кривой:

а) $r = \sin 4\varphi$, вокруг оси $\varphi = \pi/2$;

б) $r = \sin 4\varphi$, вокруг оси $\varphi = \pi/4$;

в) $r = \sin 3\varphi$, вокруг оси $\varphi = 2\pi/3$;

г) $r = \sin 3\varphi$, вокруг оси $\varphi = \pi/3$.

20.7. Интеграл Стилтьеса — Римана и функции ограниченной вариации

20.298. (!) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонная функция. Найдите ее вариацию.

20.299. Докажите, что $\bigvee\limits_c^d(f) \leq \bigvee\limits_a^b(f)$ для любой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $[c, d] \subseteq [a, b]$.

20.300. (!) Докажите, что $\bigvee\limits_a^b(f) = \bigvee\limits_a^c(f) + \bigvee\limits_c^b(f)$ для любой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$.

20.301. Пусть $f, g \in BV[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Докажите, что

а) $\alpha f + \beta g \in BV[a, b]$; б) $f \cdot g \in BV[a, b]$.

20.302. Пусть $f \in BV[a, b]$ и $|f(x)| \geq \alpha > 0$ для любых $x \in [a, b]$. Докажите, что $1/f \in BV[a, b]$.

20.303. Докажите, что если функция f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то и функция $|f|$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, причём $\bigvee\limits_a^b(|f|) \leq \bigvee\limits_a^b(f)$. Приведите пример, показывающий, что обратное неверно.

20.304. Пусть $f \in BV[a, b]$, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Докажите, что $f = f^+ - f^-$ и $\bigvee\limits_a^b(f) = \bigvee\limits_a^b(f^+) + \bigvee\limits_a^b(f^-)$.

20.305. Пусть функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. Докажите, что для любой функции $f[a, b] \to \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\bigvee\limits_a^b(g \circ f) \leq L \bigvee\limits_a^b(f)$.

20.306. Докажите, что если функция f имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ и φ — возрастающая функция, то функция $f \circ \varphi$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[\alpha, \beta] = \varphi^{-1}[a, b]$, причём $\bigvee\limits_\alpha^\beta(f \circ \varphi) \leq \bigvee\limits_a^b(f)$.

20.307. Докажите, что если функция f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$ и φ — непрерывная возрастающая функция, то $\bigvee\limits_{\alpha}^{\beta}(f\circ\varphi) = \bigvee\limits_{a}^{b}(f)$, где $[\alpha,\beta]=\varphi^{-1}[a,b]$.

20.308. Докажите, что если $f \in C[a,b]$, то $\sup\limits_{P}\sum\limits_{i}\operatorname{osc}_f(P_i) = \bigvee\limits_{a}^{b}(f)$, где супремум берётся по всевозможным разбиениям $P=\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$.

20.309. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Докажите, что $\frac{1}{2}\bigvee\limits_{a}^{b}(f) \le \sup\limits_{P}\sum\limits_{i}\operatorname{osc}_f(P_i) \le \bigvee\limits_{a}^{b}(f)$, где супремум берётся по всевозможным разбиениям $P=\{P_i\}$ отрезка $[a,b]$.

20.310. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Докажите, что ее вариация конечна.

20.311. Докажите, что любая функция ограниченной вариации на отрезке интегрируема по Риману на этом отрезке.

20.312. Пусть $f \in R[a,b]$ и $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Докажите, что
$\bigvee\limits_{a}^{b}(F) = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt$.

20.313. (!) Пусть $f\in D[a,b]$ и $f'\in R[a,b]$. Докажите, что
$\bigvee\limits_{a}^{b}(f) = \int\limits_a^b |f'(t)|\,dt$.

20.314. Докажите, что если $f\in C^1[a,b]$, то $\frac{d}{dx}\bigvee\limits_{a}^{x}(f) = |f'(x)|$.

20.315. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[0,1]$. Докажите неравенство

$$\left|\int\limits_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{1}{n}\bigvee_{0}^{1}(f).$$

20.316. Вычислите:

а) $\bigvee\limits_{0}^{k\pi}(\sin x)$; б) $\bigvee\limits_{0}^{\sqrt{\pi}}(\sin x^2)$;

в) $\bigvee\limits_{a}^{1/\pi}(\sin \frac{1}{x})$, где $0 < a < \frac{1}{\pi}$.

20.317. (!) Выясните, имеют ли следующие функции на отрезке $[0, 1]$ конечную вариацию:

а) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$; в) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$;

б) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; г) $f(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$.

20.318. При каких значениях α функция $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ будет иметь конечную вариацию?

20.319. При каких значениях α, $\beta > 0$ функция $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$ будет иметь конечную вариацию?

20.320. Пусть $g \in C(\mathbb{R})$ и $|g(x)| \leq \varepsilon < 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что для любого отрезка $[a, b]$, $b - a \geq \frac{2\pi}{n}$, справедливы неравенства:

а) $\bigvee\limits_{a}^{b}(\sin nx) \geq \frac{n}{2\pi}(b - a)$;

б) $\bigvee\limits_{a}^{b}(g(x) + \sin nx) \geq \frac{n(1-\varepsilon)}{2\pi}(b - a)$.

20.321. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана равенством $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(4^{k^2} x)}{4^k}$.
Докажите, что функция f непрерывна и имеет на любом отрезке $[a, b]$ бесконечную вариацию.

20.322. (!) Докажите, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ является функцией ограниченной вариации тогда только тогда, когда она равна разности двух возрастающих (нестрого) функций, определенных на отрезке $[a, b]$ (**критерий Жордана** ограниченности вариации вещественной функции).

20.323. Докажите, что любая функция $f \in BV[a, b]$ имеет не более счётного числа точек разрыва, причём все точки разрыва 1-го рода.

20.324. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — произвольная функция ограниченной вариации. Докажите, что а) множество точек разрыва функции $v_f(x) = \bigvee\limits_a^x(f)$, $x \in [a,b]$ совпадает с множеством точек разрыва функции f;

б) для любого $x \in [a,b]$ справедливы равенства $v_f(x+0) - v_f(x) = = |f(x+0) - f(0)|$ и $v_f(x) - v_f(x-0) = |f(x) - f(x-0)|$, где $f(x \pm 0) = \lim\limits_{t \to x \pm 0} f(t)$.

20.325. Пусть $f \in C[a,b] \cap BV[a,b]$. Докажите, что функция f равна разности двух возрастающих (нестрого) непрерывных функций.

20.326. Докажите, что кривая $(\alpha(t), \beta(t))$, $t \in [a,b]$ спрямляема, тогда и только тогда, когда функции α и β имеют ограниченную вариацию (**теорема Жордана**).

20.327. Пусть аддитивная функция промежутков μ_F определяется возрастающей функцией F (см. задачу 20.31). Докажите, что если функция F *билипшицева*, т. е. найдутся такие числа $a_2 > a_1 > 0$, что $a_1|x-y| \leq |F(x) - F(y)| \leq a_2|x-y|$ любых $x, y \in \mathbb{R}$, то множества функций, интегрируемых по мере μ_F и по мере Лебега, совпадают.

20.328. (!) Пусть аддитивная функция промежутков μ_F определяется возрастающей функцией F (см. задачу 20.31). Докажите, что если функция F *абсолютно непрерывна*, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(y_i)| < \varepsilon \right),$$

то функции, интегрируемые по мере Лебега, интегрируемы по мере μ_F.

20.329. Докажите, что абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию на любом отрезке.

20.330. Пусть строго возрастающая функция F и обратная к ней функция F^{-1} абсолютно непрерывны и аддитивная функция промежутков μ_F определяется функцией F (см. задачу 20.31). Докажите, что $R(\mu_F, [a,b]) = R[a,b]$.

20.331. (!) Пусть аддитивная функция промежутков μ_F определяется возрастающей функцией F. Докажите, что μ_F — мера Лебега тогда и только тогда, когда $F(x) \equiv x$.

20.332. (см. 23.22) Пусть $F : [0,1] \to [0,1]$ — канторова лестница. Приведите пример функции, интегрируемой по мере Лебега, но не интегрируемой по μ_F.

20.333. (!) Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации. Из критерия Жордана (см. задачу 20.322) следует, что $F = F_+ - F_-$, где F_+ и F_- — возрастающие (нестрого) функции. Определим интеграл $\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f\,dF = \int_a^b f\,d\mu_{F_+} - \int_a^b f\,d\mu_{F_-}$, когда оба интеграла в правой части равенства существуют, где меры μ_{F_+} и μ_{F_-} определены в задаче 20.31. В этом случае будем говорить, что функция f интегрируема на $[a,b]$ по dF. Докажите, что приведённое выше определение *интеграла Стилтьеса — Римана* корректно (т. е. не зависит от представления функции F в виде суммы) и интеграл $\int_a^b f\,dF$ является линейным оператором на множестве интегрируемых функций и аддитивен относительно области интегрирования[43].

20.334. (!) Пусть $F \in C^1[a,b]$ и $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$. Докажите равенство $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b F'(x)\varphi(x)\,dx$.

20.335. (!) Пусть $G \in C^1[a,b]$ и $g = G'$. Докажите, что $fg \in R[a,b]$ для любой функции $f \in R(\mu_{G_+}, [a,b]) \cap R(\mu_{G_-}, [a,b])$ и справедливо равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dG(x) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$.

20.336. Пусть функция $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ за исключением конечного числа точек $a = c_0 < \cdots < c_m = b$. Пусть $g(x) = G'(x)$ при $x \neq c_i$. Докажите, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dG(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int\limits_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)g'(x)\,dx + f(c_i)(G(c_i+0) - G(c_i-0)) \right) + \\ + f(b)(G(b) - G(b-0)).$$

20.337. (!) Пусть $F \in C^1[a,b]$ и $g \in R[a,b]$. Докажите равенство $\int\limits_a^b g(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b F'(x)g(x)\,dx$.

---

[43] Отметим, что определение интеграла в задаче 20.333, не эквивалентно традиционному определению интеграла Стилтьеса или Римана — Стилтьеса (см. [47]).

20.338. Пусть $f \in C[a,b]$ и g — функция ограниченной вариации на $[a,b]$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\sup \left| \int\limits_a^b f\,dg - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) \right| < \varepsilon,$$

где супремум берётся по всевозможным наборам $a = x_1 < \dots < x_{n+1} = b, |x_{i+1} - x_i| < \delta$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

20.339. Пусть $F \in C[a,b]$ — возрастающая функция. Докажите, что функция f интегрируема на $[F(a), F(b)]$ по мере Лебега тогда и только тогда, когда функция $f \circ F$ интегрируема на $[a,b]$ по dF. При этом справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(F(x))\,dF(x) = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(y)\,dy.$$

20.340. Пусть $F \in C[a,b] \cap BV[a,b]$ и функция f интегрируема на множестве $F([a,b])$ по мере Лебега. Докажите, что функция $f \circ F$ интегрируема на $[a,b]$ по dF и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(F(x))\,dF(x) = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(y)\,dy.$$

20.341. Пусть $F \in C[a,b]$ — возрастающая функция. Докажите, что функция f интегрируема на $[F(a), F(b)]$ по мере Лебега тогда и только тогда, когда функция $f \circ F$ интегрируема на $[a,b]$ по dF. При этом справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(F(x))\,dF(x) = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(y)\,dy.$$

20.342. Пусть $f, F \in C[a,b]$ и F— строго возрастающая функция. Докажите, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(F^{-1}(y))\,dy.$$

20.343. Пусть функция F строго возрастает на $[a,b]$. Докажите, что интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dF(x)$ и $\int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(F^{-1}(y))\,dy$ определены или неопределены одновременно и в первом случае справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x) = \int\limits_{F(a)}^{F(b)} f(F^{-1}(y))\,dy.$$

Здесь функция F^{-1}, если это необходимо, доопределяется на весь отрезок с сохранением свойства монотонности.

20.344. Определив надлежащим образом функцию F^{-1}, решите задачу 20.343 в случае, когда функция F возрастает (нестрого) на $[a,b]$.

20.345. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[a,b]$ и $v(x) = \bigvee\limits_a^x(f)$. Докажите, что неравенство $\left|\int\limits_a^b g\,df\right| \le \int\limits_a^b |g|\,dv$ справедливо для любой функции g, если интеграл в левой части неравенства определён.

20.346. Пусть f — функция ограниченной вариации на $[a,b]$. Докажите, что неравенство $\left|\int\limits_a^b g\,df\right| \le \sup\limits_{a\le x\le b} |g(x)| \bigvee\limits_a^b(f)$ справедливо для любой функции g, если интеграл в левой части неравенства определён.

20.347. Докажите равенство $\int\limits_a^b f\,dg + \int\limits_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ в случае, когда одна из функций абсолютно непрерывна, а другая имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$.

20.348. $f \in C[a,b] \cap BV[a,b]$. Докажите равенство $\int\limits_a^b f\,df = \frac{1}{2}(f^2(b) - f^2(a))$.

20.349. Пусть $f, g \in BV[a,b]$. Докажите, что определён интеграл $\int\limits_a^b f\,dg$.

20.350. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x < 1/2, \\ 2, & \text{если } x = 1/2. \\ 1, & \text{если } 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

и

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } 0 \le x < 1/2, \\ 1, & \text{если } 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Найдите значения интегралов $\int\limits_0^1 f\,dg$ и $\int\limits_0^1 g\,df$.

20.351. Пусть $f, g \in BV[a,b]$ и множества точек разрыва функций f и g не пересекаются. Докажите формулу интегрирования по частям $\int\limits_a^b f\,dg + \int\limits_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. Приведите пример, показывающий, что требование непересекаемости множеств точек разрыва является существенным.

20.352. Пусть f возрастает на $[a,b]$ и $g \in C[a,b]$. Докажите, что найдётся такая $\xi \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b g\,df = g(\xi)(f(b) - f(a))$ (**первая теорема о среднем**).

20.353. Пусть g возрастает на $[a,b]$ и $f \in C[a,b]$ — функция ограниченной вариации. Докажите, что найдётся такая $\xi \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b g\,df = $ $= g(a)(f(\xi) - f(a)) + g(b)(f(b) - f(\xi))$ (**вторая теорема о среднем**).

20.354. Пусть функция $g \in C[a,b]$ возрастает. Докажите, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по dg тогда и только тогда, когда функция f ограничена и мера Лебега множества $g(A_f)$ равна нулю, где A_f — множество точек разрыва функции f.

20.355. Пусть функция $g \in BV[a,b]$. Докажите, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по dg тогда и только тогда, когда функция f ограничена и мера Лебега множества $v_g(A_f)$ равна нулю, где $v_g(t) = \bigvee\limits_a^t (g)$ и A_f — множество точек разрыва функции f.

20.356. Пусть функции f_n для любого $n \in \mathbb{N}$ интегрируемы по dg на $[a,b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$ на $[a,b]$. Докажите, что функция f интегрируема по dg на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b f\,dg = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\,dg$.

20.357. Пусть вариации функций g_n, $n \in \mathbb{N}$ ограничены в совокупности, т. е. $\sup\limits_n \bigvee\limits_a^b (g_n) \le C < \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ для любого $x \in [a,b]$.

Докажите, что $\bigvee_a^b(g) \le C$ и для любой функции $f \in C[a,b]$ справедливо соотношение $\int\limits_a^b f\,dg = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f\,dg_n$ (**первая теорема Хелли**).

20.358. Пусть $G(c_1, c_2)$ — множество всех таких вещественных функций g на отрезке $[a,b]$, что $\sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| \le c_1$ и $\bigvee_a^b(g) \le c_2$. Докажите, что найдётся последовательность (g_n), $g_n \in G(c_1, c_2)$, которая сходится в каждой точке отрезка $[a,b]$ (**вторая теорема Хелли**).

20.359. Пусть $0 < p \le q$ и $|f| \in R[0,1]$. Докажите неравенство $\left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$.

20.360. Пусть $f \in C^1(a,\infty)$. Докажите неравенство $\sup\limits_{x\in(a,\infty)} |f(x)| \le \left(\int_a^\infty f^2(x)\,dx \int_a^\infty (f'(x))^2\,dx\right)^{1/2}$.

20.361. Пусть $p > 1$ и $f_i \in R[a,b]$ при $i = 1, \ldots, n$. Докажите неравенство $\left(\sum\limits_{i=1}^n \left|\int\limits_a^b f_i(x)\,dx\right|^p\right)^{1/p} \le \int\limits_a^b \left(\sum\limits_{i=1}^n |f_i(x)|^p\right)^{1/p} dx$. Выведите отсюда, что $L(\gamma, [a,b]) \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2\,dt$ для любой кривой Жордана $\gamma \in C^1[a,b]$.

20.362. Пусть $S : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ — аддитивная функция промежутков на отрезке $[a,b]$. Докажите, что если для некоторой функции $f \in R[a,b]$ и произвольного отрезка $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ справедливо неравенство $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \le S([\alpha,\beta]) \le \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, то $S([\alpha,\beta]) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

21. Несобственный интеграл Римана

Точку $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *правой особой точкой* функции $f : [a,\omega) \to \mathbb{R}$, если $f \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$ и либо $\omega = \infty$, либо функцию f нельзя доопределить в точке $\omega \in \mathbb{R}$ так, чтобы $f \in R[a,\omega]$. Аналогично определяется *левая особая точка* В частности, точки, в окрестности которых функция неограничена, всегда являются особыми.

Пусть $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$ правая особая точка функции f на промежутке $[a, \omega)$. Тогда *несобственным* интегралом Римана называют предел

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega-0} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

если он существует. Если этот предел конечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится.* В случае, когда этого предела не существует или он бесконечен, говорят, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *расходится.* Если функция имеет левую особую точку, то несобственный интеграл Римана определяется аналогичным образом.

В случае, когда функция f имеет левую особую точку на промежутке $(\omega_1, c]$ и правую особую точку на промежутке $[c, \omega_2)$, говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx$ сходится на $(\omega_1, \omega_2) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, только если он сходится на каждом из двух промежутков $(\omega_1, c]$ и $[c, \omega_2)$.

Пусть $c \in (a, b)$ единственная особая точка функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ на отрезке $[a, b]$. Интегралом функции f на промежутке $[a, b]$ в смысле *главного значения по Коши* называется предел

$$\text{V.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right),$$

если он существует. Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируемой на любом конечном промежутке определяется интеграл в смысле главного значения по Коши в бесконечности, как предел

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx.$$

21.1. (!) Пусть $f \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда найдётся первообразная Римана функции f на промежутке (a, ω), имеющая конечный предел в точке ω.

21.2. (!) Пусть $f \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists c \in (a,\omega)\ \forall\, b_1, b_2 \left(b_1, b_2 \in (c,\omega) \Rightarrow \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \right)$$

(**критерий Коши** сходимости интеграла).

21.3. Пусть $f \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится, если сходится интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$. В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *абсолютно сходится*. Интеграл, сходящийся не абсолютно, называется *условно сходящимся*.

21.4. Пусть $f' \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$ и интеграл $\int\limits_a^\omega f'(t)\,dt$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\omega-0} f(x) = f(a) + \int\limits_a^\omega f'(t)\,dt$.

21.5. Пусть $f, g \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$, $|f(x)| \le g(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ сходится (**признак сравнения** сходимости интеграла).

21.6. Пусть $f, g \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$ и $f(x) = g(x)(1 + o(1))$ при $x \to \omega - 0$. Докажите, что интегралы $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ и $\int\limits_a^\omega |g(x)|\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

21.7. Приведите пример пары функций $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ таких, что интегралы $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$ и $\int\limits_0^\infty g(t)\,dt$ сходятся, а интеграл $\int\limits_0^\infty \max\{f(t), g(t)\}\,dt$ не сходится.

21.8. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

21.9. Пусть $f:(0,c)\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $b>a>0$. Найдите предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}$.

21.10. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная почти периодическая функция (см. задачу 10.50). Докажите, что существует предел $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

21.11. Пусть $f,g\in R[a,b]$ для любого $b\in(a,\omega)$ и $\lim\limits_{x\to\omega-0}F(x)G(x)=A$ $|A|<\infty$, где F,G — первообразные Римана функций f и g соответственно. Докажите, что интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)G(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega F(x)g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, причём в первом случае справедливо равенство

$$\int\limits_a^\omega f(x)G(x)\,dx = A - F(a)G(a) - \int\limits_a^\omega F(x)g(x)\,dx.$$

21.12. Пусть $\varphi\in C^1[a,\omega)$, $\varphi([a,\omega))\subseteq[\varphi(a),\omega')$ и $\lim\limits_{t\to\omega-0}\varphi(t)=\omega'$. Докажите, что для любой функции f, удовлетворяющей условию $f\in R[\varphi(a),b]$ для произвольного $b\in(\varphi(a),\omega')$, интегралы $\int\limits_{\varphi(a)}^{\omega'} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ сходятся или расходятся одновременно и в первом случае справедливо равенство

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\omega'} f(x)\,dx = \int\limits_a^\omega f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

21.13. Пусть $f\in R[a,b]$ для любого $b\in(a,\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что для любой возрастающей функции $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ такой, что $g(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, справедливо асимптотическое равенство $\int\limits_a^x f(t)g(t)\,dt=o(g(x))$ при $x\to\infty$.

21.14. Пусть $f\in C^1(\mathbb{R})$ и сходятся интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f^2(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f'(x))^2\,dx$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}xf^2(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xf^2(x)=0$.

21.15. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ и сходятся интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2\,dx$. Исходя из неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (xf(x) + \lambda f'(x))^2\,dx \geq 0,$$

докажите, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x)\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f'(x))^2\,dx \geq \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx\right)^2$$

(**неравенство Гейзенберга**).

21.16. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x) \neq 0$ и сходятся интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)}\,dx$. Докажите неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(x))^2}{f(x)}\,dx \geq 1.$$

21.17. (!) Выясните, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходятся интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

21.18. Выясните, сходятся ли интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 + 1}$; б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$.

21.19. Выясните, сходятся ли интегралы:

а) $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{dx}{\ln x}$; в) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{\ln x}$;

б) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$; г) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$.

21.20. Выясните, при каких $p \in \mathbb{R}$ сходятся интегралы:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

б) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}^p x}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

в) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^p(x+1)}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

г) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}^p(x-1)}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

д) $\int\limits_0^{\pi/2} (\frac{\cos x}{\sqrt{x}})^p\,dx$;

е) $\int\limits_0^{\pi/2} (x\operatorname{tg} x)^p\,dx$;

ж) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^p x}{\sqrt{\pi-2x}}\,dx$;

з) $\int\limits_0^{\pi/2} x(\operatorname{tg}(x))^p\,dx$;

и) $\int\limits_0^1 e^{p/x}\,dx$;

к) $\int\limits_0^\infty x^{px}\,dx$.

21.21. Выясните, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{x^{3/2}}\,dx$.

21.22. Выясните, при каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

21.23. Выясните, при каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходятся интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$;

в) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

21.24. Выясните, при каких $p, q, r \in \mathbb{R}$ сходится интеграл
$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x (\ln\ln x)^r}$.

21.25. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ сходится при любом $n \in \mathbb{N}$, причём $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$.

21.26. Пусть $f, g \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx = \infty$, $g(x) \geq 0$ и $f(x) = g(x)(1 + o(1))$ при $x \to \omega - 0$. Докажите, что
$\int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_a^x g(t)\,dt(1 + o(1))$ при $x \to \omega - 0$.

21.27. Пусть $f, g \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx = \infty$, $g(x) \geq 0$ и $f(x) = o(g(x))$ при $x \to \omega - 0$. Докажите, что $\int\limits_x^\omega f(t)\,dt = o\left(\int\limits_x^\omega g(t)\,dt\right)$ при $x \to \omega - 0$.

21.28. (!) Пусть $f, g \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится, функция f монотонна и ограничена. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ сходится (**признак Абеля** сходимости интеграла).

21.29. (!) Пусть $f, g \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, функция g имеет ограниченную первообразную, т. е. найдётся такое $C > 0$, что $|\int\limits_a^b g(x)\,dx| < C$ для любого $b \in (a, \omega)$, функция f монотонна и $\lim\limits_{x \to \omega - 0} f(x) = 0$. Докажите, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ сходится (**признак Дирихле** сходимости интеграла).

21.30. Пусть $f, g \in R[a, b]$ для любого $b \in (a, \omega)$, функция g — периодическая с периодом T и $\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx = 0$, функция f монотонно убывает и $\lim\limits_{x \to \omega - 0} f(x) = 0$. Докажите, что

а) $\left|\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx\right| \leq f(a) \int\limits_a^{a+T} |g(x)|\,dx$;

б) интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ сходится.

21.31. (!) Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$; в) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. г) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{x}\,dx$.

21.32. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$?

21.33. Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно, причём $Q_m(x) > 0$ при всех $x \geq 1$. Выясните, при каких $n, m \in \mathbb{N}$ сходятся интегралы:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx$; б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{P_n(x)\sin x}{Q_m(x)}\, dx$.

21.34. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_3^{\infty} (\frac{\sin x}{\ln x})^3\, dx$; в) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor-1/2}{\sqrt{x}}\, dx$;

б) $\int\limits_1^{\infty} \sin(1/x)\, dx$; г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor-1/3}{x}\, dx$.

21.35. Выясните, при каких натуральных n сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^n x}{x}\; dx$.

21.36. Выясните, при каких $p \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\, dx$.

21.37. Выясните, при каких $p \in \mathbb{R}$ условно сходится и абсолютно сходится интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(1-x)^p}\, dx$.

21.38. Выясните, при каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходятся интегралы:

а) $\int\limits_0^{\infty} x^p \sin(x^q)\, dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^p x}{x^q}\, dx$.

21.39. Исследуйте абсолютную и условную сходимость интегралов:

а) $\int\limits_1^{\infty} \mathrm{sgn}(\sin\sqrt{x})\; dx$; е) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin(\sin x)}{x}\; dx$;

б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{sgn}(\cos(\mathrm{tg}\, x))}{\sin 2x}\; dx$; ж) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{sgn}(\cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$;

в) $\int\limits_1^{\infty} \mathrm{sgn}(\sin x^2)\; dx$; з) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos(\sin x)}{\sqrt{x}}\; dx$;

г) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{\sqrt{x}}\; dx$; и) $\int\limits_1^{\infty} \cos^2(e^x)\; dx$.

д) $\int\limits_1^{\infty} \sqrt{x}\mathrm{sgn}(\cos(x^2))\; dx$;

21.40. Докажите, что интегралы а) $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$ и б) $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx$ сходятся и неотрицательны.

21.41. Пусть $p(x)$ — многочлен степени больше 1. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^\infty \sin(p(x))\,dx$ сходится.

21.42. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$ — выпуклая вниз функция и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\cos x\,dx$ сходится и справедливо неравенство $\int\limits_0^\infty f(x)\cos x\,dx \geq 0$.

21.43. Пусть функция $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ убывает и $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} f(\frac{1}{n}) < \infty$. Докажите, что $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ сходится.

21.44. Пусть функция $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ убывает и интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что $f(x) \geq 0$ при всех $x \in (1,\infty)$.

21.45. Пусть функция $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ убывает и интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

21.46. Пусть функция $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ убывает и интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ сходится. Докажите, что $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$.

21.47. Пусть $f \in C^1[a,\infty)$, найдётся $C > 0$ такое, что $|f'(x)| \leq C$ для любого $x \in [a,\infty)$ и $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

21.48. Пусть $f \in C^1[a,\infty)$, интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty f'(x)\,dx$ сходятся. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

21.49. Пусть $f \in C^1[a,\infty)$, интегралы $\int\limits_a^\infty f^2(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty (f'(x))^2\,dx$ сходятся. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

21.50. Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$?

21.51. Пусть интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$? Рассмотрите пример функции $f(x) = \sin^{2\lfloor x^4\rfloor}(2\pi x)$.

21.52. Пусть функция $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ убывает. Докажите, что $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ (**интегральный признак** сходимости ряда).

21.53. Применяя интегральный признак сходимости ряда, выясните, при каких $a, b, c \in \mathbb{R}$ сходятся ряды:

а) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$; б) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^a \ln^b n}$; в) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^a \ln^b n (\ln\ln n)^c}$.

21.54. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ монотонно убывает и ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ сходится. Докажите неравенство

$$\int\limits_{n+1}^\infty f(x)\,dx < \sum_{k=n+1}^\infty f(k) < f(n+1) + \int\limits_{n+1}^\infty f(x)\,dx.$$

21.55. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ монотонно убывает и существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda > 1$ (**признак Ермакова**).

21.56. Пусть функция $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ монотонна. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

21.57. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x+2\sin x}\,dx$; в) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{sgn}(\sin x)}{x+2\mathrm{sgn}(\sin x)}\,dx$;

б) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+|\sin x|}\,dx$; г) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\mathrm{sgn}(\sin x)}\,dx$.

21.58. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_1^\infty \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$; в) $\int\limits_1^\infty \exp\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) - 1\, dx$;

б) $\int\limits_1^\infty \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$; г) $\int\limits_1^\infty \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) dx$.

21.59. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{\cos\sin x}{x} e^{\cos x}\, dx$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sin x}{x} e^{\cos x}\, dx$.

21.60. Докажите, что интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\ln x + |\sin x|}\, dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{\ln x + \sin x}\, dx$ расходится.

21.61. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_1^\infty |\sin x|^{x^\alpha}\, dx$?

21.62. Вычислите предел $\lim\limits_{s\to 1+0} (s-1)\zeta(s)$.

21.63. Вычислите интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

21.64. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^\pi \ln\sin x\, dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx$.

21.65. Докажите асимптотические равенства при $x \to \infty$

а) $\int\limits_x^\infty \frac{dt}{te^t} = \frac{1}{xe^x}(1 + o(1))$; в) $\int\limits_x^\infty \cos t^2\, dt = -\frac{\sin x^2}{2x} + o(\frac{1}{x})$;

б) $\int\limits_x^\infty \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{t}} = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O(\frac{1}{x^{3/2}})$; г) $\int\limits_x^\infty \sin t^2\, dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O(\frac{1}{x^3})$.

21.66. Применяя неравенство $0 \le e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \le \frac{t^2}{n} e^{-t}$ при $t \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, докажите асимптотическое равенство при $n \to \infty$

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} + o(1).$$

21.67. Применяя формулу Валлиса (см. задачу 16.41), вычислите интеграл Эйлера — Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

21.68. Пусть $L_n(x)$ — многочлены Лагерра (см. задачу 9.209). Докажите равенства:

а) $\int\limits_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}\,dx = 0$ при $m \neq n$;

б) $\int\limits_0^{\infty} L_n^2(x)e^{-x}\,dx = 1$.

21.69. Пусть $H_n(x)$ — многочлены Эрмита (см. задачу 9.213). Докажите равенства:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx = 0$ при $m \neq n$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}2^n n!$.

21.70. Будем говорить, что *правосторонний* (*левосторонний*) *интеграл Римана* от функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ равен $I \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, где $0 < \Delta_i = x_{i+1} - x_i < \delta$, $i = 0, \ldots, n-1$, справедливо неравенство

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\Delta_i - I\right| < \varepsilon \qquad \left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta_i - I\right| < \varepsilon\right).$$

Докажите, что если правосторонний (левосторонний) интеграл Римана от функции f существует, то для любого $\delta > 0$ функция f ограничена на отрезке $[a+\delta, b]$ ($[a, b-\delta]$).

21.71. Докажите, что если правосторонний (левосторонний) интеграл Римана от функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ существует, то множество её точек разрыва имеет нулевую меру Лебега.

21.72. Докажите, что если правосторонний (левосторонний) интеграл Римана от функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ существует, то $f(x) = o\left(\frac{1}{x-a}\right)$ при $x \to a+0$ ($f(x) = o\left(\frac{1}{b-x}\right)$ при $x \to b-0$).

21.73. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x > 0$, $f(0) = 0$, имеет правосторонний интеграл Римана на отрезке $[0, 1]$, причём значения несобственного и правостороннего интегралов равны.

21.74. Докажите, что если правосторонний (левосторонний) интеграл Римана от функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ существует, то сходится несобственный интеграл Римана функции f на $[a, b]$.

21.75. Докажите, что в условиях задачи 21.74 несобственный интеграл сходится абсолютно.

21.76. Приведите пример такой функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, что $f(x) = o(1/x)$ при $x \to 0$, интеграл $\int\limits_0^1 |f(x)|\, dx$ сходится, но не существует правостороннего интеграла от f по отрезку $[0, 1]$.

21.77. Пусть убывающая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет особенность в точке $a \in \mathbb{R}$ и интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ сходится. Докажите, что существует правосторонний интеграл Римана функции f на отрезке $[a, b]$.

