Лекция 1. Категории и функторы.

Содержание

1 Категории

В математике типично рассматривать множества с некоторой дополнительной структурой на них. Например, полугруппа — это множество с заданной на нём бинарной ассоциативной операцией умножения, топологическое пространство — множество с заданной на нём топологией, (гладкое) многообразие — топологическое пространство с заданной на нём гладкой структурой, и т.д. Естественно интересоваться теми отображениями множеств, которые сохраняют эту дополнительную структуру. В алгебре такие отображения называются гомоморфизмами, в топологии — непрерывными отображениями. В общем случае мы будем называть их просто *морфизмами* (по аналогии с терминами эпиморфизм, мономорфизм, автоморфизм, гомеоморфизм, …).Морфизм f из объекта A в объект B обозначается $f\colon A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$, при этом на множестве морфизмов естественно возникает операция композиции, соответствующая просто композиции соответствующих функций. Соотношения между морфизмами обычно выражают коммутативными диаграммами, то есть картинками вида

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "e"] & N \arrow[d, "b"] \\ L \arrow[r, "d"'] & K \end{tikzcd}$$

Диаграмма называется *коммутативной*, если результат композиции морфизмов не зависит от пути пройти из точки в точку вдоль стрелок. В случае этих примерах условие коммутативности соответствует равенствам

$$
\begin{aligned}
h &= g \circ f \\
e &= b \circ a = d \circ c
\end{aligned}
$$

Знак операции композиции мы обычно будем опускать и писать просто $h = gf$. Пунктирная стрелка на диаграмме означает, что её существование утверждается из свойств остальной части диаграммы. Если такая стрелка единственная, то иногда мы будем обозначать её $\overset{!}{\dashrightarrow}$.

Теория категорий есть в некотором смысле метод работы с такими диаграммами, а само понятие категории формализует изложенные выше интуитивные представления.

Определение 1. Категория $\mathcal{C}$ — это множество объектов $\operatorname{Ob} C$, причём каждой паре объектов $a, b \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ сопоставляется множество морфизмов между ними $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a; b)$. Каждому объекту $a \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ сопоставляется выделенный *тождественный (единичный) морфизм* $1_a \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a; a)$. На множестве морфизмов также определена операция композиции, т.е. для любой тройки $a, b, c \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ определено отображение

$$\circ \colon \operatorname{Hom}_C(b; c) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a; b) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a; c)$$

удовлетворяющая следующим тождествам (когда определены все указанные в них операции)

1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;
2. $f \circ 1_a = 1_b \circ f = f,\ f \colon a \to b$;

Это можно выразить следующим образом. Для любой пары последовательных стрелок определена единственная стрелка, делающая коммутативной диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
& b \arrow[dr, "g"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, dashed, "!", "g\circ f"'] & & c
\end{tikzcd}
$$

Условия ассоциативности и существования единицы означают коммутативность следующих диаграмм:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal, "1_a"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, equal, "1_b"'] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r] \arrow[dr] & c \arrow[d] \\
a \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur] & d
\end{tikzcd}
$$

Мы часто будем писать $a \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ просто как $a \in \mathcal{C}$.

2 Малые и большие категории

Хотя в определении категории мы требовали, чтобы морфизмы и объекты образовывали множество, нам потребуется рассматривать категории, в которых такое условие, на первый взгляд, не выполнено (например, категорию всех множеств). Мы обойдём эту трудность с помощью так называемой *аксиомы универсума Гротендика.* А именно, мы предполагаем, что существует некий бесконечный класс достаточно больших бесконечных множеств, называемых универсумами. Элементами универсума U являются множества, причём требуется, чтобы произведение, подмножество или множество подмножеств любых множеств из U также лежало в U. Также в универсуме должны лежать множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, и для любых $u, v \in U$ из универсума также $\{u, v\} \in U$. Говоря короче, любой универсум должен являться моделью теории множеств. Аксиома универсума утверждает, что универсумы существуют, причём для любого универсума U существует универсум V, такой что $U \in V$. Эта аксиома совместна с аксиоматикой теории множеств. Мы предполагаем в дальнейшем фиксированным некоторый универсум U. Множества. лежащие в U, называются *малыми*, все остальные множества называются *большими.* Категория называется *малой*, если её множества объектов и всех морфизмов малы, в противном случае она называется *большой.* Подробнее смотрите в [2].

3 Некоторые примеры категорий

1. Простейший модельный пример — категория множеств $\mathcal{S}et$. Её объекты — все множества, а морфизмы между множествами — просто отображения между ними. Это большая категория.

2. Категория групп $\mathcal{G}rp$. Её объекты — группы, а морфизмы — гомоморфизмы между ними.

3. Вообще любой класс алгебраических структур с гомоморфизмами между ними образует категорию (полугруппы, кольца, поля, алгебры Ли, …). Все такие категории являются большими.

4. Категория топологических пространств $\mathcal{T}op$. Её объекты — топологические пространства, а морфизмы — непрерывные отображения между ними.

   Само понятие категории является чисто алгебраическим, категория не обязана являться именно категорией множеств с дополнительной структурой. Категории описанного выше типа называют *конкретными*, все прочие категории называют *абстрактными.* Приведём некоторые важные примеры абстрактных категорий.

5. Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Рассмотрим категорию $\mathcal{P}$, для которой $\operatorname{Ob}\mathcal{P} = P$, а $\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}}(a; b)$ равен одноэлементному множеству $\{*\}$ при $a \leqslant b$ и $\varnothing$ в противном случае. Аксиомы категории легко проверяются. Заметим, что исходное частично упорядоченное множество полностью восстанавливается по этой категории, при этом утверждение о существовании композиции морфизмов превращается в точности в утверждение о транзитивности $\leqslant$. Категория называется *предпорядком*, если множество

морфизмов между любыми двумя объектами состоит не более чем из одного элемента. Обычно все возникающие предпорядки являются малыми категориями.

6. Важный частный случай предыдущей конструкции получается, если рассмотреть для данного топологического пространства X множество его открытых подмножеств, упорядоченное по включению: $U \leqslant V \iff U \subseteq V$. Соответствующий предпорядок обозначается $\mathcal{O}uv\,(X)$ и играет важную роль в топологии.

7. Другой частный случай предпорядков — категория $[n]$, соответствующая линейно упорядоченному множеству из n элементов. В частности, $[0]$ — это пустая категория, $[1]$ — одноточечная категория с одним объектом и только тождественным морфизмом, а $[2]$ — категория с двумя объектами, единственная нетривиальная стрелка которой идёт из первого объекта во второй. Очевидно, все эти категории малые.

8. *Категория матриц.* Объектами этой категории являются положительные натуральные числа, а морфизмы $n \to m$ представляются матрицами над полем $\Bbbk$ размера $m \times n$. Композиция морфизмов есть просто умножение соответствующих матриц. Эта категория тесным образом связана с категорией конечномерных векторных пространств над $\Bbbk$.

9. Объектами *гомотопической категории* топологических пространств $HoTop$ являются (достаточно хорошие; скажем, CW-комплексы) топологические пространства, а морфизмами — классы гомотопных отображений между ними. Так как отношение гомотопности согласовано с композицией непрерывных отображений, можно определить композицию морфизмов в $HoTop$ как гомотопический класс композиции соответствующих морфизмов в $\mathcal{T}op$. Эта категория, очевидно, чрезвычайно важна в теории гомотопий. Множество морфизмов в ней обычно обозначается $\pi\,(X,Y)$. Например, $\pi\,(*,X)$ есть множество компонент линейной связности X ($*$ — одноточечное пространство), а $\pi\,(S^1,X)$ есть фундаментальная группа X.

10. Любое множество S можно рассматривать как дискретную категорию, множеством объектов которой является S, а множество морфизмов тривиально, т.е. $\mathrm{Hom}\,(a,b) = \varnothing$ при $a \neq b$ и $\mathrm{Hom}\,(a,a) = \{1_a\}$.

11. Пусть S — произвольная полугруппа с единицей. Её можно рассматривать как категорию, имеющую единственный объект $*$, причём $\mathrm{Hom}\,(*,*) = S$, а композиция морфизмов задаётся умножением в полугруппе.

12. Более экзотический пример — категория кобордизмов. Её объекты — всевозможные компактные многообразия, а морфизм между многообразиями X и Y есть класс диффеоморфных многообразий Z, таких что их граница есть дизъюнктное объединение $\partial Z = X \coprod Y$. Композиция морфизмов даётся склейкой соответствующих многообразий по общей границе, тождественный морфизм $1\colon X \to X$ есть цилиндр $X \times [0;1]$.

13. Пример из физики: категория диаграмм Фейнмана. Её объекты — всевозможные наборы частиц в некотором состоянии, а морфизмами между двумя состояниями частиц являются диаграммы, соответствующие переходу из первого состояния во второе.

14. Вообще для данной динамической системы можно рассмотреть категорию, объектами которой являются состояния этой системы, а морфизмами — процессы, переводящие систему из одного состояния в другое. Так возникают, например, категории конечных автоматов. Аналогичный пример — категория алгоритмов в информатике. Её объекты — всевозможные наборы входных и выходных переменных с некоторыми значениями, а морфизмы — алгоритмы, переводящие заданные данные на входе в заданные данные на выходе.

4 Построение категорий

Далее рассмотрим некоторые способы построения новых категорий.

Определение 2. Пусть G — ориентированный граф, т.е. множество точек и стрелок между ними (две точки могут соединяться более чем одной стрелкой). *Свободная категория*, порождённая G, имеет в качестве множества объектов множество вершин G, а морфизмы из a в b есть всевозможные пути между ними (обход обязательно происходит по направлению стрелок). В частности, тривиальный путь из a в a, не проходящий по рёбрам, соответствует единичному морфизму 1_a. Композиция морфизмов соответствует просто последовательному прохождению соответствующих путей. В частности, 1_a действительно является тождественным элементом относительно композиции.

Определение 3. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве её объектов и морфизмов, согласованное с операцией композиции морфизмов. *Факторкатегория* $\mathcal{C}/\sim$ имеет множество объектов $\operatorname{Ob}\mathcal{C}/\sim$, а морфизмами из $[a]$ в $[b]$ являются классы эквивалентности морфизмов относительно $\sim$. Композиция морфизмов определяется естественным образом: $[f]\,[g] = [fg]$. Так как $\sim$ согласовано с умножением морфизмов в $\mathcal{C}$, категория $\mathcal{C}/\sim$ действительно корректно определена.

В алгебре типично задание объектов образующими и соотношениями. Аналогично, мы можем задать категорию как фактор некоторой свободной категории по некоторому отношению эквивалентности на морфизмах. Типичный пример — коммутативные диаграммы. А именно, любая диаграмма является ориентированным графом, поэтому ей можно сопоставить факторкатегорию свободную категории, такую что любые два пути с общим началом и концом объявляются эквивалентными. Несложно видеть, что любая коммутативная диаграмма является предпорядком.

Определение 4. Пусть $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ — категории. Их *произведение* есть категория $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, такая что $\operatorname{Ob}\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \operatorname{Ob}\mathcal{A}\times\operatorname{Ob}\mathcal{B}$, а морфизмами из (a,b) в (a',b') являются пары морфизмов (f,g), $f\colon a\to a'$, $g\colon b\to b'$, $(f,g)\circ(f',g') = (f\circ f', g\circ g')$, $1_{(a,b)} = (1_a, 1_b)$.

Следующий пример является обобщением категорий пространств с отмеченной точкой или категорий R-алгебр.

Определение 5. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, $a\in\mathcal{C}$. Объектами *категории $\mathcal{C}/a$ объектов над a* являются пары (x,f), $x\in\mathcal{C}$, $f\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x,a)$. Морфизмами $\phi\colon(x,f)\to(y,g)$ являются стрелки $\phi\colon x \to y$, такие что $f = g\phi$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & & y \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Аналогично определяется *категория объектов под a* $a/\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & a & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\phi"'] & & y \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Определение 6. *Двойственная категория* $\mathcal{C}^{op}$ категории $\mathcal{C}$ имеет такое же множество объектов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, а все стрелки её направлены в обратную сторону: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(a,b) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,a)$. Композиция определяется аналогично: $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$, где $f^{op} \in \mathcal{C}^{op}$ — образ стрелки $f \in \mathcal{C}$.

Двойственные категории позволяют сопоставить любому категорному (т.е. выраженному посредством аксиоматики теории категорий и поэтому применимому в любой категории) рассуждению или конструкции её двойственную, т.е. рассмотреть его же в двойственной категории. Мы будем часто пользоваться этим в дальнейшем. *Принцип двойственности* утверждает, что если категорное утверждение верно, то и двойственное к нему также верно. Это следует из того, что в доказательстве утверждения можно обратить все стрелки и получить доказательство двойственного утверждения. Заметим, что если в утверждении фигурируют несколько категорий, то при дуализации утверждения нужно обращать все стрелки категорий, но направления функторов между категориями сохраняются. Более подробно см. [2].

5 Некоторые структуры в категориях

Определение 7. Морфизм $f\colon a \to b$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм $f^{-1}\colon b \to a$, что $f \circ f^{-1} = 1_b$, $f^{-1} \circ f = 1_a$.

Лемма 1. *Если обратный морфизм существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть g, h — два различных обратных к f морфизма. По определению обратного морфизма:

$$g = g\,(fh) = (gf)\,h = h$$

□

В категории множеств изоморфизмы — это биекции множеств, в категории групп — изоморфизмы групп, в категории $\mathcal{T}op$ — гомеоморфизмы. В предпорядке объекты изоморфны тогда и только тогда. когда $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$.

Определение 8. Морфизм $f\colon b \to c$ называется *мономорфизмом*, если на него можно сокращать слева. А именно, пусть g, h — морфизмы, делающие коммутативной диаграмму $a \overset{h}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b \xrightarrow{f} c$, т.е. $fg = fh$. f является мономорфизмом, если в любой такой диаграмме необходимо $g = h$.

Двойственно определяется понятие эпиморфизма. Эпиморфизм — это морфизм, на который можно сокращать справа. Заметим, что мономорфизм не обязан иметь левый обратный морфизм, т.е. такой $r : c \to b$, что $1_b = rf$. Если такой r существует, то f называется *расщепимым* мономорфизмом. Аналогично, эпиморфизм $p\colon E \to B$ называется расщепимым, если существует $s\colon B \to E$ такой, что $1_B = ps$. Соответствующий морфизм s при этом называется *сечением* p. Пример нерасщепимого эпиморфизма — расслоение топологических пространств, не имеющее сечения (например, расслоение Хопфа). Другой пример: в категории метрических пространств отображение $f\colon X \to Y$ является эпиморфизмом, если его образ плотен в Y. В частности, вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ является эпиморфизмом, но он не расщепим, т.к. не существует непостоянных отображений $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$. Это также является примером нерасщепимого мономорфизма.

Замечание. В общем случае морфизм, являющийся мономорфизмом и эпиморфизмом, **не является** изоморфизмом! Примеров множество: вложение $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ в категории метрических пространств, вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ в категории коммутативных колец с единицей, вложение прямой в тор в качестве иррациональной обмотки в категории топологических пространств.

Определение 9. Произведение объектов A и B в категории $\mathcal{C}$ — это тройка $(A \times B, p_1, p_2)$, где $A \times B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, а $p_1\colon A \times B \to A$, $p_2\colon A \times B \to B$ — проекции на первый и второй сомножитель соответственно, обладающая следующим универсальным свойством. Для любого другого объекта C и морфизмов из C в сомножители существует единственная стрелка, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "p_1"] & B
\end{tikzcd}$$

Используя стандартную вольность речи, мы будем называть произведением объектов A и B сам объект $A \times B$, молчаливо подразумевая канонические проекции заданными.

Лемма 2. *Произведение объектов определено однозначно с точностью до изоморфизма, если существует.*

Доказательство. В силу универсальности существует единственная стрелка, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, dashed, "!\mathrm{id}"] & \\
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Так как эту стрелку можно выбрать единичной, никаких неединичных морфизмов $A \times B \to A \times B$, сохраняющих проекции, нет. Далее, рассмотрим два различных произведения $A \times B$ и $A \times' B$. В силу универсальности каждого существуют две указанные вертикальные стрелки, делающие коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, dashed, shift left, "f"] & \\
A & & B \\
 & A \times' B \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] \arrow[uu, dashed, shift left, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Композиция $g \circ f$ есть эндоморфизм $A \times B$, по доказанному выше он единичный. Поэтому $gf = 1$, аналогично $fg = 1$ и объекты действительно изоморфны. □

Предложение 1. *Пусть все указанные произведения существуют. Тогда верны следующие свойства:*

1. $A \times B \simeq B \times A$
2. $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$

Доказательство.

1. Оба объекта очевидным образом обладают одним и тем же универсальным свойством, т.к. определение произведения симметрично. В силу леммы 2 они изоморфны.

2. Аналогично произведению двух объектов можно определить произведение трёх объектов $A \times B \times C$ как универсальный объект, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rrr, dashed, "\langle f,g \rangle"] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & A \times B \times C \arrow[dlll, "p_1"'] \arrow[dll, "p_2"] \arrow[d, "p_3"] \\
A & B & & C
\end{tikzcd}$$

Покажем, что $(A \times B) \times C \simeq A \times B \times C$, аналогично для $A \times (B \times C)$. Действительно, $(A \times B) \times C$ проектируется на каждый из A, B, C, поэтому существует соответствующая единственная стрелка $f\colon (A \times B) \times C \to A \times B \times C$. Так как $A \times B \times C$ проектируется на A и на B, существует единственное соответствующее отображение $A \times B \times C \to A \times B$. После этого свойство универсальности гарантирует существование стрелки $f^{-1}\colon A \times B \times C \to (A \times B) \times C$, замыкающей общую диаграмму. Композиции $f \circ f^{-1}$ и $f^{-1} \circ f$ вместе с проекциями из соответствующих объектов дают коммутативные диаграммы, поэтому в силу леммы 2 они равны единичным стрелкам, т.е. f действительно изоморфизм

$(A \times B) \times C \overset{f}{\simeq} A \times B \times C$, что и требовалось. Всю цепь рассуждений можно записать следующей коммутативной диаграммой:

$$
\begin{tikzcd}
(A \times B) \times C \arrow[rr, dashed, shift left, "f"] \arrow[d] \arrow[ddrr, bend left] & & A \times B \times C \arrow[ll, dashed, shift left, "f^{-1}"] \arrow[dll, dashed] \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dd] \\
A \times B \arrow[r] \arrow[dr] & A & \\
& B & C
\end{tikzcd}
$$

∎

На самом деле указанный изоморфизм является не просто изоморфизмом объектов (такой изоморфизм несёт очень мало информации, ср. изоморфизм множеств), а естественный изоморфизмом соответствующих функторов (см. далее). Прямое доказательство этого ещё более громоздко, чем приведённое выше. Мы получим элементарное доказательство этого факта после рассмотрения понятия представимых функторов и пределов в следующих лекциях.

Понятие, двойственное к произведению, называется *копроизведение* или *прямая сумма*. Оно определяется двойственной диаграммой

$$
\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & A \coprod B \arrow[u, dashed, "\langle f, g \rangle"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}
$$

6 Категория категорий

Одним из основных утверждений философии теории категорий является максима „морфизмы важнее объектов”[1]. А именно, при изучении любой математической структуры важно не столько то, чем „является” эта структура и как она определялась, сколько то, какие отображения допустимы между носителями этой структуры, т.е. какую категорию они образуют. Все утверждения так или иначе можно свести к утверждениям о морфизмах, поэтому считается, что вся существенная информация об исследуемом классе объектов содержится в категории, которой он принадлежит. Ясно, что объект в принципе может лежать в разных категориях, которые будут отражать разные аспекты его структуры. К примеру, топологическое пространство можно рассматривать как объект в $\mathcal{T}op$, в $Ho\mathcal{T}op$ или в некоторой достаточно хорошей подкатегории в $\mathcal{T}op$ (скажем, подкатегории хаусдорфовых пространств). Правильный выбор категории столь же важен, как и строгое определение рассматриваемого объекта. Мы не раз будем наблюдать это. Ясно, что категория должна быть, с одной стороны, достаточно большой, чтобы полностью отразить рассматриваемую структуру и чтобы была достаточная

[1] В соответствии с этим более правильно именовать категории не в честь их множеств объектов, а в честь их множеств морфизмов, но в литературе в основном установился первый вариант.

свобода построений, и с другой стороны — достаточно малой, чтобы обладать хорошими свойствами. Ситуация во многом напоминает вопрос о правильном выборе топологии на некотором пространстве, так чтобы она отражала структуру исследуемого объекта, но при этом была достаточно просто устроена, что становится особенно важно в функциональном анализе.

Следуя этой философии, мы должны определить не только сами категории, но и категорию, которую они образуют. Морфизмы между категориями называются *функторами.*

Определение 10. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — категории. (Ковариантный) функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — это отображение $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ и для каждой пары объектов $a, b \in \mathcal{A}$ — отображение $\mathcal{F}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a; b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(a); \mathcal{F}(b))$, сохраняющее структуру категории. Это значит, что на морфизмах выполнено

- $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "fg"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & \cdot \end{tikzcd} \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\mathcal{F}g"] \arrow[dr, "\mathcal{F}(fg)"'] & \cdot \arrow[d, "\mathcal{F}f"] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{F}(1_a) = 1_{\mathcal{F}(a)}$

Для облегчения обозначений скобки часто опускают. Контравариантный функтор — это функтор, обращающий стрелки, т.е. $\mathcal{G}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a; b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G}b; \mathcal{G}a)$, так что $\mathcal{G}(fg) = \mathcal{G}(g)\,\mathcal{G}(f)$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "fg"'] & \cdot \arrow[d, "f"] \\ & \cdot \end{tikzcd} \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "\mathcal{G}g"'] \\ & \cdot \arrow[u, "\mathcal{G}f"'] \arrow[ul, "\mathcal{G}(fg)"] \end{tikzcd}$$

Функтор от нескольких переменных есть функтор вида $\mathcal{F}\colon \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}$. В частном случае $n = 2$ функтор $\mathcal{F}$ называют *бифунктором.*

Замечание. Иногда, говоря о функторе, мы будем упоминать только его действие на объектах категории, при этом подразумевается, что ясно, как он действует на морфизмах. Однако, сам функтор не определяется своим действием на объектах. Можно придумать функторы, совпадающие на объектах, но по-разному действующие на морфизмах. Отображение $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ называется *функцией объектов* функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Упражнение 1.

1. Композиция функторов есть функтор.

2. Контравариантный функтор $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}$ есть то же, что и функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ или $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}^{op}$. По этой причине чаще всего говорят просто о функторах, предполагая все функторы ковариантными. Контравариантный функтор, по определению, есть функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$. Такой выбор категорий обоснован структурой естественных преобразований на множестве функторов (см. 3).

Примеры:

1. Тождественный функтор действует на объектах и морфизмах категории тождественным отображением.

2. Постоянный функтор $\Delta_D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ отображает все объекты категории $\mathcal{A}$ в один объект $D \in \mathcal{B}$, а все морфизмы — в 1_D.

3. Функторы $[1] \to \mathcal{A}$ соответствуют просто всевозможным объектам $\mathcal{A}$, функторы $[2] \to \mathcal{A}$ есть всевозможные морфизмы $\mathcal{A}$, функторы $[3] \to \mathcal{A}$ — пары последовательных морфизмов.

4. Любая коммутативная диаграмма в категории $\mathcal{A}$ есть функтор из некоторой малой категории $\mathcal{D}$ в $\mathcal{A}$. Категория $\mathcal{D}$ есть просто свободная категория, порождённая графом диаграммы, функтор переводит вершины диаграммы в соответствующие объекты категории, а стрелки — в соответствующие морфизмы, при этом условие коммутативности есть в точности условие функториальности соответствующего отображения. Поэтому мы будем использовать словосочетания „функтор в категорию $\mathcal{A}$" и „диаграмма в категории $\mathcal{A}$" как синонимы.

5. Функтор абелизации действует из категории групп в категорию абелевых групп и сопоставляет группе её фактор по коммутанту. *(проверьте, что это функтор)*

6. Пусть $\mathcal{C}$ — конкретная категория, т.е. её объектами являются пары (s, J), где s — множество, а J — некоторая структура на нём (например, структура группы или топологического пространства); морфизмы категории $f\colon (s, J) \to (s', J')$ есть отображения $f\colon s \to s'$, сохраняющие структуру J. *Забывающий функтор* $U\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ отображает объекты категории в соответствующие множества без структуры, а морфизмы — в соответствующие отображения множеств. Этот функтор, не смотря на кажущуюся тривиальность определения, играет большую роль в алгебре и в значительной степени описывает саму категорию $\mathcal{C}$.

7. Аналогичные примеры забывающих функторов типичны в теории категорий. Например, любое многообразие является топологическим пространством, поэтом определён забывающий функтор $U\colon \mathcal{M}f \to \mathcal{T}op$. Заметим, что он не является вложением на множестве объектов, т.к. многообразия могут быть гомеоморфны, но не диффеоморфны.

Объектами категории категорий $\mathcal{C}at$ являются все категории, морфизмами — функторы между этими категориями. Эта категория является большой. Множество морфизмов из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$ обычно обозначается $\mathrm{Fun}\,(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ или $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Особенностью $\mathcal{C}at$ является то, что множество морфизмов между любыми двумя категориями само имеет естественную структуру категории. Морфизмы в категории $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ называются *естественными преобразованиями.*

Определение 11. Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — функторы. Естественное преобразование η из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$ задаётся выбором для каждого объекта $a \in \mathcal{A}$ единственного морфизма $\eta_a\colon \mathcal{F}a \to \mathcal{G}a$, так что для любого $f\colon a \to a'$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"] & \mathcal{G}a \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}a' \arrow[r, "\eta_{a'}"] & \mathcal{G}a'
\end{tikzcd}$$

Иначе говоря, естественное преобразование из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$ есть функтор $\mu\colon \mathcal{A} \times [2] \to \mathcal{B}$, такой что $\mu(\cdot, x) = \mathcal{F}$, $\mu(\cdot, y) = \mathcal{G}$, где $[2]$ — категория вида $x \to y$. Это определение аналогично определению гомотопии между двумя непрерывными отображениями. Аналогия становится строгим утверждением при рассмотрении функтора классифицирующего пространства категории, который мы построим в будущем. Этот функтор превращает функторы в непрерывные отображения классифицирующих пространств, а естественные преобразования функторов — в гомотопии между этими отображениями.

Примеры

1. Функторы $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon [1] \to \mathcal{A}$ соответствуют выбору объектов $\mathcal{F}a, \mathcal{G}a \in \mathcal{A}$, а естественное преобразование между ними — выбору морфизма $\eta : \mathcal{F}a \to \mathcal{G}a$.

2. Пусть $\mathcal{D}$ — диаграмма вида $\circ_1 \to \circ_2 \leftarrow \circ_3$, $a \in \mathcal{A}$, $D : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ — функтор. Естественное преобразование из постоянного функтора Δ_a в D — это есть пара отображений, делающих коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & D(\circ_3) \arrow[d] \\ D(\circ_1) \arrow[r] & D(\circ_2) \end{tikzcd}$$

Естественный изоморфизм — это естественное преобразование, являющееся изоморфизмом в категории функторов $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$.

Рассмотрим мономорфизмы и изоморфизмы в $\mathcal{C}at$. Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда он является вложением множеств объектов и морфизмов. В этом случае говорят, что $\mathcal{A}$ — *подкатегория* в $\mathcal{B}$, а функтор вложения F — *строгий.* Функтор называется *полным*, если $F\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fa, Fb)$ есть сюрьекция для любых $a, b \in \mathcal{A}$. *Полная подкатегория* — это подкатегория, функтор вложения которой полный. Таким образом, полная подкатегория должна содержать все морфизмы между любыми двумя объектами, содержащимися в ней.

Ситуация с изоморфизмами более тонкая. Тривиальным случаем общего понятия является изоморфизм категорий.

Определение 12. Категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *изоморфными*, если существуют функторы $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, такие что $F \circ G = 1_{\mathcal{B}}$, $G \circ F = 1_{\mathcal{A}}$.

Изоморфизм категорий встречается достаточно редко и не несёт особо большой информации. Категории могут обладать одними и теми же категорными свойствами не смотря на то, что они не изоморфны. Правильным аналогом изоморфизма в $\mathcal{C}at$ является понятие эквивалентности категорий. Оно возникает естественно, если вспомнить, что множества морфизмов в $\mathcal{C}at$ сами имеют структуру категории, поэтому естественно заменить равенство морфизмов на их изоморфизм в функторной категории, в соответствии с общими принципами.

Определение 13. Категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются *эквивалентными*, если существуют функторы $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, такие что $F \circ G \simeq 1_{\mathcal{B}}$, $G \circ F \simeq 1_{\mathcal{A}}$ (естественно изоморфны).

Пример эквивалентных, но не изоморфных категорий: категория [1] и категория $\mathcal{A} = a \rightleftarrows b$ с двумя объектами и единственной стрелкой в каждую сторону, являющейся, как следствие, изоморфизмом. Функтор $F\colon [1] \to \mathcal{A}$ отображает единственный объект $* \in [1]$ в $a \in \mathcal{A}$, а единственный единичный морфизм — в единичный морфизм. Функтор $G\colon \mathcal{A} \to [1]$ отображает оба объекта в $* \in [1]$, а все морфизмы — в единичный.

Эквивалентность категорий удобно проверять через сравнение их скелетов.

Определение 14. *Скелет* категории $\mathcal{A}$ — это полная подкатегория $\mathrm{sk}\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}$, такая что любой объект $a \in \mathcal{A}$ изоморфен *единственному* объекту $\tilde{a} \in \mathrm{sk}\mathcal{A}$.

Любая категория эквивалентна своему скелету, поэтому категории эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их скелеты. На самом деле можно усилить утверждение: скелеты должны быть изоморфны. Это позволяет свести изучение эквивалентностей к изучению изоморфизмов.

Упражнение 2. Пусть $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ — бифунктор. Доказать, что

1. Для любого $a \in \mathcal{A}$ правило $\mathcal{F}_a(b) = \mathcal{F}(a, b)$, $\mathcal{F}_a(f) = \mathcal{F}(1_a, f)$ задаёт функтор $\mathcal{F}_a\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

2. Любая стрелка $h\colon a \to a'$ определяет естественное преобразование $\eta_h\colon \mathcal{F}_a \to \mathcal{F}_{a'}$ по правилу $\eta_h(b) = \mathcal{F}(h, 1_b)$.

