

А. Л. Городенцев*

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

1-й курс

Факультет математики НИУ ВШЭ
2021/22 уч. год

* ВШЭ, НМУ, ИТЭФ, [e-mail:gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

Оглавление

Оглавление	2
Неформальное предисловие	5
§1 Аффинная плоскость	8
1.1 Векторные пространства	8
1.2 Двумерное векторное пространство	10
1.3 Площадь ориентированного параллелограмма	12
1.4 Аффинные пространства	14
1.5 Прямые	17
1.6 Треугольники	19
§2 Аффинные преобразования	23
2.1 Преобразования, переводящие прямые в прямые	23
2.2 Аффинные отображения	25
2.3 Запись линейных отображений в координатах	27
2.4 Запись аффинных отображений в координатах	29
2.5 Аффинная группа	30
2.6 Двойные отношения	32
§3 Евклидова плоскость	34
3.1 Длина вектора и перпендикулярность	34
3.2 Ортонормальные базисы	37
3.3 Углы и тригонометрия	39
3.4 Движения	41
3.5 Комплексные числа	44
3.6 Преобразования подобия	45
§4 Многомерие	48
4.1 Базисы и размерность	48
4.2 Подпространства	51
4.3 Аффинная геометрия	54
4.4 Линейные и аффинные отображения	55
4.5 Фактор пространства	58
§5 Матрицы	60
5.1 Матрицы линейных отображений	60
5.2 Умножение матриц	61
5.3 Матрицы перехода	63
5.4 Обратимые матрицы	64
5.5 Ранг матрицы	66
5.6 Системы линейных уравнений	67
5.7 Алгебры над полем	69
§6 Метод Гаусса	72
6.1 Построение базиса в подпространстве	72
6.2 Отыскание обратной матрицы	74

6.3	Решение систем линейных уравнений	76
6.4	Построение базиса в ядре и образе линейного отображения	79
6.5	Построение базиса в фактор пространстве	80
6.6	Расположение подпространства относительно базиса	80
§7	Двойственность	84
7.1	Двойственные пространства	84
7.2	Двойственность между подпространствами	87
7.3	Двойственные линейные отображения	89
7.4	Отступление о бесконечномерии	92
§8	Определители	96
8.1	Объём, полилинейные косые формы и определитель	96
8.2	Присоединённая матрица	102
8.3	Геометрическое отступление: объём и барицентрические координаты	106
8.4	Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки	109
8.5	Алгебраическое отступление: грассмановы многочлены	111
§9	Линейные операторы	116
9.1	Пространство с оператором	116
9.2	Собственные подпространства	120
9.3	Нильпотентные операторы	123
9.4	Корневое разложение и функции от операторов	124
9.5	Разложение Жордана	128
§10	Евклидова геометрия	131
10.1	Ортонормальные базисы	131
10.2	Матрицы Грама	133
10.3	Евклидова двойственность	134
10.4	Ортогональное проектирование, расстояния и углы	136
10.5	Векторные произведения	139
§11	Линейные отображения евклидовых пространств	141
11.1	Ортогональные операторы	141
11.2	Евклидово сопряжение линейных отображений	146
11.3	Сопряжённые и антисамосопряжённые операторы	147
11.4	Сингулярные числа и сингулярные направления	149
11.5	Инвариантные углы между подпространствами	153
§12	Выпуклая геометрия	156
12.1	Выпуклые фигуры	156
12.2	Опорные полупространства	158
12.3	Грани и крайние точки	159
12.4	Выпуклые многогранники	162
12.5	Выпуклые многогранные конусы	164
§13	Пространство с билинейной формой	170
13.1	Билинейные формы	170
13.2	Невырожденные формы	172
13.3	Ортогоналы и ортогональные проекции	178

13.4 Симметричные и кососимметричные формы	179
§14 Симметричные билинейные и квадратичные формы	182
14.1 Пространства со скалярным произведением	182
14.2 Изометрии и отражения	184
14.3 Квадратичные формы	186
14.4 Квадратичные формы над конечными полями	188
14.5 Вещественные квадратичные формы	190
14.6 Самосопряжённые операторы	194
§15 Кососимметричные билинейные и грассмановы квадратичные формы . .	196
15.1 Симплектические пространства	196
15.2 Грассмановы квадратичные формы	198
15.3 Пфаффиан	199
15.4 Симплектическая группа	201
Ответы и указания к некоторым упражнениям	203

Неформальное предисловие

Аксиомы vs определения. Есть две точки зрения на то, как выстраивать курс геометрии. Лежащий в основе большинства школьных учебников аксиоматический подход восходит к Евклиду. Однако приемлемая с точки зрения современной математической логики система «аксиом Евклида» была предложена лишь в начале XX века Д. Гильбертом, и только через несколько десятилетий была адаптирована А. Н. Колмогоровым настолько, что вошла в регулярный школьный учебник под его редакцией¹ в виде нескольких страниц убористого петита в добавлении, предназначенном для факультативных занятий. Альтернативный «аналитический подход» вместо аксиоматического описания основных геометрических понятий (точек, прямых, их взаимного расположения и т. п.) даёт всем используемым объектам явные определения, основанные на известном из алгебры и анализа понятии числа. Так, *вещественная плоскость* \mathbb{R}^2 определяется как множество, точками в котором являются пары вещественных чисел $p = (p_1, p_2)$. Прямая на такой плоскости определяется как траектория точки, равномерно движущейся в заданном направлении, т. е. как ГМТ² вида

$$p + v \cdot t = (p_1, p_2) + (v_1, v_2) \cdot t = (p_1 + v_1 t, p_2 + v_2 t),$$

где параметр $t \in \mathbb{R}$ играет роль времени, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ — произвольным образом выбранная начальная точка, отвечающая нулевому моменту времени, а *вектор* $v = (v_1, v_2)$ задаёт скорость движения. После этих определений высказывания о том, что через любые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая и что через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой ℓ , проходит ровно одна не пересекающая ℓ прямая, становятся *теоремами*.

УПРАЖНЕНИЕ 0.1. Докажите эти две теоремы.

Точки и векторы. Вектор $v = (v_1, v_2)$, хотя и записывается формально точно такой же парой чисел, как и точка p , является объектом совершенно иной геометрической природы. Его правильно представлять себе как *преобразование сдвига*³

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto p + v,$$

переводящее каждую точку $p = (p_1, p_2)$ в точку $\tau_v(p) = p + v = (p_1 + v_1, p_2 + v_2)$. Координаты (v_1, v_2) вектора v суть числа, описывающие этот сдвиг, а именно — разность $\tau_v(p) - p$, которая одинакова для всех точек $p \in \mathbb{R}^2$. При переносе начала координат из нуля в какую-нибудь другую точку $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ координаты каждой точки p поместятся и станут равны $(p_1 - a_1, p_2 - a_2)$, тогда как координаты вектора v , задающего сдвиг τ_v , не изменятся.

¹Основное учебное пособие по геометрии в советской средней школе 70-х – 80-х годов XX века.

²Здесь и далее «ГМТ» является сокращением фразы «геометрическое место точек».

³Или *параллельный перенос*.

Группы преобразований. Рассмотрим произвольное множество X и обозначим через $\text{End}(X)$ множество всех отображений $f : X \rightarrow X$ из X в себя¹. На множестве $\text{End}(X)$ имеется естественная операция *композиции*, сопоставляющая упорядоченной паре отображений $f : X \rightarrow X$, $g : X \rightarrow X$, результат их последовательного выполнения справа налево: $f \circ g : X \rightarrow X$, $x \mapsto f(g(x))$.

УПРАЖНЕНИЕ 0.2. Приведите пример множества X и таких трёх отображений $f, g, h : X \rightarrow X$, что а) $f \circ g \neq g \circ f$ б) $f \circ h = g \circ h$, но $f \neq g$ в) $h \circ f = h \circ g$, но $f \neq g$.

Множество отображений $G \subset \text{End}(X)$ называется *группой*, если все отображения $g \in G$ взаимно однозначны², и вместе с каждым отображением $g \in G$ обратное ему отображение³ g^{-1} тоже принадлежит G , а вместе с любыми двумя отображениями $g_1, g_2 \in G$ в G лежит и их композиция $g_1 \circ g_2$. Отметим, что из этих требований вытекает, что тождественное отображение Id_X , переводящее каждую точку в себя, автоматически содержится в G , поскольку представимо в виде композиции $\text{Id}_X = g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$, где $g \in G$ — любое преобразование из группы.

Группа сдвигов. Параллельные переносы плоскости \mathbb{R}^2 на всевозможные векторы образуют группу: обратным преобразованием к сдвигу τ_v на вектор $v = (v_1, v_2)$ является сдвиг $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$ на *противоположный* вектор $-v = (-v_1, -v_2)$, а композиция сдвигов на векторы $u = (u_1, u_2)$ и $w = (w_1, w_2)$ это сдвиг на вектор

$$u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2). \quad (0-1)$$

Подчеркнём, что эта формула является координатной записью для операции *композиции отображений*, которая сама по себе определяется *без использования координат*. Из формулы (0-1) вытекает, что не смотря на [упр. 0.2](#) композиция сдвигов не зависит от того, какой сдвиг делается первым, а какой — вторым.

Группа, состоящая из попарно перестановочных друг с другом преобразований⁴ называется *коммутативной* или *абелевой*. Таким образом, векторы составляют абелеву группу преобразований плоскости \mathbb{R}^2 .

Отметим, что на множестве *точек* никакого естественного сложения нет. Например, если попытаться определить «сумму точек» складывая их координаты, то одна и та же пара точек будет иметь разные суммы в разных координатных системах, поскольку при сдвиге начала координат в точку a от координат всех точек отнимаются координаты точки a , и точки, имевшие в исходной координатной системе координаты

$$(p_1, p_2), \quad (q_1, q_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$

в сдвинутой координатной системе приобретают координаты

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2), \quad (q_1 - a_1, q_2 - a_2) \quad \text{и} \quad (p_1 + q_1 - a_1, p_2 + q_2 - a_2)$$

так что «сумма» первых двух из них перестаёт быть равна третьей.

¹Такие отображения обычно называют *эндоморфизмами* множества X , откуда и обозначение.

²Т. е. у каждой точки $y \in X$ имеется ровно один *прообраз* — такая точка $x = g^{-1}(y) \in X$, что $g(x) = y$.

³Переводящее каждую точку $y \in X$ в её прообраз $x = g^{-1}(y)$.

⁴Это означает, что $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$.

Об этом курсе. Наш курс будет выстроен по схеме, предложенной в 30-х годах XX века Г. Вейлем. Первичным геометрическим объектом для нас будет *векторное пространство* — абелева группа *векторов*, которые можно складывать друг с другом и умножать на числа по известным из школы правилам. Мы напомним список этих правил в §1, он гораздо короче «аксиом Евклида». После чего мы свяжем с векторными пространствами разные *точечные пространства*, в которых можно будет рисовать фигуры и изучать свойства этих фигур по отношению к различным геометрическим преобразованиям. Подчеркнём, что в конечном итоге все эти свойства будут *выводиться* из явных определений и алгебраических свойств операций с векторами.

Первым делом мы покажем, как вписывается в эту картину школьная планиметрия — определим вещественную евклидову плоскость и убедимся в том, что в ней выполняются все постулаты и теоремы школьной планиметрии. Затем мы построим разные другие точечные пространства, имеющие произвольные размерности и определённые над любыми полями констант.

О числах. Понятие *числа* столь же фундаментально для геометрии, сколь и понятие *вектора*. Чтобы перечислить свойства векторов необходимо сначала зафиксировать множество констант, на которые векторы можно умножать. Для нас будет существенно, что константы образуют *поле*, т. е. их можно складывать, вычитать, умножать и делить по тем же формальным алгебраическим правилам, что рациональные числа. Мы всегда обозначаем поле констант через \mathbb{k} и называем его *основным полем* или *полем определения* рассматриваемой геометрии. Если специально не оговаривается противное, читатель на первых порах может без ущерба для понимания происходящего считать, что $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — это поле рациональных, или действительных, или комплексных чисел (выбирайте наиболее привычное). Однако, то обстоятельство, что многие из доказываемых ниже теорем справедливы *над любым* основным полем, следует всё-таки иметь в виду. Скажем, над полем вычетов по простому модулю p , которое состоит из p чисел¹, геометрические пространства становятся конечными множествами, и некоторые всем привычные картинки в этих пространствах превращаются в любопытные комбинаторные утверждения.

¹Их можно воспринимать как всевозможные остатки от деления целых чисел на p .

§1. Аффинная плоскость

1.1. Векторные пространства. Фиксируем произвольное поле¹ \mathbb{K} , элементы которого будем называть *числами* или *скалярами*. Множество V , элементы которого мы будем называть *векторами*², является *векторным пространством* над полем \mathbb{K} , если на V определены операция сложения векторов, сопоставляющая каждой паре векторов $v_1, v_2 \in V$ их сумму $v_1 + v_2 \in V$, и операция умножения векторов на числа, сопоставляющая каждому вектору $v \in V$ и скаляру $\lambda \in \mathbb{K}$ вектор $\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \in V$ так, что выполняются следующие аксиомы.

1. Свойства сложения векторов:

(1а) $a + b = b + a$ для всех $a, b \in V$ (см. рис. 1♦1)

(1б) $a + (b + c) = (a + b) + c$ для всех $a, b, c \in V$ (см. рис. 1♦2)

(1в) имеется такой нулевой вектор $0 \in V$, что $a + 0 = a$ для всех $a \in V$

(1г) для каждого вектора $a \in V$ имеется такой противоположный вектор $-a \in V$, что $a + (-a) = 0$.

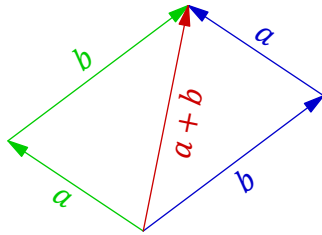


Рис. 1♦1. Правило параллелограмма.

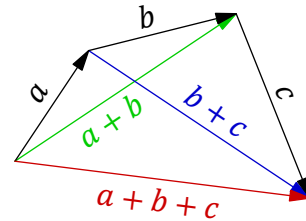


Рис. 1♦2. Правило четырёхугольника.

2. Свойства умножения векторов на числа:

(2а) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ для всех $a \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(2б) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для всех $a \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(2в) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $a, b \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$

(2г) $1 \cdot a = a$ для всех $a \in V$.

Подмножество U векторного пространства V называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов $u, w \in U$ все их линейные комбинации $\lambda u + \mu w$ с произвольными $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ тоже лежат в U . Из написанных аксиом формально вытекает ещё несколько интуитивно ожидаемых свойств операций над векторами.

¹Точное определение поля будет дано в курсе алгебры (см., например, лекцию <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>).

²Векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

ЛЕММА 1.1

В каждом векторном пространстве V нулевой вектор $0 \in V$ единствен. Для любого $a \in V$ противоположный к a вектор $-a$ однозначно определяется по a . Кроме того, $0 \cdot a = 0$ и $(-1) \cdot a = -a$, где 0 и -1 в левых частях равенств суть числа из поля \mathbb{K} , а 0 и $-a$ в правых — векторы из пространства V . Аналогично, $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{K}$, где $0 \in V$ — нулевой вектор.

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов $0_1, 0_2 \in V$ по аксиоме (1в) выполняется равенство $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$. Если векторы b и c оба противоположны к a , то $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$. Если к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

прибавить противоположный к a вектор $-a$, мы получим $0 \cdot a = 0$. Аналогично, прибавляя к обеим частям равенства $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ вектор, противоположный вектору $\lambda \cdot 0$, получаем $0 = \lambda \cdot 0$. Вектор $(-1) \cdot a$ противоположен к a , поскольку $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. \square

ПРИМЕР 1.1

Простейшие примеры векторных пространств суть *нулевое* или *тривиальное пространство* 0 , состоящее из одного лишь нулевого вектора 0 , такого что $0 + 0 = 0 = -0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{K}$, а также само поле \mathbb{K} , где сложение векторов и их умножение на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле \mathbb{K} .

ПРИМЕР 1.2 (n -МЕРНОЕ КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО \mathbb{K}^n)

По определению, векторами пространства \mathbb{K}^n являются упорядоченные наборы из n чисел¹

$$(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

Сложение векторов и их умножение на числа задаются правилами

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1.3 (ПРОСТРАНСТВО МНОГОЧЛЕНОВ)

Многочлены с коэффициентами в поле \mathbb{K} образуют векторное пространство над \mathbb{K} относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Это пространство обозначается $\mathbb{K}[x]$. Многочлены степени не выше n образуют в $\mathbb{K}[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

1.1.1. Линейные отображения. Отображение $F : U \rightarrow W$ из векторного пространства U в векторное пространство W называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и их умножением на числа в том смысле, что $F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)$ для всех $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств. Изоморфизмы $V \simeq V$ пространства с самим собою называются *автоморфизмами*. Автоморфизмы векторного пространства V образуют *группу преобразований*². Эта группа обозначается $\text{GL}(V)$ и называется *полной линейной группой* векторного пространства V .

¹Для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но иногда бывает удобно представлять векторы пространства \mathbb{K}^n и в виде столбцов.

²См. стр. 6.

ПРИМЕР 1.4

Пространство $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ многочленов степени не выше n изоморфно $(n+1)$ -мерному координатному пространству \mathbb{K}^{n+1} посредством линейного биективного отображения, сопоставляющего многочлену $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ набор его коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Предостережение 1.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, заданное формулой $\varphi(x) = a \cdot x + b$, которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле п° 1.1.1 только при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то $\varphi(\lambda x) \neq \lambda \varphi(x)$ и $\varphi(x+y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)$, т. е. φ не является линейным отображением.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1. Докажите, что для любого линейного отображения F выполняются равенства

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad F(-v) = -F(v) \quad \text{для всех } v \in V.$$

1.1.2. Пропорциональные векторы и одномерные пространства. Векторы a и b из векторного пространства V называются *пропорциональными*, если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \mathbb{K}$, не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1}a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \mathbb{K}$.

Векторное пространство V называется *одномерным*, что принято записывать равенством¹ $\dim V = 1$, если в нём есть ненулевые векторы, но все они пропорциональны друг другу. Фиксируя в одномерном пространстве V какой-нибудь ненулевой вектор e , мы можем однозначно записать любой вектор $v \in V$ как $v = xe$ с $x \in \mathbb{K}$. Такое представление единственно, поскольку из равенства $xe = ye$ вытекает, что $(x-y)e = 0$, откуда $x-y = 0$, ибо в противном случае, умножая обе части равенства $(x-y)e = 0$ на число $(x-y)^{-1}$, мы получили бы $e = 0$.

Число x называется *координатой* вектора $v = xe$ относительно *базисного* вектора e . Отображение $V \rightarrow \mathbb{K}$, переводящее каждый вектор $v = xe \in V$ в его координату $x \in \mathbb{K}$ устанавливает изоморфизм между V и \mathbb{K} . При выборе другого базисного вектора $e' = \lambda e$ координата x' каждого вектора $v = x'e' = x'\lambda e = xe$ относительно этого нового базисного вектора связана со старой координатой x соотношением $x' = \lambda^{-1}x$.

Каждое линейное отображение $F: V \rightarrow V$ одномерного пространства V в себя однозначно задаётся тем, куда оно переводит какой-нибудь базисный вектор e пространства V . Если $F(e) = \lambda e$, то для произвольного вектора $v = xe$ получим $F(xe) = xF(e) = \lambda xe$. В частности, отображение F либо переводит все векторы в нуль, либо является *гомотетией*² с ненулевым коэффициентом $\lambda \in \mathbb{K}$. Таким образом, полная линейная группа $\text{GL}(V)$ одномерного пространства V состоит из гомотетий с ненулевыми коэффициентами и изоморфна мультипликативной группе \mathbb{K}^* ненулевых элементов поля \mathbb{K} .

1.2. Двумерное векторное пространство. Векторное пространство V называется *двумерным*, что принято записывать равенством $\dim V = 2$, если в нём есть пара непропорциональных векторов e_1, e_2 , и каждый вектор $v \in V$ выражается через них в виде $v = x_1e_1 + x_2e_2$, где $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$. Любая пара векторов e_1, e_2 , обладающая этими двумя свойствами, называется *базисом* пространства V . Коэффициенты x_1, x_2 разложения вектора v по базису *однозначно* определяются

¹Обозначение \dim является сокращением от *dimension* (размерность). В полной общности мы обсудим это понятие чуть позже.

²Или *растяжением* в λ раз, т. е. действует на любой вектор $v \in V$ по правилу $v \mapsto \lambda v$.

вектором v и базисом, поскольку из равенства $x_1 e_1 + x_2 e_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2$ вытекает равенство $(x_1 - y_1) e_1 = (x_2 - y_2) e_2$, возможное только при $(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = 0$ в силу того, что векторы e_1 и e_2 не пропорциональны. Числа $x_1, x_2 \in \mathbb{k}$ из разложения $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$ называются *координатами* вектора v в базисе $e = (e_1, e_2)$. Сопоставляя каждому вектору столбец его координат в базисе e , мы получаем биективное отображение

$$c_e : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}^2, \quad v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^2.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Проверьте, что это отображение линейно, т. е. при сложении векторов столбцы их координат складываются, а при умножении на число — умножаются на число по правилам координатного пространства \mathbb{k}^2 .

Таким образом, всякое двумерное векторное пространство V изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^2 .

1.2.1. Определитель 2×2 . Пропорциональность векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ в \mathbb{k}^2 равносильна равенству перекрёстных произведений $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Число

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{1-1}$$

называется *определителем* векторов $a, b \in \mathbb{k}^2$ или 2×2 -матрицы, составленной из координат этих векторов. В последнем случае определитель записывают как

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что неважно, каким образом записаны координаты векторов — по строкам или по столбцам матрицы, поскольку величина (1-1) не меняется при отражении матрицы относительно диагонали, ведущей из левого верхнего угла в правый нижний¹. Очевидно, что для всех векторов $a, b, c \in \mathbb{k}^2$ и чисел $\lambda \in \mathbb{k}$ выполняются равенства

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \tag{1-2}$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \tag{1-3}$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \tag{1-4}$$

$$\det(a + b, c) = \det(a, c) + \det(b, c) \tag{1-5}$$

$$\det(a, b + c) = \det(a, b) + \det(a, c)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь в этом!

Свойство (1-3) называется *знакопеременностью*, (1-4) — *однородностью*, (1-5) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов, т. е. *билинеен*. Из билинейности вытекает, что для любых векторов $a, b, c, d \in \mathbb{k}^2$ и констант $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{k}$ выполняется то же самое правило раскрытия скобок², что и для произведения чисел:

$$\det(\alpha a + \beta b, \gamma c + \delta d) = \alpha \gamma \det(a, c) + \alpha \delta \det(a, d) + \beta \gamma \det(b, c) + \beta \delta \det(b, d).$$

¹Эта диагональ называется *главной*, а отражение матрицы относительно главной диагонали называется *транспонированием*.

²Это правило называют *дистрибутивностью* или *распределительным законом*.

ЛЕММА 1.2

Каждая пара непропорциональных векторов $a, b \in \mathbb{K}^2$ является базисом. Коэффициенты разложения произвольного вектора $v \in \mathbb{K}^2$ по этому базису вычисляются по правилу Крамера:

$$v = x \cdot a + y \cdot b \iff \begin{cases} x = \det(v, b) / \det(a, b) \\ y = \det(a, v) / \det(a, b) \end{cases} \quad (1-6)$$

Доказательство. Если имеется разложение $v = x \cdot a + y \cdot b$, то из билинейности и кососимметричности определителя вытекают равенства

$$\begin{aligned} \det(a, v) &= \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b) \\ \det(v, b) &= \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b), \end{aligned}$$

из которых x и y однозначно выражаются в виде (1-6). Для доказательства существования разложения $v = x \cdot a + y \cdot b$ заметим, что разность $v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b)$ пропорциональна вектору b , т. к. $\det(v - a \cdot \det(v, b) / \det(a, b), b) = \det(v, b) - \det(a, b) \cdot \det(v, b) / \det(a, b) = 0$. Поэтому $v = a \cdot \det(v, b) / \det(a, b) + b \cdot y$ для некоторого $y \in \mathbb{K}$. \square

СЛЕДСТВИЕ 1.1

В любом двумерном векторном пространстве любые два непропорциональных вектора образуют его базис. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Пусть вектор v имеет в базисе (u_1, u_2) координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а векторы u_1, u_2 , в свою очередь, имеют в некоем другом базисе (w_1, w_2) координаты $u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$. Найдите координаты вектора v в базисе (w_1, w_2) .

1.3. Площадь ориентированного параллелограмма. Функция $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов a, b двумерного векторного пространства V число $s(a, b) \in \mathbb{K}$, называется *площадью ориентированного параллелограмма*, если для любых векторов $a, b \in V$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ выполняются равенства

$$s(a, b + \lambda a) = s(a, b) = s(a + \mu b, b) \quad (1-7)$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a, b) = s(a, \lambda b). \quad (1-8)$$

Первое из них означает, что площадь параллелограмма не меняется при параллельном переносе одной из его сторон вдоль самой себя: треугольник, который при этом отрезается, параллельно сдвигается и приклеивается с другой стороны, как на рис. 1◊3.

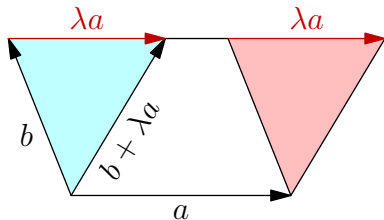


Рис. 1◊3. Площадь не меняется.

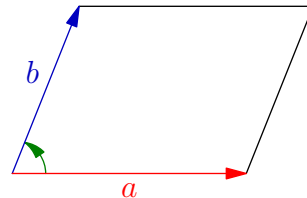


Рис. 1◊4. Ориентированный параллелограмм.

Второе свойство (1-8) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в λ раз площадь также изменяется в λ раз. В частности, $s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b)$, т. е. площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов. В школьном курсе геометрии над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ принято считать, что площадь положительна и $s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b)$. Отказываясь от положительности, мы не просто упраздняем модуль¹, но помимо абсолютной величины площади учитываем также и *ориентацию* параллелограмма. На вещественной координатной плоскости \mathbb{R}^2 упорядоченные пары векторов (a, b) геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов, для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — *отрицательно* ориентированными. Равенство $s(-a, b) = -s(a, b)$ означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную, как на рис. 1♦5.

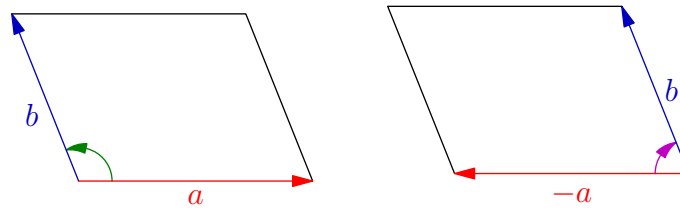


Рис. 1♦5. Смена ориентации при смене знака.

ЛЕММА 1.3

Каждая функция площади $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ обращается в нуль на парах пропорциональных векторов², знакопеременна: $s(a, b) = -s(b, a)$ и аддитивна:

$$s(a, b + c) = s(a, b) + s(a, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}^2. \quad (1-9)$$

Доказательство. Первые два свойства вытекают прямо из (1-7) и (1-8):

$$\begin{aligned} s(\lambda v, v) &= s(0 + \lambda v, v) = s(0, v) = s(0 \cdot 0, v) = 0 \cdot s(0, v) = 0, \\ s(a, b) &= s(a, a + b) = s(a - (a + b), a + b) = s(-b, a + b) = -s(b, a + b) = -s(b, a). \end{aligned}$$

Докажем аддитивность. Если вектор a пропорционален и вектору b , и вектору c , то он пропорционален и их сумме $b + c$. В этом случае все три площади в (1-9) зануляются. Если вектор a не пропорционален, скажем, вектору b , то a и b составляют базис, и $c = \alpha a + \beta b$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. В этом случае левая и правая части (1-9) тоже равны друг другу:

$$\begin{aligned} s(a, b + c) &= s(a, b + \alpha a + \beta b) = s(a, (1 + \beta)b) = (1 + \beta)s(a, b), \\ s(a, b) + s(a, c) &= s(a, b) + s(a, \alpha a + \beta b) = s(a, b) + s(a, \beta b) = \\ &= s(a, b) + \beta s(a, b) = (1 + \beta)s(a, b). \end{aligned}$$

□

¹Что значительно упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем \mathbb{K} .

²В частности, когда один из векторов нулевой или когда два вектора совпадают друг с другом. Свойство $s(a, a) = 0$ называют *кососимметричностью*, см. упр. 1.5 ниже.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5 (кососимметричность и знакопеременность). Функция от двух аргументов $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ называется *кососимметричной*, если $f(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. Убедитесь, что всякая билинейная кососимметричная функция знакопеременна, а если в поле \mathbb{K} выполнено неравенство $1 \neq -1$, то и наоборот, все знакопеременные функции кососимметричны.

ТЕОРЕМА 1.1

На координатном векторном пространстве \mathbb{K}^2 имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Она имеет вид $s(a, b) = c \cdot \det(a, b)$, где константа $c = s(e_1, e_2)$ равна площади стандартного базисного параллелограмма на векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу аддитивности, однородности и знакопеременности функции $s(a, b)$ для любой пары векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ выполняются равенства

$$s(a, b) = s(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) s(e_1, e_2) = \det(a, b) \cdot s(e_1, e_2). \quad (1-10)$$

Поэтому все функции площади пропорциональны определителю. С другой стороны, из свойств определителя (1-2) – (1-5) вытекает, что при любом $\lambda \in \mathbb{K}$ функция $s(a, b) = \lambda \cdot \det(a, b)$ удовлетворяет соотношениям (1-7), (1-8) и при $\lambda \neq 0$ является ненулевой. \square

СЛЕДСТВИЕ 1.2

На любом двумерном векторном пространстве V имеется единственная с точностью до пропорциональности ненулевая функция площади. Если векторы $e = (e_1, e_2)$ образуют в V базис, а векторы $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ произвольны, то¹

$$s(a, b) / s(e_1, e_2) = \det_e(a, b) = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

для любой ненулевой функции площади s на пространстве V . \square

СЛЕДСТВИЕ 1.3

Координаты вектора $v = ax + by$ в любом базисе (a, b) двумерного векторного пространства V равны отношениям площадей $x = s(v, b) / s(a, b)$, $y = s(a, v) / s(a, b)$. \square

1.4. Аффинные² пространства. Множество \mathbb{A} называется *аффинным пространством* над векторным пространством V , если каждой упорядоченной паре точек $a, b \in \mathbb{A}$ сопоставлен вектор $\overrightarrow{ab} \in V$ так, что для любой точки $p \in \mathbb{A}$ отображение *векторизации с центром в p*

$$v_p : \mathbb{A} \rightarrow V, \quad q \mapsto \overrightarrow{pq},$$

взаимно однозначно, и для любых трёх (не обязательно различных) точек $a, b, c \in \mathbb{A}$ выполняется *правило треугольника* $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.

¹Здесь и далее мы обозначаем через $\det_e(a, b)$ определитель матрицы, образованной столбцами координат векторов a, b в базисе e .

²Термин *аффинный* не должен вызывать «греческих» реминисценций — это банальная калька с английского *affine* (ассоциированный).

Иначе можно сказать, что с каждым вектором $v \in V$ связано биективное преобразование сдвига¹ на вектор v

$$\tau_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad p \mapsto p + v,$$

со следующими двумя свойствами: для каждой пары точек $p, q \in \mathbb{A}$ имеется единственный такой вектор $v \in V$, что $p + v = q$, и для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}.$$

Второе описание эквивалентно первому: вектор $v \in V$ со свойством $p + v = q$, о котором идёт речь во втором определении, это вектор \overrightarrow{pq} из первого определения, а правило треугольника из первого определения означает равенство $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+w}$ во втором.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь в этом и выведите из определений, что: а) $\overrightarrow{aa} = 0$ для всех точек $a \in \mathbb{A}$ б) $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$ для всех точек $p, q \in \mathbb{A}$ в) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc} \Leftrightarrow \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ad}$ для любой четвёрки точек $a, b, c, d \in \mathbb{A}$. Убедитесь также, что во втором определении требование биективности всех преобразований $\tau_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ можно заменить требованием, чтобы сдвиг на нулевой вектор действовал тождественно: $\tau_0 = \text{Id}_{\mathbb{A}}$.

ПРИМЕР 1.5 (Аффинная координатная плоскость \mathbb{A}^2)

Множество $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{k})$, точками которого являются пары чисел $p = (p_1, p_2)$ из поля \mathbb{k} и точкам p, q сопоставляется вектор $\overrightarrow{pq} = q - p = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ очевидно удовлетворяет предыдущим определениям. Оно называется *аффинной координатной плоскостью* над полем \mathbb{k} .

ПРИМЕР 1.6 (Приведённые квадратные трёхчлены)

Пространство \mathcal{P}_2 , точками которого являются приведённые² квадратные трёхчлены

$$p(x) = x^2 + p_1x + p_2 \in \mathbb{k}[x],$$

не является векторным пространством, поскольку сумма приведённых многочленов и произведение приведённого многочлена на число не являются приведёнными многочленами. Однако разности $q - p = (q_1 - p_1)x + (q_2 - p_2)$ приведённых трёхчленов $q = x^2 + q_1x + q_2$ и $p = x^2 + p_1x + p_2$ образуют векторное пространство $V = \mathbb{k}[x]_{\leq 1}$ многочленов степени ≤ 1 , и при произвольно зафиксированном многочлене p сопоставление $q \mapsto \overrightarrow{pq} \stackrel{\text{def}}{=} (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ устанавливает биекцию между \mathcal{P}_2 и V , удовлетворяющую предыдущим определениям. Поэтому пространство \mathcal{P}_2 является аффинной плоскостью над пространством многочленов степени ≤ 1 .