21.78. (!) Докажите, что если существует собственный или несобственный интеграл $\int\limits_a^b f$, то существует и конечен интеграл в смысле главного значения, причём справедливо равенство

$$\text{V.p.} \int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

21.79. Пусть $f \in R[-a, -\delta] \cap R[\delta, a]$ для любого $\delta \in (0, a)$. Докажите, что интеграл в смысле главного значения от функции f существует и конечен тогда и только тогда, когда сходится интеграл от функции $g(x) = f(x) + f(-x)$, $x \in [0, a]$. При этом $\text{V.p.} \int\limits_{-a}^a f(x)\, dx = \int\limits_0^a g(x)\, dx$.

21.80. Пусть $f(x) \in C(0, a]$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, a], \\ -f(-x), & x \in [-a, 0). \end{cases}$

Найдите $\text{V.p.} \int\limits_{-a}^a g(x)\, dx$.

21.81. (!) Вычислите V.p. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$.

21.82. (!) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вычислите V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n\,dx$.

21.83. Вычислите интегралы:

а) V.p. $\int\limits_{-1}^{5} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$;

б) V.p. $\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{x^2-1}\,dx$;

в) V.p. $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$;

г) V.p. $\int\limits_{0}^{\pi} x \operatorname{tg} x\,dx$.

21.84. Вычислите интегралы:

а) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$;

б) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$;

в) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}}\,dx$;

г) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2})\,dx$.

21.85. Вычислите интеграл V.p. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\alpha - \sin x}$ при $\alpha \in (0,1)$.

21.86. Вычислите интегралы:

а) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg}(x+a)\,dx$;

б) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}(x+a)\,dx$;

в) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}(x+a)\operatorname{sh}(x+a)}$;

г) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin^9 x\,dx$;

д) V.p. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, где $b^2 - 4ac > 0$;

е) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}(x+a)\,dx$;

ж) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}(x+a)\,(\operatorname{ch}(x+a)+1)}$;

з) V.p. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

и) V.p. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

21.87. Исследуйте существование и конечность интеграла

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx, \quad \text{где } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}, & x > 0, \\ \frac{1}{\operatorname{arctg} x}, & x < 0. \end{cases}$$

21.88. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ существует и конечен интеграл V.p. $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{x^\alpha dx}{1-x}$?

21.89. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ существует и конечен интеграл V.p. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x \sin x}{|x|^\alpha} dx$?

21.90. (!) Докажите, что при любом $x > 1$ существует и конечен интеграл $\mathrm{li}(x) = \text{V.p.} \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\ln t}$.

21.91. Пусть $f \in C^2[a,b]$, $f(c) = 0$, $f'(c) \neq 0$ для некоторого $c \in (a,b)$ и $f(x) \neq 0$ при любом $x \neq c$. Докажите, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}$ не сходится, а V.p. $\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)}$ существует и конечен.

21.92. Пусть функция f дифференцируема в точке $c \in (a,b)$, и $f \in R[a, c-\delta] \cap R[c+\delta, b]$ для любого $\delta > 0$. Докажите равенство

$$\text{V.p.} \int\limits_a^b \frac{f(x)dx}{x-c} = \int\limits_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\, dx + f(c) \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

21.93. Докажите, что для любой *финитной*[44] функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \ln x\, dx.$$

21.94. Докажите, что для любой финитной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx.$$

21.95. Для любой финитной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ докажите существование интегралов и их равенство

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(x)dx}{x} = -\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\, dx.$$

[44] Финитной называется функция, *носитель* которой $\mathrm{supp}(f) = \overline{A_f}$, где $A_f = \{x \in \mathrm{Dom} f \mid f(x) \neq 0\}$, — компактное множество.

21.96. Для любой финитной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ докажите равенства:

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx = \pi\varphi(0)$;

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x\pm i\varepsilon} = \mp i\pi\varphi(0) + \mathrm{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x}$

(**формула Сохоцкого**).

21.97. Пусть $f \in R[a,b]$ для любого $b \in (a,\omega)$, $f^-(x) = -\min\{f(x),0\}$ и $f^+(x) = \max\{f(x),0\}$. Докажите, что если интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ сходится, но не абсолютно, то интегралы $\int\limits_a^{\omega} f^+(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{\omega} f^-(x)\,dx$ расходятся.

22. Метрические пространства

Пусть X — некоторое множество. *Топологией* на X называется система τ его подмножеств, удовлетворяющая условиям

1. $X \in \tau$, $\varnothing \in \tau$;
2. $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \in \tau$, для любого семейства $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ элементов τ;
3. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$, для любого конечного набора $\{A_1,\ldots,A_n\}$ элементов τ.

Пара (X,τ) называется *топологическим пространством.* Множества $A \in \tau$ называют *открытыми* (в топологии τ). Семейство открытых множеств $\beta \subseteq \tau$ образует *базу топологии*, если любое открытое множество является объединением элементов некоторого подмножества семейства β. *Окрестностью* точки $x \in X$ называется любое подмножество множества X, содержащее такое открытое множество $U \in \tau$, что $x \in U$. Множество окрестностей точки $x \in X$ обозначается через $\mathcal{N}(x)$. Точка $x \in A$ называется *внутренней* точкой множества $A \subseteq X$, если $A \in \mathcal{N}(x)$. Совокупность внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается через $\overset{\circ}{A}$ ($\mathrm{int}(A)$). Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $A \subseteq X$, если $U \cap A \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x. Множество, состоящее из точек, являющихся одновременно точками прикосновения для множеств A и $X \setminus A$, называется границей множества A и обозначается $\mathrm{Fr}(A)$. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* множества $A \subseteq X$, если $(A \cap U) \setminus \{x\} \neq \varnothing$ для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(x)$. Множество предельных точек обозначается через $\mathrm{Lim}(A)$. Точки множества $A \setminus \mathrm{Lim}(A)$ называются *изолированными* точками множества A. Множество $A \subseteq X$ называется *замкнутым*, если $\mathrm{Lim}(A) \subseteq A$. Объединение множества A и всех его предельных точек называется *замыканием* множества A и обозначается через $\overline{A}$ ($\mathrm{cl}(A)$).

Пусть (X, τ) и (Y, τ_1) — некоторые топологические пространства. Говорят, что отображение $f : X \to Y$ имеет *предел* $y \in Y$ в точке $x_0 \in \mathrm{Lim}(X)$, и пишут $f(x) \to y$ при $x \to x_0$[45], если

$$\forall U \in \mathcal{N}(y)\ \exists V \in \mathcal{N}(x_0) \quad f(V \setminus \{x_0\}) \subseteq U.$$

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$. Отображение, непрерывное[46] во всех точках $x \in A$, $A \subseteq X$, называют непрерывным на A. Множество непрерывных отображений, действующих из X в Y, обозначают через $C(X, Y)$. Если $Y = \mathbb{R}$, то вместо $C(X, Y)$ будем использовать обозначение $C(X)$. *Гомеоморфизмом* называется любое взаимно однозначное отображение $g : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$, которое непрерывно вместе со своим обратным отображением.

Точка $y \in X$ называется пределом последовательности (x_n), $x_n \in X$ если

$$\forall U \in \mathcal{N}(y)\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq m \Rightarrow x_n \in U).$$

Метрическим пространством называется пара (X, d), состоящая из множества X и отображения (называемого *метрикой* или *расстоянием*) $d : X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющего следующим условиям:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (*симметричность*);
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ для всех $x, y, z \in X$ (*неравенство треугольника*)

Множество $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$, где $x \in X$, $r \in (0, +\infty)$, называется *открытым шаром* в метрическом пространстве (X, d), множество $\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ — *замкнутым шаром*. Множество $U \subseteq X$ называется *открытым* в метрическом пространстве (X, d), если оно содержит вместе с каждой точкой $x \in U$ некоторый шар $B(x, r) \subseteq U$ с центром в этой точке. Семейство открытых множеств в метрическом пространстве является топологией (см. задачи 22.42–22.44). *Подпространством* метрического пространства (X, d) называется (X', d'),

[45] Используется также обозначение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$.

[46] В изолированной точке любое отображение считается непрерывным.

где $X' \subseteq X$, d' — сужение функции[47] d на $X' \times X'$. Метрическое пространство (X, d) называется *дискретным*, если для любой точки $x \in X$ найдётся такое $r > 0$, что $B(x, r) = \{x\}$. Метрики, заданные на множестве X, называют *топологически эквивалентными*, если порождённые ими топологии, т. е. семейства открытых множеств в X, совпадают.

Изометрией метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) называется сюръективное отображение $h : X \to Y$, удовлетворяющее условию: $d_Y(h(x), h(x')) = d_X(x, x')$ для любых $x, x' \in X$. Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d)$ с евклидовой метрикой $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)} = \|x - y\|_2$ (см. § 24).

Рассмотрим некоторые метрические пространства (X, d_X), (Y, d_Y). Отображение $f : X \to Y$ называется *C-липшицевым*, если

$$d_Y(f(a), f(b)) \le C d_X(a, b) \quad \forall\, a, b \in X,$$

константа C, $C > 0$, называется *константой Липшица* отображения f. Отображение $f : X \to Y$ называется *C-билипшицевым*, $(C > 0)$, если

$$C^{-1} d_X(a, b) \le d_Y(f(a), f(b)) \le C d_X(a, b) \quad \forall\, a, b \in X.$$

Множество $S \subset X$ *всюду плотно* в $A \subset X$, если

$$\forall\, a \in A\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, c \in S \ \ d(a, c) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство, обладающее не более чем счетным всюду плотным подмножеством, называется *сепарабельным*.

Фундаментальной последовательностью (последовательностью Коши) в метрическом пространстве (X, d) называется последовательность (x_n), удовлетворяющая следующему условию:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N} \ \ (n, m \ge n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если любая последовательность Коши в нем имеет предел, содержащийся в X.

Метрическое пространство (X, d) называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующему условию (**аксиоме Бореля — Лебега**): для каждого покрытия $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ множества X открытыми множествами (*открытого покрытия*) существует конечное подсемейство $\{U_\lambda\}_{\lambda \in H}$ ($H \subseteq L$ и H конечно), являющееся покрытием множества X.

[47] Вместо (X', d') обычно пишут (X', d).

Диаметром множества $A \subseteq X$ называется величина $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$. Полагаем, что $\operatorname{diam}(\varnothing) = 0$. Множество A называется *ограниченным*, если $\operatorname{diam} A < \infty$. Множество A называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества A множествами диаметра не больше ε.

Метрическое пространство (X, d) называется *связным*, если из всех подмножеств X только $\varnothing$ и X являются одновременно открытыми и замкнутыми. Объединение всех связных подмножеств множества X, содержащих точку $x \in X$, называется *компонентой связности* точки x в X и обозначается $C(x)$. Множество $A \subseteq X$ называется связным, если подпространство (A, d) связно. Компоненты связности точек подпространства (A, d) называются *компонентами связности* множества A. Если каждая компонента связности множества A состоит из одной точки, то такое множество называется *вполне несвязным*.

Путём (*параметризованной кривой*) в (X, d) называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to X$, $a < b$. Множество $A \subseteq X$ называется *линейно связным*, если для любых точек $x, y \in A$ найдётся такая параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \to X$, что $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ и $\gamma([a, b]) \subseteq A$. Открытое линейно связное множество называется *областью*.

22.1. Примеры метрических пространств

22.1. (!) Пусть X — некоторое множество,

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Докажите, что (X, d) — (дискретное) метрическое пространство, и любое подмножество дискретного метрического пространства — открыто и замкнуто.

22.2. (!) Пусть G — граф (см, например, [10]) с множеством вершин V, в котором любые две вершины связанны между собой цепью из рёбер. Для произвольной пары вершин $u, v \in V$ определим $d(u, v)$ как количество рёбер в кратчайшей цепи, соединяющей вершины u и v. Докажите, что (V, d) является метрическим пространством.

22.3. Пусть (V, d) — метрическое пространство графа G, определённое в задаче 22.2. Докажите, что если $B(v, r) = B(u, r)$ для некоторого расстояния $r > 0$ и $v, u \in V$, то $B(v, r') = B(u, r')$ для всех $r' \geq r$.

22.4. Приведите пример дискретного метрического пространства, в котором найдутся такие точки u, v и $r > 0$, что $B(v,r) = B(u,r)$ и $B(v,r+1) \neq B(u,r+1)$.

22.5. Приведите пример дискретного метрического пространства, в котором найдутся такие точки u, v и $r > 0$, что $B(v,r+1) \subset B(u,r)$.

22.6. Пусть (V,d) — метрическое пространство некоторого графа G, определённое в задаче 22.2. Пусть τ_k — число различных шаров радиуса $k \in \mathbb{N}$ в пространстве (V,d). Докажите, что последовательность τ_k убывает (нестрого).

22.7. Пусть (V,d) и (W,d_1) — метрические пространства, соответствующие графам G и F. Докажите, что если отображение $h : V \to W$ сохраняет расстояние 1, $(d(x,y) = 1 \Leftrightarrow d_1(h(x),h(y)) = 1)$, то h — изометрия.

22.8. (!) Пусть A^n — множество слов длины n в алфавите $A = \{a_1,\dots,a_k\}$. *Расстояние Хэмминга* $h(u,v)$ между словами $u,v \in A^n$ определяется как количество позиций, в которых слова u и v имеют различные буквы. Докажите, что функция $h(u,v)$ удовлетворяет всем условиям метрики.

22.9. Докажите, что можно определить граф, вершинами которого будут слова из A^n, а расстояние Хэмминга будет совпадать с расстоянием в этом графе.

22.10. Рассмотрим множество D, элементами которого являются всевозможные последовательности из 0 и 1. Пусть $(x_1,\dots,x_n,\dots),(y_1,\dots,y_n,\dots) \in D$, определим функцию

$$d((x_1,\dots,x_n,\dots),(y_1,\dots,y_n,\dots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n+y_n) \bmod 2}{2^n}.$$

Докажите, что d — метрика на D.

22.11. Зафиксируем простое число $p \in \mathbb{N}$. Определим функцию $\varrho_p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ равенством $\varrho_p(a,b) = \frac{1}{p^k}$, если $a - b = p^k \frac{n}{m}$, где $m,n,k \in \mathbb{Z}$ и числа m и n не делятся на p. Положим $\varrho_p(a,a) = 0$. Докажите, что $(\mathbb{Q},\varrho_p)$ — метрическое пространство.

22.12. Докажите, что $\varrho(a,b) \le \max\{\varrho(a,c),\varrho(c,b)\}$ для любых $a,b,c \in \mathbb{Q}$, где метрика ϱ определена в задаче 22.11). Метрики, удовлетворяющие этому условию, называются *неархимедовыми* (см. § 25).

22.13. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство с неархимедовой метрикой. Докажите, что $\varrho(a,b) = \max\{\varrho(a,c), \varrho(c,b)\}$ для любых $a, b, c \in X$.

22.14. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство с неархимедовой метрикой. Докажите, что для любых $a \in X$, $r > 0$ если $b \in B(a,r)$, то $B(a,r) = B(b,r)$.

22.15. Докажите, что метрическое пространство $(\mathbb{Q}, \varrho_2)$ (см. задачу 22.11) не содержит равносторонних треугольников, т. е. не существует таких трёх точек $a, b, c \in \mathbb{Q}$, что

$\varrho_2(a,b) = \varrho_2(c,a) = \varrho_2(b,c) \neq 0.$

22.16. Пусть d_1, d_2 — метрики на множестве X. Докажите, что функция $d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ также является метрикой множестве X. Будет ли метрикой функция

$d(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$?

22.17. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Докажите, что $(X, f \circ d)$ является метрическим пространством.

22.18. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Являются ли метрическими пространствами

а) $(X, \ln(d+1))$;   б) (X, d^2)?

22.19. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — строго возрастающая выпуклая вверх функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Докажите, что $(X, f \circ d)$ является метрическим пространством.

22.20. Является ли метриками на $\mathbb{R}$ функции:

а) $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;   б) $d(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$?

22.21. (!) Определим функцию $\overline{d} : \overline{R} \times \overline{R} \to R$ равенством $\overline{d}(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$, $(\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2})$. Докажите, что $(\overline{R}, \overline{d})$ является метрическим пространством. При этом понятия предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ в классическом смысле и в смысле пространства $(\overline{R}, \overline{d})$ совпадают.

22.22. Пусть $d(x,y) = |x-y|^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Докажите, что $(\mathbb{R}, d)$ является метрическим пространством.

22.23. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Докажите, что $(X,\frac{d}{1+d})$ — также метрическое пространство с метрикой, топологически эквивалентной исходной.

22.24. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ строго возрастает. Докажите, что $\varrho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ — расстояние на $\mathbb{R}$.

22.25. (!) Докажите, что все ограниченные функции на отрезке $[a,b]$ с метрикой $d_C(f,g)=\sup\limits_{s\in[a,b]}|f(s)-g(s)|$ образуют метрическое пространство.

22.26. Рассмотрим множество из таких числовых последовательностей (x_n), что ряд $\sum\limits_{n\geq 1}|x_n|$ сходится. Докажите, что функция $d((x_n),(y_n))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|$ является метрикой на этом множестве.

22.27. (!) Пусть S^0 — множество, состоящее из всевозможных конечных объединений интервалов из отрезка $[0,1]$, и μ — мера Лебега. Докажите, что функция $d(A,B)=\mu(A\triangle B)$ является расстоянием на множестве S^0.

22.28. Пусть (X,d) — метрическое пространство и $A,B\subseteq X$. Пусть Докажите, что

а) если $A\subseteq B$, то $\mathrm{diam}A\leq\mathrm{diam}B$;

б) если $\mathrm{diam}A=0$, то $A=\varnothing$ или A — одноточечное множество;

в) $\mathrm{diam}A=\mathrm{diam}\overline{A}$.

22.29. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $a\in X$ и $A,B\subseteq X$. Пусть $\widetilde{d}(a,B)=\inf\limits_{b\in B}d(a,b)$ — *расстояние между точкой и множеством*, $\widetilde{d}(A,B)=\inf\limits_{a\in A,b\in B}d(a,b)$ — *дистанция между множествами.* Докажите следующие свойства:

а) если $A=\varnothing$, то $\widetilde{d}(b,A)=\infty$ для любой точки $b\in X$;

б) если $A=\varnothing$, то $\widetilde{d}(B,A)=\infty$ для любого множества $B\subseteq X$;

в) если $\widetilde{d}(b,A)=0$ и A замкнуто, то $b\in A$;

г) $\widetilde{d}(b,A)=\widetilde{d}(\{b\},A)$;

д) $d(a,b)=\widetilde{d}(\{a\},\{b\})$;

е) $\widetilde{d}(a, A\cup B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{d}(a, A) = 0$ или $\widetilde{d}(a, B) = 0$;

ж) $\widetilde{d}(A\cup B, C) = \min\{\widetilde{d}(A, C), \widetilde{d}(B, C)\}$;

з) $\widetilde{d}(A, B) = \widetilde{d}(\overline{A}, B) = \widetilde{d}(\overline{A}, \overline{B})$;

и) $|\widetilde{d}(a, A) - \widetilde{d}(b, A)| \le d(a, b)$;

к) $\widetilde{d}(A, B) \le \widetilde{d}(a, A) + \widetilde{d}(a, B)$;

л) $\widetilde{d}(A, C) \le \widetilde{d}(A, B) + \widetilde{d}(C, B) + \mathrm{diam}B$;

м) $\mathrm{diam}(A\cup B) \le \mathrm{diam}A + \mathrm{diam}B + \widetilde{d}(A, B)$.

22.30. (!) Пусть (X, d) — метрическое пространство. ε-Окрестностью множества A называется множество $N_\varepsilon(A) = \bigcup\limits_{x\in A} B(x, \varepsilon)$. Для произвольных подмножеств $A, B \subseteq X$ *расстоянием по Хаусдорфу* называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subseteq N_r(B), \quad B \subseteq N_r(A)\}.$$

Докажите, что множество всех компактных подмножеств X с расстоянием Хаусдорфа является метрическим пространством.

22.31. (!) Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A, B \subseteq X$. Докажите, что $d_H(A, B) = \max\{\sup\limits_{a\in A}\widetilde{d}(a, B), \sup\limits_{b\in B}\widetilde{d}(b, A)\}$.

22.32. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство. Докажите, что $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \varrho(x_1, y_1) + \varrho(x_2, y_2)$ — расстояние в X^2.

22.33. (!) Пусть (X_1, ϱ_1) и (X_2, ϱ_2) — метрические пространства. Определим функцию $\varrho : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ равенством $\varrho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\varrho_1^2(x_1, y_1) + \varrho_2^2(x_2, y_2)}$. Докажите, что $(X_1 \times X_2, \varrho)$ является метрическим пространством.

22.34. (§ 23) Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство и $\|\cdot\|$ некоторая норма в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \|(\varrho(x_1, y_1), \ldots, \varrho(x_n, y_n))\|$ является расстоянием в X^n.

22.35. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство и $\varrho(a, b) \le 1$ для всех $a, b \in X$. Докажите, что функция $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \varrho(x_1, y_1) + \varrho(x_2, y_2) - \varrho(x_1, y_1)\varrho(x_2, y_2)$ является расстоянием в X^2.

22.36. Докажите, что функции $d(x,y) = \arccos(x,y)$ (здесь (x,y) — скалярное произведение, см. § 23) и $d(x,y) = 2\arcsin\frac{\|x-y\|_2}{2}$ являются метриками на единичной сфере S^{n-1} в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

22.37. (§ 23) Пусть π — стереографическая проекция $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$ на сферу $S^n(a, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x-a\|_2 = \frac{1}{2}\}$, $a = (0, \ldots, 0, \frac{1}{2})$. Докажите, что функция $d(x,y) = \|\pi(x) - \pi(y)\|_2$, где $d(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+\|x\|_2^2}}$; $d(x,y) = \frac{\|x-y\|_2}{\sqrt{1+\|x\|_2^2}\sqrt{1+\|y\|_2^2}}$, $x, y \neq \infty$, является метрикой на $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$.

22.38. Докажите, что длина кратчайшей дуги между двумя точками окружности является метрикой на окружности.

22.39. Рассмотрим множество прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через точку $\overline{0}$. Докажите, что угол между прямыми (меньший либо равный π) является расстоянием между прямыми (эта метрика определяет топологию проективной плоскости).

22.40. Рассмотрим множество $\mathbb{R} \times [0,b)$, $b > 0$. Докажите, что функция $\varrho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{|x_1-x_2|^2 + (\min\{|y_1-y_2|, b-|y_1-y_2|\})^2}$ является метрикой на $\mathbb{R} \times [0,b)$. Докажите, что метрическое пространство $(\mathbb{R} \times [0,b), \varrho)$ гомеоморфно цилиндру, точнее, представляет собой развёртку поверхности цилиндра (с евклидовой метрикой), у которой края полосы, т. е. точки вида $(x,0)$ и (x,b), отождествляются при всех $x \in \mathbb{R}$.

22.41. Рассмотрим множество $[0,a) \times [0,b)$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что функция $\varrho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) =$
$= \sqrt{(\min\{|x_1-x_2|, a-|x_1-x_2|\})^2 + (\min\{|y_1-y_2|, b-|y_1-y_2|\})^2}$
является метрикой на $[0,a) \times [0,b)$. Докажите, что метрическое пространство $([0,a) \times [0,b), \varrho)$ гомеоморфно тору (вложенному в $\mathbb{R}^3$), при этом противоположные края прямоугольника $[0,a] \times [0,b]$, т. е. точки вида $(x,0)$ и (x,b), а также точки вида $(0,y)$ и (a,y), отождествляются при всех $x \in [0,a), y \in [0,b)$, кроме того, отождествляются четыре точки $(0,0), (a,0), (0,b), (a,b)$.

22.2. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах

22.42. (!) Пусть (X, d) — некоторое метрическое пространство. Докажите, что множества X и $\varnothing$ являются открытыми.

22.43. (!) Докажите, что объединение любого семейства открытых множеств в метрическом пространстве является открытым множеством.

22.44. (!) Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств в метрическом пространстве является открытым множеством.

22.45. Приведите пример бесконечного семейства вложенных друг в друга интервалов в $\mathbb{R}$, пересечение которых не является открытым множеством.

22.46. (!) Докажите, что объединение произвольного семейства окрестностей точки x_0 является окрестностью точки x_0.

22.47. (!) Докажите, что пересечение конечного семейства окрестностей точки x_0 есть окрестность точки x_0. Останется ли данное утверждение справедливым, если рассмотреть пересечение бесконечного семейства окрестностей?

22.48. Пусть (M, d) — подпространство метрического пространства (X, d). Докажите, что множество $U \subseteq M$ открыто в (M, d) тогда и только тогда, когда найдётся открытое в (X, d) множество V такое, что $U = V \cap M$.

22.49. Пусть (M, d) — подпространство метрического пространства (X, d). Докажите, что множество $U \subseteq M$ замкнуто в (M, d) тогда и только тогда, когда найдётся замкнутое в (X, d) множество V такое, что $U = V \cap M$.

22.50. Пусть (M, d) — подпространство метрического пространства (X, d) и $A \subseteq M$. Докажите, что замыкание множества A в (M, d) равно $\overline{A} \cap M$. Верно ли аналогичное утверждение для внутренности множества A в (M, d)?

22.51. (!) Докажите, что точка $a \in X$ является пределом последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда $d(a, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

22.52. (!) Докажите, что $a \in \operatorname{Lim}(A)$ тогда и только тогда, когда найдётся такая последовательность (x_n), $x_n \in A \setminus \{a\}$, что $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

22.53. Докажите, что $a \in \operatorname{Lim}(A)$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(a)$ множество $U \cap A$ содержит бесконечное число точек.

22.54. Докажите, что если пересечение множества A с любым замкнутым шаром является замкнутым множеством, то множество A является замкнутым.

22.55. Пусть A — замкнутое множество в (X, d), $x \in X$. Докажите, что если $\widetilde{d}(x, A) = 0$, то $x \in A$ (см. 22.29).

22.56. (!) Докажите, что множество $A \subseteq X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой последовательности (x_n), $x_n \in A$ и любой точки $x_0 \in X$ из $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ следует, что $x_0 \in A$.

22.57. Пусть $A \subseteq X$ — конечное множество в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что множество $X \setminus A$ открыто.

22.58. (!) Докажите, что множество A открыто тогда и только тогда, когда множество $X \setminus A$ замкнуто.

22.59. (!) Докажите, что пересечение произвольного семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством.

22.60. (!) Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

22.61. Приведите пример бесконечного семейства вложенных друг в друга отрезков в $\mathbb{R}$, объединение элементов которого не является замкнутым множеством.

22.62. Докажите, что если множество A открыто, а B замкнуто, то

а) $B \setminus A$ замкнуто; б) $A \setminus B$ открыто.

22.63. Докажите, что предельная точка множества $\operatorname{Lim}(A)$ является предельной точкой множества $A \subseteq X$.

22.64. (!) Докажите, что множество предельных точек замкнуто.

22.65. (!) Докажите, что замыкание произвольного множества замкнуто.

22.66. Докажите, что $\overline{A} = A$ тогда и только тогда, когда A — замкнутое множество.

22.67. Докажите, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

22.68. Приведите пример множеств A и B, для которых $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

22.69. Докажите, что $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, если $A \subseteq B$.

22.70. Докажите, что если $A \subseteq B$ и B замкнуто, то $\overline{A} \subseteq B$.

22.71. Докажите, что $\overline{A}$ — наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее A.

22.72. Докажите, что $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ для любого множества A.

22.73. (!) Докажите, что множество $\overset{\circ}{A}$ открыто для любого множества A.

22.74. Докажите, что $A = \overset{\circ}{A}$ тогда и только тогда, когда A — открытое множество.

22.75. (!) Пусть X — метрическое пространство. Докажите, что для любого множества $A \subseteq X$ верно $\overset{\circ}{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$.

22.76. Докажите, что если $A \subseteq B$ и A открыто, то $A \subseteq \overset{\circ}{B}$.

22.77. Докажите, что $\overset{\circ}{A}$ — наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A.

22.78. Докажите, что $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$, если $A \subseteq B$.

22.79. Докажите, что $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

22.80. Приведите пример множеств A и B, для которых $\operatorname{int}(A \cup B) \neq \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

22.81. Докажите, что $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$ для любого множества A.

22.82. Докажите, что

а) если множество A замкнуто, то $\overline{(\overset{\circ}{A})} \subseteq A$;

б) если множество A открыто, то $A \subseteq (\overset{\circ}{\overline{A}})$.

Приведите примеры открытого и замкнутого множеств в $[0, 1]$, для которых эти включения строгие.

22.83. Какое максимальное количество различных множеств можно получить из некоторого множества A, многократно применяя к нему операции взятия внутренности и замыкания?

22.84. Какое максимальное количество различных множеств можно получить из некоторого множества A, многократно применяя к исходному множеству и множествам, полученным из него, операции взятия внутренности, замыкания и дополнения (задача Куратовского)?

22.85. (!) Докажите равенство $\mathrm{Fr}(E) = \overline{E} \cap (\overline{X \setminus E})$ для любого множества $E \subseteq X$.

22.86. (!) Докажите, что $\mathrm{Fr}(E)$ — замкнутое множество для любого множества $E \subseteq X$.

22.87. Докажите, что если множество A открыто, то $A \cap \mathrm{Fr} A = \varnothing$.

22.88. Докажите, что если множество A замкнуто, то $\mathrm{Fr} A \subseteq A$.

22.89. Докажите, что $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(E)) \subseteq \mathrm{Fr}(E)$ для любого множества E.

22.90. Пусть множество E замкнуто. Докажите, что $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(E)) = \mathrm{Fr}(E)$.

22.91. Докажите, что $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$. Приведите пример множества A, для которого включение строгое.

22.92. Докажите, что $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$. Приведите пример множества A, для которого включение строгое.

22.93. Докажите, что $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$. Приведите пример множеств A и B, для которых включение строгое.

22.94. Докажите, что $\mathrm{Fr}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) \subseteq \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(A_i)}$.

22.95. Приведите пример последовательности множеств (A_i), для которых $\mathrm{Fr}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \not\subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fr}(A_i)$.

22.96. Докажите, что если $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, то $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

22.97. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство и $A, Y \subseteq X$. Докажите, что $\mathrm{Fr}_Y(A \cap Y) \subseteq \mathrm{Fr}_X A \cap Y$, где $\mathrm{Fr}_Y B$ обозначает границу множества $B \subseteq Y$ в метрическом пространстве (Y, ϱ). При этом если $A \subseteq Y$, то $\mathrm{Fr}_Y(A \cap Y) = \mathrm{Fr}_X A \cap Y$.

22.98. Пусть $A = \{(\sin n, \cos n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$. Найдите $\overline{A}$.

22.99. Докажите, что $\mathrm{Lim}(\mathrm{Lim}(A)) \subseteq \mathrm{Lim}(A)$ для любого множества A.

22.100. Докажите, что $\mathrm{Lim}(A) \cup \mathrm{Lim}(B) = \mathrm{Lim}(A \cup B)$ для произвольных множеств A и B.

22.101. Докажите, что $\mathrm{Lim}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Lim}(A) \cup \mathrm{Lim}(B)$ для произвольных множеств A и B. Приведите пример, показывающий, что включение может быть строгим.

22.102. Докажите, что $\mathrm{Lim}(A) \setminus A \subseteq \mathrm{Fr}(A)$ для любого множества A.

22.103. Докажите, что $\mathrm{Lim}(A) = \mathrm{Lim}(\overline{A})$ для любого множества A.

22.104. Докажите, что множества A и $\overline{A}$ имеют одни и те же изолированные точки.

22.105. Докажите, что произвольный открытый шар — открытое множество.

22.106. Докажите, что множество $\{B(x,r) \mid x \in X, r > 0\}$, состоящее из всех открытых шаров, является базой топологии метрического пространства (X, d).

22.107. Пусть метрики d_1 и d_2, определённые на X, *липшицево эквивалентны*, т. е. существует константа $c > 0$ такая, что $c^{-1}d_1(x,y) \leq \leq d_2(x,y) \leq cd_1(x,y)$ для всех $x, y \in X$. Докажите, что метрики d_1 и d_2 топологически эквивалентны.

22.108. Приведите пример двух метрик на одном и том же множестве, определяющих одну и ту же топологию, но не являющихся липшицево-эквивалентными на нём.

22.109. Приведите пример такого метрического пространства, что в нём найдётся открытый шар, который является замкнутым множеством, но не совпадает ни с каким замкнутым шаром.

22.110. Приведите пример такого метрического пространства, что в нём найдётся замкнутый шар, который является открытым множеством, но не совпадает ни с каким открытым шаром.