Упражнение 3. Доказать изоморфизм следующих категорий:

1. $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^{op} \simeq [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{B}^{op}]$

2. $[\mathcal{A}, \mathcal{B}^{op}]^{op} \simeq [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{B}]$

7 Упражнения

1. Доказать, что произведение категорий есть произведение в $\mathcal{C}at$.

2. Покажите, что произведение имеет единственную структуру бифунктора, совместимую с проекциями на компоненты. Образ пары стрелок $f\colon A \to A'$, $g\colon B \to B'$ под действием этого бифунктора обозначается $f \times g$.

3. Опишите произведения в категории групп, топологических пространств, векторных пространств, предпорядках, категории матриц. Аналогично, опишите копроизведения.

4. Покажите, что сопоставление группе её центра $G \mapsto Z(G)$ не является функцией объектов какого-либо функтора $\mathcal{G}rp \to \mathcal{A}b$ (рассмотрите симметрические группы $S_2 \to S_3 \to S_2$).

5. Найдите два различных функтора $T\colon \mathcal{G}rp \to \mathcal{G}rp$, действующих тождественно на объектах ($T(G) = G$).

6. Пусть в категории $\mathcal{C}$ имеются все конечные произведения. Покажите, что отображение $\mathrm{sq}\colon c \to c \times c$ есть функция объектов некоторого функтора. Диагональный морфизм $\Delta_c\colon c \to c \times c$ определяется диаграммой

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, equal, "1_c"'] \arrow[dr, equal, "1_c"] \arrow[d, dashed, "\Delta_c"] & \\ c & c \times c \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "p_1"] & c \end{tikzcd}$$

   Проверьте, что это задаёт естественное преобразование $\Delta\colon \mathrm{Id} \to \mathrm{sq}$, где Id — тождественный функтор на $\mathcal{C}$.

7. Покажите, что сопоставление множеств $X \mapsto X^S$ для фиксированного S функториально по X. Здесь $X, S \in \mathcal{S}et$, X^S — множество функций из S в X. Покажите, что сопоставление $\mathrm{ev}_X\colon X^S{\times}S \to X$, определяемое по правилу $\mathrm{ev}_X(f, s) = f(s)$, т.е. вычисляющее значение функции f в точке s, задаёт естественное преобразование функторов $\mathrm{ev}\colon \cdot^S \times S \to \mathrm{Id}$.

8. Покажите, что категория матриц над полем $\Bbbk$ $\mathcal{M}atr_{\Bbbk}$ является скелетом категории векторных пространств над $\Bbbk$ $\mathcal{V}ect_{\Bbbk}$.

9. Докажите, что любая категория эквивалентна своему скелету.

10. Композиция эквивалентностей есть эквивалентность.

11. Покажите, что в категории колец $\mathcal{R}ng$ вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ является эпиморфизмом.

12. Покажите, что композиция мономорфизмов есть мономорфизм. Аналогично для эпиморфизмов.

13. Если композиция $g \circ f$ является мономорфизмом, то f — мономорфизм. Верно ли это для g?

14. Покажите, что произведение предпорядков является предпорядком.

8 Литература

Классическим введением в теорию категорий является книга [2]. Она отличается чрезвычайно простым, лаконичным изложением, при этом охватывая огромное количество материала. Множество конкретных примеров теоретико-категорных понятий можно найти в книге [6], с бо́льшим уклоном в сторону примеров из информатики. Энциклопедический объём информации по теории категорий содержится в трёхтомнике [3, 4, 5], а теория топосов подробно рассмотрена в [7]. Хорошее изложение обогащённой теории категорий (дополнительная структура на множествах морфизмов) содержится в [8]. Эта книга также может служить для изучения обычной теории категорий, но стоит отметить, что в силу особенностей предмета изложение оказывается гораздо более алгебраичным, также предполагается некоторое знакомство хотя бы с основными понятиями теории категорий. Обширная вики-энциклопедия по теории категорий содержится на сайте [1]. К сожалению, её формат не ориентирован на новичка, поэтому обилие новых терминов на первых порах может препятствовать чтению.

Список литературы

[1] The nlab.

[2] С. Маклейн. *Категории для работающего математика.* ФИЗМАТЛИТ, 2e edition, 2004.

[3] Franics Borceux. *Handbook of categorical algebra 1. Basic category theory.* Cambridge University Press, 1994.

[4] Franics Borceux. *Handbook of categorical algebra 2. Categories and structures.* Cambridge University Press, 1994.

[5] Franics Borceux. *Handbook of categorical algebra 3. Categories of sheaves.* Cambridge University Press, 1994.

[6] G. E. Strecker J. Adamek, H. Herrlich. *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats.* 2004.

[7] P.T. Johnstone. *Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium*, volume 1. Oxford University Press, 2002.

[8] G.M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory.* Reprints in Theory and Applications of Categories, 2005.

Лекция 2. Представимые функторы.

А. Ю. Фетисов

02/13/12

Содержание

В прошлый раз мы определили, что такое категории, функторы и естественные преобразования. В этот раз мы рассмотрим понятие универсальности и один канонический бифунктор, связанный с каждой категорией.

1 Hom-функтор.

Множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$, участвующие в определении категории, можно представить как функцию объектов бифунктора $\mathrm{Hom}\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$. Действе на морфизмах задаётся следующим образом: для любого морфизма $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ и морфизмов $g\colon a' \to a$, $h\colon b \to b'$ образ f определяется композициями

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(a,h)"] & \\ b \arrow[r, "h"'] & b' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & a' \arrow[l, "g"'] \arrow[dl, "\mathrm{Hom}(a,g)"] \\ b & \end{tikzcd}$$

Функториальность можно проверять отдельно по каждой переменной. По второй переменной функториальность следует из коммутативности следующей диаграммы ($\mathrm{H} = \mathrm{Hom}(a, \cdot)$):

$$\begin{tikzcd} & b_3 & \\ & a \arrow[u] \arrow[dl, "f"] \arrow[dr] & \\ b_1 \arrow[uur, "hg"] \arrow[rr, "g"'] & & b_2 \arrow[uul, "h"'] \end{tikzcd}$$

Аналогично по первой переменной.

Определение 1. Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *представимым*, если он изоморфен $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot)$ для некоторого $A \in \mathcal{C}$. Как частный случай, функтор $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}et$ представим, если $F \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, a)$.

Представимые функторы — один из самых важных объектов теории категорий. С одной стороны, представимость гарантирует особенно хорошие свойства функтора, с другой стороны, позволяет сопоставить ему некоторый объект категории, который можно изучать другими способами. Кроме того, она позволяет строить новые важные классы функторов.

Hom-функтору можно придать другой вид, используя упомянутое в прошлой лекции соответствие между бифункторами и функторами со значениями в категории функторов.

Лемма 1. $[\mathcal{A}\times\mathcal{B};\mathcal{C}]\simeq[\mathcal{A},[\mathcal{B},\mathcal{C}]]$

Напомним, что при этом бифунктору $F\colon\mathcal{A}\times\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ сопоставляется функтор $a\mapsto F_a$, $F_a\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$, по правилу $F_a(b)=F(a,b)$, $F_a(f)\overset{def}{=}F(a,f)=F(1_a,f)$, при этом стрелке $h\colon a\to a'$ соответствует естественное преобразование $F(h,\cdot)$ по правилу $F(h,\cdot)(b)=F(h,1_b)$.

Определение 2. Ковариантное вложение Йонеды $Y:\mathcal{C}\to\mathcal{S}et^{\mathcal{C}^{op}}$ задаётся по правилу $Y(a)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot,a)$. Аналогично, контравариантное вложение Йонеды $Y^*:\mathcal{C}^{op}\to\mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ задаётся по правилу $Y^*(a)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,\cdot)$.

В силу леммы 1 это действительно отображения категорий. Его образом являются представимые функторы. Естественно попробовать полностью описать образ этого вложения. Это позволяет сделать лемма Йонеды.

Теорема. *(лемма Йонеды) Пусть $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$ — функтор, $a\in\mathcal{C}$. Тогда имеется естественный по a, F изоморфизм*

$$\mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}\left(a,\cdot\right),F\right)\simeq F\left(a\right)$$

Прежде чем доказывать её, рассмотрим некоторые следствия.

Вывод 1. *Вложение Йонеды есть строго полный функтор $\mathcal{C}\to\mathcal{S}et^{\mathcal{C}^{op}}$.*

Доказательство. $\mathrm{Nat}(Y_a,Y_b)\simeq Y_b(a)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$, что и требовалось. □

Вывод 2. *Представляющий объект единственен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Так как вложение Йонеды — строго полный функтор, то любой изоморфизм представимых функторов порождён изоморфизмом представляющих их объектов. □

Вывод 3. *Пусть бифунктор $F\colon\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{B}\to\mathcal{S}et$ представим при каждом фиксированном значении первой переменной, т.е. $F(a,\cdot)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(a),\cdot)$. Тогда существует единственная структура функтора $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ на T, такая что $F\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T\cdot,\cdot)$ — изоморфизм бифункторов.*

Доказательство. Для любой стрелки $h\colon a\to a'$ существует единственная стрелка, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(a,\cdot) \arrow[r, "F(h,\cdot)"] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & F(a',\cdot) \arrow[d, phantom, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta,\cdot) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Th,\cdot)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta',\cdot)
\end{tikzcd}$$

В силу леммы Йонеды, она индуцирована единственной стрелкой $Th\colon Ta\to Ta'$. Это определяет действие T на морфизмах. Функториальность следует из функториальности отображения $h\mapsto F(h,\cdot)$. □

Это утверждение применяется в математике повсеместно. Пример: произведение объектов категории $A\times B$ есть объект, представляющий функтор $C\mapsto\mathrm{Hom}(C,A)\times\mathrm{Hom}(C,B)$. В силу сказанного выше, $\cdot\times\cdot$ является бифунктором. Другой пример: тензорное произведение модулей над коммутативным, ассоциативным кольцом R есть объект $M\otimes_R N$, представляющий функтор $Bilin(M,N;-)$, сопоставляющий R-модулю K множество R-билинейных отображений $f\colon M\times N\to K$:

$$\begin{array}{rcl}
f(m;n+n') & = & f(m;n)+f(m;n') \\
f(m+m';n) & = & f(m;n)+f(m';n) \\
f(mr;n) & = & f(m;rn) \\
m,m'\in M, & n,n'\in N, & r\in R
\end{array}$$

По сказанному выше, $\otimes_R$ также является бифунктором.

Доказательство. (лемма Йонеды) Естественное преобразование состоит из множества согласованных стрелок $\mu_b\colon\mathrm{Hom}(a,b)\to F(b)$. В частности, имеется выделенный элемент $\mu_a(1_a)\in F(a)$, соответствующий образу единичной стрелки на a. Таким образом, лемма Йонеды равносильна утверждению о том, что естественное преобразование $\mu\colon \mathrm{Hom}\,(a,\cdot) \to F$ однозначно определяется образом единичной стрелки, и этот образ может быть любым элементом $F\,(a)$. Доказательством является следующая коммутативная диаграмма естественного преобразования:

$$\begin{tikzcd}
1_a \in \mathrm{Hom}\,(a,a) \arrow[r, "\mu_a"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(a,f)"'] & F\,(a) \arrow[d, "F(f)"] \\
f \in \mathrm{Hom}\,(a,b) \arrow[r, "\mu_b"] & F\,(b)
\end{tikzcd}$$

Таким образом, знание $\mu_a\,(1_a)$ определяет единственным образом $\mu_b\,(f)$ для любой стрелки $f\colon a \to b$ по правилу $\mu_b\,(f) = (F\,(f) \circ \mu_a)\,(1_a)$. Естественность полученного отображения соответствует коммутативности для любой стрелки $h\colon b \to b'$ диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(a,b) \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(a,h)"'] & F\,(b) \arrow[d, "F(h)"] \\
\mathrm{Hom}\,(a,b') \arrow[r, "\mu_{b'}"] & F\,(b')
\end{tikzcd}$$

Т.к. $\mathrm{Hom}\,(a,h)\,(f) = hf$, то это условие принимает вид

$$\begin{aligned}
(Fh \circ \mu_b)\, f &= \mu_{b'}\,(hf) \\
(Fh \circ Ff \circ \mu_a)\,(1_a) &= (F\,(hf) \circ \mu_a)\,(1_a)
\end{aligned}$$

Это верно в силу функториальности F.

Осталось проверить естественности изоморфизма по a и по F. Естественность по F следует из того, что естественное преобразование $\mathrm{Hom}\,(a,\cdot) \to F$ целиком определяется образом единичной стрелки $a \xrightarrow{1_a} a$ соответствующий элемент под действием естественного преобразования $F \to G$ отображается в правой и левой части изоморфизма одинаковым образом. Естественность по a определяется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}\,(\mathrm{Hom}\,(a,\cdot)\,; F) \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(a,h)"'] & F\,(a) \arrow[d, "F(h)"] \\
\mathrm{Nat}\,(\mathrm{Hom}\,(a',\cdot)\,; F) \arrow[r, "\mu_{b'}"] & F\,(a')
\end{tikzcd}$$

□

2 Начальные и конечные объекты.

Определение 3. Объект $i \in \mathcal{C}$ называется *начальным*, если для любого объекта $c \in \mathcal{C}$ существует единственная стрелка $i \to c$. Двойственно, объект $e \in \mathcal{C}$ называется *конечным*, если для любого объекта $c \in \mathcal{C}$ существует единственная стрелка $c \to e$. Если объект O является одновременно начальным и конечным, то он называется *нулевым.* В таком случае для любой пары объектов $a, b \in \mathcal{C}$ определена каноническая стрелка $a \to O \to b$, называемая *нулевой стрелкой* и обозначаемой 0. Начальный объект часто обозначают 0, а конечный — 1. Если в категории имеется нулевой объект, то начальные и конечные объекты совпадают, поэтому такие обозначения не приводят к недоразумениям.

Примеры:

1. В категории множеств начальный объект — пустое множество $\varnothing$, а конечный объект — множество, состоящее из одного элемента $\{*\}$.
2. В категории групп имеется нулевой объект — тривиальная группа.
3. Аналогично, нулевой объект имеется в категориях абелевых групп, колец (без единицы) и пространств с отмеченной точкой (отображения должны сохранять отмеченную точку).
4. В категории $\mathcal{T}op$ начальный объект — пустое топологическое пространство, а конечный — пространство, имеющее одну точку.

5. В категории функторов $\mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ начальный объект — это постоянный функтор, отображающий $\mathcal{C}$ в $\varnothing$, а конечный объект — постоянный функтор, отображающий $\mathcal{C}$ в $\{*\}$.

6. В предпорядке начальный объект — это наименьший элемент частично упорядоченного множества, а конечный объект — наибольший элемент.

Лемма 2. *Начальный объект единственен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $i_1, i_2 \in \mathcal{C}$ — начальные объекты. Т.к. i_1 начальный, то единственная стрелка $i_1 \to i_1$ есть 1_{i_1}, аналогично для i_2. Кроме того, существуют единственные стрелки $f\colon i_1 \to i_2$ и $f^{-1}\colon i_2 \to i_1$. Отсюда следует, что $ff^{-1} = 1_{i_2}$, $f^{-1}f = 1_{i_1}$.

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, equal, "1_{i_1}"'] & i_2 \arrow[d, dashed, "f^{-1}"] \arrow[dr, equal, "1_{i_2}"] & \\ & i_1 \arrow[r, "f"'] & i_2 \end{tikzcd}$$

□

Двойственное рассуждение доказывает единственность конечного объекта (*проверьте*). Это утверждение является обобщением рассуждения, которое мы в прошлый раз использовали для доказательства единственности (с точностью до изоморфизма) произведения объектов. На самом деле произведение есть конечный объект в некоторой категории. Используя стандартную вольность речи, мы будем говорить о начальном объекте в категории, подразумевая некий конкретный объект из класса изоморфных начальных объектов.

3 Категории запятой.

В прошлый раз мы определили категории объектов над a $\mathcal{C}/a$ и под a $a/\mathcal{C}$. Сейчас мы рассмотрим обобщение этой конструкции.

Определение 4. Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}\colon G$. Объектами *категории запятой* $(F \downarrow G)$ являются тройки (a, b, h), $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $h\colon Fa \to Gb$. Морфизм из (a, b, h) в (a', b', h') — это пара (f, g), $f\colon a \to a'$, $g\colon b \to b'$, такая что $h' \circ Ff = Fg \circ h$:

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "h"'] & Fa' \arrow[d, "h'"] \\ Gb \arrow[r, "Fg"] & Gb' \end{tikzcd}$$

Категория запятой $(\Delta_a \downarrow F)$, где Δ_a — постоянный функтор со значением a, обозначается $(a \downarrow F)$, аналогично $(F \downarrow \Delta_a) \equiv (F \downarrow a)$. В частности, $a/\mathcal{C} = (a \downarrow 1_{\mathcal{C}})$, $\mathcal{C}/a = (1_{\mathcal{C}} \downarrow a)$. Название объясняется тем, что на заре становления теории категорий категории запятой обозначались (F, G).

Определение 5. Универсальная стрелка из $c \in \mathcal{C}$ в $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ — это начальный объект категории запятой $(c \downarrow S)$. Универсальная стрелка из S в c — это начальный объект категории запятой $(S \downarrow c)$.

Более явно, универсальная стрелка из c в S — это такая пара (a, u), $a \in \mathcal{A}$, $u\colon c \to Sa$, что любая другая стрелка $w\colon c \to Sb$ пропускается через неё единственным образом:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "w"'] & Sa \arrow[d, dashed, "!Sf"] \\ & Sb \end{tikzcd}$$

Как обычно, мы часто будем называть универсальной стрелкой сам объект a, подразумевая выбор стрелки $u\colon c \to Sa$ сделанным.

Многие объекты определяются своими универсальными свойствами. Определение универсальной стрелки формализует интуитивное понятие наиболее или наименее общего объекта, удовлетворяющего данному свойству. Рассмотрим примеры.

1. Свободная группа, порождённая множеством X, — это наиболее общая группа F_X, такая что $X \subset F_X$ и любой элемент $g \in F_X$ порождается произведением элементов из X в некоторых степенях. Таким образом, X является множеством образующих для F_X, а никаких соотношений между элементами X быть не должно. Рассмотрим забывающий функтор $U\colon \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий группе её множество элементов. Тогда $X \hookrightarrow U(F_X)$ — это универсальная стрелка из X в U.

2. Аналогично, для забывающего функтора $U\colon \mathcal{V}ect_{\Bbbk} \to \mathcal{S}et$ универсальная стрелка из $X \in \mathcal{S}et$ в U — это векторное пространство, порождённое X как базисом.

3. Если $U\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, то универсальная стрелка из $X \in \mathcal{S}et$ в U — это дискретное топологическое пространство с множеством точек X, а универсальная стрелка из U в X — это топологическое пространство, состоящее из множества X с заданной на нём тривиальной топологией (открытые подмножества только $\varnothing$ и X).

4. Обычно вместо явного указания функторов идёт речь просто об универсальной стрелке, обладающей некоторым свойством. Например рассмотрим *уравнитель*. Уравнитель пары морфизмов $a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b$ — это универсальная стрелка $e \xrightarrow{eq} a$, такая что $f \circ eq = g \circ eq$, т.е. для любой другой уравнивающей стрелки $s \xrightarrow{h} a$ верно, что

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "eq"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ s \arrow[u, dashed, "!"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

   В категории множеств уравнитель — это наибольшее подмножество, на котором стрелки совпадают, т.е. множество решений уравнения $g(x) = f(x)$. Двойственно определяется *коуравнитель*, соответствующий построению фактормножества.

   Упражнение. Опишите уравнитель как универсальную стрелку из функтора в объект.

Определение 6. Категория элементов функтора $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ — это категория запятой $\int G = (* \downarrow G)$, где $* \in \mathcal{S}et$ — одноточечное множество.

Объектами категории элементов являются всевозможные элементы множеств $G(c)$, $c \in \mathcal{C}$, а морфизмами — морфизмы $c \to c'$, переводящие элемент $x_c \in Gc$ в элемент $x_{c'} \in Gc'$.

Лемма 3. $\int \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, \cdot) \simeq (a \downarrow \mathcal{C})$.

Доказательство. Очевидно из определений. □

Заметим, что каждая категория $(a \downarrow F)$, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$, снабжена естественной проекцией $Q_F\colon (a \downarrow F) \to \mathcal{C}$, $Q_F(b, f) = b$. Это частный случай конструкции, называемой расслоением категорий. А именно, расслоения категорий запятой аналогичны накрытиям в топологии. Морфизм над $\mathcal{C}$ — это морфизм в категории $(1_{\mathcal{C}at} \downarrow \mathcal{C})$. Любому расслоению категории запятой $(a \downarrow F) \xrightarrow{Q_F} \mathcal{C}$ можно сопоставить отображение $dQ_F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, сопоставляющее объекту $c \in \mathcal{C}$ слой проекции Q_F:

$$dQ_F(c) = Q_F^{-1}(c) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Fc)$$

Это отображение можно сделать функтором $dQ_F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$. Пусть $f\colon b \to b'$ — морфизм в $\mathcal{C}$. Он поднимается в категорию запятой: для любого объекта $a \to Fb \in (a \downarrow F)$ существует единственный морфизм $(a \to Fb) \to (a \to Fb')$, проектирующийся в f. А именно, это в точности сам морфизм f. Это даёт знакомое отображение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Ff) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Fb) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Fb')$. В частном случае расслоения категории запятой мы получаем, что $dQ_F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, F)$. Разумеется, в этом случае мы лишь сформулировали более сложно уже известные факты, но само понятия расслоения категорий и связанных с ним конструкций dQ и $\int F$ допускают гораздо более общее изложение, приводящее к нетривиальным результатам. Для его формулировки требуются дополнительные технические условия на функтор проекции Q, которые мы сейчас обсуждать не будем. Однако уже сейчас описанный формализм позволяет придать манипуляциям с функторами геометрический смысл.

Мы только что доказали лемму

Лемма 4. *Если $Q_F\colon \int F \to \mathcal{C}$ — проекция категории элементов для $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, то $dQ_F = F$.*

В этом смысле построенные операции «интегрирования» и «дифференцирования» функторов из $\mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$ взаимно обратны.

Лемма 5. $\mathrm{Hom}_{/\mathcal{C}}\left(\int F, \int G\right) \simeq \mathrm{Nat}\,(F, G),\ F, G \in \mathcal{S}et^{\mathcal{C}}$.

Доказательство. Вспоминая, что элементы Fb есть в точности объекты $\int F$, «висящие» над b, мы видим, что отображения $\mu_b\colon Fb \to Gb$ в точности соответствуют отображениям множеств объектов категорий элементов $\int F$ и $\int G$, коммутирующих с проекцией на $\mathcal{C}$. В категории запятой над данным морфизмом $b \xrightarrow{f} b'$ висит ровно один морфизм из $s \in Q_F^{-1}(b)$, поэтому знание отображения объектов категорий запятой однозначно определяет отображение на морфизмах. Так как отображение $Ff\colon Fb \to Fb'$ в точности соответствует сопоставлению каждому $s \in Q_F^{-1}(b)$ конца стрелки, выходящей из s и проектирующейся в f, то условие естественности преобразования $\mu\colon F \to G$ как раз соответствует функториальности отображения $\int \mu\colon \int F \to \int G$:

$$
\begin{tikzcd}
x \in F(b) \arrow[rr, "\int \mu_x"] \arrow[d, "Ff"'] & & y \in G(b) \arrow[d, "Gf"'] & & Fb \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "Ff"] & Gb \arrow[d, "Gf"] \\
{} \arrow[rr, phantom, "\overset{\int \mu_f}{\longmapsto}"] & & {} \arrow[rr, phantom, "\Longrightarrow"] & & {} & {} \\
x' \in F(b') \arrow[rr, "\int \mu_{x'}"] & & y' \in G(b) & & Fb' \arrow[r, "\mu_{b'}"] & Gb'
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Следующая лемма даёт важный класс универсальных стрелок.

Лемма 6. *Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ представим тогда и только тогда, когда в категории $\int F$ имеется начальный объект.*

Доказательство. Если $F \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, \cdot)$, то $\int \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, \cdot) \simeq (a \downarrow \mathcal{C})$ и начальный объект есть $1_a \in F(a)$. Соответствующий единственный морфизм из $1_a\colon a \to a$ в $f\colon a \to b$ есть сама стрелка $f\colon a \to b$.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, equal, "1_a"] \arrow[dr, "f"'] & a \arrow[d, "f"] \\
& b
\end{tikzcd}
$$

Обратно, пусть (a, x), $a \in \mathcal{C}$, $x \in Fa$ является начальным объектом $\int F$. Построим изоморфизм J расслоений категорий $\int F \to \mathcal{C}$ и $a/\mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Сопоставим начальному объекту $(a, x) \in \int F$ начальный объект $(a, 1_a) \in a/\mathcal{C}$. Для другого объекта $(b, y) \in \int F$ существует единственная стрелка $f_y\colon a \to b$, такая что $Ff_y(x) = y$. Положим $J(b, y) = f_y \in a/\mathcal{C}$. Морфизму $(b, y) \to (b', y')$, задаваемому стрелкой $h\colon b \to b'$, сопоставим стрелку $h_*\colon f_y \to f_{y'}$, $h_*(f_y) = hf_y = f_{y'}$. Обратный функтор $J^{-1}\colon a/\mathcal{C} \to \int F$ строится аналогично: объект $a \xrightarrow{f} b \in a/\mathcal{C}$ отправляется в $(b, f(x)) \in \int F$, действие на морфизмах аналогично. Видно, что эти функторы взаимно обратны и коммутируют с проекцией категорий запятой на $\mathcal{C}$, т.е. в категории расслоений над $\mathcal{C}$ $a/\mathcal{C} \simeq \int F$. Согласно леммам 5 и 3, этот изоморфизм соответствует изоморфизму $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, \cdot) \simeq F$. $\square$

4 Упражнения.

1. Постройте естественное отображение $(A \times C) \coprod (B \times C) \to (A \coprod B) \times C$. Заметим, что в общем случае оно не обратимо. Сформулируйте двойственное утверждение.

2. Докажите, что $A \times 1 \simeq A$ естественно. Сформулируйте двойственное утверждение.

3. Докажите изоморфизм категорий: $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}/1$, где 1 — конечный объект в $\mathcal{C}$.

4. Опишите начальный и конечный объект в категории функторов $[\mathcal{C}, \mathcal{S}et]$.

5. Доказать представимость и найти представляющие объекты для следующих функторов:

   (a) Тождественный функтор $\mathrm{id}\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$;

   (b) Забывающий функтор $U\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$;

   (c) Забывающий функтор $U\colon \mathcal{R}ng \to \mathcal{S}et$;

   (d) Функтор $\mathcal{P}\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий множеству $X \in \mathcal{S}et$ множество подмножеств $\mathcal{P}X \in \mathcal{S}et$.

   (e) Рассмотрим категорию множеств с действием заданной группы G $G - \mathcal{S}et$. Морфизмами этой категории являются отображения, сохраняющие действие группы, подобъектами — подмножества с согласованным действием группы. Функтор $Sub\colon G - \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ сопоставляет G-множеству его множество подобъектов. Доказать, что он представим.

   (f) **(*)** Рассмотрим категорию функторов $[\mathcal{C}^{op}; \mathcal{S}et]$, где $\mathcal{C}$ — некоторая малая категория. Подобъект функтора $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}et$ — это такой функтор $G\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}et$, что для всех $X \in \mathcal{C}$ $G(X)$ — подмножество в $F(X)$, а для любого морфизма $Y \to X$ отображение $G(X) \to G(Y)$ является ограничением на подмножества отображения $F(X) \to F(Y)$. Функтор $Sub\colon [\mathcal{C}^{op}; \mathcal{S}et] \to \mathcal{S}et$ сопоставляет функтору его множество подобъектов. Опишите действие Sub на морфизмах. Докажите, что Sub представим. (*Указание:* воспользуйтесь леммой Йонеды. Значение Sub на представимых функторах считать известным, более явно его описать нельзя)

   (g) **(*)** (*для знакомых с пучками*) Доказать, что функтор подобъектов пучка представим.

6. Рассмотрим в категории диаграмму вида $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. Пусть функтор Θ сопоставляет объекту D множество коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

(*опишите действие на морфизмах*) Если этот функтор представим, то его представляющий объект обозначается $A \times_C B$ и называется *расслоенным произведением* A и B над C.

   (a) Опишите расслоенное произведение в терминах универсальных стрелок.

   (b) Вычислите произведение $X \times_A A$.

   (c) Покажите, что $A \times B = A \times_1 B$.

   (d) Если g — мономорфизм, то q_1 — мономорфизм.

   (e) Если в диаграмме $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$ два малых квадрата универсальны (их левая верхняя вершина является расслоенным произведением), то большой прямоугольник также универсален.

   (f) Сформулируйте и докажите двойственные утверждения.

7. Пусть G — группа, $N \overset{i}{\hookrightarrow} G$ — нормальная подгруппа.

   (a) Докажите, что факторгруппа G/N универсальна в следующем смысле: для любого другого гомоморфизма групп $G \xrightarrow{f} H$, такого что $fi = 0$, существует единственная стрелка $G/N \to H$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & G/N \arrow[d, dashed, "!"] \\ & & H \end{tikzcd}$$

   (b) Используя свойство универсальности факторгруппы, докажите, что p — эпиморфизм.

(c) Используя свойство универсальности докажите, что если $M \hookrightarrow N \hookrightarrow G$ — нормальные подгруппы в G, то $G/N \simeq (G/M)\,/\,(N/M)$.

(d) Определим факторгруппу по произвольной подгруппе $M \hookrightarrow G$ как соответствующий универсальный объект G/M в диаграмме, указанной выше. Покажите, что $G/M \simeq G/N\,(M)$, где $N\,(M)$ — нормализатор M (наименьшая нормальная подгруппа, содержащая M).

(e) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для колец и для модулей над кольцом.

8. Покажите, что следующие конструкции являются универсальными объектами:

   (a) Построение по коммутативному кольцу K кольца многочленов одной переменной $K\,[x]$.

   (b) Построение по векторному пространству его тензорной, внешней, симметрической алгебр.

   (c) Рассмотрение в полугруппе с единицей группы обратимых элементов.

9. Рассмотрим функторы $K, L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и строго полный функтор $J\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Покажите, что $\mathrm{Nat}\,(K, L) \simeq \mathrm{Nat}\,(JK, JL)$, т.е. естественные преобразования не меняются при расширении категории–кообласти функторов.

10. Представьте произведение категорий как категорию запятой.