ПРИМЕР 1.7 (Аффинизация векторного пространства)

Из каждого векторного пространства V можно изготовить аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$, называемое *аффинизацией* векторного пространства V . Точками пространства $\mathbb{A}(V)$ по определению являются векторы из V . В пространстве $\mathbb{A}(V)$ имеется выделенная точка 0 , отвечающая нулевому вектору, а все остальные точки продуктивно воспринимать как «концы» всевозможных «радиус-векторов» $v \in V$, отложенных от нулевой точки. Сдвиг $\tau_v : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ переводит точку a , отвечающую радиус-вектору $a \in V$, в точку $a + v$, отвечающую радиус-вектору $a + v$.

¹Или откладывание вектора v от точек $p \in \mathbb{A}$.

²Т. е. со старшим коэффициентом 1.

1.4.1. Аффинная система координат на аффинной плоскости \mathbb{A}^2 по определению состоит из произвольно взятой точки $o \in \mathbb{A}^2$ и базиса e_1, e_2 в векторном пространстве V . Тройку $(o; e_1, e_2)$ также называют *координатным репером с началом в o и базисом e_1, e_2* . Каждый координатный репер устанавливает биекцию между точками плоскости \mathbb{A}^2 и парами чисел, сопоставляющую точке $p \in \mathbb{A}^2$ координаты вектора \overrightarrow{op} в базисе e_1, e_2 . Эти координаты называются *аффинными координатами точки p относительно репера $(o; e_1, e_2)$* .

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Убедитесь, что столбец координат вектора \overrightarrow{pq} в произвольном базисе (e_1, e_2) пространства \mathbb{K}^2 равен разности $q - p$ столбцов координат точек $q, p \in \mathbb{A}(\mathbb{K}^2)$ относительно любого репера $(o; e_1, e_2)$ на аффинной плоскости $\mathbb{A}(\mathbb{K}^2)$ вне зависимости от выбора начальной точки o этого репера.

Так, в [прим. 1.6](#) коэффициенты (p_1, p_2) трёхчлена $x^2 + p_1x + p_2 \in \mathcal{P}_2$ являются его координатами относительно репера $(o; e_1, e_2)$ с начальной точкой $o = x^2 \in \mathcal{P}_2$ и стандартным базисом $e_1 = x, e_2 = 1$ в векторном пространстве $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$.

1.4.2. Барицентры и барицентрические комбинации точек. Для любого конечного набора точек p_1, \dots, p_m в аффинном пространстве \mathbb{A} и любых чисел $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ с ненулевой суммой $\mu = \sum \mu_i \neq 0$ существует единственная такая точка $c \in \mathbb{A}$, что

$$\mu_1 \overrightarrow{cp_1} + \mu_2 \overrightarrow{cp_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{cp_m} = 0. \quad (1-11)$$

В самом деле, задавшись произвольной начальной точкой $o \in \mathbb{A}$, мы можем для любой точки $c \in \mathbb{A}$ записать сумму из левой части (1-11), как

$$\sum \mu_i \overrightarrow{cp_i} = \sum \mu_i (\overrightarrow{op_i} - \overrightarrow{oc}) = -\mu \overrightarrow{oc} + \sum \mu_i \overrightarrow{op_i}.$$

Поэтому соотношение (1-11) выполняется для единственной точки c с радиус вектором

$$\overrightarrow{oc} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{op_i}. \quad (1-12)$$

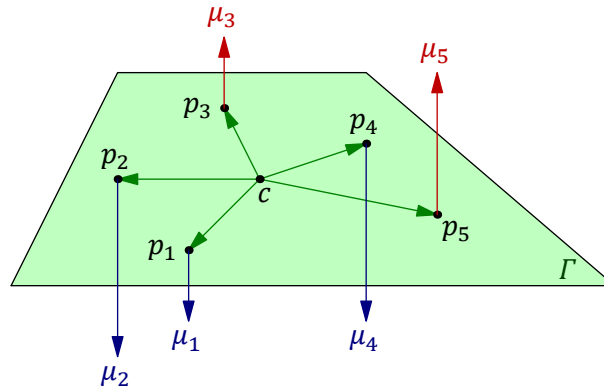


Рис. 1◊6. Моменты сил.

Эта точка называется *центром тяжести* или *барицентром* точек p_i с весами μ_i . Термин пришёл из механики: если поместить аффинное пространство \mathbb{A} в пространство на единицу большей размерности в качестве горизонтальной гиперплоскости Γ , как на [рис. 1◊6](#), и приложить к каждой точке p_i силу μ_i , направленную перпендикулярно вниз при $\mu > 0$, и вверх при $\mu < 0$, то

равенство (1-11) будет означать равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки c . Если оно выполняется, плоскость Γ останется неподвижной, удерживаемая ровно за одну точку c . Так как по предыдущему точка c однозначно определяется соотношением (1-11), в котором точка o никак не участвует, точка

$$o + \overrightarrow{oc} = o + \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{op}_i$$

не зависит от выбора точки o . Поэтому для любого набора точек p_1, \dots, p_m и любых констант μ_1, \dots, μ_m с суммой $\sum \mu_i = 1$, точка

$$\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m \stackrel{\text{def}}{=} o + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot \overrightarrow{op}_i \quad (1-13)$$

не зависит от выбора начальной точки o , что и оправдывает обозначение, использованное в левой части (1-13). Точка (1-13) называется *барицентрической комбинацией* точек p_1, \dots, p_m с весами μ_1, \dots, μ_m .

УПРАЖНЕНИЕ 1.8 (группирование масс). Пусть набор точек p_i с весами μ_i и набор точек q_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках p и q , причём обе суммы весов: $\mu = \sum \mu_i$ и $\nu = \sum \nu_j$, а также их сумма $\mu + \nu$ ненулевые. Убедитесь, что центр тяжести объединения всех точек¹ p_i и q_j совпадает с центром тяжести точек p и q , взятых с весами μ и ν . Убедитесь также, что любая барицентрическая комбинация $\sum_i y_i p_i$ точек p_i , $1 \leq i \leq m$, каждая из которых в свою очередь является барицентрической комбинацией $p_i = \sum_j x_{ij} q_{ij}$ каких-то ещё точек q_{ij} , $1 \leq j \leq k_i$, тоже представляется в виде барицентрической комбинации $\sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$ тех же точек q_{ij} , причём если все $y_i \geq 0$ и все $x_{ij} \geq 0$, то и все $z_{ij} \geq 0$.

1.5. Прямые. Три точки a, b, p аффинного пространства называются *коллинеарными*, если векторы \overrightarrow{pa} и \overrightarrow{pb} пропорциональны. Например, это так, когда какие-то две из трёх точек совпадают друг с другом. Если $a \neq b$ пропорциональность векторов \overrightarrow{pa} и \overrightarrow{pb} означает, что при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$, не обращающихся одновременно в нуль, выполняются равносильные друг другу равенства

$$\beta \cdot \overrightarrow{pa} + \alpha \cdot \overrightarrow{pb} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot b.$$

В этом случае говорят, что точка p *делит* точки a и b в отношении $\alpha : \beta$. Иначе можно сказать, что точка p является барицентрической комбинацией точек a и b с весами $\beta/(\alpha + \beta)$ и $\alpha/(\alpha + \beta)$ соответственно. Каждая точка

$$p = o + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{oa} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{ob} = a + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{ab} = b + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{ba},$$

коллинеарная паре различных точек $a \neq b$, однозначно определяется отношением $\alpha : \beta$, которое может принимать любые значения, отличные от -1 , ибо $\alpha = -\beta$ означает, что $\overrightarrow{pa} = \overrightarrow{pb}$, т. е. $a = b$. При этом значения

$$\alpha : \beta = 0 : 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha : \beta = 1 : 0 = \infty$$

¹Если какая-то из точек p_i совпадает с некоторой точкой q_j , то их «объединение» заключается в сложении весов.

допустимы и отвечают точкам $p = a$ и $p = b$ соответственно. Равновесный барицентр¹

$$c = \frac{a+b}{2},$$

делящий a и b в отношении $1 : 1$, называется *срединой* или *центром* точек $a \neq b$.

Множество всех точек x , коллинеарных двум заданным различным точкам $a \neq b$, называется *прямой* и обозначается

$$(ab) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1\}.$$

Иначе прямую (ab) в аффинном пространстве \mathbb{A} над векторным пространством V можно описать как ГМТ вида $x = a + vt$, где t пробегает основное поле \mathbb{K} , а $p \in \mathbb{A}$ и $v \in V$ суть фиксированные точка и ненулевой вектор, называемые *начальной точкой* и *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой (ab) .

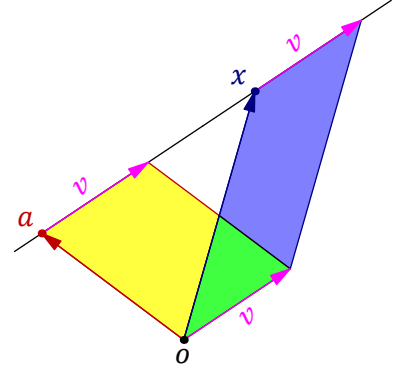


Рис. 1♦7. Уравнение прямой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1

На аффинной плоскости проходящая через точку $a = (a_1, a_2)$ прямая с вектором скорости $v = (v_1, v_2)$ описывается в координатах (x_1, x_2) относительно произвольного репера уравнением

$$\det(x, v) = \det(a, v) \quad \text{или} \quad v_2 x_1 - v_1 x_2 = v_2 a_1 - v_1 a_2. \quad (1-14)$$

Наоборот, множество всех решений $x = (x_1, x_2)$ любого уравнения $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$ с не равными одновременно нулю коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ представляет собою прямую с вектором скорости, пропорциональным вектору $v = (\alpha_2, -\alpha_1)$.

Доказательство. Обозначим начало координат через o и рассмотрим векторы $\overrightarrow{ox} = (x_1, x_2)$ и $\overrightarrow{oa} = (a_1, a_2)$. Равенство $\det(v, x) = \det(v, a)$ равносильно равенству $0 = \det(v, \overrightarrow{ax}) = 0$, означающему пропорциональность векторов \overrightarrow{ax} и v . \square

Замечание 1.1. На геометрическом языке уравнение (1-14) констатирует равенство площадей жёлтого и синего параллелограммов на рис. 1♦7.

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Напишите уравнение прямой, параллельной вектору $(5, 2)$ и проходящей через точку $(2, -3)$, а также прямой, проходящей через точки $(-3, 5)$ и $(4, -1)$, и нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$.

ПРИМЕР 1.8 (ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМЫХ)

Если левые части уравнений $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma$ и $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta$ не пропорциональны, то решения $x = (x_1, x_2)$ системы

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \gamma \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \delta, \end{cases} \quad (1-15)$$

¹Обратите внимание, что он существует над любым полем \mathbb{K} , в котором $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$. Если основное поле \mathbb{K} имеет характеристику $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$, т. е. $1 + 1 = 0$ в \mathbb{K} , то середина не определена.

суть координаты вектора $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ в координатном пространстве \mathbb{k}^2 относительно базиса из векторов $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. По правилу Крамера¹ они равны

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} \gamma & \alpha_2 \\ \delta & \beta_2 \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma \\ \alpha_2 & \delta \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (1-16)$$

Таким образом, прямые с непропорциональными скоростями пересекаются в единственной точке, координаты которой выражаются через коэффициенты задающих эти прямые уравнений (1-15) по формулам (1-16). Например, прямые $3x_1 + 5x_2 = -1$ и $2x_1 - 3x_2 = 5$ из упр. 1.9 пересекаются в точке с координатами $x_1 = 22/19$, $x_2 = -17/19$.

Если же левые части уравнений (1-15) пропорциональны, скажем: $\beta_1 = \lambda\alpha_1$ и $\beta_2 = \lambda\alpha_2$, то при $\delta \neq \lambda\gamma$ задаваемые этими уравнениями прямые параллельны, а при $\delta = \lambda\gamma$ они совпадают друг с другом.

Таким образом, на аффинной плоскости \mathbb{A}^2 над произвольным полем \mathbb{k} выполняются евклидовы аксиомы, описывающие взаимное расположение прямых и точек на плоскости, т. е. справедливо

Предложение 1.2

Через любые две различные точки аффинной плоскости проходит ровно одна прямая. Через любую точку, не лежащую на произвольно заданной прямой ℓ , проходит ровно одна прямая, не пересекающая прямую ℓ . \square

1.6. Треугольники. В этом разделе мы предполагаем, что $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \neq 0$ в поле \mathbb{k} . Фигура, образованная на аффинной плоскости тремя неколлинеарными точками a, b, c и соединяющими их прямыми $(ab), (bc), (ca)$, называется *треугольником* Δabc . Зафиксируем какую-нибудь ненулевую функцию площади s и назовём *площадью ориентированного треугольника* Δabc половину площади ориентированного параллелограмма, натянутого на упорядоченную пару векторов $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}$:

$$s(abc) \stackrel{\text{def}}{=} s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) / 2. \quad (1-17)$$

Предложение 1.3

Для любого треугольника Δabc и любой точки p выполняются соотношения:

$$s(abc) = s(bca) = s(cab) = -s(bac) = -s(acb) = -s(cba) \quad (1-18)$$

$$s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca). \quad (1-19)$$

Доказательство. Для доказательства соотношений (1-18) достаточно проверить равенства

$$s(bca) = s(abc) \quad \text{и} \quad s(bac) = -s(abc),$$

которые вытекают из билинейности и кососимметричности площади параллелограмма:

$$\begin{aligned} 2s(bca) &= s(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) = s(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba}) = s(\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba}) = s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = 2s(abc) \\ 2s(bac) &= s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{bc}) = s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}) = s(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac}) = -s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = -2s(abc). \end{aligned}$$

¹См. лем. 1.2 на стр. 12.

Равенство (1-19) проверяется примерно так же:

$$\begin{aligned} 2s(abc) &= s(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = s(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pc}) = s(\overrightarrow{ap}, \overrightarrow{pc}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{ap}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = \\ &= s(\overrightarrow{pc}, \overrightarrow{pa}) + s(\overrightarrow{pa}, \overrightarrow{pb}) + s(\overrightarrow{pb}, \overrightarrow{pc}) = 2(s(pab) + s(pbc) + s(pca)). \end{aligned}$$

□

Пример 1.9 (площади ориентированных многоугольников)

Над полем $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ формула (1-18) имеет следующее наглядное описание. Будем называть *ориентацией* треугольника выбор одного из двух возможных направлений обхода его контура. Обход против часовой стрелки, при котором треугольник остаётся слева по ходу движения, считается положительным, и площади таких треугольников положительны. Площади треугольников, обходимых по часовой стрелке отрицательны. Ориентация треугольников согласована с обсуждавшейся на стр. 13 ориентацией параллелограммов: если выпустить из вершины треугольника два вектора по его сторонам, то ориентация натянутого на них параллелограмма совпадает с той ориентацией контура треугольника, что задаётся движением от конца первого вектора к концу второго по противолежащему выбранной вершине основанию, см. рис. 1♦8.

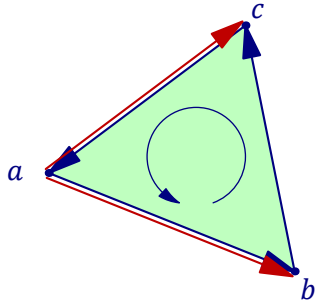


Рис. 1♦8. $2s(abc) = \det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$.

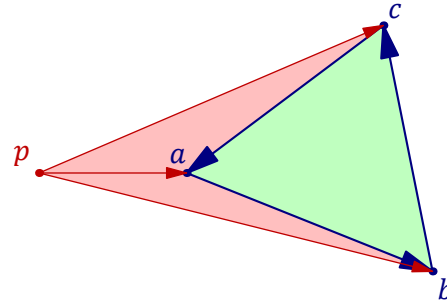


Рис. 1♦9.

$$s(abc) = s(pab) + s(pbc) + s(pca).$$

При таких договорённостях об ориентации, формула (1-19) утверждает, что площадь ориентированного треугольника abc можно вычислять обходя его контур против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на его стороны треугольников с вершиной в произвольно зафиксированной точке p , при этом исходящие из p векторы, используемые для вычисления площадей, всегда упорядочиваются по ходу движения. Так на рис. 1♦9 площадь Δpbc войдёт в сумму со знаком плюс, а площади Δpab и Δpac — с минусами, что и даст площадь Δabc .

Полученная формула очевидным образом обобщается на произвольную, возможно даже самопересекающуюся, как на рис. 1♦10, замкнутую ломаную $q_0 q_1 \dots q_m$, у которой $q_m = q_0$. Обходя контур ломаной против часовой стрелки и складывая площади опирающихся на её звенья треугольников с вершиной в произвольно заданной точке p , мы получим сумму

$$\sum_{i=0}^{m-1} s(pq_i q_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \det(\overrightarrow{pq_i}, \overrightarrow{pq_{i+1}})$$

равную сумме взятых с надлежащими знаками площадей многоугольников, ограничиваемых этой ломаной. А именно, многоугольники контур которых обходится против часовой стрелки¹,

¹Т. е. многоугольники, лежащие слева по ходу движения вдоль ломаной.

надлежит учитывать со знаком плюс, а многоугольники, обходимые по часовой стрелке¹ — со знаком минус.

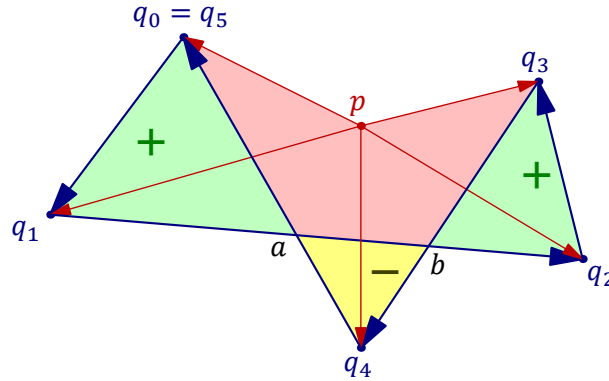


Рис. 1◊10. $\sum_{i=0}^4 s(pq_iq_{i+1}) = s(q_0q_1a) - s(baq_4) + s(bq_2q_3).$

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Покажите, ориентированные площади треугольников с общей вершиной и лежащими на одной прямой основаниями относятся как эти ориентированные основания, т. е. для любых трёх коллинеарных точек a, b, c и произвольной точки p выполняется равенство $s(pab) : s(pbc) = \overline{ab} : \overline{bc}$, где справа стоит такое число $\lambda \in \mathbb{k}$, что $\lambda \cdot \overline{bc} = \overline{ab}$.

1.6.1. Бариецентрические координаты. Зафиксируем на плоскости какой-нибудь треугольник $\triangle abc$ и сопоставим каждой тройке чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ точку

$$p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c.$$

Покажем, что это сопоставление устанавливает биекцию между такого рода тройками чисел и точками плоскости. Равенство $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$ означает, что $\overline{ap} = \beta \cdot \overline{ab} + \gamma \cdot \overline{ac}$, т. е. числа β, γ являются координатами вектора \overline{ap} в базисе $\overline{ab}, \overline{ac}$. Так как пары координат биективно соответствуют векторам, а векторы \overline{ap} — точкам p , мы имеем биекцию между точками p и произвольными парами чисел (β, γ) . Но такие пары биективно соответствуют тройкам $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \beta - \gamma, \beta, \gamma)$. Числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}$ с суммой $\alpha + \beta + \gamma = 1$ называются **бариецентрическими координатами** точки $p = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$ относительно $\triangle abc$. Использование тройки чисел α, β, γ , связанных соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 1$, вместо пары чисел β, γ часто оказывается более удобным, поскольку не привязано к выбору той или иной вершины в треугольнике, что позволяет видеть и использовать имеющиеся в задаче симметрии.

ПРИМЕР 1.10 (БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ КАК ОТНОШЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ)

Согласно правилу Крамера², разложение произвольного вектора $\overline{ap} \in V$ по базису $\overline{ab}, \overline{ac}$ имеет вид

$$\overline{ap} = \frac{s(\overline{ap}, \overline{ac})}{s(\overline{ab}, \overline{ac})} \cdot \overline{ab} + \frac{s(\overline{ab}, \overline{ap})}{s(\overline{ab}, \overline{ac})} \cdot \overline{ac} = \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot \overline{ab} + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot \overline{ac}.$$

Поэтому бариецентрические координаты (α, β, γ) точки p относительно $\triangle abc$ равны

$$\gamma = \frac{s(abp)}{s(abc)}, \quad \beta = \frac{s(pca)}{s(abc)}, \quad \alpha = 1 - \beta - \gamma = \frac{s(abc) - s(abp) - s(pca)}{s(abc)} = \frac{s(pbc)}{s(abc)},$$

¹Т. е. лежащие справа по ходу движения.

²См. [сл. 1.3](#) на стр. 14.

т. е. являются отношениями площадей треугольников с вершиной p и основаниями на сторонах $\triangle abc$ к площади треугольника $\triangle abc$, ориентированных так, что стороны $\triangle abc$ проходятся в одном направлении как при обходе самого $\triangle abc$, так и при обходе каждого из треугольников с вершиной в точке p :

$$p = \frac{s(pbc)}{s(abc)} \cdot a + \frac{s(apc)}{s(abc)} \cdot b + \frac{s(abp)}{s(abc)} \cdot c. \quad (1-20)$$

ПРИМЕР 1.11 (ЦЕНТР ТРЕУГОЛЬНИКА)

Равновесный барицентр $o = (a + b + c)/3$ вершин треугольника $\triangle abc$ называется *центром* этого треугольника. Согласно [упр. 1.8](#) точка o является центром тяжести любой из вершин и середины противоположной ей стороны, взятой с весом 2. Таким образом, o является точкой пересечения медиан $\triangle abc$ и делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины (см. [рис. 1◊11](#)). Из формулы (1-20) вытекает, что центр треугольника однозначно характеризуется как единственная такая точка o , для которой $s(oab) = s(obc) = s(oca)$.

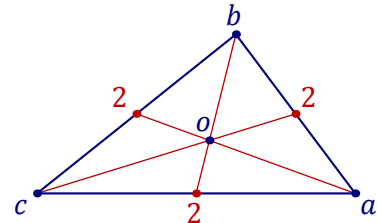


Рис. 1◊11. Центр треугольника.

§2. Аффинные преобразования

2.1. Преобразования, переводящие прямые в прямые. Рассмотрим ассоциированную с двумерным векторным пространством V над произвольным полем \mathbb{k} аффинную плоскость $\mathbb{A}(V)$. Биективное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ называется *полуаффинным*, если оно переводит прямые в прямые. Такие отображения составляют группу преобразований плоскости $\mathbb{A}(V)$ в смысле определения со стр 6.

2.1.1. Дифференциал полуаффинного преобразования. В силу своей биективности, каждое полуаффинное преобразование $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ переводит параллельные прямые в параллельные, а значит, параллелограммы — в параллелограммы. Поэтому из равенства $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ вытекает равенство $\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \overrightarrow{\varphi(r)\varphi(s)}$. Это равенство верно, даже когда точки p, q, r, s коллинеарны и не образуют параллелограмма: в этом случае надо выбрать вектор $\overrightarrow{xu} = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ на параллельной (pq) прямой ($xu \neq (pq)$), как на рис. 2♦1, и использовать параллелограммы $pqux$ и $rxus$. Мы заключаем, что каждое полуаффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ корректно задаёт отображение векторов

$$D_\varphi : V \rightarrow V, \quad \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}, \quad (2-1)$$

которое называется *дифференциалом* отображения φ . Отображение φ однозначно восстанавливается, если известен его дифференциал и образ $\varphi(p)$ хоть какой-нибудь точки p : произвольная точка q переводится преобразованием φ в точку $\varphi(q) = \varphi(p) + \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = \varphi(p) + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$.

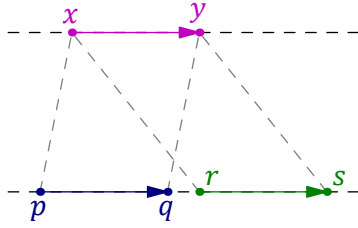


Рис. 2♦1. Корректность определения D_φ .

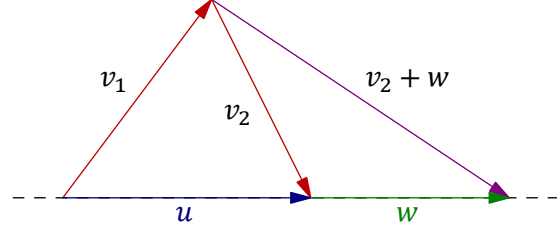


Рис. 2♦2. Аддитивность D_φ .

Так как φ переводит параллелограмм со сторонами u, w в параллелограмм со сторонами $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$, дифференциал аддитивен:

$$D_\varphi(u + w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w), \quad (2-2)$$

причём это равенство справедливо даже когда векторы u и w пропорциональны, поскольку вектор u всегда можно представить в виде суммы векторов v_1 и v_2 , каждый из которых не пропорционален u , как на рис. 2♦2, и тогда

$$\begin{aligned} D_\varphi(u + w) &= D_\varphi(v_1 + v_2 + w) = D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2 + w) = \\ &= D_\varphi(v_1) + D_\varphi(v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(v_1 + v_2) + D_\varphi(w) = D_\varphi(u) + D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Поскольку φ переводит прямые в прямые, D_φ переводит векторы, пропорциональные данному вектору v , в векторы, пропорциональные $D_\varphi(v)$. Поэтому каждый ненулевой вектор $v \in V$ задаёт отображение $\psi_v : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$, значение которого на числе $\lambda \in \mathbb{k}$ определяется равенством

$$D_\varphi(\lambda v) = \psi_v(\lambda) \cdot D_\varphi(v). \quad (2-3)$$

ЛЕММА 2.1

Отображение $\psi = \psi_v : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ одно и то же для всех векторов $v \in V$. Оно биективно и перестановочно со сложением и умножением, т. е. $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Доказательство. Поскольку отображение ψ_v является ограничением биективного и переводящего прямые в прямые отображения φ на прямую, оно тоже биективно для каждого v . Покажем, что $\psi_u = \psi_w$ для любых двух непропорциональных векторов u, w . Так как пересекающиеся в одной точке прямые переходят в прямые, которые тоже пересекаются в одной точке, векторы $D_\varphi(u)$ и $D_\varphi(w)$ не пропорциональны и образуют базис пространства V . Из аддитивности D_φ вытекает, что

$$\begin{aligned} D_\varphi(\lambda(u + w)) &= \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u + w) = \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_{u+w}(\lambda) \cdot D_\varphi(w) \\ &\parallel \\ D_\varphi(\lambda u + \lambda w) &= D_\varphi(\lambda u) + D_\varphi(\lambda w) = \psi_u(\lambda) \cdot D_\varphi(u) + \psi_w(\lambda) \cdot D_\varphi(w). \end{aligned}$$

Из единственности разложения вектора по базису мы заключаем, что для всех $\lambda \in \mathbb{K}$ выполняются равенства $\psi_u(\lambda) = \psi_{u+w}(\lambda) = \psi_w(\lambda)$, что и требовалось. Если векторы u и w пропорциональны, то для любого непропорционального им вектора v будут выполняться равенства $\psi_u = \psi_v = \psi_w$. Таким образом, отображение ψ_v одно и то же для всех v и может быть обозначено просто ψ . Далее, из аддитивности D_φ вытекают равенства

$$\begin{aligned} \psi(\lambda + \mu) \cdot D_\varphi(v) &= D_\varphi((\lambda + \mu)v) = D_\varphi(\lambda v + \mu v) = D_\varphi(\lambda v) + D_\varphi(\mu v) = \\ &= \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(v) + \psi(\mu) \cdot D_\varphi(v) = (\psi(\lambda) + \psi(\mu)) \cdot D_\varphi(v), \end{aligned}$$

откуда $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$. Равенства

$$\psi(\lambda\mu) \cdot D_\varphi(v) = D_\varphi((\lambda\mu)v) = D_\varphi(\lambda(\mu v)) = \psi(\lambda) \cdot D_\varphi(\mu v) = \psi(\lambda)\psi(\mu) \cdot D_\varphi(v)$$

показывают, что $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda) \cdot \psi(\mu)$. □

2.1.2. Отступление об автоморфизмах полей. Отображение поля в себя $\psi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ называется *гомоморфизмом*, если $\psi(\lambda + \mu) = \psi(\lambda) + \psi(\mu)$ и $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Убедитесь, что каждый гомоморфизм $\psi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ либо инъективен, либо тождественно нулевой¹, и обладает свойствами $\psi(0) = 0$ и $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$, а всякий ненулевой гомоморфизм — свойствами $\psi(1) = 1$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при $\mu \neq 0$.

Биективные гомоморфизмы $\mathbb{K} \simeq \mathbb{K}$ называются *автоморфизмами* поля \mathbb{K} . Из [упр. 2.1](#) вытекает, что каждый автоморфизм $\psi : \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}$ тождественно действует на всех элементах вида

$$\pm(1 + \dots + 1)/(1 + \dots + 1) \in \mathbb{K},$$

где в числителе и в знаменателе стоят суммы каких-то количеств единиц поля \mathbb{K} , причём сумма в знаменателе отлична от нуля. Поскольку в поле \mathbb{Q} и во всех полях вычетов $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое, никаких других элементов нет, у этих полей нет и никаких автоморфизмов кроме тождественного.

¹Т. е. $\psi(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{K}$.

Всякий автоморфизм $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ тождественно действует на подполе $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и является строго монотонной функцией¹, поскольку неравенство $\lambda < \mu$ равносильно тому, что $\mu - \lambda = \alpha^2$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, откуда $\psi(\mu) - \psi(\lambda) = \psi(\mu - \lambda) = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 > 0$, т. е. $\psi(\lambda) < \psi(\mu)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.2 (по анализу). Пусть строго монотонная функция $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(x) = x$ при $x \in \mathbb{Q}$. Покажите, что $f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, у поля \mathbb{R} тоже нет никаких автоморфизмов кроме тождественного.

Напротив, у поля комплексных чисел \mathbb{C} имеется нетождественный автоморфизм комплексного сопряжения $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$. Аналогичные нетривиальные автоморфизмы имеются у всех полей алгебраических чисел².

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Покажите что множество чисел $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ является полем и укажите нетождественный автоморфизм этого поля.

2.1.3. Полулинейные отображения. Отображение векторных пространств $F : U \rightarrow W$ над полем \mathbb{K} называется *полулинейным*, если существует такой автоморфизм $\psi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, что

$$F(\lambda u + \mu w) = \psi(\lambda)F(u) + \psi(\mu)F(w)$$

для всех векторов $u, w \in U$ и всех чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Если автоморфизм $\psi = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ тождественный, то полулинейное отображение является линейным в смысле н° 1.1.1 на стр. 9. В частности, над простыми полями \mathbb{Q} и $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, а также над полем вещественных чисел \mathbb{R} все полулинейные отображения линейны.

Из формул (2-2), (2-3) и лем. 2.1 мы заключаем, что дифференциал $D_\varphi : V \rightarrow V$ любого полуаффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ является полулинейным отображением векторных пространств, а если основное поле равно \mathbb{Q} , \mathbb{R} или \mathbb{F}_p , то — линейным отображением. Суммируем сказанное в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1

Если биективное преобразование F аффинной плоскости $\mathbb{A}(V)$ переводит прямые в прямые, то существует такое полулинейное биективное преобразование D_φ векторного пространства V , что $\varphi(p) = \varphi(q) + D_\varphi(\overrightarrow{qp})$ для любых двух точек $p, q \in \mathbb{A}(V)$. Над полями \mathbb{R} , \mathbb{Q} и \mathbb{F}_p преобразование D_φ автоматически является линейным. \square

2.2. Аффинные отображения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ между аффинными пространствами, ассоциированными с векторными пространствами U, W , называется *аффинным*, если найдётся такая точка $o \in \mathbb{A}(U)$, что отображение между векторными пространствами

$$D_\varphi : U \rightarrow W, \quad \overrightarrow{op} \mapsto \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} \quad (2-4)$$

линейно, т. е. $D_\varphi(\alpha \overrightarrow{oa} + \beta \overrightarrow{ob}) = \alpha D_\varphi(\overrightarrow{oa}) + \beta D_\varphi(\overrightarrow{ob})$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $a, b \in \mathbb{A}(U)$. Из теор. 2.1 вытекает, что любое биективное преобразование аффинной плоскости над полем \mathbb{Q} , \mathbb{R} или \mathbb{F}_p , переводящее прямые в прямые, аффинно.

ЛЕММА 2.2

Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ аффинно, то отображение (2-4) линейно для каждой точки $o \in \mathbb{A}(U)$ и не зависит от выбора этой точки.

¹Т. е. для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ неравенство $x_1 < x_2$ влечёт неравенство $\psi(x_1) < \psi(x_2)$.

²Т. е. полей, которые содержат поле \mathbb{Q} и линейно порождаются над \mathbb{Q} корнями многочленов с целыми коэффициентами.