22.111. Пусть A — открытое множество, B — произвольное множество. Докажите, что $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Верно ли, что для произвольных множеств A, B выполняется $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$?

22.112. Пусть A, B — подмножества множества D и $A \cap B = \varnothing$. Пусть на множества A задана метрика ϱ_A, а на множестве B задана метрика ϱ_B. Определите на множестве $A \cup B$ такую метрику ϱ, чтобы её сужение на A^2 совпадало с метрикой ϱ_A, а сужение на B^2 — с метрикой ϱ_B.

22.113. Пусть A, B — подмножества множества D и $A \cap B \neq \varnothing$. Пусть на множестве A задана метрика ϱ_A, а на множестве B задана метрика ϱ_B, причём множество $A \cap B$ замкнуто в пространстве (A, ϱ_A) и метрики ϱ_A и ϱ_B совпадают на $A \cap B$. Докажите, что на множестве $A \cup B$ существует такая метрика ϱ, что её сужение на A^2 совпадает с метрикой ϱ_A, а сужение на B^2 — с метрикой ϱ_B. Приведите примеры, в которых метрика ϱ определяется единственным образом, а также примеры, в которых ϱ определяется не единственным образом.

22.114. Приведите пример двух метрик ϱ_A и ϱ_B на бесконечных множествах A и B ($A \cap B \neq \varnothing$) соответственно таких, что ϱ_A и ϱ_B совпадают на множестве $A \cap B$, но не существует метрики ϱ на множестве $A \cup B$, совпадающей с метрикой ϱ_A на множестве A и с метрикой ϱ_B на множестве B.

22.115. Приведите пример трёх метрик ϱ_A, ϱ_B и ϱ_C, заданных на конечных подмножествах A, B и C в множестве D, таких, что множества $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ замкнуты в содержащих их метрических пространствах (A, ϱ_A), (C, ϱ_C), (B, ϱ_B), метрики ϱ_A, ϱ_B и ϱ_C совпадают на пересечениях соответствующих пространств, но не существует метрики ϱ на множестве $A \cup B \cup C$, совпадающей с метрикой ϱ_A на множестве A, с метрикой ϱ_B на множестве B и с метрикой ϱ_C на множестве C.

22.116. Пусть Z — подмножество метрического пространства X. Докажите эквивалентность двух условий:

а) $\overline{Z}$ не имеет внутренних точек;

б) для любого непустого открытого множества $U \subset X$ найдётся непустое открытое подмножество $V \subset U$, что $V \cap Z = \varnothing$.

Множество, удовлетворяющее этим условиям, называется *нигде не плотным.*

22.117. Докажите, что если множество нигде не плотно, то его дополнение всюду плотно.

22.118. Приведите пример всюду плотного множества, дополнение которого также всюду плотно.

22.119. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная строго возрастающая функция и $A \subset [a, b]$ нигде не плотно. Докажите, что $f(A)$ — нигде не плотное множество.

22.120. Пусть множество A всюду плотно в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что $\overline{U} = \overline{A \cap U}$ для любого открытого множества U.

22.121. Докажите, что множество постоянных функций нигде не плотно в $C[0, 1]$.

22.122. Докажите, что пересечение счётного числа открытых всюду плотных множеств на $[a, b]$ является всюду плотным.

22.123. Докажите, что объединение счётной совокупности нигде не плотных подмножеств $\mathbb{R}$ не может быть равно $\mathbb{R}$.

22.124. Говорят, что множество, представимое как пересечение счётного семейства открытых множеств, имеет *тип* G_δ. Докажите, что любое замкнутое множество имеет тип G_δ.

22.125. Докажите, что множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ имеет тип G_δ.

22.126. Докажите, что любое подмножество метрического пространства является пересечением семейства открытых множеств.

22.127. Говорят, что множество, представимое как объединение счётного семейства замкнутых множеств, имеет *тип* F_σ. Докажите, что любое открытое множество имеет тип F_σ.

22.128. Докажите, что множество рациональных чисел на прямой не является множеством типа G_δ.

22.129. Докажите, что множество иррациональных чисел на прямой не является множеством типа F_σ.

22.130. Пусть множество A_1 открыто в метрическом пространстве (X_1, d_1) и множество A_2 открыто в метрическом пространстве (X_2, d_2). Докажите, что множество $A_1 \times A_2$ открыто в метрическом пространстве $X_1 \times X_2$.

22.131. Пусть множество A_1 замкнуто в метрическом пространстве (X_1, d_1) и множество A_2 замкнуто в метрическом пространстве (X_2, d_2). Докажите, что множество $A_1 \times A_2$ замкнуто в метрическом пространстве $X_1 \times X_2$ (см. задачу 22.33).

22.132. Пусть подмножество $A \subseteq X_1 \times X_2$ декартова произведения метрических пространств (X_1, d_1) и (X_2, d_2) открыто. Докажите, что его *проекция* $\mathrm{Pr}_1(A) = \{x \in X_1 \mid (x, y) \in A\}$ является открытым множеством.

22.133. Приведите пример замкнутого множества A в $\mathbb{R}^2$, проекция которого $\mathrm{Pr}_1(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ является интервалом.

22.3. Предел и непрерывность функций в метрических пространствах

22.134. (!) Пусть (x_n) — произвольная последовательность в (X, d). Точка $b \in X$ называется *частичным пределом*, последовательности (x_n), если найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} d(b, x_{n_k}) = 0$. Докажите, что множество частичных пределов последовательности (x_n) включает множество $\mathrm{Lim}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Приведите пример последовательности, для которой эти множества не равны.

22.135. Пусть (x_n) — произвольная последовательность в (X, d). Пусть $a \in \mathrm{Lim}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \setminus \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что точка a является частичным пределом последовательности (x_n).

22.136. (!) Пусть (X, ϱ_1), (Y, ϱ_2) — метрические пространства, $f : X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{Lim}(X)$ и $b \in Y$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \quad 0 < \varrho_1(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \varrho_2(f(x), b) < \varepsilon.$$

22.137. (!) Докажите, что если предел функции $f : X \to Y$ в точке $x \in \mathrm{Lim}(X)$ существует, то он единственный.

22.138. (!) Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство. Докажите, что для функций f, g, действующих из X в $\mathbb{R}$, справедливы следующие формулы, если существуют пределы (в $\mathbb{R}$) в левых частях равенств:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} 1/f(x) = 1/\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, (полагаем, что $f(x)\neq 0$).

22.139. (!) Пусть (X,ϱ) — метрическое пространство, $x_0\in \mathrm{Lim}(X)$, функции f и g действуют из X в $\mathbb{R}$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, если эти пределы существуют и $f(x)\le g(x)$ для всех $x\in X$.

22.140. (!) Пусть (X,ϱ) — метрическое пространство, $x_0\in \mathrm{Lim}(X)$, $a\in\mathbb{R}$, функции f, g и h действуют из X в $\mathbb{R}$. Пусть $f(x)\le g(x)\le h(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$. Докажите, что существует предел функции g, причём $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ (**лемма о зажатой функции**).

22.141. (!) Пусть (X,ϱ_1), (Y,ϱ_2) — метрические пространства. Докажите, что для любой функции $f: X\to Y$ следующие условия эквивалентны:

а) функция f непрерывна на X;

б) для любого открытого множества $U\subseteq Y$ множество $f^{-1}(U)$ открыто;

в) для любого замкнутого множества $U\subseteq Y$ множество $f^{-1}(U)$ замкнуто.

22.142. Докажите, что если функция $f: X\to\mathbb{R}$ непрерывна в $x_0\in X$ и $f(x_0)\neq 0$, то функция $1/f$ непрерывна в x_0.

22.143. Пусть (X,ϱ) — метрическое пространство. Докажите, что характеристическая функция множества $A\subseteq X$ непрерывна тогда и только тогда, когда множество A открыто.

22.144. Докажите, что прообраз точки при непрерывном отображении замкнут.

22.145. Пусть $A_1, A_2\subseteq X$ — открытые множества, $f: A_1\cup A_2\to Y$ и сужения функции f на A_1 и на A_2 непрерывны. Докажите, что функция f непрерывна на $A_1\cup A_2$.

22.146. Пусть $A_1, A_2\subseteq X$ — замкнутые множества, $f: A_1\cup A_2\to Y$ и сужения функции f на A_1 и на A_2 непрерывны. Докажите, что функция f непрерывна на $A_1\cup A_2$.

22.147. Приведите пример функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и таких множеств $A_1, A_2 \subseteq [0,1]$, $A_1 \cup A_2 = [0,1]$, что сужения f на A_1 и на A_2 непрерывны, но функция f разрывна во всех точках отрезка $[0,1]$.

22.148. Пусть $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ тождественное отображение. Докажите, что функция id является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда метрики d_1 и d_2 топологически эквивалентны.

22.149. (!) Докажите, что сумма и произведение двух непрерывных функций, действующих из некоторого метрического пространства в $\mathbb{R}$, непрерывны.

22.150. Пусть $f_1 : X \to Y_1$ и $f_2 : X \to Y_2$. Докажите, что отображение $F : X \to Y_1 \times Y_2$, заданное равенством $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, непрерывно тогда и только тогда, когда функции f_1 и f_2 непрерывны.

22.151. Докажите, что если функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, то для любого $a \neq f(x_0)$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) \neq a$ при любом $x \in B(x_0, \varepsilon)$.

22.152. (!) Докажите, что композиция непрерывных функций непрерывна.

22.153. Пусть $F : Y_1 \times \cdots \times Y_n \to Z$ и $f_i : X_i \to Y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные функции. Докажите, что *суперпозиция* $G(x_1, \ldots, x_n) = F(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ является непрерывной функцией, действующей из $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ в Z (см. задачу 22.33).

22.154. (!) Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Докажите, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

22.155. Пусть $f : X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{Lim}(X)$ и для любой последовательности (x_n), $x_n \in X$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, последовательность $(f(x_n))$ имеет конечный предел. Докажите, что пределы $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ равны для всех таких последовательностей (x_n).

22.156. (!) Пусть $f : X \to Y$, $x_0 \in \mathrm{Lim}(X)$. Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \neq x_0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ (**критерий Гейне**).

22.157. Пусть X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывная функция, $C \subseteq X$. Докажите, что $f(\overline{C}) \subseteq \overline{f(C)}$.

22.158. Пусть X, Y — метрические пространства, $f : X \to Y$ — непрерывная функция, $\overline{C} = X$. Докажите, что $\overline{f(C)} = \overline{f(X)}$.

22.159. Докажите, что для любых $\varepsilon > 0$ и замкнутого множества $A \subseteq X$ найдётся такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что $f(x) = 1$ для любых $x \in A$ и $f(x) = 0$, если $\widetilde{d}(x, A) > \varepsilon$ (см. задачу 22.29).

22.160. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Докажите, что для любого $y \in X$ функция $f(x) = d(x, y)$ непрерывна.

22.161. Пусть A — некоторое подмножество метрического пространства (X, d). Докажите, что функция $f(x) = \widetilde{d}(x, A)$ непрерывна (см. задачу 22.29).

22.162. Пусть $f \in C[a, b]$ и $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq f(x) \leq n + 1\}$. Докажите, что множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{2n}$ замкнуто.

22.163. Пусть A, B — непустые замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что функция

$$f(x) = \frac{\widetilde{d}(x, A)}{\widetilde{d}(x, A) + \widetilde{d}(x, B)}$$

непрерывна на X.

22.164. (!) Докажите, что для любых непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subseteq X$ найдётся такая непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, что $f(x) = 1$ для любых $x \in A$ и $f(x) = 0$ для любых $x \in B$ (**лемма Урысона**).

22.165. Докажите, что для любых непересекающихся замкнутых множеств $A, B \subseteq X$, $\widetilde{d}(A, B) > 0$, найдётся такая липшицева функция $f : X \to [0, 1]$, что $f(x) = 1$ для любых $x \in A$ и $f(x) = 0$ для любых $x \in B$.

22.166. Пусть A — замкнутое множество в (X, d) и $f : A \to [-1, 1]$ — непрерывная функция. Докажите, что существует такая непрерывная функция $g : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, что $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$ для любой точки $x \in A$.

22.167. (!) Пусть M — замкнутое множество в метрическом пространстве (X, d) и $f : M \to [a, b]$ — непрерывная функция. Докажите, что найдётся непрерывная функция $F : X \to [a, b]$, сужением которой является функция f, т. е. $F|_M = f$ (**теорема Титце — Урысона**).

22.168. Пусть M — замкнутое множество в метрическом пространстве (X, d) и $f : M \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция. Докажите, что найдётся равномерно непрерывная функция $F : X \to \mathbb{R}$, сужением которой является функция f, т. е. $F|_M = f$.

22.169. Докажите, что множество M замкнуто в метрическом пространстве (X, d) тогда и только тогда, когда найдётся такая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, что $M = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

22.170. Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что найдутся непересекающиеся открытые множества U и V, такие что $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ (свойство нормальности).

22.171. Пусть $A \subseteq B$, A замкнуто, B открыто в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что найдётся такое открытое множество C, что выполнены соотношения $A \subseteq C \subseteq \overline{C} \subseteq B$.

22.172. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^n$ — его конечное открытое покрытие. Докажите, что существует открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^n$ пространства X, удовлетворяющее условию $\overline{V_i} \subset U_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

22.173. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ шар $B(0, 1)$ и куб $(-1, 1)^n$ гомеоморфны.

22.174. Докажите, что двумерная сфера с выколотой точкой $S' = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \setminus \{(1, 0, 0)\}$ гомеоморфна $\mathbb{R}^2$.

22.175. Пусть (X, ϱ_1), (Y, ϱ_2) — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрическим* вложением, если $\varrho_2(f(x_1), f(x_2)) = \varrho_1(x_1, x_2)$. Докажите, что любое изометрическое вложение непрерывно.

22.176. Докажите, что любая изометрия (сюръективное изометрическое вложение $f : X \to Y$) является гомеоморфизмом.

22.177. Докажите, что произвольная изометрия в $\mathbb{R}^n$ на себя является композицией ортогонального отображения и отображения переноса (см., например, [30]).

22.178. Докажите, что любая изометрия двух подмножеств в $\mathbb{R}^n$ продолжается до изометрии $\mathbb{R}^n$.

22.179. Докажите, что любая изометрия *булева куба* $(\{0,1\}^n, h)$, где h — расстояние Хэмминга (см. задачу 22.8) является композицией перестановки координат и булева сложения (см., например, [10]) с некоторым набором $v \in \{0,1\}^n$.

22.180. Докажите, что не каждая изометрия подмножества булева куба продолжается до изометрии всего куба.

22.181. Пусть (X, ϱ_1), (Y, ϱ_2) — метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ (\varrho_1(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \varrho_2(f(x_1), (x_2)) < \varepsilon).$$

Докажите, что равномерно непрерывная функция непрерывна.

22.182. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — метрические пространства и $f : X \to Y$. Определим *модуль непрерывности* функции f равенством $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{d_1(x_1,x_2)<\delta} d_2(f(x_1), f(x_2))$. Докажите, что функция f равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда $\omega_f(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

22.183. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — метрические пространства. Докажите, что функция $f : X \to Y$, удовлетворяющая условию Липшица $d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq Cd_1(x_1, x_2)$ с некоторой константой $C > 0$, является равномерно непрерывной.

22.184. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Докажите, что

а) для любого $y \in X$ функция $f(x) = d(x, y)$ равномерно непрерывна;

б) для любого $\varnothing \neq A \subseteq X$ функция $f(x) = \widetilde{d}(x, A)$ равномерно непрерывна.

22.185. Пусть (X, ϱ) — метрическое пространство. Докажите, что метрика $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ является равномерно непрерывной функцией.

22.186. Пусть M — замкнутое множество в метрическом пространстве (X, d) и $f : M \to [a, b]$ — равномерно непрерывная функция. Докажите, что найдётся равномерно непрерывная функция $F : X \to [a, b]$, сужением которой является функция f, т. е. $F|_M = f$.

22.187. Множество квадратных матриц размера $n \times n$ рассмотрим как подмножество метрического пространства $\mathbb{R}^{n^2}$. Докажите, что множество всех вещественных невырожденных матриц размера $n \times n$ открыто, а множество вырожденных — замкнуто.

22.188. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$. Докажите, что множество
$\{f \in C[a,b] \mid A < f(x) < B$ для всех $x \in [a,b]\}$ открыто в $C[a,b]$ (с метрикой d_C, см. задачу 22.25).

22.189. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$. Докажите, что множество
$\{f \in C[a,b] \mid A \le f(x) \le B$ для всех $x \in [a,b]\}$ замкнуто в $C[a,b]$.

22.190. Пусть $g \in C[a,b]$. Докажите, что множество
$\{f \in C[a,b] \mid f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]\}$ замкнуто в $C[a,b]$.

22.191. Пусть $S \subseteq X$ — некоторое множество. Докажите, что функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая равенством $f(x) = \tilde{d}(x, S)$, см. задачу 22.29, является 1-липшицевой.

22.192. Докажите, что:

а) все липшицевы отображения непрерывны;

б) суперпозиция липшицевых отображений — липшицево отображение;

в) множество всех вещественнозначных липшицевых функций является векторным пространством (см.§ 25).

22.193. Пусть X — метрическое пространство, X' — всюду плотное в нем подмножество, $f : X' \to Y$ — липшицево отображение с константой Липшица Q, причем пространство Y полное. Докажите, что существует единственное непрерывное отображение $\tilde{f} : X \to Y$ такое, что $\tilde{f}|_{X'} = f$; более того, отображение $\tilde{f}$ является Q-липшицевым.

22.194. *Расстоянием по Липшицу* d_l между метрическими пространствами (X, d_X), (Y, d_Y) называется величина

$$d_l = \inf_{f : X \to Y} \ln \max\bigl\{\operatorname{dil}(f), \operatorname{dil}(f^{-1})\bigr\}, \text{где } \operatorname{dil}(f) = \sup_{\substack{a,b \in X \\ a \neq b}} \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)}$$

и инфимум берется по всевозможным билипшицевым гомеоморфизмам $f : X \to Y$. Докажите, что:

а) функция d_l неотрицательна, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника;

б) для компактных метрических пространств $d_l(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда X и Y изометричны.

22.195. Рассмотрим метрические пространства (X, d_X), (Y, d_Y). *Искажением* отображения $f : X \to Y$ называется величина

$$\mathrm{dis} f = \sup_{a,b \in X} \Big| d_Y(f(a), f(b)) - d_X(a, b) \Big|.$$

Будем говорить, что последовательность метрических пространств (X_n, d_{X_n}) *равномерно сходится* к метрическому пространству (X, d_X), если существуют такие гомеоморфизмы $f_n : X_n \to X$, что $\mathrm{dis} f_n \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что:

а) сходимость компактных метрических пространств в смысле метрики Липшица влечет их равномерную сходимость;

б) на классе конечных метрических пространств их сходимость по Липшицу равносильна равномерной сходимости.

22.196. Существует ли последовательность компактных метрических пространств, которая сходится равномерно, но не сходится по Липшицу?

22.197. Пусть метрические пространства (X, d_X), (Y, d_Y) удовлетворяют следующему условию: существует последовательность отображений $f_n : X \to Y$ такая, что $\mathrm{dis} f_n \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что метрические пространства (X, d_X), (Y, d_Y) изометричны.

22.4. Полнота и компактность

22.198. (!) Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что $\mathrm{diam}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

22.199. Пусть (x_n) — такая последовательность в метрическом пространстве (X, d), что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого бесконечного множества индексов $N \subseteq \mathbb{N}$ найдётся такое бесконечное подмножество $M \subseteq N$, что $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ для любых $i, j \in M$. Докажите, что последовательность (x_n) содержит фундаментальную подпоследовательность.

22.200. (!) Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (X, d) и $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Докажите, что (y_n) — фундаментальная последовательность.

22.201. (!) Пусть (x_n), (y_n) — фундаментальные последовательности в метрическом пространстве (X, d). Докажите, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.

22.202. (!) Пусть (X, d) — метрическое пространство. Рассмотрим множество $F(X)$ фундаментальных последовательностей в X. Определим на $F(X)$ отношение: $(x_n) \sim (y_n)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Докажите, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $F(X)$.

22.203. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Докажите, что последовательность (x_n) фундаментальна тогда и только тогда, когда для любого инъективного отображения $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{\pi(n)}) = 0$.

22.204. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, обладающее свойством: $\varphi(k) > k$ при $k \geq k_0$. Докажите, что последовательность (x_n) фундаментальна тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{n_{\varphi(k)}}) = 0$ для любой подпоследовательности (x_{n_k}).

22.205. Пусть $[X], [Y] \subseteq F(X)$ — классы эквивалентности фундаментальных последовательностей в (X, d), причём $(x_n), (x'_n) \in [X]$, $(y_n), (y'_n) \in [Y]$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$.

22.206. (!) Докажите, что функция $D([X], [Y]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$, где $(x_n) \in [X]$, $(y_n) \in [Y]$ является метрикой на множестве $F[X] = F(X)/\sim$ классов эквивалентности фундаментальных последовательностей.

22.207. Докажите, что отображение $\Upsilon : X \to F[X]$, определённое равенством $\Upsilon(x) = [X]$, где $[X]$ класс, содержащий последовательность (x_n), $x_n = x$ для всех $n \in \mathbb{N}$, является изометрическим вложением (X, d) в $(F[X], D)$.

22.208. (!) Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Докажите, что если множество $A \subseteq X$ — замкнуто, то (A, ρ) — полное метрическое пространство.

22.209. Пусть $A \subset X$, (Y,d) — полное метрическое пространство и $f : A \to Y$ — равномерно непрерывное отображение. Докажите, что существует и единственна равномерно непрерывная функция $\overline{f} : \overline{A} \to Y$ такая, что f — сужение $\overline{f}$.

22.210. Докажите, что если в условии предыдущей задачи f является изометрическим вложением множества A в Y, то и $\overline{f}$ — изометрическое вложение множества $\overline{A}$ в Y.

22.211. (!) Полное метрическое пространство (X_1, ρ_1) называется *пополнением* метрического пространства (X, ρ), если $X \subseteq X_1$, $\overline{X} = X_1$ и метрика ρ есть сужение метрики ρ_1 на X^2. Докажите, что для любого метрического пространства (X,d) метрическое пространство $(F[X], D)$ (см. 22.206) является его пополнением.

22.212. Пусть метрические пространства (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) являются пополнениями метрического пространства (X, ρ). Докажите, что существует единственная изометрия пространств (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2), тождественная на X.

22.213. (!) Пусть X — непустое множество. Рассмотрим множество $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid \sup\limits_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$. Докажите, что

а) функция $d(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ является расстоянием на множестве $B(X)$;

б) метрическое пространство $(B(X), d)$ является полным.

22.214. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $x_0 \in X$. Определим функцию $\iota : X \to B(X)$ равенством $[\iota(x_1)](x) = \rho(x_1, x) - \rho(x_0, x)$, Докажите, что:

а) функция ι является изометрическим вложением X в $B(X)$;

б) множество $\iota(X)$ состоит из равномерно непрерывных ограниченных функций;

в) метрическое пространство $(\overline{\iota(X)}, d)$ является пополнением метрического пространства $(\iota(X), d)$.

22.215. (!) Докажите, что декартово произведение полных метрических пространств является полным.

22.216. Пусть (X, ϱ) — полное метрическое пространство и U — открытое множество в X. Для любых $x, y \in U$ положим

$d(x,y) = |(1/\widetilde{d}(x, X \setminus U)) - (1/\widetilde{d}(y, X \setminus U))| + \varrho(x,y),$

где $\widetilde{d}(x,A)$ — расстояние от точки x до множества A (см. задачу 22.29). Докажите, что

а) функция $d(x,y)$ является метрикой на множестве U;

б) метрическое пространство (U,d) является полным;

в) метрика d топологически эквивалентна метрике ϱ на множестве U.

22.217. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство, $\varnothing \neq A_n \subseteq X$ — замкнутые множества, $A_{n+1} \subseteq A_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$. Докажите, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$,

22.218. Приведите пример полного метрического пространства, в котором существует последовательность вложенных друг в друга непустых замкнутых шаров, имеющая пустое пересечение.

22.219. Пусть (X,d) — метрическое пространство, *ε-сетью* называется такое множество $A \subseteq X$, что $\widetilde{d}(x,A) \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$. Докажите, что X вполне ограничено тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X найдётся конечная ε-сеть.

22.220. Пусть (X,d) — метрическое пространство, множество $B \subseteq X$ называется *ε-различимым*, если $d(x,y) > \varepsilon$ для любых $x, y \in B$, $x \neq y$. Докажите, что X вполне ограничено тогда и только тогда, когда все ε-различимые множества в X конечны для любого $\varepsilon > 0$.

22.221. (!) Докажите, что вполне ограниченное метрическое пространство является сепарабельным.

22.222. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Докажите, что X сепарабельно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X найдётся не более чем счётная ε-сеть.

22.223. Будем говорить, что ε-различимое множество в метрическом пространстве (X,d) является максимальным, если оно является ε-сетью. Используя аксиому выбора (см., например, [25]) докажите, что каждое ε-различимое множество является подмножеством максимального ε-различимого множества.

22.224. Пусть (X,d) — метрическое пространство. Докажите, что X сепарабельно тогда и только тогда, когда все ε-различимые множества в X не более чем счётны для любого $\varepsilon > 0$.

22.225. Докажите, что декартово произведение сепарабельных метрических пространств является сепарабельным.

22.226. Докажите, что для любого замкнутого множества F в сепарабельном метрическом пространстве найдётся не более чем счётное подмножество $E \subseteq F$ такое, что $\overline{E} = F$.

22.227. Докажите, что любое подпространство сепарабельного метрического пространства является сепарабельным.

22.228. Докажите, что непустое сепарабельное полное метрическое пространство без изолированных точек имеет мощность континуума.

22.229. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство. Тогда в любом семействе открытых множеств $\{U_\alpha\}$ найдётся такое не более чем счётное подсемейство $\{U_i\}$, что $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = \bigcup\limits_i U_i$.

22.230. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство. Тогда в любом семействе замкнутых множеств $\{M_\alpha\}$ найдётся такое не более чем счётное подсемейство $\{M_i\}$, что $\bigcap\limits_\alpha M_\alpha = \bigcap\limits_i M_i$.

22.231. (!) Докажите, что полное метрическое пространство нельзя представить в виде не более чем счётного объединения нигде не плотных замкнутых множеств (**теорема Бэра**).

22.232. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $f : X \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Докажите, что множество точек разрыва функции f имеет тип F_σ.

22.233. Пусть (X, d) — метрическое пространство без изолированных точек и $S \subseteq X$ — счётное множество, плотное в X. Докажите, что существуют два счётных множества S_1 и S_2, плотных в X, таких, что $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ и $S = S_1 \cup S_2$.

22.234. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — семейство открытых, плотных в X множеств. Докажите, что множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ плотно в X.

22.235. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек и множество $F \subset X$ замкнуто. Пусть S_1 и S_2 — два плотных подмножества в X таких, что $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Пусть

g_F — характерестическая функция множества $F \setminus (\overset{\circ}{F} \cap S_1)$. Докажите, что функция g_F разрывна во всех точках множества F и непрерывна во всех точках множества $X \setminus F$.

22.236. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство без изолированных точек. Пусть $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — замкнутые множества и $F_n \subseteq F_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g_{F_n}}{n^2}$, где функции g_{F_n} определены в задаче 22.235. Докажите, что функция f разрывна во всех точках множества G и непрерывна во всех точках множества $X \setminus G$.

22.237. Пусть $(H(X), d_H)$ — метрическое пространство замкнутых ограниченных множеств в метрическом пространстве (X, ϱ) (см. задачу 22.30). Докажите, что пространство $(H(X), d_H)$ полно тогда и только тогда, когда (X, ϱ) полно.

22.238. Докажите, что счётное полное метрическое пространство имеет хотя бы одну изолированную точку.

22.239. Докажите, что множество изолированных точек в счётном полном метрическом пространстве является плотным.

22.240. Приведите пример счётного полного метрического пространства, имеющего счётное множество изолированных и счётное множество неизолированных точек.

22.241. Пусть (X, d) — полное пространство без изолированных точек и S — счётное плотное в X множество. Докажите, что множество $X \setminus S$ плотно в X.

22.242. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие компактного метрического пространства (X, d). Докажите существование такого $\delta > 0$, что для любого $x \in X$ найдётся такое $U \in \mathcal{U}$, что $B(x, \delta) \subset U$. Такое $\delta > 0$ называется *числом Лебега* покрытия $\mathcal{U}$.

22.243. Докажите, что из любого открытого покрытия произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ можно извлечь не более чем счётное подпокрытие.

22.244. Докажите, что из любого открытого покрытия вполне ограниченного множества можно извлечь счётное подпокрытие.

22.245. Докажите, что множество изолированных точек компактного метрического пространства не более чем счётно.

22.246. В метрическом пространстве $C[0,1]$ с равномерной метрикой рассмотрим множества

$$E_n^+ = \{f \in C[0,1] \mid \exists\, x \in [0, 1-\frac{1}{n}]\ \forall\, h \in (0, 1-x)\ |f(x+h)-f(x)| \leq nh\},$$

$$E_n^- = \{f \in C[0,1] \mid \exists\, x \in [\frac{1}{n}, 1]\ \forall\, h \in (0, 1-x)\ |f(x)-f(x-h)| \leq nh\}.$$

Докажите, что

а) множества E_n^+ и E_n^- замкнуты в $C[0,1]$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

б) множества E_n^+ и E_n^- нигде не плотны;

в) множество функций, имеющих одностороннюю производную хотя бы в одной точке, нигде не плотно в $C[0,1]$.

22.247. Точка $x \in A$ называется *точкой сгущения* множества $A \subseteq X$ в сепарабельном метрическом пространстве (X,d), если для любой окрестности $U \in \mathcal{N}(x)$ множество $U \cap A$ несчётно (т. е. имеет мощность большую, чем счётные множества). Докажите, что для любого несчётного множества $A \subseteq X$ все его точки, за исключением не более чем счётного числа, являются точками сгущения.

22.248. Докажите, что множество точек сгущения множества A является замкнутым для любого множества $A \subseteq X$.

22.249. Множество $A \subseteq X$ называется *совершенным*, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Докажите, что в любом сепарабельном метрическом пространстве (X,d) произвольное замкнутое множество является объединением совершенного и не более чем счётного множеств (**теорема Кантора — Бендиксона**).

22.250. Пусть (X,d) — полное сепарабельное метрическое пространство. Докажите, что для любого замкнутого множества $A \subseteq X$ имеется единственное представление $A = S \cup P$, $S \cap P = \varnothing$, где P — совершенное множество, S — не более чем счётное множество.

22.251. (!) Докажите, что компактное метрическое пространство является ограниченным.

22.252. Докажите, что любое вполне ограниченное множество является ограниченным.

22.253. (!) Докажите, что компактное метрическое пространство является вполне ограниченным.

22.254. Приведите пример ограниченного, но не вполне ограниченного метрического пространства.

22.255. (!) Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств метрического пространства называется *центрированным*, если пересечение любого натурального числа множеств из $\mathcal{F}$ непусто. Докажите, что метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любое непустое центрированное семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

22.256. (!) Пусть (x_n) — некоторая последовательность. Докажите, что множество частичных пределов последовательности (x_n) совпадает с множеством $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, где $A_n = \{x_k \mid k \geq n\}$.

22.257. (!) Докажите, что метрическое пространство (X, d) компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности (x_n), $x_n \in X$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in X$.

22.258. Докажите, что метрическое пространство (X, d) компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность (x_n), $x_n \in X$, имеющая единственный частичный предел, сходится.

22.259. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и последовательности (x_n), (y_n), $x_n, y_n \in X$, удовлетворяют равенству $d(x_n, y_n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что найдётся подпоследовательность (x_{n_k}) такая, что $x_{n_k} \to a$, $y_{n_k} \to b$ при $k \to \infty$, причём $d(a, b) = 1$.

22.260. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и $f : X \to X$. Докажите, что из любой последовательности (x_n), $x_n \in X$, можно извлечь такую сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}), что последовательность (y_k), $y_k = f(x_{n_k})$, имеет предел в X.

22.261. (!) Докажите, что пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно является полным и вполне ограниченным.

22.262. Докажите, что метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда из любого его не более чем счётного покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

22.263. Докажите, что пополнение вполне ограниченного метрического пространства является компактным.

22.264. (!) Докажите, что любое компактное подмножество метрического пространства замкнуто[48].

22.265. Докажите, что любое замкнутое подмножество компактного множества компактно.

22.266. Докажите, что множество A в метрическом пространстве (X, ϱ) замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение множества A с любым компактным подмножеством компактно.