11. Покажите, что категорию запятой $(F \downarrow G)$, $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{B}$ можно описать как представляющий объект для следующего функтора $\mathcal{H}\colon \mathcal{C}at \to \mathcal{S}et$. Категории $\mathcal{D} \in \mathcal{C}at$ он сопоставляет множество «слабо коммутативных» диаграмм, т.е. диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "V"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\nearrow\!\!\!\nearrow}"] & \mathcal{B} \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

где α — естественное преобразование $F \circ U \xrightarrow{\alpha} G \circ V$. Опишите действие функтора $\mathcal{H}$ на морфизмах.

Лекция 3. Пределы.

А. Ю. Фетисов

02/28/12

Содержание

На прошлой лекции мы определили представимые функторы и доказали основное утверждение о них: лемму Йонеды. В этот раз мы введём понятие предела как некоторого представляющего объекта и построим с помощью леммы Йонеды пределы в категориях функторов.

1 Пределы.

Определение 1. Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — функтор. *Предел* функтора F — это такой объект $\operatorname{Lim} F$ и естественное преобразование $\mu\colon \operatorname{Lim} F \to F$ из постоянного функтора, что для любой другой пары (B, η), $B \in \mathcal{B}$, $\eta\colon B \to F$ существует единственная стрелка $B \to \operatorname{Lim} F$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Lim} F \arrow[r, "\mu"] & F \\ B \arrow[u, dashed, "!"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Двойственно определяются *копределы*:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\eta"'] & \operatorname{Colim} F \arrow[d, dashed, "!"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Естественное преобразование из постоянного функтора Δ_a в F будем для краткости называть *конусом над F с вершиной в a*. Множество таких конусов для краткости будем обозначать $Cone\,(a, F) \equiv \operatorname{Nat}(\Delta_a, F)$. Это позволяет дать иное определение предела.

Лемма 1. *Предел функтора F — это объект, представляющий функтор $a \mapsto \operatorname{Nat}(\Delta_a, F)$, т.е. $Cone\,(a, F) = \operatorname{Nat}(\Delta_a, F) \simeq \operatorname{Hom}(a, \operatorname{Lim} F)$.*

Доказательство. Очевидно из определения. $\square$

Лемма 2. *Имеется естественный изоморфизм $Cone\,(x, F) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(x, Cone\,(*, F))$, $x \in \mathcal{S}et$, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$.*

Доказательство. Очевидно, т.к. ограничение конуса из $Cone\,(x, F)$ на каждый элемент множества x даёт некоторый конус на $*$, и любое такое множество конусов на F с вершиной $*$ можно представить как один конус на F с вершиной x. $\square$

Иногда вместо предела функтора мы будем говорить о пределе диаграммы (напомню, что диаграмма в $\mathcal{C}$ есть просто функтор $\mathcal{D} \xrightarrow{D} \mathcal{C}$, где $\mathcal{D}$ — малая категория). Мы уже сталкивались с пределами и копределами. Напомню определение некоторых пределов (соответствующие копределы определяются по двойственности).

1. Конечный объект — это предел функтора $F\colon \varnothing \to \mathcal{C}$, где $\varnothing$ — пустая категория. Любой конус при этом также пусть, т.е. состоит просто из объекта $c \in \mathcal{C}$.

2. Произведение семейства объектов $\prod_{i\in I} c_i$ есть предел функтора $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{I}$ — дискретная категория на множестве I, $F(i) = c_i$, $i \in \mathcal{I}$. Иногда считают, что произведение пустого семейства объектов есть конечный объект. В частности, $c^0 = 1$.

3. Рассмотрим диаграмму $A \to C \leftarrow B$ в категории $\mathcal{C}$. Её предел — расслоенное произведение $A \times_C B$. Соответствующий конус называется *универсальным (или декартовым) квадратом*:

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

4. Предел диаграммы $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ есть уравнитель $Eq\,(f,g)$ стрелок f и g.

Рассмотрим примеры некоторых встречающихся на практике пределов.

1. Тензорное произведение колец $R \otimes_T S$ есть корасслоенное произведение в категории $\mathcal{R}ng$. Заметим, что тензорное произведение модулей не является ни произведением, ни копроизведенем.

2. Пусть $E \to B$ — расслоение топологических пространств (скажем, локально тривиальное или накрытие). Для любого непрерывного отображения $M \xrightarrow{f} B$ можно рассмотреть прообраз расслоения E на M: $f^*E = M \times_B E$.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

   В частности, слой F расслоения $E \to B$ в точке $x \in B$ есть x^*E, где $x\colon * \to B$ — характеристическое отображение точки.

$$\begin{tikzcd} F \simeq x^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ * \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

   Если в диаграмме $\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$ два малых квадрата универсальны, то большой прямоугольник также универсален (упр. к лекции 2). Отсюда следует, что слои f^*E и E гомеоморфны.

3. В коммутативной алгебре используется конструкция пополнения по идеалу, являющаяся алгебраическим аналогом пополнения по норме. Рассмотрим диаграмму вида

$$A/I \longleftarrow A/I^2 \longleftarrow A/I^3 \longleftarrow \ldots$$

   Её предел называется пополнением кольца A по идеалу $I \hookrightarrow A$. Например, пополнение кольца многочленов $\Bbbk\,[x]$ по идеалу (x) есть кольцо степенным рядов $\Bbbk\,[[x]]$, а пополнение кольца $\mathbb{Z}$ по идеалу (p), порождённому простым числом, есть кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{Z}_p = \mathrm{Lim}\,\left(\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \ldots\right)$$

Говорят, что функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *сохраняет пределы*, если для любого функтора $S\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, имеющего предел, верно $\mathrm{Lim}\, FS = F\,(\mathrm{Lim}\, S)$. Функтор F *сохраняет пределы вида* $\mathcal{I}$, если для любого функтора $K\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, имеющего предел, $\mathrm{Lim}\, FK = F\,(\mathrm{Lim}\, K)$. В частности, говорят о функторах, сохраняющих произведения.

Теорема 1. *Представимые функторы сохраняют пределы:* $\mathrm{Hom}\,(a, \mathrm{Lim}\, F) = \mathrm{Lim}\,\mathrm{Hom}\,(a, F)$.

Доказательство. Имеем цепочку естественных изоморфизмов:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}et\,(x, \mathrm{Lim}\,\mathrm{Hom}\,(a, F)) &\overset{1}{\simeq} \mathcal{C}one\,(x, \mathrm{Hom}\,(a, F)) \\ &\overset{2}{\simeq} \mathcal{S}et\,(x, \mathcal{C}one\,(*, \mathrm{Hom}\,(a, F))) \\ &\overset{3}{\simeq} \mathcal{S}et\,(x, \mathcal{C}one\,(a, F)) \\ &\overset{4}{\simeq} \mathcal{S}et\,(x, \mathrm{Hom}\,(a, \mathrm{Lim}\, F)) \end{aligned}$$

Изоморфизмы 1 и 4 следуют из леммы 1, изоморфизм 2 — из леммы 2, изоморфизм 3 — напрямую из определения конусов. Получаем, что объекты $\mathrm{Lim}\,\mathrm{Hom}\,(a, F)$ и $\mathrm{Hom}\,(a, \mathrm{Lim}\, F)$ представляют один и тот же функтор $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$. По лемме Йонеды они изоморфны. В силу естественности всех изоморфизмов в доказательстве изоморфизм теоремы также естественный. □

Иногда, отталкиваясь от этого утверждения, определяют произвольные пределы в категориях в терминах пределов в $\mathcal{S}et$. Такой подход не вполне чист, т.к. категория множеств приобретает особый, ничем не обоснованный смысл. Кроме того, он плохо обобщается на обогащённые и гомотопические категории.

Вывод 1. $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{Colim}\, F, a) \simeq \mathrm{Lim}\,\mathrm{Hom}\,(F, a)$

Доказательство. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(\cdot, a)$ является представимым функтором $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}et$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(\cdot, a) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}\,(a, \cdot)$$

В силу доказанной теоремы, он сохраняет пределы. Пределы в $\mathcal{A}^{op}$ являются, по двойственности, копределами в $\mathcal{A}$. □

Определение 2. Категория называется *полной* (иначе — *полной в малом*), если в ней существуют пределы всех (малых) диаграмм. Аналогично, она называется *кополной*, если в ней есть все малые копределы. Категория называется *конечно полной*, если в ней есть пределы всех конечных диаграмм.

Теорема 2. *Категория множеств полна.*

Доказательство. В силу лемм 1 и 2, $\mathcal{S}et\,(x, \mathrm{Lim}\, F) \simeq \mathcal{C}one\,(x, F) = \mathcal{S}et\,(x, \mathcal{C}one\,(*, F))$. Поэтому $\mathrm{Lim}\, F \simeq \mathcal{C}one\,(*, F)$. □

Исследуем теперь пределы в категориях функторов.

Теорема 3. *Если категория $\mathcal{B}$ полна, то категория функторов $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ полна, при этом значение предельного функтора на объектах $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле $E_p\,(\mathrm{Lim}\, D) = \mathrm{Lim}\,(E_p \circ D)$, где $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ — рассматриваемая диаграмма в категории функторов, а функтор $E_p\colon \mathcal{B}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$ сопоставляет функтору его значение на объекте $p \in \mathcal{A}$: $E_p\,(F) = F\,(p)$ (предельный функтор можно вычислять поточечно). Аналогично, если $\mathcal{B}$ кополна, то $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ также кополна и предельный функтор также можно вычислять поточечно.*

Доказательство. По лемме Йонеды

$$\begin{aligned} E_p\,(F) &= F\,(p) \\ &\simeq \mathrm{Nat}\,(\mathrm{Hom}\,(p, \cdot)\,, F) \end{aligned}$$

Т.е. функтор E_p представим на категории $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, его представляющий объект есть функтор Y^*p. Представимые функторы сохраняют пределы, поэтому $E_p\,(\mathrm{Lim}\, D) = \mathrm{Lim}\,(E_p \circ D)$. Заметим, что $E_p \circ D$ есть диаграмма в $\mathcal{B}$. В силу полноты $\mathcal{B}$ предел в правой части равенства существует и определяет, таким образом, предельный функтор. Используем изоморфизм $\left[\mathcal{D}, \mathcal{B}^{\mathcal{A}}\right] \simeq [\mathcal{D} \times \mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Это позволяет рассматривать предел диаграммы в категории функторов как «предел с параметрами» функтора $\hat{D}\colon \mathcal{D}\times\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, т.е. соответствие $p\mapsto \mathrm{Lim}_j\,\hat{D}\,(j,p)$ можно рассматривать как функцию объектов функтора, обозначаемого $\mathrm{Lim}_j\,\hat{D}\,(j,\cdot)$. Формула принимает вид

$$\left[\mathrm{Lim}_j\,\hat{D}\,(j,\cdot)\right](p)=\mathrm{Lim}_j\,\hat{D}\,(j,p)$$

В такой форме утверждение допускает напрямую двойственную формулировку:

$$\left[\mathrm{Colim}_j\,\hat{D}\,(j,\cdot)\right](p)=\mathrm{Colim}_j\,\hat{D}\,(j,p)$$

По принципу двойственности эта формула также верна. Это доказывает утверждение о кополноте $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$. □

Теорема 4. *Пределы коммутируют. А именно, если дан бифунктор* $F\colon \mathcal{I}\times\mathcal{J}\to\mathcal{C}$, *то можно рассмотреть его как функтор* $F_1\colon \mathcal{I}\to\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ *или как функтор* $F_2\colon \mathcal{J}\to\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$. *Соответственно,* $\mathrm{Lim}_J\,\mathrm{Lim}_I\,F\,(I,J)=\mathrm{Lim}\,(\mathrm{Lim}\,F_1)\,,\ \mathrm{Lim}_I\,\mathrm{Lim}_J\,F\,(I,J)=\mathrm{Lim}\,(\mathrm{Lim}\,F_2)\,.$ *Утверждается, что если все указанные пределы существуют, то*

$$\mathrm{Lim}_I\,\mathrm{Lim}_J\,F\,(I,J)\simeq\mathrm{Lim}_J\,\mathrm{Lim}_I\,F\,(I,J)$$

Двойственно, копределы также коммутируют.

Доказательство. После того, как мы доказали теорему о существовании таких пределов с параметрами, искомое утверждение становится элементарным алгебраическим упражнением:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\,(c,\mathrm{Lim}_I\,\mathrm{Lim}_J\,F) &\simeq \mathcal{C}^{\mathcal{I}}\left(\Delta_c^{\mathcal{I}},\mathrm{Lim}_J\,F\right)\\
&\simeq \mathcal{C}^{\mathcal{I}\times\mathcal{J}}\left(\Delta^{\mathcal{J}}\left(\Delta_c^{\mathcal{I}}\right),F\right)\\
&\simeq \mathcal{C}^{\mathcal{J}\times\mathcal{I}}\left(\Delta^{\mathcal{I}}\left(\Delta_c^{\mathcal{J}}\right),F\right)\\
&\simeq \mathcal{C}^{\mathcal{J}}\left(\Delta_c^{\mathcal{J}},\mathrm{Lim}_{\mathcal{I}}\,F\right)\\
&\simeq \mathcal{C}\,(c,\mathrm{Lim}_J\,\mathrm{Lim}_I\,F)
\end{aligned}$$

Изоморфизмы следуют из леммы 1. Объекты оказываются изоморфны по лемме Йонеды, т.к. представляют один и тот же функтор $\mathcal{C}\to\mathcal{S}et$. □

Пределы в общем случае не коммутируют с копределами. В качестве простого примера рассмотрим в категории конечных множеств $(A\times B)\coprod(C\times D)$ и $(A\coprod C)\times(B\coprod D)$. Если бы пределы коммутировали с копределами, то мощности этих множеств были бы равны и сложение натуральных чисел коммутировало бы с умножением, что не верно.

Рассмотрим некоторые простые примеры коммутативности пределов.

1. Рассмотрим диаграмму $D\colon\{1;2\}^2\to\mathcal{C}$, $D=\begin{matrix}A & 1\\ B & C\end{matrix}$. Тогда вычисление пределов сначала по строкам, а затем по столбцам даёт $(A\times 1)\times(B\times C)\simeq A\times(B\times C)$, а в обратном порядке — $(A\times B)\times C$. Поэтому произведение ассоциативно с точностью до естественного изоморфизма.

2. Рассмотрим пополнение $\hat{A}$ кольца A по идеалу $I\hookrightarrow A$. Структура всех колец A/I^n задаётся (на подлежащих множествах) операциями $+_n\colon\ (A/I^n)^2\to A/I^n$, $\times_n\colon\ (A/I^n)^2\to A/I^n$ и $0_n\colon 0\to A/I^n$ с некоторыми соотношениями, заданными коммутативными диаграммами. В силу коммутативности пределов, совокупность стрелок $\{+_n\}$, $\{\times_n\}$, $\{0_n\}$ продолжаются до стрелок $+\colon\hat{A}^2\to\hat{A}$, $\times\colon\hat{A}^2\to\hat{A}$, $0\colon 0\to\hat{A}$, удовлетворяющих тем же соотношениям и задающих структуру кольца на $\hat{A}$. Таким образом, элементы кольца $\hat{A}$ можно представить просто как последовательности элементов $a_i\in A/I^i$, согласованные относительно гомоморфизмов $A/I^{k+1}\to A/I^k$, причём все операции определяются покомпонентно.

Теорема 5. (построение пределов) *Если в категории* $\mathcal{C}$ *существуют все малые произведения и уравнители всех пар стрелок, то она полнав малом.*

Заметим, что среди малых произведений содержится также X^0, т.е. конечный объект. Важно, что достаточно проверить существование лишь *пар*, а не большего количества стрелок. Теорема следует из явной конструкции пределов в категории.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ и её предел $\operatorname{Lim} F \xrightarrow{\mu} F$. Компонентами естественного преобразования являются морфизмы $\mu_i \colon \operatorname{Lim} F \to F_i$, $i \in \mathcal{I}$, при этом для любой стрелки $f \colon i \to j$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Lim} F \arrow[dl, "\mu_i"'] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\ F_i \arrow[rr, "Ff"'] & & F_j \end{tikzcd}$$

Т.к. существуют все малые произведения, то существует и $\prod_{i \in \mathcal{I}} F_i$. Обозначим $p_k \colon \prod_i F_i \to F_k$ соответствующую каноническую проекцию на k-ый сомножитель. В силу универсальности имеется единственная стрелка $\theta \colon \operatorname{Lim} F \to \prod_i F_i$, такая что для любого $k \in \mathcal{I}$

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Lim} F \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\mu_k"'] & \prod_i F_i \arrow[d, "p_k"] \\ & F_k \end{tikzcd}$$

Однако $p_j \neq Ff \circ p_i$, поэтому предел не изоморфен этому произведению. Так как $\mu_j = Ff \circ \mu_i$ и $\mu_i = p_k \circ \theta$, то $p_j \theta = F_f p_i \theta$, т.е. θ уравнивает p_j и $F_f p_i$, $f \colon i \to j$. Более того, если есть любая другая стрелка $\eta \colon D \to \prod_i F_i$, такая что для всех $f \colon i \to j$ верно $p_j \eta = F_f p_i \eta$, то композиции $p_i \eta$ являются компонентами естественного преобразования $D \xrightarrow{\xi} F$, поэтому оно пропускается через μ:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "\xi"'] & \operatorname{Lim} F \arrow[d, "\mu"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Это показывает, что одновременный уравнитель всех пар стрелок $(p_j, F_f p_i)$ является пределом для F. Этот одновременный уравнитель можно описать как уравнитель пары стрелок

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} F_i \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \prod_{u \in \mathcal{M}or(\mathcal{I})} F(\operatorname{cod} u)$$

Здесь $\operatorname{cod} u$ есть конец (codomain) стрелки $u \colon a \to b$, т.е. объект b, $\operatorname{dom} u = a$, а стрелки f, g определяются следующим образом. Для любой стрелки $f \colon j \to k$ имеется проекция $p_k \colon \prod_i F_i \to F_k$. Совокупность этих проекций определяет морфизм $f = \prod_u p_{\operatorname{cod} u} \colon \prod_i F_i \to \prod_u F(\operatorname{cod} u)$. Аналогично, имеется проекция $F_f p_j \colon \prod_i F_i \to F_j \to F_k$, совокупность таких проекций задаёт стрелку $g = \prod_u F_u p_{\operatorname{dom} u} \colon \prod_i F_i \to \prod_u F(\operatorname{cod} u)$. Покомпонентное рассмотрение этих морфизмов убеждает в том, что их уравнитель действительно уравнивает все пары $(p_j, F_f p_i)$. □

Полезно рассмотреть частный случай пределов в категории множеств. Нам уже известно (теорема 2), что предел диаграммы $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{S}et$ в категории множеств есть множество $Cone(*, F) = \operatorname{Nat}(*, F)$. Элементы этого множества есть последовательности элементов $s_i \in F_i$, согласованные с действием морфизмов категории $\mathcal{I}$. Это описание в точности соответствует приведённой выше общей конструкции, т.к. уравнитель двух морфизмов множеств есть множество элементов, на которых они совпадают, а в данном случае это как раз соответствует согласованности с действием морфизмов из $\mathcal{I}$.

Вывод 2. *Если в категории существуют все малые копроизведения и коуравнители всех пар стрелок, то она кополна.*

Доказательство. Утверждение двойственно доказанному. □

Вывод 3. *Категория множеств полна и кополна.*

Доказательство. Нам известно, как устроены произведения, копроизведения, уравнители и коуравнители в категории множеств. Это произведения, дизъюнктные объединения, множество решений $\{x | f(x) = g(x)\}$ и фактормножества соответственно. По доказанной теореме, категория множеств полна и кополна. □

Вывод 4. *Категория групп полна и кополна.*

Доказательство. Аналогично, мы знаем, как устроены произведения, копроизведения, уравнители и коуравнители. Это произведения и свободные произведения групп, а также подгруппа решений $\{x|f(x) = g(x)\}$ и факторгруппы. $\square$

Аналогично можно доказать полноту и кополноту любой категории алгебраических систем заданного типа. Мы докажем это утверждение позднее, получив при этом явное описание построения соответствующих пределов и копределов.

Вывод 5. *Для любой категории $\mathcal{C}$ категория функторов $[\mathcal{C}, \mathcal{S}et]$ полна и кополна.*

Доказательство. Мы уже доказали, что если $\mathcal{B}$ полна (кополна), то $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ полна (кополна). Категория множеств полна и кополна, получаем искомое утверждение. $\square$

Вложение Йонеды $Y: \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}et]$, $Y: a \mapsto \mathrm{Hom}(\cdot, a)$ описывает любую категорию $\mathcal{C}$ как полную подкатегорию в полной и кополной категории функторов. Это позволяет смотреть на непредставимые функторы как на формальные пределы объектов категории $\mathcal{C}$. Более точно, существует универсальное пополнение $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{cmpl}$ категории $\mathcal{C}$, так что $\mathcal{C}^{cmpl}$ полна и $\mathcal{C}$ есть полная подкатегория в ней. Категория функторов не универсальна в этом смысле, но её легко описать и с ней удобно работать. Зачастую универсальное пополнение не требуется, поэтому вполне можно вместо него использовать $[\mathcal{C}, \mathcal{S}et]$.

2 Алгебраические структуры в категориях.

Для начала рассмотрим стандартное определение полугруппы. Полугруппа — это множество S с заданной на нём ассоциативной бинарной операцией $m: S^2 \to S$. Условие ассоциативности имеет вид $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$. Его можно записать в виде коммутативности диаграммы в категории множеств:

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "1\times m"] \arrow[d, "m\times 1"'] & S^2 \arrow[d, "m"] \\ S^2 \arrow[r, "m"'] & S \end{tikzcd}$$

Если в полугруппе существует двусторонняя единица (такая полугруппа называется *моноидом*), т.е. такой элемент $e \in S$, что $m(a, e) = a = m(e, a)$, $\forall a \in S$, то его наличие также можно задать диаграммой

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\langle 1,e\rangle"] \arrow[dr, equal] & S^2 \arrow[d, "m"] & S \arrow[l, "\langle e,1\rangle"'] \arrow[dl, equal] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Здесь e — композиция отображений $S \to * \xrightarrow{e} S$, где первое отображение — единственное отображение множества в точку, а второе — выбор элемента $e \in S$. Если множество является группой, то к указанным аксиомам нужно добавить аксиому наличия обратного элемента, выражаемую наличием стрелки $s: S \to S$, удовлетворяющей аксиоме двусторонне обратной стрелки:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\langle 1,s\rangle"] \arrow[dr, equal] & S^2 \arrow[d, "m"] & S \arrow[l, "\langle s,1\rangle"'] \arrow[dl, equal] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Несложно видеть, что коммутативность этих диаграмм в точности соответствует классическим алгебраическим аксиомам группы. После этого естественно называть *группой в категории $\mathcal{C}$* (полугруппой, моноидом соответственно) объект категории $S \in \mathcal{C}$ вместе с каноническими стрелками $s: S \to S$, $m: S^2 \to S$, $e: 1 \to S$, удовлетворяющих указанным выше аксиомам. Аналогично можно рассматривать любую алгебраическую структуру в категориях, переформулировав классические условия наличия отображений, удовлетворяющих заданным алгебраическим тождествам, в условие наличия

Например, условие абелевости группы можно записать, если вспомнить про изоморфизм $\sigma\colon S^2 \to S^2$, $\sigma(x, y) = (y, x)$. Тогда умножение m коммутативно, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S^2 \arrow[r, "\sim", "\sigma"'] \arrow[d, "m"'] & S^2 \arrow[d, "m"] \\
S \arrow[r, equal] & S
\end{tikzcd}$$

Двойственно определяются *коалгебраические структуры*. Например, *когруппа* — это множество K со стрелками $m^{op}\colon K \to K \coprod K$, $s^{op}\colon K \to K$, $e^{op}\colon K \to *$, удовлетворяющим диаграммам, двойственным соответствующим диаграммам группы. Соответствующие стрелки называются *коумножение* (m^{op}), *коединица* (e^{op}) и т.д.

Рассмотрим примеры.

1. Группа в категории многообразий — это группа Ли.

2. Аналогично, топологическая группа — группа в $\mathcal{T}op$, алгебраическая группа — группа в категории схем, и т.п.

3. Полугруппа в категории векторных пространств ***не*** является кольцом, т.к. произведение объектов есть их прямая сумма. Эту проблему можно обойти, если заменить произведение объектов в определении полугруппы на их тензорное произведение. Мы не будем сейчас рассматривать теорию в такой общности.

4. Кольцо можно описать как абелеву группу по сложению и полугруппу по умножению (записывается некоторыми диаграммами) с условием дистрибутивности умножения относительно сложения, задаваемым диаграммой

$$\begin{tikzcd}
R_1 \times (R_2 \times R_3) \arrow[r, "1\times a"] \arrow[d, "\Delta\times(1\times 1)"'] & R^2 \arrow[dd, "m"] \\
(R_1 \times R_2) \times (R_1 \times R_3) \arrow[d, "m\times m"'] & \\
R^2 \arrow[r, "a"'] & R
\end{tikzcd}$$

   Здесь $R_1 = R_2 = R_3 = R$ для упрощения записи, a — сложение, m — умножение.

5. В категории топологических пространств с отмеченной точкой копроизведение двух пространств есть их склейка по отмеченной точке. Например, $S^1 \coprod S^1$ есть букет двух сфер, обычно обозначаемый $S^1 \vee S^1$. В гомотопической категории (т.е. гомотопные отображения отождествляются) S^1 имеет естественную структуру когруппы. В категории топологических пространств имеется отображение $S^1 \to S^1 \vee S^1$, соответствующее отождествлению отмеченной точки с противоположной. Коединица есть просто единственное отображение $S^1 \to *$. Легко видеть, что эти операции действительно ассоциативны и т.д. с точностью до гомотопии. Именно структура когруппы на S^1 порождает умножение в фундаментальной группе $\pi_1(X)$, т.к. в гомотопической категории (линейно связных) пространств с отмеченной точкой $\pi_1(X) = \mathrm{Hom}_{Ho}\left(S^1, X\right)$. Т.к. Hom-функтор переводит копределы в пределы, диаграммы когруппы для S^1 превращаются под действием $\mathrm{Hom}_{Ho}(\cdot, X)$ в диаграммы группы для $\pi_1(X)$.

Теорема 6. *Моноид в категории моноидов является абелевым.*

Для доказательства докажем предварительно техническую, но полезную лемму.

Лемма 3. *(о двух операциях) Пусть на множестве заданы две операции $\circ$ и $*$, имеющие общую двустороннюю единицу 1: $1 \circ a = a \circ 1 = a * 1 = 1 * a = a$. Предположим, что операции коммутируют (этот термин будет объяснён ниже):*

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d)$$

Тогда операции коммутативны, ассоциативны и совпадают.

Доказательство. Результат является чисто комбинаторным. Подставляя в качестве значений переменных различные частные величины, получим все искомые тождества.

- $b = c = 1$:

$$\begin{aligned} (a * 1) \circ (1 * d) &= (a \circ 1) * (1 \circ d) \\ a \circ d &= a * d \end{aligned}$$

- $a = d = 1$:

$$\begin{aligned} (1 * b) \circ (c * 1) &= (1 \circ c) * (b \circ 1) \\ b \circ c &= c * b \end{aligned}$$

- $b = 1$:

$$\begin{aligned} (a \circ 1) \circ (c \circ d) &= (a \circ c) \circ (1 \circ d) \\ a \circ (c \circ d) &= (a \circ c) \circ d \end{aligned}$$

□

Лемма 4. *Пусть $(M, \circ)$, $(N, *)$ — полугруппы. Тогда гомоморфизм $\mu\colon (M, \circ) \to (N, *)$ есть отображение множеств $\mu\colon M \to N$, такое что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\mu\times\mu"] \arrow[d, "\circ"'] & N \times N \arrow[d, "*"] \\ M \arrow[r, "\mu"] & N \end{tikzcd}$$

Доказательство. Очевидно из определений. □

Вернёмся к теореме.

Доказательство. Моноид в категории моноидов состоит из гомоморфизмов $* \xrightarrow{e_\mu} M$ и $M \times M \xrightarrow{\mu} M$, где $*$ — одноточечный моноид, $(M, \circ)$ — некоторый моноид. Гомоморфизмы e_μ и μ должны быть связаны между собой диаграммами, указанными в определении моноида в категории. Т.к. e_μ — гомоморфизм, то единица умножения $\circ$ в M должна совпадать с единицей для μ. Кроме того, то что $M \times M \xrightarrow{\mu} M$ — гомоморфизм, в точности означает, что коммутативна диаграмма в категории множеств

$$\begin{tikzcd} M^2 \times M^2 \simeq (M \times M)^2 \arrow[r, "\mu^2"] \arrow[d, "\circ\times\circ"] & M^2 \arrow[d, "\circ"] \\ M \times M \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd}$$

Здесь для наглядности действия морфизмов использовано обозначение $M^2 \equiv M \times M$. В элементах эта диаграмма означает

$$\mu(a \circ c, b \circ d) = \mu(a \circ b) \circ \mu(c \circ d)$$

Поэтому операции $\circ$ и μ удовлетворяют условию леммы 3. Значит, они коммутативны и совпадают, т.е. M — абелев моноид. □

Из доказательства ясно, что утверждение теоремы можно дополнительно ослабить, рассматривая вместо моноидов множества с бинарной операцией, имеющей единственную двустороннюю единицу. Кроме того, верно двойственное утверждение: комоноид в категории комоноидов абелев.

Рассмотрим несколько других примеров применения леммы 3 о двух операциях.

1. Пусть G — топологическая группа. Тогда множество петель с началом и концом в единице группы обретает два различных умножения. Первое — стандартное гомотопическое умножение петель:

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} g(t), & t \in [0;1/2] \\ f(2t-1), & t \in [1/2;1] \end{cases}$$

с точностью до гомотопии. Второе — поточечное умножение петель, возникающее из группового умножения точек:

$$(f * g)(t) = f(t)\, g(t)$$

Легко видеть, что эти операции коммутируют и имеют общую единицу, поэтому они совпадают и коммутативны. Получаем, что *фундаментальная группа топологической группы абелева.*

2. Все старшие гомотопические группы абелевы: $\pi_i(X)$ абелева для любого X при $i > 1$. Обычно это утверждение выводится путём перестановки дисков в сфере с помощью непрерывных деформаций. Мы можем получить его как частный случай леммы о двух операциях, заметив, что умножение в $\pi_2(X)$ (для простоты рассмотрим $i = 2$) можно определить двумя способами. Обычно умножение задаётся так: рассматривается экватор сферы, проходящий через отмеченную точку, после экватор стягивается в точку и получается букет двух сфер. К первой сфере применяется первое отображение, ко второй — второе. Заметим, что на сфере можно выбрать два ортогональных экватора, проходящих через отмеченную точку. Как следствие, получаем два естественных умножения в $\pi_2(X)$. Легко видеть, что они коммутируют, поэтому оба умножения совпадают и абелевы. Аналогично примеру выше с фундаментальной группой, достаточно проверить, что когруппа S^2 коммутативна. Две указанные операции в $\pi_2(X)$ превращаются в два различных коумножения на S^2, соответствующих стягиванию двух ортогональных экваторов. Очевидно, что они они коммутируют.