Доказательство. Если построенное по некоторой точке $o \in \mathbb{A}(U)$ отображение D_φ из формулы (2-4) линейно, то для любой точки $p \in \mathbb{A}(U)$ и любого вектора $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op} \in U$ выполняется равенство

$$D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = D_\varphi(\overrightarrow{oq}) - D_\varphi(\overrightarrow{op}) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(q)} - \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}.$$

Тем самым, $D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$ для всех $p, q \in \mathbb{A}(U)$, т. е. при замене точки o на точку p мы получим то же самое отображение $D_\varphi : U \rightarrow W$, что и в точке o . \square

Предложение 2.1

Отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ аффинно тогда и только тогда, когда оно переводит барицентрические комбинации точек в барицентрические комбинации их образов с теми же весами, т. е. $\varphi(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m) = \mu_1 \cdot \varphi(p_1) + \mu_2 \cdot \varphi(p_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(p_m)$ для любых $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{A}(U)$ и любых $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ с $\sum \mu_i = 1$.

Доказательство. Если отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ аффинно, то при любом выборе начальной точки o и любых весах $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ с $\sum \mu_i = 1$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_m p_m) &= \varphi(o + \mu_1 \overrightarrow{op_1} + \mu_2 \overrightarrow{op_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{op_m}) = \\ &= \varphi(o) + D_\varphi(\mu_1 \overrightarrow{op_1} + \mu_2 \overrightarrow{op_2} + \dots + \mu_m \overrightarrow{op_m}) = \\ &= \varphi(o) + \mu_1 \cdot D_\varphi(\overrightarrow{op_1}) + \mu_2 \cdot D_\varphi(\overrightarrow{op_2}) + \dots + \mu_m \cdot D_\varphi(\overrightarrow{op_m}) = \\ &= \mu_1 \cdot (\varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{op_1})) + \dots + \mu_m \cdot (\varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{op_m})) = \\ &= \mu_1 \cdot \varphi(p_1) + \mu_2 \cdot \varphi(p_2) + \dots + \mu_m \cdot \varphi(p_m). \end{aligned}$$

Наоборот, пусть отображение $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ сохраняет барицентрические комбинации. Тогда при любом выборе начальной точки o для всех точек $p, q \in \mathbb{A}(U)$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ точка

$$r = o + \lambda \cdot \overrightarrow{op} + \mu \cdot \overrightarrow{oq} = (1 - \lambda - \mu)o + \lambda p + \mu q$$

перейдёт в точку $\varphi(r) = (1 - \lambda - \mu)\varphi(o) + \lambda\varphi(p) + \mu\varphi(q) = \varphi(o) + \lambda\overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} + \mu\overrightarrow{\varphi(o)\varphi(q)}$. Зафиксируем точку o и определим отображение $D_\varphi : U \rightarrow W$ правилом $D_\varphi(\overrightarrow{or}) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(r)}$. Тогда для любой точки r получаем $\varphi(r) = \varphi(o) + D_\varphi(\overrightarrow{or})$, а для всех векторов $\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq} \in U$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ имеем равенство

$$D_\varphi(\lambda \overrightarrow{op} + \mu \overrightarrow{oq}) = D_\varphi(\overrightarrow{or}) = \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(r)} = \lambda \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(p)} + \mu \overrightarrow{\varphi(o)\varphi(q)} = \lambda D_\varphi(\overrightarrow{op}) + \mu D_\varphi(\overrightarrow{oq}),$$

означающее, что отображение $D_\varphi : U \rightarrow W$ линейно. \square

2.2.1. Дифференциал аффинного отображения. Линейное отображение

$$D_\varphi : U \rightarrow W, \quad \overrightarrow{pq} \mapsto \overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$$

называется дифференциалом аффинного отображения $\varphi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$.

Если аффинные отображения $\varphi, \psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ имеют одинаковый дифференциал, то для всех $p, q \in \mathbb{A}(U)$ выполняется равенство $\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)} = D_\varphi(\overrightarrow{pq}) = D_\psi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\psi(p)\psi(q)}$. По [упр. 1.6](#) на стр. 15 оно равносильно равенству $\overrightarrow{\varphi(p)\psi(p)} = \overrightarrow{\varphi(q)\psi(q)}$, т. е. вектор $w = \overrightarrow{\varphi(p)\psi(p)}$ не зависит от выбора точки $p \in \mathbb{A}(U)$. Это означает, что $\psi = \tau_w \circ \varphi$ является композицией отображения φ с последующим сдвигом $\tau_w : \mathbb{A}(W) \rightarrow \mathbb{A}(W)$, $p \mapsto p + w$, на вектор w .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2

Если отображения $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(W)$ и $\psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ аффинны, то их композиция

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{A}(U) \rightarrow \mathbb{A}(W), \quad x \mapsto \varphi(\psi(x)),$$

тоже аффинна и имеет дифференциал $D_{\varphi \circ \psi} = D_\varphi \circ D_\psi$.

Доказательство. Отображение $D_{\varphi \circ \psi} : U \rightarrow W$, переводящее вектор $\overrightarrow{pq} \in U$ в вектор

$$\overrightarrow{\varphi(\psi(p))\varphi(\psi(q))} = D_\varphi(\overrightarrow{\psi(p)\psi(q)}) = D_\varphi(D_\psi(\overrightarrow{pq})) \in W,$$

является композицией $D_\varphi \circ D_\psi$ линейных отображений D_φ и D_ψ . Поэтому оно тоже линейно: для любых $a, b \in U$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ имеем равенства $D_\varphi(D_\psi(\alpha a + \beta b)) = D_\varphi(\alpha D_\psi(a) + \beta D_\psi(b)) = \alpha D_\varphi(D_\psi(a)) + \beta D_\varphi(D_\psi(b))$. \square

2.3. Запись линейных отображений в координатах. Если в двумерном векторном пространстве V зафиксирован базис e_1, e_2 , всякое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$ однозначно задаётся указанием образов базисных векторов $f_1 = \varphi(e_1)$ и $f_2 = \varphi(e_2)$. Произвольный вектор $v = e_1 x_1 + e_2 x_2$ переходит при этом в вектор

$$\varphi(v) = \varphi(e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2) = \varphi(e_1) \cdot x_1 + \varphi(e_2) \cdot x_2 = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2. \quad (2-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Убедитесь, что при любом выборе векторов $f_1, f_2 \in V$ формула (2-5) задаёт линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$.

Если векторы f_1 и f_2 имеют в базисе (e_1, e_2) координаты $\begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix}$, т. е.

$$f_1 = e_1 \cdot \varphi_{11} + e_2 \cdot \varphi_{21} \quad \text{и} \quad f_2 = e_1 \cdot \varphi_{12} + e_2 \cdot \varphi_{22}, \quad (2-6)$$

то по формуле (2-5) действие отображения φ на произвольный вектор v с координатами $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ задаётся правилом

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}, \quad (2-7)$$

которое принято сокращённо записывать как $x \mapsto \Phi_e x$, где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi_e x = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом используются следующие соглашения: под произведением ab строки a на столбец b , высота которого равна ширине строки, понимается сумма произведений

$$(a_1, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s, \quad (2-8)$$

а под произведением $P = AB$ таблицы A из m строк ширины s на таблицу B из n столбцов той же самой высоты s понимается таблица из m строк и n столбцов, у которой в пересечении i -той

строки и j -того столбца стоит произведение i -той строки таблицы A на j -тый столбец таблицы B , вычисленное по формуле (2-8):

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{v=1}^s a_{iv} b_{vj}. \quad (2-9)$$

Таблицы из m строк и n столбцов принято называть *матрицами* размера $m \times n$. Матрица

$$\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного отображения* φ в базисе $e = (e_1, e_2)$, а её определитель

$$\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$$

называется *определителем отображения* φ и обозначается $\det \varphi$. Если положить

$$e = (e_1, e_2), \quad \varphi(e) = (f_1, f_2),$$

где в правых частях стоят 1×2 матрицы из векторов, то две формулы (2-6) свернутся в одно матричное равенство $\varphi(e) = e \Phi_e$. Разложение $v = e_1 x_1 + e_2 x_2$ вектора v по базису e в матричных обозначениях записывается равенством $v = ex$, в котором $e = (e_1, e_2)$ — строчка из векторов, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — столбец из чисел. Линейность отображения $\varphi : V \rightarrow V$ означает, что

$$\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x.$$

Эти равенства являются матричной записью вычисления (2-5). Подставляя $\varphi(e) = e \Phi_e$ в правую часть, мы заключаем, что $\varphi(v) = e \Phi_e x$, т. е. столбец координат вектора $\varphi(v)$ в базисе e равен произведению $\Phi_e x$ матрицы Φ_e на столбец x .

Следующие далее утверждения мы будем доказывать в предположении, что $\dim V = 2$. В полной общности мы вернёмся к ним чуть позже.

Предложение 2.3

Композиция $\psi \circ \varphi$ линейных отображений $\psi, \varphi : V \rightarrow V$ с матрицами Ψ_e и Φ_e линейна и имеет матрицу $\Psi_e \Phi_e$. В частности, умножение 2×2 матриц ассоциативно, т. е. $(AB)C = A(BC)$.

Доказательство. Линейность композиции проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} \psi\varphi(\lambda u + \mu w) &= \psi(\varphi(\lambda u + \mu w)) = \psi(\lambda\varphi(u) + \mu\varphi(w)) = \\ &= \lambda\psi(\varphi(u)) + \mu\psi(\varphi(w)) = \lambda\psi\varphi(u) + \mu\psi\varphi(w). \end{aligned}$$

Вычисление: $\psi(\varphi(e)) = \psi(e \cdot \Phi_e) = \psi(e) \cdot \Phi_e = e \cdot \Psi_e \cdot \Phi_e$ показывает, что композиция $\psi\varphi$ имеет в базисе e матрицу $\Psi_e \Phi_e$. Поскольку композиция отображений очевидным образом ассоциативна¹, ассоциативно и умножение матриц. \square

¹Для любых трёх отображений $\alpha : A \rightarrow B$, $\beta : B \rightarrow C$, $\gamma : C \rightarrow D$ обе композиции $(\gamma\beta)\alpha$ и $\gamma(\beta\alpha)$ действуют на каждую точку $a \in A$ по одному и тому же правилу $a \mapsto \gamma(\beta(\alpha(a)))$.

Предложение 2.4

Для любой формы площади $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ и любых векторов $v_1, v_2 \in V$

$$s(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = s(v_1, v_2) \cdot \det \Phi_e. \quad (2-10)$$

В частности, определитель $\det \varphi = \det \Phi_e = s(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) / s(v_1, v_2)$ зависит от φ и не зависит от базиса e . Линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$ биективно если и только если $\det \varphi \neq 0$.

Доказательство. Образует из векторов v_1 и v_2 матрицу $v = (v_1, v_2)$ размера 1×2 . Тогда $v = e C_{ev}$, где C_{ev} — числовая матрица размера 2×2 , столбцы которой являются столбцами координат векторов v_1, v_2 в базисе $e = (e_1, e_2)$. Поскольку отображение φ линейно $(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \varphi(v) = \varphi(e C_{ev}) = \varphi(e) C_{ev} = (f_1, f_2) C_{ev}$, где $(f_1, f_2) = (\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = (e_1, e_2) \Phi_e$. По сл. 1.2 на стр. 14 для любой ненулевой формы площади s на V выполняются равенства

$$s(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = s(f_1, f_2) \det C_{ev} = s(e_1, e_2) \det \Phi_e \det C_{ev}.$$

Так как $s(e_1, e_2) \det C_{ev} = s(v_1, v_2)$, мы получаем (2-10). Если $\det \Phi_e = \det(f_1, f_2) \neq 0$, то пара векторов $f = (f_1, f_2)$ тоже является базисом в V . Отображение φ переводит вектор $u = ex$ со столбцом координат x в базисе e в вектор $\varphi(u) = \varphi(e)x = fx$ с тем же самым столбцом координат x , но только в базисе f . Тем самым, оно биективно. Если же $\det(f_1, f_2) = 0$, то $f_1 = \lambda f_2$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}$, откуда $\varphi(e_1) = \varphi(\lambda e_2)$. Поскольку $e_1 \neq \lambda e_2$, отображение φ не биективно. \square

Упражнение 2.5. Докажите для 2×2 матриц A и B равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

2.4. Запись аффинных отображений в координатах. Зафиксируем в аффинной плоскости \mathbb{A}^2 над двумерным векторным пространством V координатный репер $(o; e_1, e_2)$. Пусть аффинное отображение $\varphi : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ переводит его начальную точку o в точку $b = \varphi(o)$ с координатами $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, а дифференциал $D_\varphi : V \rightarrow V$ имеет в базисе $e = (e_1, e_2)$ матрицу

$$\Phi_e = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда действие отображения φ на произвольную точку с координатами $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ описывается матричной формулой $\varphi : x \mapsto b + \Phi_e x$, которая в развёрнутом виде выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 \\ \beta_2 + \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2.6. Убедитесь в этом, и выясните, как аффинное преобразование $x \mapsto b + Ax$ изменяет площади ориентированных параллелограммов.

Мы заключаем, что аффинное отображение плоскости однозначно задаётся своим действием на произвольно выбранный аффинный репер: для любого аффинного репера $(p; e_1, e_2)$, любой точки q и любых векторов f_1, f_2 существует единственное такое аффинное отображение φ , что $\varphi(p) = q$, $D_\varphi(e_1) = f_1$, $D_\varphi(e_2) = f_2$.

2.5. Аффинная группа. Биективные аффинные отображения $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ называются *аффинными автоморфизмами* или *аффинными преобразованиями*. Они образуют группу преобразований¹, которая обозначается $\text{Aff}(V)$ и называется *аффинной группой* векторного пространства V . Аффинная группа координатного пространства \mathbb{k}^n обозначается $\text{Aff}_n(\mathbb{k})$.

2.5.1. Сравнение аффинной и линейной групп. Аффинная группа $\text{Aff}(V)$ содержит подгруппу *параллельных переносов* или *сдвигов* $T \subset \text{Aff}(V)$, изоморфную аддитивной группе векторов пространства V . Вектору $v \in V$ отвечает при этом изоморфизме сдвиг

$$\tau_v : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V), \quad p \mapsto p + v,$$

а композиции сдвигов отвечает сложение векторов: $\tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w}$. Поскольку для любого аффинного преобразования $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ и произвольной точки $p \in \mathbb{A}(V)$ выполняются равенства $\varphi(\tau_v(p)) = \varphi(p+v) = \varphi(p) + D_\varphi(v) = \tau_{D_\varphi(v)}(\varphi(p))$ сдвиги τ_v коммутируют с произвольными аффинными преобразованиями по правилу

$$\varphi \circ \tau_v = \tau_{D_\varphi(v)} \circ \varphi \quad \text{или} \quad \varphi \circ \tau_v \circ \varphi^{-1} = \tau_{D_\varphi(v)}. \quad (2-11)$$

Множество всех аффинных преобразований, оставляющих на месте произвольно выбранную точку $p \in \mathbb{A}^2$, образует в $\text{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *стабилизатором* точки p и обозначается

$$\text{Stab}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in \text{Aff}(V) \mid \varphi(p) = p \}.$$

Аффинное преобразование $\varphi \in \text{Stab}_p$ действует на произвольную точку $q \in \mathbb{A}(V)$ по правилу $\varphi(q) = p + D_\varphi(\overline{pq})$. В частности, два аффинных преобразования $\varphi, \psi \in \text{Stab}_p$ совпадают если и только если $D_\varphi = D_\psi$. Таким образом, мы имеем инъективное отображение

$$D : \text{Stab}_p \rightarrow \text{GL}(V), \quad \varphi \mapsto D_\varphi, \quad (2-12)$$

переводящее аффинное преобразование в его дифференциал. Это отображение является изоморфизмом групп, поскольку каждый линейный автоморфизм $F : V \xrightarrow{\sim} V$ является дифференциалом аффинного преобразования

$$F_p : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V), \quad x \mapsto p + F(\overline{px}), \quad (2-13)$$

оставляющего точку p на месте.

Предложение 2.5

Зафиксируем произвольным образом точку $p \in \mathbb{A}(V)$. Тогда для каждого аффинного преобразования $\varphi \in \text{Aff}(V)$ существуют единственные такие вектор $v \in V$ и линейный автоморфизм $F \in \text{GL}(V)$, что $\varphi = \tau_v \circ F_p$. При этом для всех $u, w \in V$ и всех $F, G \in \text{GL}(V)$

$$(\tau_u \circ F_p) \circ (\tau_w \circ G_p) = \tau_{u+F(w)} \circ (F \circ G)_p. \quad (2-14)$$

Доказательство. Пусть $\varphi(p) = q$. Тогда $\varphi = \tau_v \circ \psi$, где $v = \overline{pq}$ и $\psi = \tau_{-v} \circ \varphi \in \text{Stab}_p$. Тем самым, $\psi = F_p$ для некоторого линейного преобразования $F \in \text{GL}(V)$. Если аффинное преобразование φ допускает два разложения $\tau_v \circ F_p = \varphi = \tau_u \circ G_p$, то применяя к правой и левой частям этого равенства обратный к τ_v сдвиг τ_{-v} , заключаем, что $F_p = \tau_{u-v} \circ G_p$. Так как и F_p , и

¹См. обсуждение на стр. 6

G_p оставляют точку p на месте, сдвиг τ_{u-v} переводит точку p в себя, откуда $u = v$ и $\tau_{u-v} = \text{Id}$. Поэтому $F_p = G_p$ и $F = G$. Соотношение (2-14) вытекает из формулы (2-11):

$$\tau_u \circ F_p \circ \tau_w \circ G_p = \tau_u \circ F_p \circ \tau_w \circ F_p^{-1} \circ F_p \circ G_p = \tau_u \circ \tau_{F_p(w)} \circ F_p \circ G_p.$$

□

Замечание 2.1. Из предл. 2.5 вытекает, что фиксация точки p аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ позволяет отождествить множество $\text{Aff}(V)$ с прямым произведением множеств $V \times \text{GL}(V)$ так, что имеющаяся в группе $\text{Aff}(V)$ композиция будет задаваться в терминах $V \times \text{GL}(V)$ правилом

$$(u, F) \circ (w, G) = (u + F(w), FG).$$

В этой ситуации говорят, что группа $\text{Aff}(V)$ является *полупрямым произведением* групп V и $\text{GL}(V)$, и пишут $\text{Aff}(V) = V \rtimes \text{GL}(V)$. Обратите внимание, что отождествление множества $\text{Aff}(V)$ с множеством $V \times \text{GL}(V)$ требует выбора точки $p \in \mathbb{A}(V)$, и два разложения $\tau_u \circ F_p = \varphi = \tau_w \circ F_q$ одного и того же аффинного преобразования $\varphi \in \text{Aff}(V)$, возникающие при фиксации разных точек $p, q \in \mathbb{A}(V)$, имеют один и тот же линейный автоморфизм $F = D_{F_p} = D_{F_q} = D_\varphi \in \text{GL}(V)$, но, вообще говоря, разные сдвиги $\tau_u \neq \tau_w$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь, что $w = u - \overrightarrow{pq} + D_\varphi(\overrightarrow{pq})$ и что этот вектор отличен от u если $D_\varphi(\overrightarrow{pq}) \neq \overrightarrow{pq}$.

2.5.2. Аффинная конгруэнтность фигур. Две фигуры в аффинном пространстве называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинный автоморфизм, переводящий одну их этих фигур в другую.

Следствие 2.1

Для любых треугольников $\Delta p_0 p_1 p_2, \Delta q_0 q_1 q_2$ на аффинной плоскости существует единственное аффинное преобразование этой плоскости, переводящее p_i в q_i при всех $i = 0, 1, 2$.

Доказательство. Как мы видели выше, имеется единственное такое аффинное отображение

$$\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V),$$

что $\varphi(p_0) = q_0$ и $D_\varphi(\overrightarrow{p_0 p_1}) = \overrightarrow{q_0 q_1}$, $D_\varphi(\overrightarrow{p_0 p_2}) = \overrightarrow{q_0 q_2}$. Произвольная точка $y \in \mathbb{A}(V)$ с радиус вектором $\overrightarrow{q_0 y} = \lambda \overrightarrow{q_0 q_1} + \mu \overrightarrow{q_0 q_2}$ является при этом образом единственной точки $x \in \mathbb{A}(V)$ с радиус вектором $\overrightarrow{p_0 x} = \lambda \overrightarrow{p_0 p_1} + \mu \overrightarrow{p_0 p_2}$. □

Следствие 2.2

Аффинные преобразования плоскости переводят прямые в прямые, сохраняя параллельность. Любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 переводятся в любые три различные попарно не параллельные и не пересекающиеся в одной точке прямые $\ell'_0, \ell'_1, \ell'_2$ единственным аффинным преобразованием. □

Предложение 2.6

Если три различные прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 пересекаются в точке o , а три различные прямые $\ell'_0, \ell'_1, \ell'_2$ пересекаются в точке o' , то существует аффинное преобразование, переводящее ℓ_i в ℓ'_i при всех $i = 0, 1, 2$. Такое преобразование единственно с точностью до композиции с гомотетиями относительно точек o и o' .

Доказательство. Зафиксируем на всех прямых ℓ_i и ℓ'_i направляющие векторы v_i и v'_i . Тогда

$$v_0 = x_1 v_1 + x_2 v_2, \quad v'_0 = x_1 v'_1 + x_2 v'_2, \quad (2-15)$$

где все четыре числа $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{K}$ отличны от нуля. Аффинное преобразование φ переводит прямые ℓ_1, ℓ_2 , соответственно, в прямые ℓ'_1, ℓ'_2 если и только если $\varphi(o) = o'$ и $D_\varphi(v_1) = \lambda_1 v'_1$, $D_\varphi(v_2) = \lambda_2 v'_2$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Такое преобразование переводит прямую ℓ_0 в ℓ'_0 если и только если $D_\varphi(v_0) = \mu v'_0$ для некоторого $\mu \in \mathbb{K}$. Подставляя в это равенство разложения (2-15) и пользуясь линейностью D_φ , заключаем что $\lambda_1 x_1 = \mu x'_1$ и $\lambda_2 x_2 = \mu x'_2$, откуда числа $\lambda_1 = \mu x_1 / x'_1$ и $\lambda_2 = \mu x_2 / x'_2$ определяются однозначно с точностью до умножения на константу μ . Поскольку преобразование φ однозначно задаётся этими числами, оно существует и единственно с точностью до гомотетии с центром в точке o или o' . \square

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Пусть три различные прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 пересекаются в точке o . Покажите, что существует такая тройка точек $p_1 \in \ell_1, p_2 \in \ell_2, p_3 \in \ell_3$, что $\overrightarrow{op_3} = \overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2}$, и любые две такие тройки получаются друг из друга гомотетией с центром в o . Получите отсюда другое доказательство предл. 2.6

2.6. Двойные отношения. Две четвёрки конкурентных¹ прямых на аффинной плоскости не всегда аффинно конгруэнтны. Полным инвариантом, характеризующим четыре пересекающиеся в точке o прямые $\ell_1 = (op_1), \ell_2 = (op_2), \ell_3 = (op_3), \ell_4 = (op_4)$ с точностью до аффинного преобразования является их двойное отношение²

$$[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(op_1 p_3)}{s(op_2 p_3)} : \frac{s(op_1 p_4)}{s(op_2 p_4)} = \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_3})}{s(\overrightarrow{op_2}, \overrightarrow{op_3})} : \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_4})}{s(\overrightarrow{op_2}, \overrightarrow{op_4})}. \quad (2-16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.9. Убедитесь, что двойное отношение не зависит ни от выбора ненулевой функции площади s , ни от выбора отличных от o точек $p_i \in \ell_i$, а также не меняется, если как-либо разбить четвёрку на две пары и одновременно переставить между собою прямые в каждой из пар: $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_2, \ell_1, \ell_4, \ell_3] = [\ell_3, \ell_4, \ell_1, \ell_2] = [\ell_4, \ell_3, \ell_2, \ell_1]$.

Расположим тройку точек p_1, p_2, p_3 так, чтобы четырёхугольник $op_1 p_3 p_2$ оказался параллелограммом, как в упр. 2.8, а в качестве p_4 возьмём точку пересечения прямой ℓ_4 с прямой $(p_1 p_3)$, см. рис. 2◊3. Тогда $p_4 = p_2 + t \cdot \overrightarrow{p_2 p_3}$, где число $t = \overrightarrow{p_2 p_4} / \overrightarrow{p_2 p_3}$ является аффинной координатой точки p_4 на прямой $(p_2 p_3)$ относительно репера с началом p_2 и базисным вектором $e = \overrightarrow{p_2 p_3}$. Положение четвёртой прямой однозначно характеризуется этой координатой в том смысле, что отображение $\ell_4 \mapsto t$ устанавливает биекцию между множеством всех проходящих через точку o прямых ℓ_4 и множеством $\mathbb{K} \sqcup \infty$. Прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 при этом соответствуют значениям $t = \infty, 0, 1$. С

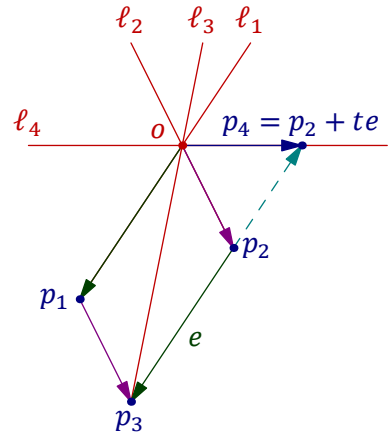


Рис. 2◊3. $t = [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$.

¹Т. е. пересекающихся в одной точке.

²По-английски *cross-ratio*.

другой стороны

$$\begin{aligned}
 [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] &= \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_3})}{s(\overrightarrow{op_3}, \overrightarrow{op_2})} : \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_4})}{s(\overrightarrow{op_4}, \overrightarrow{op_2})} = \\
 &= \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2})}{s(\overrightarrow{op_1} + \overrightarrow{op_2}, \overrightarrow{op_2})} : \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2} + t\overrightarrow{op_1})}{s(\overrightarrow{op_2} + t\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2})} = \\
 &= \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2})}{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2})} : \frac{s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2})}{t \cdot s(\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2})} = t.
 \end{aligned} \tag{2-17}$$

Таким образом, двойное отношение $t = [\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$ принимает все значения из поля \mathbb{k} , а также значение ∞ и однозначно характеризует положение четвёртой прямой по отношению к первым трём. Если $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = -1$, то прямая ℓ_2 пересекает любую параллельную ℓ_1 прямую ℓ'_1 в середине отрезка, высекаемого из ℓ'_1 прямыми ℓ_3 и ℓ_4 . Такие четвёрки конкурентных прямых называют *гармоническими*.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Покажите, что гармоничность равносильна тому, что двойное отношение не меняется при перестановке первых двух точек: $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_2, \ell_1, \ell_3, \ell_4]$.

Предложение 2.7

Четыре различные конкурентные прямые $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ переводятся в четыре различные конкурентные прямые $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4$ если и только если $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4]$.

Доказательство. Обозначим точки пересечения четвёрок прямых через o и o' . По [упр. 2.8](#) существуют такие тройки точек $p_i \in \ell_i$ и $p'_i \in \ell'_i$, где $i = 1, 2, 3$, что четырёхугольники $op_1p_3p_2$ и $o'p'_1p'_3p'_2$ являются параллелограммами, причём эти тройки единственны с точностью до гомотетий с центрами o и o' . Аффинное преобразование, переводящее параллелограмм $op_1p_3p_2$ в параллелограмм $o'p'_1p'_3p'_2$ является по [предл. 2.6](#) единственным с точностью до гомотетий с центрами o и o' аффинным преобразованием, переводящим прямую ℓ_i в прямую ℓ'_i при $i = 1, 2, 3$. Оно переводит прямую ℓ_4 в прямую ℓ'_4 если и только если точка $p_4 = \ell_4 \cap (p_2p_3)$ делит точки p_2, p_3 в том же отношении, что точка $p'_4 = \ell'_4 \cap (p'_2p'_3)$ делит точки p'_2, p'_3 . Согласно (2-17) эти отношения равны двойным отношениям $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4]$ и $[\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3, \ell'_4]$. \square

2.6.1. Двойное отношение четырёх коллинеарных точек. Если в форм. (2-16) на стр. 32 расположить все четыре точки p_i на одной не проходящей через точку o прямой ℓ , как на [рис. 2◊4](#), то двойное отношение площадей треугольников в формуле (2-16) можно переписать как двойное отношение четырёх пропорциональных векторов¹

$$\frac{s(op_1p_3)}{s(op_2p_3)} : \frac{s(op_1p_4)}{s(op_2p_4)} = \frac{\overrightarrow{p_1p_3}}{\overrightarrow{p_2p_3}} : \frac{\overrightarrow{p_1p_4}}{\overrightarrow{p_2p_4}}.$$

Правая часть этого равенства обозначается

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overrightarrow{p_1p_3}}{\overrightarrow{p_2p_3}} : \frac{\overrightarrow{p_1p_4}}{\overrightarrow{p_2p_4}}$$

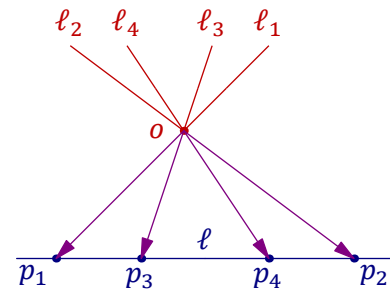


Рис. 2◊4.

и называется *двойным отношением* упорядоченной четвёрки коллинеарных точек p_1, p_2, p_3, p_4 . Такая четвёрка называется *гармонической*, если $[p_1, p_2, p_3, p_4] = -1$.

¹См. [упр. 1.10](#) на стр. 21.

§3. Евклидова плоскость

Этот параграф посвящён метрической геометрии. Мы определим *длины* и *углы* — величины, по природе своей являющиеся *действительными числами* и характеризующиеся специфическими для поля \mathbb{R} отношениями больше – меньше или ближе – дальше. Поэтому всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1

Скалярным произведением (или *евклидовой структурой*) на векторном пространстве V над полем \mathbb{R} называется функция $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре векторов $u, w \in V$ число $(v, w) \in \mathbb{R}$ и обладающая тремя свойствами:

билинейность: для всех $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ и $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ выполняется равенство

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) = \lambda_1 \mu_1 (u_1, w_1) + \lambda_1 \mu_2 (u_1, w_2) + \lambda_2 \mu_1 (u_2, w_1) + \lambda_2 \mu_2 (u_2, w_2),$$

симметричность: $(u, w) = (w, u)$ для всех $u, w \in V$,

положительность: $(v, v) > 0$ для всех ненулевых векторов $v \in V$.

ПРИМЕР 3.1 (СТАНДАРТНАЯ ЕВКЛИДОВА СТРУКТУРА НА \mathbb{R}^n)

Скалярное произведение векторов $u = (x_1, \dots, x_n)$ и $w = (y_1, \dots, y_n)$ координатного пространства \mathbb{R}^n , заданное формулой $(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, называется *стандартным*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь, что это скалярное произведение билинейно, симметрично и положительно.

3.1. Длина вектора и перпендикулярность. Неотрицательное число $|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$ называется *длиной* вектора v евклидова пространства V . Все ненулевые векторы имеют строго положительную длину и $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$. Скалярное произведение $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно восстанавливается по функции длины $V \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$(u, w) = (|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2) / 2. \quad (3-1)$$

Векторы $a, b \in V$ называются *ортогональными* или *перпендикулярными*, если $(a, b) = 0$. Если a и b перпендикулярны, то квадрат длины вектора $c = b - a$, соединяющего их концы, выражается через квадраты длин векторов a и b по *теореме Пифагора* (см. [рис. 3♦1](#)):

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2. \quad (3-2)$$

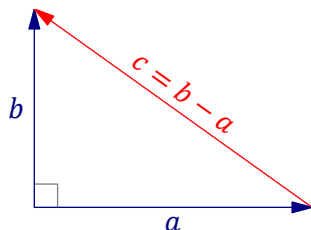


Рис. 3♦1. Теорема Пифагора.

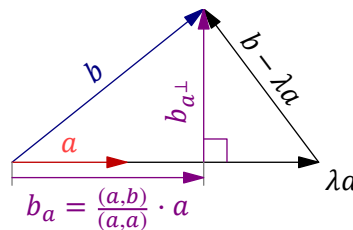


Рис. 3♦2. Ортогональная проекция b на a .

Предложение 3.1

Во всяком евклидовом пространстве для любого ненулевого вектора a и произвольного вектора b существует единственная пара таких векторов b_a и b_{a^\perp} , что b_a пропорционален a , b_{a^\perp} перпендикулярен a , и $b = b_a + b_{a^\perp}$ (см. рис. 3◊2). Эти векторы выражаются через a и b как

$$b_a = \frac{(a, b)}{(a, a)} a \quad \text{и} \quad b_{a^\perp} = b - \frac{(a, b)}{(a, a)} a, \quad (3-3)$$

причём $b_{a^\perp} = 0$ если и только если a и b пропорциональны, а $b_a = 0$ если и только если b перпендикулярен a .

Доказательство. Мы ищем такие векторы $b_a = \lambda a$ и $b_{a^\perp} = b - \lambda a$, что

$$(a, b_{a^\perp}) = (a, b - \lambda a) = (a, b) - \lambda (a, a) = 0.$$

Так как $(a, a) \neq 0$, это равенство выполняется при единственном $\lambda = (a, b)/(a, a)$. При таком λ условие $b_a = \lambda a = 0$ равносильно равенству $(a, b) = 0$. Условие $b_{a^\perp} = b - \lambda a = 0$ означает пропорциональность векторов a и b . \square

Определение 3.2

Векторы b_a и b_{a^\perp} из предл. 3.1, называются соответственно *ортогональной проекцией* вектора b на одномерное подпространство $\mathbb{R} \cdot a$, порождённое вектором a , и *нормальной составляющей* вектора b относительно a .