22.267. (!) Пусть X — полное метрическое пространство. Докажите, что множество $A \subseteq X$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограниченно.

22.268. Приведите пример полного метрического пространства, в котором все замкнутые шары ненулевого радиуса не являются вполне ограниченными.

22.269. Докажите, что множество в $\mathbb{R}^n$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено.

22.270. Докажите, что множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

22.271. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ компактно. Докажите, что $\sup A \in A$ и $\inf A \in A$.

22.272. Докажите, что пересечение любого семейства компактных множеств компактно.

22.273. Докажите, что объединение конечного набора компактных множеств компактно.

22.274. Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ — последовательность вложенных друг в друга компактных множеств $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \subset U$, где U — открытое множество. Докажите, что найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $K_n \subset U$.

[48] Подмножество метрического пространства называется компактным, если сужение метрики на это подмножество порождает компактное метрическое пространство.

22.275. (!) Докажите, что при непрерывном отображении образ компактного множества компактен.

22.276. (!) Докажите, что метрическое пространство (X, ϱ) компактно тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена.

22.277. (!) Пусть X — непустое компактное множество и отображение $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно. Докажите, что отображение f принимает на X своё наибольшее и наименьшее значение, т. е. найдутся такие точки $x_1, x_2 \in X$, что $f(x_1) = \inf f(X)$, $f(x_2) = \sup f(X)$ (**теорема Вейерштрасса**).

22.278. Докажите, что для любой функции $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ найдётся конечное разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и n точек $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, для которых справедливы неравенства $y_i - \delta(y_i) < < x_{i-1}$, $x_i < y_i + \delta(y_i)$ при любом $i = 1, \dots, n$ (**лемма Кузена**).

22.279. Пусть ϱ_1 и ϱ_2 — такие две метрики на множестве X, что метрические пространства (X, ϱ_1) и (X, ϱ_2) имеют одни и те же компактные подмножества. Докажите, что метрики ϱ_1 и ϱ_2 топологически эквивалентны.

22.280. Пусть $f : X \to Y$ непрерывное инъективное отображение компактного метрического прострaства X в метрическое пространство Y. Докажите, что $f^{-1} : f(X) \to X$ — непрерывное отображение.

22.281. Приведите пример, показывающий, что в предыдущей задаче свойство компактности метрического пространства X существенно.

22.282. Приведите пример двух негомеоморфных метрических пространств (X_1, ϱ_1), (X_2, ϱ_2) таких, что существуют непрерывные биекции из X_1 в X_2 и из X_2 в X_1.

22.283. Пусть A — замкнутое, а B — компактное непересекающиеся подмножества метрического пространства (X, d). Докажите, что найдётся такая $b \in B$, что $\widetilde{d}(A, B) = \inf\limits_{y \in B} \widetilde{d}(A, y) = \widetilde{d}(A, b)$ (см. задачу 22.29), а если множество A также компактно, то найдётся также такая $a \in A$, что $\widetilde{d}(A, B) = d(a, b)$.

22.284. Приведите пример метрического пространства (X, d) и двух замкнутых множеств $A, B \subset X$ таких, что $\widetilde{d}(A, B) = 0$ и $A \cap B = \varnothing$.

22.285. (!) Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Докажите, что отображение f является равномерно непрерывным (**теорема Кантора**).

22.286. Пусть (X, ϱ) — компактное метрическое пространство и (f_n), $f_n : X \to \mathbb{R}$, — монотонная последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к нулю. Докажите, что последовательность (f_n) равномерно сходится к нулю.

22.287. (!) Пусть (X_1, d_1) и (X_2, d_2) — компактные метрические пространства. Докажите, что их декартово произведение компактно.

22.288. Метрическое пространство (X, d) называется *локально компактным*, если любая точка $x \in X$ имеет компактную окрестность. Докажите, что любое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является локально компактным метрическим пространством.

22.289. Любое ли локально компактное метрическое пространство (X, d) является полным? Рассмотрите метрическое пространство из задачи 22.21.

22.290. Приведите пример двух таких топологически эквивалентных метрик d_1 и d_2 на $\mathbb{R}$, что множества фундаментальных последовательностей в них различны.

22.291. Приведите пример полного локально компактного метрического пространства, в котором не все замкнутые шары компактны.

22.292. Приведите пример двух таких топологически эквивалентных метрик d_1 и d_2 на $\mathbb{R}$, что $(\mathbb{R}, d_1)$ полно, а $(\mathbb{R}, d_2)$ не полно.

22.293. Докажите, что метрическое пространство (X, d) является локально компактным тогда и только тогда, когда топология пространства (X, d) имеет базу из открытых множеств, замыкания которых компактны.

22.294. Докажите, что для любого локально компактного метрического пространства (X, d) и любой точки $x \in X$ множество $X \setminus \{x\}$ является локально компактным метрическим пространством.

22.295. Пусть U — открытое, а M — замкнутое подмножество локально компактного метрического пространства (X, d). Докажите, что $U \cap M$ — локально компактное подпространство.

22.296. Докажите, что декартово произведение двух локально компактных пространств является локально компактным пространством.

22.297. Пусть (X, d) — сепарабельное локально компактное метрическое пространство. Докажите, что X является объединением не более чем счётного числа компактных множеств K_n, таких что $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

22.298. Пусть выполнены условия задачи 22.297. Докажите, что для любого компактного множества $M \subseteq X$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $M \subseteq K_n$.

22.299. Докажите, что в $C[a, b]$ можно выбрать ограниченную последовательность функций, из которой нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

22.300. Докажите, что замкнутые шары в пространстве $C[a, b]$ не компактны.

22.301. Докажите, что пространство $C[a, b]$ является сепарабельным.

22.302. Докажите, что пространство ограниченных последовательностей ℓ_∞ с расстоянием $\varrho((x_n), (y_n)) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ не является сепарабельным.

22.303. Докажите, что пространство $BC(a, b)$ ограниченных непрерывных на (a, b) функций не является сепарабельным.

22.304. Докажите, что пространство липшицевых функций $\mathrm{Lip}_0[a, b] = \{f \in C[a, b] \mid f(a) = 0, |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \text{ для любых } x, y \in [a, b]\}$ является компактным.

22.305. Множество $F \subset C[a, b]$ называется *равностепенно непрерывным*, если $\omega(\varepsilon) = \sup\limits_{f \in F} \sup\limits_{|x-y|<\varepsilon} |f(x) - f(y)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Множество $F \subset C[a, b]$ называется *равномерно ограниченным*, если $\sup\limits_{x \in [a,b], f \in F} |f(x)| \leq C$ для некоторого $C > 0$. Докажите, что если множество $F \subset C[a, b]$ является равностепенно непрерывным и равномерно ограниченным, то F вполне ограничено.

22.306. Докажите, что если множество функций $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ равностепенно непрерывно, ограничено в каждой точке $(\sup\limits_n |f_n(x)| < \infty$

для любого $x \in [a, b]$) и последовательность функций (f_n) сходится поточечно на $[a, b]$, то множество F равномерно ограничено.

22.307. (!) Докажите, что множество $F \subset C[a, b]$ компактно тогда и только тогда, когда F является замкнутым, равностепенно непрерывным и равномерно ограниченным (**теорема Арцела — Асколи**).

22.308. Приведите примеры, показывающие, что требования равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности в теореме Арцела — Асколи являются существенными.

22.309. Докажите, что метрическое пространство, определённое в задаче 22.27, не компактно.

22.310. Докажите, что метрическое пространство, определённое в задаче 22.27, сепарабельно.

22.311. Докажите, что компактое метрическое пространство нельзя изометрично вложить в его собственное подмножество.

22.312. Приведите пример метрического пространства, которое изометрично вкладывается в собственное подмножество.

22.313. (!) Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $f : X \to X$ называется *сжимающим*, если найдётся такое α, $1 > \alpha > 0$, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$. Докажите, что любое сжимающее отображение непрерывно.

22.314. Пусть (X, d) — метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ таково, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Докажите, что если отображение f имеет неподвижную точку, т. е. такую $x \in X$, что $f(x) = x$, то эта неподвижная точка единственна.

22.315. (!) Докажите, что в полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет неподвижную точку (**принцип сжимающих отображений**).

22.316. Приведите пример полного метрического пространства (X, d) и такого неимеющего неподвижных точек отображения $f : X \to X$, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

22.317. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, отображение $f : X \to X$ сюръективно, т. е. $f(X) = X$, и найдётся такое α, $1 < \alpha$, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) \geq \alpha d(x, y)$. Докажите, что отображение f имеет неподвижную точку.

22.318. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ таково, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Докажите, что отображение f имеет неподвижную точку.

22.319. Пусть (X, d) — метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ таково, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Докажите, что если рекуррентно заданная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет предельную точку, то отображение f имеет неподвижную точку.

22.320. Приведите пример отображения $f : [0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющего условиям $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ для любых $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$, и не существует $\alpha < 1$, что $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$ для любых $x, y \in [0, 1]$.

22.321. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Пусть отображение $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ раз}}$ $(f : X \to X)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет единственную неподвижную точку. Докажите, что отображение f имеет единственную неподвижную точку.

22.322. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Рассмотрим отображение $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ раз}}$ $(f : X \to X)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что если отображение g сжимающее, то на множестве X можно задать такую метрику d_1, топологически эквивалентную метрике d, что пространство (X, d_1) является полным, а отображение f в этой метрике является сжимающим.

22.323. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство. Рассмотрим отображение $g = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ раз}}$ $(f : X \to X)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что если отображение g сжимающее, то отображение f имеет неподвижную точку.

22.324. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, отображение $f : X \to X$ сюръективно и для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$. Докажите, что отображение f — изометрия.

22.325. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ таково, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Докажите, что отображение f — изометрия.

22.326. Пусть λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, — собственные значения (см., например, [30]) матрицы A размера $m \times m$, $b \in \mathbb{R}^m$. Докажите, что последовательность (x_n), $x_n \in \mathbb{R}^m$, определённая рекуррентной формулой $x_{n+1} = Ax_n + b$ при любом начальном векторе $x_0 \in \mathbb{R}^m$ имеет предел тогда и только тогда, когда $|\lambda_k| < 1$ для любого $k = 1, 2, \ldots, m$.

22.327. Пусть отображение $F : C[a, b] \to C[a, b]$ определено равенством

$$(F(x))(t) = \alpha \int\limits_a^b K(t, s)x(s)\, ds + \varphi(t),$$

где $\varphi \in C[a, b]$, $K(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ отображение F будет сжимающим?

22.328. Докажите, что уравнение

$$x(t) = \int\limits_0^1 \sin(tx(s))\, ds + \varphi(t),$$

имеет единственное решение при любой функции $\varphi \in C[0, 1]$.

22.329. Пусть X — окружность в $\mathbb{R}^2$, из которой удалена одна точка. Приведите пример сжимающего (относительно евклидовой метрики в $\mathbb{R}^2$) отображения $f : X \to X$, не имеющего ни одной неподвижной точки. Будет ли аналогичное утверждение верно для сферы в $\mathbb{R}^3$?

22.330. Пусть (X, d) — метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ сжимающее, но не постоянное. Докажите, что на множестве X можно определить такую метрику d_1, эквивалентную данной метрике d, что отображение f не будет сжимающим в метрическом пространстве (X, d_1).

22.331. Приведите пример неполного метрического пространства, в котором любое сжимающее отображение имеет неподвижную точку.

22.332. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ таково, что для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $d(f(x), f(y)) \leq \alpha(d(x, f(x)) + d(y, f(y))$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Докажите, что

а) отображение f имеет неподвижную точку;

б) неподвижная точка отображения f единственная.

22.333. Приведите примеры таких полных метрических пространств (X, d) и отображений $f : X \to X$, что

а) отображение f является сжимающим, но не удовлетворяет условию задачи 22.332;

б) отображение f удовлетворяет условию задачи 22.332, но не является сжимающим.

22.334. Пусть $(H(X), d_H)$ — метрическое пространство замкнутых ограниченных множеств в полном метрическом пространстве (X, d) (см. задачи 22.29, 22.30, 22.237). Отображение $F : X \to H(X)$ будем называть *k-сжимающим*, $0 < k < 1$, если $d_H(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Неподвижной точкой отображения $F : X \to H(X)$ будем называть $x_0 \in X$, если $x_0 \in F(x_0)$. Докажите, что для любого $x \in X$ и любого k-сжимающего отображения F найдётся неподвижная точка $x_0 \in X$, удовлетворяющая неравенству $d(x_0, x) \leq \frac{\widetilde{d}(x, F(x))}{1-k}$ (**теорема Надлера**).

22.335. Обозначим через $\mathcal{K}_n$ семейство всех компактов в $\mathbb{R}^n$. Пусть $T_1, \ldots, T_m$ — сжимающие отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ с константами сжатия $s_1, \ldots, s_m$ соответственно. Зададим отображение $\mathbb{T} : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ равенством $\mathbb{T}(E) = T_1(E) \cup \cdots \cup T_m(E)$. Докажите, что отображение $\mathbb{T}$ является сжимающим в метрике Хаусдорфа (см. задачу 22.30) с константой сжатия $s = \max\{s_1, \ldots, s_m\}$.

22.5. Связность

22.336. (!) Докажите, что метрическое пространство (X, d) связно тогда и только тогда, когда не существует двух таких открытых множеств A, B, что $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$.

22.337. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество и $f : U \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что для любых $\alpha, \beta \in U$ и $c \in [f(\alpha), f(\beta)]$ найдётся такое $\gamma \in U$, что $f(\gamma) = c$.

22.338. (!) Докажите, что $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ является связным множеством.

22.339. (!) Докажите, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ является связным тогда и только тогда, когда A — промежуток (возможно неограниченный).

22.340. (!) Докажите, что линейно связное подмножество в $\mathbb{R}^n$ является связным.

22.341. (!) Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении является связным.

22.342. (!) Докажите, что образ линейно связного множества при непрерывном отображении является линейно связным.

22.343. (!) Пусть A — связное множество. Докажите, что непрерывная функция $f : A \to \mathbb{R}$ принимает все промежуточные значения.

22.344. Пусть функция f непрерывна на окружности. Докажите, что существуют диаметрально противоположные точки a, b такие, что $f(a) = f(b)$.

22.345. Пусть окружность C является объединением двух замкнутых множеств A и B. Докажите, что существуют диаметрально противоположные точки $a, b \in C$, принадлежащие одному из множеств A или B.

22.346. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — сфера единичного радиуса и $f : S \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что для любых $\alpha, \beta \in U$ и $c \in [f(\alpha), f(\beta)]$ найдётся такое $\gamma \in S$, что $f(\gamma) = c$.

22.347. Докажите, что метрическое пространство, состоящее из счётного числа точек, несвязно.

22.348. Докажите, что метрическое пространство, состоящее из счётного числа точек, вполне несвязно.

22.349. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ является связным.

22.350. Будет ли множество $\mathbb{Q}^2$ связным в $\mathbb{R}^2$?

22.351. Будет ли множество $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \text{ или } y \in \mathbb{Q}\}$ связным в $\mathbb{R}^2$?

22.352. Охарактеризуйте все множества в $\mathbb{R}$, которые являются образами множества $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}$ или $y \in \mathbb{Q}\}$ при непрерывных отображениях $f : A \to \mathbb{R}$.

22.353. Пусть A счетное подмножество $\mathbb{R}^2$. Является ли множество $\mathbb{R}^2 \setminus A$ связным?

22.354. (!) Докажите, что отрезок негомеоморфен окружности.

22.355. Докажите, что существует непрерывное взаимно однозначное отображение полуинтервала $[0, 1)$ на окружность, но не существует непрерывного взаимнооднозначного отображения окружности на полуинтервал $[0, 1)$.

22.356. (!) Докажите, что отрезок негомеоморфен квадрату $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

22.357. Докажите, что отрезок негомеоморфен «кресту», т. е. множеству $([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$.

22.358. Докажите, что множества $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ негомеоморфны.

22.359. (!) Докажите, что непрерывное взаимно однозначное отображение, действующее из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, отображает промежуток в промежуток того же типа.

22.360. Докажите, что не существует непрерывного взаимно однозначного отображения отрезка или интервала на окружность.

22.361. (!) Докажите, что метрические пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ негомеоморфны.

22.362. Докажите, что метрическое пространство $\mathbb{R}^2$ негомеоморфно своему подпространству $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$.

22.363. Докажите, что если два связных множества имеют непустое пересечение, то их объединение есть связное множество.

22.364. (!) Докажите, что любая компонента связности метрического пространства является связным множеством.

22.365. (!) Докажите, что множество связно тогда и только тогда, когда оно имеет одну компоненту связности.

22.366. Докажите, что замыкание связного множества является связным.

22.367. Приведите пример связного множества в $\mathbb{R}^2$, внутренность которого несвязна.

22.368. Докажите, что компонента связности метрического пространства является замкнутым множеством.

22.369. Пусть множество компонент связности метрического пространства конечно. Докажите, что каждая компонента связности является открытым множеством.

22.370. Докажите, что любое связное множество $A \subseteq X$ есть подмножество некоторой компоненты связности в X.

22.371. Докажите, что пересечение любой последовательности вложенных друг в друга связных компактных множеств является связным компактным множеством.

22.372. Докажите, что любое связное локально компактное метрическое пространство сепарабельно.

22.373. Докажите, что компактное метрическое пространство (X, d) связно тогда и только тогда, когда для любых двух точек $a, b \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдётся конечной набор точек $x_1 = a, x_2, \ldots, x_n = b$, $x_i \in X$ и $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

22.374. (!) Докажите, что множество

$$\{(x, \sin \tfrac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

является связным, но не линейно связным.

22.375. Приведите пример разрывной функции, график которой является связным множеством.

22.376. Докажите, что если график функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ является линейно связным, то функция f непрерывна.

22.377. Докажите, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда её график замкнут и связен.

22.378. Докажите, что любое открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$ является линейно связным.

22.379. Метрическое пространство (X, d) называется *локально связным*, если оно имеет базу топологии, состоящую из связных окрестностей.

22.380. Докажите, что компоненты связности локально связного метрического пространства (X, d) являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

22.381. Докажите, что компонента связности открытого множества в $\mathbb{R}^n$ является открытым множеством.

22.382. Докажите, что декартово произведение связных (локально связных) метрических пространств является связным (локально связным).

22.383. Пусть A — произвольное подмножество метрического пространства (X, ϱ). Докажите, что если непрерывный путь соединяет точки $x \in A$ и $y \notin A$, то он содержит некоторую точку $z \in \mathrm{Fr}(A)$.

22.384. Пусть замкнутая кривая $A \subset \mathbb{R}^2$ является многоугольником. Докажите, что множество $\mathbb{R}^2 \setminus A$ имеет две компоненты связности, одна из которых ограничена[49].

22.385. Докажите, что множество E связно тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде $E = A \cup B$, где A и B — непустые множества, обладающие свойством $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \varnothing$.

22.386. Пусть E и F — замкнутые множества. Докажите, что если $E \cup F$ и $E \cap F$ — связные множества, то и множества E и F связные. Докажите, что утверждение не верно, если не требовать замкнутости хотя бы одного из множеств E или F.

22.387. Приведите примеры вполне несвязных множеств: на вещественной прямой, на евклидовой плоскости.

22.388. Приведите пример двух открытых гомеоморфных множеств в $\mathbb{R}$, дополнения к которым негомеоморфны.

22.389. Докажите, что имеется только счётное семейство попарно негомеоморфных открытых подмножеств в $\mathbb{R}$.

22.390. Докажите, что если два замкнутых множества в $\mathbb{R}$ гомеоморфны, то и дополнения к ним гомеоморфны.

22.391. Приведите пример двух замкнутых гомеоморфных множеств в $\mathbb{R}^2$, дополнения к которым негомеоморфны.

[49] Аналогичное утверждение верно для любой кривой на плоскости гомеоморфной окружности (теорема Жордана).

22.392. Приведите пример двух замкнутых гомеоморфных множеств $A, B \subset \mathbb{R}$, для которых не существует такого гомеоморфизма $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $\varphi(A) = B$.

22.393. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим всевозможные матрицы размера 3×3 с определителем, равным 1 (ортогональная группа $SO(3)$). Докажите, что множество таких матриц компактно и связно.

22.394. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество ортогональных матриц $n \times n$ состоит из двух компонент связности.

22.395. Докажите, что в $C[0,1]$ сфера единичного радиуса связна.

22.396. (!) Свойства множеств в метрическом пространстве, которые сохраняются при гомеоморфизме называют *топологическими*. Какие из свойств: открытость, замкнутость, полнота, компактность, ограниченность, сепарабельность, связность являются топологическими?

22.6. Дополнения

22.397. Пусть X множество последовательностей из 0 и 1. Для последовательностей $x, y \in X$ определим $d(x, y) = 2^{-i}$, если x и y совпадают вплоть до i-го символа. Докажите, что d — расстояние на X.

22.398. Пусть M — множество всех возрастающих (не строго) непрерывных справа ограниченных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим

$$\varrho(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x+\varepsilon)+\varepsilon, g(x) \leq f(x+\varepsilon)+\varepsilon\}.$$

Докажите, что ϱ — метрика на M (метрика Леви).

22.399. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $M \subset X$. Докажите, что f удовлетворяет условию Липшица с той же константой и на замыкании $\overline{M}$.

22.400. Пусть $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$ — выпуклое множество и множества $F_i \subset \mathbb{R}^n$ замкнуты. Докажите, что если функция $f : A \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на каждом F_i, то f удовлетворяет условию Липшица на A.

22.401. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство связных попарно пересекающихся множеств ($X_i \cap X_j \neq \varnothing$). Докажите, что множество $\bigcup_{i\in I} X_i$ связно.

22.402. Пусть $F \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество. Докажите, что найдётся такая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $f^{-1}(0) = F$.

22.403. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество. Докажите, что найдётся такая функция $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, что $f^{-1}(0) = F$.

22.404. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — компактные метрические пространства. Рассмотрим на их дизъюнктном объединении множество R таких метрик ϱ, что $\varrho|_X = d_X$ и $\varrho|_Y = d_Y$. Определим $D(X,Y) = \inf\limits_R d_\varrho(X,Y)$, где d_ϱ — метрика Хаусдорфа. Докажите, что

а) $D(X,Y) = 0$ тогда и только тогда, когда пространства X и Y изометричны;

б) функция D является метрикой на множестве компактных попарно неизометричных метрических пространств.

22.405. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное сюръективное отображение компактного метрического пространства X на метрическое пространство Y. Пусть $B \subset Y$ и множество $f^{-1}(B)$ открыто в X. Докажите, что множество B открыто в Y.

22.406. Пусть A и B — непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, причём $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{R}^n$. Докажите, что множество $H = \overline{A} \cap \overline{B}$ является гиперплоскостью и общей границей множеств A и B.

22.407. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое компактное множество. Докажите, что

а) граница $\gamma = \mathrm{Fr}(K)$ компакта K является спрямляемой жордановой кривой;

b) $L(\gamma) \leq \pi \mathrm{diam}(K)$.

22.408. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество, граница которого является спрямляемой жордановой кривой и A — выпуклая оболочка множества K. Докажите, что $L(\mathrm{Fr}(A)) \leq L(\mathrm{Fr}(K))$.

23. Канторово множество и кривые Пеано

23.1. (!) Рассмотрим множество чисел

$I_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le 3^n, i = 3k+1$ для некоторого $k \ge 0\}$. Пусть $D_n = \bigcup\limits_{i \in I_n} (\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n})$. Множество $A = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ называется *канторовым* множеством. Докажите, что канторово множество замкнуто.

23.2. (!) Пусть A — канторово множество. Докажите, что $\mathrm{Fr}(A) = A$.

23.3. (!) Докажите, что канторово множество A не содержит изолированных точек, т. е. $\mathrm{Lim}(A) = A$.

23.4. (!) Докажите, что канторово множество нигде не плотно.

23.5. Докажите, что канторово множество вполне несвязно.

23.6. Пусть A — канторово множество, $A = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ (см. задачу 23.1). Докажите, что $D_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} D_k = \bigcup(\frac{1}{3^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i})$, где объединение берётся по всем наборам $(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$ за исключением набора $(1, \dots, 1)$.

23.7. (!) Докажите, что канторово множество состоит из всех чисел отрезка $[0,1]$, которые записываются в троичной системе исчисления без использования цифры 1.

23.8. Докажите, что число $\frac{1}{4}$ принадлежит канторову множеству.

23.9. (!) Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума.

23.10. (!) Докажите, что мера Лебега канторова множества равна 0.

23.11. Рассмотрим множество чисел
$J_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le 3^n, i = 3k$ для некоторого $k \ge 0\}$. Пусть $D'_n = \bigcup\limits_{i \in J_n} (\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n})$. Обладает ли множество $B = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D'_n$ следующими свойствами:

а) замкнутость;

б) лебегова мера 0;

в) мощность континума;

г) нигде не плотность;

д) отсутствие изолированных точек?

23.12. (!) Канторово множество можно представить как пересечение множеств $A_n \subseteq [0, 1]$, состоящих из 2^n попарно непересекающихся отрезков a_i^n. Множество A_{n+1} получается из множества A_n следующей процедурой: из каждого отрезка a_i^n удаляем центральный интервал длины, равной трети от длины отрезка a_i^n, и получаем два отрезка a_j^{n+1} и a_{j+1}^{n+1}. Пусть множество B построено аналогично канторову множеству посредством удаления на n-м шаге из каждого отрезка центрального интервала, длина которого в n раз меньше длины отрезка. Докажите, что множество B имеет лебегову меру 0.

23.13. (!) Пусть множество B построено аналогично канторову множеству посредством удаления на n-м шаге из каждого отрезка центрального интервала, длина которого в 2^n раз меньше длины отрезка. Докажите, что множество B имеет положительную меру Лебега[50].

23.14. Пусть множество $A_c \subset [0, 1]$ состоит из чисел, в десятичной записи которых отсутствует цифра c. Найдите меру Лебега и мощность множества A_c.

23.15. Пусть множество $B \subset [0, 1]$ состоит из чисел, в десятичной записи которых отсутствует фрагмент 1234567890. Найдите меру Лебега и мощность множества B.

23.16. Существует ли такое множество попарно непересекающихся отрезков в $\mathbb{R}$, в дополнении к которому не лежит ни один отрезок?

23.17. Приведите пример несчётного нигде не плотного множества $A \subset [0, 1]$, обладающего свойством: для любых неравных $x_1, x_2 \in A$ найдётся такое $x_3 \in A$, что $x_1 < x_3 < x_2$.

23.18. Приведите пример счётного нигде не плотного множества $A \subset [0, 1]$, обладающего свойством: для любых неравных $x_1, x_2 \in A$ найдётся такое $x_3 \in A$, что $x_1 < x_3 < x_2$.

23.19. Пусть A — канторово множество. Докажите, что $3A = A \cup (2 + A)$.

23.20. Пусть A — канторово множество. Найдите множества:

а) $\{x - y \mid x, y \in A\}$; б) $\{x + y \mid x, y \in A\}$.

[50] Здесь и далее мерой Лебега пересечения вложенных друг в друга измеримых по Жордану множеств $A_1 \supseteq A_2 \ldots A_n \supseteq \ldots$ называется $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_L(A_n)$ (см., например, [38].

23.21. (!) Исследуйте интегрируемость по Риману функции $\chi_A : [0,1] \to \mathbb{R}$, где A — канторово множество.

23.22. (!) Пусть A — канторово множество, $A = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, причём $D_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} D_k = \bigcup (\frac{1}{3^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i})$, где объединение берётся по всем наборам $(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$ за исключением набора $(1, \ldots, 1)$. (см. задачу 23.6). Определим функцию $l : [0,1] \to [0,1]$ равенствами:

$$l(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_i}{2^i}, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{3^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i}, \frac{2}{3^n} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{2\delta_i}{3^i} \right); \\ \sup\limits_{y \in (0,x) \setminus A} l(y), & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Функция l называется *канторовой лестницей*. Докажите, что функция l

а) монотонна; б) непрерывна;

в) не удовлетворяет условию Липшица.

23.23. Докажите, что канторова лестница l является равномерным пределом некоторой последовательности непрерывных кусочно-аффинных функций.

23.24. Докажите равенство $l\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2\delta_i}{3^i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i}$ для любой последовательности (δ_i), состоящей из только нулей и единиц.

23.25. Докажите равенство $2l(x) = l(3x)$ для любого $x \in [0, 1/3]$.

23.26. (!) Пусть A — канторово множество, l — канторова лестница. Докажите, что функция l не дифференцируема в точках канторова множества и дифференцируема вне его, причём $l'(x) = 0$ для всех $x \notin A$.

23.27. Для любого двоично-рационального числа $s \in [0,1]$ вида $s = \frac{k}{2^n}$, где k — нечётное натуральное число, положим $h_s = \frac{1}{3^n}$. Определим функцию $r : [0,1] \to [0,1]$ равенством $r(x) = \sum\limits_{s<x} h_s$, где сумма берётся по всем двоично-рациональным числам $s \in [0, x)$. Докажите, что

а) функция r является правым обратным к канторовой лестнице отображением, т. е. $l(r(x)) = x$ для любого $x \in [0,1]$;

б) выясните, является ли правое обратное к канторовой лестнице отображение единственным;

в) нарисуйте эскиз графика функции $r \circ l$.

23.28. Пусть $l : [0,1] \to [0,1]$ — канторова лестница. Вычислите $\int\limits_0^1 l(x)\,dx$.

23.29. Пусть $l : [0,1] \to [0,1]$ — канторова лестница. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x\,dl(x)$; б) $\int\limits_0^1 l(x)\,dl(x)$; в) $\int\limits_0^1 l^2(x)\,dx$.

23.30. Вычислите длину канторовой лестницы.

23.31. Докажите, что существует такая функция $f \in C^\infty(0,1)$, которая принимает значения разных знаков, но не существует точки $x_0 \in (0,1)$, в которой f меняет знак, т. е. не существует такого $\delta > 0$ что $f(x) \geq 0$ при $x \in (x_0, x_0+\delta)$ и $f(x) \leq 0$ при $x \in (x_0-\delta, x_0)$ или наоборот.

23.32. Отрезок $B \subseteq [a,b]$ называется максимальным отрезком постоянства функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, если f постоянна на B и не является постоянной на любом отрезке A, $B \subset A$. Докажите, что любого счётного семейства $\mathcal{G}$ попарно непересекающихся отрезков найдётся монотонная непрерывная функция f, для которой $\mathcal{G}$ является семейством всех её максимальных отрезков постоянства.

23.33. (!) Пусть $g(x) = x^2 \sin(1/x)$. Для любого числа $c > 0$ определим $x_c = \max\{x \in (0,c) \mid g'(x) = 0\}$. Зададим функцию $g_c : (0,c] \to \mathbb{R}$ равенствами

$$g_c(x) = \begin{cases} g(x), & \text{при } 0 < x < x_c, \\ g(x_c), & \text{при } x_c \leq x \leq c. \end{cases}$$

Пусть $B = [0,1] \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\right)$ — канторово множество положительной меры, определённое в задаче 23.13. Определим функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in B; \\ g_c(x-a_n), & \text{при } a_n < x < (a_n+b_n)/2, c = (b_n-a_n)/2; \\ g_c(b_n-x), & \text{при } (a_n+b_n)/2 \leq x < b, c = (b_n-a_n)/2. \end{cases}$$

Докажите, что

а) функция f дифференцируема в любой точке $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$;

б) функция f дифференцируема на множестве B и $f'(x) = 0$ в любой точке $x \in B$;

в) функция f' разрывна в любой точке $x \in B$;

г) функция f является первообразной Римана функции f', но функция f' не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.

23.34. Приведите пример двух интегрируемых по Риману функций, композиция которых не интегрируема по Риману.

23.35. Определим функцию $f : [0,1] \to [0,1]^2$ следующим образом. Пусть $0,\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ — представление числа $a \in [0,1]$ в виде бесконечной двоичной дроби. Здесь полагаем, что $1 = 0,1111$[51]. Пусть $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$, где число $f_1(a) \in [0,1]$ имеет двоичное представление вида $0,\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_{2n+1} \ldots$, а число $f_2(a)$ — $0,\alpha_2\alpha_4 \ldots \alpha_{2n} \ldots$. Докажите, что:

а) $f([0,1]) = [0,1]^2$; б) f не является непрерывной.