Приведённые выше определения алгебраических структур в категории достаточно наглядно, однако плохо подходит для исследования свойств этих структур. Например, существуют ли и как устроены произведения и копроизведения в категориях алгебраических структур? Как описать тензорные произведения? Как вообще просто описать структуру? Рисовать множество никак не связанных между собой диаграмм не слишком удобно. На эти вопросы мы будем отвечать постепенно. Пока что введём определение, к которому будем неоднократно возвращаться в дальнейшем.

Определение 3. *Алгебраическая теория Ловера* — это категория $\mathcal{T}$ с конечными произведениями, такая что все её объекты изоморфны некоторой степени одного объекта $T \in \mathcal{T}$, т.е. объекты имеют вид T^n, $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$). Модель $\mathcal{T}$ в категории с конечными произведениями $\mathcal{C}$ — это функтор $M : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$, сохраняющий произведения. Категория моделей $\mathcal{T}$ в $\mathcal{C}$ обозначается $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}, \mathcal{C})$. Морфизмы между моделями — это естественные преобразования соответствующих функторов, т.е. $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ есть полная подкатегория в $[\mathcal{T}, \mathcal{C}]$. Особо важна категория $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}} = \mathrm{Mod}(\mathcal{T}, \mathcal{S}et)$. Говоря просто о моделях теории (без указания категории $\mathcal{C}$) мы будем всегда подразумевать модели в $\mathcal{S}et$.

Все приведённые выше примеры алгебраических структур можно представить как категории моделей в $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$ или $HoTop$ некоторых алгебраических теорий, соответствующие коалгебраические структуры можно представить как модели в $\mathcal{S}et^{op}$, $\mathcal{T}op^{op}$ или $HoTop^{op}$. Заметим, что любая алгебраическая теория заведомо содержит стрелки, определяемые аксиомами произведения объектов (например, проекции на компоненты, диагонали и перестановки сомножителей). Все прочие стрелки называются *нетривиальными*. Чаще всего имеется небольшой набор независимых нетривиальных стрелок, а все остальные стрелки возникают как некоторые композиции нетривиальных и тривиальных стрелок. Мы будем указывать лишь такие образующие стрелки. Рассмотрим некоторые примеры алгебраических теорий.

1. Минимальная возможная теория не имеет никаких нетривиальных стрелок. Её модели есть в точности множества, поэтому она обозначается $\mathcal{S}et$ и называется *теорией множеств* (не путать с категорией множеств или теорией множеств из логики, это всё совершенно разные понятия).

2. Теория, единственной нетривиальной стрелкой которой является $e : T^0 \to T$, обозначается $\mathbb{F}_{un}$ и называется *полем из одного элемента*. Её модели есть множества с отмеченной точкой.

3. Теорию полугрупп можно задать как порождённую единственной нетривиальной стрелкой $m : T^2 \to$

T, удовлетворяющей стандартной диаграмме ассоциативности умножения

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "1\times m"] \arrow[d, "m\times 1"'] & T^2 \arrow[d, "m"] \\ T^2 \arrow[r, "m"'] & T \end{tikzcd}$$

Её модели есть в точности полугруппы.

4. Аналогично можно описать теорию групп, колец и т.д.

5. Любой группе G можно сопоставить теорию, нетривиальные стрелки которой есть $g\colon T \to T,\ g \in G$ с умножением таким же, как в группе. Её модели есть G-множества, т.е. множества с действием группы G.

6. Аналогично, категория R-модулей есть категория моделей теории, унарные операции в которой есть $r\colon T \to T,\ r \in R$ с умножением как в кольце R. Остальные нетривиальные порождающие операции — это 0-арная операция $0\colon T^0 \to T$ и бинарная операция $+\colon T^2 \to T$, связанные естественными аксиомами. Это позволяет отождествить любое кольцо R с соответствующей алгебраической теорией. Заметим, что умножение в кольце не пришлось определять отдельно, оно возникает само как композиция стрелок в категории.

7. Любая теория $\mathcal{T}$ имеет естественный набор моделей $M_k = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}\left(T^k, \cdot\right)$. В частности, M_0 есть множество констант теории $\mathcal{T}$ с индуцированными на них операциями, а M_1 есть множество унарных операций $\mathcal{T}$, также с естественными операциями на нём. Любая стрелка $\sigma\colon T^n \to T$ задаёт стрелку $M_1(T)^n \to M_1(T)$ посредством композиции

$$\mathrm{Hom}\,(T,T)^n \simeq \mathrm{Hom}\,(T,T^n) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(T,\sigma)} \mathrm{Hom}\,(T,T)$$

Поэтому унарные операции теории часто называют её элементами.

Определение 4. Теория $\mathcal{T}$ называется коммутативной, если для любых двух операций $\sigma\colon T^n \to T$ и $\mu\colon T^k \to T$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} T^{n\times k} \arrow[r, "\mu^n"] \arrow[d, "\sigma^k"'] & T^n \arrow[d, "\sigma"] \\ T^k \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

В частности, коммутативная теория может иметь лишь одну 0-арную операцию (называемую *нулём*):

$$\begin{tikzcd} T^0 \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & T^0 \arrow[d, "0_1"] \\ T^0 \arrow[r, "0_2"'] & T \end{tikzcd}$$

Для унарных операций мы получаем условие

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & T \arrow[d, "t"] \\ T \arrow[r, "s"'] & T \end{tikzcd}$$

Т.е. $st = ts$ — стандартное условие коммутативности умножения. Из леммы о двух операциях 3 мы получаем, что коммутативная теория с нулём может иметь не более одной бинарной операции, при этом она будет коммутативна и ассоциативна. Отсюда следует важный контрпример: хотя теория коммутативного кольца R является коммутативной, теория всех коммутативных колец *не коммутативна*, т.к. эта теория содержит две бинарные операции — умножение и сложение в кольце.

Коммутативные теории по своим свойствам весьма похожи на коммутативные кольца, поэтому называются обобщёнными кольцами и особо важны.

Из общих теорем о существовании пределов в категориях функторов и о коммутировании пределов получим утверждение.

Теорема 7. *Для любой алгебраической теории $\mathcal{T}$ категория $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ полна.*

Доказательство. Предел диаграммы моделей $F_i : \mathcal{T} \to \mathcal{S}et$ можно построить в категории всех функторов $[\mathcal{T}, \mathcal{S}et]$. Если полученный функтор сохраняет произведения, то ясно, что он обязан быть пределом в $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$. Сохранение произведений следует из коммутирования пределов с произведениями. Структура пределов в категориях функторов говорит нам, что предел $F = \mathrm{Lim}_{\mathcal{I}} F_i$ моделей теории $\mathcal{T}$ можно вычислять поточечно на $\mathcal{T}$. Мы уже выяснили, что $F_i\,(T)$ можно отождествить с множеством, а $F_i\,(T^n) \to F_i\,(T)$ — с операциями на нём. Из теоремы о пределах с параметром

$$[\mathrm{Lim}\, F_i]\,(T) = \mathrm{Lim}\,[F_i\,(T)]$$

Таким образом как множество предел моделей есть просто предел соответствующих множеств. Коммутирование пределов с произведениями позволяет описать элементы $\mathrm{Lim}\, F_i$ как согласованные цепочки элементов каждого F_i, а операции на них — как покомпонентные операции на таких цепочках. □

Копроизведения моделей описываются сложнее, т.к. копределы не коммутируют с произведениями. Мы построим их позднее.

3 Упражнения.

1. Докажите, что в условии теоремы о строении пределов можно заменить существование уравнителей на существование расслоенных произведений.

2. Докажите, что если в категории есть конечный объект и все расслоенные произведения, то она полна.

3. Последовательность групп и гомоморфизмов между ними $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ называется *точной*, если $A = \ker g$, $C = \operatorname{coker} f$. Иначе говоря, $C = B/A$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{11} \arrow[r] \arrow[d] & A_{21} \arrow[r] \arrow[d] & A_{31} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{12} \arrow[r] \arrow[d] & A_{22} \arrow[r] \arrow[d] & A_{32} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{13} \arrow[r] \arrow[d] & A_{23} \arrow[r] \arrow[d] & A_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

   Пусть все строки точные. Покажите, что если первые или последние два столбца точные, то третий также точен.

4. Используя предыдущую задачу, докажите теорему об изоморфизме групп: $G/N \simeq (G/M)\,/\,(N/M)$, $M \hookrightarrow N \hookrightarrow G$ — нормальные подгруппы.

5. Представимы ли функторы:

   (a) забывающие функторы $Vect_{\Bbbk} \to \mathcal{S}et$, $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$, $R - Mod \to \mathcal{S}et$;

   (b) функтор множества связных компонент топологического пространства;

   (c) функтор, сопоставляющий векторному пространству его тензорную алгебру;

6. Для каких пространств X множество гомотопических классов отображений $\pi\,(A, X)$ имеет естественную структуру группы для любого пространства A?

7. Описать $\Bbbk$-векторные пространства в категории G-множеств, где G — некоторая группа. Описать модели G в категории $Vect_{\Bbbk}$.

8. Пусть R, S — коммутативные, ассоциативные кольца. Рассмотрим алгебраическую теорию кольца R. Описать категорию её моделей в категории S-модулей.

9. Описать категорию абелевых групп в категории накрытий над пространством X.

10. Для (коммутативного, ассоциативного) кольца R рассмотрим категорию колец над ним $\mathcal{R}ng/R$. Описать категорию абелевых групп в ней.

Лекция 4. Сопряжённые функторы — 1

А. Ю. Фетисов

02/28/12

Содержание

В предыдущей лекции мы определили понятие предела. Основными результатами были явное построение пределов, их сохранение представимыми функторами и теорема о пределах с параметрами. Кроме того, мы ввели понятие алгебраической теории как категорного формализма в универсальной алгебре и доказали, что любая категория моделей алгебраической теории полна. В этой лекции мы рассмотрим понятие сопряжённых функторов, их связь с пределами и условия существования.

1 Определение и примеры.

Определение 1. Пусть дана пара функторов $F\colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}\colon G$. Функтор F *сопряжён слева* к G ($F \dashv G$), если имеется естественный изоморфизм бифункторов $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{S}et$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fa, b) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Gb)$$

При этом функтор G называют *сопряжённым справа* для F.

Ранее мы доказывали, что если бифунктор $H\colon \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \mathcal{S}et$ представим при каждом $a \in \mathcal{A}$ объектом Ta, т.е. $H(a, \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Ta, \cdot)$, то существует единственный функтор $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, такой что Ta есть его функция объектов. Отсюда следует, что если левый сопряжённый функтор существует, то он единственен (с точностью до естественного изоморфизма, как обычно).

Примеры сопряжённых функторов вездесущи.

1. Пусть $U\colon \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, $F\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{G}rp$ — функтор свободной группы на множестве, тогда $F \dashv G$.

2. Аналогичный результат верен для любых алгебраических систем: забывающий функтор имеет левый сопряжённый, являющийся функтором свободной алгебры заданного типа на множестве. В общем случае мы докажем это утверждение позднее, пока что в качестве примеров можно привести построение векторного пространства по базису, свободной абелевой группы или свободного R-модуля для кольца R.

3. Функтор пополнения метрического пространства сопряжён слева к функтору вложения категории полных пространств в категорию метрических пространств.

4. Функтор, сопоставляющий множеству дискретное топологическое пространство на нём, сопряжён *слева* к забывающему функтору $U\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$. *Правый* сопряжённый к U есть функтор антидискретной (тривиальной) топологии на множестве (открытые подмножества — лишь пустое множество и всё множество).

5. Для любого множества $Y \in \mathcal{S}et$ функтор $\cdot \times Y$ имеет правый сопряжённый, сопоставляющий множеству $Z \in \mathcal{S}et$ множество отображений Z^Y: $\mathrm{Hom}\,(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}\left(X, Z^Y\right)$.

6. Аналогично, $\cdot \otimes_R B \dashv [B, \cdot]_R$, где $[B, C]_R$ есть R-модуль отображений из R-модуля B в R-модуль C (умножение на элементы кольца определяется поточечно: $[rf]\,(b) = r \cdot f\,(b)$):

$$\mathrm{Hom}_{R-mod}\,(A \otimes_R B, C) \simeq \mathrm{Hom}_{R-mod}\,(A, [B, C]_R)$$

   Заметим, что в этом случае hom-функтор принимает значения лишь в множествах (не в абелевых группах!), но на самом деле имеется более сильный изоморфизм

$$[A \otimes_R B, C]_R \simeq [A, [B, C]_R]_R$$

   Мы уже сталкивались с примером изоморфизма такого типа: имеется изоморфизм категорий функторов

$$[\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}] \simeq [\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}]]$$

   В этом смысле $[\cdot, \cdot]_R$ есть «hom-функтор с дополнительной структурой». Такие функторы изучаются в *обогащённой теории категорий*.

7. Предположим, что в категории $\mathcal{C}$ существуют пределы всех диаграмм формы $\mathcal{I}$, т.е. всех функторов $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Тогда функтор $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ постоянного функтора на объекте имеет правый сопряжённый $\mathrm{Lim}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}^{\mathcal{I}}\,(\Delta_c, F) \simeq \mathcal{C}\,(c, \mathrm{Lim}\,F)$$

   Аналогично, если $\mathcal{C}$ имеет все копределы формы $\mathcal{I}$, то Δ имеет левый сопряженный $\mathrm{Colim}\colon \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}^{\mathcal{I}}\,(F, \Delta_c) \simeq \mathcal{C}\,(\mathrm{Colim}\,F, c)$$

2 Сохранение пределов.

Теорема 1. *Правый сопряжённый функтор сохраняет пределы. Двойственно, левый сопряжённый сохраняет копределы.*

Доказательство. Имеем цепочку естественных изоморфизмов:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\,(a, G\,(\mathrm{Lim}\,D)) &\overset{1}{\simeq} \mathcal{B}\,(Fa, \mathrm{Lim}\,D) \\
&\overset{2}{\simeq} \mathcal{B}^{\mathcal{I}}\,(\Delta_{Fa}, D) \\
&\overset{3}{\simeq} \mathcal{B}^{\mathcal{I}}\,(F \circ \Delta_a, D) \\
&\overset{4}{\simeq} \mathcal{A}^{\mathcal{I}}\,(\Delta_a, G \circ D) \\
&\overset{5}{\simeq} \mathcal{A}\,(a, \mathrm{Lim}\,\,(G \circ D))
\end{aligned}$$

По лемме Йонеды, $G\,(\mathrm{Lim}\,D) \simeq \mathrm{Lim}\,\,(G \circ D)$. Изоморфизм 1 следует из определения сопряжения, 2 и 5 — из определения предела, 3 — из очевидного равенства $F \circ \Delta = \Delta \circ F$. Изоморфизм 4 следует из того, что естественное преобразование определяется как совокупность морфизмов, удовлетворяющих некоторым диаграммам. Можно взять для каждого $x \in \mathcal{I}$ соответствующий морфизм $\mu_x \in \mathcal{B}\,(F \circ \Delta_a\,(x)\,, Dx) = \mathcal{B}\,(Fa, Dx)$ и его образ $\tilde{\mu}_x$ под действием изоморфизма сопряжения $\mathcal{B}\,(Fa, Dx) \simeq \mathcal{A}\,(a, GDx)$. Видно, что морфизмы $\tilde{\mu}_x$ определяют естественное преобразование $\tilde{\mu}\colon \Delta_a \to G \circ D$, и наоборот. □

Утверждение об изоморфизме 4 можно сделать полностью очевидным, если доказать предварительно следующую лемму (являющуюся частным случаем общей конструкции, которая пригодится нам позднее).

Лемма 1. (формула концов для естественных преобразований) *Пусть даны функторы* $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$*. Множество естественных преобразований* $\mathrm{Nat}\,(F, G)$ *можно представить как уравнитель пары морфизмов*

$$\prod_{b \in \mathcal{B}} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{b, b' \in \mathcal{B} \\ u\colon b \to b'}} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb')$$

Стрелки определяются следующим образом. Для любой стрелки $u\colon b \to b'$ *имеются два естественных отображения* $\mathrm{Hom}\,(Fu, Gb') : \mathrm{Hom}\,(Fb', Gb') \to \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb')$ *и* $\mathrm{Hom}\,(Fb, Gu) : \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb) \to \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb')$. *Совокупность этих стрелок складываются, по универсальному свойству произведения, в стрелки*

$$\begin{aligned} f &= \prod_{u\colon b\to b'} \mathrm{Hom}\,(Fu, Gb') : \prod_{b'\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}\,(Fb', Gb') \to \prod_{u\colon b\to b'} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb') \\ g &= \prod_{u\colon b\to b'} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gu) : \prod_{b\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb) \to \prod_{u\colon b\to b'} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb') \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы о построении пределов. Множество естественных преобразований уравнивает эти две стрелки, т.к. отображение элемента $\mathrm{Nat}\,(F, G)$ в первое произведение диаграммы есть выбор стрелки $\mu_b\colon Fb \to Gb$ для каждого $b \in \mathcal{B}$, а совпадение стрелок f и g на подмножестве $\mathrm{Nat}\,(F, G) \hookrightarrow \prod_{b\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb)$ есть в точности условие коммутативности всех диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} Fb \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "Fu"'] & Gb \arrow[d, "Gu"] \\ Fb' \arrow[r, "\mu_{b'}"] & Gb' \end{tikzcd}$$

Обратно, любой элемент из $\mu \in \prod_{b\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb)$, на котором $f\,(\mu) = g\,(\mu)$, определяет естественное преобразование, т.к. удовлетворяет аксиоме коммутативности всех указанных выше квадратов. $\square$

Обозначим предел указанной диаграммы через $\int_b \mathrm{Hom}\,(Fb, Gb)$ (знак интеграла не имеет отношения к категории элементов). Из этой леммы следует, что если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\,(FRx, Sx') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(Rx, GSx')$ при всех $x, x' \in \mathcal{I}$, $R\colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, $S\colon \mathcal{I} \to \mathcal{B}$, $F\colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}\colon G$, то имеется изоморфизм множеств естественных преобразований

$$\mathrm{Nat}\,(FR, S) \simeq \int_b \mathrm{Hom}\,(FRb, Sb) \simeq \int_b \mathrm{Hom}\,(Rb, GSb) \simeq \mathrm{Nat}\,(R, GS)$$

т.е. функторы $F^\dagger\colon R \mapsto FR$, $G^\dagger\colon S \mapsto GS$ сопряжены (формы диаграмм, определяющих соответствующие Nat-множества, совпадают, а объекты и морфизмы диаграмм в $\mathcal{S}et$ совпадают в силу указанного изоморфизма).

3 Единица и коединица.

Определение 2. С каждым сопряжением связано два канонических естественных преобразования. Обозначим $\varepsilon_a\colon FGa \to a$ образ стрелки 1_{Ga} при изоморфизме $\mathrm{Hom}\,(Ga, Ga) \simeq \mathrm{Hom}\,(FGa, a)$. Аналогично, образ единичной стрелки $1_{Fa} \in \mathrm{Hom}\,(Fa, Fa)$ при изоморфизме $\mathrm{Hom}\,(Fa, Fa) \simeq \mathrm{Hom}\,(a, GFa)$ обозначим $\eta_a\colon a \to GFa$. Эти стрелки являются компонентами естественных преобразований $\varepsilon\colon FG \to 1$, $\eta\colon 1 \to GF$, называемых *коединица сопряжения* и *единица сопряжения* соответственно.

Это можно увидеть с помощью формулы для множества естественных преобразований. Поточечный изоморфизм $\mathrm{Hom}\,(Ga, Ga) \simeq \mathrm{Hom}\,(FGa, a)$, применённый к предельной диаграмме для множества естественных преобразований $\mathrm{Nat}\,(G, G) = \int \mathrm{Hom}\,(Ga, Ga)$, даёт изоморфизм

$$\mathrm{Nat}\,(G, G) \simeq \int \mathrm{Hom}\,(Ga, Ga) \simeq \int \mathrm{Hom}\,(FGa, a) \simeq \mathrm{Nat}\,(FG, 1)$$

Поэтому единичному преобразованию $1\colon G \to G$ соответствует преобразование $\varepsilon\colon FG \to 1$. Указанный изоморфизм множества естественных преобразований определяется поточечно, поэтому получаем уже описанное выше соответствие

$$\mathrm{Hom}\,(Ga, Ga) \ni 1_{Ga} \mapsto \varepsilon_a \in \mathrm{Hom}\,(FGa, a)$$

Аналогичным образом,

$$\mathrm{Nat}\,(F, F) \ni 1_F \mapsto \eta \in \mathrm{Nat}\,(1, GF)$$

Компоненты коединицы можно также описать следующим образом. Т.к. G — функтор, то он определяет отображение $\mathrm{Hom}\,(a,b) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}\,(Ga,Gb)$, естественное по a и b. Используя изоморфизм сопряжения, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(FGa,b) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Hom}\,(Ga,Gb) \\
\mathrm{Hom}\,(a,b) \arrow[u, dashed, "\mathrm{Hom}(\varepsilon'_a,b)"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

Пунктирная стрелка имеет вид $\mathrm{Hom}\,(\varepsilon'_a,b)$ для некоторого $\varepsilon'_a\colon FGa \to a$ в силу леммы Йонеды (т.к. все стрелки на диаграмме естественны по a и b). Полагая $a=b$ и рассматривая образ $1_a \in \mathrm{Hom}\,(a,a)$, получим

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon_a \in \mathrm{Hom}\,(FGa,b) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathrm{Hom}\,(Ga,Ga) \ni 1_{Ga} \\
1_a \in \mathrm{Hom}\,(a,a) \arrow[u, dashed, "\mathrm{Hom}(\varepsilon'_a,b)"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Выписывая явно действие всех указанных отображений на стрелки, получим что $\varepsilon_a = \varepsilon'_a$. Двойственные рассуждения верны для единицы сопряжения.

Свойства единицы и коединицы сопряжения будут рассмотрены на следующей лекции. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Для пары сопряжённых функторов F свободной группы и забывающего функтора U ($F \dashv U$) единица $\eta_X\colon X \to UF(X)$ вкладывает множество X в построенную на нём свободную группу $F(X)$ в качестве базиса. Коединица $\varepsilon_G\colon FU(G) \to G$ отображает свободную группу, порождённую элементами G, в G, при этом ядро этого гомоморфизма есть нормальная подгруппа в $FU(G)$, порождённая всеми соотношениями между элементами группы G.

2. Аналогичная ситуация для любой алгебраической теории и соответствующей пары функторов свободной модели и забывания. Мы рассмотрим общий случай позднее, пока что можно в качестве примера рассмотреть категорию R-модулей или $\Bbbk$-векторных пространств. В обоих случаях единица сопряжения вкладывает множество в качестве образующих в натянутый на его элементы свободный модуль. Для векторных пространств это можно сформулировать так: в векторном пространстве, построенном на множестве X, имеется канонический базис, соответствующий самим элементам X. Разумеется, очевидный факт. Коединица также описывает R-модуль через соотношения между всеми его элементами.

3. Рассмотрим пару сопряжённых функторов $\cdot \times Y\colon \mathcal{S}et \rightleftarrows \mathcal{S}et\colon \cdot^Y$. Коединица сопряжения в этом случае носит специальное название: отображение оценки ev. Отображение $\mathrm{ev}_X\colon X^Y \times Y \to X$ вычисляет значение функции $f \in X^Y$ в каждой точке $y \in Y$. Аналогичная ситуация для сопряжений $\cdot \otimes Y \dashv [Y,\cdot]$. В качестве $\otimes$ может выступать любой достаточно хороший бифунктор $\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, например, тензорное произведение модулей или произведение категорий. Единица сопряжения при этом не имеет особого смысла. $\eta_X\colon X \to (X\times Y)^Y$ сопоставляет каждому элементу $x \in X$ функцию $y \mapsto (x;y)$. Это видно из определения изоморфизма сопряжения $\mathrm{Hom}\,(X\times Y, X\times Y) \simeq \mathrm{Hom}\left(X, (X\times Y)^Y\right)$ и определения единицы как образа тождественной стрелки $1_{X\times Y}$ под действием изоморфизма.

4. Рассмотрим подкатегорию полных метрических пространств в категории всех метрических пространств. Функтор вложения имеет левый сопряжённый — пополнение пространства. Единица сопряжения вкладывает пространство в его пополнение, а коединица в этом случае является тождественным отображением.

Рассмотрим функтор $\mathrm{Hom}\,(a,G\cdot)$. Если $F \dashv G$, то этот функтор представим: $\mathrm{Hom}\,(a,G\cdot) \simeq \mathrm{Hom}\,(Fa,\cdot)$, при этом тождественная стрелка 1_{Fa} является начальным объектом в категории элементов $\int \mathrm{Hom}\,(Fa,\cdot)$. Её образ под действием изоморфизма сопряжения есть $\eta_a\colon a \to GFa$, поэтому η_a является начальным объектом в категории элементов $\int \mathrm{Hom}\,(a,G\cdot)$, т.е. это универсальная стрелка из a в G. Аналогично, коединица $\varepsilon_b\colon FGb \to b$ является универсальной стрелкой из F в b. Т.к. представимость функтора равносильна наличию начального объекта в его категории элементов (см. лекцию 2), то верно следующее утверждение

Предложение 1. *Пусть $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ — некоторый функтор. Если для любого объекта $a \in \mathcal{A}$ определена универсальная стрелка из a в G $\eta_a\colon a \to G(F_a)$, где $F_a \in \mathcal{B}$ — некоторый объект, то функтор G имеет левый сопряжённый $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, такой что $F(a) = F_a$ и набор стрелок η_a определяет естественное преобразование $\varepsilon\colon 1 \to GF$, являющееся единицей сопряжения $F \dashv G$. Двойственно, для задания правого сопряжённого функтора достаточно задать набор универсальных стрелок $\varepsilon_b\colon F(G_b) \to b$ для всех $b \in \mathcal{B}$.*

Мы доказали, тем самым, почти все утверждения теоремы об описании сопряжений из §1 гл. IV книги Маклейна. Последний пункт этой теоремы мы рассмотрим на следующей лекции.

4 Рефлективные подкатегории.

Определение 3. Пусть $\mathcal{A} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ — подкатегория. Она называется *рефлективной*, если функтор вложения i имеет левый сопряжённый $R \dashv i$, и *корефлективной*, если имеется правый сопряжённый $i \dashv L$. Соответствующие сопряжённые функторы называют *рефлектором* (R) и *корефлектором* (L).

Рассмотрим примеры.

1. Подкатегория полных метрических пространств рефлективна в категории метрических пространств.
2. Подкатегория функторов, сохраняющих пределы, рефлективна в категории всех функторов.
3. Подкатегория абелевых групп рефлективна в категории групп. Соответствующий рефлектор называется *абелизацией* и отображает группу в её фактор по коммутанту $G \to G/[G,G]$.
4. Подкатегория абелевых групп кручения (все элементы — конечного порядка) корефлективна в категории всех абелевых групп. Корефлектор отображает группу в её подгруппу кручения, состоящую из всех элементов конечного порядка.

Для рефлективной подкатегории коединица сопряжения всегда является эпиморфизмом (теорема 1 §3 гл. IV в Маклейне). Более того, если коежиница является эпиморфизмом, то G — вложение. Этот факт мы доказывать не будем (доказательство элементарно), мы рассмотрим более важный пример полных рефлективных подкатегорий.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{A} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ — полная рефлективная ($R \dashv i$) подкатегория. Тогда коединица является изоморфизмом $\varepsilon_a\colon Ri(a) \simeq a$.*

Доказательство. Следует из леммы Йонеды и коммутативности следующей естественной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(a,b) \arrow[r, phantom, "\overset{i}{\simeq}"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(\varepsilon_a,b)"'] & \mathrm{Hom}(i(a),i(b)) \arrow[d, phantom, "\simeq"] \\
 & \mathrm{Hom}(Ri(a),b)
\end{tikzcd}$$

□

Полные рефлективные подкатегории допускают простое описание пределов и копределов.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{A} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$ — полная рефлективная ($R \dashv i$) подкатегория. Предположим, что $\mathcal{B}$ полна и кополна. Тогда $\mathcal{A}$ также полна и кополна, причём пределы в $\mathcal{A}$ можно выразить через пределы в $\mathcal{B}$ и функторы сопряжения.*

Доказательство. Доказательство является цепочкой равенств, использующих изоморфизм $1 \simeq Ri$ из предыдущего утверждения и сохранение пределов и копределов сопряжёнными функторами.

$$\operatorname{Lim} D \simeq Ri(\operatorname{Lim} D) \simeq R(\operatorname{Lim} i \circ D)$$

$$\operatorname{Colim} D \simeq \operatorname{Colim} RiD \simeq R(\operatorname{Colim} i \circ D)$$

Т.е. для вычисления пределов или копределов в полной подкатегории достаточно вычислить их в объемлющей категории, а затем взять рефлектор от полученного объекта, поэтому $\mathcal{A}$ полна и кополна.

Далее заметим, что $\operatorname{Lim} iD \simeq i\,(\operatorname{Lim} D)$, а $\operatorname{Lim} D \in \mathcal{A}$, поэтому также $\operatorname{Lim} iD \in \mathcal{A}$ (рассматривая подкатегорию как подмножество стрелок и объектов в $\mathcal{B}$). Это значит, что пределы в полной рефлективной подкатегории вычисляются так же, как в объемлющей категории, а применение рефлектора является чисто формальным рассмотрением объекта из $\mathcal{B}$, лежащего в образе i, как объекта из $\mathcal{A}$. Пример: категория $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ рефлективна в $[\mathcal{T}, \mathcal{S}et]$, при этом пределы в $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ можно вычислять так же, как и в $[\mathcal{T}, \mathcal{S}et]$, т.к. пределы коммутируют с произведениями. Напротив, т.к. $\operatorname{Colim} iD \neq i\,(\operatorname{Colim} D)$, то вообще говоря $\operatorname{Colim} iD \notin \mathcal{A}$. Для моделей алгебраической теории это следует из того, что копределы в общем случае не коммутируют в произведениями. Таким образом, для вычисления копредела алгебраических моделей нужно вычислить их копредел как функторов, а затем применить в полученному функтору рефлектор на подкатегорию моделей. $\square$

Лекция 4. Сопряжённые функторы — 2.