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Убедитесь, что векторы b_a и b_{a^\perp} не меняются при замене вектора a на пропорциональный вектор λa с $\lambda \neq 0$.

Следствие 3.1 (неравенство Коши–Буняковского–Шварца)

Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a, b)| \leq |a| \cdot |b|, \quad (3-4)$$

которое обращается в равенство если и только если векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. Если $a = b = 0$, обе части неравенства нулевые. Если $a \neq 0$, то определена нормальная составляющая b_{a^\perp} вектора b относительно a , и её скалярный квадрат

$$(b_{a^\perp}, b_{a^\perp}) = (b, b) - (a, b)^2 / (a, a) \geq 0 \quad (3-5)$$

зачищается если и только если b пропорционален a . Домножая обе части (3-5) на (a, a) , получаем $(b, b)(a, a) \geq (a, b)^2$, что равносильно (3-4). \square

Пример 3.2 (неравенство Коши–Буняковского для чисел)

Неравенство (3-4) применительно к векторам евклидова пространства \mathbb{R}^n из прим. 3.1 утверждает, что для любых двух наборов вещественных чисел x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n выполняется неравенство $(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$, обращающееся в равенство если и только если эти наборы чисел пропорциональны.

Следствие 3.2 (неравенство треугольника)

Для любых двух векторов a, b евклидова пространства выполняется *неравенство треугольника*¹

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (3-6)$$

(см. рис. 3◊3). Оно обращается в равенство если и только если векторы a и b сонаправлены, т. е. один получается из другого умножением на неотрицательное число.

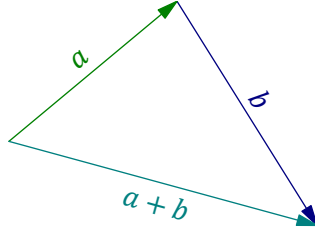


Рис. 3◊3. Неравенство треугольника.

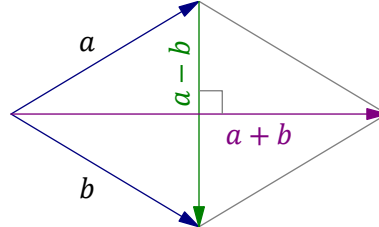


Рис. 3◊4. Диагонали ромба.

Доказательство. Возводя обе части неравенства $|a + b| \leq |a| + |b|$ в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $(a + b, a + b) \leq (a, a) + 2|a| \cdot |b| + (b, b)$, которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство $(a, b) \leq |a| \cdot |b|$, отличающееся от неравенства (3-4) отсутствием модуля в левой части. При $(a, b) < 0$ оно заведомо выполняется в строгой форме. При $(a, b) \geq 0$ оно выполняется по сл. 3.1 и превращается в равенство если и только если $b = \lambda a$, где $\lambda \geq 0$, так как $(a, b) \geq 0$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны, т. е. $(a + b, a - b) = 0$ для любых двух векторов a, b одинаковой длины $|a| = |b|$, см. рис. 3◊4.

3.1.1. Расстояние между точками. Аффинные пространства над евклидовыми векторными пространствами также называются *евклидовыми*. Длина $|\overline{ab}|$ вектора \overline{ab} , соединяющего точки a и b такого пространства, называется *расстоянием* между точками a и b и обозначается $|a, b|$ или $|b - a|$. Обратите внимание, что $|b - a| = |a - b|$, так же как и $|a, b| = |b, a|$. Неравенство треугольника (3-6) на языке точек означает, что для любых трёх точек a, b, p выполняется неравенство $|p - a| + |b - p| \geq |b - a|$, которое обращается в равенство если и только если векторы \overline{ap} и \overline{pb} сонаправлены. Последнее равносильно тому, что точка p является барицентрической комбинацией² точек a и b с неотрицательными весами.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь в этом.

В вещественном аффинном пространстве множество всех неотрицательных барицентрических комбинаций двух различных точек $a \neq b$ называется *отрезком* и обозначается

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \geq 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1 \}.$$

Мы заключаем, что в евклидовом аффинном пространстве отрезок $[a, b]$ представляет собою ГМТ x , удовлетворяющих равенству $|a - x| + |x - b| = |a - b|$.

¹Чем, собственно, и оправдывается термин «длина».

²См. п. 1.5 на стр. 17.

3.1.2. Перпендикулярные прямые. Две прямые в евклидовом пространстве называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны их векторы скорости.

Предложение 3.2 (ортогональная проекция точки на прямую)

Для любых прямой ℓ и точки $p \notin \ell$ следующие два условия на точку $q \in \ell$ эквивалентны:

- 1) $|x - p| > |q - p|$ для всех отличных от q точек $x \in \ell$
- 2) прямая (pq) перпендикулярна прямой ℓ .

Точка $q \in \ell$ с такими свойствами существует и единственна¹.

Доказательство. Пусть прямая ℓ задаётся параметрическим уравнением $o + tv$, где t пробегает \mathbb{R} , $o \in \ell$ — произвольно зафиксированная точка, v — вектор скорости прямой ℓ . Точка $q \in \ell$, удовлетворяющая условию (1) очевидно единственна, если существует. С другой стороны, по предл. 3.1, применённому к векторам $a = v$ и $b = \overrightarrow{op}$, на прямой ℓ есть единственная такая точка $q \in \ell$, что векторы v и \overrightarrow{qp} перпендикулярны, см. рис. 3◊5. Тем самым, условие (2) выполняется для единственной точки $q \in \ell$. При этом для любой отличной от неё точки $x \in \ell$ по теореме Пифагора $|\overrightarrow{px}|^2 = |\overrightarrow{pq}|^2 + |\overrightarrow{qx}|^2 > |\overrightarrow{pq}|^2$, откуда $|x - p| > |q - p|$. Тем самым, эта точка q одновременно удовлетворяет и условию (1). \square

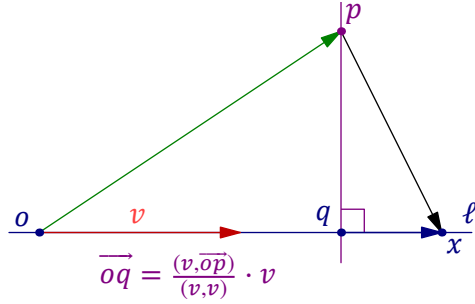


Рис. 3◊5.

Упражнение 3.5. Покажите, что на евклидовой плоскости через любую точку p проходит единственная прямая, перпендикулярная произвольно заданной прямой ℓ .

3.2. Ортонормальные базисы. Векторы единичной длины принято называть *единичными*. Базис двумерного евклидова векторного пространства называется *ортонормальным*, если он состоит из двух перпендикулярных единичных векторов. С любой парой непропорциональных векторов a, b можно связать ортонормальный базис из векторов

$$e_1 = a/|a| \quad \text{и} \quad e_2 = b_{a^\perp}/|b_{a^\perp}|,$$

где $b_{a^\perp} = b - a \cdot (a, b)/(a, a)$ — ортогональная проекция² вектора b на вектор a . Таким образом, на любой евклидовой плоскости есть ортонормальный базис.

Упражнение 3.6. Покажите, что каждый единичный вектор e на евклидовой плоскости включается ровно в два ортонормальных базиса (e, f) и $(e, -f)$, отличающиеся друг от друга ориентацией.

Предложение 3.3

Координаты вектора $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ в ортонормальном базисе e_1, e_2 равны его скалярным произведениям с базисными векторами: $x_1 = (u, e_1)$, $x_2 = (u, e_2)$, а скалярное произведение векторов $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ и $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$ вычисляется как в прим. 3.1 на стр. 34:

$$(u, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

¹Она называется *ортогональной проекцией* точки p на прямую ℓ .

²См. *опр. 3.2* на стр. 35.

Доказательство. Первое утверждение доказывается скалярным умножением обеих частей равенства¹ $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ на векторы e_1 и e_2 , второе — бесхитрым раскрытием скобок в выражении $(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$. \square

Пример 3.3 (уравнение прямой на евклидовой плоскости)

В координатах (x_1, x_2) относительно ортонормального базиса уравнение

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c \quad (3-7)$$

Задаёт прямую, перпендикулярную вектору $n = (\alpha_1, \alpha_2)$ и расположенную на расстоянии $|c|/|n|$ от начала координат в направлении этого вектора при $c > 0$ и в противоположном направлении при $c < 0$. Действительно, соотношение (3-7) означает, что скалярное произведение переменного вектора $x = (x_1, x_2)$ с фиксированным вектором n постоянно и равно $(n, x) = c$, т. е. прямая (3-7) замечается концами всех векторов x , имеющих заданную ортогональную проекцию $x_n = n \cdot (x, n)/(n, n) = n \cdot c/|n|^2$

на вектор n , см. рис. 3◊6. Длина этой проекции равна $\sqrt{(x_n, x_n)} = |c|/|n|$, а её направление определяется знаком константы c : при $c > 0$ проекция сонаправлена с n , а при $c < 0$ — противоположно направлена. При $c = 0$ прямая (3-7) проходит через начало координат. К примеру, *срединный перпендикуляр* к отрезку $[a, b]$, т. е. прямая перпендикулярная вектору $a - b$ и проходящая через точку $(a + b)/2$, задаётся уравнением

$$(a - b, x) = (a - b, a + b)/2 = (|a|^2 - |b|^2)/2. \quad (3-8)$$

Две прямые $(n, x) = c_1$ и $(n, x) = c_2$, перпендикулярные одному и тому же вектору n удалены друг от друга на расстояние $|c_1 - c_2|/|n|$. В частности, расстояние от заданной точки a до прямой $(n, x) = c$, равное расстоянию от этой прямой до параллельной ей и проходящей через точку a прямой $(n, x) = (n, a)$, можно вычислять как $|c - (n, a)|/|n|$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Покажите, что биссектрисы углов, возникающих при пересечении прямых $(n_1, x) = c_1$ и $(n_2, x) = c_2$, задаются уравнениями $|n_2| \cdot (c_1 - (n_1, x)) = \pm |n_1| \cdot (c_2 - (n_2, x))$ и перпендикулярны друг другу.

Предложение 3.4 (определитель Грама)

Если векторы e_1, e_2 составляют ортонормальный базис евклидова пространства V , то для любых векторов $u, w \in V$ и любой ненулевой функции площади $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\frac{s^2(u, w)}{s^2(e_1, e_2)} = \det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{pmatrix}$$

(определитель в правой части называется *определителем Грама* векторов u, w).

Доказательство. Пусть $u = x_1 e_1 + x_2 e_2, w = y_1 e_1 + y_2 e_2$. Тогда по сл. 1.2 на стр. 14

$$s(u, w)/s(e_1, e_2) = \det(u, w) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

¹Ср. с доказательством лем. 1.2 на стр. 12.

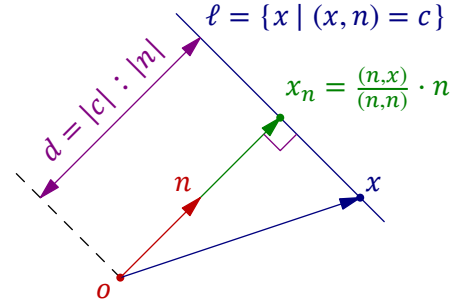


Рис. 3◊6. Прямая $(n, x) = c$.

С другой стороны, $(u, u) \cdot (w, w) - (u, w)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 - 2 x_1 y_1 x_2 y_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Выведите из [предл. 3.4](#) другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (3-4).

3.2.1. Евклидова площадь. Из [предл. 3.4](#) вытекает, что для любых двух ортонормальных базисов (e'_1, e'_2) и (e''_1, e''_2) на евклидовой плоскости и любой ненулевой формы площади s отношение

$$\frac{s^2(e''_1, e''_2)}{s^2(e'_1, e'_2)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

откуда $s(e''_1, e''_2) = \pm s(e'_1, e'_2)$, т. е. все ортонормальные базисы имеют равную по абсолютной величине площадь. Функция площади s на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 называется *евклидовой*, если $s(e_1, e_2) = 1$ для стандартного ортонормального базиса $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Всюду далее обозначения $s(u, v)$ и $s(abc)$ применительно в евклидову пространство \mathbb{R}^2 по умолчанию означают именно евклидову площадь. Ортонормальные базисы площади 1 называются *положительно ориентированными*, а площади -1 — *отрицательно ориентированными*.

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Убедитесь, что $|\det(a, b)| = |a| \cdot |b_{a^\perp}|$, т. е. модуль евклидовой площади параллелограмма равен произведению длин основания и опущенной на него высоты.

3.3. Углы и тригонометрия. Пусть векторы e, e^\perp составляют положительно ориентированный ортонормальный базис. Коэффициенты x, y разложения $f = x \cdot e + y \cdot e^\perp$ произвольного единичного вектора f по этому базису удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = 1$ и лежат на отрезке $[-1, 1]$. Следовательно, существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $x = \cos \alpha$ и $y = \sin \alpha$, причём любые два числа α', α'' с этим свойством различаются на целое число оборотов по единичной окружности, т. е. $\alpha' - \alpha'' = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, см. [рис. 3♦7](#). Множество всех таких чисел называется *ориентированным углом* между единичными векторами e и f и обозначается

$$\angle(e, f) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid f = e \cdot \cos \alpha + e^\perp \cdot \sin \alpha \}. \quad (3-9)$$

Функции $\cos t$ и $\sin t$ принимают на всех числах из $\angle(e, f)$ одни и те же значения, которые мы будем записывать как $\cos \angle(e, f)$ и $\sin \angle(e, f)$. Таким образом, для любого положительно ориентированного ортонормального базиса e, e^\perp и любого единичного вектора f выполняются соотношения¹

$$\begin{aligned} f &= e \cdot \cos \angle(e, f) + e^\perp \cdot \sin \angle(e, f) \\ \cos \angle(e, f) &= (e, f) = s(f, e^\perp) \\ \sin \angle(e, f) &= s(e, f) = (e^\perp, f) \end{aligned} \quad (3-10)$$

Обратите внимание, что $(e, f) = (f, e)$ и $s(e, f) = -s(f, e)$, откуда $\cos \angle(e, f) = \cos \angle(f, e)$, $\sin \angle(e, f) = -\sin \angle(f, e)$. Тем самым, $\angle(e, f) = -\angle(f, e)$, т. е. углы, откладываемые против часовой стрелки считаются со знаком «+», а по часовой — со знаком «-».

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Убедитесь, что единичный вектор $f = x \cdot e + y \cdot e^\perp$ дополняется до положительно ориентированного ортонормального базиса f, f^\perp вектором $f^\perp = -ye + xe^\perp$ и выведите отсюда соотношения $\cos \angle(e, f^\perp) = -\sin \angle(e, f)$ и $\sin \angle(e, f^\perp) = \cos \angle(e, f)$.

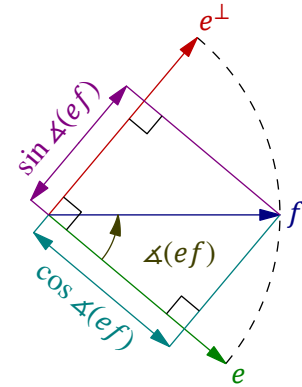


Рис. 3♦7.

¹Вторая и третья строки вычисляют коэффициенты написанного в первой строке разложения по формулам из [лем. 1.2](#) на стр. 12 и [предл. 3.3](#) на стр. 37.

Раскладывая по ортонормальному базису f, f^\perp произвольный единичный вектор

$$g = f \cdot \cos(\angle(f, g)) + f^\perp \cdot \sin(\angle(f, g))$$

и подставляя сюда разложения векторов f, f^\perp по базису e, e^\perp , получаем в матричных обозначениях из н° 2.3 на стр. 27 равенство

$$\begin{aligned} (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, g) \\ \sin \angle(e, g) \end{pmatrix} &= g = (f, f^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = \\ &= (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f) & -\sin \angle(e, f) \\ \sin \angle(e, f) & \cos \angle(e, f) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(f, g) \\ \sin \angle(f, g) \end{pmatrix} = \\ &= (e, e^\perp) \cdot \begin{pmatrix} \cos \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) - \sin \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) \\ \cos \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) + \sin \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тем самым, для любой тройки единичных векторов e, f, g

$$\begin{aligned} \cos \angle(e, g) &= \cos \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g) - \sin \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) \\ \sin \angle(e, g) &= \cos \angle(e, f) \cdot \sin \angle(f, g) + \sin \angle(e, f) \cdot \cos \angle(f, g). \end{aligned} \quad (3-11)$$

Ориентированный угол $\angle(a, b)$ между произвольными векторами a и b определяется как угол между сонаправленными с a и b единичными векторами $a/|a|$ и $b/|b|$. Таким образом

$$\cos \angle(a, b) = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|} \quad \text{и} \quad \sin \angle(a, b) = \frac{s(a, b)}{|a| \cdot |b|}. \quad (3-12)$$

В частности, мы имеем ориентированную версию школьной формулы для площади:

$$s(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \sin \angle(a, b). \quad (3-13)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.11. Убедитесь, что для любых векторов $u, w \in V$ справедлива евклидова теорема косинусов: $|u + w|^2 = |u|^2 + |w|^2 + 2 \cdot |u| \cdot |w| \cdot \cos \angle(u, w)$.

Пример 3.4 (окружности)

ГМТ x , удалённых от данной точки на заданное расстояние r , называется *окружностью* радиуса r с центром c и обозначается $S(r, c)$. Таким образом, точка x с радиус вектором $\overrightarrow{cx} = u$ лежит на окружности $S(r, c)$ если и только если $(u, u) = r^2$. Каждая проходящая через центр прямая с направляющим вектором v длины $|v| = r$ пересекает окружность в точках $c \pm v$, см. рис. 3◊8. Отрезок с концами в этих точках называется *диаметром*. Поскольку для вектора v длины r и любого вектора u выполняется равенство $(u + v, u - v) = (u, u) - r^2$, точка $x = c + u$ лежит на окружности если и только если $(u + v, u - v) = 0$. Таким образом, окружность $S(r, c)$ представляет собою ГМТ x , из которых её диаметр виден под прямым углом, см. рис. 3◊8.

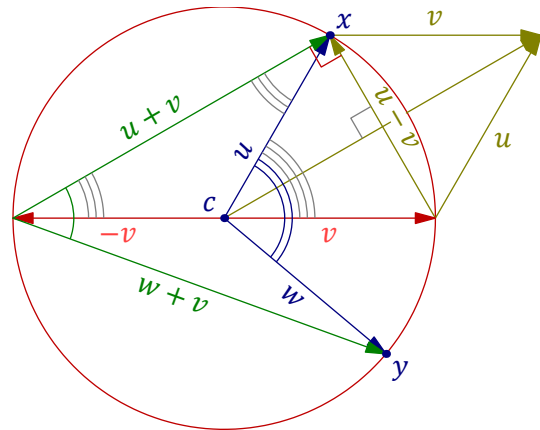


Рис. 3◊8. Окружность и углы.

УПРАЖНЕНИЕ 3.12. При помощи рис. 3◊8 покажите, что дуга окружности видна из любой не лежащей на этой дуге точки окружности под вдвое меньшим углом, чем из центра.

3.4. Движения. Отображение $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ евклидовой плоскости в себя называется *движением* или *изометрией*, если оно сохраняет расстояние, т. е. $|p - q| = |f(p) - f(q)|$ для любых двух точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Поскольку каждый отрезок $[a, b]$ представляет собою ГМТ x , для которых¹ $|a - x| + |x - b| = |a - b|$, каждое движение биективно переводит любой отрезок $[a, b]$ в отрезок $[\varphi(a), \varphi(b)]$ той же длины. Тем самым, все движения биективны и переводят прямые в прямые. Поэтому, согласно н° 2.2 на стр. 25, все движения являются аффинными преобразованиями. В частности, каждое движение однозначно определяется своим действием на любой треугольник.

УПРАЖНЕНИЕ 3.13. Докажите школьные признаки конгруэнтности треугольников по трём сторонам, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по двум сторонам и углу между ними².

Движения образуют в аффинной группе $\text{Aff}(V)$ подгруппу, которая называется *группой движений* или *группой изометрий* евклидова аффинного пространства $\mathbb{A}(V)$ и обозначается $\text{Isom } \mathbb{A}(V)$. Группа параллельных переносов T , очевидно, содержится в $\text{Isom } \mathbb{A}(V)$.

3.4.1. Линейные ортогональные преобразования. Фиксируем какую-нибудь начальную точку $o \in \mathbb{A}(V)$ и представим движение $\varphi : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{A}(V)$ в виде композиции³ $\varphi = \tau_v \circ \varphi_o$ параллельного переноса на вектор $v = \overrightarrow{o\varphi(o)}$ и линейного преобразования $\varphi_o : \overrightarrow{o\bar{x}} \mapsto D_\varphi(\overrightarrow{o\bar{x}})$, задаваемого дифференциалом $D_\varphi : V \simeq V$ движения φ и оставляющего точку o на месте. Поскольку линейное преобразование $\varphi_o = \tau_{-v} \circ \varphi$ тоже является движением, оно сохраняет длины векторов, а следовательно и скалярные произведения: для всех $u, w \in V$ имеем⁴ $(\varphi(u), \varphi(w)) = (|\varphi(u+w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2) / 2 = (|u+w|^2 - |u|^2 - |w|^2) / 2 = (v, w)$. Сохраняющие скалярное произведение линейные преобразования евклидова векторного пространства V называются *ортогональными* или *изометрическими*. Так как ортогональное преобразование переводит ортонормальный базис в ортонормальный, оно сохраняет абсолютную величину евклидовой площади и по предл. 2.4 на стр. 29 имеет определитель ± 1 . Ортогональные преобразования определителя $+1$ сохраняют ориентацию и называются *собственными* или *специальными*. Ортогональные преобразования определителя -1 меняют ориентацию и называются *несобственными*.

ПРИМЕР 3.5 (ОТРАЖЕНИЯ)

Каждый отличный от нуля вектор $n \in V$ задаёт несобственное ортогональное преобразование $\sigma_\ell : V \rightarrow V$, переводящее вектор n в $\sigma_n(n) = -n$ и тождественно действующее на ортогональной этому вектору прямой $\ell = n^\perp$, которая задаётся в ортонормальном базисе уравнением $(n, x) = 0$. Мы будем называть преобразование σ_n *отражением*⁵ в прямую ℓ . Отражение σ_ℓ переводит каждый вектор $v \in V$ в вектор $\sigma_\ell(v)$, который имеет ту же нормальную составляющую⁶ относительно n , что и v , однако противоположную по знаку ортогональную проекцию на n , см. рис. 3♦9. Тем самым,

$$\sigma_\ell(v) = v - 2 \frac{(n, v)}{(n, n)} \cdot n. \quad (3-14)$$

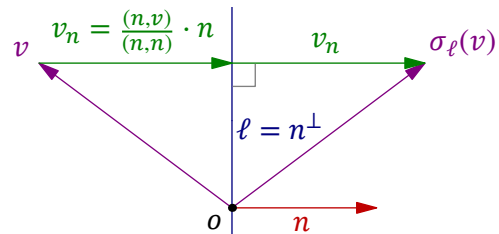


Рис. 3♦9. Отражение σ_ℓ .

¹См. н° 3.1.1 на стр. 36.

²Т. е. покажите, что в каждом из этих трёх случаев единственное аффинное преобразование, переводящее вершины одного треугольника в соответствующие вершины другого, является движением.

³См. предл. 2.5 на стр. 30.

⁴См. формулу (3-1) на стр. 34.

⁵В школьном курсе его обычно называют *осевой симметрией*.

⁶См. опр. 3.2 на стр. 35.

УПРАЖНЕНИЕ 3.14. Проверьте прямым вычислением, что преобразование (3-14) линейно и сохраняет скалярные произведения.

Предложение 3.5

Каждое несобственное ортогональное линейное преобразование плоскости является отражением.

Доказательство. Поскольку несобственное преобразование φ не тождественно, $\varphi(v) \neq v$ для некоторого ненулевого вектора $v \in V$. Так как φ сохраняет начальную точку o и середину s отрезка $[v, \varphi(v)]$, оно действует на треугольник Δosv так же, как отражение в срединном перпендикуляре (os) к отрезку $[v, \varphi(v)]$. Поэтому $\varphi = \sigma_{(os)}$. \square

Предложение 3.6

Каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

Доказательство. Если собственное ортогональное линейное преобразование $\varphi : V \rightarrow V$ переводит единичный вектор e_1 в вектор $f_1 = \varphi(e_1)$, то оно переводит вектор e_2 , дополняющий e_1 до положительно ориентированного ортонормального базиса, в вектор f_2 , дополняющий f_1 до положительно ориентированного базиса, как на рис. 3◊10. Тем самым, φ представляет собою поворот на ориентированный угол $\vartheta = \angle(e_1, f_1)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 3.15. Убедитесь, что матрица¹ поворота на угол ϑ против часовой стрелки имеет в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе вид $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$.

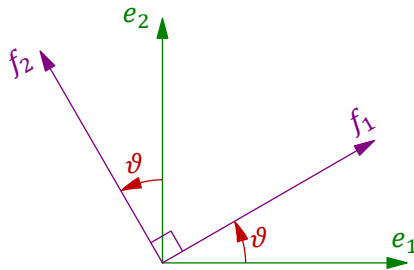


Рис. 3◊10. Поворот.

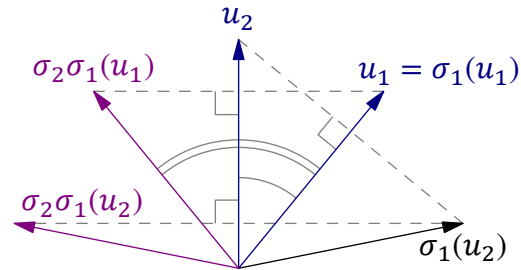


Рис. 3◊11. Композиция отражений.

УПРАЖНЕНИЕ 3.16. Покажите, что композиция $\sigma_2 \circ \sigma_1$ отражений в прямых с векторами скоростей u_1 и u_2 является поворотом на угол $2\angle(u_1, u_2)$ в направлении от u_1 к u_2 , см. рис. 3◊11.

3.4.2. Описание изометрий аффинной евклидовой плоскости. Из предыдущего вытекает, что любое несобственное движение евклидовой аффинной плоскости является композицией $\tau_w \circ \sigma_\ell$ отражения и сдвига, а любое собственное — композицией $\tau_u \circ \varrho_{o, \vartheta}$ сдвига с поворотом $\varrho_{o, \vartheta}$ вокруг некоторой точки o на какой-то угол ϑ .

Собственное движение $\varphi = \tau_u \circ \varrho_{o, \vartheta}$ с ненулевым углом ϑ имеет неподвижную точку — конец вектора $\overrightarrow{pq} = u$, который является основанием равнобедренного треугольника Δopq с

¹См. п. 2.3 на стр. 27.

вершиной o и ориентированным углом $\angle(\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq}) = -\vartheta$, см. рис. 3◊12. По предл. 3.5 преобразование φ является поворотом вокруг точки q . Так как поворот вокруг q на угол ϑ переводит o в $\varphi(o)$, мы заключаем, что $\varphi = \varrho_{q, \vartheta}$.

Упражнение 3.17. Найдите координаты точки q относительно положительно ориентированного ортонормального репера $(o; u_1, u_2)$, вектор u_1 которого сонаправлен с u .

Несобственное движение $\varphi = \tau_w \circ \sigma_\ell$ является композицией $\varphi = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ отражения относительно сдвинутой на половину вектора w прямой $\tau_{w/2}(\ell)$ и параллельного этой прямой сдвига на вектор w_ℓ — ортогональную проекцию вектора w на прямую ℓ , см. рис. 3◊13. Действительно, композиции $\tau_w \circ \sigma_\ell$ и $\tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$ одинаково действуют на аффинный репер $(o; v, n)$ с началом в произвольной точке $o \in \ell$ и ортонормальными базисными векторами v, n , направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямой ℓ , как на рис. 3◊13.

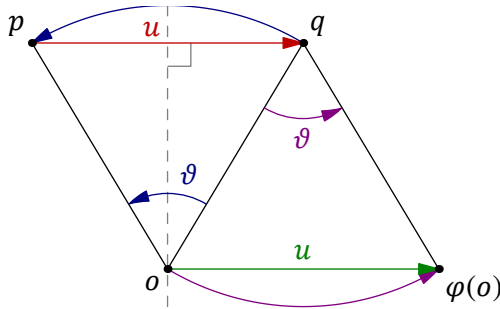


Рис. 3◊12. $\tau_u \circ \varrho_{o, \vartheta} = \varrho_{q, \vartheta}$.

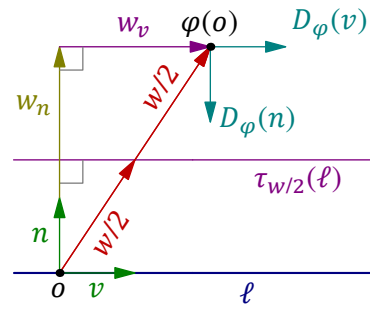


Рис. 3◊13. $\tau_w \circ \sigma_\ell = \tau_{w_\ell} \circ \sigma_{\tau_{w/2}(\ell)}$.

Композиция отражения со сдвигом вдоль оси этого отражения называется *скользящей симметрией*. Представление несобственного движения φ в виде скользящей симметрии

$$\lambda_{v, \ell} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_v \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \tau_v, \quad \text{где } v \parallel \ell,$$

замечательно тем, что отражение и сдвиг в нём коммутируют друг с другом, а само это представление единственно: прямая ℓ однозначно определяется преобразованием φ как геометрическое место середин отрезков $[p, \varphi(p)]$, после чего сдвиг $\tau_v = \varphi \circ \sigma_\ell = \sigma_\ell \circ \varphi$ тоже однозначно восстанавливается по φ и ℓ . Суммируя сказанное, мы получаем следующее классическое описание движений плоскости.

ТЕОРЕМА 3.1 (ТЕОРЕМА ШАЛЯ¹)

Всякое собственное движение плоскости является сдвигом или поворотом, а всякое несобственное — скользящей симметрией. \square

Упражнение 3.18. Покажите, что композиция отражения относительно прямой ℓ_1 с последующим отражением относительно параллельной ей прямой ℓ_2 является сдвигом на удвоенное расстояние между ℓ_1 и ℓ_2 в направлении от ℓ_1 к ℓ_2 вдоль их общей нормали.

СЛЕДСТВИЕ 3.3

Любое собственное движение может быть (многими способами) разложено в композицию двух отражений, а несобственное — в композицию трёх. \square

¹Michel Floréal Chasles (15.XI.1793 – 18.XII.1880) — выдающийся французский геометр.

3.5. Комплексные числа. Обозначим через \mathbb{C} двумерное евклидово пространство с фиксированным ортонормальным базисом, векторы которого будем обозначать 1 и i . В разложении произвольного вектора $z \in \mathbb{C}$ по этому базису вектор 1 обычно опускают и пишут $z = x + iy$, имея в виду вектор с координатами (x, y) в базисе $1, i$. Такой вектор имеет длину $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вещественные числа x, y и $|z|$ называются, соответственно, *действительной частью*, *мнимой частью* и *модулем комплексного числа* $z \in \mathbb{C}$. Ориентированный угол $\angle(1, z)$ между базисным вектором 1 и вектором z называется *аргументом* числа z и часто обозначается через¹

$$\text{Arg}(z) = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z| \cos \alpha + i |z| \sin \alpha \}.$$

Векторы $z \in \mathbb{C}$ называют *комплексными числами*, поскольку их можно не только складывать, но и умножать. Произведение $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ определяется как вектор, модуль которого равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &\stackrel{\text{def}}{=} |z_1| \cdot |z_2| \\ \text{Arg}(z_1 z_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \{ \vartheta_1 + \vartheta_2 \mid \vartheta_1 \in \text{Arg}(z_1), \vartheta_2 \in \text{Arg}(z_2) \} \end{aligned} \quad (3-15)$$

Базисный вектор 1 является нейтральным элементом относительно умножения, что оправдывает его опускание в формулах вроде $z = x + yi = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Обратите внимание, что оба равенства суть верные равенства в \mathbb{C} , если понимать в них сложение и умножение как сложение и умножение комплексных чисел и считать поле вещественных чисел \mathbb{R} вложенным в плоскость \mathbb{C} в виде координатной прямой² $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}$.

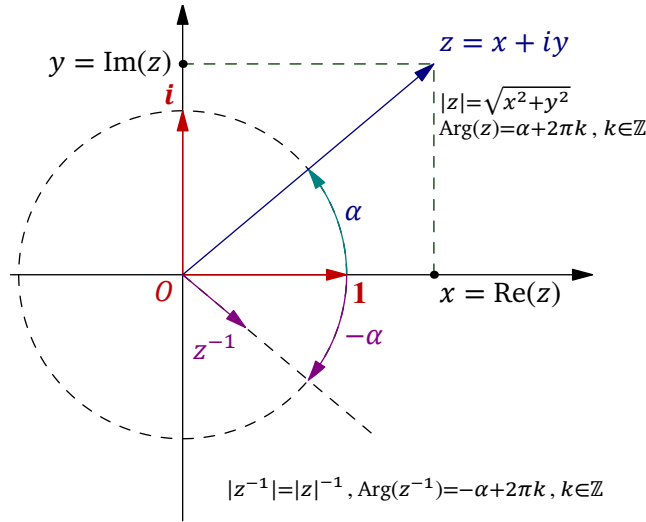


Рис. 3♦14. Числа $z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ и $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos \alpha - i \sin \alpha)$.