23.36. (!) Пусть A — канторово множество. Определим функцию $g : A \to [0,1]$ следующим образом. Пусть $0,\beta_1 \ldots \beta_n \ldots$ — представление числа $a \in A$ в виде бесконечной троичной дроби, тогда $g(a)$ определим как число, имеющее двоичное представление $0,\beta'_1 \ldots \beta'_n \ldots$, где $\beta'_i = \beta_i/2$. Корректность определения функции g следует из задачи 23.7. Докажите, что

а) $g(A) = [0,1]$;

б) $f(g(A)) = [0,1]^2$, где функция f определена в задаче 23.35;

в) функция $f \circ g$ непрерывна на A;

г) функция $f \circ g$ не инъективна на A;

д) существует непрерывное продолжение F функции $f \circ g$ на отрезок $[0,1]$ и $F([0,1]) = [0,1]^2$.

Непрерывные сюръективные отображения отрезка на квадрат называют *кривыми Пеано*.

[51] Другие разложения с единицей в периоде не допускаются.

23.37. (!) Пусть $0,\beta_1\dots\beta_n\dots$ — представление числа $a\in[0,1]$ в виде бесконечной троичной дроби. Определим последовательности (σ_n) и (δ_n) следующим образом: $\sigma_1=\beta_1$; $\sigma_n=\beta_{2n-1}$, если $\beta_2+\beta_4+\dots+$ $+\beta_{2n-2}$ — чётное число и $\sigma_n=2-\beta_{2n-1}$, если $\beta_2+\beta_4+\dots+$ $+\beta_{2n-2}$ — нечётное число при $n\geq 2$; $\delta_n=\beta_{2n}$, если $\beta_1+\beta_3+\dots+$ $+\beta_{2n-1}$ — чётное число и $\delta_n=2-\beta_{2n}$, если $\beta_1+\beta_3+\dots+\beta_{2n-1}$ — нечётное число при $n\geq 1$. Пусть $\varphi(a)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\sigma_n$, $\psi(a)=$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{-n}\delta_n$. Докажите, что

а) функции φ и ψ непрерывны на $[0,1]$;

б) отображение $F(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ является кривой Пеано;

в) множество $F^{-1}(y)$ состоит не более чем из 4 точек для любого $y\in[0,1]^2$.

23.38. Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует непрерывное сюръективное отображение из $[0,1]$ на $[0,1]^n$.

23.39. Докажите, что существует кривая Жордана $\gamma:[0,1]\to[0,1]^3$, проекции которой на все три координатные плоскости совпадают с множеством $[0,1]^2$.

23.40. Докажите, что не существует инъективной кривой Пеано.

23.41. Докажите, что не существует непрерывного взаимно однозначного отображения $f:I\to I^2$, где

а) $I=(0,1)$; б) $I=\mathbb{R}$.

23.42. Докажите, что не существует такой кривой Пеано $F:[0,1]\to[0,1]^2$, что $F^{-1}(y)$ состоит из двух точек для любого $y\in[0,1]^2$.

23.43. Докажите, что не существует такой кривой Пеано $F:[0,1]\to[0,1]^2$, что мощность множества $F^{-1}(y)$ конечна и не зависит от точки $y\in[0,1]^2$.

23.44. Приведите пример такой кривой Пеано $F:[0,1]\to[0,1]^2$, что мощность множества $F^{-1}(y)$ бесконечна для любой точки $y\in[0,1]^2$.

23.45. Рассмотрим множество чисел

$I_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 3^n, i = 3k+1$ для некоторого $k \geq 0\}$. Пусть $D_n = \bigcup\limits_{i,j \in I_n} (\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}) \times (\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n})$. Множество $K = [0,1]^2 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$ называется *ковром Серпинского*. Докажите, что

а) множество K замкнуто;

б) множество K нигде не плотно;

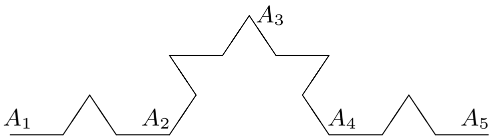
в) множество K не имеет изолированных точек;

г) множество K линейно связно.

23.46. Докажите, что кривая Пеано не является спрямляемой.

23.47. Докажите, что кривая Пеано из задачи 23.37 не является спрямляемой ни на каком интервале из $[0, 1]$.

23.48.



Определим по индукции последовательность множеств $\gamma_i \subset \mathbb{R}^2$ следующим образом.

1) Множество γ_1 представляет собой объединение четырех прямолинейных отрезков I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_4^1, последовательно соединяющих точки с координатами $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$, $A_3 = (\frac{3}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $A_4 = (2,0)$, $A_5 = (3,0)$.

2) Множество γ_2 является объединением четырех множеств, каждое из которых представляет собою образ множества γ_1 под действием соответствующих сдвига и гомотетии так, чтобы образ точек A_1 и A_5 совпадали соответственно с парами A_1 и A_2, A_2 и A_3, A_3 и A_4, A_4 и A_5; при этом «шипы», являющиеся образами множества $I_2^1 \cup I_3^1$, направлены «наружу». Таким образом, γ_2 представляет из себя объединение 16 отрезков I_i^2.

3) Множество γ_{i+1} строим тем же способом из множества γ_i, при этом каждый из составляющих его отрезков I_k^i заменяем на образ (гомотетию) ломаной γ_1 так, чтобы концы отрезка I_k^i совпадали с концами образа ломаной.

Докажите, что последовательность множеств γ_i сходится в смысле расстояния Хаусдорфа (см. задачу 22.30) к некоторому множеству

γ, являющемуся образом локально не спрямляемой жордановой кривой (кривая фон Коха).

23.49. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *самоподобным*, если найдётся такое его подмножество $D' \subset D$, что для некоторого изометрического преобразования Q и натурального числа $k > 1$ справедливо равенство $kD' = Q(D)$. Докажите, что следующие множества в $\mathbb{R}^2$ являются самоподобными:

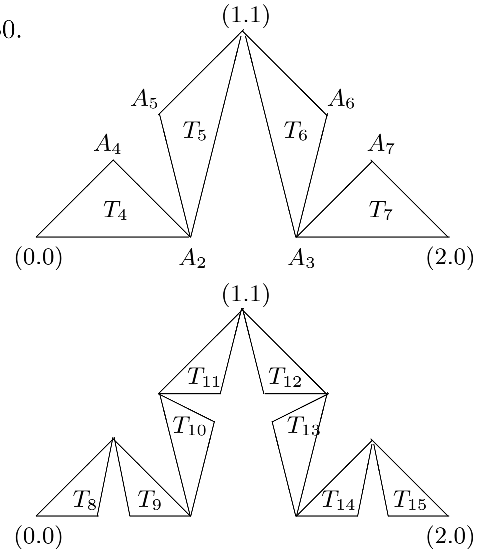
а) $[0, 1]^2$;

б) ковёр Серпинского (см. задачу 23.45);

в) график канторовой лестницы (см. задачу 23.22);

г) кривая фон Коха (см. задачу 23.48).

23.50.



Рассмотрим прямоугольный треугольник T_1 с вершинами в точках $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 0)$. Далее рассмотрим равнобедренный треугольник D_1 с вершиной в точке $(1, 1)$ с основанием, лежащим на отрезке, соединяющем точки $(0, 0)$ и $(2, 0)$, площадью $1/4$. Рассмотрим замыкание множества $T_1 \setminus D_1$. Данное множество представляет собою объединение двух треугольников T_2 и T_3 с общей вершиной в точке $(1, 1)$; при этом $\mu_L(T_2) = \mu_L(T_3)$. Рассмотрим те вершины треугольников T_2 и T_3, которые не совпадают с $(0, 0)$ и $(2, 0)$ и каждая из таких вершин принадлежит только одному треугольнику. Как несложно видеть, таких вершин две. Обозначим их A_2 и A_3. Рассмотрим треугольники D_2 и D_3, $\mu_L(D_2) + \mu_L(D_3) = 1/8$, с вершинами в точках A_2 и A_3 соответственно такие, что противоположные этим вершинам стороны лежат на соответствующих сторонах треугольников T_2 и T_3. Рассмотрим замыкание множества $(T_2 \cup T_3) \setminus (D_2 \cup D_3)$. Данное множество представляет собою объединение четырех треугольников T_4, T_5, T_6, T_7. Выберем треугольники D_2 и D_3 так, чтобы $\mu_L(T_4) = \mu_L(T_5) = \mu_L(T_6) = \mu_L(T_7)$. Рассмотрим те вершины треугольников T_4, T_5, T_6, T_7, которые не совпадают с $(0,0)$ и $(2,0)$ и каждая из таких вершин принадлежит только одному треугольнику. Как нетрудно видеть, таких вершин четыре. Обозначим их A_4, A_5, A_6, A_7. Рассмотрим треугольники D_4, D_5, D_6, D_7, $\mu_L(D_4)+\mu_L(D_5)+\mu_L(D_6)+\mu_L(D_7) = 1/16$, с вершинами в точках A_4, A_5, A_6, A_7 соответственно такие, что противоположные этим вершинам стороны лежат на соответствующих сторонах треугольников T_4, T_5, T_6, T_7. Рассмотрим замыкание множества $(T_4 \cup T_5 \cup T_6 \cup T_7) \setminus (D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7)$. Данное множество представляет собою объединение восьми треугольников $T_8 \cup \dots \cup T_{15}$. Аналогично определим набор треугольников $T_{2^n}, \dots, T_{2^{n+1}-1}$ равной площади для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (T_{2^n} \cup \dots \cup T_{2^{n+1}-1})$. Докажите, что

а) множество C гомеоморфно отрезку $[0,1]$, т. е. является образом кривой;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_L(T_{2^n} \cup \dots \cup T_{2^{n+1}-1}) > 0$, т. е. площадь множества C положительна.

23.51. Используя задачу 23.50, постройте пример открытого множества в $\mathbb{R}^2$, граница которого является множеством положительной площади (меры Лебега).

23.52. Докажите, что не существует непрерывного инъективного отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$.

23.53. Докажите, что существует непрерывное сюръективное отображение

а) из $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$;

б) из $(0,1)$ на $(0,1)^2$;

в) из $[0,1)$ на $[0,1)^2$;

г) из $[0,1)$ на $(0,1)^2$.

24. Кривые в метрических пространствах

Параметризованной кривой, или *путём*, будем называть непрерывное отображение $\gamma : I \to X$, где I — отрезок в $\mathbb{R}$, и (X, d) — некоторое метрическое пространство. Путь γ называется *простым*, если прообразом любой точки является отрезок. Путь γ называется *безостановочным*, если не существует такого отрезка $[a, b] \subset I$, $a < b$, что сужение пути γ на $[a, b]$ является постоянным отображением.

Говорят, что пути $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to X$ являются *эквивалентными*, если существуют две непрерывные сюръективные неубывающие функции $\varphi_1 : [a, b] \to [a_1, b_1]$ и $\varphi_2 : [a, b] \to [a_2, b_2]$ такие, что $\gamma_1 \circ \varphi_1(t) = \gamma_2 \circ \varphi_2(t)$ для любых $t \in [a, b]$. Таким образом, на множестве путей в X введено отношение эквивалентности (см. задачи 24.1, 24.2, 24.3). Классы эквивалентности будем называть (*ориентированными*) *кривыми*. Представители класса эквивалентности называются *параметризациями* кривой.

Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ — произвольное непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в метрическое пространство (X, d). Любой цепочке $P = (t_0, \dots, t_n)$, где $a \le t_0 < \dots < t_n \le b$, сопоставим число

$$v(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

Точная верхняя грань сумм $v(\gamma, P)$ на совокупности всех цепочек P отрезка $[a, b]$ называется *вариацией отображения* γ и обозначается $\bigvee\limits_a^b \gamma$. Говорят, что γ является отображением *ограниченной вариации* (или что путь γ — *спрямляем*), если величина $\bigvee\limits_a^b \gamma$ конечна. Множество спрямляемых путей в X будем обозначать через $BV([a, b]; X)$.

Для произвольного пути $\gamma : [a, b] \to X$ определим его *длину* $l_d(\gamma)$ равенством $l_d(\gamma) = \bigvee\limits_a^b \gamma$. Эквивалентные пути имеют одинаковую вариацию (см. задачу 24.14), поэтому можно говорить о вариации и длине кривой.

Будем говорить, что путь $\gamma : [a, b] \to X$ является параметризацией *длиною дуги* (*натуральной* параметризацией), если $l_d(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1$ для любого отрезка $[t_1, t_2] \subseteq [a, b]$.

Пусть $\Gamma_{x,y}$ — множество всех спрямляемых путей в метрическом пространстве (X, d), соединяющих точки x, y, т. е.

$\Gamma_{x,y} = \{\gamma \in BV([a,b];X) \mid \quad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y\}$. Для произвольных точек $x, y \in X$ определим величину $d^*(x,y) = \inf\{l_d(\gamma) \mid \quad \gamma \in \Gamma_{x,y}\}$. Полагаем, что $d^*(x,y) = +\infty$, если $\Gamma_{x,y} = \varnothing$. Путь γ конечной длины, на котором достигается инфимум, называтся *кратчайшим.*

Пусть (X,d) — метрическое пространство. Если $d^*(x,y) < \infty$ для любых $x, y \in X$, то функция d^* удовлетворяет аксиомам метрики (см. задачу 24.21). Если $d(x,y) = d^*(x,y)$ для любых $x, y \in X$, то метрика d называется *внутренней.*

24.1. (!) Докажите, что для любого пути $\gamma : [a,b] \to X$, где $a < b$, найдётся такой путь $\gamma' : [0,1] \to X$, и непрерывная сюръективная неубывающая функция $\varphi : [a,b] \to [0,1]$, что $\gamma(t) = \gamma' \circ \varphi(t)$ для любого $t \in [a,b]$.

24.2. (!)(см. 23.32) Докажите, что для любого пути $\gamma : [a,b] \to X$ найдётся такой безостановочный путь $\gamma' : [a,b] \to X$ и непрерывная сюръективная неубывающая функция $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, что $\gamma(t) = \gamma' \circ \varphi(t)$ для любого $t \in [a,b]$.

24.3. (!) Докажите, что определённое выше отношение эквивалентности путей обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

24.4. Докажите, что два безостановочных пути $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to X$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует непрерывная сюръективная строго возрастающая функция $\varphi : [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ такая, что $\gamma_1(t) = \gamma_2 \circ \varphi(t)$ для любого $t \in [a_1,b_1]$.

24.5. (!) Докажите, что если какая-либо параметризация кривой является простой, то таковы же и все ее другие параметризации.

24.6. Докажите, что простые кривые — это кривые без самопересечений, т. е. не существует таких $t_1 < t_2 < t_3$, что $\gamma(t_2) \neq \gamma(t_1) = \gamma(t_3)$.

24.7. Докажите, что для любой простой кривой в (X,d) найдётся параметризация $\gamma : [a,b] \to X$, которая является гомеоморфизмом отрезка $[a,b]$ и его образа $\gamma([a,b])$.

24.8. (!) Докажите, что если образы двух простых путей $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to X$, $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to X$ в (X,d) совпадают, то либо они эквивалентны, либо путь γ_1 эквивалентен пути γ_2', где $\gamma_2'(t) = \gamma_2(a_2 + b_2 - t)$ (путь γ_2' обратный к пути γ_2).

24.9. Докажите, что если для какого-то фиксированного a и всех t выполняется формула $L(\gamma|_{[a,t]}) = t-a$, то параметризация натуральная.

24.10. (!) Докажите, что каждая спрямляемая кривая $\gamma : [a,b] \to X$ имеет натуральную параметризацию, т. е. может быть представлена в виде $\gamma = \hat{\gamma}\circ\varphi$, где $\hat{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to X$ — натуральная параметризация и $\varphi : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ — неубывающее непрерывное отображение.

24.11. Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$ и $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to X$ две натуральные параметризации некоторой кривой в (X, d). Докажите, что $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ и $\gamma_1(t) = \gamma_2(t + a_2 - a_1)$ для любого $t \in [a_1, b_1]$.

24.12. Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — параметризованная кривая, удовлетворяющая условию Липшица. Докажите, что вариация кривой γ ограничена.

24.13. Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — C^1- гладкая параметризованная кривая в евклидовом пространстве. Докажите, что ее вариация ограничена, и при этом $\bigvee\limits_0^1 \gamma = l(\gamma) = \int\limits_0^1 |\gamma'(s)|_2\, ds$.

24.14. (!) Докажите, что эквивалентные пути имеют одинаковую вариацию.

24.15. Докажите $\bigvee\limits_a^b \gamma = \bigvee\limits_a^c \gamma + \bigvee\limits_c^b \gamma$ для любого пути $\gamma : [a,b] \to X$ и любой точки $c \in [a,b]$.

24.16. Докажите $\bigvee\limits_c^d \gamma \leq \bigvee\limits_a^b \gamma$ для любого пути $\gamma : [a,b] \to X$ при $[c,d] \subseteq [a,b]$.

24.17. Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ — произвольный спрямляемый путь. Докажите, что функция $v(t) = \bigvee_a^t \gamma$ непрерывна.

24.18. Докажите, что если последовательность спрямляемых путей (γ_n), определенных на $[a,b]$, удовлетворяет условию $\sup\limits_{s\in[a,b]} d(\gamma_n(s), \gamma(s)) \to 0$ при $n \to \infty$, то

а) γ является путём;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \bigvee\limits_a^b \gamma_n \geq \bigvee\limits_a^b \gamma$ (полунепрерывность вариации кривой).

24.19. Приведите пример последовательности спрямляемых путей (γ_n) и пути γ, определенных на $[a,b]$, таких, что

$$\sup_{s\in[a,b]} d(\gamma_n(s),\gamma(s)) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty, \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \bigvee_a^b \gamma_n = \infty.$$

24.20. (§ 25) Пусть $f : [a,b] \to X$, $g : [a,b] \to X$ — произвольные отображения ограниченной вариации в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Докажите, что для любых $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ отображение $(\lambda f + \mu g) : [a,b] \to X$ также имеет ограниченную вариацию.

24.21. (!) Пусть (X,d) — метрическое пространство и $d^*(x,y) < \infty$ для любых $x,y \in X$. Докажите, что функция $d^* : X \times X \to [0,\infty)$ является метрикой на множестве X.

24.22. Докажите, что любое открытое множество в (X,d) является открытым в (X,d^*).

24.23. Докажите, что для любого спрямляемого пути γ в (X,d) мы имеем $l_d(\gamma) = l_{d^*}(\gamma)$.

24.24. Докажите, что $d^* = (d^*)^*$.

24.25. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство. Докажите, что метрика d является внутренней, т. е. $d = d^*$, тогда и только тогда, когда выполняется одно из эквивалентных условий:

1) $\forall\, x,y \in X (x \neq y)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, z \in X (z \neq x, z \neq y)$

$$\sup\{d(x,z), d(z,y)\} \le d(x,y) + \varepsilon;$$

2) $\forall\, x,y \in X\ \forall\, r_1, r_2 > 0$

$$(r_1 + r_2 \le d(x,y) \Rightarrow d(B(x,r_1), B(y,r_2)) \le d(x,y) - r_1 - r_2;$$

3) $\forall\, x,y \in X\ \ \exists z \in X\ \ d(x,z) = d(z,y) = \frac{d(x,y)}{2}$;

4) $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall\, x,y \in X\ \ \exists z \in X\ \ |2d(x,z) - d(x,y)| \le \varepsilon$, $|2d(y,z) - d(x,y)| \le \varepsilon$.

24.26. Пусть $A \subset X$ — открытое линейно связное множество, и d_A — ограничение метрики d на A. Докажите, что

а) каждая точка $x \in A$ имеет такую окрестность $U \subset A$, что для любых точек $x,y \in U$ имеем $d^*(x,y) = (d_A)^*(x,y)$;

б) приведите пример такого множества $A \subset X$, что метрики $(d_A)^*$ и $d^*|_A$ не являются липшицево-эквивалентными.

24.27. Докажите, что если последовательность путей $\gamma_n : [0,1] \to X$ в компактном метрическом пространстве (X,d) равномерно ограничена по длине, то эта последовательность содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.

24.28. Докажите, что если последовательность кратчайших путей (γ_n) в пространстве с внутренней метрикой равномерно сходится при $n \to \infty$ к параметризованной кривой γ, то γ — тоже кратчайшая.

24.29. Приведите пример, показывающий, что предел равномерно сходящейся последовательности кратчайших в метрическом пространстве не обязательно является кратчайшей кривой.

24.30. Пусть (X,d) — компактное метрическое пространство, и точки $x, y \in X$ соединимы хотя бы одной спрямляемой кривой. Докажите, что существует кратчайшая, соединяющая точки x, y.

24.31. Метрическое пространство называется *ограниченно компактным*, если все его замкнутые ограниченные подмножества компактны. Пусть (X,d) — ограниченно компактное метрическое пространство, и точки $x, y \in X$ соединимы хотя бы одной спрямляемой кривой. Докажите, что существует кратчайшая, соединяющая точки x, y.

24.32. Докажите, что полное локально компактное метрическое пространство (X,d) (см. задачу 22.288) с внутренней метрикой является ограниченно компактным.

24.33. Пусть (X,d) — полное локально компактное метрическое пространство с внутренней метрикой. Докажите, что для любых двух точек $x, y \in X$, найдется кратчайшая, их соединяющая.

24.34. Приведите пример полного пространства с внутренней метрикой, в котором не существует кратчайших между некоторыми точками.

24.35. Пусть D — некоторая область полного локально компактного пространства с внутренней метрикой. Рассмотрим множество

$A_r = \{x \in D \mid d(x, \mathrm{Fr}(D)) < r\}$. Докажите, что

а) $A_r = \big(\bigcup\limits_{z \in \mathrm{Fr}(D)} B(z,r)\big) \cap D$;

б) при $R > r$ для любой точки $u \in A_R \setminus A_r$ верно соотношение $d(y, A_r) \leq R - r$.

24.36. Пусть $B(x_0, R)$ и $B(x_0, r)$ — два произвольных шара полного локально компактного пространства с внутренней метрикой X такие, что $R > r$. Докажите равенство

$$B(x_0, R) \setminus B(x_0, r) = \{x \in (X \setminus B(x_0, r)) \mid d(x, B(x_0, r)) \leq R - r\}.$$

24.37. Пусть $B(x_0, R)$ — некоторый шар полного локально компактного пространства с внутренней метрикой. Рассмотрим множество $A = \{x \in B(x_0, R) \mid d(x, \mathrm{Fr}(B(x_0, R))) \leq R - r\}$, где $r < R$. Докажите, что $A \subseteq B(x_0, R) \setminus B(x_0, r)$.

24.38. Может ли включение в задаче 24.37 быть строгим?

24.39. Пусть $B(x_0, R)$ — некоторый шар полного локально компактного пространства с внутренней метрикой. Рассмотрим множество $A = \{x \in B(x_0, R) \mid d(x, \mathrm{Fr}(B(x_0, R))) \leq r\}$. Докажите, что для любой точки $y \in A$

а) $d(y, B(x_0, R) \setminus A) \leq r$;

б) существует некоторый шар B_y радиуса $r/2$ такой, что $y \in B_y \subset A$.

24.40. Пусть $B(x_0, R)$ — некоторый шар полного локально компактного пространства с внутренней метрикой. Докажите, что $B(x_0, R + r) = \bigcup\limits_{x \in B(x_0, R)} B(x, r)$.

24.41. Приведите примеры полных локально компактных метрических пространств с внутренней метрикой, таких, что $B(x, R) \subset B(y, r)$, и при этом $R > r$.

24.42. Докажите, что если пространство с внутренней метрикой гомеоморфно отрезку, то оно изометрично некоторому другому отрезку.

24.43. Докажите, что функция $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$

$$= \min\Big\{ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (\min\{|y_1 - y_2|, b - |y_1 - y_2|\})^2},$$

$$\sqrt{(a - |x_1 - x_2|)^2 + (\min\{|y_1 + y_2|, |y_1 + y_2 - b|, |y_1 + y_2 - 2b|\})^2} \Big\}$$

является метрикой на множестве $[0, a) \times [0, b)$. Докажите, что метрическое пространство $([0, a) \times [0, b), \rho)$ гомеоморфно *бутылке Клейна*, которая определяется путем следующего отождествления: точки вида $(x, 0)$ и (x, b), а также точки вида $(0, y)$ и $(a, b - y)$

отождествляются при всех $x \in [0, a)$, $y \in [0, b)$. отождествляются также между собой четыре точки $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (a, b). Докажите, что метрика ρ является внутренней.

24.44. Докажите, что метрическое пространство из предыдущей задачи (бутылка Клейна) является *локально евклидовым*, т. е. существует число $\delta > 0$ такое, что шар $B(x, \delta)$, где $x \in ([0, a) \times [0, b), \rho)$, изометричен кругу на плоскости.

24.45. Докажите, что метрика тора (задача 22.41) является внутренней. Докажите также, что эта метрика локально евклидова.

24.46. Докажите, что метрика проективной плоскости (задача 22.39) является внутренней. Докажите также, что эта метрика не является локально евклидова.

24.47. Будем говорить, что на метрическом пространстве (X, d) задан *функционал длины* L, если на множестве Γ всех путей в X задана функция $L : \Gamma \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, удовлетворяющая условиям:

1. для любой точки $c \in [a, b]$ справедливо равенство $L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$;

2. функция $L(\gamma, a, t) = L(\gamma|_{[a,t]})$ непрерывна по переменной $t \in [a, b]$;

3. $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$ для любого гомеоморфизма φ;

4. для любой окрестности U_x точки x L-длины путей, соединяющих x с точками дополнения U_x, отделены от нуля, т. е.

$$\inf\bigl\{L(\gamma) \mid \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) \in X \setminus U_x\bigr\} > 0.$$

Для каждой пары точек $x, y \in X$, где X — линейно связно, определим величину

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to X, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y\}.$$

Докажите, что

а) $L(\gamma, a, a) = 0$ для любого функционала длины L и пути γ;

б) если функционал L принимает только конечные значения, то (X, d_L) — метрическое пространство;

в) длина пути является функционалом длины;

г) множество рациональных чисел не гомеоморфно пространству с метрикой d_L ни для какого функционала длины L.

д) объединение графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$, т.е. множества $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\}$ и оси Oy не гомеоморфно пространству с метрикой d_L ни для какого функционала длины L.

25. Нормированные векторные пространства

Векторным (линейным) пространством над полем $\mathbb{R}$ называется множество V, на котором определены операция $+ : V \times V \to V$ сложения и операция $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ умножения на элемент поля[52], которые удовлетворяют следующим условиям[53]:

1) для любых $x, y \in V$ справедливо равенство $x + y = y + x$;

2) для любых $x, y, z \in V$ справедливо равенство $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) существует $\overline{0} \in V$, что $x + \overline{0} = x$ для любого $x \in V$;

4) для любого $x \in V$ существует единственный $-x \in V$ такой, что $-x + x = \overline{0}$;

5) для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x, y \in V$ справедливо равенство $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

6) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x \in V$ справедливо равенство $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

7) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x \in V$ справедливо равенство $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

8) для любого $x \in V$ и единицы $1 \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $1x = x$.

Элементы векторного пространства V называют *векторами*, а элементы поля — *скалярами*.

Набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется *линейно зависимым* , если найдутся такие скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные 0, что $\alpha_1 v_1 + \ldots \cdots + \alpha_n v_n = \overline{0}$. Если в векторном пространстве V можно найти n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы, то говорят, что пространство V является *конечномерным*, точнее *n-мерным*, или имеет *размерность* n ($\dim V = n$). *Базисом* конечномерного векторного пространства V называется такой линейно независимый набор векторов, что любой вектор $x \in V$ можно представить как их линейную комбинацию. Известно (см., например, [54]), что любой набор из n линейно независимых векторов является базисом n-мерного векторного пространства. Подмножество векторного пространства V называется

[52] Аналогичным образом определяется векторное пространство над любым полем.

[53] Равенство $0x = \overline{0}$ для любого $x \in V$ следует из 6 и 8.

подпространством векторного пространства V, если оно образует векторное пространство, т. е. замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения на скаляр. Множество $V = \{0\}$ является подпространством, полагаем, что $\dim V = 0$.

Нормой называется функция $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\|x\| \geq 0$ для любого $x \in V$ и если[54] $\|x\| = 0$, то $x = \overline{0}$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in V$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in V$.

Нормированным векторным пространством $(V, |\cdot|)$ называется пара из векторного пространства V и определённой на нём нормы. Любая норма задаёт на векторном пространстве метрику $d(x, y) = \|x - y\|$ (см. задачу 25.1). Таким образом, любое векторное нормированное пространство рассматривают как метрическое и переносят на него все понятия, введённые для метрических пространств. Полное нормированное векторное пространство называют *банаховым*. Две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ называют *эквивалентными* в векторном пространстве V, если найдётся такая константа $C \geq 1$, что для любого $x \in V$ справедливы неравенства $\frac{1}{C}\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C\|x\|'$.

Скалярным произведением называется функция $(\,\cdot\,,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(x, x) \geq 0$ и если $(x, x) = 0$, то $x = \overline{0}$;
2. $(x, y) = (y, x)$ для любых $x, y \in V$;
3. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ для любых $x, y_1, y_2 \in V$;
4. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$.

Векторное пространство с фиксированным в нём скалярным произведением называется *евклидовым*. Скалярное произведение определяет в векторном пространстве норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ (см. задачу 25.6). Если не указано другое, будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано скалярное произведение

$$((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

которое определяет евклидову норму и евклидову метрику. Евклидову норму вектора называют длиной вектора. Вектора $x, y \in V$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Базис конечномерного евклидова пространства называется *ортонормированным*, если состоит из попарно ортогональных векторов единичной длины. Стандартный ортонор-

[54] Вторая часть этого условия не выполнена для интегральной нормы (§ 20).

мированный базис в $\mathbb{R}^n$ состоит из векторов $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$, где $i = 1, \ldots, n$.

Пусть V_1 и V_2 — векторные пространства. *Линейным отображением* называется функция $A : V_1 \to V_2$, удовлетворяющая равенству

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

для любых $x, y \in V_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если $V_2 = \mathbb{R}$, то линейное отображение называется *линейным функционалом.* Множество линейных отображений из V_1 в V_2 обозначается через $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ само является векторным пространством с естественным образом определёнными операциями $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$ и $(\alpha A)(x) = \alpha(Ax)$.

Каждое линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ однозначно[55] определяется матрицей $[a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, где $a_{i,j} = (A(e_j), e_i)$. Нетрудно видеть, что $A(x)$ равняется произведению матрицы $[a_{i,j}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ на вектор (столбец) x. В дальнейшем мы будем отождествлять линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и соответствующую ему матрицу.

25.1. Свойства нормы

25.1. (!) Пусть V — нормированное векторное пространство. Докажите, что определённая равенством $d(x, y) = \|x - y\|$ функция d является метрикой на V.

25.2. (!) Докажите, что в нормированном векторном пространстве замыкание открытого шара является замкнутым шаром того же радиуса.

25.3. (!) Докажите, что две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ порождают топологически эквивалентные метрики тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

25.4. Является ли функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ нормой, если

а) $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + |x_3 + x_1|$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + |x_3 - x_1|$.

[55] Вообще говоря, компоненты матрицы линейного отображения зависят от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$.

25.5. (!) Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное векторное пространство. Докажите, что отображение $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$, определённое равенством $\Phi(\lambda, x) = \lambda x$ непрерывно в метрике декартова произведения (см. задачу 22.33). Является ли отображение Φ равномерно непрерывным? Является ли отображение Φ равномерно непрерывным, если одна из переменных фиксирована?

25.6. (!) Пусть V — евклидово пространство. Определим $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Докажите, что

а) $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ для любых $x, y \in V$

(**неравенство Коши — Буняковского — Шварца**);

б) $\|\cdot\|$ — норма на V.

25.7. (!) Пусть V — евклидово пространство. Докажите, что для любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (равенство параллелограмма).

25.8. Докажите, что отображение $F : V \times V \to \mathbb{R}$, определённое равенством $F(x, y) = (x, y)$, является непрерывным в метрике декартова произведения.

25.9. (!) Пусть $e'_1 \dots, e'_k$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^k$. Числа $\alpha_i = (a, e'_i)$, где $i = 1, \dots k$ называются *координатами* вектора $a \in \mathbb{R}^k$ в базисе $e'_1 \dots, e'_k$. Докажите, что

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i,$$

где α_i и β_i — координаты векторов a и b соответственно относительно некоторого ортонормированного базиса.

25.10. Пусть $a_1, \dots, a_m$ — набор векторов из $\mathbb{R}^n$. Определим функцию $F(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (a_i, x)}$. Выясните, какие условия на набор векторов $a_1, \dots, a_m$ необходимы и достаточны для того, чтобы функция F являлась нормой.

25.11. (!) Пусть $x, y \in \mathbb{R}^k$ и $\|(x_1, \dots, x_k)\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$. Докажите **неравенство Гёльдера** $|(x, y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ при $1 < p, q < \infty$ и

$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. Докажите, что при $x\neq\overline{0}$ неравенство Гёльдера становится равенством тогда и только тогда, когда $y_i=\operatorname{sgn}(x_i)\lambda|x_i|^{p-1}$ для некоторого $\lambda\geq 0$ при любом $i=1,\ldots,k$.