А. Ю. Фетисов

02/13/12

Содержание

В прошлый раз мы определили сопряжённые функторы и доказали, что они сохраняют пределы. Для пары сопряжённых функторов $F \dashv G$ мы также определили естественные преобразования $\eta\colon 1 \to GF$ (единица) и $\varepsilon\colon FG \to 1$ (коединица). В частности, компоненты коединицы удовлетворяют коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \varepsilon_a \in \operatorname{Hom}(FGa, b) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \operatorname{Hom}(Ga, Ga) \ni 1_{Ga} \\ 1_a \in \operatorname{Hom}(a, a) \arrow[u, dashed, mapsto, "\operatorname{Hom}(\varepsilon_a, b)"] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd} \tag{0.1}$$

В этот раз мы выведем алгебраический критерий сопряжённости функторов и рассмотрим условия существования левого сопряжённого функтора.

1 Треугольные тождества.

Коединица и единица связаны между собой так называемыми *треугольными тождествами*. Для их формулирования нам нужно ввести новую операцию композиции естественных преобразований: горизонтальную композицию.

Определение 1. Пусть даны функторы $\mathcal{A} \underset{F'}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B} \underset{G'}{\overset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$ и естественные преобразования $\mu\colon F \to F'$, $\nu\colon G \to G'$. Естественное преобразование $G\mu\colon GF \to GF'$ имеет компоненты $(G\mu)_a = G(\mu_a)$. Естественное преобразование $\nu F\colon GF \to G'F$ имеет компоненты $(\nu F)_a = \nu_{Fa}$. Горизонтальная композиция $\nu * \mu$ по определению равна $\nu * \mu = \nu F \circ G\mu$, где $\circ$ — обычная (вертикальная) композиция естественных преобразований.

Упражнение 1.

1. Проверьте, что $(\nu F)_a$ и $(G\mu)_a$ действительно являются компонентами естественного преобразования.

2. Докажите, что $\nu F \circ G\mu = G\mu \circ \nu F$. Преобразования $G\mu$ и νF можно представить как $G\mu = 1 * \mu$, $\nu F = \nu * 1$, где единица обозначает тождественное преобразование $1\colon F \to F$ или $1\colon G \to G$ соответственно.

3. Покажите, что $(\nu' * \mu') \circ (\nu * \mu) = (\nu' \circ \nu) * (\mu' * \mu)$. Заметим, что вопреки лемме о двух операциях, отсюда не следует коммутативность композиций, т.к. для $F \xrightarrow{\nu} F' \xrightarrow{\nu'} F''$ композиция $\nu \circ \nu'$ вообще не определена при $F \neq F''$. Даже если мы рассматриваем преобразования $\nu\colon F \to F$ и $\mu\colon G \to G$, лемма не работает, т.к. операции определены на разных множествах.

Теперь мы можем сформулировать треугольные тождества для единицы и коединицы сопряжения.

Предложение 1. *Пусть $F \dashv G$, $\varepsilon\colon FG \to 1$, $\eta\colon 1 \to GF$ — коединица и единица сопряжения. Следующие диаграммы коммутативны:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFG \arrow[d, "G\varepsilon"'] & G \arrow[l, "\eta G"'] \arrow[dl, equal] \\ G & \end{tikzcd}$$

Эти тождества не содержат явно объектов категории, поэтому удобны как для доказательства теорем о сопряжениях, так и для обобщения понятия сопряжения на другие категории, помимо $\mathcal{C}at$.

Доказательство. Докажем первое тождество, второе будет верно по двойственности. Доказательством является коммутативность следующей диаграммы функторов:

$$\begin{tikzcd} {[G,G]} \arrow[d, "{[G,\eta G]}"'] \arrow[dr, "F"] & \\ {[G,GFG]} \arrow[d, "{[G,G\varepsilon]}"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & {[FG,FG]} \arrow[d, "{[FG,\epsilon]}"] \\ {[G,G]} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & {[FG,1]} \end{tikzcd}$$

Здесь $[S,R] = \mathrm{Nat}\,(S,R)$, изоморфизмы следуют из изоморфизма сопряжения, в частности $[F,1] \simeq [1,G]$. Верхний треугольник коммутативен в силу определения единицы сопряжения (показано ранее). Нижний квадрат коммутативен в силу изоморфизма сопряжения $[G,GR] \simeq [FG,R]$. Рассматривая действие морфизмов на стрелке $1_G \in [G,G]$, получим

$$\begin{tikzcd} 1_G \in {[G,G]} \arrow[d, "{[G,\eta G]}"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \eta G \in {[G,GFG]} \arrow[d, "{[G,G\varepsilon]}"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & {[FG,FG]} \ni 1_{FG} \arrow[d, "{[FG,\epsilon]}"] \\ G\varepsilon \circ \eta G \in {[G,G]} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & {[FG,1]} \ni \varepsilon \end{tikzcd}$$

Но так как при изоморфизме $[FG,1] \simeq [G,G]$ коединица сопряжения соответствует тождественному преобразованию 1_G, то $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G$, что и требовалось. $\square$

Рассмотрим теперь произвольную пару функторов F, G и попробуем указать условия их сопряжённости.

Предложение 2. *Пусть заданы естественные преобразования $\varepsilon\colon FG \to 1$, $\eta\colon 1 \to GF$, удовлетворяющие треугольным тождествам. Тогда $F \dashv G$.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFG \arrow[d, "G\varepsilon"'] & G \arrow[l, "\eta G"'] \arrow[dl, equal] \\ G & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Требуется выразить изоморфизм $\varphi\colon \mathrm{Hom}\,(Fa,b) \simeq \mathrm{Hom}\,(a,Gb)$ в терминах единицы и коединицы. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}\,(Fa,b) \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}\,(GFa,Gb) \arrow[d, "{\mathrm{Hom}(\eta_a,Gb)}"] \\ & \mathrm{Hom}\,(a,Gb) \end{tikzcd}$$

Если $F \dashv G$, то она коммутативна в силу определения коединицы и коммутативности диаграммы 0.1. Следовательно, если сопряжение имеется, то необходимо $\varphi_{a,b} = \operatorname{Hom}(\eta_a, b) \circ G$. Аналогично, для обратного морфизма φ^{-1} коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(a, Gb) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\varphi^{-1}"'] & \operatorname{Hom}(Fa, FGb) \arrow[d, "\operatorname{Hom}(Fa,\varepsilon)"] \\
& \operatorname{Hom}(Fa, b)
\end{tikzcd}$$

Осталось проверить, что для произвольных ε, η, удовлетворяющих треугольным тождествам, так определённые φ и φ^{-1} действительно взаимно обратны. В виде формул действие этих морфизмов задаётся как

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= Gf \circ \eta_a, \quad f\colon Fa \to b \\
\varphi^{-1}(g) &= \varepsilon_b \circ Fg, \quad g\colon a \to Gb
\end{aligned}$$

Покажем, что $\varphi^{-1}\varphi = 1$.

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\varphi(f) &= \varphi^{-1}(Gf \circ \eta_a) \\
&= \varepsilon_b \circ F(Gf \circ \eta_a) \\
&= \varepsilon_b \circ FG(f) \circ F(\eta_a)
\end{aligned}$$

Так как $\varepsilon\colon FG \to 1$ — естественное преобразование, то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
FGFa \arrow[r, "\varepsilon_{Fa}"] \arrow[d, "f"'] & Fa \arrow[d, "f"] \\
FGb \arrow[r, "\varepsilon_b"] & b
\end{tikzcd}$$

Отсюда имеем равенство $\varepsilon_b \circ FG(f) = f \circ \varepsilon_{Fa}$. Далее, треугольное тождество

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

принимает в компонентах вид (с учётом определений 1 естественных преобразований $F\eta$ и εF)

$$\varepsilon_{Fa} \circ F(\eta_a) = 1_{Fa}$$

Поэтому имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}\varphi(f) &= \varepsilon_b \circ FG(f) \circ F(\eta_a) \\
&= f \circ \varepsilon_{Fa} \circ F(\eta_a) \\
&= f \circ 1_{Fa} \\
&= f
\end{aligned}$$

Аналогично для $\varphi\varphi^{-1}$. Цепочка равенств следует из двойственных диаграмм и имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi\varphi^{-1}(g) &= G(\varepsilon_b \circ Fg) \circ \eta_a \\
&= G(\varepsilon_b) \circ GF(g) \circ \eta_a \\
&= G(\varepsilon_b) \circ \eta_{Gb} \circ g \\
&= 1_{Gb} \circ g \\
&= g
\end{aligned}$$

$\square$

2 Финальные функторы.

Известный факт из анализа: если последовательность сходится к некоторому пределу, то и любая её подпоследовательность также сходится к этому пределу. В теории категорий вместо последовательностей мы рассматриваем функторы, аналогом такой подпоследовательности при этом становится понятие финального функтора.

Определение 2. Функтор $L\colon \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ называется *финальным*, если для любого функтора $D\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ предел D существует тогда и только тогда, когда существует предел DL, причём они изоморфны.

$$\operatorname{Lim} D \simeq \operatorname{Lim} DL$$

Двойственно, если $\operatorname{Colim} D \simeq \operatorname{Colim} DL$, то функтор называется *кофинальным.*

Замечание. В книге Маклейна [1] понятие финальности и кофинальности поменялись местами. Мы следуем здесь изложению первого тома [2].

Предложение 3. *Функтор $L\colon \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ финален тогда и только тогда, когда для любого объекта $j \in \mathcal{J}$ категория запятой $(L \downarrow j)$ непуста и связна.*

Доказательство. Покажем, что множества конусов над этими функторами совпадают, т.е. $Cone\,(c, F) \simeq Cone\,(c, FL)$ естественно по c. В таком случае $\operatorname{Lim} F \simeq \operatorname{Lim} FL$ как представляющие объекты изоморфных функторов.

Любой конус $c \xrightarrow{\mu} F$ при ограничении на образ L даёт конус $c \xrightarrow{\mu L} FL$. Заметим, что при этом если $j \notin \operatorname{Im} L$ и $i \in \mathcal{I}$, то для любой стрелки $f\colon L_i \to j$ можно восстановить компоненту μ_j естественного преобразования по правилу $\mu_j = Ff \circ \mu_{L_i}$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\mu_{L_i}"'] \arrow[dr, "\mu_j"] & \\
FL\,(i) \arrow[r, "Ff"] & F\,(j)
\end{tikzcd}$$

Корректность определения μ_j (независимость от выбора i и f) следуют из условия изначально заданной естественности $\mu\colon c \to F$.

Обратно, пусть задан конус $\nu\colon c \to FL$, требуется продолжить его до конуса $\tilde{\nu}\colon c \to F$. Для произвольного $j \notin \operatorname{Im} L$ определим, как выше, $\tilde{\nu}_j = Ff \circ \nu_{Li}$. Это возможно, т.к. категория запятой $(L \downarrow j)$ непуста, поэтому существует некоторая стрелка $f\colon L\,(i) \to j$ для некоторого $i \in \mathcal{I}$. Требуется проверить корректность определения, т.е. независимость от выбора f. Пусть имеется произвольная другая стрелка $L\,(i') \xrightarrow{f'} j \in (L \downarrow j)$. Т.к. $(L \downarrow j)$ связна, то существует цепочка стрелок $i \to \cdot \leftarrow \cdot \to \cdots \leftarrow i'$, связывающая f и f' в $(L \downarrow j)$. Без ограничения общности будем считать, что цепочка состоит из одной стрелки $i \xrightarrow{\theta} i'$. Соответствующая диаграмма в категории запятой принимает в $\mathcal{J}$ вид

$$\begin{tikzcd}
L\,(i) \arrow[rr, "L\theta"] \arrow[dr, "f"'] & & L\,(i') \arrow[dl, "f'"] \\
& j &
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Для естественных преобразований получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\nu_{i'}"] & \\
FL\,(i) \arrow[rr, "FL\theta"] \arrow[dr, "Ff"'] & & FL\,(i') \arrow[dl, "Ff'"] \\
& Fj &
\end{tikzcd}$$

Верхний треугольник коммутативен в силу естественности ν, нижний — в силу коммутативности диаграммы 2.1 и функториальности F. Отсюда следует, что $Ff \circ \nu_i = Ff' \circ \nu_{i'}$, т.е. преобразование $\tilde{\nu}\colon c \to F$ действительно определено корректно.

В силу сказанного выше замечания о продолжении ограничения естественного преобразования, указанные отображения конусов действительно задают искомый изоморфизм $Cone\,(c, F) \simeq Cone\,(c, FL)$, что и требовалось. $\square$

Двойственно, L кофинален тогда и только тогда, когда при всех j категория запятой $(j \downarrow L)$ непуста и связна. Рассмотрим некоторые применения этого утверждения.

Вывод 1. *Пусть в категории $\mathcal{C}$ имеется начальный объект 0, тогда вложение начального объекта $L\colon * \to \mathcal{C}$ является финальным функтором ($*$ — одноточечная категория).*

Доказательство. По определению начального объекта, при всех $c \in \mathcal{C}$ $(L \downarrow c) \simeq *$. $\square$

Вывод 2. *Пусть в категории $\mathcal{J}$ имеется начальный объект $0 \in \mathcal{J}$, тогда для любого функтора $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ верно $\operatorname{Lim} F = F\,(0)$.*

Доказательство. Следует из финальности вложения начального объекта $0 \in \mathcal{J}$. $\square$

Вывод 3. *Пусть в категории $\mathcal{C}$ имеется начальный объект $0 \in \mathcal{C}$, тогда его можно представить как предел тождественного функтора $0 = \operatorname{Lim} 1_{\mathcal{C}}$.*

Доказательство. Если $D\colon * \to \mathcal{C}$ — вложение начального объекта, то $\operatorname{Lim} 1_{\mathcal{C}} = \operatorname{Lim}\,(1_{\mathcal{C}} \circ D) = \operatorname{Lim} D = 0$. $\square$

Последнее утверждение можно переформулировать так. Копредел пустой диаграммы равен пределу тождественного функтора $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Можно показать, что вообще *любой* копредел можно представить как предел некоторой диаграммы. Проблема в том, что эта диаграмма уже не будет малой. В приведённом примере она уже совпадает со всей категорией $\mathcal{C}$.

Следующее утверждение потребуется нам для доказательства существования сопряжённого функтора.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{D}$ — полная категория, $\mathcal{C} \overset{L}{\hookrightarrow} \mathcal{D}$ — полная подкатегория в ней, такая что категория запятой $(L \downarrow d)$ непуста для всех $d \in \mathcal{D}$. Тогда функтор вложения L финален.*

Доказательство. Требуется доказать связность категории запятой $(L \downarrow d)$. Для произвольных стрелок $c \xrightarrow{f} d$ и $c' \xrightarrow{f'} d$ рассмотрим их расслоенное произведение $p = c \times_d c'$. Этот объект может не лежать в $\mathcal{C}$, однако в силу непустоты $(L \downarrow p)$ существует некоторый объект $\hat{c}$ и стрелка $\hat{c} \to p$. Получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[rr] \arrow[dd] & & c' \arrow[dd, "f'"] \\
& \hat{c} \arrow[ul] \arrow[ur, dashed] \arrow[dl, dashed] & \\
c \arrow[rr, "f"] & & d
\end{tikzcd}$$

$\square$

3 Теорема Фрейда о сопряжённом функторе.

Лемма 1. *Если категория $\mathcal{A}$ полна и функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ сохраняет пределы, то для любого $b \in \mathcal{B}$ категория запятой $(b \downarrow F)$ полна.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму $D\colon \mathcal{D} \to (b \downarrow F)$. Пусть $Q_F\colon (b \downarrow F) \to \mathcal{A}$ — каноническая проекция категории запятой. Тогда диаграмма $Q_F D$ имеет предел в $\mathcal{A}$, $F\,(\operatorname{Lim} Q_F D) \to FQ_F D$ — предельный конус. Заметим, что функтор FQ_F отображает каждую стрелку $b \to Fa$ из $(b \downarrow F)$ в объект $Fa \in \mathcal{B}$. Диаграмма D в категории запятой — то же самое, что некоторый конус над $FQ_F D$ с вершиной b.

В силу универсальности предельного конуса $F\,(\operatorname{Lim} Q_F D) \to FQ_F D$ существует единственная стрелка $b \to F\,(\operatorname{Lim} Q_F D)$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, dashed, "\xi"] \arrow[dr] & F\,(\operatorname{Lim} Q_F D) \arrow[d] \\
& FQ_F D
\end{tikzcd}$$

Получаем конус в категории запятой $(b \downarrow F)$ с вершиной в объекте $b \to F\,(\operatorname{Lim} Q_F D)$. Пусть $p \to D$ — произвольный другой конус. Применяя к нему FQ_F, получим конус $FQ_F\,(p) \to FQ_F D$ в категории $\mathcal{B}$. Канонически определён морфизм в предел:

$$\begin{tikzcd}
FQ_F\,(p) \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[dr] & F\,(\operatorname{Lim} Q_F D) \arrow[d] \\
& FQ_F D
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Осталось проверить, что этот единственный морфизм поднимается до морфизма $p \to \xi$ в категории запятой. Это верно, если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\xi"'] & FQ_F\,(p) \arrow[d, "\theta"] \\
& \operatorname{Lim} FQ_F D
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим все перечисленные конусы в $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd}
& & FQ_F\,(p) \arrow[dl] \arrow[dd, "\theta"] \\
b \arrow[urr, bend left, "p"] \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\xi"'] & FQ_F D \arrow[r, phantom, "2"] \arrow[u, phantom, "1"] \arrow[d, phantom, "3"] & {} \\
& & \operatorname{Lim} FQ_F D \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Треугольник 1 коммутативен потому, что p — конус над D. Потому же коммутативен и треугольник 3. Треугольник 2 коммутативен как образ коммутативного треугольника 3.1 под действием FQ_F. Отсюда следует, что имеется два отображения конуса $b \to FQ_F D$ в конус $\operatorname{Lim} FQ_F D \to FQ_F D$: первое — это ξ, а второе — $\theta \circ p$. В силу универсальности объекта $\operatorname{Lim} FQ_F D \in \mathcal{B}$ отображение в него из конуса $b \to FQ_F D$ единственно, поэтому эти морфизмы в категории запятой совпадают и θ — морфизм конусов. Следовательно, конус ξ действительно универсален и является искомым пределом. $\square$

Теорема 1. *Пусть дан функтор $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, где категория $\mathcal{B}$ полна. Левый сопряжённый $F \dashv G$ существует тогда и только тогда, когда G сохраняет пределы и выполнено следующее условие существования разрешающего множества.*

- *Для любого объекта $a \in \mathcal{A}$ имеется малое множество объектов $S_a \subset Ob\,(\mathcal{B})$, такое что для любого $b \in \mathcal{B}$ любая стрелка $f\colon a \to Gb$ пропускается через это множество. Это значит, что существуют $\tilde{b} \in S_a$ и стрелки $s\colon \tilde{b} \to b$, $\tilde{f}\colon a \to G\tilde{b}$, такие что*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & G\tilde{b} \arrow[d, "Gs"] \\
& Gb
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $F \dashv G$. Тогда G сохраняет пределы, а в качестве разрешающего множества можно взять $S_a = \{Fa\}$. Стандартные рассуждения с единицей сопряжения (см. предыдущую лекцию, определяющие единицу диаграммы) показывают, что при этом

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[dr, "f"'] & GFa \arrow[d, "G(\varphi^{-1}(f))"] \\ & Gb \end{tikzcd}$$

где $\varphi^{-1} \colon \mathrm{Hom}\,(A, Gb) \simeq \mathrm{Hom}\,(Fa, b)$ — изоморфизм сопряжения.

В обратную сторону, необходимо показать, что $\mathrm{Hom}\,(a, G\cdot)$ представим при всех a. По лемме о функториальности представляющего объекта, в таком случае существует единственная структура функтора на функции $a \mapsto Fa$, что и определяет левый сопряжённый. В лекции 2 было показано, что представимость $\mathrm{Hom}\,(a, G\cdot)$ равносильна наличию начального объекта в категории элементов $\int \mathrm{Hom}\,(a, G\cdot)$. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{C}_a \xrightarrow{L} \int \mathrm{Hom}\,(a, G\cdot)$, объектами которой являются все прообразы объектов из разрешающего множества S_a при канонической проекции категории элементов $Q_G \colon \int \mathrm{Hom}\,(a, G\cdot) \to \mathcal{B}$. Так как $\mathcal{B}$ полна и G сохраняет пределы, то $\int \mathrm{Hom}\,(a, G\cdot)$ полна. Определение разрешающего множества S_a означает, что $\mathcal{C}_a \xrightarrow{L} \int \mathrm{Hom}\,(a, G\cdot)$ удовлетворяет условию предложения 4, поэтому вложение подкатегории $\mathcal{C}_a$ является финальным функтором. В категории элементов

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Lim}\, 1_{\int \mathrm{Hom}(a,G)} \\ &= \mathrm{Lim}\, \left(1_{\int \mathrm{Hom}(a,G)} \circ L\right) \\ &= \mathrm{Lim}\, L \end{aligned}$$

Так как множество S_a мало и все $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(a, Gb)$ малы, то $\mathcal{C}_a$ мала, поэтому $\mathrm{Lim}\, L$ существует и в категории элементов имеется начальный объект, что и требовалось. □

Список литературы

[1] С. Маклейн. *Категории для работающего математика.* ФИЗМАТЛИТ, 2e edition, 2004.

[2] Franics Borceux. *Handbook of categorical algebra 1. Basic category theory.* Cambridge University Press, 1994.

Лекция 6. Примеры из топологии.

А. Ю. Фетисов

11 апреля 2012 г.

Содержание

В этой лекции мы рассмотрим некоторые применения теории категорий в алгебраической топологии. Большинство доказательств см. в указанной литературе.

1 Компактно порождённые пространства.

Мы уже убедились в важности сопряжённых функторов. Столь же важен частный случай этого вопроса: имея категорию $\mathcal{A}$, можно ли рассматривать сами множества морфизмов $\mathcal{A}$ как объекты этой категории? Это позволяет с помощью методов, придуманных для исследования объектов категории, решать вопросы о её полной структуре, в числе которых — вопросы о группах автоморфизмов объектов, о существовании отображений между ними, обладающих искомыми свойствами, и о классификации объектов и подобъектов. Например, отображения между множествами также образуют множество, так что для их исследования не требуется изобретать каких-то новых понятий. Гомоморфизмы абелевых групп также образуют абелеву группу, а гомоморфизмы R-модулей — R-модуль. Этот факт лежит в основе теории представлений. Например, (комплексное) представление группы G — это гомоморфизм групп $G \to Aut\,(\mathbb{C}^n) = GL_n\,(\mathbb{C})$. Т.к. $\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ есть $\mathbb{C}$-векторное пространство, то гомоморфизм групп можно продолжить до гомоморфизма колец $\mathbb{Z}\,(G) \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, после чего задачу становится возможным изучать с помощью методов теории колец.

Группы диффеоморфизмов многообразий также хотелось бы рассматривать как многообразия, это позволило бы интерпретировать многие конструкции как дифференциально-геометрические. Например, алгебры Ли векторных полей при этом являются аналогами алгебр Ли групп Ли. Более интересные примеры можно найти в книге [2, добавление 2], где аналогия между конечномерными и бесконечномерными группами Ли приводит к интерпретации уравнений Эйлера в гидродинамике несжимаемой невязкой жидкости как уравнений Эйлера движения твёрдого тела и вычислению кривизны группы диффеоморфизмов. Кривизна оказывается отрицательной, что приводит к хаотической зависимости решений уравнений гидродинамики от начальных данных. Одно из следствий — принципиальная невозможность предсказания погоды на срок более чем 1-2 недели вперёд. Другой пример можно найти в книге [1], где на пространстве гладких отображений некоторых многообразий вводится структура кэлерова (комплексно-аналитического) пространства и исследуются некоторые геометрические вопросы в теории струн. Отметим, что классическим решением проблемы гладкой структуры на пространствах гладких отображений является теория многообразий Фреше.

Наша цель гораздо более скромна, но в целом аналогична. Требуется ввести структуру топологического пространства на пространстве непрерывных отображений $Hom\,(X,Y)$ между $X,Y\in\mathcal{T}op$. Из сказанного выше естественно ожидать, что при правильном введении такая структура позволила бы извлечь много новой информации о топологических пространствах. Опишем наиболее часто используемую конструкцию.

Определение 1. *Компактно-открытая* топология на множестве непрерывных функций $f\colon X\to Y$ задаётся следующим образом. Предбаза топологии — это множества

$$N\,(C,U)=\{f\colon X\to Y|f\,(C)\subset U\}$$

для всевозможных пар (C,U), где C — компактное подмножество в X, а U — открытое подмножество в Y. Множество непрерывных отображений $X\to Y$ с введённой таким образом топологией мы будем обозначать $[X,Y]$ и называть пространством функций из X в Y. Таким образом, любое открытое подмножество в пространстве функций $[X,Y]$ задаётся как произвольное объединение конечных пересечений некоторых множеств вида $N\,(C,U)$.

Наиболее естественным условием, которому должно удовлетворять любое разумное определение пространства функций, является существование сопряжения

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\,(X\times Y,Z)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\,(X,[Y,Z])$$

Оно означает, что функция от двух аргументов (X,Y) есть то же самое, что семейство функций одного аргумента Y, параметризованных с помощью X (ср. пример $\mathcal{S}et$). Категории, обладающие таким свойством (существование конечного объекта, конечных произведений и правого сопряжённого к $\cdot\times a$ для всех a), называются *декартово замкнутыми*. К сожалению, **это не верно** в категории $\mathcal{T}op$. Можно показать, что указанное сопряжение имеет место в $\mathcal{T}op$, если пространство Y локально компактно и хаусдорфово. В общем случае уже для $\mathbb{Q}$ функтор $\cdot\times\mathbb{Q}$ не имеет правого сопряжённого, доказательство см. в [4, Prop. 7.1.2].

Замечание 1. В более общем случае можно потребовать не декартовой, а *моноидальной* замкнутости, т.е. существования симметричного ассоциативного бифунктора $\otimes\colon\mathcal{T}op\times\mathcal{T}op\to\mathcal{T}op$ и правого сопряжённого $\cdot\otimes Y\dashv[Y,\cdot]$. Можно показать [4, Prop. 7.1.1], что в $\mathcal{T}op$ при этом подлежащее множество для $U\,(X\otimes Y)$ есть с необходимостью $UX\times UY$, а $U\,([X,Y])=\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\,(UX,UY)$, где $U\colon\mathcal{T}op\to\mathcal{S}et$ — забывающий функтор. Таким образом, вопрос о замкнутости $\mathcal{T}op$ есть вопрос о том, какую топологию можно задать на произведении $UX \times UY$.

Есть несколько способов борьбы с этой проблемой. Можно рассмотреть некоторую декартово замкнутую подкатегорию в $\mathcal{T}op$. Можно, наоборот, расширить категорию $\mathcal{T}op$ до некоторой декартово замкнутой категории $\mathcal{T}op'$, добавив (несуществующие в классическом смысле) новые пространства и морфизмы между ними. Ограничимся рассмотрением хаусдорфовых пространств.

Определение 2. Пространство X называется *хаусдорфовым*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существуют не пересекающиеся открытые окрестности $U \ni x$, $V \ni y$, $U \cap V = \varnothing$. Равносильно, X хаусдорфово тогда и только тогда, когда образ диагонального отображения $\Delta\colon X \to X \times X$ замкнут.

В этом случае оба подхода в некотором смысле эквивалентны. А именно, существует декартово замкнутая подкатегория **CGHaus**, являющаяся полной подкатегорией в категории хаусдорфовых пространств **Haus**, и декартово замкнутая категория $\mathcal{CC}-$**Haus**, содержащая **Haus** в качестве подкатегории, причём **CGHaus** и $\mathcal{CC}-$**Haus** эквивалентны [4, Cor. 7.2.6]. Опишем сначала категорию **CGHaus**.

Определение 3. Топологическое пространство X *компактно порождено*, если любое подмножество $A \subset X$, пресекающее любой компакт $C \subset X$ по замкнутому множеству, само является замкнутым. Полная подкатегория компактно порождённых хаусдорфовых пространств обозначается **CGHaus**.

Компактно порождённые хаусдорфовы пространства также называются пространствами Келли. Категория **CGHaus** корефлективна в **Haus**, соответствующий корефлектор называется *келлификацией* пространства. Обозначив $\iota\colon \mathbf{CGHaus} \hookrightarrow \mathbf{Haus}$ — функтор вложения, получим сопряжение $\iota \dashv K$, где K — келлификация.

Теперь опишем категорию $\mathcal{CC}-$**Haus**. Её объекты — всевозможные хаусдорфовы пространства, а морфизмы — компактно-непрерывные отображения.

Определение 4. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение (множеств) $f\colon X \to Y$ называется *компактно-непрерывным*, если его ограничение на любой компакт $C \subset X$ непрерывно.

В частности, любое непрерывное отображение компактно-непрерывно. Если X локально компактно, то множества компактно-непрерывных и непрерывных отображений совпадают.

Категория $\mathcal{CC}-$**Haus** является декартово замкнутой [4, Prop. 7.2.3, в формулировке утверждения присутствует лишнее требование компактности пространств]. Более того, она эквивалентна **CGHaus**. Преимуществом $\mathcal{CC}-$**Haus** является то, что топология на произведении пространств является обычной топологией декартова произведения, а топология на пространствах функций есть описанная выше компактно-открытая топология. В отличие от $\mathcal{CC}-$**Haus**, в **CGHaus** для их построения требуется дополнительно применить функтор келлификации:

$$X \underset{\mathbf{CGHaus}}{\times} Y = K\left(X \underset{\mathcal{T}op}{\times} Y\right)$$

$$[X, Y]_{\mathbf{CGHaus}} = K\left([X, Y]_{\mathcal{T}op}\right)$$

Указанные функторы задают структуру декартово замкнутой категории на **CGHaus**. Доказательство этого факта можно найти в [3, пар. 7.8]. В [4, Prop. 7.2.9] также показано, что для локально-компактного Y топология на $X \underset{\mathbf{CGHaus}}{\times} Y$ есть обычная топология произведения. В частности, для локально-компактных пространств произведение в **CGHaus** и в $\mathcal{T}op$ совпадают.