Обратным по умножению к ненулевому вектору $z \in \mathbb{C}$ является вектор z^{-1} с противоположным аргументом $\text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg}(z)$ и обратным модулем $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, см. рис. 3♦14.

¹Напомню, что ориентированный угол — это множество всех вещественных чисел, имеющих заданные синус и косинус, как в форм. (3-9) на стр. 39. Любые два числа из этого множества различаются на целое число оборотов по единичной окружности.

²Обратите внимание, что правило умножения отрицательных вещественных чисел («минус на минус даёт плюс») согласуется с формулами (3-15).

Предложение 3.7

Комплексные числа образуют поле.

Доказательство. Из всех свойств поля¹ нам остаётся проверить только distributive закон $a(b+c) = ab+ac$. На геометрическом языке это равенство означает, что задаваемое умножением на фиксированный вектор $a \in \mathbb{C}$ отображение $\mu_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az$, аддитивно, т. е. $\mu_a(b+c) = \mu_a(b) + \mu_a(c)$. Отображение μ_a представляет собою *поворотную гомотетию* — композицию поворота на угол $\text{Arg}(a)$ вокруг нуля и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром в нуле. Так как и поворот, и гомотетия линейны, линейно и μ_a . \square

3.5.1. Алгебраическая запись комплексных чисел. Поскольку базисный вектор i удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$ и умножение дистрибутивно по отношению к сложению, в поле \mathbb{C} выполняется равенство

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3-16)$$

Обратное к числу $z = x + iy$ число z^{-1} равно

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{|z|^2} - i \frac{y}{|z|^2}. \quad (3-17)$$

Число $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = x + iy$. В терминах комплексного сопряжения

$$z^{-1} = \bar{z} / |z|^2.$$

Геометрически, комплексное сопряжение $z \mapsto \bar{z}$ представляет собою отражение комплексной плоскости относительно вещественной оси $\mathbb{R} \cdot 1$. С алгебраической точки зрения сопряжение является *инволютивным автоморфизмом* поля \mathbb{C} , т. е. для всех $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Упражнение 3.19. Покажите, что следующие свойства автоморфизма² φ поля \mathbb{C} эквивалентны: а) $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ б) φ является линейным преобразованием двумерного векторного пространства \mathbb{C} над полем \mathbb{R} в) либо $\varphi(z) = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$, либо $\varphi(z) = \bar{z}$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

3.6. Преобразования подобия. Отображение $\varphi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ евклидовой аффинной плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$ в себя называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если оно изменяет все расстояния между точками в одно и тоже число раз, т. е. когда существует такая положительная вещественная константа $\gamma = \gamma(\varphi)$, зависящая только от φ и называемая *коэффициентом подобия*, что $|\varphi(p) - \varphi(q)| = \gamma |p - q|$ для всех точек $p, q \in \mathbb{A}^2$. Например, каждое движение является подобием с коэффициентом 1. Подобия образуют группу преобразований, которая называется *группой подобий*. Тот же аргумент, что и для движений³, показывает, что подобия переводят прямые в прямые и, стало быть, являются аффинными преобразованиями.

Упражнение 3.20. Убедитесь в этом и в том, что подобия переводят окружности в окружности. Подобия, сохраняющие ориентацию, называются *собственными*, а оборачивающие ориентацию — *несобственными*.

¹См. <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>.

²См. н° 2.1.2 на стр. 24.

³См. н° 3.4 на стр. 41.

ЛЕММА 3.1

Собственные подобия сохраняют ориентированные углы, а несобственные изменяют знак ориентированных углов.

Доказательство. Беря композицию подобия φ с параллельным переносом, мы можем и будем считать, что оно сохраняет начало координат, т. е. является линейным преобразованием подлежащего векторного пространства $V \simeq \mathbb{R}^2$. Тогда для любых двух векторов $u, w \in V$ имеем¹

$$\begin{aligned} (\varphi(u), \varphi(w)) &= |\varphi(u) + \varphi(w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2 = \\ &= |\varphi(u + w)|^2 - |\varphi(u)|^2 - |\varphi(w)|^2 = \gamma^2(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2) = \gamma^2(u, w), \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \angle(\varphi(u), \varphi(w)) = \frac{(\varphi(u), \varphi(w))}{|\varphi(u)| \cdot |\varphi(w)|} = \frac{(u, w)}{|u| \cdot |w|} = \cos \angle(u, w),$$

т. е. $\angle(\varphi(u), \varphi(w)) = \pm \angle(u, w)$. □

3.6.1. Подобия как аффинные преобразования комплексной прямой. Фиксируем в двумерном евклидовом пространстве V любой ортонормальный базис, векторы которого обозначим через 1 и i , и отождествим это пространство с полем комплексных чисел \mathbb{C} , как в п° 3.5 выше. Это позволяет рассматривать вещественную аффинную плоскость $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{A}(V)$ как комплексную аффинную прямую $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$. Мы собираемся показать, что группа собственных подобий вещественной плоскости $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ совпадает с аффинной группой комплексной прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8

Каждое собственное подобие $\varphi : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ является комплексным аффинным преобразованием вида $z \mapsto az + b$, а каждое несобственное — полуаффинным преобразованием вида $z \mapsto a\bar{z} + b$, где числа $a, b \in \mathbb{C}$ однозначно определяются подобием φ . Наоборот, для любых $a, b \in \mathbb{C}$ преобразования вида $z \mapsto az + b$ и $z \mapsto a\bar{z} + b$ являются, соответственно, собственным и несобственным подобиями.

Доказательство. Беря композицию собственного подобия φ со сдвигом, мы можем и будем считать, что φ оставляет на месте нуль $0 \in \mathbb{C}$. Так как φ сохраняет ориентированные углы и умножает длины векторов на фиксированное положительное число $\gamma \in \mathbb{R}$, преобразование φ является поворотной гомотетией, т. е. умножением на комплексное число $a = \varphi(1)$, что доказывает первое утверждение. Для несобственного подобия φ преобразование $z \mapsto \varphi(\bar{z})$, являющееся композицией φ с отражением в действительной оси, является собственным подобием и по уже доказанному имеет вид $z \mapsto az + b$. Поэтому $\varphi(z) = a\bar{z} + b$. □

УПРАЖНЕНИЕ 3.21. Убедитесь в справедливости последнего утверждения из предл. 3.8.

СЛЕДСТВИЕ 3.4

Для любых двух пар различных точек $a \neq b$ и $c \neq d$ имеется единственное собственное подобие переводящее a в c и b в d .

¹Ср. с аналогичной выкладкой из п° 3.4.1 на стр. 41.

Доказательство. Неизвестные коэффициенты $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ искомого аффинного преобразования $z \mapsto x_1 z + x_2$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 a + x_2 = c \\ x_1 b + x_2 = d, \end{cases}$$

имеющей в поле \mathbb{C} единственное решение¹ $x_1 = (c - d)/(a - b)$, $x_2 = (ad - bc)/(a - b)$. \square

Следствие 3.5

Всякое собственное подобие является либо сдвигом, либо поворотной гомотетией.

Доказательство. Аффинное преобразование $z \mapsto az + b$ с нетождественным дифференциалом $a \neq 1$ имеет неподвижную точку $c = b/(1 - a)$ и, стало быть, является поворотной гомотетией относительно этой точки. \square

¹См. лем. 1.2 на стр. 12.

§4. Многомерие

4.1. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над любым полем \mathbb{K} . Будем говорить, что вектор $v \in V$ *линейно выражается* через векторы w_1, \dots, w_m , если

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$$

для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Набор векторов $w_1, \dots, w_m \in V$ называется *порождающим* векторное пространство V , если каждый вектор $v \in V$ линейно через него выражается. Векторное пространство, порождённое конечным набором векторов, называется *конечномерным*. Порождающий набор векторов $e_1, \dots, e_n \in V$ называется *базисом* векторного пространства V , если любой вектор $v \in V$ линейно выражается через него *единственным* образом, т. е. если из равенства $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ вытекает, что $x_i = y_i$ для всех i . Коэффициенты x_i единственного линейного выражения $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ называются *координатами* вектора v в базисе e_1, \dots, e_n . Например, в координатном векторном пространстве¹ \mathbb{K}^n векторы

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad \text{где } 1 \leq i \leq n, \quad (4-1)$$

с единицей на i -м месте и нулями в остальных местах образуют базис, поскольку произвольный вектор $v \in \mathbb{K}^n$ линейно выражается через них единственным способом:

$$v = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (4-2)$$

Базис (4-1) называется *стандартным* базисом координатного пространства \mathbb{K}^n . Вскоре мы убедимся, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы в V состоят из одинакового числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Таким образом, $\dim \mathbb{K}^n = n$. Размерность тривиального векторного пространства $V = 0$ по определению полагается нулевой: $\dim 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

4.1.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, \dots, v_m \in V$ называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \quad (4-3)$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует линейная комбинация (4-3), в которой хоть один коэффициент $\lambda_i \neq 0$, то векторы v_1, \dots, v_m называются *линейно зависимыми*. Если между векторами есть линейная зависимость, то каждый вектор, входящий в неё с ненулевым коэффициентом, линейно выражается через остальные векторы. Например, если $\lambda_m \neq 0$ в (4-3), то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0$. Обратите внимание, что любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим, поскольку $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot v = 0$ для произвольного $v \in V$.

Лемма 4.1

Порождающий векторное пространство V набор векторов e_1, \dots, e_n является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

¹См. прим. 1.2 на стр. 9.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает другое выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i . Наоборот, любые два различных разложения $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$ влекут линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) e_i = 0$. \square

ЛЕММА 4.2 (ЛЕММА О ЗАМЕНЕ)

Если векторы w_1, \dots, w_m порождают пространство V , а $u_1, \dots, u_k \in V$ линейно независимы, то $m \geq k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор векторов $u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_m$, полученный заменой первых k из них на векторы u_i , тоже порождает V .

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Так как векторы u_i линейно независимы, $u_1 \neq 0$ и среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Поскольку вектор w_1 линейно выражается через u_1 и w_2, \dots, w_m :

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m,$$

векторы $u_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ порождают V . Далее действуем по индукции. Пусть для очередного $i < k$ векторы $u_1, \dots, u_i, w_{i+1}, \dots, w_m$ порождают V . Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + \dots + x_m w_m.$$

В силу линейной независимости векторов u_i вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы u_1, \dots, u_i . Поэтому в предыдущем разложении присутствует с ненулевым коэффициентом хоть один из оставшихся векторов w_j . Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_m$. Тем самым, эти векторы линейно порождают V , что воспроизводит индуктивное предположение. \square

ТЕОРЕМА 4.1 (ТЕОРЕМА О БАЗИСЕ)

В конечномерном векторном пространстве V каждый порождающий V набор векторов содержит в себе некоторый базис, все базисы состоят из одинакового количества векторов, и каждый линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Доказательство. Поскольку векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, во всех базисах одинаковое число векторов. Если конечный набор векторов порождает V , то последовательно выкидывая из него векторы, линейно выражающиеся через остальные, мы придём к линейно независимому порождающему набору, т. е. к базису.

Если задан линейно независимый набор векторов u_1, \dots, u_k , то по лемме о замене в любом базисе e_1, \dots, e_n пространства V можно заменить некоторые k векторов e_i векторами u_i так, что полученный набор из n векторов останется порождающим. Он будет базисом, так как по уже доказанному содержит в себе некоторый базис из n векторов. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.1

В n -мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов являются базисами.

Доказательство. По [лем. 4.2](#) при замене любого базиса любыми n линейно независимыми векторами получится порождающий набор, т. е. тоже базис. По [теор. 4.1](#) любой порождающий набор из n векторов содержит в себе некоторый базис. Так как этот базис тоже состоит из n векторов, он совпадает с исходным набором. \square

Следствие 4.2

В конечномерном пространстве V каждое векторное подпространство $U \subset V$ тоже конечномерно и $\dim U \leq \dim V$, причём равенство размерностей возможно только при $U = V$.

Доказательство. Если k векторов $u_1, \dots, u_k \in U$ линейно независимы, но не порождают U , то для любого ненулевого вектора $u_{k+1} \in U$, который линейно через них не выражается, набор из $k+1$ векторов u_1, \dots, u_k, u_{k+1} тоже будет линейно независим. По лемме о замене, линейно независимый набор в $U \subset V$ не может содержать больше $\dim V$ векторов. Таким образом, начав с произвольного линейно независимого набора векторов в U и добавляя к нему векторы, линейно не выражающиеся через предыдущие, мы через конечное число шагов получим линейно независимый набор, порождающий U , т.е. базис. По теореме о базисе, этот базис можно достроить до базиса в V . Поэтому $\dim U \leq \dim V$. Если $\dim U = \dim V$, то по предыдущему [сл. 4.1](#) всякий базис в U является одновременно базисом в V , откуда $V = U$. \square

Следствие 4.3

Всякое n -мерное векторное пространство V над полем \mathbb{k} изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^n . Линейные изоморфизмы $\mathbb{k}^n \simeq V$ взаимно однозначно соответствуют базисам в V .

Доказательство. Если задан линейный изоморфизм $F : \mathbb{k}^n \simeq V$, то векторы¹ $v_i = F(e_i)$ образуют базис пространства V , и разным линейным отображениям отвечают разные базисы, поскольку из равенств $F(e_i) = G(e_i)$ для всех i вытекает, что и для любого вектора $u = \sum x_i e_i \in \mathbb{k}^n$

$$F(u) = F\left(\sum x_i e_i\right) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i G(e_i) = G\left(\sum x_i e_i\right) = G(u).$$

Наоборот, для любого базиса v_1, \dots, v_n пространства V отображение

$$F : \mathbb{k}^n \rightarrow V, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,$$

линейно, биективно и переводит e_i в v_i для всех i . \square

Пример 4.1 (пространство функций)

Множество \mathbb{k}^X всех функций $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ на произвольном множестве X со значениями в произвольном поле \mathbb{k} образует векторное пространство, в котором сложение функций и их умножение на числа задаётся обычными правилами: $f_1 + f_2 : x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ и $\lambda f : x \mapsto \lambda \cdot f(x)$. Пространство функций на конечном множестве $X = \{1, \dots, n\}$ изоморфно координатному пространству \mathbb{k}^n . Изоморфизм сопоставляет функции f набор её значений $(f(1), \dots, f(n))$ и отождествляет стандартный базис пространства \mathbb{k}^n с базисом из δ -функций $\delta_i : X \rightarrow \mathbb{k}$:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

Пример 4.2 (интерполяционная формула Лагранжа)

Зафиксируем $n+1$ различных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{k}$ и обозначим через $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ пространство многочленов степени не выше n . По определению многочленов, мономы $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют базис в $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$, и $\dim \mathbb{k}[x]_{\leq n} = n+1$. Для каждого $i = 0, 1, 2, \dots, n$ обозначим через

$$f_i(x) = \prod_{v \neq i} (x - a_v) : \prod_{v \neq i} (a_i - a_v)$$

¹Здесь и далее $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{k}^n$ обозначает стандартный базис в \mathbb{k}^n из формулы форм. (4-1) на стр. 48.

многочлен степени n , зануляющийся во всех точках a_i , кроме точки a_i , а в точке a_i принимающий значение $f_i(a_i) = 1$. Многочлены f_i линейно независимы, ибо подставляя в равенство

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

значение $x = a_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого i . Тем самым, многочлены f_i тоже образуют базис пространства $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Подставляя в разложение $g(x) = x_1 f_1(x) + \dots + x_n f_n(x)$ произвольного многочлена $g \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ по базису f_0, f_1, \dots, f_n значение $x = a_i$, мы заключаем, что $x_i = g(a_i)$, т. е. i -я координата многочлена g в базисе f_0, f_1, \dots, f_n равна значению этого многочлена в точке a_i . Таким образом, для любого набора значений $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ существует единственный такой многочлен $g \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, что $g(a_i) = b_i$ для всех i , а именно —

$$g(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_n f_n(x).$$

ПРИМЕР 4.3 (конечные поля)

Пусть конечное поле \mathbb{K} содержит подполе $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{K}$, состоящее из q элементов. Будучи конечномерным векторным пространством над \mathbb{F}_q , поле \mathbb{K} находится в линейной биекции с координатным пространством \mathbb{F}_q^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и, тем самым, состоит из q^n элементов. Применяя это наблюдение к простому подполю поля \mathbb{K} , состоящему из всех элементов вида¹

$$\pm \frac{1 + \dots + 1}{1 + \dots + 1} \in \mathbb{K}$$

с ненулевым знаменателем, мы заключаем, что число элементов в любом конечном поле является степенью некоторого простого числа.

УПРАЖНЕНИЕ 4.1 (по алгебре). Убедитесь, что простое подполе любого поля изоморфно либо полю \mathbb{Q} , либо полю вычетов $\mathbb{Z}/(p)$ по некоторому простому модулю $p \in \mathbb{N}$.

4.2. Подпространства. Пересечение любого множества векторных подпространств в произвольном векторном пространстве V также является подпространством в V .

УПРАЖНЕНИЕ 4.2. Убедитесь в этом.

Пересечение всех подпространств, содержащих данное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается $\text{span}(M)$. Это наименьшее по включению векторное подпространство в V , содержащее M . Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M , ибо все такие линейные комбинации очевидным образом образуют векторное пространство и содержатся во всех векторных подпространствах, содержащих M .

ПРИМЕР 4.4 (гиперплоскости)

Линейная оболочка $H = \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ произвольных $n - 1$ линейно независимых векторов в n -мерном векторном пространстве V является $(n - 1)$ -мерным подпространством. Такие подпространства называются *гиперплоскостями* в V . Если дополнить векторы v_i некоторым вектором v_n до базиса в V и обозначить через $x = (x_1, \dots, x_n)$ координаты относительно этого базиса, то гиперплоскость H можно описать как ГМТ x удовлетворяющих линейному

¹Ср. с н° 2.1.2 на стр. 24.

уравнению $x_n = 0$. Покажем, что и наоборот, для любого ненулевого линейного отображения $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}$ множество $\text{Ann } \xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$ является гиперплоскостью.

УПРАЖНЕНИЕ 4.3. Убедитесь, что $\text{Ann } \xi \subset V$ является векторным подпространством.

Пусть векторы u_1, \dots, u_m составляют базис в $\text{Ann } \xi$, а вектор v таков, что $\xi(v) \neq 0$. Векторы v, u_1, \dots, u_m линейно независимы, ибо векторы u_i линейно независимы, а вектор $v \notin \text{Ann } \xi$ через них не выражается. Для любого вектора $w \in V$ вектор $w - v \cdot \xi(w)/\xi(v) \in \text{Ann } \xi$ и линейно выражается через векторы u_i . Следовательно, векторы v, u_1, \dots, u_m составляют базис в V , откуда $m = \dim V - 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.4. Покажите, что векторное пространство \mathbb{K}^n над бесконечным полем \mathbb{K} не является объединением конечного числа своих гиперплоскостей.

4.2.1. Сумма подпространств. Объединение векторных подпространств почти никогда не является векторным пространством. Например, прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ являются одномерными векторными подпространствами координатной плоскости \mathbb{K}^2 , но сумма любого ненулевого вектора первого из них с любым ненулевым вектором второго не лежит в их объединении — скажем, $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.5. Покажите, что объединение двух подпространств является векторным пространством если и только если одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения произвольного множества подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается $U_1 + \dots + U_n = \sum_\nu U_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \text{span } \bigcup_\nu U_\nu$. Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ)

Сумма подпространств $U_1, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ если отображение множеств $U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_1 + \dots + U_n$, переводящее набор векторов $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ в вектор $u_1 + \dots + u_n \in U_1 + \dots + U_n$ биективно, т. е. каждый вектор $w \in U_1 + \dots + U_n$ имеет единственное представление $w = u_1 + \dots + u_n$, в котором $u_i \in U_i$ при каждом i .

Например, пространство V является прямой суммой своих одномерных подпространств, порождённых векторами e_1, \dots, e_n , если и только если эти векторы образуют в V базис.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1

Сумма подпространств $U_1, \dots, U_n \subset V$ является прямой если и только если каждое из подпространств имеет нулевое пересечение с суммой всех остальных. В частности, сумма $U + W$ двух подпространств прямая тогда и только тогда, когда $U \cap W = 0$.

Доказательство. Обозначим через W_i сумму всех подпространств U_ν за исключением i -того подпространства U_i . Если пересечение $U_i \cap W_i$ содержит ненулевой вектор

$$u_i = u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_n, \quad \text{где } u_\nu \in U_\nu \text{ при всех } \nu,$$

то у этого вектора имеется два различных представления¹

$$0 + \dots + 0 + u_i + 0 + \dots + 0 = u_1 + \dots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \dots + u_n.$$

Поэтому такая сумма не прямая. Наоборот, если $U_i \cap W_i = 0$ при всех i и имеется равенство

$$u_1 + \dots + u_n = w_1 + \dots + w_n, \text{ где } u_v, w_v \in U_v \text{ при всех } i,$$

то, переписывая его для каждого $i = 1, \dots, n$ как $u_i - w_i = \sum_{v \neq i} (w_v - u_v)$, видим, что этот вектор лежит в $U_i \cap W_i = 0$. Поэтому $u_i = w_i$ для любого i . \square

УПРАЖНЕНИЕ 4.6. Покажите, что сумма подпространств $U_1, \dots, U_m \subset V$ является прямой если и только если любой набор ненулевых векторов u_1, \dots, u_m , в котором $u_i \in U_i$ при каждом i , линейно независим.

4.2.2. Размерность суммы и пересечения. По [сл. 4.2](#) на стр. 50 для любого подпространства U конечномерного пространства V выполняется неравенство $\dim U \leq \dim V$. Разность $\text{codim}_V U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$ называется *коразмерностью* подпространства U в V .

Предложение 4.2

Для любых конечномерных подпространств U_1, U_2 в произвольном² векторном пространстве V выполняется равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис u_1, \dots, u_k в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами v_1, \dots, v_r и w_1, \dots, w_s до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$ образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в равенстве

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

имеются как векторы v_i , так и векторы w_j . Переносим w_1, \dots, w_s в правую часть, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2 , означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. \square

Следствие 4.4

Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V

$$\dim(U_1 \cap U_2) \geq \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V).$$

В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из [предл. 4.2](#) и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$. \square

¹В левом отлично от нуля только i -е слагаемое, а в правом оно нулевое.

²Не обязательно конечномерном.

Следствие 4.5 (дополнительные подпространства)

Следующие два свойства векторных подпространств U_1, U_2 в конечномерном векторном пространстве V эквивалентны¹:

$$1) V = U_1 \oplus U_2 \quad 2) U_1 \cap U_2 = 0 \text{ и } \dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V).$$

Доказательство. При $U_1 \cap U_2 = 0$ равенство $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$ равносильно равенству $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$, означающему, что $U_1 + U_2 = V$. \square

Определение 4.2 (трансверсальные подпространства)

Подпространства U_1 и U_2 в конечномерном векторном пространстве V называются *трансверсальными*, если $\dim U_1 \cap U_2 = \max(0, \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V)$, т. е. когда размерность их пересечения принимает минимально возможное допустимое по [сл. 4.4](#) значение. Например, любые два подпространства, сумма которых является прямой, трансверсальны.

4.3. Аффинная геометрия. Пусть множество A является аффинным пространством² над векторным пространством V . Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек $\Pi(p, U) = p + U = \{\tau_u(p) \mid u \in U\}$ называется проходящим через точку p аффинным подпространством в A с направляющим векторным подпространством U . Размерность аффинного пространства $\Pi(p, U)$ по определению полагается равной размерности $\dim U$ его направляющего векторного подпространства.

Пример 4.5 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает \mathbb{K} . Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p + \lambda u + \mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегает \mathbb{K} . Отметим, что к любой такой плоскости применимо всё сказанное нами в §§ 1, 2.

Предложение 4.3

Аффинные подпространства $p + U$ и $q + W$ пересекаются если и только если $\overline{pq} \in U + W$, и в этом случае их пересечение является аффинным пространством с направляющим векторным пространством $U \cap W$.

Доказательство. Равенство $\overline{pq} = u + w$ равносильно равенству $p + u = q - w$, означающему, что точка $r = p + u = q - w \in (p + U) \cap (q + W)$. Если такая точка r существует, то для любой лежащей в пересечении $(p + U) \cap (q + W)$ точки $r' = p + u' = q + w'$ вектор $\overline{rr'} = u' - u = w' + w \in U \cap W$. Наоборот, для любого вектора $v \in U \cap W$ точка $r + v$ лежит в $(p + U) \cap (q + W)$. \square

Следствие 4.6

Следующие условия на аффинные подпространства $p + U$ и $q + W$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ эквивалентны: (1) $\overline{pq} \in U$ (2) $p \in q + U$ (3) $q \in p + U$ (4) $p + U = q + U$ (5) $(p + U) \cap (q + W) \neq \emptyset$. \square

¹Обладающие этими свойствами подпространства U_1, U_2 называются *дополнительными*.

²См. п. 1.4 на стр. 14.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4

Точки p_0, p_1, \dots, p_k аффинного пространства \mathbb{A} тогда и только тогда, когда не содержатся ни в каком $(k-1)$ -мерном аффинном подпространстве, когда векторы $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_k}$ линейно независимы, и в этом случае через точки p_0, p_1, \dots, p_k проходит единственное k -мерное аффинное подпространство.

Доказательство. Линейная зависимость k векторов $\overrightarrow{p_0 p_i}$ равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k-1$. Это в свою очередь означает, что в V найдётся $(k-1)$ -мерное векторное подпространство U , содержащее все векторы $\overrightarrow{p_0 p_i}$. Последнее равносильно тому, что $(k-1)$ -мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i . Если векторы $\overrightarrow{p_0 p_i}$ линейно независимы, то они составляют базис в любом содержащем их k -мерном векторном подпространстве $U \subset V$, и значит, любое такое подпространство совпадает с их линейной оболочкой. Поскольку прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i равносильно тому, что все векторы $\overrightarrow{p_0 p_i}$ лежат в U , мы заключаем, что такое пространство $p_0 + U$ равно одно и его направляющее векторное пространство U представляет собою линейную оболочку векторов $\overrightarrow{p_0 p_i}$. \square

ПРИМЕР 4.6 (АФФИННЫЙ РЕПЕР)

В n -мерном аффинном пространстве \mathbb{A}^n над векторным пространством V каждый набор из $n+1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек p_0, p_1, \dots, p_n задаёт систему аффинных координат с началом в точке p_0 и базисными векторами $e_i = \overrightarrow{p_0 p_i} \in V$ в том смысле, что точки $q \in \mathbb{A}^n$ оказываются в биекции с наборами таких чисел (x_1, \dots, x_n) , что

$$\overrightarrow{p_0 q} = x_1 \cdot \overrightarrow{p_0 p_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{p_0 p_2} + \dots + x_n \cdot \overrightarrow{p_0 p_n}.$$

В самом деле, по определению аффинного пространства, сопоставление точке $q \in \mathbb{A}^n$ вектора $\overrightarrow{p_0 q} \in V$ задаёт биекцию между точками и векторами. Так как точки p_i не лежат в одной гиперплоскости, n векторов e_i линейно независимы и составляют базис в V . Сопоставление вектору его координат в этом базисе задаёт линейную биекцию $V \simeq \mathbb{K}^n$.

4.4. Линейные и аффинные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F: V \rightarrow W$ связаны его *ядро* $\ker F \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ и *образ* $\text{im } F \stackrel{\text{def}}{=} F(V) \subset W$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.7. Убедитесь, что $\ker F \subset V$ и $\text{im } F \subset W$ являются векторными подпространствами.

Поскольку равенства $F(v_1) = F(v_2)$ и $F(v_1 - v_2) = 0$ для линейного отображения F эквивалентны друг другу, два вектора $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда переводятся отображением F в один и тот же вектор $w = F(v_1) = F(v_2) \in \text{im } F$, когда $v_1 - v_2 \in \ker F$. Иными словами, полный прообраз $F^{-1}(w)$ любого вектора $w \in \text{im } F$ либо пуст, либо является *параллельным сдвигом* векторного подпространства $\ker F$ на произвольный вектор $v \in F^{-1}(w)$:

$$F^{-1}(F(v)) = v + \ker F. \quad (4-4)$$

В частности, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5

Линейное отображение F инъективно тогда и только тогда, когда $\ker F = 0$. \square

Следствие 4.7

Линейное отображение F инъективно если и только если оно переводит линейно независимые наборы векторов в линейно независимые.

Доказательство. Если F не инъективен, то $\ker F$ содержит ненулевой вектор u , и линейно независимый набор, состоящий из одного этого вектора, перейдет в линейно зависимый набор, состоящий из нулевого вектора. Если $\ker F = 0$, то равенство $0 = \lambda_1 F(u_1) + \dots + \lambda_k F(u_k) = F(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k)$ означает, что вектор $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in \ker F$ нулевой, т. е. векторы $F(u_i)$ могут быть линейно зависимы только когда сами векторы u_i линейно зависимы. \square

Предложение 4.6

Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \rightarrow W$

$$\dim \ker F + \dim \operatorname{im} F = \dim V. \quad (4.5)$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, \dots, u_k \in \ker F$, дополним его векторами e_1, \dots, e_m до базиса в V и покажем, что векторы $F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_m)$ образуют базис в $\operatorname{im} F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j \in V$

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j).$$

Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означает, что $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, т. е. является линейной комбинацией векторов u_i , что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. \square

Следствие 4.8

Следующие свойства линейного отображения $F : V \rightarrow V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\operatorname{im} F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по [предл. 4.6](#), а их одновременное выполнение равносильно (1) по [предл. 4.5](#). \square

Пример 4.7 (интерполяция с кратными узлами, продолжение [прим. 4.2](#))

Зафиксируем, как и в [прим. 4.2](#) на стр. 50, несколько различных чисел $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, однако теперь для каждого a_i зададим $m_i + 1$ произвольных значений $b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im_i} \in \mathbb{K}$. Пусть общее число заданных значений $(m_1 + 1) + \dots + (m_n + 1) = m + 1$. Покажем, что существует единственный такой многочлен $g \in \mathbb{K}[x]$ степени не выше m , что при каждом i сам этот многочлен и первые его m_i производных принимают в точке a_i заданные значения

$$g(a_i) = b_{i0}, \quad g'(a_i) = b_{i1}, \quad g''(a_i) = b_{i2}, \quad \dots, \quad g^{(m_i)}(a_i) = b_{im_i},$$

где $g^{(k)}(x) = d^k g(x)/dx^k$ означает k -ю производную от многочлена g . Для этого произвольным образом занумеруем $m + 1$ пар чисел (i, j) с $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m_i$ и выпишем их в одну строчку в порядке возрастания номеров. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{K}[x]_{\leq m} \rightarrow \mathbb{K}^{m+1}$, переводящее каждый многочлен g степени $\deg g \leq m$ в набор значений¹ $g^{(j)}(a_i)$, записанных в строчку согласно зафиксированному только что порядку на множестве индексов (i, j) .

УПРАЖНЕНИЕ 4.8. Убедитесь, что отображение F линейно и $\ker F = 0$.

Так как $\dim \operatorname{im} F = \dim \mathbb{K}[x]_{\leq m} = \dim \mathbb{K}^{m+1}$, мы заключаем, что отображение F биективно, что и требовалось.

¹Где для единообразия обозначений мы полагаем $g^{(0)} \triangleq g$.

ПРИМЕР 4.8 (ПРОЕКЦИИ)

С каждой парой дополнительных подпространств¹ $U, W \subset V = U \oplus W$ связаны сюръективные линейные отображения $\pi_U : V \rightarrow U, u + w \mapsto u$, и $\pi_W : V \rightarrow W, u + w \mapsto w$, которые называются *проекциями* пространства V , соответственно, на подпространство U вдоль подпространства W и на подпространство W вдоль подпространства U . Первая из них имеет $\ker \pi_U = W$ и тождественно действует на U , а вторая имеет $\ker \pi_W = U$ и тождественно действует на W . Проекции π_U и π_W , рассматриваемые как линейные эндоморфизмы $V \rightarrow V$, удовлетворяют соотношениям $\pi_U \pi_W = \pi_W \pi_U = 0, \pi_U + \pi_W = \text{Id}_V, \pi_U \circ \pi_U = \pi_U, \pi_W \circ \pi_W = \pi_W$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.9. Покажите, что если линейный эндоморфизм $F : V \rightarrow V$ удовлетворяет соотношению $F^2 = F$, то $V = \ker F \oplus \text{im } F$, и F является проекцией V на $\text{im } F$ вдоль $\ker F$, а оператор $G = \text{Id}_V - F$ тоже удовлетворяет соотношению² $G^2 = G$ и является проекцией V на $\ker F$ вдоль $\text{im } F$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7

Пусть векторы e_1, \dots, e_n образуют базис векторного пространства V . Тогда для любого векторного пространства W и любого набора из n векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ существует единственное такое линейное отображение $F : V \rightarrow W$, что $F(e_i) = w_i$ для всех i .

Доказательство. Если такое отображение F существует, то в силу линейности оно действует на произвольный вектор $v = \sum x_i e_i \in V$ по правилу $F(v) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i w_i$ и, тем самым, единственно. С другой стороны, для любого набора векторов $w_1, \dots, w_n \in W$ отображение

$$F : V \rightarrow W, \quad x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto x_1 w_1 + \dots + x_n w_n,$$

очевидно линейно и при каждом i переводит e_i в w_i . □

СЛЕДСТВИЕ 4.9

Для любого набора из $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек p_0, p_1, \dots, p_n в n -мерном аффинном пространстве A и произвольного набора из $n + 1$ точек q_0, q_1, \dots, q_n любого аффинного пространства B существует единственное такое аффинное отображение³ $\varphi : A \rightarrow B$, что $\varphi(p_i) = q_i$ при всех i .