25.12. (!) Пусть $x,y\in\mathbb{R}^n$. Докажите **неравенство Минковского** $\|x+$ $+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p$ при $1\leq p<\infty$. Докажите, что при $p>1$ и $x\neq 0$ это неравенство становится равенством тогда и только тогда, когда $y=\lambda x$ для некоторого $\lambda\geq 0$.

25.13. (!) Докажите, что для любого $p\geq 1$ отображение $\|\cdot\|_p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, определённое равенством $\|(x_1,\ldots,x_k)\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}$, является нормой ($\ell_p$-нормой).

25.14. (!) Докажите, что отображение $\|\cdot\|_\infty:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, определённое равенством $\|(x_1,\ldots,x_k)\|_\infty=\max_i|x_i|$, является нормой ($\ell_\infty$-нормой).

25.15. Докажите, что в пространстве $(\mathbb{R}^k,\|\cdot\|_p)$ при $1<p<\infty$ единичный шар является строго выпуклым, т. е. если $x\neq y$ и $\|x\|_p=\|y\|_p=1$, то $\|(x+y)/2\|_p<1$.

25.16. Пусть $e'_1,\ldots,e'_k$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathbb{R}^k$. Определим отображение $\|\cdot\|'_p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ равенством $\|x\|'_p=$ $=\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|(x,e'_i)|^p\right)^{1/p}$. Докажите, что

а) отображение $\|\cdot\|'_p$ является нормой;

б) при $k>1$ и $p\neq 2$ норма $\|\cdot\|'_p$ не совпадает с нормой $\|\cdot\|_p$;

в) нормы $\|\cdot\|'_2$ и $\|\cdot\|_2$ совпадают для любого ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^k$.

25.17. Докажите, что при $k>1$ для любого $0<p<1$ отображение $f_p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, определённое равенством $f_p(x_1,\ldots,x_k)=$ $=\left(\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i|^p\right)^{1/p}$, нормой не является.

25.18. Докажите, что для любого $0<p<1$ функция $\varrho((x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k))=\sum\limits_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^p$ является метрикой на $\mathbb{R}^k$.

25.19. Охарактеризуйте все подмножества $\mathbb{R}^k$, на которых неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_p$ превращается в равенство для некоторого $p \in [1, \infty]$.

25.20. (!) Пусть $p \geq 1$. Докажите для любого $x \in \mathbb{R}^k$ справедливы неравенства
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_\infty.$$

25.21. (!) Пусть $1 \leq p \leq q$. Докажите для любого $x \in \mathbb{R}^k$ справедливо неравенство $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

25.22. Докажите, что при $k \geq 2$, $1 < p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$ любая изометрия, переводящая 0 в 0, между метрическими пространствами $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_p)$ и $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_q)$ является линейным отображением.

25.23. Найдите все изометрии между метрическими пространствами $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

25.24. Докажите, что при $k \geq 3$ метрические пространства $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ неизометричны.

25.25. Докажите, что при $1 < p < q < \infty$ метрические пространства $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ и $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)$ неизометричны.

25.26. Докажите, что при $n \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и $p \neq q$ метрические пространства $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ и $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ неизометричны[56].

25.27. Найдите все изометрические отображения пространства $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ на себя при $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$.

25.28. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$. Определим *сопряжённую* норму равенством $\|y\|^* = \sup\limits_{\|x\|=1} |(x, y)|$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что

а) $\|\cdot\|^*$ — является нормой;

б) $(\|\cdot\|^*)^* = \|\cdot\|$.

25.29. Пусть $1 < p, q < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что $\|x\|_p^* = \|x\|_q$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Далее будем обозначать $q = p^*$.

25.30. Докажите, что $\|x\|_1^* = \|x\|_\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

[56] Для решения этой задачи можно использовать теорию дифференцирования функций многих переменных, которая будет изложена в 3-й части данного учебного пособия (см. также [38]).

25.31. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное векторное пространство, $a \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Докажите, что отображение $F(x) = a + \alpha x$ является гомеоморфизмом пространства X.

25.32. Пусть V — векторное нормированное пространство, содержащее более одной точки. Докажите, что V не компактно.

25.33. (!) Докажите, что любой замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ является компактным множеством.

25.34. Докажите, что произвольное конечномерное подпространство нормированного векторного пространства является замкнутым множеством.

25.35. Пусть $L \neq V$ — замкнутое подпространство в нормированном векторном пространстве $(V, \|\cdot\|)$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся вектор $x \in V \setminus L$ такой, что для всех $y \in L$ справедливо неравенство $\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|$.

25.36. (!) Докажите, что если $\dim V = \infty$, то единичный шар в нормированном векторном пространстве X не является вполне ограниченным.

25.37. Докажите, что если в нормированном векторном пространстве V найдётся компактный шар ненулевого радиуса, то все замкнутые шары в нём компактны.

25.38. Докажите, что локально компактное нормированное векторное пространство конечномерно.

25.39. Докажите, что нормированное векторное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда в нём любой замкнутый шар компактен.

25.40. Пусть V — векторное нормированное пространство и $f : V \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция. Докажите, что существует такая константа $C > 0$, что $|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)$ для любого вектора $x \in V$.

25.41. Пусть V — конечномерное векторное нормированное пространство и $f : V \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция. Докажите, что существует последовательность липшицевых функций, равномерно сходящаяся к f.

25.42. Пусть V — векторное нормированное пространство, $K_1, K_2 \subset V$ — компактные множества. Докажите, что
$K_1 + K_2 = \{x + y \mid x \in K_1, y \in K_2\}$ — компактное множество.

25.43. Пусть V — векторное нормированное пространство, $K \subset V$ — компактное множество, M — замкнутое множество. Докажите, что множество $K + M$ замкнуто.

25.44. Докажите, что замыкание выпуклого множества является выпуклым множеством.

25.45. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью $\overset{\circ}{A}$. Докажите, что $\overline{\overset{\circ}{A}} = A$.

25.46. Пусть V — векторное нормированное пространство. *Выпуклая оболочка* $C(A)$ непустого множества $A \subseteq V$ определяется как пересечение выпуклых множеств, содержащих множество A. Докажите, что

а) $C(A) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\}$;

б) если $A \subset \mathbb{R}^k$, то $C(A) = \{\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \mid x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ (**теорема Каратеодори**);

в) $C(A + B) = C(A) + C(B)$.

25.47. Докажите, что выпуклая оболочка вполне ограниченного множества есть вполне ограниченное множество.

25.48. а) Докажите, что выпуклая оболочка компактного множества в $\mathbb{R}^n$ есть компактное множество.

b) Пусть $f_n(x) = (x/2)^n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $f_0(x) \equiv 0$. Докажите, что множество $K = \{f_0, f_1 \ldots\}$ компактно в $C[0,1]$, а его выпуклая оболочка не замкнута.

25.49. Докажите, что векторное нормированное пространство, в котором выпуклая оболочка любого замкнутого множества замкнута, является одномерным или нульмерным.

25.50. Докажите, что непустое множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой является замкнутым и выпуклым тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ найдётся единственный $y \in A$ такой, что $\widetilde{d}(x, A) = \|x - y\|_2$ (см. задачу 22.29).

25.51. Пусть A — замкнутое, а B — компактное множество, непересекающееся с A в конечномерном векторном нормированном пространстве. Докажите, что найдутся такие векторы $a \in A$ и $b \in B$, что $\inf\limits_{x \in A, y \in B} \|x - y\| = \|a - b\|$.

25.52. Пусть A — замкнутое множество в метрическом пространстве (X, d) и $f : A \to \mathbb{R}^k$ — непрерывное отображение. Докажите, что отображение

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A; \\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} 2^{-i}\varphi_i(x) f(e_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k} 2^{-i}\varphi_i(x)}, & \text{если } x \notin A, \end{cases}$$

где $\varphi_i(x) = \max\{2 - \frac{|x - e_i|_2}{\tilde{d}(x, A)}, 0\}$, является непрерывным на X и $\overline{f}(X) \subseteq C(f(A))$.

25.53. Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^k$. Докажите неравенство $f((x_1, \ldots, x_k)) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| f(e_i)$.

25.54. (!) Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^k$. Докажите, что функция f непрерывна в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.

25.55. (!) Докажите, что все нормы в $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, эквивалентны.

25.56. (!) Докажите, что пределы последовательностей в $\mathbb{R}^n$, а также пределы функций, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, не зависят от того, какая норма задана в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.

25.57. (!) Докажите, что последовательность векторов (x_n), где $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$, сходится[57] к $a = (a^1, a^2, \ldots, a^k) \in \mathbb{R}^k$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $x_n^i \to a^i$ при $n \to \infty$ для любых $i = 1, \ldots, k$ (**координатный критерий сходимости**).

25.58. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ и $f = (f_1, \ldots, f_k)$. Докажите, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = (A_1, \ldots, A_k)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = A_i$ при любых $i = 1, \ldots, k$.

[57] Здесь и в дальнейшем мы не указываем норму, в которой сходится последовательность, поскольку в $\mathbb{R}^k$ последовательность векторов сходится или не сходится одновременно во всех нормах.

25.59. Пусть f — многочлен второй степени от двух переменных. Докажите, что функция $|f(x,y)|$ принимает на $\mathbb{R}^2$ своё минимальное значение. Будет ли данное утверждение справедливо для произвольного многочлена от двух переменных? Рассмотрите пример $f(x,y) = (xy-1)^2 + y^2$.

25.60. Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и найдётся такое $a \in \mathbb{R}$, что множество $\{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) \leq a\}$ непусто и ограничено. Докажите, что найдётся такая $x_0 \in \mathbb{R}^k$, что $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^k} f(x)$.

25.61. Докажите, что любая норма в $\mathbb{R}$ определяется равенством $\|x\| = \alpha|x|$ для некоторого $\alpha > 0$.

25.62. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что открытый шар $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ является открытым, выпуклым и симметричным относительно начала координат множеством.

25.63. (!) Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — непустое, ограниченное, открытое в евклидовой норме, выпуклое и симметричное относительно начала координат множество. Докажите, что найдётся такая норма в $\mathbb{R}^n$, что множество B совпадает с шаром $B(0,1)$ в этой норме.

25.64. Пусть $a, b, c, d > 0$. Найдите формулу для нормы вектора $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, если единичная сфера в этой норме задана уравнением $ax^4 + by^4 + cz^4 = d$.

25.65. Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде не более чем счётного объединения открытых шаров в произвольной норме.

25.66. Докажите, что открытый куб в $\mathbb{R}^n$ нельзя представить в виде объединения попарно непересекающихся открытых шаров в евклидовой норме.

25.67. (!) Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде не более чем счётного объединения непересекающихся полуоткрытых кубов вида $[a_1, a_1 + r) \times \cdots \times [a_n, a_n + r)$.

25.68. Докажите, что любое непустое ограниченное выпуклое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно открытому единичному шару в евклидовой норме.

25.69. Укажите линейное отображение, переводящее окружность единичного радиуса с центром в начале координат на эллипс с длинами полуосей a, b с центром в начале координат.

25.70. Докажите, что любое компактное выпуклое множество C с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно замкнутому шару $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$, причём гомеоморфизм отображает $\mathrm{Fr}(C)$ на $\mathrm{Fr}(\overline{B})$.

25.71. Пусть C — некоторое непустое выпуклое компактное множество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что множество C гомеоморфно замкнутому шару $\overline{B} \subset \mathbb{R}^k$ для некоторого $k \leq n$, при этом множество C содержится в некоторой k-мерной плоскости в $\mathbb{R}^n$, т. е. в множестве вида $a+L$, где $a \in \mathbb{R}^n$ и L — k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$.

25.72. (!) Пусть V — нормированное векторное пространство $a, x_n \in V$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $x_n \to a$, то $\|x_n\| \to \|a\|$ при $n \to \infty$.

25.73. (!) Пусть V — нормированное векторное пространство, $a, b \in V$, $x_n, y_n \in V$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $x_n \to a$ и $y_n \to b$, то $(x_n + y_n) \to (a + b)$ при $n \to \infty$.

25.74. (!) Пусть V — нормированное векторное пространство, $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{R}$, и $a, x_n \in V$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $x_n \to a$ и $\alpha_n \to \beta$, то $\alpha_n x_n \to \beta a$ при $n \to \infty$.

25.75. (!) Пусть V — нормированное векторное пространство, $x_n \in V$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{n \geq 1} x_n$ называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ имеет предел. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n \geq 1} x_n$ сходится, то $x_n \to \overline{0}$ при $n \to \infty$.

25.76. (!) Пусть V — банахово пространство, $x_n \in V$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall m, k \in \mathbb{N} \; \left(n \leq m < k \Rightarrow \| \sum_{i=m}^{k} x_i \| < \varepsilon \right)$$

(**критерий Коши**).

25.77. (!) Пусть ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится. Докажите неравенство $\|\sum\limits_{n\geq 1} x_n\| \leq \sum\limits_{n\geq 1} \|x_n\| \leq \infty$.

25.78. (!) Пусть V — банахово пространство, $x_n \in V$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если числовой ряд $\sum\limits_{n\geq 1} \|x_n\|$ сходится. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

25.79. Докажите, что нормированное векторное пространство V является полным тогда и только тогда, когда любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

25.2. Линейные отображения

25.80. (!) Пусть V и W — векторные пространства. Докажите, что $\mathcal{L}(V, W)$ — векторное пространство.

25.81. (!) Пусть V и W — нормированные векторные пространства и $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) отображение A непрерывно;

б) отображение A непрерывно в точке $\overline{0}$;

в) $\sup\limits_{\|x\|_V=1} \|A(x)\|_W < \infty$.

25.82. (!) Пусть V и W — векторные пространства. Пусть $\mathcal{BL}(V, W)$ — множество непрерывных линейных отображений из V в W. Докажите, что

а) $\mathcal{BL}(V, W)$ — векторное пространство;

б) функция $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_V=1} \|A(x)\|_W$ является нормой в $\mathcal{BL}(V, W)$;

в) если пространство W полное, то и пространство $\mathcal{BL}(V, W)$ полное.

25.83. (!) Пусть V и W — нормированные векторные пространства. Докажите, что если $\dim V < \infty$, то любое линейное отображение $A \in \mathcal{L}(V, W)$ непрерывно.

25.84. (!) Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Определим $\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\beta$, где $\|\cdot\|_\alpha$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, а $\|\cdot\|_\beta$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^m$. Докажите, что $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ — норма в векторном пространстве линейных отображений $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

25.85. Пусть $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ — две нормы в $\mathbb{R}^n$ и найдутся константы $0 < c < C < \infty$, что $c\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le C\|x\|_\alpha$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что
$$\frac{c}{C}\|A\|_{\alpha,\alpha} \le \|A\|_{\beta,\beta} \le \frac{C}{c}\|A\|_{\alpha,\alpha}$$
для любого $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

25.86. (!) Пусть $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. Докажите, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда для любых $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ $a_n(i,j) \to a(i,j)$ при $n \to \infty$, где $a_n(i,j)$ и $a(i,j)$ компоненты матриц A_n и A соответственно.

25.87. (!) Пусть $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. Докажите, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $A_n x \to Ax$ для любого $x \in \mathbb{R}^k$.

25.88. (!) Пусть $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. Докажите, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $(A_n x, y) \to (Ax, y)$ для любых $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$.

25.89. (!) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $\|Ax\|_\beta \le \|A\|_{\alpha,\beta}\|x\|_\alpha$, где $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ — некоторые нормы в $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ соответственно.

25.90. (!) Пусть V — банахово пространство и $A, B \in \mathcal{BL}(V, V)$. Докажите, что $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

25.91. (!) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$. Докажите неравенство $\|AB\|_{\alpha,\gamma} \le \|A\|_{\beta,\gamma}\|B\|_{\alpha,\beta}$, где $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$, $\|\cdot\|_\gamma$ — некоторые нормы в $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^l$ соответственно.

25.92. Пусть r — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\ge0} a_n x^n$, V — банахово пространство, $X \in \mathcal{BL}(V, V)$ и $\|X\| < r$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\ge0} a_n X^n$ сходится в норме пространства $\mathcal{BL}(V, V)$.

25.93. *Спектральным радиусом* $\rho(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ называется модуль максимального (по модулю) собственного числа[58] оператора.

а) Докажите, что $\rho(A) \le \|A\|$.

б) Пусть r — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\ge0} a_n x^n$. Докажите, что если $\rho(A) < r$, то ряд $\sum\limits_{n\ge0} a_n A^n$ сходится в норме пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

в) Обозначим через $\mathcal{N}$ множество норм в $\mathbb{R}^m$. Докажите, что $\rho(A) = \inf\limits_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \sup\limits_{\|x\|\ge1} \|Ax\|$.

г) Докажите, что $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} (\|A^k\|)^{1/k}$, где предел не зависит от выбора операторной нормы (см. задачу 25.82).

25.94. (!) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Определим матричную экспоненту равенством $\exp(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n/n!$, где $A^0 = E$ — тождественное отображение ($Ex = x$).

а) Докажите, что отображение $\exp(A)$ определено для любого $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

б) Докажите, что для любого невырожденного оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ найдётся такой оператор $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$, что $A = \exp(B)$.

25.95. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Докажите равенство $\exp(\alpha A + \beta A) = \exp(\alpha A)\exp(\beta A)$.

25.96. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $AB = BA$. Докажите равенство $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

25.97. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Докажите формулы:

а) $\exp(A+B) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\exp(\frac{1}{n}A)\exp(\frac{1}{n}B)\big)^n$ (**формула Троттера**);

б) $\exp(AB-BA) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\exp(\frac{1}{n}A)\exp(\frac{1}{n}B)\exp(-\frac{1}{n}A)\exp(-\frac{1}{n}B)\big)^{n^2}$;

в)[59] $\det\exp(A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

[58] Собственные числа рассматриваются для $\mathbb{C}$-линейного продолжения оператора A, определяемого по формуле $A(x+iy) = Ax + iAy$, $x, y \in \mathbb{R}^m$.

[59] Следом $\mathrm{tr}(A)$ оператора A называется сумма его собственных чисел.

25.98. (!) Пусть $A_n, A, \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, $B_n, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ и $A_n \to A$, $B_n \to B$ при $n \to \infty$. Докажите, что $A_n B_n \to AB$ при $n \to \infty$.

25.99. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Докажите равенства:

а) $\|A\|_{p,q} = \|A^{\mathrm{T}}\|_{q^*,p^*}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$;

б) $\|A\|_{2,2}^2 = \|AA^{\mathrm{T}}\|_{2,2} = \|A^{\mathrm{T}}A\|_{2,2}$.

25.100. (!) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ — нормы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Докажите равенство $\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{\|x\|_\alpha = \|y\|_\beta = 1} |(Ax, y)|$.

25.101. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Докажите, что $\|A\|_{2,2} = 1$, если отображение A является ортогональным, т. е. $(Ax, Ay) = (x, y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

25.102. (!) Пусть $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $A^{\mathrm{T}} = A$. Докажите, что $\|A\|_{2,2}$ равняется максимуму модулей собственных чисел отображения A.

25.103. (!) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Докажите, что $\|A\|_{2,2} = \sqrt{|\lambda|}$, где λ — максимальное по модулю собственное число отображения AA^{T}.

25.104. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и отображение A обратимо. Докажите неравенство $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$.

25.105. а) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ и $\|A\| < 1$. Докажите, что отображение $(E - A)$ обратимо и справедливо равенство $(E - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$, где $A^0 = E$, E — тождественное отображение $E(x) = x$.

б) Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ и $\rho(A) < 1$. Докажите утверждение пункта а).

25.106. Докажите, что отображение $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ непрерывно.

25.107. Докажите, что множество обратимых линейных отображений $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ открыто, и отображение f, действующее по правилу $f(A) = A^{-1}$, является непрерывным на множестве $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.

25.108. Пусть $a_{i,j}$ — компоненты матрицы линейного отображения $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Докажите, что $\|A\|_{\infty,\infty} = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

25.109. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Определим скалярное произведение $\langle A, B\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$, где $a_{i,j} = (A(e_j), e_i)$ и $b_{i,j} = (B(e_j), e_i)$ — компоненты матриц отображений A и B в стандартных ортонормированных базисах. Докажите, что величина $\langle A, B\rangle$ не изменится, если в определении вместо стандартных базисов рассмотреть произвольные ортонормированные базисы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

25.110. В пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ определим функцию $|||A||| = \langle A, A\rangle^{1/2}$. Докажите, что

а) $|||\cdot|||$ — норма в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$;

б) $|||A||| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|Ae_i'\|^2\right)^{1/2}$, где $e_1', \ldots, e_n'$ — произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

25.111. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Докажите неравенства:

а) $\|A\|_{2,2} \le |||A|||$;

б) $|||AB||| \le \|A\|_{2,2}|||B|||$;

в) $|||AB||| \le |||A|||\|B\|_{2,2}$;

г) $|||A||| = |||A^{\mathrm{T}}|||$.

25.112. Докажите, что в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ нельзя ввести скалярное произведение $\langle\langle\ ,\rangle\rangle$ такое, что $\|A\|_{2,2}^2 = \langle\langle A, A\rangle\rangle$ для всех $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

25.113. (!) Линейный функционал L на некотором подпространстве векторного пространства вещественных функций называется *положительным*, если он неотрицателен на функциях, принимающих только неотрицательные значения. Докажите, что если L — положительный линейный функционал, то из $f \ge g$ следует $L(f) \ge L(g)$.

25.114. (!) Пусть $L(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Докажите, что L — ограниченный положительный линейный функционал на $R[a, b]$, и найдите его норму.

25.115. Пусть L — положительный линейный функционал на $C[a, b]$. Докажите, что функционал L ограничен.

25.116. Пусть μ — произвольная аддитивная функция промежутков и $L_\mu(f) = \int_a^b f\,d\mu$. Докажите, что L_μ — линейный ограниченный функционал, и найдите его норму на множестве а) ступенчатых функций с интегральной нормой $\|\varphi\| = \int_a^b |\varphi|\, d\mu$;

б) ступенчатых функций с равномерной нормой
$\|\varphi\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|$.

25.117. Пусть μ — произвольная аддитивная функция промежутков и $L_\mu(f) = \int_a^b f\, d\mu$. Докажите, что L_μ — линейный ограниченный функционал на нормированном пространстве $C[a,b]$, и найдите его норму.

25.118. Пусть L — положительный линейный функционал на множестве ступенчатых функций. Докажите, что функция промежутков $\mu(P) = L(\chi_P)$ является аддитивной.

25.119. Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$, $f_n \in C[a,b]$ и (f_n) — монотонная ограниченная последовательность, т. е. $|f_n| \le h \in C[a,b]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $(L(f_n))$ имеет конечный предел.

25.120. Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$ и $[c,d] \subseteq [a,b]$. Определим непрерывную функцию

$$g_n^{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [c,d]; \\ 0, & \text{если } x \notin (c - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}), \end{cases}$$

аффинно продолженную на интервалах $(c-\frac{1}{n}, c)$ и $(d, d+\frac{1}{n})$. Пусть $g_n^{(c,d]} = g_n^{[c,d]} - g_n^{[c,c]}$; $g_n^{[c,d)} = g_n^{[c,d]} - g_n^{[d,d]}$; $g_n^{(c,d)} = g_n^{[c,d)} - g_n^{[c,c]}$. Для произвольного промежутка P определим $\mu(P) = \lim\limits_{n\to\infty} L(g_n^P)$. Докажите, что функция μ определена для любого промежутка $P \subseteq [a,b]$ и конечно аддитивна.

25.121. Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$ и μ — аддитивная функция, определённая в задаче 25.120. Пусть $\varphi \in \mathrm{Step}[a,b]$, $f \in C[a,b]$ и $f - \varphi \ge \varepsilon > 0$. Докажите неравенство $L(f) \ge \int_a^b \varphi\, d\mu$.

25.122. (!) Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$ и μ — аддитивная функция, определённая в задаче 25.120. Докажите, что $L(f) = \int_a^b f\, d\mu$ для любой функции $f \in C[a,b]$ (**теорема Рисса**).

25.123. Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$ и μ — аддитивная функция, определённая в задаче 25.120. Докажите равенство $\|L\| = \mu([a,b])$.

25.124. Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$ и μ — аддитивная функция, определённая в задаче 25.120. Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ — последовательность вложенных интервалов и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Докажите, что $\mu(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

25.125. (!) Пусть L — положительный функционал на $C[a,b]$ и μ — аддитивная функция, определённая в задаче 25.120. Докажите, что функция μ счётно аддитивна, т. е. является мерой.

25.3. Предел функции в конечномерном нормированном пространстве

25.126. (!) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n) = A$. Докажите, что
$\lim\limits_{x_i\to a_i} f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n) = A$ для любого $i = 1,\dots,n$.

25.127. Пусть $f(x_1,x_2) = \frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$. Докажите, что $\lim\limits_{x_1\to0}(\lim\limits_{x_2\to0} f(x_1,x_2)) = 1$, $\lim\limits_{x_2\to0}(\lim\limits_{x_1\to0} f(x_1,x_2)) = -1$, а предела $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ не существует.

25.128. (!) Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1,x_2) = A$. Докажите, что $\lim\limits_{x_1\to a_1}(\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)) = A$, если предел $\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$ существует для любого $x_1 \in (a_1-\varepsilon, a_1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

25.129. Пусть $f(x_1,x_2) = \frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$. Докажите, что $\lim\limits_{x_1\to0}(\lim\limits_{x_2\to0} f(x_1,x_2)) = \lim\limits_{x_2\to0}(\lim\limits_{x_1\to0} f(x_1,x_2)) = 0$, но предела $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ не существует.

25.130. Приведите пример такой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что все $n!$ повторных пределов $\lim\limits_{x_{i_1}\to0}(\dots(\lim\limits_{x_{i_n}\to0} f(x_1,\dots,x_n))\dots)$, где $(i_1,\dots,i_n)$ — некоторая перестановка набора $(1,\dots,n)$, существуют и попарно различны.

25.131. (!) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = A$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $(\overline{x}_n)$, из $\overline{x}_n \to \overline{a}$ следует, что $f(\overline{x}_n) \to A$ при $n \to \infty$ (**критерий Гейне**).

25.132. Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x})=A$. Докажите, что если $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{t\to 0} g_i(t)=a_i$ для любого $i=1,\dots,n$, то $\lim\limits_{t\to 0} f(g_1(t),\dots,g_n(t))=A$.

25.133. (!) Пусть

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}(x_1+x_2)(2+\sin\frac{1}{x_1})(2+\sin\frac{1}{x_2}) & \text{при } x_1x_2\neq 0;\\ 0 & \text{при } x_2x_1=0.\end{cases}$$

Докажите, что $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)=0$, но пределов $\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ и $\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ не существует при $x_1\neq 0$ и $x_2\neq 0$ соответственно.

25.134. (!) Пусть $f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2x_2}{x_1^4+x_2^2}$. Докажите, что $\lim\limits_{t\to 0} f(\alpha t,\beta t)=0$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, т. е. существует предел по любому лучу, выходящему из точки $(0,0)$, но предела $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ не существует.

25.135. Пусть $f(x_1,x_2)=x_1^2e^{-x_1^2+x_2}$. Докажите, что $\lim\limits_{t\to\infty} f(\alpha t,\beta t)$ совпадают для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, но предела $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ не существует.

25.136. Найдите пределы (если они существуют):

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}$;

б) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-x-y}$;

в) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

г) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{x+y}$.

25.137. Найдите пределы (если они существуют):

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

б) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

г) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$.

25.138. (!) Пусть $n,m,k\in\mathbb{N}$. Докажите, что $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^ky^m}{(x^2+y^2)^{n/2}}=0$ тогда и только тогда, когда $k+m<n$.

25.139. (!) Пусть $n,m,k\in\mathbb{N}$. Докажите, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^ky^m}{(x^2+y^2)^{n/2}}=0$ тогда и только тогда, когда $k+m>n$.

25.140. Найдите пределы (если они существуют):

а) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cos(x^2+y)}{1-x^2y}\right)^{\frac{1}{x^4+y^2}}$;

б) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1+\operatorname{arctg}(xy)}{\cos(x-y)}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

в) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(e^{(x+y)^2}(1-2\arcsin(xy))\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

г) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\cos(x+y)}{(1-2xy)\cos(x-y)}\right)^{\frac{1}{|x|^3+|y|^3}}$;

д) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1+\sin(x^2y^2)}{\cos(x^2+y^2)}\right)^{\frac{1}{x^4+y^4}}$;

е) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos x^2-y^2/2)}{x^2+y^2}$.

25.141. Исследуйте на непрерывность функции:

а) $f_1(x_1,\dots,x_n)=\min\{x_1,\dots,x_n\}$;

б) $f_2(x_1,\dots,x_n)=\max\{x_1,\dots,x_n\}$.

25.142. (!) Докажите, что если функция $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, то функции $f_b(x)=f(x,b)$ и $f_a(y)=f(a,y)$ являются непрерывными в точках $a\in\mathbb{R}$ и $b\in\mathbb{R}$ соответственно.

25.143. Найдите точки разрыва функции

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{y} & \text{при } y\neq 0,\\ 0 & \text{при } y=0.\end{cases}$$

25.144. (!) Докажите, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0, y=0\end{cases}$$

разрывна в $(0,0)$, однако функции $f_b(x)=f(x,b)$ и $f_a(y)=f(a,y)$ являются непрерывными при всех $a,b\in\mathbb{R}$.

25.145. Существует ли $a \in \mathbb{R}$, при котором функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/|x+y|}}{x+y} & \text{при } x+y \neq 0, \\ a & \text{при } x+y = 0 \end{cases}$$

является непрерывной в $\mathbb{R}^2$?

25.146. Выясните, непрерывна ли функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 4\mathrm{arctg}^2 \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ \pi^2 & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

25.147. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество и функция $f : U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е. $|f(x,y) - f(x,y')| \leq L|y - y'|$ для некоторого $L = \mathrm{const}$ и любых $(x,y),(x,y') \in U$, и непрерывна по переменной x, т. е. для любого y функция $f_y(x) = f(x,y)$ непрерывна. Докажите, что функция f непрерывна на U.

25.148. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, функция $f : U \to \mathbb{R}$ непрерывна по одной переменной (при фиксированной другой переменной) и равномерно непрерывна по другой. Докажите, что функция f непрерывна на U и непрерывно продолжается на $\overline{U}$.

25.149. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, функция $f : U \to \mathbb{R}$ непрерывна по каждой переменной в отдельности и монотонна по одной переменной. Докажите, что функция f непрерывна на U (**теорема Юнга**).

25.150. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ обладает свойством: функции $f(x,a)$ и $f(b,y)$ являются многочленами при любых $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что $f(x,y)$ является многочленом двух переменных.

25.151. Пусть $f \in C([a_1,b_1] \times [a_2,b_2])$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b_1$ отрезка $[a_1,b_1]$ и такая функция $g \in C([a_1,b_1] \times [a_2,b_2])$, что $\|f - g\| < \varepsilon$ и при любом фиксированном $y \in [a_2,b_2]$ функция g аффинна на каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

25.152. Докажите, что функцию $g \in C([a_1,b_1] \times [a_2,b_2])$, определённую в задаче 25.151, можно представить в виде

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x)\psi_i(y),$$

где $\varphi_i \in C[a_1, b_1]$, $\psi_i \in C[a_2, b_2]$, $i = 0, \ldots, n-1$.

25.153. Пусть $f \in C([a, b]^m)$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой набор непрерывных функций [60] $\varphi_{i,j} \in C[a, b]$, $j = 1, \ldots, m$, что

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_m)\in[a,b]^m} |f(x_1, \ldots, x_m) - \sum_i \varphi_{i,1}(x_1) \ldots \varphi_{i,m}(x_m)| < \varepsilon.$$

25.154. Докажите, что любая функция $f \in C([a, b]^m)$ является равномерным пределом последовательности многочленов m переменных.

25.155. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество. Докажите, что любая функция $f \in C(K)$ является равномерным пределом последовательности многочленов m переменных.

25.156. Пусть X — компактное метрическое пространство и $C(X)$ пространство непрерывных функций, действующих из X в $\mathbb{R}$. Для $f \in C(X)$ определим $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$. Докажите, что функция $\|\cdot\|_\infty$ является нормой[61] на $C(X)$.

25.157. Пусть X — компактное метрическое пространство, $f, f_n \in C(X)$ и для любого $x \in X$ последовательность $(f_n(x))$ монотонно сходится к $f(x)$. Докажите, что $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ (**теорема Дини**).