Примеры:

1. Любое локально-компактное хаусдорфово пространство является компактно порождённым. В частности, таковы любое компактное хаусдорфово пространство и любое многообразие.
2. Любое метрическое пространство является компактно порождённым. Частными случаями являются банаховы, гильбертовы пространства и пространства Фреше.

Замечание 2. Можно показать [7], что существует единственная моноидально замкнутая структура на $\mathcal{T}op$. Описание функтора $\otimes$ мы приводить здесь не будем, его можно найти в [4, Prop. 7.1.6]. Пространство $[X, Y]$ при этом есть множество непрерывных отображений $X \to Y$ с топологией поточечной сходимости, а $\mathrm{Hom}\,(X \otimes Y, Z)$ есть множество всех отображений множеств $X \times Y \to Z$, непрерывных отдельно по каждому аргументу. Как известно из анализа, такие классы функций не обладают достаточно хорошими свойствами (например, поточечный предел непрерывных функций не обязан быть непрерывным). По этой причине мы не будем останавливаться на изучении этой структуры.

Резюме. В категории топологических пространств имеется полная декартово замкнутая подкатегория **CGHaus** компактно-порождённых хаусдорфовых пространств. Она корефлективна в **Haus**, корефлектор называется келлификацией. Пространство функций в **CGHaus** есть келлификация множества непрерывных отображений, снабжённого компактно-открытой топологией. Произведение в **CGHaus** есть келлификация обычного декартова произведения. Для локально-компактных пространств произведение в **CGHaus** совпадает с произведением в $\mathcal{T}op$. В этой категории лежит абсолютное большинство классических пространств топологии и функционального анализа.

2 Петли и надстройки.

Далее будем рассматривать категорию пространств с отмеченной точкой $*/$**CGHaus**. Напомним, что объектами её являются пары (X, x), $X \in$ **CGHaus**, $x \in X$, а морфизмы — непрерывные отображения, сохраняющие отмеченную точку. Для краткости в этом разделе будем обозначать эту категорию $\mathscr{H}$. Т.к. **CGHaus** полна, то $\mathscr{H}$ полна и кополна как категория запятой. Копредел диаграммы $D\colon \mathcal{D} \to \mathscr{H}$ вычисляется как копредел диаграммы $1 \to D$ в **CGHaus**, где диаграмма $1 \to D$ соответствует конусу над D с вершиной в 1. Например, копроизведение $A \coprod B$ вычисляется как корасслоенное произведение в **CGHaus**:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A\coprod\limits_{\mathscr{H}} B \end{tikzcd}$$

Построение пределов было описано в лемме из лекции 5, для примера приведём описание произведения. По условию для произведения $(X,x)\prod(Y,y)$ заданы стрелки $1 \xrightarrow{x} X$, $1 \xrightarrow{y} Y$. Это определяет каноническую стрелку $\langle x,y\rangle \to X\prod Y$, превращающую $(X\prod Y, \langle x,y\rangle)$ в искомое произведение.

Функтор $[\cdot,\cdot]$ также имеет естественное продолжение на $\mathscr{H}$, однако он *не является* при этом сопряженным справа к произведению. Пространство функций $[X,Y]_{\mathscr{H}}$ равно $[X,Y]$ как пространство, отмеченной точкой $*_{Y^X}$ в нём является отображение, переводящее всё X в отмеченную точку $*_Y \in Y$. Левый сопряжённый называется *стянутым произведением* и обозначается $\wedge$ или $\#$:

$$\mathscr{H}(X\wedge Y, Z) \simeq \mathscr{H}(X, [Y,Z]_{\mathscr{H}})$$

Опишем его. $\mathscr{H}(X\wedge Y, Z)$ есть множество в точности тех отображений $X \xrightarrow{f} [Y,Z]$, для которых $*_X \overset{f}{\mapsto} *_{Y^X}$, причём для всех морфизмов $Y\to Z$ в образе $*_Y \mapsto *_Z$. Используя декартову замкнутость **CGHaus**, можно сказать, что это в точности те отображения $f^{\#}\colon X\times Y \to Z$, для которых $f^{\#}(x, *_Y) = *_Z$, $f^{\#}(*_X, y) = *_Z$ для всех $x\in X$, $y\in Y$. Все такие отображения пропускаются через $W = X\times Y/(X\times *_Y \cup *_X \times Y)$, отмеченной точкой в нём является точка $*_W$, в которую стянуто подпространство $X\times *_Y \cup *_X\times Y$. Любое отображение $W\to Z$, такое что $*_W\mapsto *_Z$, обладает указанным свойством. Следовательно, $\mathscr{H}(X\wedge Y, Z)\simeq \mathscr{H}(W,Z)$ и $X\wedge Y = W$. Т.е.

$$X\wedge Y = X\times Y/(X\times *_Y \cup *_X\times Y)$$

Заметим, что $\wedge\colon \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ является симметричным ассоциативным бифунктором, но *не является* прямым произведением в $\mathscr{H}$. Категория $\mathscr{H}$ при этом является моноидально замкнутой в смысле 1. Стандартным образом получаем изоморфизм

$$[X\wedge Y, Z]_{\mathscr{H}} \simeq [X, [Y,Z]_{\mathscr{H}}]_{\mathscr{H}}$$

В качестве важного частного случая рассмотрим S^1 — окружность с отмеченной точкой, и I — отрезок $[0;1]$ с отмеченной точкой 0.

Пример 1.

1. $I\wedge I$ есть диск с отмеченной точкой на границе.

2. $S^1\wedge S^1 = S^2$ — двумерная сфера. В более общем случае, $S^n\wedge S^1 = S^{n+1}$.

3. $S^n\wedge I = D^{n+1}$ — $(n+1)$-мерный диск.

4. $X\wedge * = *$ для любого X. Аналогично, $[*,X]_{\mathscr{H}} = *$. Т.к. $*$ — конечный объект в $\mathscr{H}$, это также показывает, что $\wedge$ не может быть произведением ($X\times 1\simeq X$).

Определение 5.

1. (Стянутая) надстройка над пространством $X \in \mathscr{H}$ есть $\Sigma X = X \wedge S^1$.
2. Пространство петель ΩX есть $\Omega X = [S^1, X]_{\mathscr{H}}$.
3. Конус над X — это пространство $CX = X \wedge I$. Заметим, что в обычном конусе с основанием X при этом нужно стянуть в точку образующую, проходящую через $*_X \in X$.
4. Пространство путей над X — это пространство $\Pi X = [I, X]_{\mathscr{H}}$.

Названия этих пространств в точности соответствуют геометрическому смыслу их конструкции. Отметим только, что в элементарной топологии чаще встречается неприведённая надстройка, получающаяся стягиванием отдельно верхнего и нижнего основания цилиндра $X \times I$. Эта конструкция не обладает хорошими категорными свойствами и потому нами рассматриваться не будет. Легко убедиться, что стянутая надстройка гомотопически эквивалентна ей и получается путём дополнительного стягивания в точку образующей $*_X \times I \hookrightarrow X \times I$. Говоря просто о надстройке, мы будем всегда подразумевать стянутую надстройку. Из определения мы получаем сопряжения $\Sigma \dashv \Omega$, $C \dashv \Pi$. В частности, учитывая что $\Sigma S^n = S^{n+1}$,

$$[S^n, \Omega X]_{\mathscr{H}} \simeq \left[S^{n+1}, X\right]_{\mathscr{H}}$$

По индукции получаем сопряжение $\Sigma^n \dashv \Omega^n$. Коединица сопряжения даёт естественные отображения

$$X \xrightarrow{\eta_X} \Omega\Sigma X \xrightarrow{\Omega\eta_{\Sigma X}} \Omega^2\Sigma^2 X \to \dots$$

Геометрически, коединица отображает каждую точку $x \in X$ в петлю, проходящую вдоль образующей цилиндра надстройки, проходящую через точку x основания.

Пространство петель над X можно построить и иначе, как слой канонической проекции $\Pi X \xrightarrow{p} X$. Эта проекция отображает путь на X с началом в $*_X$ в его конечную точку. Для простоты полагаем пространство X линейно связным. Пространство петель есть, по определению, слой p над точкой $*_X \in X$. Его можно построить как расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & \Pi X \arrow[d, "p"] \\ * \arrow[r, "*_X"] & X \end{tikzcd}$$

Аналогично, надстройку можно построить как корасслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & CX \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Здесь i — вложение X в качестве основания конуса CX.

3 Гомотопические пределы.

Напомним некоторые определения из топологии.

Определение 6. Отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны ($f \sim g$), если существует такое $h\colon X \times I \to Y$, что $h(x,0) = f(x)$, $h(x,1) = g(x)$. Пространства X и Y гомотопически эквивалентны, если существуют такие $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$, что $f \circ g \sim 1_Y$, $g \circ f \sim 1_X$.

В категории **CGHaus**, с использованием изоморфизма $[X \times I, Y] \simeq [I, [X, Y]]$, гомотопность f и g означает существование пути между ними в $[X, Y]$. Предположим, что X и Y — клеточные пространства (или вообще любые пространства, имеющие базу топологии, состоящую из линейно связных множеств). Тогда база $[X, Y]$ состоит из линейно связных множеств, поэтому компоненты связности и линейной связности совпадают. Множество классов гомотопных отображений $X \to Y$ при этом совпадает с множеством компонент связности пространства $[X, Y]$. Обозначим $\pi_0\colon \mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ функтор, сопоставляющий топологическому пространству его множество связных компонент (пространство называется связным, если его нельзя покрыть не пересекающимися открытыми множествами). Функтор π_0 сопряжён слева к функтору $\mathcal{S}et \to \mathcal{T}op$, превращающему множество в пространство с дискретной топологией. Этот функтор мы не будем обозначать, категория будет ясна из контекста.

Упражнение. Покажите, что π_0 не имеет левого сопряжённого.

Единица сопряжения $X \to \pi_0(X)$ отображает каждую связную компоненту X в соответствующую точку $\pi_0(X)$. Отображения $f, g\colon X \to Y$ между клеточными пространствами при этом будут гомотопны тогда и только тогда, когда их образ в $\pi_0[X, Y]$ совпадает. Множество классов гомотопных отображений также обозначается $\pi(X, Y)$.

Пример. Пространство путей ΠX и конус CX гомотопически эквивалентны точке $*$.

Определение 7. Пусть $\mathcal{C}$ — категория клеточных пространств. Гомотопическая категория $Ho(\mathcal{C})$ имеет такие же объекты, как и $\mathcal{C}$, а множество морфизмов определяется по правилу

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \pi(X, Y)$$

Эта категория имеет произведения, они строятся также, как в $\mathcal{C}$. Однако, она *не имеет* ни пределов, ни копределов диаграмм общего вида.

Для изучения гомотопий методами теории категорий естественно потребовать, чтобы все наши конструкции были согласованы с отношением гомотопической эквивалентности пространств. В частности, предел диаграмм нужно определить так, чтобы он не менялся при замене пространств диаграммы на гомотопически эквивалентные или морфизмов на гомотопные. Простейший способ добиться этого — рассматривать предел диаграммы в $Ho(\mathcal{C})$. К сожалению, большинство таких пределов не существует. Доказательство этого требует большего знания топологии, пример можно найти в [8, гл. 8.8]. Мы рассмотрим более простой пример, показывающий, что пределы в гомотопической категории не обладают желаемыми свойствами.

Пример 2. При замене диаграммы на изоморфную предел также должен меняться на изоморфный. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & D^2 \\ D^2 & \end{tikzcd}$$

Здесь окружность вкладывается в оба диска как их граница. Эта диаграмма гомотопически эквивалентна диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r] \arrow[d] & * \\
*
\end{tikzcd}
$$

Так как $\pi(*, X) = \pi_0(X)$, то любой конус под этой диаграммой в точности соответствует отображению обоих точек в одну компоненту связности вершины конуса. Ясно, что тогда копредел есть $*$. В то же время желательно, чтобы копределом исходной диаграммы была S^2, так как это стандартный вид диаграммы покрытия.

Пример 3. Пространство путей ΠX гомотопически эквивалентно точке, при этом все пути равномерно стягиваются к начальной точке вдоль себя. Это значит, что предел диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & \Pi X \arrow[d, "p"] \\
* \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
$$

в гомотопической категории есть $*$. В то же время естественно требовать, чтобы прообразу точки соответствовал слой проекции p в этой точке.

Ясно, что стандартные диаграммы при этом в некотором смысле «лучше», чем гомотопически эквивалентные им. Правильной конструкцией в гомотопической категории являются не обычные пределы, а так называемые *гомотопические* пределы. Общая теория гомотопических пределов требует изложение формализма модельных категорий [5] или $(\infty, 1)$-категорий[6], и выходит далеко за рамки этого курса. Учитывая важность этой темы в современной математике (топологии, гомологической алгебре, даже математической физике), приведём без доказательства некоторые примеры.

Определение 8. Непрерывное отображение топологических пространств $E \xrightarrow{p} B$ называется *расслоением*, если для него выполнено свойство накрывающей гомотопии: для любого отображения $X \xrightarrow{f} E$ и гомотопии $X \times I \xrightarrow{h} B$ отображения $p \circ f$, существует гомотопия $X \times I \xrightarrow{\tau} E$ отображения f, индуцирующая h. В виде диаграммы это утверждение о существовании пунктирной стрелки в любой диаграмме вида

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}
$$

Двойственно определяется *корасслоение* $A \xrightarrow{i} B$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X^I \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X
\end{tikzcd}
$$

Пример 4.

1. Если $E \xrightarrow{p} B$ — накрытие или локально тривиальное расслоение, то p — расслоение.

2. Естественная проекция $\Pi X \to X$ является расслоением.

3. Если $A \xhookrightarrow{i} B$ — вложение клеточного подпространства, то i — корасслоение (*лемма Борсука*).

4. Любой гомеоморфизм является расслоением и корасслоением.

Утверждение 1. Пусть в диаграмме $X \to Z \leftarrow Y$ одна из стрелок является расслоением, тогда предел этой диаграммы в $\mathcal{T}op$ является её гомотопическим пределом. Двойственно, если одна из стрелок в диаграмме $B \leftarrow A \to C$ — корасслоение, то её копредел является гомотопическим копределом.

Утверждение 2. Любую стрелку можно заменить на гомотопически эквивалентную так, чтобы она стала расслоением. Это значит, что для любой $f\colon E \to B$ существуют гомотопические эквивалентности $E \to \tilde{E}$, $B \to \tilde{B}$, такие что в указанной диаграмме p — расслоение:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \tilde{E} \arrow[r, "p"] & \tilde{B} \end{tikzcd}$$

Аналогично, любая стрелка гомотопически эквивалентна корасслоению.

Пример 5. Пусть $E \xrightarrow{p} B$ — расслоение, причём B — линейно связное клеточное пространство. Тогда определено расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} x^*E \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "p"] \\ * \arrow[r, "x"] & B \end{tikzcd}$$

для любой точки $x \in B$. Так как p — расслоение, то пространство x^*E также является гомотопическим расслоенным произведением. По аналогии с классическими пределами, x^*E называется *слоем* p. Заметим, что он не зависит от выбора точки x, так как все получающиеся диаграммы гомотопически эквивалентны.Расслоение $E \to B$ со слоем F обозначается $F \to E \to B$ и часто называется *расслоенной тройкой.* Двойственно, *корасслоенная тройка* $A \to B \to C$ — это последовательность пространств и гомоморфизмов, такая что C — кослой отображения $A \to B$, т.е. гомотопический копредел

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ * \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Видно, что если $A \to B$ — корасслоение, то $C \simeq B/A$ (подпространство стягивается в точку).

Пример 6. Гомотопическое расслоенное произведение $* \to B \leftarrow *$ есть пространство петель ΩB, так как диаграмма гомотопически эквивалентна диаграмме $* \to B \leftarrow \Pi B$. Иначе говоря, слой (гомотопически единственного, для линейно связного B) отображения $* \to B$ есть ΩB. Аналогично, кослой канонического отображения $X \to *$ есть ΣX.

Пример 7. Пусть $A \hookrightarrow B$ — корасслоение. Опишем классический подход к построению кослоя. Рассмотрим диаграмму корасслоений

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ CA \arrow[r] & * \coprod_A^{\mathscr{H}} B \end{tikzcd}$$

Соответствующее корасслоенное произведение есть склейка B и CA по подпространству A. Стягивая в точку подклеенный конус, получим гомотопическую эквивалентность $*\coprod_A^{\mathscr{H}} B \sim B/A$.

Пример 8. Джойн $X * Y$ пространств X и Y — это гомотопический копредел

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X * Y \end{tikzcd}$$

Геометрически $X * Y = X \times Y \times I/\sim$, $(x, y, 0) \sim (x', y, 0)$, $(x, y, 1) \sim (x, y', 1)$.

4 Расслоенные последовательности.

В этом разделе всё изложение происходит в категории пространств с отмеченной точкой. Пусть $F \to E \to B$ — расслоенная тройка. Любой морфизм эквивалентен расслоению (2), поэтому имеет смысл вопрос о слое вложения $F \to E$. Рассмотрим получающуюся диаграмму:

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ F \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ * \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Для гомотопических расслоенных произведений, аналогично обычным, также верно, что из (гомотопической) универсальности двух малых квадратов в этой диаграмме следует универсальность большого прямоугольника. Но этот прямоугольник соответствует диаграмме

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Поэтому $? = \Omega B$ и мы имеем расслоенную тройку $\Omega B \to F \to E$. Продолжая по индукции, получим расслоенную тройку $\Omega E \to \Omega B \to F$ и так далее.

Определение 9. Длинная расслоенная последовательность — это последовательность пространств и гомоморфизмов

$$\dots \to F_n \to E_n \to B_n \to F_{n-1} \to E_{n-1} \to \dots$$

в которой любая последовательная тройка пространств и гомоморфизмов между ними является расслоением. Двойственно определяется корасслоенная последовательность.

Мы только что доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Для любого морфизма $E \xrightarrow{p} B$ имеется длинная расслоенная последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\Omega^2 p} \Omega^2 B \to \Omega F \to \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \to F \to E \xrightarrow{p} B$$

Двойственно, для любого морфизма $A \xrightarrow{i} B$ имеется длинная корасслоенная последовательность

$$A \xrightarrow{i} B \to C \to \Sigma A \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma B \to \Sigma C \to \Sigma^2 A \xrightarrow{\Sigma^2 i} \ldots$$

Эта теорема является универсальной формой классической длинной точной последовательности гомотопических групп из топологии. Она универсальна в том смысле, что содержит в себе всю гомотопическую информацию о соответствующем морфизме, включая то, что не выразимо как гомотопические группы и их гомоморфизмы (например, умножение Уайтхеда и скобка Тоды). Для получения классической последовательности нам потребуется дополнительное утверждение.

Определение 10. Последовательность множеств с отмеченной точкой $S \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q$ называется *точной*, если $\operatorname{Im} f = \ker g$, где $\ker g$ есть слой g над $*_Q \in Q$.

Пример 9. Последовательность групп $G \to H \xrightarrow{f} K$ называется точной, если $G = \ker f$. В этом случае она также является точной последовательностью множеств (отмеченные точки — единицы групп). Заметим, что в этом классическом определении $G \to H$ — вложение, а f — сюрьекция. Нам удобнее отказаться от этих ограничений. В этом случае последовательность групп точна тогда и только тогда, когда она точна как последовательность множеств.

Предложение 1. *Пусть $E \xrightarrow{p} B$ — расслоение со слоем $F \hookrightarrow E$. Тогда $\pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B)$ — точная последовательность. Иначе говоря, π_0 переводит расслоенные тройки пространств в точные тройки множеств.*

Используя предложение 1 и теорему о точной последовательности, легко получить длинную точную последовательность гомотопических групп. А именно, применяя π_0 к последовательности расслоения, получим последовательность множеств

$$\cdots \to \pi_0\left(\Omega^2 B\right) \to \pi_0(\Omega F) \to \pi_0(\Omega E) \to \pi_0(\Omega B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B)$$

Она точна в каждом члене (образ равен ядру), так как это верно для каждой последовательной тройки множеств. Воспользуемся изоморфизмом

$$\begin{aligned} \pi_0\left(\Omega^k X\right) &\simeq \pi_0\left[S^0, \Omega^k X\right] \\ &\simeq \pi_0\left[\Sigma^k S^0, X\right] \\ &\simeq \pi_0\left[S^k, X\right] \\ &\simeq \pi_k(X) \end{aligned}$$

Здесь S^0 — двуточечное пространство, одна точка которого отмечена. Т.к. из точности последовательности множеств следует точность последовательности групп, имеем длинную точную последовательность

$$\dots \to \pi_2 B \to \pi_1 F \to \pi_1 E \to \pi_1 B \to \pi_0 F \to \pi_0 E \to \pi_0 B$$

Заметим, что крайние три члена являются не группами, а лишь множествами с отмеченной точкой. В частности, крайний правый морфизм не обязан быть сюрьективным. Можно показать, что расслоение порождает каноническое действие H-пространства ΩB на слое $\Omega B \times F \to F$. Геометрически это соответствует преобразованиям слоя при обходе по замкнутым контурам, но на практике не просто задать явно, т.к. оно определено лишь с точностью до гомотопии. Это порождает действия $\pi_{k+1} B \times \pi_k F \to \pi_k F$, $k \geqslant 0$.

Подобным образом возникают все точные последовательности в топологии. Например, используя длинную корасслоенную последовательность, можно получить гомологическую и когомологическую точную последовательности Майера–Вьеториса.

5 Гомотопическая коммутативность.

Отношение гомотопии на пространствах морфизмов позволяет говорить не только о равенстве, но и об эквивалентности морфизмов в категории. Следуя общей философии теории категорий, правильно требовать от объектов не равенства, а лишь изоморфизма. В частности, идейно неправильно считать, что в диаграмме различные композиции морфизмов должны именно совпадать (стандартное определение коммутативности). При «правильном» подходе разумно требовать лишь изоморфизма, т.е. гомотопности различных цепочек морфизмов. Получающиеся диаграммы оказываются «коммутативными с точностью до гомотопии». Аналогично, неправильно требовать единственности канонических отображений предела функтора в функтор. Отображение может быть не единственно, но оно должно быть «одно с точностью до гомотопии».

Учитывая структуру топологических пространств на множествах морфизмов, всем этим утверждениям можно придать строгий смысл. Получающаяся конструкция называется «топологическая категория» и даёт один из подходов к построению теории гомотопий. Этот подход далеко не единственный и, скорее всего, даже не самый лучший, но имеет свои преимущества. В частности, описанные выше слабые пределы становятся гомотопическими пределами, которые мы ранее обсуждали. Не вдаваясь в подробности, приведём описание гомотопических расслоенных произведений на этом языке.

Для диаграммы $X \to Z \leftarrow Y$ гомотопический предел — это пространство, точками которого являются тройки (x, y, γ), $x \in X$, $y \in Y$, γ — путь в Z, соединяющий точки X и Y. Топология на пространстве задаётся очевидным образом, как топология подпространства в Z^I.

Эта философия приложима во многих других разделах теории категорий, когда на пространствах морфизмов есть дополнительное отношение эквивалентности. Пример: категория $\mathcal{C}at$, в которой все пространства морфизмов сами являются категориями. В таком случае слабо коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"] & \mathcal{B} \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

состоит из категории $\mathcal{D}$ с функторами проекции i, k и естественного преобразования $\alpha\colon F \circ i \to G \circ k$. Слабым расслоенным произведением при этом является в точности категория запятой $(F \downarrow G)$. Действительно, достаточно рассмотреть действие функторов на объектах и на морфизмах. На объектах данные слабой коммутативности превращаются в выбор объектов $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ и стрелки $\mu\colon Fa \to Gb$, что как раз соответствует объектам категории запятой. Аналогично легко убедиться в согласованности на морфизмах.

Всё это является лишь штрихами в картине теории n-категорий и ∞-категорий.

6 Упражнения.

1. Покажите, что замкнутое или открытое подмножество $X \in \mathbf{CGHaus}$ с топологией подпространства также принадлежит $\mathbf{CGHaus}$.

2. Покажите, что в категории $*/\mathcal{T}op$ функтор $\cdot \times X$ не имеет правого сопряжённого.

3. Опишите коединицу сопряжения между Σ и Ω.

4. Докажите, что если $A \hookrightarrow X$ — корасслоение, и пространство X хаусдорфово, то A замкнуто в X. Покажите, что если X не хаусдорфово, то A не обязано быть замкнуто.

5. Покажите, что $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ — корасслоение.

6. Покажите, что $A \hookrightarrow A \times I$ — корасслоение.

7. Докажите, что прообраз расслоения — расслоение, т.е. если $E \xrightarrow{p} B$ — расслоение, то для любого $X \xrightarrow{f} B$ проекция $f^*(p) : f^*E \to X$ также является расслоением. Сформулируйте двойственное утверждение.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "f^*(p)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

8. Докажите предложение 1.

9. **(**)** Придумайте, как получить последовательности Майера–Вьеториса для целочисленных гомологий и когомологий.

   Указание: для целочисленных гомологий верна теорема Дольда–Тома: $H_i(X, \mathbb{Z}) = \pi_i(X \otimes \mathbb{Z})$, где $\cdot \otimes \mathbb{Z}\colon \mathcal{T}op \to Ab\mathcal{T}op$ — функтор свободной топологической абелевой группы, сопряжённый слева к забывающему из топологических абелевых групп в топологические пространства. Для когомологий верна теорема о представимости: $H^i(X, \mathbb{Z}) \simeq \pi_0[X, K(\mathbb{Z}, i)]$, где представляющие объекты $K(\mathbb{Z}, n)$ — так называемые *пространства Эйленберга–Маклейна.* Можно использовать изоморфизмы $H_i(\Sigma X) \simeq H_{i-1}(X)$, $H^i(\Sigma X) = H^{i-1}(X)$. *(как доказать их?)*

Список литературы

[1] А.Г. Сергеев. *Кэлерова геометрия пространств петель.* МЦНМО, 2001. ISBN 5-94057-005-4.

[2] В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* Едиториал УРСС, 2003. ISBN 5-354-00341-5.

[3] С. Маклейн. *Категории для работающего математика.* ФИЗМАТЛИТ, 2e edition, 2004.

[4] Franics Borceux. *Handbook of categorical algebra 2. Categories and structures.* Cambridge University Press, 1994.

[5] M. Hovey. *Model categories.* AMS, 1999.

[6] J. Lurie. *Higher Topos Theory.* Princeton Univ. Press, 2009. ISBN 978-0-691-14048-3.

[7] M.C. Pedicchio and S. Solomini. On a "good"dense class of topological spaces. *J. of Pure and Appl. Algebra*, 42:287–295, 1986.

[8] J. Strom. *Modern Classical Homotopy Theory.* 2010.

Лекция 7. Обогащённые категории.

А. Ю. Фетисов

24 апреля 2012 г.

Содержание

В прошлый раз мы ввели категорию компактно порождённых топологических пространств. Её преимущество, по сравнению с обычными топологическими пространствами, в том, что она является декартово замкнутой, и любое множество отображений само приобретает естественную структуру топологического пространства. В этот раз мы рассмотрим элементы общей теории категорий с дополнительной структурой на множествах морфизмов. Оказывается, что на этот случай можно перенести фактически все структуры обычных категорий.

1 Моноидально замкнутые категории.

Определение 1. Моноидальная категория — это категория $\mathcal{V}$, снабжённая бифунктором $\otimes\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ (*тензорное произведение*), так что

1. $\otimes$ ассоциативен с точностью до изоморфизма, т. е. задан естественный изоморфизм $\alpha_{A,B,C}\colon (A\otimes B)\otimes C\simeq A\otimes(B\otimes C)$;
2. задан объект $I\in\mathcal{V}$ (*моноидальная единица*) и естественные по X изоморфизмы $l_X\colon I\otimes X\simeq X$, $r_X\colon X\otimes I\simeq X$;
3. следующие диаграммы коммутативны:

   (a) *тождество пятиугольника:*

$$\begin{tikzcd}
((W\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1"'] & (W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "\alpha"] & W\otimes(X\otimes(Y\otimes Z)) \\
(W\otimes(X\otimes Y))\otimes Z \arrow[rr, "\alpha"'] & & W\otimes((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[u, "1\otimes\alpha"']
\end{tikzcd}$$

   (b)

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "r\otimes 1"'] & & X\otimes(I\otimes Y) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

При этом оказывается[1, глава 7], что любое произведение не зависит от расстановки скобок и добавления единиц с точностью до канонического изоморфизма.

Пример 1.

1. Любая категория с конечными произведениями является моноидальной, $\otimes = \times$, $I = 1$.

2. Аналогично для любой категории с копроизведениями: $\otimes = \coprod$, $I = 0$.

3. Категория R-модулей моноидальна, для любого кольца R. При этом $\otimes$ есть тензорное произведение модулей, а $I = R$.

4. Категория неотрицательных цепных комплексов абелевых групп имеет моноидальную структуру, в которой $\otimes$ есть тотальный комплекс бикомплекса, получающегося из прямого произведения комплексов, а моноидальная единица есть комплекс с единственной ненулевой группой $\mathbb{Z}$ в нулевой компоненте.

Определение 2. Категория называется *моноидально замкнутой*, если для любого Y функтор $\cdot \otimes Y$ имеет правый сопряжённый $[Y, \cdot]$, естественный по Y, т. е. имеется естественный изоморфизм

$$\mathcal{V}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathcal{V}(X, [Y, Z])$$

Иногда для краткости мы будем писать Z^Y вместо $[Y, Z]$. Также будем говорить, что $[\cdot, \cdot]$ сопряжён справа к $\otimes$, подразумевая указанный выше изоморфизм (а не сопряжённость как функторов $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \mathcal{A}$).

Пример 2.

1. Моноидально замкнутая категория с конечными произведениями и $\otimes = \times$ называется *декартово замкнутой*. Примерами являются $\mathcal{S}et$ и **CGHaus**.

2. Моноидальная категория $\otimes = \coprod$ обычно не является моноидально замкнутой.

3. Для любого кольца R категория $R - mod$ моноидально замкнута. Множество гомоморфизмов R-модулей $\mathrm{Hom}\,(M, N)$ само имеет естественную структуру R-модуля, поэтому $[\cdot, \cdot]$ есть модуль гомоморфизмов.

4. Категория неотрицательных цепных комплексов с указанной выше структурой является моноидально замкнутой.