Доказательство. Обозначим через U, W векторные пространства, подлежащие аффинным пространствам A, B . Если отображение φ существует, то его дифференциал⁴ $D_\varphi : U \rightarrow W$ переводит n векторов $\overrightarrow{p_0 p_i}$, составляющих базис в U , в заданные n векторов $\overrightarrow{q_0 q_i} \in W$. По предл. 4.7 такое линейное отображение D_φ существует, единственно и переводит вектор $u = \sum x_i \cdot \overrightarrow{p_0 p_i}$ в вектор $D_\varphi(u) = \sum x_i \cdot \overrightarrow{q_0 q_i}$. Поэтому аффинное отображение φ тоже существует, единственно и переводит точку $a = p_0 + \sum x_i \cdot \overrightarrow{p_0 p_i}$ в точку $\varphi(a) = q_0 + \sum x_i \cdot \overrightarrow{q_0 q_i}$. □

СЛЕДСТВИЕ 4.10

Аффинное отображение из n -мерного аффинного пространства в себя биективно если и только если оно переводит какие-нибудь $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек в точки,

¹Напомним, что это означает, что $V = U \oplus W$, т. е. $U + W = V$ и $U \cap W = 0$, см. сл. 4.5 на стр. 54.

²А также соотношениям $GF = FG = 0$.

³См. н° 2.2 на стр. 25.

⁴См. н° 2.2.1 на стр. 26.

также не лежащие в одной гиперплоскости. Для любых двух упорядоченных наборов из $n + 1$ точек, в каждом из которых точки не лежат в одной гиперплоскости, существует единственное биективное аффинное преобразование, переводящее первый набор во второй.

Доказательство. Аффинное отображение биективно если и только если биективен его дифференциал. Дифференциал биективен если и только если он переводит базис в базис. Векторы, соединяющие одну из $n + 1$ точек со всеми остальными, образуют базис если и только если эти $n + 1$ точек не лежат в одной гиперплоскости. \square

4.5. Фактор пространства. Рассмотрим произвольное векторное пространство V и зафиксируем в нём некоторое подпространство $U \subset V$. Проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ аффинное подпространство $v + U$ с направляющим подпространством U можно трактовать как класс эквивалентности вектора v по модулю сдвигов на векторы из подпространства U . Такой класс обычно обозначают через $[v]_U = v \pmod{U} = \{w \in V \mid w - v \in U\}$ и называют классом вычетов вектора v по модулю U . На множестве классов вычетов имеется естественная структура векторного пространства, в котором сложение и умножение на числа наследуются из V и задаются правилами $[v]_U + [w]_U \stackrel{\text{def}}{=} [v + w]$ и $\lambda[v]_U \stackrel{\text{def}}{=} [\lambda v]$.

УПРАЖНЕНИЕ 4.10. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем \mathbb{K} .

Пространство классов вычетов по модулю подпространства U обозначается V/U и называется фактор пространством пространства V по подпространству U . Повторю, что на геометрическом языке векторами фактор пространства V/U являются всевозможные аффинные подпространства в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Линейное сюръективное отображение $V \rightarrow V/U$, $v \mapsto [v]$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в содержащий его класс $[v]$, называется отображением факторизации.

ПРИМЕР 4.9 (ФАКТОР ПО ЯДРУ)

Каждое линейное отображение $F : V \rightarrow W$ задаёт изоморфизм $V/\ker F \simeq \text{im } F$, сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \text{im } F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F$$

(ср. с форм. (4-4) на стр. 55).

ПРИМЕР 4.10 (ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА КАК ФАКТОР)

Линейная оболочка $W = \text{span}(w_1, \dots, w_m) \subset V$ произвольного набора из m векторов w_m векторного пространства V является образом линейного отображения $F : \mathbb{K}^m \rightarrow V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \mathbb{K}^m$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого отображения $U = \ker F \subset \mathbb{K}^m$ представляет собою пространство линейных соотношений между образующими векторами w_i пространства W в том смысле, что вектор

$$u = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m \in \mathbb{K}^m$$

лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m = 0$ в W . Изоморфизм

$$W = \text{im } F \simeq \mathbb{K}^m / U$$

из предыдущего прим. 4.9 в данном случае утверждает, что векторы $w \in W$ можно трактовать как классы вычетов всевозможных формальных линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$ по модулю тех комбинаций, что являются линейными зависимостями между векторами w_i .

Предложение 4.8

Если векторы v_1, \dots, v_k дополняют некоторый базис u_1, \dots, u_m подпространства $U \subset V$ до базиса во всём пространстве V , то классы $[v_1], \dots, [v_k]$ их вычетов по модулю U образуют базис фактор пространства V/U . В частности, $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из [предл. 4.6](#) на стр. 56 и его доказательства, применённых к линейному отображению факторизации $V \rightarrow V/U$. Повторим проведённое там рассуждение ещё раз на языке классов вычетов. Классы $[v_i]$ линейно независимы в V/U , поскольку равенство $[0] = \lambda_1[v_1] + \dots + \lambda_k[v_k] = [\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k]$ в V/U означает, что $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_m u_m$ в V , а такое возможно только когда все $\lambda_i = 0$ и все $\mu_j = 0$. Классы $[v_i]$ линейно порождают пространство V/U , так как для любого вектора $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_m u_m \in V$ класс $[v] = [\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k] = \lambda_1[v_1] + \dots + \lambda_k[v_k]$ в V/U . \square

§5. Матрицы

5.1. Матрицы линейных отображений. Линейные отображения $F : U \rightarrow W$ между двумя векторными пространствами U и W над полем \mathbb{k} сами образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на константы:

$$F + G : v \mapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v).$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.1. Убедитесь, что для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ и линейных отображений $F, G : U \rightarrow W$ отображение $\lambda F + \mu G$ линейно, причём для всех линейных отображений $H : V \rightarrow U$ и $K : W \rightarrow V$ выполняются равенства $(\lambda F + \mu G)H = \lambda FH + \mu GH$ и $K(\lambda F + \mu G) = \lambda KF + \mu KG$.

Пространство линейных отображений $U \rightarrow W$ обозначается $\text{Hom}(U, W)$ или $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$, если надо явно указать основное поле. Чтобы построить в $\text{Hom}(U, W)$ базис, зафиксируем какие-нибудь базисы $u_1, \dots, u_n \in U$, $w_1, \dots, w_m \in W$ и для каждого $j = 1, 2, \dots, n$ разложим вектор $F(u_j)$ по базису $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$:

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij}. \quad (5-1)$$

Составленная из коэффициентов f_{ij} прямоугольная таблица¹

$$(F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n)) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{k}), \quad (5-2)$$

j -й столбец которой содержит написанные сверху вниз координаты вектора $F(u_j)$, называется *матрицей отображения F в базисах $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$* . Мы будем обозначать эту матрицу через $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ или (f_{ij}) . Согласно [предл. 4.7](#) на стр. 57 эта матрица однозначно задаёт действие линейного отображения F на любой вектор $v = \sum u_j x_j \in U$:

$$F(v) = F\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n F(u_j) \cdot x_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_i \cdot f_{ij} x_j. \quad (5-3)$$

Обозначая через $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ и $F(\mathbf{u}) = (F(u_1), \dots, F(u_n))$ матрицы-строки, элементами которых являются векторы, а через

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

матрицы-столбцы, составленные из чисел — координат векторов v и $F(v)$ в базисах \mathbf{u} и \mathbf{w} , мы получаем матричные равенства² $v = \mathbf{u}\mathbf{x}$, $F(v) = \mathbf{w}\mathbf{y}$, $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ и можем переписать вычисление (5-3) в виде $F(v) = F(\mathbf{u}\mathbf{x}) = F(\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{w}F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}\mathbf{x}$, откуда $\mathbf{y} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}\mathbf{x}$. Таким образом, линейное

¹Ср. с п° 2.3 на стр. 27.

²Напомню, что произведение матриц было определено в п° 2.3, см. форм. (2-8) на стр. 27.

отображение $F : U \rightarrow W$, имеющее в базисах \mathbf{w} и \mathbf{u} матрицу $F_{\mathbf{wu}}$, переводит вектор со столбцом координат \mathbf{x} в базисе \mathbf{u} в вектор со столбцом координат $F_{\mathbf{wu}}\mathbf{x}$ в базисе \mathbf{w} , т. е. действует на столбец координат по правилу

$$\mathbf{x} \mapsto F_{\mathbf{wu}}\mathbf{x} \quad (5-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.2. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении их на числа матрицы этих отображений поэлементно складываются и умножаются на те же самые числа.

Предложение 5.1

Выбор базисов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ в пространствах U, W задаёт линейный изоморфизм векторного пространства $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ линейных отображений $U \rightarrow W$ с векторным пространством $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn}$ матриц размера $m \times n$, сопоставляющий линейному отображению его матрицу в выбранных базисах:

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}), \quad F \mapsto F_{\mathbf{wu}}, \quad (5-5)$$

В частности, $\dim \text{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$.

Доказательство. Линейность отображения (5-5) вытекает из упр. 5.2. Если матрица $F_{\mathbf{wu}}$ нулевая, то и задаваемое ею линейное отображение (5-4) тождественно нулевое, т. е. линейное отображение (5-5) имеет нулевое ядро, а значит, инъективно. Так как каждая матрица $F_{\mathbf{wu}}$ задаёт по формуле (5-4) линейное отображение $F : U \rightarrow W$, отображение (5-5) сюръективно. \square

5.2. Умножение матриц происходит из композиции линейных отображений. А именно, зафиксируем в пространствах U, V, W некоторые базисы $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, и пусть линейные отображения $B : U \rightarrow V$ и $A : V \rightarrow W$ имеют в этих базисах матрицы $B_{\mathbf{vu}} = (b_{ij})$ и $A_{\mathbf{vw}} = (a_{ij})$, т. е.

$$B(u_j) = \sum_k v_k b_{kj} \quad \text{и} \quad A(v_k) = \sum_i w_i a_{ik}.$$

Тогда их композиция $C = A \circ B : U \rightarrow W$ переводит каждый базисный вектор u_j из базиса \mathbf{u} в

$$C(u_j) = A\left(\sum_k v_k b_{kj}\right) = \sum_k A(v_k) b_{kj} = \sum_i \sum_k w_i a_{ik} b_{kj} = \sum_i w_i \cdot \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

Тем самым, матрица $C_{\mathbf{wu}} = (c_{ij})$ имеет в i -й строке и j -м столбце элемент

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{is} b_{sj}, \quad \text{где } s = \dim V, \quad (5-6)$$

равный произведению i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B в том самом смысле, как мы определили его в форм. (2-8) на стр. 27:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s. \quad (5-7)$$

Таким образом, матрица композиции линейных отображений является произведением матриц этих отображений. Так как композиция линейных отображений ассоциативна, произведение

матриц также ассоциативно, т. е. для любых $F \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$, $G \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{K})$ и $H \in \text{Mat}_{\ell \times n}(\mathbb{K})$ в $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ выполняется равенство $(FG)H = F(GH)$. Поскольку композиция линейных отображений линейна по каждому из сомножителей¹, в произведении линейных комбинаций матриц одинакового размера можно раскрывать скобки по обычным правилам, т. е.

$$(\lambda_1 F_1 + \mu_1 G_1)(\lambda_2 F_2 + \mu_2 G_2) = \lambda_1 \lambda_2 F_1 F_2 + \lambda_1 \mu_2 F_1 G_2 + \mu_1 \lambda_2 G_1 F_2 + \mu_1 \mu_2 G_1 G_2$$

для всех $F_1, G_1 \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{K})$, $F_2, G_2 \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{K})$ и всех $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$.

Как и композиция отображений, умножение матриц обычно не коммутативно. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 23 \end{pmatrix}.$$

Более того, как и композиция отображений, произведение матриц не всегда определено: ширина левого множителя должна быть равна высоте правого. В частности, бывает так, что произведение AB определено, а BA — нет.

В дальнейшем мы часто будем рассматривать матрицы не только с элементами из поля \mathbb{K} , но и, к примеру, с элементами из векторного пространства V . Вообще, для любой аддитивной абелевой группы R можно образовать аддитивную абелеву группу $\text{Mat}_{m \times n}(R)$ матриц размера $m \times n$ с элементами из R , изоморфную прямому произведению mn экземпляров группы R с собой. Если есть шесть абелевых групп $R_1, R_2, R_3, R_{12}, R_{23}, R_{123}$, и заданы операции умножения:

$$\begin{aligned} R_1 \times R_2 &\rightarrow R_{12}, & R_{12} \times R_3 &\rightarrow R_{123}, \\ R_2 \times R_3 &\rightarrow R_{23}, & R_1 \times R_{23} &\rightarrow R_{123}, \end{aligned} \quad (5-8)$$

то для любых $m, k, \ell, n \in \mathbb{N}$ определены умножения матриц с элементами из этих групп:

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{m \times k}(R_1) \times \text{Mat}_{k \times \ell}(R_2) &\rightarrow \text{Mat}_{m \times \ell}(R_{12}), & \text{Mat}_{m \times \ell}(R_{12}) \times \text{Mat}_{\ell \times n}(R_3) &\rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(R_{123}), \\ \text{Mat}_{k \times \ell}(R_2) \times \text{Mat}_{\ell \times n}(R_3) &\rightarrow \text{Mat}_{k \times n}(R_{23}), & \text{Mat}_{m \times k}(R_1) \times \text{Mat}_{k \times n}(R_{23}) &\rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(R_{123}). \end{aligned} \quad (5-9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 5.3. Убедитесь прямым вычислением, что если умножения (5-8) между абелевыми группами ассоциативны² и дистрибутивны³, то и умножения матриц (5-9) тоже ассоциативны⁴ и дистрибутивны.

Если интерпретировать каждую букву a_v в строке \mathbf{a} из формулы (5-7)

$$(a_1, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s$$

¹См. упр. 5.1 на стр. 60.

²Т. е. $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$ для всех $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2, x_3 \in R_3$.

³Т. е. $(x'_1 + x''_1) x_2 = x'_1 x_2 + x''_1 x_2$, $x_1 (x'_2 + x''_2) = x_1 x'_2 + x_1 x''_2$, $(x'_2 + x''_2) x_3 = x'_2 x_3 + x''_2 x_3$ и т. д.

⁴Причём для ассоциативности умножения матриц существенны как ассоциативность, так и дистрибутивность умножений между абелевыми группами.

как вектор-столбец, являющийся v -тым столбцом матрицы A , а вместо столбца \mathbf{b} подставить j -й столбец матрицы B , то правило умножения матриц можно сформулировать следующим образом: в j -м столбце матрицы AB стоит линейная комбинация столбцов матрицы A взятых с коэффициентами, стоящими в j -м столбце матрицы B . Например, чтобы получить из матрицы A с тремя столбцами a_1, a_2, a_3 матрицу с четырьмя столбцами той же высоты, равными $a_1 + 2a_2, 2a_2 - 3a_3, a_1 + a_2 + a_3, 4a_1$, надо умножить матрицу A справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Симметричным образом, интерпретируя каждую букву b_μ в столбце \mathbf{b} из формулы (5-7):

$$(a_1, \dots, a_s) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_s b_s$$

как μ -ю строку матрицы B , а строку \mathbf{a} — как i -ю строку матрицы A , мы заключаем, что в i -й строке матрицы AB стоит линейная комбинация строк матрицы B с коэффициентами из i -й строки матрицы A . Например, если в матрице B , состоящей из двух строк, хочется поставить вторую строку на место первой, а вместо второй написать её сумму с первой строкой, умноженной на λ , то это достигается умножением слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Данные нами описания строк и столбцов матрицы AB получаются друг из друга заменой слова «столбец» на слово «строка» с одновременной перестановкой местами букв A и B . Матрица, по строкам которой записаны столбцы матрицы¹ $A = (a_{ij})$ называется *транспонированной* к матрице A и обозначается $A^t = (a_{ij}^t)$. Её элементы a_{ij}^t связаны с элементами a_{ij} матрицы A равенствами $a_{ij}^t = a_{ji}$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.4. Проверьте, что транспонирование является инволютивным антигомоморфизмом, т. е. $(A^t)^t = A$ и $(AB)^t = B^t A^t$.

5.3. Матрицы перехода. Пусть вектор v линейно выражается через векторы w_1, \dots, w_m :

$$v = \sum_{i=1}^m w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m. \quad (5-10)$$

Организуем коэффициенты $x_i \in \mathbb{K}$ в матрицу-столбец размера $m \times 1$ с элементами из \mathbb{K} :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

а векторы w_i — в матрицу-строку $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ размера $1 \times m$ с элементами из V . Тогда формула (5-10) свернётся в матричное равенство $v = \mathbf{w}\mathbf{x}$, в котором v рассматривается как

¹Или — что то же самое — по столбцам которой стоят строки матрицы A .

матрица размера 1×1 с элементом из V . Если имеются два набора векторов: $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, и каждый вектор u_j первого из них линейно выражается через векторы второго в виде

$$u_j = \sum_{v=1}^m c_{vj} w_v = w_1 \cdot c_{1j} + w_2 \cdot c_{2j} + \dots + w_m \cdot c_{mj},$$

то эти n равенств собираются в одну матричную формулу $\mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ рассматриваются как матрицы-строки с элементами из V , а матрица

$$C_{\mathbf{w}\mathbf{u}} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad (5-11)$$

получается подстановкой в матрицу \mathbf{u} вместо каждого из векторов u_j столбца коэффициентов его линейного выражения через векторы w_i . Матрица (5-11) называется *матрицей перехода* от векторов \mathbf{u} к векторам \mathbf{w} . Название объясняется тем, что умножение на матрицу $C_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$ позволяет переходить от линейных выражений произвольных векторов $v_k \in \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ через векторы u_j к линейным выражениям этих же векторов через векторы w_i , а именно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{v}} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}.$$

Таким образом, произведение матрицы перехода от векторов \mathbf{u} к векторам \mathbf{w} и матрицы перехода от векторов \mathbf{v} к векторам \mathbf{u} является матрицей перехода от векторов \mathbf{v} к векторам \mathbf{w} :

$$C_{\mathbf{w}\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{v}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}. \quad (5-12)$$

Подчеркнём, что когда набор векторов $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ линейно зависим, каждый вектор v из их линейной оболочки допускает много *различных* линейных выражений через векторы w_j . Поэтому обозначение $C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$ в этой ситуации не корректно в том смысле, что элементы матрицы $C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$ определяются наборами векторов \mathbf{w} и \mathbf{v} не однозначно, и равенство (5-12) означает, что имея какие-нибудь линейные выражения $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ и $C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ векторов \mathbf{u} через \mathbf{v} и векторов \mathbf{v} через \mathbf{w} , мы можем предъявить некоторое явное линейное выражение $C_{\mathbf{w}\mathbf{v}}$ векторов \mathbf{u} через векторы \mathbf{w} , перемножив матрицы $C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$ и $C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$.

Если же набор векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ является базисом, то матрица перехода $C_{\mathbf{e}\mathbf{w}}$, выражающая произвольный набор векторов $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ через базис \mathbf{e} однозначно определяется по наборам \mathbf{e} и \mathbf{w} , т. е. два набора векторов \mathbf{u} , \mathbf{w} совпадают если и только если выполняется равенство $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{w}}$.

5.4. Обратимые матрицы. Квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(по диагонали стоят единицы, в остальных местах — нули) называется *единичной*.

УПРАЖНЕНИЕ 5.5. Убедитесь, что $AE = A$ и $EA = A$ всякий раз, когда такие произведения определены.

Квадратная матрица A называется *обратимой* или *невырожденной*, если существует такая матрица A^{-1} , что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Матрица A^{-1} называется *обратной* к A . Она однозначно определяется матрицей A , поскольку для любых двух матриц B, C , удовлетворяющих равенствам $AB = E$ и $CA = E$, имеем $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$. В частности, для обратимости матрицы A достаточно, чтобы существовали такие матрицы B и C , что $AB = E$ и $CA = E$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.6. Докажите, что обратимость матрицы A равносильна обратимости транспонированной к ней матрицы¹ A^t .

ПРИМЕР 5.1 (ОБРАТИМЫЕ 2×2 -МАТРИЦЫ)

Матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

означает, что стандартные базисные векторы e_1, e_2 пространства \mathbb{k}^2 линейно выражаются через столбцы стоящей слева матрицы A как

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot y_1 + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \cdot y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если такие выражения существуют, то столбцы матрицы A линейно порождают \mathbb{k}^2 , а значит, не пропорциональны, и $\det A \neq 0$. Наоборот, если $\det A \neq 0$, то по правилу Крамера²

$$x_1 = \frac{d}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{-c}{ad - bc}, \quad y_1 = \frac{-b}{ad - bc}, \quad y_2 = \frac{a}{ad - bc}.$$

Мы заключаем, что 2×2 -матрица A с элементами из поля \mathbb{k} обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и в этом случае

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (5-13)$$

Стоящая справа матрица называется *присоединённой*³ к матрице A и обозначается

$$A^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2

Пусть набор векторов $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ образует базис пространства V . Для того, чтобы набор из n векторов $\mathbf{u} = \mathbf{v} C_{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ тоже составлял базис, необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода $C_{\mathbf{v}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$ была обратима, и в этом случае $C_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^{-1} = C_{\mathbf{u}\mathbf{v}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если векторы \mathbf{u} образуют базис, то векторы \mathbf{e} линейно выражаются через \mathbf{u} , и согласно формуле (5-12) имеют место равенства $C_{ee} = C_{eu}C_{ue}$ и $C_{uu} = C_{ue}C_{eu}$. Так как каждый набор векторов имеет единственное выражение через базис, $C_{ee} = C_{uu} = E$. Стало быть, $C_{ue}C_{eu} = C_{ue}C_{eu} = E$. Наоборот, если матрица C_{eu} обратима, то умножая обе части равенства $\mathbf{u} = \mathbf{e}C_{eu}$ справа на C_{eu}^{-1} , мы получаем линейное выражение $\mathbf{e} = \mathbf{u}C_{eu}^{-1}$ векторов \mathbf{e} через векторы \mathbf{u} . Тем самым, последние линейно порождают пространство V , а значит, составляют в нём базис. \square

¹См. упр. 5.4 на стр. 63.

²См. лем. 1.2 на стр. 12.

³По-английски *adjunct*.

Следствие 5.1

Следующие условия на квадратную матрицу $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ эквивалентны:

- 1) матрица A обратима
- 2) столбцы матрицы A линейно независимы
- 3) столбцы матрицы A линейно порождают координатное пространство \mathbb{K}^n ,

и то же самое верно с заменой столбцов на строки.

Доказательство. Обозначим через a_1, \dots, a_n столбцы матрицы A , воспринимаемые как векторы координатного пространства \mathbb{K}^n . Матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису пространства \mathbb{K}^n . По предл. 5.2 обратимость матрицы A равносильна тому, что векторы a_i образуют в \mathbb{K}^n базис, что в свою очередь равносильно каждому из условий (2), (3) по сл. 4.1 на стр. 49. Последнее утверждение предложения вытекает из упр. 5.6 на стр. 65. \square

Пример 5.2 (замена координат при смене базиса)

Пусть набор векторов $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ выражается через базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ как $\mathbf{w} = \mathbf{e}C_{\mathbf{ew}}$. Если $\mathbf{v} = \mathbf{e}C_{\mathbf{ev}}$ — другой базис, то в выражении $\mathbf{w} = \mathbf{v}C_{\mathbf{vw}}$ векторов \mathbf{w} через базис \mathbf{v} матрица $C_{\mathbf{vw}} = C_{\mathbf{ve}}C_{\mathbf{ew}} = C_{\mathbf{ev}}^{-1}C_{\mathbf{ew}}$. В частности столбец координат произвольного вектора \mathbf{w} в базисе \mathbf{v} получаются из столбца его координат в базисе \mathbf{e} умножением слева на матрицу $C_{\mathbf{ev}}^{-1}$, обратную к матрице координат векторов базиса \mathbf{v} в базисе \mathbf{e} .

Пример 5.3 (замена матрицы отображения при смене базиса)

Напомню, что для линейного отображения $F: U \rightarrow W$ и строки векторов $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)$ мы обозначаем через $F(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_r))$ строку значений отображения F на этих векторах. В силу линейности отображения F для любой числовой матрицы $M \in \text{Mat}_{r \times s}(\mathbb{K})$ выполняется равенство $F(\mathbf{v}M) = F(\mathbf{v})M$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.7. Убедитесь в этом.

Матрица $F_{\mathbf{wu}}$ отображения F в базисах \mathbf{u} и \mathbf{w} пространств U и W однозначно определяется равенством $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w}F_{\mathbf{wu}}$. В других базисах $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}$ и $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}C_{\mathbf{w}\tilde{\mathbf{w}}}$ мы получим

$$F_{\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{u}}} = C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}F_{\mathbf{wu}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}^{-1}F_{\mathbf{wu}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}F_{\mathbf{wu}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}^{-1}, \quad (5-14)$$

поскольку $F(\tilde{\mathbf{u}}) = F(\mathbf{u}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}) = F(\mathbf{u})C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{w}F_{\mathbf{wu}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}} = \tilde{\mathbf{w}}C_{\tilde{\mathbf{w}}\mathbf{w}}F_{\mathbf{wu}}C_{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{u}}}$. Если линейный оператор $F: V \rightarrow V$ действует из векторного пространства V в себя, и в V выбран базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, оператору F можно сопоставить матрицу $F_{\mathbf{e}} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathbf{ee}}$, которая называется матрицей оператора F в базисе \mathbf{e} и имеет j -м столбцом координаты вектора $F(e_j)$ в базисе \mathbf{e} . В этом случае при замене базиса \mathbf{e} на базис $\mathbf{u} = \mathbf{e}C_{\mathbf{eu}}$ матрица отображения F в новом базисе приобретёт вид

$$F_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{ue}}F_{\mathbf{e}}C_{\mathbf{eu}} = C_{\mathbf{eu}}^{-1}F_{\mathbf{e}}C_{\mathbf{eu}} = C_{\mathbf{ue}}F_{\mathbf{e}}C_{\mathbf{ue}}^{-1}. \quad (5-15)$$

5.5. Ранг матрицы. Размерность линейной оболочки столбцов матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ в координатном векторном пространстве \mathbb{K}^m называется *рангом* матрицы A и обозначается $\text{rk } A$. Каждая матрица A задаёт линейное отображение $F_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$, которое переводит координатный столбец $x \in \mathbb{K}^n$ в координатный столбец $Ax \in \mathbb{K}^m$ и матрица которого в стандартных базисах координатных пространств \mathbb{K}^n и \mathbb{K}^m совпадает с матрицей A . Линейная оболочка столбцов матрицы A представляет собою образ оператора F_A . Тем самым, $\text{rk } A = \dim \text{im } F_A$.

линейное отображение, переводящее стандартные базисные векторы $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ в столбцы матрицы A . Множество решений уравнения $Ax = b$ и системы (5-16) состоит из всех таких векторов $x \in \mathbb{K}^n$, что $F_A(x) = b$, т. е. представляет собою полный прообраз $F_A^{-1}(b)$ вектора b при отображении F_A . Если $b \notin \text{im } F_A$, то этот прообраз пуст и система (5-16) несовместна. Если $b = F_A(p) \in \text{im } F_A$, то $F_A^{-1}(b) = p + \ker F_A$, т. е. множество решений системы (5-16) представляет собою аффинное подпространство в \mathbb{K}^n , являющееся сдвигом векторного подпространства $\ker F_A \subset \mathbb{K}^n$ в какую-нибудь такую точку p , что $F(p) = b$.

На языке уравнений ядро $\ker F_A$ представляет собою множество решений системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ с теми же самыми левыми частями, что и система (5-16). В развёрнутом виде она выглядит как

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (5-17)$$

Наличие у такой системы ненулевого решения означает, что $\ker F_A \neq 0$, и в этом случае любая система (5-16) либо несовместна, либо имеет более одного решения². Это наблюдение известно как *альтернатива Фредгольма*: либо у однородной системы (5-17) есть ненулевое решение, либо у каждой системы (5-16) имеется не более одного решения.

Предложение 5.3

Пространство решений системы линейных однородных уравнений (5-17) имеет размерность $n - \text{rk } A$. В частности, эта размерность не меньше $n - m$, и если число уравнений m меньше числа неизвестных n , то система обязательно имеет ненулевое решение.

Доказательство. По [предл. 4.6](#) на стр. 56 $\dim \ker F_A = n - \dim \text{im } F_A = n - \text{rk } A$. □

Предложение 5.4 (критерий Кронекера – Капелли)

Система (5-16) совместна если и только если $\text{rk } A = \text{rk } \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$, где³ $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{m \times (n+1)}(\mathbb{K})$ получается приписыванием справа к матрице A столбца b правых частей системы (5-16).

Доказательство. Совместность системы (5-16) равносильна тому, что вектор b лежит в линейной оболочке столбцов матрицы A , что в свою очередь означает, что размерность линейной оболочки столбцов у матрицы A такая же, как у расширенной матрицы $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$. □

Пример 5.4 (системы с квадратной матрицей левых частей)

Если количество уравнений в системе (5-16) равно количеству неизвестных, линейное отображение $F_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ является эндоморфизмом n -мерного векторного пространства, и по [сл. 4.8](#) на стр. 56 равенство $\ker F_A = 0$ равносильно сюръективности оператора F_A . Это позволяет уточнить альтернативу Фредгольма: при $m = n$ либо все неоднородные системы (5-16) имеют единственное решение, либо у однородной системы (5-17) есть ненулевое решение. В первом случае матрица A обратима по [сл. 5.1](#), и знание обратной матрицы A^{-1} позволяет решить систему $Ax = b$ при любой правой части b по формуле $x = A^{-1}b$.

¹См. формулу (4-4) на стр. 55.

² A над бесконечным полем — бесконечно много решений.

³Матрица $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ называется *расширенной матрицей* системы (5-16).

5.7. Алгебры над полем. Векторное пространство A над полем \mathbb{K} называется \mathbb{K} -алгеброй¹, если на нём имеется билинейная операция умножения $A \times A \rightarrow A$. Это требование включает в себя перестановочность умножения векторов на константы с умножением в алгебре:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall a, b \in A \quad (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$$

и стандартное правило раскрытия скобок: $\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ и $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$

$$(\lambda_1 a_1 + \mu_1 b_1)(\lambda_2 a_2 + \mu_2 b_2) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2 + \lambda_1 \mu_2 a_1 b_2 + \mu_1 \lambda_2 b_1 a_2 + \mu_1 \mu_2 b_1 b_2.$$

Алгебра A называется *ассоциативной*, если $\forall a, b, c \in A \quad (ab)c = a(bc)$. Алгебра A называется *коммутативной*, если $\forall a, b \in A \quad ab = ba$. Алгебра A называется *алгеброй с единицей*, если в ней есть такой элемент $e \in A$, что $ea = ae = a$ для всех $a \in A$.

УПРАЖНЕНИЕ 5.8. Покажите, что $0 \cdot a = 0$ для всех a в любой алгебре A и что единичный элемент единствен (если существует).

Примерами *коммутативных* ассоциативных алгебр с единицами являются алгебра многочленов $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ и алгебра $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ формальных степенных рядов с коэффициентами из поля \mathbb{K} . Ключевыми примерами *некоммутативных* ассоциативных алгебр являются алгебры $\text{End}(V)$ линейных эндоморфизмов векторных пространств V над полем \mathbb{K} и алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля \mathbb{K} . Последние являются частными случаями первых, поскольку каждая квадратная матрица $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ может восприниматься как эндоморфизм координатного пространства \mathbb{K}^n , действующий на столбец $x \in \mathbb{K}^n$ по правилу² $x \mapsto Ax$.

ПРИМЕР 5.5 (БАЗИС МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ)

Базис алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ как векторного пространства над полем \mathbb{K} составляют матрицы E_{ij} имеющие единицу в пересечении i -й строки с j -м столбцом и нули во всех остальных местах. Соответствующий линейный оператор $E_{ij} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ переводит e_j в e_i , а все остальные стандартные базисные векторы отображает в нуль. Из этого описания вытекает, что

$$E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{при } j = k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5-18)$$

Написанная таблица умножения базисных матриц позволяет перемножать произвольные матрицы, которые являются линейными комбинациями базисных, просто раскрывая скобки. Например, поскольку $E_{12}^2 = 0$, мы для всех $\alpha \in \mathbb{K}$ и $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = (E + \alpha E_{12})^n = E + n\alpha E_{12} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а из равенства $(E + \alpha E_{12})(E - \alpha E_{12}) = E$ вытекает, что

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Более торжественно: *алгеброй над полем \mathbb{K}* .

²Как в п° 5.5 и п° 5.6 выше.

УПРАЖНЕНИЕ 5.9 (ЦЕНТР МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ). Для алгебры A над полем \mathbb{k} подалгебра

$$Z(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in A \mid \forall a \in A \quad az = za\}$$

называется *центром* алгебры A . Покажите, что $Z(\text{Mat}_n(\mathbb{k})) = \{tE \mid t \in \mathbb{k}\}$ состоит из скалярных матриц.

5.7.1. Обратимые элементы. Элемент a ассоциативной алгебры A с единицей $e \in A$ называется *обратимым*, если существует такой элемент $a^{-1} \in A$, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Как и в алгебре матриц¹, это требование можно ослабить до существования левого и правого обратных к a элементов $a', a'' \in A$ со свойствами $a'a = e = aa''$, ибо они автоматически будут равны: $a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$. Это вычисление заодно показывает, что обратный к a элемент однозначно определяется по a , если существует.