26. Нормированные поля

Пусть F — произвольное поле (см. § 8). Нормой на F называется отображение $\|\cdot\| : F \to [0, \infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, т. е. x — нулевой элемент поля F;
2. $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ для любых $x, y \in F$;
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in F$.

Норма называется *неархимедовой*, если помимо (3) выполняется более сильное условие:

3′. $\|x + y\| \le \max\{\|x\|, \|y\|\}$ для любых $x, y \in F$.

[60] А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд доказали, что любая функция $f \in C([a, b]^m)$ представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одной переменной и операции сложения.

[61] Норма $\|\cdot\|_\infty$ называется равномерной.

Норма, не являющаяся неархимедовой, называется *архимедовой*. Норма на F задаёт метрику ϱ равенством $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ для любых $x, y \in F$, которая, в свою очередь, определяет топологию на F. Две нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ на F называются эквивалентными, если они порождают на F одну и ту же топологию, т. е. метрики $\varrho(x,y) = \|x-y\|$ и $\varrho'(x,y) = \|x-y\|'$ эквивалентны.

26.1. Неархимедовы нормы

26.1. (!) Для любой нормы на F докажите непрерывность операций сложения, умножения, нахождения обратного элемента относительно умножения и противоположного относительно сложения.

26.2. (!) Докажите, что $\|1\| = \|-1\|$ для произвольной нормы на F.

26.3. Докажите, что функция $\|\cdot\|$, определённая равенствами $\|0\| = 0$ и $\|x\| = 1$ для любого ненулевого элемента поля F является неархимедовой нормой. Такая норма называется *тривиальной*.

26.4. (!) Пусть $\|\cdot\|$ — неархимедова норма на F. Докажите, что $\|n\| \leq 1$ для любого целого $\pm n$ ($\pm n = \pm(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n})$).

26.5. Докажите, что если $\|n\| \leq 1$ для любого целого n, то норма неархимедова.

26.6. (!) Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на поле F. Докажите, что нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует вещественное число $\alpha > 0$ такое, что $\|x\|_1 = \|x\|_2^\alpha$ для любого $x \in F$.

26.7. Докажите, что две эквивалентные нормы на F архимедовы или неархимедовы одновременно.

26.8. (!) Пусть p — простое число. Для любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ положим $\mathrm{ord}_p(n)$ равным максимальному числу $k \in \mathbb{N}$, для которого n делится на p^k и нулю, если числа n и p взаимно просты. Для рационального числа $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ полагаем, что $\mathrm{ord}_p(\frac{m}{n}) = \mathrm{ord}_p(m) - \mathrm{ord}_p(n)$. Докажите, что если $0 < \alpha < 1$, то функция $\|x\|_{\alpha,p} = \alpha^{\mathrm{ord}_p(x)}$ для любого $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $\|0\|_{\alpha,p} = 0$ является нормой на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

26.9. (!) Докажите, что норма $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ неархимедова при любых $0 < \alpha < 1$ и простом p.

26.10. Докажите, что нормы $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ и $\|\cdot\|_{\beta,p}$ эквивалентны при любых $0 < \alpha, \beta < 1$.

26.11. (!) В случае $\alpha = \frac{1}{p}$ норму $\|\cdot\|_{\alpha,p}$ принято обозначать через $|\cdot|_p$. Докажите, что для неравных простых чисел p_1 и p_2 нормы $|\cdot|_{p_1}$ и $|\cdot|_{p_2}$ неэквивалентны.

26.12. Пусть $\alpha > 0$. Положим[62] $\|x\|'_\alpha = |x|^\alpha_\infty$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $\|\cdot\|'_\alpha$ — является нормой тогда и только тогда, когда $\alpha \le 1$.

26.13. Докажите, что норма $\|\cdot\|'_\alpha$ при любом $0 < \alpha \le 1$ эквивалентна абсолютной величине $|\cdot|_\infty$.

26.14. (!) Пусть $\|\cdot\|$ — неархимедова норма. Докажите, что для любых трёх чисел $x, y, z \in F$, среди трёх чисел $\|x-y\|, \|y-z\|, \|z-x\|$ найдутся по крайней мере два одинаковых (принцип равнобедренного треугольника).

26.15. (!) Пусть $\|\cdot\|$ — неархимедова норма на F, $x, y \in F$ и $\|x\| \ne \|y\|$. Докажите, что $\|x+y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

26.16. (!) Докажите, что каждая точка открытого шара $B(x,r) = \{y \in F \mid \|x-y\| < r\}$ в поле F с неархимедовой нормой является его центром.

26.17. Докажите, что каждая точка замкнутого шара $\overline{B(x,r)} = \{y \in F \mid \|x-y\| \le r\}$ в поле F с неархимедовой нормой является его центром.

26.18. Докажите, что в неархимедовой норме открытый шар, замкнутый шар и сфера $S(x,r) = \{x \in F \mid \|x\| = r\}$ являются открытыми и замкнутыми множествами одновременно.

26.19. Докажите, что в поле F с неархимедовой нормой любые два шара либо не пересекаются, либо содержатся один в другом.

26.20. Докажите, что в поле F с неархимедовой нормой любое непустое открытое множество есть объединение попарно непересекающихся шаров.

[62] Здесь и далее через $|\cdot|_\infty$ обозначается абсолютная величина (модуль) числа.

26.21. Пусть $x \in \mathbb{Q}$ и $|x|_p \leq 1$ для всех простых p. Докажите, что $x \in \mathbb{Z}$.

26.22. Пусть $x \in \mathbb{Q}$ и $x \neq 0$. Докажите, что произведение чисел $|x|_p$ по всем простым p и $p = \infty$ равно 1. Докажите, что в этом произведении лишь конечное число сомножителей отлично от единицы.

26.23. Пусть норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{Q}$ такова, что $\|n\| > 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\min\{n \in \mathbb{N} \mid \|n\| > 1\}$ — простое число.

26.24. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbb{Q}$ и для некоторого простого числа p выполнены условия: $\|p\| > 1$ и $\|n\| \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < p$. Используя представление чисел в p-ичной системе исчисления, докажите, что найдутся $C_2 > C_1 > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ такие, что $C_1 n^\alpha \leq \|n\| \leq C_2 n^\alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

26.25. Пусть норма $\|\cdot\|$ на $\mathbb{Q}$ такова, что $\|n\| \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\|n_0\| < 1$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\min\{n \in \mathbb{N} \mid \|n\| < 1\}$ — простое число.

26.26. Пусть выполнены условия задачи 26.25, причём $\|p\| < 1$ — простое число и $\|n\| = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < p$. Докажите, что если m и p взаимно просты, то $\|m\| = 1$. Выведите отсюда, что найдётся $0 < \alpha < 1$ такое, что $\|x\| = \alpha^{\operatorname{ord}_p x}$ для любого $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

26.27. (!) Докажите, что любая нетривиальная норма на поле $\mathbb{Q}$ либо архимедова и эквивалентна абсолютной величине $|\cdot|_\infty$, либо неархимедова и эквивалентна $|\cdot|_p$ для некоторого простого p (**теорема Островского**).

26.2. Поле p-адических чисел

26.28. (!) Пусть p — простое число. Рассмотрим на $\mathbb{Q}$ метрику $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$ для любых $x, y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что если последовательности (x_n) и (y_n) фундаментальны в метрическом пространстве $(\mathbb{Q}, \rho_p)$, то и последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$, $(-x_n)$ тоже фундаментальны.

26.29. (!) Обозначим через $\mathbb{Q}_p$ пополнение поля $\mathbb{Q}$ по метрике ρ_p (метрику пополнения $\mathbb{Q}_p$ также будем обозначать через ρ_p). Пусть (x_n), (x'_n), (y_n) и (y'_n) сходятся в $\mathbb{Q}_p$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} y'_n$. Докажите существование в $\mathbb{Q}_p$ указанных ниже пределов и равенства: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n+y'_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(x'_ny'_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-x'_n)$.

26.30. (!) Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{Q}_p$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{Q}_p$. Определим операции на $\mathbb{Q}_p$ равенствами $x+y=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$, $xy=\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$, $-x=\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n)$. Докажите, что операции сложения, умножения и взятия противоположного элемента определены корректно и $(\mathbb{Q}_p,+,\cdot)$ является коммутативным кольцом, причём сужение операций $+$, $\cdot$ на $\mathbb{Q}$ совпадает с операциями сложения и умножения рациональных чисел.

26.31. (!) Пусть $x_n \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ для любого $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{Q}_p\setminus\{0\}$. Докажите, что последовательность (x_n^{-1}) сходится в $\mathbb{Q}_p$ и $x^{-1}x=$ $=xx^{-1}=1$, где $x^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-1}$.

26.32. (!) Для любого $x\in\mathbb{Q}_p$ полагаем $|\cdot|_p=\rho(x,0)$. Докажите, что $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ —нормированное поле, причём $\{|x|_p \mid x\in\mathbb{Q}_p\}=$ $=\{|x|_p \mid x\in\mathbb{Q}\}=\{p^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

26.33. (!) Докажите, что $(\mathbb{Q}_p,+,\cdot)$ с введёнными в задаче 26.30 операциями является неархимедовым нормированным полем.

26.34. (!) Докажите, что для последовательностей из $\mathbb{Q}_p$ справедливы арифметические свойства предела. А именно, если $\lim\limits_{n\to\infty x_n}=x$ и $\lim\limits_{n\to\infty y_n}=y$, то последовательности (x_n+y_n) и (x_ny_n) имеют пределы в $\mathbb{Q}_p$ и справедливы равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n+y_n=x+y$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=xy$. Если $x\neq 0$ и $x_n\neq 0$ для любого $n\in\mathbb{N}$, то последовательность $(1/x_n)$ имеет предел в $\mathbb{Q}_p$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x}$.

26.35. Докажите, что для любого $x\in\mathbb{Q}_p$, $|x|_p\le 1$, существует последовательность (a_n), $a_n\in\mathbb{Z}$, такая, что $|a_n-x|_p\to 0$ при $n\to\infty$ и $|a_n|_p\le 1$ при любом $n\in\mathbb{N}$.

26.36. Докажите, что при выполнении условий задачи 26.35 последовательность (a_n) можно выбрать так, чтобы $a_n=a_{n+1} \mod p^n$ при любом $n\in\mathbb{N}$.

26.37. Для простого p рассмотрим последовательность (x_n) рациональных чисел, определённую формулой $x_n=\frac{1+p^n}{1+p^{2n}}$. Докажите, что последовательность (x_n) имеет рациональные пределы в $\mathbb{Q}_p$ и в $\mathbb{R}$, причём эти пределы различны. Будет ли последовательность (x_n) иметь предел в $\mathbb{Q}_{p'}$, если $p \neq p'$?

26.38. (!) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} |x|_p = 0$ (**лемма «мечта студента»**).

26.39. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ сходится в $\mathbb{Q}_p$, то любая его перестановка $\sum\limits_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ к той же сумме.

26.40. (!) Докажите, что для любого $x \in \mathbb{Q}_p$, $|x|_p \leq 1$, существует единственная последовательность (b_n), $b_n \in \mathbb{Z}$, такая, что $0 \leq b_n < p$ и $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n p^n$.

26.41. Докажите, что в $\mathbb{Q}_p$ множество целых чисел $\mathbb{Z}$ плотно в замкнутом шаре $B(0,1)$.

26.42. (!) Докажите, что для любого $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, существуют число $m \in \mathbb{Z}$ и последовательность (b_n), $b_n \in \mathbb{Z}$, такие, что $0 < b_{-m} < p$, $0 \leq b_n < p$ при $n > -m$ и $x = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} b_n p^n$. Последовательность (b_n), записанная справа налево, называется *p-ичным разложением элемента* x, и в этом случае принято писать $x = \ldots b_n \ldots b_0, b_{-1} \ldots b_{-m}$. Если найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $b_k = 0$ при $k \geq n_0$, то говорят, что x представляется конечной p-ичной дробью.

26.43. (!) Докажите, что для p-ичных разложений сохраняются школьные правила умножения и сложения столбиком.

26.44. Пусть $\ldots b_n \ldots b_0, b_{-1}, \ldots, b_{-m} \ldots$ есть p-ичное разложение элемента $a \in \mathbb{Q}_p$. Напишите p-ичное разложение для противоположного элемента $-a$.

26.45. Докажите, что $\mathbb{Q}_p$ является локально компактным пространством.

26.46. (!) Докажите, что p-адическое разложение числа $a \in \mathbb{Q}_p$ является конечным тогда и только тогда, когда $a = \frac{m}{p^k}$, где $m, k \in \mathbb{Z}$.

26.47. Докажите, что p-адическое разложение числа $a \in \mathbb{Q}_p$ является периодическим тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{Q}$.

26.48. (!) Докажите, что в $\mathbb{Q}_p$ справедливо равенство $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$. Найдите в $\mathbb{Q}_p$ сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n p^n$.

26.49. Вычислите в $\mathbb{Q}_3$ сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3^{2n} + 2 \cdot 3^{2n+1})$.

26.50. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n \geq 1} nn!$ сходится в $\mathbb{Q}_p$, и найдите его сумму.

26.51. Докажите, что ряды $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ расходятся в $\mathbb{Q}_p$ для любого простого p.

26.52. Докажите, что $\mathrm{ord}_p((p^N)!) = 1 + p + \cdots + p^{N-1}$.

26.53. Пусть p — простое, $0 \leq a \leq p-1$, $a \in \mathbb{N}$. Докажите равенство $\mathrm{ord}_p((ap^N)!) = a(1 + p + \cdots + p^{N-1})$.

26.54. Пусть $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_s p^s$ есть p-ичное разложение числа n, где $0 \leq a_i \leq p-1$. Докажите, что $\mathrm{ord}_p(n!) = \frac{n-(a_0+\cdots+a_s)}{p-1}$.

26.55. Пусть $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x^n}{n!}|_p = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord}_p(x) \leq 1$ при $p \neq 2$ и $\mathrm{ord}_p(x) \leq 2$ при $p = 2$.

26.56. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ с коэффициентами $a_n \in \mathbb{Q}_p$ $(n \geq 0)$. Положим $r = 1/\varlimsup\limits_{n\to\infty} |a_n|_p^{1/n}$. Докажите, что этот ряд сходится при $|x|_p < r$ и расходится при $|x|_p > r$.

26.57. Докажите, что при выполнении условий задачи 26.56, если ряд $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ сходится при некотором $x_0 \in \mathbb{Q}_p$, то он сходится для всех $x \in \mathbb{Q}_p$, $|x|_p = |x_0|_p$.

26.58. Найдите радиус r сходимости в $\mathbb{Q}_p$ степенного ряда $\exp_p(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Сходится ли этот ряд при $|x|_p = r$?

26.59. Функция $f : U \to \mathbb{Q}_p$, заданная на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{Q}_p$, называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in U$, если в $\mathbb{Q}_p$ существует предел $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}$. Функция f называется диффенцируемой на открытом множестве U, если она дифференцируема в каждой точке множества U. Приведите пример не постоянной функции $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$, производная которой всюду равна нулю.

26.60. Функция $f : U \to \mathbb{Q}_p$, заданная на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{Q}_p$, называется *локально постоянной*, если для любой точки $x_0 \in U$ найдётся окрестность $V \in \mathcal{N}(x_0)$, на которой функция f постоянна. Приведите пример не локально постоянной функции $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$, производная которой всюду равна нулю.

26.61. Докажите равенство $\prod |a|_p = 1/|a|_\infty$, где произведение берётся по всевозможным простым p.

Приложение

Доказательство основной теоремы об интегрировании элементарных функций

Ключевым понятием в теории интегрирования элементарных функций является понятие дифференциального поля. Говоря неформально, дифференциальным полем называется такое семейство функций, которое является полем в алгебраическом смысле и замкнуто относительно операции дифференцирования. Оказывается, что при таком подходе возникает проблема со сложением и умножением выражений, содержащих комплексные логарифмы. Дело в том, что различные выражения имеют различные области определения, и прежде чем их складывать и умножать, следует найти для них общую область определения. Это невозможно сделать без введения понятия римановой поверхности (см. [51]). Поэтому мы выбрали более простой алгебраический подход к изложению теории интегрирования элементарных функций. Для более глубокого изучения теории интегрирования в элементарных функциях мы рекомендуем книгу А. Г. Хованского [49].

1. Определение дифференциального поля. Пусть E – некоторое поле нулевой характеристики. Отображение $' : E \to E$ называется *дифференцированием*, если для любых $u, v \in E$ выполняются следующие правила:

(а) $(u+v)' = u' + v'$ (*аддитивность*);

(б) $(uv)' = u'v + uv'$ (*правило Лейбница*).

Множество $C(E) = \{u \in E \mid u' = 0\}$, являющееся подполем в E, называется *полем констант*. Пару $(E, ')$ будем далее называть *дифференциальным полем*.

Пусть $(E, ')$ — дифференциальное поле и F — подполе в E, инвариантное относительно операции дифференцирования, т. е. $F' \subseteq F$. Тогда пара $(F, ')$ с операцией дифференцирования индуцированной $(E, ')$, называется *дифференциальным подполем* поля $(E, ')$, а $(E, ')$ — *расширением* дифференциального поля $(F, ')$.

Пример 1. Пусть C – поле нулевой характеристики и $C\langle z\rangle$ – поле рациональных функций от переменной z (т. е. поле всех дробей $p(z)/q(z)$, где $p(z), q(z)$ – многочлены с коэффициентами из C и $q(z) \not\equiv 0$). Положим по определению $z' = 1$ и $u' = 0$ для всех $u \in C$. С помощью правил (а), (б) эта операция однозначно доопределяется на всё $C\langle z\rangle$. Проверки того, что так определённая операция $'$ является дифференцированием на $C\langle z\rangle$, и равенства $C(C\langle z\rangle) = C$ тривиальны, и мы их опускаем. Введённая таким формальным путём операция дифференцирования совпадает с обычным дифференцированием рациональных функций.

2. Присоединение логарифма. Пусть $(E, ')$ – дифференциальное поле. Говорим, что элемент $b \in E$ является *логарифмом* ненулевого элемента $a \in E$ и пишем $b = \log a$, если $b' = a'/a$. Логарифм элемента a определён однозначно с точностью до постоянного слагаемого, т. е. если для другого элемента $c \in E$ тоже имеем $c' = a'/a$, то $c - b \in C(E)$. Если некоторый элемент $a \in E$ не логарифмируется в поле E, т. е. не существует ни одного элемента $b \in E$, для которого $b' = a'/a$, то его логарифм можно присоединить, расширив поле E. Для этого введём новую переменную y и рассмотрим поле рациональных функций $E\langle y\rangle$. Положим по определению $y' = a'/a$. Правило дифференцирования многочленов определим формулой

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^k\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k' + (k+1)\alpha_{k+1} a'/a) y^k + \alpha_n' y^n, \tag{1}$$

где $\alpha_k \in E, k = 0, \ldots, n$. На дроби операция $'$ распространяется обычным образом: $(p/q)' = (p'q - pq')/q^2$. Легко проверяется, что определённая таким образом операция $'$ удовлетворяет условиям (а), (б). Поэтому $(E\langle y\rangle, ')$ есть дифференциальное поле, являющееся расширением первоначального дифференциального поля $(E, ')$.

Будем говорить, что расширение $(F, ')$ дифференциального поля $(E, ')$ является *правильным*, если $C(E) = C(F)$, т. е. поле констант при расширении не увеличивается.

Лемма 1. *Пусть дифференциальное поле $(E\langle y\rangle, ')$ получено из дифференциального поля $(E, ')$ присоединением логарифма ненулевого элемента $a \in E$. В этом случае $(E\langle y\rangle, ')$ является правильным расширением дифференциального поля $(E, ')$ тогда и только тогда, когда $b' \neq a'/a$ для любого $b \in E$.*

Доказательство. Допустим, что $b' \neq a'/a$ для любого $b \in E$. Рассмотрим в $(E\langle y\rangle, ')$ многочлен $p(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k y^k$, такой, что $(p(y))' = 0$ и $\alpha_n \neq 0$. Подставив выражение для производной из формулы (1), мы получим систему равенств $\alpha_n' = 0$, $\alpha_k' + (k+1)\alpha_{k+1} a'/a = 0$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Из первого равенства получаем включение $\alpha_n \in C(E)$. Из второго равенства при $k = n - 1$ получим $\alpha_{n-1}' + n\alpha_n a'/a = 0$, или $a'/a = (-\alpha_{n-1}/n\alpha_n)'$, что при $n > 0$ противоречит нашему предположению. Поэтому p является многочленом нулевой степени, то есть $p \in E$

и $p' = 0$, отсюда $p \in C(E)$. Для рациональных дробей доказательство $(p/q)' = 0 \Rightarrow p/q \in C(E)$ проводится аналогично и мы предоставляем читателям провести его самостоятельно.

Предположим теперь, что при некотором $b \in E$ имеем равенство $b' = a'/a$. Тогда элемент $y - b$ будет новой константой дифференциального поля $(E\langle y\rangle, ')$, т. е. данное расширение в этом случае не будет правильным. Лемма доказана.

3. Трансцендентное присоединение экспоненты. Говорим, что ненулевой элемент $b \in E$ является *экспонентой* элемента $a \in E$ и пишем $b = \exp a$, если $b' = ba'$. Экспонента элемента a определена однозначно с точностью до ненулевого постоянного множителя, т. е. если для другого ненулевого элемента $c \in E$ имеем $c' = ca'$, то $c/b \in C(E)$. Так же как и в случае логарифмов, экспоненту любого элемента $a \in E$ можно присоединить, расширяя трансцендентным образом дифференциальное поле $(E, ')$. Для этого введём следующую операцию дифференцирования многочленов от переменной y

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^k\right)' = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k' + k\alpha_k a') y^k \quad (\alpha_k \in E, k = 0, \ldots, n). \tag{2}$$

Для дробей $p/q \in E\langle y\rangle$, как обычно, полагаем $(p/q)' = (p'q - pq')/q^2$. Проверку того, что операция $'$ является операцией дифференцирования на $E\langle y\rangle$, т. е. удовлетворяет условиям (а) и (б), мы опускаем.

Лемма 2. *Пусть дифференциальное поле $(E\langle y\rangle, ')$ получено из дифференциального поля $(E, ')$ присоединением экспоненты некоторого элемента $a \in E$. В этом случае $(E\langle y\rangle, ')$ является правильным расширением дифференциального поля $(E, ')$ тогда и только тогда, когда $a' \neq \alpha'/n\alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого ненулевого $\alpha \in E$.*

Доказательство. Допустим, что $a' \neq \alpha'/n\alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого ненулевого $\alpha \in E$. Рассмотрим в $(E\langle y\rangle, ')$ многочлен $p(y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y^k$ такой, что $(p(y))' = 0$. Подставив выражение для производной из формулы (2), мы получим систему равенств $\alpha_k' + k\alpha_k a' = 0$ $(k = 0, \ldots, n)$. Это означает, что если $\alpha_k \neq 0$ для некоторого $k = 1, \ldots, n$, то должно выполняться равенство $a' = (\alpha_k^{-1})'/(k\alpha_k^{-1})$, которое противоречит нашему предположению. Поэтому многочлен p должен иметь нулевую степень, т. е. $p \in E$, и из $p' = 0$ следует $p \in C(E)$. Проверку этого же свойства для дробей $p/q \in E\langle y\rangle$ мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Предположим обратное, пусть $a' = \alpha'/n\alpha$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in E$. Тогда один из элементов y, y^n/α будет новой константой в поле $E\langle y\rangle$ в зависимости от того, $a' = 0$ или $a' \neq 0$. Лемма доказана.

Если $a' = \alpha'/\alpha$ для некоторого ненулевого $\alpha \in E$, то α является экспонентой элемента a и необходимости в расширении поля E в этом случае не возникает. Допустим, что минимальное n, для которого выполнено равенство $a' = \alpha'/n\alpha$ при некотором ненулевом $\alpha \in E$, больше единицы. Тогда, в силу леммы 2, невозможно присоединить экспоненту трансцендентным образом без увеличения поля констант. Далее мы докажем, что существует правильное расширение дифференциального поля E, содержащее экспоненту элемента a, которая в этом случае совпадает с $\alpha^{1/n}$.

4. Алгебраическое присоединение экспоненты. Пусть $(E, {}')$ — дифференциальное поле и $p(y)$ — неприводимый многочлен степени $m > 1$ со старшим коэффициентом, равным 1. Мы будем использовать следующую реализацию алгебраического расширения $E(p)$ поля E, полученного присоединением корня многочлена p. Говорят, что многочлены q_1, q_2 *сравнимы* по модулю p и пишут $q_1 \equiv q_2 (\mathrm{mod} p)$, если многочлен $q_1 - q_2$ делится на p. Это отношение является отношением эквивалентности и множество всех многочленов $E[y]$ с коэффициентами из E разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий многочлен $q \in E[y]$, будем обозначать через $\widetilde{q}$. Пусть $E(p)$ — множество всех таких классов эквивалентности. Введём на множестве $E(p)$ операции сложения и умножения по правилу $\widetilde{q_1 + q_2} = \widetilde{q}_1 + \widetilde{q}_2$, $\widetilde{q_1 \cdot q_2} = \widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_2$. Можно убедиться, что операции определены корректно и что $E(p)$ относительно этих операций становится полем. Вложение поля E в $E(p)$ определим по правилу $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$, $\alpha \in E$. Далее будем отождествлять элементы поля E с их образами в $E(p)$ при этом вложении. Непосредственно проверяется, что элемент $\widetilde{y}$ является корнем многочлена p, т. е. $p(\widetilde{y}) = 0$. Отсюда в частности следует, что любой элемент из $E(p)$ можно представить в виде $q(\widetilde{y})$ для некоторого многочлена q степени меньше m.

Определим теперь в поле $E(p)$ операцию дифференцирования. Пусть $p(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k y^k$, где $\alpha_m = 1$. Многочлены $q(y) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (k+1)\alpha_{k+1} y^k$ и $p(y)$ взаимно просты, поэтому существует многочлен $d(y)$ степени меньше m, для которого справедливо равенство $d(y)q(y) + \sum\limits_{k=0}^{m-1} \alpha'_k y^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

Теперь можно по определению положить $\widetilde{y}' = d(\widetilde{y})$ и

$$(q(\widetilde{y}))' = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k' \widetilde{y}^k + d(\widetilde{y}) \left(\sum_{k=1}^{m-1} k\beta_k \widetilde{y}^{k-1} \right) \qquad (3)$$

для любого элемента $q(\widetilde{y}) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \beta_k \widetilde{y}^k$ из $E(p)$. То есть правило дифференцирования определено с таким расчётом, чтобы выполнялось $(p(\widetilde{y}))' = 0$. Проверку того, что с введённой таким способом операцией дифференцирования множество $(E(p), ')$ становится дифференциальным полем, являющимся расширением дифференциального поля $(E, ')$, мы опускаем.

Далее будем называть расширение $(E(p), ')$ *дифференциальным полем, полученным присоединением к дифференциальному полю* $(E, ')$ *корня неприводимого многочлена* $p(y)$.

Лемма 3. *Пусть дифференциальное поле $(E(p), ')$ получено из дифференциального поля $(E, ')$ присоединением корня неприводимого над E многочлена $p(y)$, делящего многочлен $y^n - \alpha$ $(\alpha \in E)$. Тогда, если $a \in E$ и $a' = \alpha'/n\alpha$, то $\widetilde{y}$ есть экспонента элемента a. Если $n > 1$ является минимальным номером, для которого существуют элементы $\beta \in E$ со свойством $a' = \beta'/n\beta$, то многочлен $y^n - \alpha$ неприводим над E (т.е. $p(y) = y^n - \alpha$) и $(E(p), ')$ является правильным расширением дифференциального поля $(E, ')$.*

Доказательство. Найдём в нашем случае вид многочлена $d(y)$, входящего в формулу дифференцирования (3). Пусть $p(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k y^k$. Так как для некоторого многочлена $s(y)$ имеем $y^n - \alpha = p(y)s(y)$, то в поле $E(p)$ выполняется равенство $0 = (\widetilde{y}^n - \alpha)' = (n\widetilde{y}^{n-1} d(\widetilde{y}) - \alpha')$. Кроме этого $\widetilde{y}^n = \alpha$. Это означает, что $d(y) \equiv \frac{\alpha'}{n\alpha} y \pmod p$. Так как степень многочлена $d(y)$ меньше m, то просто $d(y) = \frac{\alpha'}{n\alpha} y$. Отсюда следует, что $\widetilde{y}' = a'\widetilde{y}$ и $\widetilde{y}$ есть экспонента элемента $a \in E$.

Пусть номер $n > 1$ минимальный, для которого существуют элементы $\beta \in E$ со свойством $a' = \beta'/n\beta$. Из неприводимости многочлена p следует $\alpha_0 \neq 0$. Вычислим производную $(\widetilde{y}^m/\alpha_0)'$ двумя различными способами. Во-первых, $(\widetilde{y}^m/\alpha_0)' = \left(\frac{ma'}{\alpha_0} - \frac{\alpha_0'}{\alpha_0^2} \right) \widetilde{y}^m$. Во-вторых, $(\widetilde{y}^m/\alpha_0)' = -\sum\limits_{k=1}^{m-1} \left((\frac{\alpha_k}{\alpha_0})' + \frac{ka'\alpha_k}{\alpha_0} \right) \widetilde{y}^k$. Поэтому $\left(\frac{ma'}{\alpha_0} - \frac{\alpha_0'}{\alpha_0^2} \right) y^{m-1} + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \left((\frac{\alpha_k}{\alpha_0})' + \frac{ka'\alpha_k}{\alpha_0} \right) y^{k-1} \equiv 0 \pmod p$. Из равенства нулю коэффициента при степени y^{m-1} получаем, что $a' = \alpha_0'/m\alpha_0$. Из минимальности выбора номера n, удовлетворяющего такому свойству, следует $m = n$, т. е. $p(y) = y^n - \alpha$.

Нам осталось доказать только правильность расширения $E(p)$. Пусть $q(\widetilde{y}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k \widetilde{y}^k \in E(p)$ и $(q(\widetilde{y}))' = 0$. Это подразумевает следующее равенство $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \beta_k' y^k + a' \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\beta_k y^k \right) \equiv 0 \pmod{p}$. Так как степень полученного многочлена меньше n, то должна выполняться система равенств $\beta_k' + ka'\beta_k = 0$. Если какое-то $\beta_k \neq 0$, то при $k > 0$ получим равенство $a' = (\beta_k^{-1})'/k\beta_k^{-1}$. Так как $k < n$, то это противоречит нашему предположению о выборе номера n. Поэтому $\beta_k = 0$ для всех $0 < k < n$. Это означает, что $q(\widetilde{y}) \in E$. Из $(q(\widetilde{y}))' = 0$ следует, что $q(\widetilde{y}) \in C(E)$. Лемма доказана.

5. Элементарное расширение и элементарные функции. Пусть $(E, ')$ – дифференциальное поле. Дифференциальное поле $(F, ')$ называем *элементарным расширением* поля $(E, ')$, если это расширение правильное и существует конечная цепочка вложенных подполей $E = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_m = F$, такая, что для любого $0 < k \leq m$ дифференциальное поле E_k получено из E_{k-1} присоединением либо логарифма, либо экспоненты некоторого элемента из E_{k-1}. Длину цепочки m будем называть *степенью* элементарного расширения.

Для того чтобы дать по возможности строгое определение элементарной функции, рассмотрим в качестве дифференциального поля E_0 поле рациональных функций $C\langle z\rangle$ из примера 1 с обычной операцией дифференцирования. Без существенного ограничения общности можно считать, что C — это поле комплексных чисел. Сперва определим понятие формулы, задающей элементарную функцию, по следующему правилу:

(α) любая константа из C и переменная z являются формулами;

(β) если F_1 и F_2 – формулы, то F_1+F_2, F_1-F_2, F_1F_2, F_1/F_2, $\log(F_1)$, $\exp(F_1)$ тоже формулы.

Лемма 4. *Любой элемент из элементарного расширения поля $C\langle z\rangle$ можно задать формулой.*

Доказательство. Пусть цепочка расширений $C\langle z\rangle \subset E_1 \subset \ldots \cdots \subset E_m$ задаёт элементарное расширение E_m и пусть $f \in E_m$. Допустим для определённости, что поле E_m получено из поля E_{m-1} присоединением экспоненты элемента $a \in E_{m-1}$. Тогда f есть рациональная функция от элемента $\exp a \in E_m$:

$$f = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\exp a)^k\right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{l} \beta_k (\exp a)^k\right),$$

где a, α_k, β_k принадлежат элементарному расширению E_{n-1} меньшей степени (если $\exp a$ присоединяется алгебраически, то f является многочленом от $\exp a$). По индуктивному предположению можно считать, что каждый из элементов a, α_k, β_k записывается формулой. Подставив эти формулы в вышеприведённое выражение, мы получим формулу для элемента f. Лемма доказана.