5. Категория $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$ является симметричной моноидально замкнутой. Она является предпорядком, соответствующее упорядоченное множество есть $\{0, 1\}$ с $0 < 1$. В ней $\otimes = \wedge$ — минимум двух элементов, а правый сопряжённый — операция импликации $\Rightarrow$, при этом $a \wedge b \leqslant c \iff a \leqslant b \Rightarrow c$.

6. Рассмотрим категорию $\mathbb{R}_+$. Это предпорядок, объектами которого являются числа $0 \leqslant x \leqslant +\infty$, а морфизм $a \to b$ существует только тогда, когда $a \geqslant b$. На ней задан бифунктор $+\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, на объектах являющийся сложением чисел. Он имеет правый сопряжённый $[\cdot, \cdot]$, заданный по правилу $[t, s] = \max\,(s - t, 0)$. Условие сопряжённости справа при этом принимает вид

$$r + t \geqslant s \iff r \geqslant [t, s]$$

Определение 3. Категория называется симметричной моноидальной, если имеется естественный изоморфизм $X \otimes Y \overset{\sigma}{\simeq} Y \otimes X$, такой что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, equal] & Y \otimes X \arrow[d, "\sigma"] \\
& X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma \otimes 1"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\sigma"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "\alpha"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "\alpha"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "1 \otimes \sigma"'] & Y \otimes (Z \otimes X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "l"'] & & X \otimes I \arrow[dl, "r"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Пример 3.

1. Все приведённые выше примеры моноидальных категорий являются симметричными.
2. Пример несимметричной категории: категория эндофункторов $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, моноидальной операцией на которой является операция композиции.

$$F \otimes G = F \circ G$$

Если $\mathcal{C}$ полна, то категория эндофункторов оказывается моноидально замкнутой. В случае $\mathcal{C} = \mathcal{S}et$ правый сопряжённый описывается особенно легко. Соответствующая формула доказана в следующей лекции. Правый сопряжённый обозначается Ran_G и задаётся на объектах по правилу

$$(\mathrm{Ran}_G T)(x) = [\mathrm{Hom}(x, G), T]$$

3. Пример категории с нетривиальным изоморфизмом симметрии σ: категория супералгебр **SAlg**. Её объекты — $\mathbb{Z}/2$-градуированные алгебры с градуированно коммутативным умножением

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba$$

Здесь $|a| = \deg a$. Тензорное произведение строится как обычно, но умножение в нём даётся формулой

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

Изоморфизм σ даётся формулой

$$a \otimes b = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$$

Коэффициент $(-1)^{|a||b|}$ единственный, совместимый с умножением в тензорном произведении и с условием суперкоммутативности.

Далее мы будем рассматривать *симметричную моноидально замкнутую категорию* $\mathcal{V}$.

2 Внутренний hom.

Бифунктор $[\cdot,\cdot]$, сопряжённый справа к $\otimes$, называют часто *внутренним hom-функтором.* Это название объясняется его свойствами, формально следующими из условий сопряжённости и аналогичными свойствам множеств отображений X^Y. Докажем некоторые из них.

Предложение 1. $[A \otimes B, C] \simeq [A, [B, C]]$*, т. е. если* $\otimes$ *и* $[\cdot,\cdot]$ *сопряжены как функторы, то они сопряжены и «в обогащённом смысле» как* $\mathcal{V}$*-функторы.*

Доказательство. Первый, третий и четвёртый изоморфизмы — по определению. Второй — изоморфизм ассоциативности для $\otimes$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(D, [A \otimes B, C]) &\overset{1}{\simeq} \mathcal{V}(D \otimes (A \otimes B), C) \\
&\overset{2}{\simeq} \mathcal{V}((D \otimes A) \otimes B, C) \\
&\overset{3}{\simeq} \mathcal{V}(D \otimes A, [B, C]) \\
&\overset{4}{\simeq} \mathcal{V}(D, [A, [B, C]])
\end{aligned}$$

□

Предложение 2. *Функтор* $[\cdot,\cdot]$ *сохраняет пределы по каждому аргументу, т. е.* $[X, \mathrm{Lim}\, F] \simeq \mathrm{Lim}\, [X, F]$, $[\mathrm{Colim}\, F, Y] \simeq \mathrm{Lim}\, [F, Y]$.

Доказательство. По второму аргументу утверждение следует из сопряжённости справа. По первому аргументу доказательство следующее:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(X, [\operatorname{Colim} F, Y]) &\overset{1}{\simeq} \mathcal{V}(X \otimes \operatorname{Colim} F, Y) \\
&\overset{2}{\simeq} \mathcal{V}((\operatorname{Colim} F) \otimes X, Y) \\
&\overset{3}{\simeq} \mathcal{V}(\operatorname{Colim}(F \otimes X), Y) \\
&\overset{4}{\simeq} \mathcal{V}(\operatorname{Colim} X \otimes F, Y) \\
&\overset{5}{\simeq} \operatorname{Lim} \mathcal{V}(X \otimes F, Y) \\
&\overset{6}{\simeq} \operatorname{Lim} \mathcal{V}(X, [F, Y]) \\
&\overset{7}{\simeq} \mathcal{V}(X, \operatorname{Lim}[F, Y])
\end{aligned}$$

Изоморфизмы 1, 6 — сопряжённость. Изоморфизмы 2, 4 следуют из симметричности $\otimes$. Изоморфизм 3 следует из сохранения копределов левым сопряжённым функтором. Изоморфизмы 5, 7 следуют из сохранения пределов представимыми функторами. □

Имеется естественное отображение (отображение оценки) $\mathrm{ev}_A \colon [A, B] \otimes A \to B$. Это коединица сопряжения $\cdot \otimes A \dashv [A, \cdot]$. В случае функтора $\times$ на $\mathcal{S}et$ или тензорного произведения модулей это отображение заключается в вычислении каждой функции из $[A, B]$ в каждой точке из A.

Имеется естественное отображение (композиция) $\circ \colon [B, C] \otimes [A, B] \to [A, C]$. Она является образом под действием изоморфизма сопряжения следующей стрелки:

$$[B, C] \otimes [A, B] \otimes A \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{ev}_A} [B, C] \otimes B \xrightarrow{\mathrm{ev}_B} C$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}_B \circ (1 \otimes \mathrm{ev}_A) &\in \mathcal{V}([B, C] \otimes [A, B] \otimes A, C) \\
\circ &\in \mathcal{V}([B, C] \otimes [A, B], [A, C])
\end{aligned}$$

Двойственной к ней относительно сопряжения $\cdot \otimes [A, B] \dashv [[A, B], \cdot]$ является стрелка $[A, \cdot] \colon [B, C] \to [[A, B], [A, C]]$, аналогично по первому сомножителю получаем стрелку $[\cdot, C] \colon [A, B] \to [[B, C], [A, C]]$. Это выражает $\mathcal{V}$-функториальность функтора $[\cdot, \cdot]$ по первому (контравариантно) и по второму (ковариантно) аргументу. Смысл становится понятен, если рассмотреть $\mathcal{V} = \mathcal{S}et$ и $[\cdot, \cdot] = \mathcal{S}et(\cdot, \cdot)$. В этом случае указанные стрелки становятся хорошо знакомыми операциями композиции и предкомпозиции морфизмов, задающими структуру бифунктора на $\mathcal{S}et(\cdot, \cdot)$.

В случае $\mathcal{V} = \mathcal{S}et$ моноидальная единица есть одноточечное множество $I = *$, при этом функтор $\mathcal{S}et(*, \cdot)$ является представлением для тождественного функтора $1 \colon \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ и имеет смысл функтора элементов объекта. Для $\mathcal{V} = \mathcal{C}at$ функтор $\mathcal{C}at(*, \cdot)$ есть функтор объектов категории, т. е. забывающий функтор $\mathcal{C}at \to \mathcal{S}et$. Аналогичный смысл имеет, скажем, функтор $\mathcal{T}op(*, \cdot)$ — это представление для забывающего функтора $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$, или функтор $\mathcal{A}b(\mathbb{Z}, \cdot)$. По аналогии, мы называем функтор $V \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}(I, \cdot) : \mathcal{V} \to \mathcal{S}et$ *функтором элементов* на категории $\mathcal{V}$, или *забывающим функтором.* Заметим, что из поэлементного совпадения объектов $A, B \in \mathcal{V}$ *не следует* их изоморфизм. Это видно уже на примере $\mathcal{T}op$, т. к. на одном и том же множестве может быть задана разная топология.

Предложение 3. $V([X, Y]) = \mathcal{V}(X, Y)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
V([X, Y]) &= \mathcal{V}(I, [X, Y]) \\
&\overset{1}{\simeq} \mathcal{V}(I \otimes X, Y) \\
&\overset{2}{\simeq} \mathcal{V}(X, Y)
\end{aligned}$$

Изоморфизм 1 следует из сопряжённости, 2 — из изоморфизма $X \simeq I \otimes X$. □

Таким образом, элементы $[X, Y]$ действительно являются морфизмами $X \to Y$. Заметим, что $[X, Y]$ несёт гораздо больше информации, чем просто множество морфизмов $\mathcal{V}(X, Y)$ и не восстанавливается по нему. Можно ввести также «обогащённый объект элементов» по правилу $\Xi(X) = [I, X]$. Это есть обогащённое представление для тождественного функтора в силу следующего утверждения:

Предложение 4. $[I, X] \simeq X$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Y, [I, X]) &\simeq \mathcal{V}(Y \otimes I, X) \\ &\simeq \mathcal{V}(Y, X) \end{aligned}$$

$\square$

Мы видим, что в отличие от теоретико-множественного функтора элементов V, функтор $\mathcal{V}$-элементов Ξ помнит всю информацию об объекте.

Полезно убедиться, что в частных примерах категорий $\mathcal{C}at$, **CGHaus**, $\mathcal{A}b$ указанные стрелки и изоморфизмы действительно имеют смысл композиций морфизмов.

3 Обогащённые категории.

В определении категории чрезвычайно большое место занимает категория множеств, т. к. все hom-функторы принимают в ней значения. Это противоречит общей философии теории категорий, т. к. с её точки зрения категория множеств является не фундаментальным объектом, а всего лишь одной из многих категорий, хотя и чрезвычайно хорошо устроенной. В частности, сама категория множеств определена не однозначно, так же, как возможны разные аксиоматики теории множеств, потенциально с различными следствиями. Тем не менее ясно, что подобные теоретико-множественные тонкости не должны влиять на наши элементарные результаты. Это проявляется в том, что от всей категории множеств нам нужна лишь незначительная часть структуры, а именно — декартова замкнутость. В более правильном подходе к теории категорий должна быть возможна любая (достаточно хорошая) категория значений для Hom-функтора. Такая теория изучается в обогащённой теории категорий. Помимо логической стройности, преимуществом является явное элементарное описание дополнительной структуры, которую возможно использовать. Именно это мы использовали в лекции 6 при построении теории гомотопий.

Подробное изложение обогащённой теории категорий можно найти в книге [2]. Обращаю внимание, что наши обозначения несколько отличаются.

Определение 4. Пусть $\mathcal{V}$ — моноидально замкнутая категория. Категория $\mathcal{C}$ называется *обогащённой над* $\mathcal{V}$ (или просто $\mathcal{V}$-*категорией*), если задан бифунктор $\mathcal{C}[\cdot,\cdot] : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{V}$, операция композиции $M\colon \mathcal{C}[B, C] \otimes \mathcal{C}[A, B] \to \mathcal{C}[A, C]$, ассоциативная с точностью до естественного изоморфизма, и для каждого объекта $A \in \mathcal{C}$ — морфизм $j_A\colon I \to \mathcal{C}[A, A]$ (*единичная стрелка*), являющаяся единицей относительно композиции M с точностью до изоморфизма. Это значит, что коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}[C,D] \otimes \mathcal{C}[B,C]) \otimes \mathcal{C}[A,B] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "M\otimes 1"'] & & \mathcal{C}[C,D] \otimes (\mathcal{C}[B,C] \otimes \mathcal{C}[A,B]) \arrow[d, "1\otimes M"] \\
\mathcal{C}[B,D] \otimes \mathcal{C}[A,B] \arrow[dr, "M"'] & & \mathcal{C}[C,D] \otimes \mathcal{C}[A,C] \arrow[dl, "M"] \\
& \mathcal{C}[A,D] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}[B,B] \otimes \mathcal{C}[A,B] \arrow[r, "M"] & \mathcal{C}[A,B] & \mathcal{C}[A,B] \otimes \mathcal{C}[A,A] \arrow[l, "M"'] \\
I \otimes \mathcal{C}[A,B] \arrow[u, "j\otimes 1"] \arrow[ur, "l"'] & & \mathcal{C}[A,B] \otimes I \arrow[u, "1\otimes j"'] \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}$$

Если ясно, о какой категории идёт речь, то мы будем для краткости писать $[A, B]$ вместо $\mathcal{C}[A, B]$.

Пример 4.

1. Любая симметричная моноидально замкнутая категория $\mathcal{V}$ является $\mathcal{V}$-категорией.

2. Категории, обогащённые над категорией абелевых групп $\mathcal{A}b$, называют *аддитивными.* Также можно рассматривать категории, обогащённые над любой категорией модулей $R\text{-}Mod$. О них также зачастую говорят как об аддитивных, молчаливо подразумевая структуру R-модулей на объектах морфизмов заданной.

3. Топологическая категория — это категория, обогащённая над **CGHaus**. Такие категории являются общим контекстом для классической теории гомотопий. Заметим, что они не моделируют некоторые тонкие гомотопические эффекты, поэтому в современной теории гомотопий их стремятся заменить понятием ∞-категорий, которые мы здесь не рассматриваем.

4. Любой предпорядок имеет естественную структуру категории, обогащённой над категорией $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$. Пустым hom-множествам соответствует объект $0 \in \mathbf{2}$, а непустым — объект $1 \in \mathbf{2}$. Наличие операций композиции сводится к стандартному факту $0 \Rightarrow 1$, $1 \Rightarrow 1$, $0 \Rightarrow 0$, $1 \not\Rightarrow 0$.

5. Категория $\mathcal{M}$, обогащённая над $\mathbb{R}_+$, является, по сути, метрическим пространством. Расстояние от точки a до точки b при этом есть $\mathcal{M}(a,b)$. Неравенство треугольника

$$\mathcal{M}(a,b) + \mathcal{M}(b,c) \geqslant \mathcal{M}(a,c)$$

при этом есть в точности условие существования композиции. В отличие от обычных метрических пространств, для таких категорий не обязательна симметричность метрики, а расстояние между различными точками может быть равно нулю. Однако для теории категорий в этом нет ничего плохого: разные объекты вполне могут быть изоморфны, что соответствует общей философии. Несимметричность метрики же несёт существенную часть информации о категории. Кроме того, большинство стандартных конструкций метрических пространств изначально дают несимметричную метрику, которую потом дополнительно симметризуют. С точки зрения теории категорий, такие пространства как минимум столь же хороши, как и классические. Они называются *метрическими пространствами Ловера* (F. W. Lawvere, [3]).

6. 2-категория — это категория $\mathcal{A}$, обогащённая над $\mathcal{C}at$. Морфизмы в объектах $\mathcal{A}(X,Y)$ называются *2-морфизмами* между X и Y, а объекты — *1-морфизмами.* Так как в $\mathcal{A}$ имеются не тождественные изоморфизмы между морфизмами, то в ней имеют смысл понятия сопряжённости 1-морфизмов и эквивалентности объектов $\mathcal{A}$, так же как и для категорий. С этой точки зрения теория сопряжённых функторов использует естественную 2-категорную структуру на $\mathcal{C}at$. 2-категории также играют роль в теории гомотопий, где 2-морфизмы интерпретируются как гомотопии между 1-морфизмами.

   Замечание 1. Можно рассмотреть также слабую версию понятия 2-категории, называемую обычно *бикатегория.* При этом требуется, чтобы диаграммы, входящие в определение обогащённой категории, были коммутативны лишь с точностью до *эквивалентности категорий*, или в некотором другом слабом смысле. Такой подход больше соответствует духу теории категорий, в соответствии с этим бикатегории играют бо́льшую роль, чем 2-категории. Этот процесс можно продолжить: рассмотреть 3-категории, т. е. категории, обогащённые над 2-категориями, и в общем случае n-категории и даже ∞-категории, как предел при $n \to \infty$. Так как при этом основную роль начинает играть коммутативность диаграмм с точностью до некоторого изоморфизма, то в некоторых источниках говоря о 2-категориях подразумевают то, что мы назвали бикатегориями.

Определение 5. $\mathcal{V}$-функтор $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между двумя $\mathcal{V}$-категориями состоит из отображения множеств объектов $T\colon \operatorname{Ob}\mathcal{A} \to \operatorname{Ob}\mathcal{B}$ и объектов морфизмов

$$T_{A,B}\colon \mathcal{A}[A,B] \to \mathcal{B}[TA,TB]$$

так что коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}[B,C] \otimes \mathcal{A}[A,B] \arrow[r, "M"] \arrow[d, "T\otimes T"'] & \mathcal{A}[A,C] \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{B}[TB,TC] \otimes \mathcal{B}[TA,TB] \arrow[r, "M"'] & \mathcal{B}[TA,TC]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}[A,B] \arrow[dd, "T"] \\
I \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \\
 & \mathcal{B}[TA,TB]
\end{tikzcd}$$

Смысл этих диаграмм становится ясен после применения к ним функтора V. На морфизмах это означает, что функтор переводит композицию морфизмов в композицию и сохраняет единичные стрелки. Ещё раз подчеркну, что условие $\mathcal{V}$-функториальности гораздо сильнее, чем просто функториальность, и можно придумать разные $\mathcal{V}$-функторы, которые будут совпадать поточечно на морфизмах. Например, для моноидально замкнутой категории $\mathcal{C}at$ любой $\mathcal{C}at$–эндофунктор состоит из функторов между различными категориями морфизмов, но два различных функтора могут совпадать на объектах категорий $\mathcal{C}at\,(A,B)$.

Пример 5.

1. $\mathcal{V}$-функтор между **2**-обогащёнными категориями — то же самое, что и функтор между соответствующими предпорядками.

2. $\mathcal{V}$-функтор между аддитивными категориями называется аддитивным функтором.

3. $\mathcal{V}$-функтор между $\mathbb{R}_+$-обогащёнными категориями соответствует отображению метрических пространств, не увеличивающему расстояние. Категория $\mathcal{V}$-функторов $\mathcal{V}^{\mathcal{M}^{op}}$ для $\mathbb{R}_+$-категорий — это категория функций, не увеличивающих расстояние. Объекты $\mathcal{V}$-естественных преобразований наделяют $\mathcal{V}^{\mathcal{M}^{op}}$ структурой метрического пространства. Соответствующая метрика есть sup–метрика на пространстве непрерывных функций:

$$\mathcal{V}^{\mathcal{M}^{op}}[F,G] = \sup_{x\in\mathcal{M}} \mathcal{V}[Fx,Gx]\,,\ F,G\colon \mathcal{M}\to\mathcal{V}$$

   Для обогащённых категорий верен обогащённый вариант леммы Йонеды. Одно из её следствий: функтор $\mathcal{M}\to\mathcal{V}^{\mathcal{M}^{op}}$, $a\mapsto[\cdot,a]$ является строго полным вложением. Для $\mathcal{V}=\mathbb{R}_+$ это значит, что любое метрическое пространство $\mathcal{M}$ изометрически вкладывается в категорию $\mathcal{V}^{\mathcal{M}^{op}}$. Более того, бифункторы $+,\times\colon\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ наделяют $\mathcal{V}^{\mathcal{M}^{op}}$ структурой полукольца (нет обратного по сложению).

   Замечание 2. Предыдущий пример иллюстрирует общий принцип двойственности между пространствами (категориями) и кольцами функций на них (категорий функторов $\mathcal{V}^{\mathcal{A}^{op}}$). Эта двойственность лежит в основе современной алгебраической геометрии. Частной её формализацией является понятие *схемы* в алгебраической геометрии. Не вдаваясь в подробности, поясним её для категорий. Категория $\hat{\mathcal{A}}=\mathcal{V}^{\mathcal{A}^{op}}$ называется *категорией $\mathcal{V}$-предпучков* на $\mathcal{A}$. Пусть на $\mathcal{V}$ есть конечные копроизведения. Тогда имеются два ассоциативных симметричных бифунктора $+\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, $\otimes\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}$. Т. к. $\otimes$ сохраняет копределы, то верна дистрибутивность $(A+B)\otimes C\simeq A\otimes C+B\otimes C$. Вообще говоря, функтор $+$ не обязан иметь обратного (сложение не обратимо), поэтому полученная структура на $\mathcal{V}$ — не кольцо, а *полукольцо*. Заметим, что все стандартные аксиомы полукольца при этом выполнены лишь с точностью до изоморфизма. Это естественное теоретико-категорное обобщение классической алгебры. $+$ и $\otimes$ задают на категориях предпучков естественную структуру полукольца с поточечными операциями. Это аналогично построению кольца функций на пространстве по кольцу чисел. Заметим, что разные категории могут иметь одну и ту же категорию предпучков. Классическим аналогом является совпадение колец непрерывных функций на метрическом пространстве и его пополнении. Соответственно, про категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, такие что $\hat{\mathcal{A}}\simeq\hat{\mathcal{B}}$, говорят, что они имеют *одинаковое пополнение по Коши*. В алгебре аналогичным понятием является *эквивалентность по Морите*. Для любой $\mathcal{V}$-категории $\mathcal{A}$ существует такая $\mathcal{V}$-категория $\bar{\mathcal{A}}$, что

$$\hat{\mathcal{A}}\simeq\hat{\mathcal{B}} \iff \bar{\mathcal{A}}\simeq\bar{\mathcal{B}}$$

   Соответственно, $\mathcal{V}$-категорию $\bar{\mathcal{A}}$ называют *пополнением по Коши* $\mathcal{V}$-категории $\mathcal{A}$. В случае $\mathcal{V}=\mathbb{R}_+$ это в точности соответствует классическому пополнению по Коши метрического пространства.

Определение 6. $\mathcal{V}$-функтор T строго полный, если все $T_{A,B}$ являются изоморфизмами.

Так же как и между обычными функторами, между $\mathcal{V}$-функторами имеются $\mathcal{V}$-естественные преобразования. Объект $\mathcal{V}$-естественных преобразований мы определим позднее. Сейчас опишем его элементы.

Определение 7. $\mathcal{V}$-естественное преобразование $\alpha\colon T \to S$ между $\mathcal{V}$-функторами — это набор морфизмов $\alpha_A\colon TA \to SA$, такой что коммутативны все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}[A,B] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{B}[TA,TB] \arrow[d, "{\mathcal{B}[TA,\alpha_B]}"] \\ \mathcal{B}[SA,SB] \arrow[r, "{\mathcal{B}[\alpha_A,SB]}"'] & \mathcal{B}[TA,SB] \end{tikzcd}$$

Здесь $\mathcal{A}[A,B]$ есть внутренний Hom в категории $\mathcal{A}$, аналогично для $\mathcal{B}$. Согласно 3, мы отождествляем стрелки $TB \xrightarrow{\alpha_B} SB$ и $\alpha_B\colon I \to \mathcal{B}[TB,SB]$. Стрелки $\mathcal{B}[TA,\alpha_B]$ и $\mathcal{B}[\alpha_A,SB]$ задаются как композиции

$$\mathcal{B}[TA,\alpha_B] : I \xrightarrow{\alpha_B} \mathcal{B}[TB,SB] \xrightarrow{\mathcal{B}[TA,\cdot]} \mathcal{B}[\mathcal{B}[TA,TB],\mathcal{B}[TA,SB]]$$

$$\mathcal{B}[\alpha_A,SB] : I \xrightarrow{\alpha_A} \mathcal{B}[TA,SA] \xrightarrow{\mathcal{B}[\cdot,SB]} \mathcal{B}[\mathcal{B}[SA,SB],\mathcal{B}[TA,SB]]$$

где $\mathcal{B}[TA,\cdot]$ и $\mathcal{B}[\cdot,SB]$ описаны ранее2. Для прояснения смысла определения рассмотрим диаграмму поэлементно. В этом случае имеем диаграмму обычных функторов

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{B}(TA,TB) \arrow[d, "{\mathcal{B}(TA,\alpha_B)}"] \\ \mathcal{B}(SA,SB) \arrow[r, "{\mathcal{B}(\alpha_A,SB)}"'] & \mathcal{B}(TA,SB) \end{tikzcd}$$

Коммутативность этой диаграммы эквивалентна коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Tf"'] & SA \arrow[d, "Sf"] \\ TB \arrow[r, "\alpha_B"] & SB \end{tikzcd}$$

Действительно, композиция верхних стрелок переводит элемент $f \in \mathcal{A}(A,B)$ в элемент $\alpha_B \circ Tf \in \mathcal{B}(TA,SB)$, а нижних — в элемент $Sf \circ \alpha_A \in \mathcal{B}(TA,SB)$.

Контравариантные функторы вводятся стандартным образом, как функторы на двойственной категории.

Определение 8. $\mathcal{V}$-категория $\mathcal{A}^{op}$, двойственная к $\mathcal{V}$-категории $\mathcal{A}$, определяется как категория с теми же объектами и пространствами морфизмов

$$\mathcal{A}^{op}[X,Y] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}[Y,X]$$

Для рассмотрения функторов от нескольких переменных нам потребуется определить произведение $\mathcal{V}$-категорий, подобно тому, как обычный функтор от двух переменных есть функтор на произведении категорий $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. В контексте $\mathcal{V}$-категорий определение должно быть сформулировано в терминах моноидальной структуры на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Определение 9. Произведение $\mathcal{V}$-категорий $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ — это $\mathcal{V}$-категория, множеством объектов которой является $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}) \otimes (\mathrm{Ob}\,\mathcal{B})$, а hom-объекты даются по правилу

$$[(A,B),(A',B')] = [A,A'] \otimes [B,B']$$

Единичный морфизм $I \xrightarrow{j_{(A,B)}} [(A,B),(A,B)]$ есть композиция $I \stackrel{r}{\simeq} I \otimes I \xrightarrow{j_A \otimes j_B} [A,A] \otimes [B,B]$.

Если категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ симметричны, то их произведение тоже симметрично. Стандартные бифункторы $\otimes$ и $[\cdot,\cdot]$ на обогащённых категориях являются $\mathcal{V}$-бифункторами. Следующее предложение показывает, что $\otimes$ является $\mathcal{V}$-бифунктором на категории $\mathcal{A}$.

Предложение 5. *Имеется естественное отображение*

$$[X,Y]\otimes[X',Y']\to[X\otimes X',Y\otimes Y']$$

Под действием изоморфизма сопряжения это есть стрелка

$$([X,Y]\otimes[X',Y'])\otimes[X\otimes X']\simeq([X,Y]\otimes X)\otimes([X',Y']\otimes X')\xrightarrow{\mathrm{ev}_X\otimes\mathrm{ev}_{X'}}Y\otimes Y'$$

Для $[\cdot,\cdot]$ доказательство аналогично, с использованием определённых ранее 2 морфизмов $[A,\cdot]$ и $[\cdot,A]$.

4 Необычная естественность.

Стандартное понятие естественного преобразования $\mu\colon F\to G,\ F,G\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ охватывает не все интересные случаи. Оно позволяет рассматривать ковариантные функторы ($\mathcal{A}\to\mathcal{B}$) и контравариантные функторы ($\mathcal{A}^{op}\to\mathcal{B}$), но плохо подходит для работы с функторами, имеющими как ковариантные, так и контравариантные переменные. Например, хотелось бы, чтобы единица и коединица сопряжения всегда были естественными по всем входящим в определение переменным. Для сопряжения $\cdot\otimes A\dashv[A,\cdot]$ это выражалось бы в естественности отображения оценки $\mathrm{ev}\colon\ [A,B]\otimes A\to B$ по переменным A и B. Обычное понятие естественности не позволяет сделать подобное утверждение. Для этого нам потребуется новое определение. В книге [2] это называется *необычной (extraordinary) естественностью*. В книге [1] аналогом является *диагональная естественность*. Формально это более общее понятие, однако на практике эта дополнительная общность обычно не окупается.

Пусть $F\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ — $\mathcal{V}$-функтор. Определим действие на hom-объектах соответствующих $\mathcal{V}$-функторов при фиксированных аргументах как следующие композиции:

$$T(A,\cdot):\ [B,B']\simeq I\otimes[B,B']\xrightarrow{j_A\otimes 1}[A,A]\otimes[B,B']\xrightarrow{T}[T(A,B),T(A,B')]$$

$$T(\cdot,B):\ [A,A']\simeq[B,B']\otimes I\xrightarrow{1\otimes j_B}[A,A']\otimes[B,B]\xrightarrow{T}[T(A,B),T(A',B)]$$

Определение 10. Пусть $K\in\mathcal{B}$, $T\colon\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ — бифунктор. Естественное преобразование из K в T — это семейство морфизмов $\beta_A\colon K\to T(A,A)$, такое что коммутативны все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}[A,B] \arrow[r, "T(A,\cdot)"] \arrow[d, "T(\cdot,B)"'] & \mathcal{B}[T(A,A),T(A,B)] \arrow[d, "\mathcal{B}[\beta_A,1]"] \\
\mathcal{B}[T(B,B),T(A,B)] \arrow[r, "\mathcal{B}[\beta_B,1]"'] & \mathcal{B}[K,T(A,B)]
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Двойственно, естественное преобразование из T в K — это семейство морфизмов $\gamma_A\colon T(A,A)\to K$, делающее коммутативной все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}[A,B] \arrow[r, "T(B,\cdot)"] \arrow[d, "T(A,\cdot)"'] & \mathcal{B}[T(B,A),T(B,B)] \arrow[d, "\mathcal{B}[1,\gamma_B]"] \\
\mathcal{B}[T(B,A),T(A,A)] \arrow[r, "\mathcal{B}[1,\gamma_A]"'] & \mathcal{B}[T(B,A),K]
\end{tikzcd}$$

Для сравнения, напомним диаграмму для естественного преобразования $\alpha\colon P\to S$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}[A,B] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "S"'] & \mathcal{B}[PA,PB] \arrow[d, "\mathcal{B}[PA,\alpha_B]"] \\
\mathcal{B}[SA,SB] \arrow[r, "\mathcal{B}[\alpha_A,SB]"'] & \mathcal{B}[PA,SB]
\end{tikzcd}$$

Видно, что диаграмма 4.1 формально аналогична. Её можно интерпретировать как «семейство естественных преобразований из ковариантного функтора $T(A,\cdot)$ в контравариантный функтор $T(\cdot,B)$, естественное по A и B». Особо простой вид она принимает в случае $\mathcal{B}=\mathcal{V}$. Используя изоморфизм hom-множеств

$$\mathcal{V}(X,[Y,Z]) \simeq \mathcal{V}(X\otimes Y,Z) \simeq \mathcal{V}(Y,[X,Z])$$

и проводя стандартные рассуждения с композициями морфизмов, можно привести диаграмму естественного преобразования из K в T к эквивалентному виду

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "\beta_B"'] & T(A,A) \arrow[d, "\rho_{AB}"] \\
T(B,B) \arrow[r, "\sigma_{AB}"'] & {[\mathcal{A}(A,B), T(A,B)]}
\end{tikzcd}$$

Здесь ρ_{AB} — образ морфизма $T(A,\cdot)\colon \mathcal{A}(A,B)\to[T(A,A),T(A,B)]$ под действием изоморфизма

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}(A,B),[T(A,A),T(A,B)]) \simeq \mathcal{V}(T(A,A),[\mathcal{A}(A,B),T(A,B)])$$

Аналогично, σ_{AB} — образ морфизма $T(\cdot,B)\colon \mathcal{A}(A,B)\to[T(B,B),T(A,B)]$. Именно эта диаграмма будет использоваться нами в дальнейшем.