Обратимыми элементами алгебры $\text{End } V$ линейных эндоморфизмов $V \rightarrow V$ являются линейные изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} V$. Они образуют группу преобразований пространства V . Эта группа обозначается $\text{GL}(V)$ и называется *полной линейной группой* пространства V . Группа обратимых матриц размера $n \times n$ обозначается $\text{GL}_n(\mathbb{k}) \subset \text{Mat}_n(\mathbb{k})$.

ПРИМЕР 5.6 (ОБРАТИМОСТЬ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ)

Диагональ, идущая из левого верхнего угла квадратной матрицы в правый нижний, называется *главной*. Если все стоящие под (соотв. над) главной диагональю элементы нулевые, матрица называется *верхней* (соотв. *нижней*) *треугольной*.

УПРАЖНЕНИЕ 5.10. Проверьте, что верхние и нижние треугольные матрицы являются подалгебрами² алгебры матриц.

Треугольные матрицы с единицами на главной диагонали называются *унитреугольными*. Покажем, что каждая верхняя унитреугольная матрица $A = (a_{ij})$ обратима³ и обратная к ней матрица $B = A^{-1}$ тоже верхняя унитреугольная с наддиагональными элементами

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{s=0}^{j-i-1} (-1)^{s+1} \sum_{i < v_1 < \dots < v_s < j} a_{iv_1} a_{v_1 v_2} a_{v_2 v_3} \dots a_{v_{s-1} v_s} a_{v_s j} = \\ &= -a_{ij} + \sum_{i < k < j} a_{ik} a_{kj} - \sum_{i < k < \ell < j} a_{ik} a_{k\ell} a_{\ell j} + \sum_{i < k < \ell < m < j} a_{ik} a_{k\ell} a_{\ell m} a_{mj} - \dots \quad (5-19) \end{aligned}$$

Для этого запишем матрицу A в виде линейной комбинации базисных матриц⁴ E_{ij}

$$A = E + \sum_{i < j} a_{ij} E_{ij} = E + N,$$

где матрица $N = \sum_{i < j} a_{ij} E_{ij}$ представляет собою наддиагональную часть матрицы A . В силу форм. (5-18) на стр. 69, коэффициент при E_{ij} в матрице N^k равен нулю при $j - i < k$, а при

¹Ср. с н° 5.4 на стр. 64.

²Т. е. замкнуты относительно сложения и умножения.

³Причём этот факт, как и приводимое здесь доказательство, остаётся в силе для матриц с элементами в произвольном (даже некоммутативном) ассоциативном кольце с единицей.

⁴См. прим. 5.5 на стр. 69.

$j - i \geq k$ представляет собою сумму всевозможных произведений¹

$$\underbrace{a_{iv_1} a_{v_1 v_2} \cdots a_{v_{k-2} v_{k-1}} a_{v_{k-1} j}}_{k \text{ сомножителей}}, \quad \text{где } i < v_1 < v_2 < \cdots < v_{k-1} < j.$$

В частности, он заведомо зануляется, когда k превышает размер матрицы A . Полагая $x = E$, $y = N$ в равенстве² $(x + y)(x^{m-1} - x^{m-2}y + \cdots + (-1)^{m-1}y^{m-1}) = x^m - y^m$, при достаточно большом m мы получим матричное равенство $A(E - N + N^2 - N^3 + \cdots) = E$, откуда

$$A^{-1} = E - N + N^2 - N^3 + \cdots,$$

что и утверждалось.

5.7.2. Алгебраические и трансцендентные элементы. С каждым элементом ξ ассоциативной \mathbb{k} -алгебры A с единицей связан гомоморфизм вычисления

$$\text{ev}_\xi : \mathbb{k}[t] \rightarrow A, \quad f(x) \mapsto f(\xi) \in A. \quad (5-20)$$

Он переводит многочлен $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$ в результат подстановки в этот многочлен $x = \xi$. При этом мы считаем, что результатом такой подстановки в свободный член $a_0 = a_0 x^0$ является элемент $a_0 \xi^0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0 e \in A$. Обратите внимание, что отображение (5-20), во-первых, линейно, а во-вторых, перестановочно со сложением и умножением.

Если гомоморфизм (5-20) инъективен, то элемент $\xi \in A$ называется *трансцендентным* над \mathbb{k} . Отметим, что в этом случае алгебра A бесконечномерна как векторное пространство над \mathbb{k} , так все натуральные степени элемента ξ линейно независимы. Если гомоморфизм (5-20) имеет ненулевое ядро, то элемент ξ называется *алгебраическим* над \mathbb{k} .

УПРАЖНЕНИЕ 5.11 (ПО АЛГЕБРЕ). Убедитесь, что если ядро $\ker \text{ev}_\xi \neq 0$, то в нём имеется единственный многочлен $\mu_\xi(x)$ наименьшей положительной степени³ со старшим коэффициентом 1, и $\ker \text{ev}_\xi = (\mu_\xi)$ состоит из всех многочленов, делящихся на μ_ξ .

Приведённый многочлен μ_ξ из [упр. 5.11](#) называется *минимальным многочленом* элемента ξ .

ПРИМЕР 5.7 (АЛГЕБРАИЧНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ)

Если $\dim V = n$, то $\dim \text{End } V = n^2$, и последовательные итерации $F^0 = \text{Id}_V, F, F^2, \dots, F^{n^2}$ любого линейного оператора $F : V \rightarrow V$ представляют собою линейно зависимый набор векторов пространства $\text{End } V$. Поэтому каждый эндоморфизм⁴ F удовлетворяет нетривиальному полиномиальному уравнению $F^m + a_1 F^{m-1} + \cdots + a_{m-1} F + a_m E = 0$, где $a_i \in \mathbb{k}$.

¹Продуктивно представлять себе E_{ij} как стрелку, ведущую из числа j в число i на числовой прямой. Произведение k сомножителей E_{ij} отлично от нуля если и только если конец каждой стрелки совпадает с началом предыдущей, и в этом случае такое произведение равно сумме всех перемножаемых стрелок, рассматриваемых как целочисленные векторы на числовой прямой. Таким образом, каждое ненулевое произведение k стрелок имеет длину как минимум k , а разложения элемента E_{ij} в произведение k таких элементов находятся в биекции со всевозможными способами пройти из j в i за k шагов.

²Поскольку матрицы E и N коммутируют друг с другом, в результате этой подстановки мы получим верное матричное равенство.

³Среди всех степеней, представленных в $\ker \text{ev}_\xi$.

⁴В частности, любая квадратная матрица.

§6. Метод Гаусса

6.1. Построение базиса в подпространстве. Рассмотрим n -мерное координатное векторное пространство \mathbb{K}^n , векторы которого будем записывать в виде строк (x_1, \dots, x_n) . Сопоставим каждому набору векторов $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{K}^n$ матрицу размера $m \times n$, по строкам которой выписаны координаты этих векторов и которую мы будем называть *матрицей координат* векторов w_i . Метод Гаусса позволяет построить в линейной оболочке U произвольного заданного набора векторов $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{K}^n$ базис u_1, \dots, u_r , матрица координат которого имеет *приведённый ступенчатый вид*. Последнее по определению означает, что в каждой строке этой матрицы самый левый ненулевой элемент равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-1)$$

является приведённой ступенчатой при любом выборе элементов, стоящих на отмеченных звёздочками местах.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Убедитесь, что ненулевые строки любой приведённой ступенчатой матрицы линейно независимы и, тем самым, образуют базис своей линейной оболочки.

Столбцы, содержащие самые левые ненулевые координаты базисных векторов u_1, \dots, u_r называются *базисными столбцами* приведённой ступенчатой матрицы. Их номера j_1, \dots, j_r строго возрастают, а сами они образуют единичную подматрицу размера $r \times r$. В матрице (6-1) базисными являются столбцы с номерами 2, 4, 7 и 9.

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Убедитесь, что базисные столбцы линейно независимы и образуют базис в линейной оболочке столбцов приведённой ступенчатой матрицы.

Базис с приведённой ступенчатой матрицей координат строится в линейной оболочке векторов w_1, \dots, w_m путём последовательных замен подходящих пар векторов w_i, w_j их линейными комбинациями $w'_i = aw_i + bw_j, w'_j = cw_i + dw_j$ так, чтобы линейная оболочка новых векторов w'_i, w'_j оставалась такой же, как у w_i, w_j , но в матрице координат новых векторов становилось больше нулей в левом нижнем углу.

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Убедитесь, что при $ad - bc \neq 0$ линейная оболочка векторов $w'_i = aw_i + bw_j$ и $w'_j = cw_i + dw_j$ остаётся такой же, как у векторов w_i и w_j .

В классическом методе Гаусса принято использовать замены следующих трёх типов:

- 1) $w'_i = w_i + \lambda w_j$ $w'_j = w_j$ (с произвольным $\lambda \in \mathbb{K}$)
- 2) $w'_i = w_j$ $w'_j = w_i$
- 3) $w'_i = \varrho w_i$ $w'_j = w_j$ (с ненулевым $\varrho \in \mathbb{K}$).

При этих заменах исходные векторы линейно выражаются через преобразованные как

- 1) $w_i = w'_i - \lambda w'_j$ $w_j = w'_j$
- 2) $w_i = w'_j$ $w_j = w'_i$
- 3) $w_i = \varrho^{-1} w'_i$ $w_j = w'_j$,

а матрица координат испытывает следующие *элементарные преобразования строк*

- 1) к одной из строк прибавляется другая строка, умноженная на число
 - 2) две строки меняются местами
 - 3) одна из строк умножается на ненулевое число.
- (6-2)

ТЕОРЕМА 6.1 (О ПРЕОБРАЗОВАНИИ К ПРИВЕДЁННОМУ СТУПЕНЧАТОМУ ВИДУ)

Каждая матрица $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ элементарными преобразованиями строк может быть превращена в приведённую ступенчатую матрицу A_{red} . Ненулевые строки матрицы A_{red} образуют базис в линейной оболочке строк матрицы A .

Доказательство. Удобно разбить процесс на последовательные шаги, соответствующие столбцам матрицы A . Будем предполагать, что после выполнения $(k - 1)$ -го шага та часть матрицы, что находится слева от k -ого столбца, имеет приведённый ступенчатый вид и s ненулевых строк. При $k = 1$ это требование означает, что $s = 0$, и не накладывает никаких ограничений на матрицу. При $k > 1$ ненулевые s строк слева от k -ого столбца суть верхние s строк и $0 \leq s \leq k - 1$. Очередной k -тый шаг вычисления состоит в следующем. Если все элементы k -го столбца, расположенные строго ниже s -й строки, нулевые, то можно переходить к $(k + 1)$ -му шагу. Если же в k -том столбце имеется ненулевой элемент a , расположенный строго ниже s -той строки, то мы умножаем содержащую его строку на a^{-1} , а затем меняем её местами с $(s + 1)$ -ой строкой. При этом левые $(k - 1)$ столбцов матрицы не изменятся, а $(s + 1)$ -я строка примет вид

$$\underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0}_{k-1} \ 1 \ \underbrace{* \ * \ \dots \ * \ *}_{n-k}.$$

Теперь для каждого $i \neq s + 1$ вычтем из i -й строки полученной матрицы $(s + 1)$ -ую строку, умноженную на элемент, стоящий в пересечении i -й строки и k -го столбца. Это не изменит левые $(k - 1)$ столбцов матрицы и обнулит все элементы k -того столбца за исключением стоящей $(s + 1)$ -ой строке единицы. В результате мы попадаем в исходное положение для $(k + 1)$ -го шага. Последнее утверждение предложения вытекает из [упр. 6.1](#) и сделанного выше замечания, что элементарные преобразования строк не меняют линейной оболочки строк матрицы. \square

ПРИМЕР 6.1

Построим в координатном пространстве \mathbb{Q}^5 базис линейной оболочки строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6-3)$$

Для этого умножим последнюю строку на -1 и поменяем местами с первой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнулим первый столбец ниже первой строки, прибавляя надлежащие кратности первой строки ко второй, третьей и четвёртой строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Далее обнулим второй столбец ниже второй строки, добавив подходящие её кратности к нижним двум строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим третью строку на -2 и зануляем последний столбец вне третьей строки, добавляя к первой и четвёртой строкам подходящие кратности третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6-4)$$

Верхние три строки этой приведённой ступенчатой матрицы составляют базис в линейной оболочке $U \subset \mathbb{Q}^5$ строк исходной матрицы (6-3). В частности, $\dim U = 3$.

6.2. Отыскание обратной матрицы. Каждое из перечисленных в форм. (6-2) на стр. 73 элементарных преобразований строк $m \times n$ матрицы A можно осуществить, умножая матрицу A слева на квадратную матрицу S , которая получается из единичной матрицы E размера $m \times m$ тем же самым элементарным преобразованием строк, что требуется произвести в матрице A . Преобразование строк, обратное к тому, что осуществляется левым умножением на матрицу S , тоже задаётся левым умножением на некоторую $m \times m$ матрицу T . Применяя обратные друг другу преобразования S и T к единичной $m \times m$ матрице E , мы получаем равенство $TSE = E$, означающее, что $m \times m$ матрицы S и T обратны друг другу. Мы заключаем, что приведённая ступенчатая матрица A_{red} , которая получается из матрицы A элементарными преобразованиями строк, имеет вид $A_{\text{red}} = S_k \dots S_1 A$, где все матрицы $S_1, \dots, S_k \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{k})$ обратимы.

Для квадратной $m \times m$ матрицы A приведённая ступенчатая матрица A_{red} либо единичная, либо содержит нулевые строки. В первом случае $\text{rk } A = m$ и матрица A обратима по сл. 5.1 на стр. 66, причём из равенства $A_{\text{red}} = E = S_k \dots S_1 A$ вытекает, что $A^{-1} = S_k \dots S_1 = S_k \dots S_1 E$ получается из единичной матрицы E той же самой цепочкой элементарных преобразований строк, что превращает матрицу A в матрицу E . Во втором случае $\text{rk } A < m$ и матрица A необратима по тому же сл. 5.1.

Итак, если приписать справа к квадратной матрице A единичную матрицу E того же размера $m \times m$ и применить к получившейся матрице $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}$ размера $m \times 2m$ метод Гаусса, то либо на выходе получится матрица $\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}$, что означает обратимость матрицы A и равенство $A^{-1} = B$, либо в процессе вычислений мы придём к матрице $\begin{bmatrix} N & C \end{bmatrix}$ с необратимой матрицей N , что означает необратимость матрицы A , ибо будь она обратима, матрица $N = S_k \dots S_1 A$ тоже была бы обратимой.

Пример 6.2

Выясним обратима ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этого применим метод Гаусса к матрице

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Меняем знак нижней строки, после чего меняем её местами с верхней:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

и обнуляем первый столбец ниже первой строки, отнимая из всех строк надлежащие кратности первой строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 7 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Теперь переставляем вторую и третью строки и обнуляем нижние два элемента второго столбца:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & 7 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \quad (6-5)$$

Чтобы избежать вычислений с дробями, отклонимся от классического метода Гаусса и умножим нижние две строки слева на матрицу¹

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 17 & -5 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -17 & 53 & 66 \end{array} \right)$$

¹Это равносильно умножению всей матрицы на $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & -5 \end{pmatrix}$

Обнуляем первый столбец вне первой строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности первой:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Обнуляем третий столбец вне второй строки, прибавляя ко всем строкам надлежащие кратности второй:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Удаляем нулевые строки и обнуляем шестой столбец вне нижней строки, прибавляя ко второй и третьей строкам надлежащие кратности нижней строки:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Система уравнений, отвечающая этой приведённой ступенчатой матрице может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -1 - 2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 3 + 2x_7. \end{cases} \quad (6-12)$$

Придавая свободным переменным x_2, x_4, x_5, x_7 произвольные значения и вычисляя соответствующие значения связанных переменных x_1, x_3, x_6 по формулам (6-12) получаем параметрическое описание всех решений исходной системы (6-11).

На геометрическом языке эти решения замечают в \mathbb{Q}^7 аффинное пространство $p + U$, где точка $p = (-1, 0, -1, 0, 0, 3, 0)$ получается подстановкой $x_2 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$ в (6-12), а векторное подпространство $U \subset \mathbb{Q}^7$ имеет базис из векторов

$$\begin{aligned} u_1 &= (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & u_2 &= (3, 0, -2, 1, 0, 0, 0), \\ u_3 &= (-3, 0, -1, 0, 1, 0, 0), & u_4 &= (-2, 0, -2, 0, 0, 1, 2), \end{aligned}$$

координаты которых получаются подстановкой в однородные версии формул (6-12)

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_7 \\ x_3 = -2x_4 - x_5 - 2x_7 \\ x_6 = 2x_7. \end{cases}$$

значений $(x_2, x_4, x_5, x_7) = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$.

6.4. Построение базиса в ядре и образе линейного отображения. Пусть линейное отображение $F : U \rightarrow W$ имеет матрицу $A = F_{wu} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ в некоторых базисах $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W . Тогда образ вектора $v = \mathbf{u}x$ со столбцом координат $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ в базисе \mathbf{u} равен $F(\mathbf{u}x) = F(\mathbf{u})x = \mathbf{w}F_{wu}x$ и имеет в базисе \mathbf{w} столбец координат $F_{wu}x = Ax$. Тем самым ядро $\ker F$ состоит из всех таких векторов $\mathbf{u}x$, координатный столбец x которых в базисе \mathbf{u} является решением системы однородных уравнений $Ax = 0$. Для описания этих решений матрицу A следует преобразовать к приведённому ступенчатому виду A_{red} , после чего базис в пространстве решений находится описанным выше способом.

Поскольку матрица $A_{\text{red}} = SA$ получается умножением матрицы A слева на некоторую обратимую $m \times m$ -матрицу S , матрица $A_{\text{red}} = F_{eu}$ является матрицей отображения F в прежнем базисе \mathbf{u} пространства U , но в другом базисе $\mathbf{e} = \mathbf{w}S^{-1}$ пространства W . В самом деле, матрица перехода¹ $C_{ew} = C_{we}^{-1} = S$ и по форм. (5-14) на стр. 66 $F_{eu} = C_{ew}F_{wu} = SA = A_{\text{red}}$. Тем самым, образ оператора F состоит из векторов $e\mathbf{u}$, столбец координат \mathbf{u} которых в новом базисе \mathbf{e} пространства W лежит в линейной оболочке столбцов матрицы A_{red} . Как мы видели в [упр. 6.2](#) на стр. 72, базисные столбцы матрицы A_{red} образуют базис в линейной оболочке её столбцов. Это означает, что образы $F(u_{j_1}), \dots, F(u_{j_r})$ тех базисных векторов пространства U , номера которых совпадают с номерами базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы A_{red} , составляют базис в $\text{im } F$.

Пример 6.4 (вариация [прим. 6.1](#) на стр. 73)

Пусть линейное отображение $F : \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ имеет в стандартных базисах матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

из [прим. 6.1](#) на стр. 73. Методом Гаусса мы преобразуем её к приведённому ступенчатому виду

$$A_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и заключаем, что базис в образе оператора F составляют векторы $F(e_1), F(e_2), F(e_5)$, координаты которых в стандартном базисе пространства \mathbb{Q}^4 суть первый, второй и пятый столбцы исходной матрицы A . Ядро оператора F составляют векторы, столбец координат x которых в стандартном базисе пространства \mathbb{Q}^5 решает систему $A_{\text{red}}x = 0$. Параметрическое представление решений задаётся формулами

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

а базис в пространстве решений составляют векторы $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 1, 0)$, координаты которых получаются подстановкой в предыдущие формулы значений $(x_3, x_4) = (1, 0)$, $(0, 1)$.

¹См. [н° 5.3](#) на стр. 63.

6.5. Построение базиса в фактор пространстве. Пусть r -мерное векторное подпространство $U \subset \mathbb{K}^n$ порождается строками матрицы A и пусть базисные столбцы приведённой ступенчатой матрицы A_{red} , полученной из A элементарными преобразованиями строк, имеют номера j_1, \dots, j_r . Покажем, что классы $[e_{i_1}], \dots, [e_{i_{n-r}}]$ стандартных базисных векторов пространства \mathbb{K}^n с дополнительными к j_1, \dots, j_r номерами i_1, \dots, i_{n-r} образуют базис фактор пространства \mathbb{K}^n/U . Для этого обозначим через E_I и E_J координатные подпространства, натянутые на дополнительные наборы базисных векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}}$ и e_{j_1}, \dots, e_{j_r} . Проекция $\pi_J: \mathbb{K}^n \rightarrow E_J$ пространства \mathbb{K}^n на подпространство E_J вдоль подпространства E_I переводит строки приведённой ступенчатой матрицы A_{red} в точности в базисные векторы e_{j_1}, \dots, e_{j_r} . Следовательно, ограничение этой проекции на подпространство $U \subset \mathbb{K}^n$ является изоморфизмом между U и E_J и, в частности, имеет нулевое ядро $U \cap \ker \pi_J = U \cap E_I = 0$. Но тогда и ограничение отображения факторизации $\pi_U: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n/U$ на подпространство $E_I \subset \mathbb{K}^n$ тоже имеет нулевое ядро, ибо последнее также равно $E_I \cap \ker \pi_U = E_I \cap U$. Поскольку $\dim E_I = n - r = \dim \mathbb{K}^n/U$, отображение факторизации изоморфно отображает подпространство E_I на фактор \mathbb{K}^n/U . Поэтому образы $[e_i]$ базисных векторов e_i составят базис в \mathbb{K}^n/U .

Пример 6.5 (ещё одна вариация [прим. 6.1](#) на стр. 73)

Пусть подпространство $U \subset \mathbb{Q}^5$ порождено строками матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -8 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

из [прим. 6.1](#) на стр. 73. Базисные столбцы приведённой ступенчатой матрицы

$$A_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеют номера 1, 2, 5, а базис в факторе \mathbb{Q}^5/U составляют классы $[e_3]_U$ и $[e_4]_U$ базисных векторов e_3, e_4 с дополнительными к 1, 2, 5 номерами.

6.6. Расположение подпространства относительно базиса. В этом разделе мы покажем, что в каждом подпространстве $U \subset \mathbb{K}^n$ существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат. Отсюда вытекает, в частности, что приведённая ступенчатая матрица A_{red} , полученная из матрицы A элементарными преобразованиями строк, не зависит от выбора цепочки преобразований и даже собственно от матрицы A , а зависит только от линейной оболочки строк матрицы A .

Предложение 6.1

Для каждого векторного подпространства $U \subset \mathbb{K}^n$ размерности r множество $\{1, \dots, n\}$ можно¹ так разбить в объединение двух непересекающихся дополнительных подмножеств

$$I = \{i_1, \dots, i_{n-r}\} \quad \text{и} \quad J = \{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\} \setminus I,$$

чтобы линейные оболочки $E_I = \text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$ и $E_J = \text{span}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ стандартных базисных векторов $e_v \in \mathbb{K}^n$ удовлетворяли следующим эквивалентным условиям:

¹Как правило, многими способами.

- 1) подпространства U и E_I имеют нулевое пересечение $U \cap E_I = 0$
- 2) ограничение на подпространство U проекции $p : V \rightarrow E_J, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$, пространства V на подпространство E_J вдоль подпространства E_I является изоморфизмом между U и E_J
- 3) ограничение на подпространство E_I отображения факторизации $\pi : V \rightarrow V/U, v \mapsto [v]_U$, является изоморфизмом между E_I и V/U
- 4) в подпространстве U найдутся r таких векторов u_1, \dots, u_r , что $u_v - e_{j_v} \in E_I$ при всех $1 \leq v \leq r$.

При выполнении этих условий векторы u_1, \dots, u_r из условия (4) автоматически образуют базис подпространства U и однозначно определяются подпространством U и выбором разложения $\{1, \dots, n\} = I \sqcup J$ обладающего свойствами (1) – (4).

Доказательство. Пусть векторы $v_1, \dots, v_r \in U$ образуют базис подпространства U . По лемме о замене¹ некоторые r векторов e_{j_1}, \dots, e_{j_r} стандартного базиса в \mathbb{K}^n можно заменить векторами v_j так, чтобы полученный в результате набор $v_1, \dots, v_r, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}}$ остался базисом в \mathbb{K}^n . В таком случае линейная оболочка $E_I = \text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$ оставшихся базисных векторов обладает свойством (1) и, тем самым, существует. Покажем теперь, что условия (1) – (4) эквивалентны друг другу. В н° 6.5 выше мы видели, что ядро ограничения отображения p на подпространство U и ядро ограничения отображения π на подпространство E_I оба равны $U \cap E_I$. Из условия (1) вытекает, что $\ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I = 0$. Поэтому оба ограничения $p|_U : U \rightarrow E_J$ и $\pi|_{E_I} : E_I \rightarrow V/U$ инъективны. Так как $\dim U = r = \dim E_J$ и $\dim E_I = n - r = \dim V/U$, оба ограничения — изоморфизмы. Таким образом, (1) влечёт (2) и (3). Наоборот, каждое из условий (2), (3) влечёт равенство $0 = \ker p|_U = \ker \pi|_{E_I} = U \cap E_I$, т. е. условие (1). Условие (4) утверждает, что r векторов u_1, \dots, u_r из r -мерного подпространства U переводятся проекцией p в стандартные базисные векторы r -мерного координатного подпространства E_J , что равносильно условию (2). Наконец, если условия (1)–(4) выполняются, то ограничение $p|_U : U \rightarrow E_J$ является изоморфизмом, и в U есть единственный базис u_1, \dots, u_r , переводимый этим изоморфизмом в стандартный базис e_{j_1}, \dots, e_{j_r} пространства E_J . \square

Замечание 6.1. Векторное подпространство $U \subset \mathbb{K}^n$ размерности r может иметь нулевое пересечение сразу с несколькими и даже со всеми² $(n - r)$ -мерными координатными подпространствами E_I . На координатном языке условие (4) в [предл. 6.1](#) означает, что матрица координат векторов u_1, \dots, u_r содержит в столбцах с номерами j_1, \dots, j_r единичную подматрицу размера $r \times r$. Ниже мы увидим, что метод Гаусса строит в подпространстве U удовлетворяющий этому условию базис с лексикографически минимальным³ возможным набором номеров j_1, \dots, j_r .

¹См. [лем. 4.2](#) на стр. 49.

²Над бесконечным полем \mathbb{K} «случайное» r -мерное подпространство $U \subset V$ почти наверняка будет именно таким.

³Напомним, что *лексикографический порядок* на множестве r -буквенных слов $x_1 \dots x_r$, составленных из букв некоего упорядоченного алфавита X , представляет собою стандартное упорядочение всех этих слов по алфавиту, при котором слово w_1 меньше слова w_2 если первая слева различающаяся буква этих слов в слове w_1 меньше, чем в слове w_2 .

6.6.1. Комбинаторный тип подпространства. Лексикографически минимальный набор индексов j_1, \dots, j_r , для которого выполняются условия [предл. 6.1](#), называется *комбинаторным типом* подпространства $U \subset \mathbb{K}^n$. Комбинаторный тип имеет следующее альтернативное описание. Для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ обозначим через $V_{>k}$ линейную оболочку стандартных базисных векторов e_{k+1}, \dots, e_n . Получаем убывающую цепочку вложенных подпространств:

$$V = V_{>0} \supset V_{>1} \supset \dots \supset V_{>(n-1)} \supset V_{>n} = 0.$$

Положим $W_{\leq k} = V / V_{>k}$ и обозначим через $\pi_k : \mathbb{K}^n \rightarrow W_{\leq k}$, $v \mapsto [v]$, отображение факторизации. Базис пространства $W_{\leq k}$ составляют классы $[e_1], \dots, [e_k]$ первых k стандартных базисных векторов по модулю последних $n - k$ базисных векторов, и проекция π_k переводит вектор $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ в вектор с координатами (x_1, \dots, x_k) в базисе $[e_1], \dots, [e_k]$, т. е. попросту стирает последние $n - k$ координат. При $k = 0$ мы имеем нулевое отображение $\pi_0 : \mathbb{K}^n \rightarrow 0$, а при $k = n$ — тождественное отображение $\pi_n = \text{Id}_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. При $k \geq 1$ фактор $W_{\geq k} / \mathbb{K}[e_k]$ пространства $W_{\geq k}$ по одномерному подпространству, порождённому базисным классом $[e_k]$, равен $W_{\leq(k-1)}$, и проекция $\pi_{k-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow W_{\leq(k-1)}$ является композицией проекции $\pi_k : \mathbb{K}^n \rightarrow W_{\leq k}$ с последующей проекцией $W_{\leq k} \rightarrow W_{\leq(k-1)}$, ядро которой одномерно. Поэтому для каждого r -мерного подпространства $U \subset \mathbb{K}^n$ размерности $d_k = \dim \pi_k(U)$ образуют нестрого возрастающую последовательность d_0, d_1, \dots, d_n с $d_0 = 0$, $d_n = r$ и приращениями $d_k - d_{k-1} \leq 1$. Последнее вытекает из того, что подпространство $\pi_{k-1}(U)$ является образом подпространства $\pi_k(U)$ при линейном отображении $W_{\geq k} \rightarrow W_{\geq(k-1)}$ с одномерным ядром, пересечение которого с $\pi_k(U)$ либо нулевое, либо одномерное.

Предложение 6.2

Для данного подпространства $U \subset \mathbb{K}^n$ размерности r следующие три набора из r возрастающих натуральных чисел совпадают друг с другом:

- 1) набор k_1, \dots, k_r тех значений $k \geq 1$, для которых $d_k > d_{k-1}$ в последовательности размерностей $d_k = \dim \pi_k(U)$.
- 2) набор номеров j_1, \dots, j_r базисных столбцов приведённой ступенчатой матрицы, полученной методом Гаусса из матрицы координат¹ любого конечного набора векторов, порождающего подпространство U
- 3) лексикографически наименьший набор индексов $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$, удовлетворяющий условиям [предл. 6.1](#) на стр. 80, означающим, что в U есть базис, матрица координат которого имеет единичную $r \times r$ подматрицу в столбцах с номерами $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$

Доказательство. Ненулевые строки u_1, \dots, u_r приведённой ступенчатой матрицы из (2) составляют в пространстве U базис, удовлетворяющий условиям [предл. 6.1](#) для $J = \{j_1, \dots, j_r\}$. Так как проекции $\pi_k(u_\nu)$ векторов u_ν с $j_\nu \leq k$ линейно независимы в силу ступенчатости матрицы их координат, а векторы u_μ с $j_\mu > k$ лежат в $\ker \pi_k$, первые векторы составляют базис в $\pi_k(U)$, а последние — базис в $\ker \pi_k|_U = U \cap V_{>k}$. Поэтому j_1, \dots, j_r суть в точности те номера k , для которых $d_k > d_{k-1}$. Это доказывает совпадение последовательностей (1) и (2). Докажем теперь совпадение последовательностей (2) и (3). Пусть матрица координат базисных векторов w_1, \dots, w_r пространства U содержит единичную подматрицу в столбцах с номерами $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$. Так как

¹Напомним, что всюду в этом параграфе мы пишем координаты по строкам.

проекции $\pi_k(w_\nu)$ векторов w_ν с $j_\nu^{\min} \leq k$ линейно независимы, количество таких векторов при каждом k не превышает размерности $\dim \pi_k(U)$, которая по уже доказанному равна количеству векторов u_ν с $j_\nu \leq k$. Иными словами, при каждом $k = 1, \dots, n$ количество чисел j_ν^{\min} , не превышающих k , не больше количества чисел j_ν , не превышающих k . Тем самым, набор $j_1^{\min}, \dots, j_r^{\min}$ не может быть лексикографически меньше набора j_1, \dots, j_r . \square

Следствие 6.1

В каждом подпространстве $U \subset \mathbb{K}^n$ существует единственный базис с приведённой ступенчатой матрицей координат M_U , и сопоставление подпространству U этой матрицы M_U устанавливает биекцию между приведёнными ступенчатыми матрицами, имеющими r ненулевых строк, и r -мерными подпространствами в \mathbb{K}^n . \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Убедитесь, что приведённые ступенчатые матрицы из r ненулевых строк с номерами базисных столбцов j_1, \dots, j_r образуют в пространстве $\text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{K})$ аффинное подпространство размерности $r(n-r) - \sum_{\nu=1}^r (j_\nu - \nu + 1)$ и докажите тождество

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-r+1} - 1)}{(q^r - 1)(q^{r-1} - 1) \dots (q - 1)} = \sum_{\lambda \subseteq \Pi} q^{|\Pi \setminus \lambda|},$$

где суммирование происходит по всем различным диаграммам Юнга¹ λ , уместяющимся в прямоугольник Π размера $r \times (n-r)$, а показатель $|\Pi \setminus \lambda|$ равен количеству клеток в дополнении диаграммы до прямоугольника (пустая диаграмма $\lambda = \emptyset$ и весь прямоугольник $\lambda = \Pi$ при этом тоже учитываются).

¹См. пример 1.3 на стр. 7 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-01.pdf>.

§7. Двойственность

7.1. Двойственные пространства. Линейные отображения $V \rightarrow \mathbb{K}$ принято называть *линейными функционалами*¹ или *ковекторами*. Они образуют векторное пространство, которое обозначается $V^* \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ и называется *двойственным* или *сопряжённым* к пространству V .