Обратное не всегда верно, т. е. некоторые формулы не реализуются элементами элементарных расширений поля $C\langle z\rangle$. Это в точности те формулы, в процессе реализации которых возникает необходимость делить на нуль или логарифмировать нуль. Кроме этого, следует отметить, что различные формулы могут представлять одинаковые элементы из элементарного расширения. Например две формулы $\log z + \log(z+1)$ и $\log(z+z^2)+c$ при подходящем выборе константы $c \in C$ представляют один и тот же элемент из соответствующего расширения.

Из вышеизложенного следует, что любой элемент f из элементарного расширения поля $C\langle z\rangle$ можно называть *элементарной функцией от переменной* z. Если $F(z)$ – формула, представляющая элемент f, то будем записывать этот факт равенством $f = F(z)$. Отметим также без доказательства, что существует *универсальное расширение* дифференциального поля $C\langle z\rangle$, которое уже не является элементарным расширением, но которое содержит изоморфные образы всех элементарных расширений поля $C\langle z\rangle$.

6. Основная теорема об интегрировании элементарных функций. Пусть $(F, ')$ – дифференциальное поле и $f, g \in F$. Если $f = g'$, то будем говорить, что g является *неопределённым интегралом* или *первообразной* от f, и писать $g = \int f$. Очевидно, что неопределённые интегралы от элемента f могут отличаться только на константы поля F.

Теорема Лиувилля. *Пусть $(E, ')$ – дифференциальное поле и $f \in E$. Если существует элемент g из некоторого элементарного расширения $(F, ')$ поля E такой, что g является неопределённым интегралом от f, то f можно представить в следующем виде*:

$$f = A_0' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{A_i'}{A_i}, \tag{4}$$

где $A_i \in E$ при $i = 0, \dots, n$ и $\lambda_i \in C(E)$, $A_i \neq 0$ при $i = 1, \dots, n$. В случае $n = 0$ считается, что вторая сумма в разложении (4) *отсутствует.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по степени расширения. При $m = 0$ полагаем $n = 0$ и $A_0 = g$. Допустим, что теорема доказана для всех элементарных расширений степени не выше $m - 1$. Рассмотрим цепочку расширений $E = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_m = F$, где каждое E_k, $1 \leq k \leq m$, получается присоединением логарифма или экспоненты некоторого элемента из E_{k-1}. Так как можно считать, что $f \in E_1$, то по предположению индукции существует представление (4), в котором $A_i \in E_1$ $(i = 0, \dots, n)$. Далее рассмотрим три возможных варианта.

(I) *E_1 получено из $E_0 = E$ трансцендентным присоединением логарифма некоторого элемента $a \in E_0$*. Обозначим для удобства $y = \log a$. Очевидно каждое A_i $(i = 0, \dots, n)$ является рациональной функцией от y. Каждую рациональную функцию A_i $(i = 1, \dots, n)$ можно разложить в произведение $A_i = b_i(P_{i,1}(y))^{k_1} \cdots (P_{i,n_i}(y))^{k_{n_i}}$, где $k_j \in \mathbb{Z}$, $b_i \in E_0$, а $P_{i,j}$ – неприводимые взаимно простые многочлены от y с коэффициентами из E_0 и со старшим коэффициентом, равным единице. Кроме этого, разложим рациональную функцию A_0 на полиномиальную и дробную части:

$$A_0(y) = Q_0(y) + \frac{Q_1(y)}{L_1(y)}$$

где Q_0, Q_1, L_1 – многочлены от y с коэффициентами из поля E_0, причём $\deg Q_1 < \deg L_1$. После перегруппировки слагаемых можно записать представление (4) в следующем виде:

$$f = (Q_0(y))' + \frac{(Q_1(y))'L_1(y) - Q_1(y)(L_1(y))'}{(L_1(y))^2} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{b_i'}{b_i} + \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j \frac{(P_j(y))'}{P_j(y)}, \tag{5}$$

где P_j – некоторый набор неприводимых взаимно простых многочленов от y с единичными старшими коэффициентами. Так как старшие коэффициенты многочленов P_j являются константами поля E_0, то $\deg P_j' < \deg P_j$. Кроме этого, $\deg Q_1' \leq \deg Q_1 < \deg L_1$ и $\deg L_1' \leq \deg L_1$. Поэтому выражение

$$\frac{(Q_1(y))'L_1(y) - Q_1(y)(L_1(y))'}{(L_1(y))^2} + \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j \frac{(P_j(y))'}{P_j(y)} \tag{6}$$

является правильной рациональной дробью от y. Так как в левой части равенства (5) элемент $f \in E_0$ не зависит от y и элемент $y = \log a$

трансцендентен над E_0, то, в силу единственности разложения рациональной функции на полиномиальную и дробную части, мы получаем, что выражение (6) тождественно равно нулю. Поэтому равенство (5) принимает вид

$$f = (Q_0(y))' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{b_i'}{b_i}, \tag{7}$$

а значит, производная от многочлена $Q_0(y)$ должна быть многочленом нулевой степени. Пусть $Q_0(y) = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i y^i$, где $\alpha_k \neq 0$. Так как $(Q_0(y))' =$ $= \sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\alpha_i' + (i+1)\alpha_{i+1}\frac{a'}{a}\right) y^i + \alpha_k' y^k$, то при $k > 1$ получаем $\alpha_k \in C(E)$ и из $\alpha_k \neq 0$ следует, что $a'/a = (-\alpha_{k-1}/k\alpha_k)'$. Из правильности расширения E_1 мы получаем в силу леммы 1, что не существует элементов $b \in E$, для которых $b' = a'/a$. Поэтому степень многочлена Q_0 меньше либо равна единице, т. е. $Q_0(y) = q_0 + \mu y$, $q_0 \in E$, $\mu \in C(E)$ и $(Q_0(y))' = q_0' + \mu a'/a$. Подставив это выражение в (7), мы получим требуемое лиувиллевское представление

$$f = q_0' + \mu \frac{a'}{a} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{b_i'}{b_i}.$$

(II) E_1 *получено из* E_0 *трансцендентным присоединением экспоненты некоторого элемента* $a \in E_0$. Обозначив $y = \exp a$, мы окажемся в ситуации, аналогичной предыдущему случаю. Так как дифференцирование не повышает степень многочлена от экспоненты, то первая дробь в равенстве (6) правильная. Во второй сумме $\deg P_j' = \deg P_j$, и поэтому дробная часть P_j'/P_j равна $(P_j' - m_j a' P_j)/P_j$, а полиномиальная часть P_j'/P_j равна $m_j a'$, где $m_j = \deg P_j$. Заменив нулём в правой части разложения (5) дробную часть рациональной функции, мы получим равенство

$$f = (Q_0(y))' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{b_i'}{b_i} + \mu a',$$

где $\mu = \sum\limits_{j=1}^{n_1} \mu_j m_j \in C(E)$, а многочлен $(Q_0(y))'$ имеет нулевую степень. Пусть $Q_0(y) = \sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i y^i$. Так как $(Q_0(y))' = \sum\limits_{i=0}^{k} (\alpha_i' + i\alpha_i a') y^i$, то из $\alpha_i \neq 0$ при некотором $i \neq 0$ следует равенство $a' = (\alpha_i^{-1})'/i(\alpha_i^{-1})$. В силу леммы 2 это противоречит тому, что E_1 является правильным расширением

поля E_0. Поэтому многочлен $Q_0(y)$ должен иметь нулевую степень по y, то есть $Q_0 = q_0 \in E_0$, и мы получаем требуемое лиувиллевское представление
$$f = (q_0 + \mu a)' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{b_i'}{b_i}.$$

(III) E_1 *получено из* E_0 *алгебраическим присоединением экспоненты некоторого элемента* $a \in E_0$. В этом случае $a' = \alpha'/n\alpha$ для некоторого ненулевого $\alpha \in E$ и $n \in \mathbb{N}$. Будем считать, что $n > 1$ и n является минимальным, для которого выполняется это условие.

Из леммы 4 следует, что многочлен $p(y) = y^n - \alpha$ неприводим над полем E. Лиувиллевское представление принимает в этом случае следующий вид:
$$f = (Q_0(\widetilde{y}))' + \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j \frac{(P_j(\widetilde{y}))'}{P_j(\widetilde{y})}, \tag{8}$$
где степени многочленов $Q_0(y)$, $P_1(y), \ldots, P_{n_1}(y)$ меньше n. Теперь мы не предполагаем, что коэффициенты при старших степенях многочленов P_j равны единице. Производная любого элемента $q(\widetilde{y}) = \sum\limits_{k=0}^{m} \beta_k \widetilde{y}^k$ $(\beta_k \in E_0, k = 0, \ldots, m)$ вычисляется по формуле
$$(q(\widetilde{y}))' = \sum_{k=0}^{m} (\beta_k' + k\, a' \beta_k) \widetilde{y}^k. \tag{9}$$
Пусть многочлены $Q_j(y)$ $(j = 1, \ldots, n_1)$ удовлетворяют условию $P_j(y) Q_j(y) = 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$. Заменим в (8) производные Q_0', P_j' на их выражения по формуле (9), а $(P_j(\widetilde{y}))^{-1}$ на $Q_j(\widetilde{y})$. Обозначив $R(y) = (Q_0(y))' + \sum\limits_{j=1}^{n_1} \mu_j (P_j(y))' Q_j(y) - f$, получим $R(y) = 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Это означает, что многочлен $R(y)$ делится на многочлен $p(y)$, т. е. $R(y) = p(y) q(y)$.

Так как поле E_1 имеет нулевую характеристику, то существует его расширение $\widetilde{E}_1$, в котором уравнение $y^n - 1 = 0$ имеет n различных корней $1 = e_1, e_2, \ldots, e_n$. Пусть $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}$, $i_1 = 1$, образуют базис линейного пространства $\widetilde{E}_1$ над E_1, тогда любой элемент $u \in \widetilde{E}_1$ однозначно раскладывается по этому базису, т. е. $u = u_1 e_{i_1} + \cdots + u_r e_{i_r}$, $u_i \in E_1$ $(i = 1, \ldots, r)$. Положив $u' = u_1' e_{i_1} + \cdots + u_r' e_{i_r}$, мы определим на $\widetilde{E}_1$ операцию дифференцирования, относительно которой $e_i' = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, $\{e_1 \widetilde{y}, \ldots, e_n \widetilde{y}\}$ есть множество всех корней многочлена p, т. е.

$p(e_i\widetilde{y}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Подставив это в выражение для $R(y)$, получим систему равенств $R(e_i\widetilde{y}) = (Q_0(e_i\widetilde{y}))' + \sum\limits_{j=1}^{n_1} \mu_j (P_j(e_i\widetilde{y}))' Q_j(e_i\widetilde{y}) - f = 0$ или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$f = (Q_0(e_i\widetilde{y}))' + \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j \frac{(P_j(e_i\widetilde{y}))'}{P_j(e_i\widetilde{y})} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Теперь возьмём среднее от всех этих равенств

$$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Q_0(e_i\widetilde{y}))' + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\mu_j}{n} \frac{(P_j(e_1\widetilde{y}) \cdots P_j(e_n\widetilde{y}))'}{P_j(e_1\widetilde{y}) \cdots P_j(e_n\widetilde{y})}.$$

Выражения $M_0 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Q_0(e_i\widetilde{y}))'$, $M_j = P_j(e_1\widetilde{y}) \cdots P_j(e_n\widetilde{y})$, $j = 1, \ldots, n_1$, не меняются при любой перестановке корней $e_1\widetilde{y}, \ldots, e_n\widetilde{y}$. Поэтому они выражаются как многочлены от базисных симметрических функций $e_1\widetilde{y} + \cdots + e_n\widetilde{y}, \ldots, e_1\widetilde{y} \cdots e_n\widetilde{y}$ с коэффициентами из E_0. Так как базисные симметрические функции корней в силу теоремы Безу являются коэффициентами многочлена $p(y)$, то они тоже лежат в поле E_0. Поэтому $M_j \in E_0$ для любого $j = 0, \ldots, n$, и мы получаем требуемое лиувиллевское представление

$$f = M_0' + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\mu_j}{n} \frac{M_j'}{M_j}.$$

Следствие. *Пусть $(E, ')$ — дифференциальное поле $f \in E$. Если существует элемент g из некоторого расширения $(F, ')$ поля E такой, что g является неопределённым интегралом от f, то существует элементарное расширение $(G, ')$ поля F в котором g можно представить в виде*

$$g = A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log A_i,$$

где $A, A_i \in E$, $\lambda_i \in C(E)$, $A_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Доказательство. В силу теоремы Лиувилля f можно представить формулой (4). Присоединяя последовательно к полю F логарифмы элементов A_i $(i = 1, \ldots, n)$ получим элементарное расширение $(G, ')$ дифференциального поля $(F, ')$, которое очевидно является также элементарным расширением поля $(E, ')$. В поле G можно почленно проинтегрировать равенство (4) и получить при некотором $a \in C(E) = C(G)$

равенство

$$g = \int f = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log A_i + a.$$

Обозначив $A = A_0 + a$, получаем требуемое представление. Следствие доказано.

7. Обоснование алгоритма интегрирования рациональных функций от логарифма. Пусть $(E_0, ')$ — дифференциальное поле и $(E, ')$ — его элементарное расширение, полученное присоединением логарифма некоторого элемента $a \in E_0$. В этом случае теорема Лиувилля даёт возможность получить больше информации о строении первообразной от $f \in E$ в предположении, что она элементарна. Так как f является рациональной функцией от элемента $y = \log a$ (трансцендентного над полем E_0) с коэффициентами из E_0, то её можно разложить на простейшие дроби:

$$f(y) = R_0(y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{Q_{j,k}(y)}{(L_j(y))^k}, \tag{11}$$

где $Q_{j,k}$, L_j, R_0 — многочлены по переменной y с коэффициентами из поля E_0, причём L_j неприводимы над E_0, взаимно просты и имеют коэффициент при старшей степени, равный 1; кроме этого, $\deg Q_{j,k} < \deg L_j$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m_j)$ (см. задачу 19.22). Выражение $R_0(y)$ есть полиномиальная часть разложения на простые дроби. Напомним, что для фиксированного j часть суммы $\sum\limits_{k=1}^{m_j} Q_{j,k}(y)/(L_j(y))^k$ называют примарной составляющей разложения (11), а число m_j — кратностью этой составляющей.

Первый этап состоит в понижении кратности примарных составляющих. Рассмотрим слагаемое $Q_{j,m_j}/L_j^{m_j}$ с номером $m_j = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$. Подберём дробь $T/L_j^{m_j-1}$ так, чтобы выполнялось равенство $(T/L_j^{m_j-1})' = Q_{j,m_j}/L_j^{m_j} + S/L_j^{m_j-1}$, где S – некоторый многочлен от y, степени $\deg S < \deg L_j$. Заметив, что многочлены L_j' и L_j взаимно просты (см. задачу 19.15), найдём такие многочлены U и V, что $UL_j' + VL_j = 1$, причём $\deg U = 1$, $\deg V = 0$. Теперь можно взять в качестве T остаток от деления $-Q_{j,m_j}U/(m_j-1)$ на L_j. Заменив в разложении (11) слагаемое $Q_{j,m_j}/L_j^{m_j}$ на $(T/L_j^{m_j-1})' - S/L_j^{m_j-1}$, мы получим для первообразной выражение

$$\int f(y) = \frac{T}{L_j^{m_j-1}} + \int R_1(y),$$

причём в разложении $R_1(y)$ на простые дроби кратность примарной составляющей, содержащей в знаменателе многочлен L_j, уменьшилась на единицу. Продолжая этот процесс, мы проинтегрируем в дробной части разложения (11) все примарные составляющие имеют кратности больше 1 и сведём задачу интегрирования j-й примарной составляющей к задаче интегрирования дроби $Q_j(y)/L_j(y)$, где $\deg Q_j < \deg L_j$. Проинтегрировав таким способом каждую примарную составляющую, мы сведём задачу интегрирования $f(y)$ к задаче интегрирования выражения

$$f_1(y) = R_0(y) + \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j(y)}{L_j(y)}, \tag{12}$$

где $\deg Q_j(y) < \deg L_j(y)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

На втором этапе, предполагая элементарность первообразной от $f_1(y)$, запишем для неё лиувиллевское разложение (4):

$$f_1(y) = (A_0(y))' + \sum_{j=1}^{n_1} \mu_j \frac{(P_j(y))'}{P_j(y)}. \tag{13}$$

Рациональную функцию $A_0(y)$ также можно разложить на простейшие дроби:

$$A_0(y) = Q_0(y) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{Q_{j,k}^{(1)}(y)}{(L_j^{(1)}(y))^k}, \tag{14}$$

где $Q_{j,k}^{(1)}$, $L_j^{(1)}$, Q_0 — многочлены от y, причём $L_j^{(1)}$ неприводимы над E_0, взаимно просты, имеют коэффициент при старшей степени, равный 1, и $\deg Q_{j,k}^{(1)} < \deg L_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m_j)$. Так как многочлены $(L_j^{(1)})'$ и $L_j^{(1)}$ взаимно просты (см. задачу 19.15), $\deg (L_j^{(1)})' < \deg L_j^{(1)}$ и $\deg Q_{j,k}^{(1)} < \deg L_j^{(1)}$, то дробь $(L_j^{(1)})' Q_{j,1}^{(1)}/(L_j^{(1)})^{k+1}$ несократима и производная $(Q_{j,k}^{(1)}/(L_j^{(1)})^k)'$ является правильной несократимой дробью со знаменателем $(L_j^{(1)})^{k+1}$. Поэтому разложение на простые дроби для $(A_0(y))'$ имеет вид

$$(A_0(y))' = (Q_0(y))' + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2}^{m_j+1} \frac{Q_{j,k}^{(2)}(y)}{(L_j^{(1)}(y))^k}.$$

Подставив это выражение в (13), мы получим ещё одно разложение $f_1(y)$ на простые дроби. Так как такое разложение единственно, то, сравнивая его с разложением (12), получим $Q^{(2)}_{j,k}(y) = 0$ и $R_0(y) = (Q_0(y))'$, $n_1 = n$, $L_j(y) = P_j(y)$ и $Q_j(y) = \mu_j(P_j(y))'$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть $R_0(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k y^k$, $Q_0(y) = \sum\limits_{k=0}^{m+1} b_k y^k$, где $b'_{m+1} = 0$. Вспоминая, что $y = \log a$, получаем

$$\sum_{k=0}^{m} \left(b'_k + (k+1) b_{k+1} \frac{a'}{a} \right) (\log a)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k (\log a)^k.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\log a$, получаем систему уравнений относительно неизвестных $b_k \in E_0$:

$$b'_k = a_k - (k+1) b_{k+1} a'/a \quad (k = 0, \ldots, m). \tag{15}$$

В итоге мы получили следующий критерий элементарности первообразной от $f_1(y)$, имеющей представление (12):

Первообразная от $f_1(y)$ элементарна тогда и только тогда, когда

(l_1) $Q_j(y) = \mu_j(P_j(y))'$ *для некоторых* $\mu_j \in C(E)$ $(j = 1, \ldots, n)$;

(l_2) система уравнений (15) имеет решение в поле E_0.

Третий этап состоит в проверке условий (l_1) и (l_2). Условие (l_1) легко проверяемо и вся задача сводится к проверке условия (l_2), т. е. к задаче интегрирования в поле E_0. Наиболее просто она решается, когда E_0 является полем рациональных функций, т.е. $E_0 = \mathbb{C}\langle z \rangle$, а E есть поле рациональных функций от логарифма $\log(a(z))$ $(a(z) \in \mathbb{C}\langle z \rangle)$. В этом случае равенства (15) представляют собой задачу на интегрирование рациональных функций (см. § 18).

8. Обоснование алгоритма интегрирования рациональных функций от экспоненты. Пусть $(E, {}')$ – элементарное расширение дифференциального поля $(E_0, {}')$, полученное трансцендентным присоединением экспоненты некоторого элемента $a \in E_0$.

Первый этап тоже состоит в интегрировании кратных примарных составляющих в разложении (11) элемента f на простые дроби. Этот этап осуществляется в точности так же, как в предыдущем случае. Единственное отличие состоит в том, что если в разложении (10) для некоторого j имеем $L_j(y) = y$, то многочлен $(L_j(y))' = a'y$ не взаимно прост с $L_j(y)$. В остальных случаях можно установить взаимную простоту $(L_j(y))'$ и $(L_j(y))$ (см. задачу 19.20). Без ограничения общности можно считать, что $L_1(y) = y$. В результате исключения кратных примарных составляющих мы сводим задачу к интегрированию элемента

$$f_1(y) = R_0(y) + \sum_{k=1}^{m_1} \frac{a_{-k}}{y^k} + \sum_{j=2}^{n} \frac{Q_j(y)}{L_j(y)}, \tag{16}$$

где $a_{-k} \in E_0$ $(k = 1, \ldots, m_1)$. Записав для $f_1(y)$ лиувиллевское представление (13) и выделив в (14) часть суммы простых дробей со знаменателем $L_1^{(1)}(y) = y$, мы после сравнения с разложением на простые дроби (12) получим равенства $R_0(y) + \sum\limits_{k=1}^{m_1} a_{-k}y^{-k} = \left(Q_0(y) + \sum\limits_{k=1}^{m_1} b_{-k}y^{-k} + \sum\limits_{j=2}^{n} \mu_j l_j a\right)'$, $n_1 = n$, $L_j(y) = P_j(y)$ и $Q_j(y) = \mu_j((P_j(y))' - l_j a' P_j(y))$ — остаток от деления $\mu_j(P_j(y))'$ на $P_j(y)$ $(l_j = \deg P_j;\ j = 2, \ldots, n)$. Подставив сюда равенства $R_0(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k y^k$, $Q_0(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k y^k$ и $y = \exp a$, получим

$$\mu a' + \sum_{k=-m_1}^{m} (b_k' + k b_k a') (\exp a)^k = \sum_{k=-m_1}^{m} a_k (\exp a)^k \quad (\mu = \sum_{j=2}^{n} \mu_j l_j).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp a$, получим систему уравнений относительно неизвестных $b_k \in E_0$:

$$b_0' = a_0 - \mu a';\quad b_k' = a_k - k b_k a' \quad (k = -m_1, \ldots, -1, 1, \ldots, m). \tag{17}$$

В итоге мы получили следующий критерий элементарности первообразной от элемента $f_1(y)$, имеющего представление (12):

Первообразная от $f_1(y)$ элементарна тогда и только тогда, когда

(e_1) $Q_j(y) = \mu_j((P_j(y))' - l_j a' P_j(y))$ *для некоторых* $\mu_j \in C(E)$ $(j = 2, \ldots, n)$;

(e_2) *система уравнений* (17) *имеет решение в поле* E_0.

Как и в случае логарифмов, условие (e_1) проверяется автоматически, и вся задача сводится к проверке условия (e_2), т. е. к задаче интегрирования в поле E_0 дифференциальных уравнений (16). В случае когда E_0 является полем рациональных функций, т. е. $E_0 = \mathbb{C}\langle z \rangle$, а E есть поле рациональных функций от $\exp a$, имеются эффективные методы доказательства того, что система (17) не имеет решений в рациональных функциях. Одним из методов является метод сравнения асимптотик правой и левой части равенств (17), при $z \to \infty$ или когда z стремится к одной из особых точек функций $a_k(z)$, $b_k(z)$.

9. Интегрирование рациональных выражений от степенной функции с иррациональным показателем. Пусть $(E_0, ')$ – дифференциальное поле, $a \in E_0$ $(a \neq 0)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ – иррациональное число. Степенная функция $(a(z))^\alpha$ определяется по формуле $(a(z))^\alpha = \exp(\alpha \log a(z))$ в элементарном расширении $(E, ')$ поля $(E_0, ')$, получаемом присоединением двух элементов $\log a$, а затем $\exp(\log a)$.

Лемма 5. *Если $a^{k\alpha} = (a^\alpha)^k \notin E_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то элемент a^α трансцендентен над полем E_0.*

Доказательство. Допустим, что существует неприводимый многочлен $p(y) = y^n + \beta_{n-1}y^{n-1} + \dots + \beta_n$ степени $n > 1$, с коэффициентами $\beta_k \in E_0$ $(k = 0, \dots, n-1)$, такой, что $p(a^\alpha) = 0$. Докажем, что его производная $(p(y))' = n\alpha\frac{a'}{a}y^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\beta_k' + k\alpha\frac{a'}{a}\beta_k)y^k$, также являющаяся многочленом от $y = a^\alpha$ той же степени n, не делится на многочлен $p(y)$. В противном случае, сравнивая коэффициенты этих двух многочленов при одинаковых степенях y, мы получим систему равенств $\beta_k' + k\alpha\frac{a'}{a}\beta_k = n\alpha\frac{a'}{a}\beta_k$ или $(n-k)\alpha\frac{a'}{a} = \frac{\beta_k'}{\beta_k}$ при $\beta_k \neq 0$. Из последнего равенства следует $(\beta_k/a^{(n-k)\alpha})' = 0$, или $\beta_k = ca^{(n-k)\alpha}$ $(c \in C(E))$. Это противоречит тому, что $\beta_k \in E_0$. Поэтому многочлены $p(y)$ и $(p(y))'$ не кратны друг другу и разность $q(y) = n\alpha\frac{a'}{a}p(y) - (p(y))'$ — ненулевой многочлен меньшей степени, корнем которого является тот же элемент a^α. Значит, многочлен $p(y)$ делится на $q(y)$, что противоречит неприводимости $p(y)$. Лемма доказана.

Рассмотрим в поле $(E, ')$ подполе $(E(a^\alpha), ')$, полученное трансцендентным присоединением к полю E_0 элемента a^α. Обозначив $y = a^\alpha$, мы видим, что производная $y' = \frac{\alpha a'}{a}y$ линейна по y в поле E_0. Поэтому случай присоединения степенной функции полностью аналогичен предыдущему случаю присоединения экспоненты, и алгоритм интегрирования рациональной функции от a^α в точности такой же, как и алгоритм интегрирования рациональной функции от экспоненты. Поэтому мы приведём только окончательные результаты.

Интегрирование рациональной функции $f(y)$, где $y = a^\alpha$, начинается с разложения её на простые дроби, см. (11). Далее, так же как и в предыдущем пункте, интегрируем в элементарных функциях кратные примарные составляющие и приходим к задаче интегрирования дроби вида (16). Записав для $f_1(y)$ лиувиллевское представление (13) и выделив в (14) часть суммы простых дробей со знаменателем $L_1^{(1)}(y)) = y$, мы после сравнения с разложением на простые дроби (12) получим равенства $R_0(y) + \sum\limits_{k=1}^{m_1} a_{-k}y^{-k} = \left(Q_0(y) + \sum\limits_{k=1}^{m_1} b_{-k}y^{-k}\right)' + \sum\limits_{j=2}^{n} \mu_j \alpha l_j \frac{a'}{a}$, $n_1 = n$, $L_j(y) = P_j(y)$ и $Q_j(y) = \mu_j((P_j(y))' - l_j\mu\frac{a'}{a}P_j(y))$ — остаток от деления $\mu_j(P_j(y))'$ на $P_j(y)$ ($l_j = \deg P_j$; $j = 2, \ldots, n$). Подставив сюда $R_0(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k y^k$, $Q_0(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k y^k$ и $y = a^{k\alpha}$, получим

$$\mu\frac{a'}{a} + \sum_{k=-m_1}^{m}\left(b_k' + k\mu\alpha b_k\frac{a'}{a}\right)a^{k\alpha} = \sum_{k=-m_1}^{m} a_k a^{k\alpha} \quad \left(\mu = \sum_{j=2}^{n}\mu_j l_j\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(a^\alpha)^k$, получаем систему уравнений относительно неизвестных $b_k \in E_0$:

$$b_0' = a_0 - \mu\frac{a'}{a}; \quad b_k' = a_k - k\alpha b_k\frac{a'}{a} \quad (k = -m_1, \ldots, -1, 1, \ldots, m). \tag{18}$$

В итоге мы получили следующий критерий элементарности первообразной от элемента $f_1(y)$, имеющего представление (12):

Первообразная от $f_1(y)$ элементарна тогда и только тогда, когда

(p_1) $Q_j(y) = \mu_j((P_j(y))' - l_j\alpha\frac{a'}{a}P_j(y))$ *для некоторых* $\mu_j \in C(E)$ $(j = 2, \ldots, n)$;

(p_2) *система уравнений* (18) *имеет решение в поле* E_0.

Чаще всего этот критерий интегрируемости в элементарных функциях применяется в случае, когда E_0 есть поле комплексных рациональных функций $\mathbb{C}\langle z\rangle$. В этом случае свойство $(a(z))^{k\alpha} \notin \mathbb{C}\langle z\rangle$ (при иррациональном α) проверяется достаточно легко (см. задачу 19.59). Поэтому, в силу леммы 5, для любой непостоянной рациональной функции $a(z)$ функция $(a(z))^\alpha$, при иррациональном α, трансцендентна над полем $\mathbb{C}\langle z\rangle$ и к ней применима вышеизложенная теория интегрируемости.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Алексеев В. М.* Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Mounthly». Сборник. М.: Едиториал УРСС, 2004.

2. *Богданов Ю. С., Кострица О. А.* Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск: Вышэйшая школа, 1988.

3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.

4. *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1967.

5. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

6. *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

7. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Высш. шк., 2000. Кн. 1, 2.

8. *Волковыский Л. И, Лунц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.

9. *Воробьёв Н. Н.* Теория рядов. М.: Наука, 1979.

10. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

11. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе М.: Мир, 1967.

12. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.

13. *Дерр В. Я.* Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Вышк. шк., 2008.

14. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.

15. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ: Сб. задач. Киев: Вища школа, 1987.

16. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

17. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1981. Ч. 1, 2.

18. *Иванов В. В.* Задачи и упражнения для семинаров и домашних заданий по курсу «Математический анализ». Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2008. Ч. 1–4.

19. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1973. Ч. 1.

20. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1982. Ч. 2.

21. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1985. Т. 1, 2.

22. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

23. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

24. *Коблиц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1981.

25. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа М.: Наука, 1968.

26. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математическоого анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1–3.

27. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М.: Наука, 1984.

28. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. М.: Наука, 1986.

29. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1995.

30. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.

31. *Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.

32. *Леонтьева Т. А., Панфёров В. С., Серов В. С.* Задачи по теории функций действительного переменного. М.: Изд–во МГУ, 1997.

33. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1975. Т. 1, 2.

34. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.

35. *Очан Ю. С.* Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. М.: Просвещение, 1965.

36. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

37. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. 1. Кн. 1, 2.

38. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. Ч. 2. Кн. 1, 2.

39. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

40. *Садовничий В. А., Григорян А. А., Конягин С. В.* Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд–во МГУ, 1987.

41. *Садовничий В. А., Подколзин А. С.* Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978.

42. *Скворцов В. А.* Примеры метрических пространств. М.: Изд–во МЦНМО, 2002.

43. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 1.

44. *Теляковский С. А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1980.

45. *Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтос П.* Действительный анализ в задачах. М.: Физматлит, 2005.

46. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. Т. 1, 2.

47. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1970. Т. 1–3.

48. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: Объединенное научно-техническое изд-во НКТП СССР, 1937.

49. *Хованский А. Г.* Топологическая теория Галуа: разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. М.: Изд–во МЦНМО, 2008.

50. *Чеботарёв Н.Г.* О выражении абелевых интегралов через элементарные функции // УМН. 1947. Т. II, вып. 2. С. 3–20.

51. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. Ч. 1–2.

52. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1, 2.

53. *Шведов И. А.* Компактный курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003. Ч. 1–3.

54. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. М.: Наука, 1969. Ч. 1–2.

55. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. М.: Наука, 1969. Ч. 3.

56. *Aigner M., Ziegler G. M.* Proofs from the book. Berlin: Springer, 2003.

57. *Giaquinta M., Modica G.* Mathematical analysis. Linear and metric structures and continuity. Boston: Birkhauser, 2007.

58. *Robert A. M.* A course in p-adic analysis. Berlin: Springer, 2000.

Учебное издание

Грешнов Александр Валерьевич,
Малюгин Сергей Артемьевич,
Потапов Владимир Николаевич

Сборник задач и упражнений по математическому анализу
2-й семестр

Учебное пособие
2-е изд., испр.

Корректор *С. В. Исакова*

Подписно в печать 13.01.2012 г.
Формат 60×84 1/16. Оффсетная печать.
Уч.-изд. л. 15,0, усл.-печ. л. 13,9. Тираж экз.
Заказ №
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, 90, ул. Пирогова, 2.