Замечание 3. Произвольный функтор от нескольких переменных можно представить, как функтор $T\colon \mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}^{op}\to\mathcal{D}$. Здесь в категории $\mathcal{A}$ лежат переменные, входящие одновременно ковариантно и контравариантно, в категориях $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}^{op}$ — только ковариантные и контравариантные переменные, соответственно. При этом произвольную композицию естественных и необычно естественных преобразований естественно рассматривать как одно преобразование, естественное в обобщённом смысле. *Именно это мы будем иметь ввиду, говоря о естественных преобразованиях в дальнейшем.*

Необычная естественность является содержательным понятием не только для обогащённых, но и для обычных категорий. Гораздо более краткое введение этого понятия см. в [1, гл. 9]. Я изложил его в более общем контексте с целью элементарного введения в теорию обогащённых категорий. Кроме того, при использованном выше формализме рассмотрение обогащённых категорий ничуть не сложнее, чем обычных, а его применение проясняет структуру категорий, поэтому нет причин дополнительно ограничивать себя.

Заметим, что определение естественности, данное выше, явно позволяет уменьшение и увеличение числа переменных в функторе. Приведём некоторые примеры.

Пример 6.

1. Любое естественное преобразование естественно и в новом смысле.

2. Все канонические морфизмы, входящие в определение обогащённых категорий, естественны по всем переменным. Например, естественны следующие морфизмы:

$$\alpha_{A,B,C}\colon\ (A\otimes B)\otimes C\simeq A\otimes(B\otimes C)$$

$$\mathcal{V}(X\otimes Y,Z)\simeq\mathcal{V}(X,[Y,Z])$$

$$\mathrm{ev}\colon\ [A,B]\otimes A\to B$$

$$\circ\colon\ [B,C]\otimes[A,B]\to[A,C]$$

$$[A,\cdot]:\ [B,C]\to[[A,B],[A,C]]$$

$$j_A\colon I\to\mathcal{A}[A,A]$$

3. Семейство морфизмов $\beta_A\colon I\to\mathcal{B}(TA,SA)$ естественно тогда и только тогда, когда соответствующие стрелки $\beta_A\colon TA\to SA$ определяют естественное преобразование $\beta\colon T\to S$.

4. T является $\mathcal{V}$-функтором тогда и только тогда, когда соответствующие стрелки $\mathcal{A}[A,B]\xrightarrow{T}\mathcal{B}[TA,TB]$ определяют естественное преобразование.

5. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — категории. Ковариантный функтор $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ можно рассматривать как бифунктор $F: \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$, постоянный, по контравариантной переменной. Если существует предел F, то каноническое отображение $\operatorname{Lim} F \to F$ является естественным преобразованием из константы $\operatorname{Lim} F$ в бифунктор F. Двойственное утверждение для копредела также верно. Обобщением этой конструкции на бифунктор, существенно зависящих от обоих переменных, называется *концом функтора* и будет рассмотрено в следующей лекции.

Список литературы

[1] С. Маклейн. *Категории для работающего математика.* ФИЗМАТЛИТ, 2e edition, 2004.

[2] G.M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory.* Reprints in Theory and Applications of Categories, 2005.

[3] F.W. Lawvere. Metric spaces, generalized logic, and closed categories. *Reprints in TAC*, 1:1–37, 2002.

Лекция 8. Концы функторов и расширения Кана.

А. Ю. Фетисов

30 апреля 2012 г.

Содержание

В прошлый раз мы рассмотрели элементы общей теории обогащённых категорий. В этот раз мы рассмотрим ряд конструкций, играющих ключевую роль в обогащённой теории. Они также оказываются важны и нетривиальны в контексте обычных категорий, поэтому для упрощения изложения мы будем рассматривать $\mathcal{S}et$-категории. Большинство результатов переносятся на случай любой $\mathcal{V}$-категории.

1 Концы функторов.

Определение 1. Конец функтора $T\colon \mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ — это пара $\left(\int_A T(A,A), \xi_A\right)$, где $\int_A T(A,A)\in\mathcal{B}$ — объект, а $\xi_A\colon \int_A T(A,A)\to T$ — универсальное естественное преобразование из константы в функтор. Иначе говоря, имеется естественный изоморфизм

$$\mathcal{B}\left(X, \int_A T(A,A)\right)\simeq \mathrm{Nat}(X,T)$$

где в правой части стоит функтор множества естественных преобразований из константы X в T. Двойственно, коконец $\left(\int^A T(A,A), \phi_A\right)$ функтора определяется как представляющий объект

$$\mathcal{B}\left(\int^{A} T\left(A,A\right),X\right) \simeq \mathrm{Nat}\left(T,X\right)$$

Как обычно, будем говорить, что $\int_A T\left(A,A\right)$ — конец T, подразумевая каноническое естественное преобразование заданным. Сопоставление функтору его конца является функториальным, образ естественного преобразования $\gamma\colon T \to S$ под действием этого отображения обозначается

$$\int_A \gamma\colon \int_A T\left(A,A\right) \to \int_A S\left(A,A\right)$$

Функториальность означает, что для любого $\theta\colon R \to T$ имеется изоморфизм

$$\int_A \gamma \circ \int_A \theta \simeq \int_A \gamma \circ \theta$$

Нас будут интересовать в основном концы функторов $T\colon \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$. В этом случае естественное преобразование из константы в функтор принимает особенно простой вид: это набор отображений $\beta_A\colon K \to T\left(A,A\right)$, таких что коммутативны все квадраты вида

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "\beta_B"'] & T\left(A,A\right) \arrow[d, "\rho_{AB}"] \\ T\left(B,B\right) \arrow[r, "\sigma_{AB}"'] & \left[\mathcal{A}\left(A,B\right), T\left(A,B\right)\right] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Здесь ρ_{AB} — образ морфизма $T\left(A,\cdot\right) : \mathcal{A}\left(A,B\right) \to \left[T\left(A,A\right), T\left(A,B\right)\right]$ под действием изоморфизма

$$\mathcal{S}et\left(\mathcal{A}\left(A,B\right), \left[T\left(A,A\right), T\left(A,B\right)\right]\right) \simeq \mathcal{S}et\left(T\left(A,A\right), \left[\mathcal{A}\left(A,B\right), T\left(A,B\right)\right]\right)$$

Аналогично, σ_{AB} — образ морфизма $T\left(\cdot,B\right) : \mathcal{A}\left(A,B\right) \to \left[T\left(B,B\right), T\left(A,B\right)\right]$. Отсюда видно, что конец функтора можно представить как предел некоторой диаграммы в $\mathcal{S}et$. А именно, это уравнитель двух канонических стрелок

$$\begin{tikzcd} \prod_A T\left(A,A\right) \arrow[r, shift left, "\prod \sigma_{AB}"] \arrow[r, shift right, "\prod \rho_{AB}"'] & \prod_{A,B} \left[\mathcal{A}\left(A,B\right), T\left(A,B\right)\right] \end{tikzcd}$$

Двойственно, коконец функтора — копредел некоторой диаграммы. Отсюда следуют следующие утверждения:

Предложение 1. *Представимые функторы сохраняют концы:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\left(X, \int_A T(A,A)\right) &\simeq \int_A \mathrm{Hom}\left(X, T(A,A)\right)\\ \mathrm{Hom}\left(\int^A T(A,A), X\right) &\simeq \int_A \mathrm{Hom}\left(T(A,A), X\right)\end{aligned}$$

Предложение 2. *Верна теорема о концах с параметрами: если дан функтор $T\colon \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{S}et$, то определён функтор $\int_A T(A,A,\cdot)$, задаваемый на объектах по правилу*

$$\left[\int_A T(A,A,\cdot)\right](B) = \int_A T(A,A,B)$$

причём это сопоставление естественно по T.

Предложение 3. *(*формула Фубини*) Пусть для любой пары $(A,A') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ существует конец $\int_B T(A,A',B,B)$. Тогда существует и двойной конец $\int_{(A;B)} T(A,A,B,B)$ и они равны.*

$$\int_A \int_B T(A,A,B,B) \simeq \int_{(A;B)} T(A,A,B,B)$$

Здесь в правой части рассматривается конец бифунктора $T\colon\ (\mathcal{A}\times\mathcal{B})^{op} \times (\mathcal{A}\times\mathcal{B}) \to \mathcal{S}et$, с использованием естественного изоморфизма

$$\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \times \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{B} \simeq (\mathcal{A}\times\mathcal{B})^{op} \times (\mathcal{A}\times\mathcal{B})$$

В частности, если для любых пар (A,A'), (B,B') существуют концы $\int_B T(A,A',B,B)$, $\int_A T(A,A,B,B')$, то они равны.

Предложение 4. *Концы коммутируют с пределами:*

$$\operatorname*{Lim}_B \int_A T(A,A,B) \simeq \int_A \operatorname*{Lim}_B T(A,A,B)$$

при условии что в правой части $\operatorname*{Lim}_B T(A,A',B)$ существует для любых пар (A,A').

Предложение 5. *Пределы — частный случай концов. А именно, предел функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$ — это конец функтора $\tilde{F}\colon \mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A} \to \mathcal{S}et$, где $\tilde{F}(A,A') = F(A')$. Это следует из определения естественного преобразования.*

Ключевым утверждением о концах является формула концов для множества естественных преобразований. Мы уже доказывали её в лекции 4. Для наглядности докажем её ещё раз, в этот раз опираясь на теорию необычных естественных преобразований.

Теорема 1. *(формула концов)*

$$\mathrm{Nat}\,(F,G) \simeq \int_a \mathrm{Hom}\,(Fa, Ga)$$

Доказательство. Сначала покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между естественными преобразованиями $* \xrightarrow{\lambda_a} \mathrm{Hom}\,(Fa, Ga)$ из одноточечного множества и множеством $\mathrm{Nat}\,(F,G)$. Действительно, любое такое преобразование соответствует выбору набора стрелок $\lambda_a \colon Fa \to Ga$, так что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "\lambda_b"'] & \mathrm{Hom}\,(Fa, Ga) \arrow[d, "\rho_{ab}"] \\
\mathrm{Hom}\,(Fb, Gb) \arrow[r, "\sigma_{ab}"'] & \left[\mathcal{A}\,(a,b)\,, \mathrm{Hom}\,(Fa, Gb)\right]
\end{tikzcd}$$

Композиция верхних стрелок даёт отображение $\mathcal{A}\,(a,b) \to \mathrm{Hom}\,(Fa, Gb)$, при котором стрелка $f \in \mathcal{A}\,(a,b)$ переходит в композицию $Fa \xrightarrow{\lambda_A} Ga \xrightarrow{Gf} Gb$. Аналогично, композиция нижних стрелок соответствует отображению $f \mapsto \lambda_b \circ Ff$, а коммутативность указанной выше диаграммы в точности соответствует коммутативности стандартной диаграммы естественного преобразования

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, "\lambda_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

Поэтому $\mathrm{Nat}\,(F,G) \simeq \mathrm{Nat}\,(*, \mathrm{Hom}\,(F,G))$. По определению конца функтора, получаем что

$$\mathrm{Nat}\,(F,G) \simeq \mathcal{S}et\left(*, \int_a \mathrm{Hom}\,(Fa, Ga)\right) \simeq \int_a \mathrm{Hom}\,(Fa, Ga)$$

$\square$

В теории обогащённых категорий эта формула принимается как определение объекта $\mathcal{V}$-естественных преобразований.

Теперь введём одну полезную операцию на функторах, обобщающую тензорное произведение модулей над кольцом.

Определение 2. Тензорное произведение функторов $F \in [\mathcal{A}, \mathcal{S}et]$ и $G \in [\mathcal{A}^{op}, \mathcal{S}et]$ — это множество $F \otimes G = \int^A FA \times GA$.

Предложение 6. (лемма ко-Йонеды) *Имеется естественный изоморфизм*

$$F(B) \simeq F \otimes \operatorname{Hom}(\cdot, B)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
[F, G] &\overset{1}{\simeq} \int_A \operatorname{Hom}(FA, GA) \\
&\overset{2}{\simeq} \int_A \operatorname{Hom}(FA, [\operatorname{Hom}(A, \cdot), G]) \\
&\overset{3}{\simeq} \int_A \operatorname{Hom}\left(FA, \int_B \mathcal{S}et(\operatorname{Hom}(A, B), GB)\right) \\
&\overset{4}{\simeq} \int_A \int_B \operatorname{Hom}(FA, \mathcal{S}et(\operatorname{Hom}(A, B), GB)) \\
&\overset{5}{\simeq} \int_B \int_A \operatorname{Hom}(FA, \mathcal{S}et(\operatorname{Hom}(A, B), GB)) \\
&\overset{6}{\simeq} \int_B \int_A \operatorname{Hom}(FA \times \operatorname{Hom}(A, B), GB) \\
&\overset{7}{\simeq} \int_B \operatorname{Hom}\left(\int^A FA \times \operatorname{Hom}(A, B), GB\right) \\
&\overset{8}{\simeq} \int_B \operatorname{Hom}(F \otimes \operatorname{Hom}(\cdot, B), GB)
\end{aligned}$$

1, 3 — формула концов. 2 — лемма Йонеды. 4, 7 — сохранение концов представимыми функторами. 5 — теорема Фубини. 6 — декартова замкнутость $\mathcal{S}et$. 8 — по определению. Последняя формула есть множество естественных преобразований из функтора $B \mapsto F \otimes \operatorname{Hom}(\cdot, B)$ в G. По лемме Йонеды, имеем изоморфизм

$$F(B) \simeq F \otimes \operatorname{Hom}(\cdot, B)$$

□

Предложение 7. *Имеются естественные изоморфизмы ($F, H \colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$, $G \colon \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}et$)*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}(F \otimes G, X) &\simeq [F, \mathcal{S}et(G, X)] \\
\operatorname{Hom}(X, [F, H]) &\simeq [X \times F, H]
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}\,(F\otimes G, X) &\simeq \mathrm{Hom}\left(\int^A FA\times GA, X\right)\\
&\simeq \int_A \mathrm{Hom}\,(FA\times GA, X)\\
&\simeq \int_A \mathrm{Hom}\,(FA, \mathcal{S}et\,(GA, X))\\
&\simeq [F, \mathcal{S}et\,(G, X)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}\,(X, [F, H]) &\simeq \mathrm{Hom}\left(X, \int_A \mathcal{S}et\,(FA, HA)\right)\\
&\simeq \int_A \mathrm{Hom}\,(X, \mathcal{S}et\,(FA, HA))\\
&\simeq \int_A \mathrm{Hom}\,(X\times FA, HA)\\
&\simeq [X\times F, H]
\end{aligned}$$

□

Вывод 1. *Тензорное произведение функторов сохраняет пределы по каждому аргументу.*

Эта теорема доказывается аналогично приведённым выше. Сформулируем её без доказательства.

Теорема 2. *(сопряжение с обратной стороны)* $F\dashv G \iff F_*\dashv G_* \iff G^*\dashv F^*$. *Здесь* $F_*\colon S\mapsto FS$, $F^*\colon S\mapsto SF$.

Первая равносильность очевидна из определения и формулы концов, для доказательства справа налево нужно рассматривать функторы из одноточечной категории, соответствующие выбору объектов. Вторая равносильность слева направо доказывается через формулы концов и лемму Йонеды, а справа налево — т. к. из изоморфизма

$$[TG, S]\simeq [T, SF]$$

следуют изоморфизмы

$$\begin{aligned}
[G, G] &\simeq [1, GF]\\
[F, F] &\simeq [FG, 1]
\end{aligned}$$

Единичным стрелкам слева соответствуют стрелки справа, играющие роль единицы и коединицы сопряжения. Для доказательства сопряжения после этого нужно доказать лишь выполнение треугольных тождеств.

2 Расширения Кана.

Определение 3. Пусть $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Обозначим через $K^*\colon \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ функтор $F \mapsto F \circ K$. Его левый сопряжённый называется *левым расширением Кана* по функтору K и обозначается Lan_K, а правй сопряжённый — *правым расширением Кана* по K и обозначается Ran_K. То есть, имеются изоморфизмы в категориях функторов

$$\begin{aligned} [T, SK] &\simeq [\mathrm{Lan}_K T, S] \\ [HK, M] &\simeq [H, \mathrm{Ran}_K M] \end{aligned}$$

Понятия левого и правого расширения Кана являются универсальными решениями для задачи о продолжении функтора $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ до функтора $K_*F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. В общем случае эта задача не имеет решения, в том смысле что $(K_*F)\circ K \neq F$, но можно найти наилучшие приближения к такому функтору. Именно они и называются расширениями Кана. Для произвольных категорий $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ расширения Кана не обязаны существовать, но в большинстве случаев они существуют. Для доказательства нам потребуется следующая формула, имеющая и самостоятельное значение.

Теорема 3. *(формула концов и коконцов для расширений Кана) Пусть $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$, $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — произвольные функторы. Тогда*

$$\begin{aligned} \mathrm{Lan}_K T\,(X) &\simeq \int^c Tc \times \mathrm{Hom}\,(Kc, X) \\ \mathrm{Ran}_K T\,(X) &\simeq \int_c \mathcal{S}et\,(\mathrm{Hom}\,(X, Kc)\,, Tc) \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем формулу для левого расширения Кана, для правого верно двойственное доказательство.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Lan}_K T\,(X)\,, Y) &\simeq \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Lan}_K T \otimes \mathrm{Hom}\,(\cdot, X)\,, Y) \\ &\simeq [\mathrm{Lan}_K T, \mathcal{S}et\,(\mathrm{Hom}\,(\cdot, X)\,, Y)] \\ &\simeq [T, \mathcal{S}et\,(\mathrm{Hom}\,(K, X)\,, Y)] \\ &\simeq \int_c \mathrm{Hom}\,(Tc, \mathcal{S}et\,(\mathrm{Hom}\,(Kc, X)\,, Y)) \\ &\simeq \int_c \mathrm{Hom}\,(Tc \times \mathrm{Hom}\,(Kc, X)\,, Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}\left(\int^c Tc \times \mathrm{Hom}\,(Kc, X)\,, Y\right) \end{aligned}$$

□

В частном случае $K = 1$ верно, что $\mathrm{Lan}_1 F \simeq F$. Из формулы коконцов получаем снова лемму ко-Йонеды. Аналогично, $\mathrm{Ran}_1 F \simeq F$ даёт лемму Йонеды. Для исследования существования расширений Кана удобно в явной форме выразить расширение Кана как некоторый предел.

Теорема 4. *Пусть $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$, $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — произвольные функторы. Тогда*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ran}_K T(c) &\simeq \mathrm{Lim}\left((c\downarrow K) \xrightarrow{Q} \mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{S}et\right)\\ \mathrm{Lan}_K T(c) &\simeq \mathrm{Colim}\left((K\downarrow c) \xrightarrow{Q} \mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{S}et\right)\end{aligned}$$

Доказательство. Для удобства проведём доказательство для правого расширения Кана, для левого утверждение верно по двойственности. Из формулы концов имеем равенство

$$\mathrm{Ran}_K T(c) \simeq [\mathrm{Hom}(c, K), T]$$

Заметим, что конус $* \to TQ$ состоит из выбора для каждого $f\colon c \to Ka$ элемента из Ta, т. е. отображения $\mathrm{Hom}(c, Ka) \to Ta$, естественного по a в силу естественности по объектам категории запятой. Отсюда

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}\, TQ &\simeq \mathcal{S}et(*, \mathrm{Lim}\, TQ)\\ &\simeq \mathcal{S}et(*, [\mathrm{Hom}(c, K), T])\\ &\simeq [\mathrm{Hom}(c, K), T]\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Вывод 2. *Если категория $\mathcal{A}$ — малая, то любой функтор $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$ имеет правое и левое расширение Кана по любому функтору $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (если все hom-множества в $\mathcal{B}$ малы).*

Мы хотим, чтобы аналогичные формулы были верны для любых расширений Кана. Ясно, что все такие расширения Кана сохраняются представимыми функторами, поэтому расширение Кана произвольного функтора определим следующим образом

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(c, \mathrm{Ran}_K T) &= \mathrm{Ran}_K \mathcal{C}(c, T)\\ \mathcal{C}(\mathrm{Lan}_K T, c) &= \mathrm{Ran}_K \mathcal{C}(T, c)\end{aligned}$$

Такие расширения Кана называются также *поточечными*. Верно и обратное утверждение: любое поточечное расширение Кана представляется по формулам теоремы 4. На практике все расширения Кана являются поточечными, поэтому никаких других мы не будем рассматривать. Из сохранения пределов представимыми функторами получаем

Вывод 3. *Если категория $\mathcal{A}$ — малая, а категория $\mathcal{C}$ полна, то любой функтор $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ имеет правое расширение Кана по любому функтору $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (если все hom-множества в $\mathcal{B}$ малы). Двойственно, если $\mathcal{C}$ кополна, то существуют все левые расширения Кана.*

Чрезвычайно удобно оказывается использовать формализм концов и коконцов для произвольных функторов $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Так как в общем случае $\mathcal{B}$ не является декартово замкнутой, то необходимо рассматривать композицию $\mathcal{B}(B, F)$ для всевозможных B.

В частном, но важном случае расширения Кана являются в буквальном смысле продолжениями функторов на бо́льшую категорию.

Теорема 5. *Пусть $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — вложение полной подкатегории, тогда $(\mathrm{Lan}_K T) \circ K \simeq T$, $(\mathrm{Ran}_K T) \circ K \simeq T$ для любого функтора T.*

Доказательство. Докажем утверждение для функторов $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$. В этом случае

$$\begin{aligned}[(\mathrm{Lan}_K T) \circ K](X) &\simeq (\mathrm{Lan}_K T)(KX) \\ &\simeq \int^c Tc \times \mathrm{Hom}(Kc, KX)\end{aligned}$$

Для вложения полной подкатегории $\mathrm{Hom}(Kc, KX) \simeq \mathrm{Hom}(c, X)$. Используя лемму ко-Йонеды, получаем искомое равенство.

Для функтора $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ получаем, что при любом $c \in \mathcal{C}$ верно равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(c, T) &\simeq (\mathrm{Lan}_K \mathrm{Hom}(c, T)) \circ K \\ &\simeq \mathrm{Hom}(c, \mathrm{Lan}_K T) \circ K \\ &\simeq \mathrm{Hom}(c, (\mathrm{Lan}_K T) \circ K)\end{aligned}$$

Используя лемму Йонеды, получаем искомый изоморфизм. $\square$

Из теоремы 2 получаем следующее описание сопряжённых функторов.

Теорема 6. *Функтор G имеет левый сопряжённый тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ran}_G 1$ существует и сохраняется под действием G (т. е. $G(\mathrm{Ran}_G 1) \simeq \mathrm{Ran}_G G$), при этом левый сопряжённый равен $\mathrm{Ran}_G 1$.*

Доказательство. Если $F \dashv G$, то из формулы $[TG, S] \simeq [T, SF]$ при $S = 1$ получаем $\mathrm{Ran}_G 1 = F$ по определению. Сохранение расширения следует из случая $S = G$. Обратно, если $\mathrm{Ran}_G 1$ существует и сохраняется, то формулы из наброска доказательства теоремы 2 определяют единицу и коединицу сопряжения. $\square$

Пример 1. $\mathrm{Lim}\, F \simeq \mathrm{Ran}_K F$, где $K\colon \mathcal{A} \to *$ — морфизм в конечный объект $\mathcal{C}at$.

Теорема 7. *Любой функтор $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et$ является каноническим копределом представимых функторов.*

Доказательство. Воспользуемся леммой ко-Йонеды:

$$F(X) \simeq \int^c Fc \times \mathrm{Hom}(c, X)$$

Множество Fc является копроизведением своих элементов, а $\times$ сохраняет копроизведения, поэтому

$$F(X) \simeq \int^c \coprod_{Fc} \mathrm{Hom}(c, X)$$

$\int^c \coprod_{Fc}$ есть копредел некоторой диаграммы Colim_J. Так как копределы функторов вычисляются поточечно, то

$$\begin{array}{rcl} F(X) & \simeq & \mathrm{Colim}_J \mathrm{Hom}(c_j, X) \\ F & \simeq & \mathrm{Colim}_J \mathrm{Hom}(c_j, \cdot) \end{array}$$

□

Этот факт формулируют также так: вложение Йонеды $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ является коплотным.

Определение 4. Функтор $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется плотным, если $\mathrm{Lan}_K K \simeq 1$. Двойственно, K — коплотный, если $\mathrm{Ran}_K K \simeq 1$.

Упражнение 1. Докажите, что вложение Йонеды коплотно.

3 Упражнения.

1. (*двойственность Избелла*) Пусть $\mathcal{V}$ — полная и кополная симметричная моноидально замкнутая категория, $\mathcal{C}$ — некоторая $\mathcal{V}$-категория. Покажите, что функтор $\mathcal{O}\colon [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{V}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{V}]^{op}$ имеет правый $\mathcal{V}$-сопряжённый, обозначаемый Spec.

   $$\mathcal{O}(X) : c \mapsto [\mathcal{C}^{op}, \mathcal{V}]\,[X, \mathcal{C}[\cdot, c]]$$

   Здесь под $\mathcal{V}$-сопряжением подразумевается конструкция, аналогичная классической, с заменой $(\cdot,\cdot)$ на $[\cdot,\cdot]$.

   $$F \underset{\mathcal{V}}{\dashv} G \iff [Fa, b] \simeq [a, Gb]$$

задачи к экзамену

Оценка за экзамен равна числу полностью решённых задач. Решения можно присылать в любой форме мне на почту

$$fetisov.anton.u@gmail.com$$

или отдать в руки при наличии возможности. Решения присылайте до 20 мая.

(1) Предположим, что в декартовом квадрате

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

стрелка p является мономорфизмом. Покажите, что тогда s также является мономорфизмом.

(2) Пусть в категории существует конечный объект и предел любой диаграммы вида $A \to B \leftarrow C$. Покажите, что в ней существуют все конечные пределы.

(3) Пусть категория J фильтрована. Покажите, что если V, W — две J-диаграммы в категории векторных пространств над некоторым полем Vect, то имеется естественный изоморфизм

$$\mathrm{Colim}_J\,(V_i \otimes W_i) = (\mathrm{Colim}_J V_i) \otimes (\mathrm{Colim}_J W_j)$$

Указание: рассмотрите функтор диагонали $\Delta\colon J \to J^2$, действующий на объектах по правилу $j \mapsto (j, j)$.

(4) Пусть $Y\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}et^{\mathcal{A}^{op}}$, $Y^*\colon \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$ — ковариантное и контравариантное вложение Йонеды соответственно. Покажите, что

$$(\mathrm{Lan}_Y F)\,(G) \simeq (\mathrm{Lan}_{Y^*} G)\,(F)$$

$F \in \mathcal{S}et^{\mathcal{A}}$, $G \in \mathcal{S}et^{\mathcal{A}^{op}}$.

(5) Пусть $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ — моноидально замкнутая категория. Покажите, что на категории $\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{S}et^{\mathcal{V}^{op}}$ существует единственная структура моноидально замкнутой категории, продолжающая моноидальную структуру на $\mathcal{V}$. То есть, существует единственная пара функторов $\hat{\otimes}\colon \hat{\mathcal{V}} \times \hat{\mathcal{V}} \to \hat{\mathcal{V}}$, $\widehat{[\cdot,\cdot]}\colon \hat{\mathcal{V}}^{op} \times \hat{\mathcal{V}} \to$

 задачи к экзамену

$\hat{\mathcal{V}}$, такая что $\hat{\mathcal{V}}\left(A\hat{\otimes}B, C\right) \simeq \hat{\mathcal{V}}\left(A, [B\hat{,}C]\right)$ и $(Y_A)\,\hat{\otimes}\,(Y_B) \simeq Y_{A\otimes B}$.

(6) Пусть дан функтор $\pi\colon C \to I$. Для объекта $i \in I$ обозначим через $C_i \equiv \pi^{-1}(i)$ подкатегорию в C, состоящую из всех объектов $c \in C$, таких что $\pi(c) = i$, и всех морфизмов $f \in \operatorname{Mor} C$, таких что $\pi(f) = 1_i$. Предположим, что естественное вложение $\pi^{-1}(i) \hookrightarrow (i \downarrow \pi)$ является финальным функтором (это верно, например, если π — расслоение категорий; в частности для проекции $I \times J \to I$). Покажите, что

$$\operatorname*{Lim}_{C} F = \operatorname*{Lim}_{I}\left(\operatorname*{Lim}_{C_i} F|_{C_i}\right)$$

Здесь $F\colon C \to D$ — некоторый функтор, $F|_{C_i}$ — ограничение F на подкатегорию $C_i \hookrightarrow C$, а категория D полна. Предел в правой части понимается как $\operatorname*{Lim}_{I} \pi_* F$, где $\pi_* F\colon I \to D$ — функтор, заданный на объектах по правилу $\pi_* F(i) = \operatorname*{Lim}_{C_i} F|_{C_i}$ (*как он действует на морфизмах?*).

Определение. Категория $\mathcal{C}$ называется *фильтрованной*, если она не пуста и выполнены два условия:

- для любых $a, b \in \mathcal{C}$ существует некоторый объект $c \in \mathcal{C}$ и стрелки $a \to c \leftarrow b$.

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- Для любой пары стрелок $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ существует стрелка $b \xrightarrow{h} c$, такая что $hf = hg$.