ПРИМЕР 7.1 (ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ)

Каждый линейный функционал $\xi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ однозначно задаётся набором своих значений

$$\xi_i = \xi(e_i) \in \mathbb{K}$$

на стандартных базисных векторах e_i пространства \mathbb{K}^n . Значение функционала ξ на произвольном векторе $v = e_1 x_1 + \dots + e_n x_n$ при этом равно

$$\xi(v) = \xi(e_1 \cdot x_1 + \dots + e_n \cdot x_n) = \xi(e_1) \cdot x_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot x_n = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n.$$

Наоборот, для любого набора из n констант $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}$ эта формула задаёт линейный функционал $\xi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Если записывать векторы v пространства \mathbb{K}^n в виде координатных столбцов высоты n , то двойственное пространство \mathbb{K}^{n*} удобно представлять себе как n -мерное координатное пространство, состоящее из строк ширины n . При этом действие ковектора-строки $\xi \in \mathbb{K}^{n*}$ на вектор-столбец $v \in \mathbb{K}^n$ заключается в матричном умножении: $\xi(v) = \xi v$.

ПРИМЕР 7.2 (СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ КАК ФУНКЦИОНАЛЫ НА МНОГОЧЛЕНАХ)

Этот пример является бесконечномерной версией предыдущего. Кольцо многочленов $\mathbb{K}[x]$ является векторным пространством над \mathbb{K} со счётным базисом из мономов x^k , где $k \geq 0$ и $x^0 = 1$. Каждый линейный функционал $\psi : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$ однозначно задаётся последовательностью своих значений $\psi_k = \psi(x^k)$ на базисных векторах пространства $\mathbb{K}[x]$ и действует на произвольный многочлен $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ по правилу

$$\psi(a) = \sum_{k=0}^{\deg a} a_k \psi_k = \psi_0 a_0 + \psi_1 a_1 + \dots + \psi_m a_m, \quad \text{где } m = \deg a. \quad (7-1)$$

Каждая бесконечная последовательность чисел $\psi_i \in \mathbb{K}$ задаёт по этой формуле линейный функционал $\psi : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$. Бесконечную последовательность элементов ψ_i поля \mathbb{K} удобно кодировать *производящей функцией* — формальным степенным рядом $\Psi(t) = \sum_{i \geq 0} \psi_i t^i \in \mathbb{K}[[t]]$. Таким образом, двойственное к $\mathbb{K}[x]$ векторное пространство $\mathbb{K}[x]^*$ изоморфно пространству формальных степенных рядов $\mathbb{K}[[t]]$. При этом изоморфизме каждый степенной ряд $\Psi(t) = \sum_{i \geq 0} \psi_i t^i$ задаёт линейный функционал $\psi : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$, переводящий многочлен $a \in \mathbb{K}[x]$ в число (7-1). Например, функционал вычисления $\text{ev}_\alpha : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto f(\alpha)$, сопоставляющий многочленам их значения в точке $\alpha \in \mathbb{K}$ и действующий на базисные мономы по правилу $x^n \mapsto \alpha^n$, задаётся степенным рядом

$$E_\alpha(t) = \sum_{n \geq 0} \alpha^n t^n = \frac{1}{1 - \alpha t} \in \mathbb{K}[[t]].$$

Отметим, что все функционалы вычисления линейно независимы, так как равенство

$$\frac{\lambda_1}{1 - \alpha_1 t} + \frac{\lambda_2}{1 - \alpha_2 t} + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \alpha_k t} = 0$$

¹А также *линейными формами*.

в кольце $\mathbb{K}[[t]]$ после приведения к общему знаменателю превращается в равенство

$$\lambda_1 \prod_{v \neq 1} (1 - \alpha_v t) + \lambda_2 \prod_{v \neq 2} (1 - \alpha_v t) + \dots + \lambda_k \prod_{v \neq k} (1 - \alpha_v t) = 0$$

в кольце многочленов $\mathbb{K}[t]$, подставляя в которое $t = 1/\alpha_i$, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$. В частности, в пространстве $\mathbb{R}[[t]] \simeq \mathbb{R}[x]^*$, двойственном к счётномерному пространству $\mathbb{R}[x]$, имеется несчётное линейно независимое множество векторов.

УПРАЖНЕНИЕ 7.1. Покажите, что векторное пространство $\mathbb{K}[[t]]$ не порождается линейно никаким счётным множеством векторов ни над каким полем \mathbb{K} .

ПРИМЕР 7.3 (Функционалы вычисления функций на множестве)

Пусть X — любое множество, и $V = \mathbb{K}^X$ — пространство всех функций $X \rightarrow \mathbb{K}$, как в [прим. 4.1](#) на стр. 50. С каждой точкой $x \in X$ связан функционал вычисления¹ $\text{ev}_x : \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$, переводящий функцию $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ в её значение $f(x) \in \mathbb{K}$ в точке x . Функционалы вычисления линейно независимы, поскольку вычисляя обе части равенства $\lambda_1 \text{ev}_{x_1} + \dots + \lambda_m \text{ev}_{x_m} = 0$ на дельта-функции $\delta_{x_i} : X \rightarrow \mathbb{K}$, равной нулю во всех точках множества X кроме точки x_i , где она равна единице, мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, m$.

7.1.1. Двойственные базисы. С каждым базисом $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ конечномерного векторного пространства V связан набор координатных функционалов $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, лежащих в двойственном пространстве V^* . По определению, функционал $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{K}$ сопоставляет каждому вектору пространства V его i -ю координату в базисе \mathbf{e} , т. е. $e_i^*(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$. Таким образом, значения функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases} \quad (7-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.2. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \rightarrow \mathbb{K}$ линейны.

Из формулы (7-2) вытекает, что ковекторы e_1^*, \dots, e_n^* линейно независимы: вычисляя обе части равенства $\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$ на базисном векторе e_i , мы заключаем, что $\lambda_i = 0$ для каждого $i = 1, \dots, n$. С другой стороны, каждый линейный функционал $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ линейно выражается через координатные функционалы e_i^* — коэффициентами этого линейного выражения являются значения функционала φ на соответствующих базисных векторах пространства V , поскольку для любого вектора $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ выполняется равенство

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = e_1^*(v) \varphi(e_1) + \dots + e_n^*(v) \varphi(e_n), \quad (7-3)$$

как раз и означающее, что $\varphi = e_1^* \cdot \varphi(e_1) + \dots + e_n^* \cdot \varphi(e_n)$ в пространстве V^* . Таким образом, координатные функционалы e_i^* образуют базис векторного пространства V^* . Этот базис называется *двойственным* к базису из векторов e_i в V . В частности, в противовес [прим. 7.2](#), для конечномерного пространства V выполняется равенство $\dim V^* = \dim V$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.3. Пусть $\dim V = n$, а векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ и ковекторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i \neq j$. Покажите, что векторы v_i образуют базис в V , а ковекторы φ_i — двойственный базис в V^* .

¹Обозначение ev происходит от «evaluation».

ПРИМЕР 7.4 (ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА)

Пусть поле \mathbb{k} имеет характеристику нуль¹. Зафиксируем число $a \in \mathbb{k}$ и для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ рассмотрим на пространстве $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ многочленов степени не выше n функционал

$$\varphi_i : \mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}, \quad f \mapsto f^{(i)}(a),$$

сопоставляющий многочлену значение его i -й производной в точке a . При $i = 0$ мы полагаем $\varphi_0(f) = \text{ev}_a(f) = f(a)$. Функционалы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ и многочлены $f_k(x) = (x - a)^k / k!$, где $k = 0, 1, \dots, n$ и $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$, удовлетворяют условиям [упр. 7.3](#), т. е. $\varphi_i(f_i) = 1$ и $\varphi_i(f_j) = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, многочлены f_i образуют в $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$ базис, в котором координатами каждого многочлена служат его значение и значения первых n его производных в точке a . Поэтому для любого многочлена g степени не выше n имеет место *формула Тэйлора*

$$g(x) = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + g''(a) \cdot \frac{(x - a)^2}{2} + \dots + g^{(n)}(a) \cdot \frac{(x - a)^n}{n!}, \quad (7-4)$$

и для любого набора чисел $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{k}$ существует единственный такой многочлен g степени не выше n , что $g^{(i)}(a) = b_i$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$, причём g задаётся явной формулой

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - a)^k / k!.$$

7.1.2. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{}$.** Каждый вектор $v \in V$ задаёт на двойственном к V пространстве V^* функционал вычисления $\text{ev}_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}, \varphi \mapsto \varphi(v)$. Поскольку число $\varphi(v) \in \mathbb{k}$ линейно зависит как от $v \in V$, так и от $\varphi \in V^*$, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт каноническое² линейное вложение

$$\text{ev} : V \hookrightarrow V^{**}, \quad v \mapsto \text{ev}_v. \quad (7-5)$$

УПРАЖНЕНИЕ 7.4. Убедитесь, что отображение (7-5) инъективно³.

Если пространство V конечномерно, то согласно [упр. 7.3](#) каждый базис e_1, \dots, e_n пространства V переводится отображением (7-5) в двойственный к базису e_1^*, \dots, e_n^* пространства V^* базис пространства V^{**} . Тем самым, для конечномерного пространства V отображение (7-5) канонически отождествляет V^{**} с V , т. е. каждая линейная форма $V^* \rightarrow \mathbb{k}$ представляет собою функционал вычисления значений ковекторов из V^* на однозначно задаваемом этой формой векторе $v \in V$, и любой базис $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ пространства V^* состоит из координатных функционалов для однозначно задаваемого этим базисом базиса $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ в V . Таким образом, двойственные конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу совершенно симметричные роли: *каждое* из них является пространством линейных функционалов на другом. Дабы подчеркнуть симметрию между векторами и ковекторами, мы будем называть число

$$\langle \varphi, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) = \text{ev}_v(\varphi) \in \mathbb{k} \quad (7-6)$$

свёрткой ковектора φ с вектором v . Свёртка является билинейным отображением

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{k}, \quad (\varphi, v) \mapsto \langle \varphi, v \rangle.$$

¹Т. е. сумма любого числа единиц поля \mathbb{k} отлична от нуля.

²Т. е. не требующее выбора базиса.

³Для любого, в том числе и бесконечномерного векторного пространства V .

Для координатного пространства $V = \mathbb{K}^n$ в обозначениях из [прим. 7.1](#) на стр. 84 свёртка ко-вектора-строки $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^{n*}$ с вектором-столбцом $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{K}^n$ задаётся матричным произведением $\langle \xi, x \rangle = \xi x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$. Обратите внимание, что правая часть этого равенства абсолютно симметрична по буквам ξ и x .

7.2. Двойственность между подпространствами. Каждое множество ковекторов $M \subset V^*$ можно воспринимать как систему однородных линейных уравнений $\langle \xi, x \rangle = 0$ на неизвестный вектор $x \in V$ с левыми частями ξ , пробегающими множество M . Пространство¹ всех решений такой системы обозначается $\text{Ann}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \langle \xi, v \rangle = 0 \ \forall \xi \in M\}$ и называется *аннулятором* множества ковекторов $M \subset V^*$. Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим $\text{Ann}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in V^* \mid \langle \varphi, v \rangle = 0 \ \forall v \in N\}$. Это множество всех линейных функционалов, ядро которых содержит N , или — на двойственном языке — пространство решений системы однородных линейных уравнений $\langle y, v \rangle = 0$ на неизвестный ковектор $y \in V^*$ с левыми частями v , пробегающими множество $N \subset V$. В частности, аннулятор любого множества векторов является векторным подпространством в V^* .

УПРАЖНЕНИЕ 7.5. Убедитесь, что аннулятор любого множества X векторов или ковекторов совпадает с аннулятором линейной оболочки $\text{span}(X)$.

Предложение 7.1

Для любых² векторного пространства V и подпространства $U \subset V$ имеются канонические изоморфизмы $(V/U)^* \simeq \text{Ann } U$ и $V^*/\text{Ann } U \simeq U^*$.

Доказательство. Чтобы задать первый изоморфизм, обозначим через $\pi : V \twoheadrightarrow V/U$, $v \mapsto [v]_U$, отображение факторизации и сопоставим линейному функционалу $\xi : V/U \rightarrow \mathbb{K}$ композицию $\xi\pi : V \rightarrow \mathbb{K}$, $v \mapsto \xi([v]_U)$. Получим линейное отображение $F : (V/U)^* \rightarrow V^*$, $\xi \mapsto \xi \circ \pi$, у которого $\ker F = 0$ и $\text{im } F \subseteq \text{Ann } U$. Обратное отображение $F^{-1} : \text{Ann } U \rightarrow (V/U)^*$ сопоставляет зануляющемуся на подпространстве U линейному функционалу $\psi : V \rightarrow \mathbb{K}$ линейный функционал $\bar{\psi} : V/U \rightarrow \mathbb{K}$, действующий по правилу $\bar{\psi}([v]_U) = \psi(v)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.6. Убедитесь, что это правило корректно и что $\overline{\xi\pi} = \xi$ для всех $\xi \in (V/U)^*$, а $\overline{\psi\pi} = \psi$ для всех $\psi \in \text{Ann } U \subset V^*$.

Чтобы задать второй изоморфизм, рассмотрим линейное отображение $G : V^* \rightarrow U^*$, $\xi \mapsto \xi|_U$, которое сопоставляет линейному функционалу $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}$ его ограничение на подпространство $U \subset V$. По построению, $\ker G = \text{Ann } U$. Отображение G сюръективно, поскольку каждый функционал $\psi : U \rightarrow \mathbb{K}$ можно продолжить до функционала $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ с ограничением $\varphi|_U = \psi$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.7. Убедитесь в этом.

Канонический изоморфизм $V^*/\ker G \xrightarrow{\sim} \text{im } G$ из [прим. 4.9](#) на стр. 58 — это нужный нам изоморфизм $V^*/\text{Ann } U \xrightarrow{\sim} U^*$. \square

Следствие 7.1

Если векторное пространство V конечномерно, то для любого подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\dim U + \dim \text{Ann } U = \dim V$.

¹Будучи пересечением ядер линейных отображений $\xi : V \rightarrow \mathbb{K}$ по всем $\xi \in M$, аннулятор любого множества $M \subset V^*$ является векторным подпространством в V .

²В том числе бесконечномерных.

Доказательство. В силу [предл. 7.1](#) $\dim \operatorname{Ann} U = \dim(V/U)^* = \dim(V/U)$, а по [предл. 4.8](#) на стр. 59 $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.8. Пусть векторы u_1, \dots, u_k составляют базис в U , а векторы w_1, \dots, w_m дополняют их до базиса в V . Обозначим через $u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$ двойственный базис¹ в V^* . Покажите, что ковекторы w_1^*, \dots, w_m^* образуют базис в $\operatorname{Ann} U$.

Следствие 7.2

Для любого векторного подпространства $U \subset V$ выполняется равенство $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = U$.

Доказательство. По определению аннуляторов, $U \subset \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U$. С другой стороны, по [сл. 7.1](#) $\dim \operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = \dim V^* - \dim \operatorname{Ann} U = \dim V^* - \dim V + \dim U = \dim U$. \square

Замечание 7.1. Если в [сл. 7.1](#) и [сл. 7.2](#) взять в качестве V двойственное пространство V^* и отождествить двойственное к V^* пространство V^{**} с исходным пространством V при помощи канонического изоморфизма из [п° 7.1.2](#), то мы получим для любого подпространства $U \subset V^*$ равенства $\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V$ и $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} U = U$.

Замечание 7.2. На языке линейных уравнений [сл. 7.2](#) утверждает, что любая линейная форма, которая зануляется на всех решениях некоторой системы однородных линейных уравнений, является линейной комбинацией этих уравнений, а [сл. 7.1](#) означает, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m в V .

УПРАЖНЕНИЕ 7.9. Покажите, что $\operatorname{Ann} \operatorname{Ann} N = \operatorname{span} N$ для любого подмножества $N \subset V$.

ПРИМЕР 7.5 (ТЕОРЕМА О РАНГЕ МАТРИЦЫ)

Столбцы a_1, \dots, a_n произвольной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ являются векторами координатного пространства \mathbb{K}^m . Обозначим через $U \subset \mathbb{K}^m$ их линейную оболочку. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор столбцов матрицы A является базисом в U и состоит ровно из $\dim U = \operatorname{rk} A$ векторов. В i -й строке матрицы A стоят вычисленные на векторах a_1, \dots, a_n значения базисного ковектора $e_i^* \in \mathbb{K}^{m*}$ из двойственного к стандартному базису в \mathbb{K}^m базиса в \mathbb{K}^{m*} . Согласно [предл. 7.1](#), ограничения функционалов e_1^*, \dots, e_n^* на подпространство U линейно порождают двойственное к U пространство U^* . Поэтому любой максимальный по включению линейно независимый набор функционалов $e_i^*|_U$ составляет базис в U^* и тоже состоит из $\dim U^* = \dim U = \operatorname{rk} A$ векторов. Но каждый линейный функционал $e_i^*|_U$ однозначно определяется набором своих значений на порождающих пространство U векторах a_1, \dots, a_n . В частности, ограничения функционалов $e_{i_1}^*, \dots, e_{i_k}^*$ на подпространство U линейно зависимы если и только если линейно зависимы наборы этих значений, т. е. соответствующие строки матрицы A . Мы заключаем, что максимальный по включению линейно независимый набор строк матрицы A также состоит из $\operatorname{rk} A$ строк.

¹См. [п° 7.1.1](#) на стр. 85.

ТЕОРЕМА 7.1

Соответствие $U \leftrightarrow \text{Ann } U$ задаёт биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^* . Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \iff \text{Ann } U \supset \text{Ann } W,$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V . Равенство $\text{Ann Ann } U = U$ означает, что отображения, сопоставляющие подпространству его аннулятор в двойственном пространстве

$$\mathcal{S}(V) \begin{array}{c} \xrightarrow{U \mapsto \text{Ann } U} \\ \xleftarrow{\text{Ann } W \mapsto W} \end{array} \mathcal{S}(V^*)$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Импликация $U \subset W \Rightarrow \text{Ann } U \supset \text{Ann } W$ очевидна. Если взять в ней в качестве U и W , соответственно, подпространства $\text{Ann } W$ и $\text{Ann } U$ и воспользоваться равенствами $\text{Ann Ann } W = W$ и $\text{Ann Ann } U = U$, получим обратную импликацию $\text{Ann } U \supset \text{Ann } W \Rightarrow U \subset W$. Равенство

$$\bigcap_v \text{Ann } U_v = \text{Ann} \left(\sum_v U_v \right) \quad (7-7)$$

тоже очевидно: любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_v , зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом подпространстве в отдельности. Если взять в (7-7) в качестве подпространств U_v пространства $\text{Ann } U_v$, получаем равенство $\bigcap_v U_v = \text{Ann} \left(\sum_v \text{Ann } U_v \right)$. Беря в нём аннуляторы обеих частей, приходим к равенству $\text{Ann} \left(\bigcap_v W_v \right) = \sum_v \text{Ann } W_v$. \square

СЛЕДСТВИЕ 7.3

Две системы однородных линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ на переменный вектор-столбец $x \in \mathbb{K}^n$ имеют одно и то же пространство решений если и только если приведённые ступенчатые матрицы A_{red} и B_{red} этих систем совпадают друг с другом с точностью до добавления или удаления нулевых строк.

Доказательство. Обозначим через U и W линейные оболочки строк матриц A и B в пространстве \mathbb{K}^{n*} ковекторов-строк ширины n . Согласно [упр. 7.9](#) пространства решений систем уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ суть не что иное как лежащие в пространстве векторов-столбцов \mathbb{K}^n высоты n аннуляторы $\text{Ann } U$ и $\text{Ann } W$ пространств U и W . По [теор. 7.1](#) равенство $\text{Ann } U = \text{Ann } W$ пространств решений равносильно равенству $U = W$ линейных оболочек строк матриц A и B . По [сл. 6.1](#) на стр. 83 эти линейные оболочки совпадают если и только если совпадают их базисы с приведёнными ступенчатыми матрицами координат. \square

7.3. Двойственные линейные отображения. С каждым линейным отображением векторных пространств $F : U \rightarrow W$ канонически связано двойственное отображение

$$F^* : W^* \rightarrow U^*, \quad \xi \mapsto \xi \circ F, \quad (7-8)$$

действующее между двойственными пространствами в противоположном к F направлении и переводящее линейную форму $\xi : W \rightarrow \mathbb{K}$ в линейную форму $F^*\xi$, значение которой на векторе $v \in U$ равно $F^*\xi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(Fv)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.10. Убедитесь, что композиция $F \circ \xi$ является линейной формой на U и что отображение F^* линейно.

На языке свёрток между векторами и ковекторами¹ связь между двойственными операторами описывается равенством

$$\langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle \quad \text{для всех } v \in W \text{ и } \xi \in U^*, \quad (7-9)$$

из которого видно, что операторы F и F^* играют симметричные роли по отношению друг к другу: двойственный к оператору $F^* : W^* \rightarrow U^*$ оператор $F^{**} : U^{**} \rightarrow W^{**}$ превращается в оператор $F : U \rightarrow W$ при канонических отождествлениях $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ из п. 7.1.2 на стр. 86.

УПРАЖНЕНИЕ 7.11. Убедитесь в этом.

Предложение 7.2

Для двойственных операторов $F : U \rightarrow W$ и $F^* : W^* \rightarrow U^*$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (1) \ker F &= \text{Ann im}(F^*) & (2) \ker(F^*) &= \text{Ann im } F \\ (3) \text{im}(F^*) &= \text{Ann ker } F & (4) \text{im } F &= \text{Ann ker}(F^*). \end{aligned}$$

Доказательство. Вектор $F(v) \in W$ нулевой если и только если все линейные функционалы $\xi : W \rightarrow \mathbb{K}$ принимают на нём нулевое значение, т. е. $\langle \xi, Fv \rangle = 0$ для всех $\xi \in W^*$. В силу (7-9) это требование равносильно требованию $\langle F^*\xi, v \rangle = 0$ для всех $\xi \in W^*$, которое означает, что $v \in \text{Ann im } F^*$. Это доказывает равенство (1). Равенство (2) представляет собою равенство (1), написанное для оператора F^* в роли F и оператора $F^{**} = F$ в роли F^* . Равенства (3) и (4) получаются из равенства (1) и (2) взятием аннуляторов обеих частей. \square

Следствие 7.4

Векторные пространства $\text{im } F \subset U$ и $\text{im}(F^*) \subset W^*$ канонически двойственны друг другу. Свёртка вектора $Fv \in \text{im } F$ с ковектором $F^*\xi \in \text{im } F^*$ задаётся формулой

$$\langle F^*\xi, Fv \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F^*\xi, v \rangle = \langle \xi, Fv \rangle. \quad (7-10)$$

Доказательство. В прим. 4.9 на стр. 58 и предл. 7.1 на стр. 87 были построены канонические изоморфизмы $\text{im } F \simeq U / \ker F$ и $(U / \ker F)^* \simeq \text{Ann ker } F$, последний из которых спаривает ко-вектор $\eta \in \text{Ann ker } F \subset U^*$ с вектором $[u] \in U / \ker F$ по правилу $\langle \eta, [u] \rangle = \langle \eta, u \rangle$, а первый отождествляет класс $[u] \in U / \ker F$ с вектором $F(u) \in \text{im } F$. Равенство (3) из предл. 7.2 утверждает, что каждый $\eta \in \text{Ann ker } F$ однозначно записывается в виде $F^*\xi$, где $\xi \in W^*$. Собирая всё это вместе и пользуясь равенством $\langle F^*\xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle$, мы заключаем, что свёртка ко-вектора $\eta = F^*\xi \in \text{im } F^* = \text{Ann ker } F \subset U^*$ с вектором $Fu \in \text{im } F$, который представляет класс $[u] \in U / \ker F$ при изоморфизме $\text{im } F \simeq U / \ker F$, задаётся формулой (7-10). \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.12. Убедитесь непосредственно, что формула (7-10) корректна, т. е. результат свёртки не зависит от выбора ко-вектора $\xi \in W^*$ и вектора $v \in U$, использованных для записи элементов из $\text{im } F^*$ и $\text{im } F$.

¹См. формулу (7-6) на стр. 86.

СЛЕДСТВИЕ 7.5

Векторное пространство $\ker F \subset U$ канонически двойственно фактор пространству $U^* / \operatorname{im} F^*$, а пространство $\ker F^* \subset W^*$ — фактор пространству $W / \operatorname{im} F$. Свёртки между ними задаются формулами

$$\langle \psi + F^*(W^*), v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, v \rangle \quad \text{и} \quad \langle \xi, w + F(U) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi, w \rangle, \quad (7-11)$$

где $\psi + F^*(W^*) \in U^* / \operatorname{im}(F^*)$, $v \in \ker F$, $\xi \in \ker F^*$, $w + F(U) \in W / \operatorname{im} F$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 7.13. Проверьте корректность определений (7-11), т. е. независимость правых частей от выбора представителей ψ и w в классах $\psi + F^*(W^*)$ и $w + F(U)$, и докажите сл. 7.5 по образцу сл. 7.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Принимая во внимание двойственности из сл. 7.5, фактор по образу линейного отображения F часто называют *коядром* отображения F и обозначают $\operatorname{coker}(F) \stackrel{\text{def}}{=} W / \operatorname{im} F$. В этих обозначениях первые два утверждения из сл. 7.5 записываются равенствами

$$(\ker F)^* = \operatorname{coker}(F^*) \quad \text{и} \quad (\operatorname{coker} F)^* = \ker(F^*).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3

Пусть отображение $F : U \rightarrow W$ имеет в некоторых базисах $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W матрицу¹ $F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} = (f_{ij})$. Тогда матрица $F_{\mathbf{u}^*\mathbf{w}^*} = (f_{ij}^*)$ двойственного отображения $F^* : W^* \rightarrow U^*$ в двойственных базисах $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ и $\mathbf{w}^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ пространств W^* и U^* является транспонированной² к матрице отображения F :

$$F_{\mathbf{u}^*\mathbf{w}^*} = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t, \quad \text{т. е. } f_{ij}^* = f_{ji}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число f_{ij}^* равно i -й координате ковектора $F^*(w_j^*)$ в базисе \mathbf{u}^* , т. е. свёртке этого ковектора с базисным вектором³ u_i :

$$f_{ij}^* = \langle F^* w_j^*, u_i \rangle = \langle w_j^*, F u_i \rangle = \langle w_j^*, \sum_k w_k \cdot f_{ki} \rangle = \sum_k \langle w_j^*, w_k \rangle \cdot f_{ki} = f_{ji},$$

что и утверждалось. \square

ПРИМЕР 7.6 (ЕЩЁ РАЗ О РАНГЕ МАТРИЦЫ)

Каждая матрица $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ является матрицей линейного отображения

$$F_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto Ax,$$

и линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с образом $\operatorname{im} F_A$ этого отображения, т. е. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{im} F_A$. Согласно предл. 7.3, двойственное отображение $F_A^* : \mathbb{K}^{m*} \rightarrow \mathbb{K}^{n*}$ задаётся в двойственных базисах транспонированной матрицей A^t , откуда

$$\operatorname{rk} A^t = \dim \operatorname{im} F_A^* = m - \dim \ker F_A^* = m - \dim \operatorname{Ann} \operatorname{im} F_A = \dim \operatorname{im} F_A = \operatorname{rk} A,$$

что даёт ещё одно доказательство теоремы о ранге матрицы⁴.

¹См. н° 5.1 на стр. 60.

²См. обсуждение перед упр. 5.4 на стр. 63 из н° 5.2.

³См. форм. (7-3) на стр. 85 и сопутствующее обсуждение.

⁴Ср. с теор. 5.1 на стр. 67 и прим. 7.5 на стр. 88.

7.4. Отступление о бесконечномерии. Этот раздел относится скорее к теории множеств, чем к линейной алгебре. В нём изложена стандартная машинерия, позволяющая отбросить предположения о конечномерности, которые для упрощения первого знакомства с предметом были сделаны нами в теореме о базисе¹.

7.4.1. Отношения порядка. Множество X называется *частично упорядоченным* если между некоторыми парами элементов $x, y \in X$ установлено такое отношение $x \leq y$, что для всех $x, y, z \in X$ из $x \leq y$ и $y \leq z$ вытекает, что $x \leq z$, а одновременное выполнение условий $x \leq y$ и $y \leq x$ равносильно равенству $x = y$. Запись $x < y$ означает, что $x \leq y$ и $x \neq y$.

Например, пусть $X = 2^M$ является множеством всех подмножеств некоторого множества M . Отношение нестрого включения $x \subseteq y$ подмножества $x \subseteq M$ в подмножество $y \subseteq M$ задаёт на множестве 2^M частичный порядок. Запись $x \subset y$ означает строгое включение.

Частичный порядок на множестве X называется *линейным*, если для любой пары элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $x \leq y$ или неравенство $y \leq x$. Например, множество рациональных чисел \mathbb{Q} со стандартным отношением неравенства между числами линейно упорядочено, а множество 2^M всех подмножеств множества M с отношением включения не является линейно упорядоченным, если в M не меньше двух элементов.

Линейно упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое подмножество $S \subset X$ содержит такой элемент $s_* \in S$, что $s_* \leq s$ для всех $s \in S$. Этот элемент автоматически единствен и называется *начальным элементом* подмножества S . Например, множество натуральных чисел \mathbb{N} со стандартным отношением неравенства между числами вполне упорядочено, как и любое дизъюнктное объединение вида $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \dots$, в котором все элементы каждой копии множества \mathbb{N} полагаются строго большими всех элементов всех предыдущих копий. Пустое множество тоже вполне упорядочено. Напротив, множество $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$ со стандартным отношением неравенства между числами не является вполне упорядоченным.

Вполне упорядоченные множества замечательны тем, что их элементы можно рекурсивно перебрать точно так же, как и элементы множества \mathbb{N} . А именно, пусть некоторое зависящее от элемента x вполне упорядоченного множества X утверждение $\Phi(x)$ истинно для начального элемента x_* множества X , и пусть для каждого $x \in X$ истинность утверждения $\Phi(y)$ при всех $y < x$ влечёт за собою истинность утверждения $\Phi(x)$. Тогда $\Phi(x)$ истинно для всех $x \in X$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.14. Убедитесь в этом.

Такой способ доказательства утверждения $\Phi(x)$ для всех $x \in X$ называется *трансфинитной индукцией*. Используемые для индуктивного перехода специальные подмножества

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y < x\}$$

называются *начальными интервалами* частично упорядоченного множества X . Элемент $x \in X$ называется *точной верхней гранью* начального интервала $[x] \subset X$. Отметим, что начальный элемент $x_* \in X$ является точной верхней гранью пустого начального интервала $[x_*] = \emptyset$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.15. Покажите, что собственное подмножество $I \subsetneq X$ тогда и только тогда является начальным интервалом вполне упорядоченного множества X , когда $[y] \subset I$ для каждого $y \in I$, и в этом случае точная верхняя грань интервала I однозначно восстанавливается по I как начальный элемент дополнения $X \setminus I$.

¹См. теор. 4.1 на стр. 49.

7.4.2. Лемма Цорна. Рассмотрим произвольное частично упорядоченное множество P и обозначим через $\mathcal{W}(P)$ множество всех подмножеств $W \subset P$, которые вполне упорядочены имеющимся на P отношением $x \leq y$. Множество $\mathcal{W}(P)$ непусто и содержит пустое подмножество $\emptyset \subset P$, а также все конечные линейно упорядоченные подмножества¹ $L \subset P$ и, в частности, все элементы множества P .

ЛЕММА 7.1

Не существует такого отображения $\varrho : \mathcal{W}(P) \rightarrow P$, что $\varrho(W) > w$ для всех $W \in \mathcal{W}(P)$ и $w \in W$.

Доказательство. Пусть такое отображение ϱ существует. Назовём вполне упорядоченное подмножество $W \subset P$ ϱ -рекурсивным, если $\varrho([y]) = y$ для всех $y \in W$. Например, множество

$$\left\{ \varrho(\emptyset), \varrho(\{\varrho(\emptyset)\}), \varrho(\{\varrho(\emptyset), \varrho(\{\varrho(\emptyset)\})\}) \right\}$$

ϱ -рекурсивно и может неограниченно расширяться вправо. Любые два различных ϱ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножества с общим начальным элементом таковы, что одно из них является начальным интервалом другого.

УПРАЖНЕНИЕ 7.16. Докажите это.

Обозначим через $U \subset P$ объединение всех ϱ -рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств в P с начальным элементом $\varrho(\emptyset)$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.17. Убедитесь, что подмножество $U \subset P$ вполне упорядочено и ϱ -рекурсивно.

Поскольку элемент $\varrho(U)$ строго больше всех элементов из U , он не лежит в U . С другой стороны, множество $W = U \cup \{\varrho(U)\}$ вполне упорядочено, ϱ -рекурсивно, и его начальным элементом является $\varrho(\emptyset)$. Следовательно, $W \subset U$, откуда $\varrho(U) \in U$. Противоречие. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4 (ЛЕММА ЦОРНА)

Пусть каждое линейно упорядоченное² подмножество L частично упорядоченного множества P имеет в P верхнюю грань³. Тогда в P есть такой (возможно не единственный) элемент $p^* \in P$, что неравенство $p^* \leq x$ выполняется в P только для $x = p^*$.

Доказательство. Если требуемого элемента p^* нет, то для любого $p \in P$ имеется такой элемент $p' \in P$, что $p < p'$. Тогда для каждого вполне упорядоченного подмножества $W \subset P$ найдётся такой элемент $w^* \in P$, что $w < w^*$ для всех $w \in W$. Сопоставляя каждому $W \in \mathcal{W}$ один из таких элементов w^* , мы получаем отображение $\varrho : \mathcal{W} \rightarrow P$, которого не может быть по лем. 7.1. \square

7.4.3. Теоремы о базисах. Подмножество B векторного пространства V называется *порождающим*, если каждый вектор $v \in V$ записывается в виде

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \quad b_i \in B, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}.$$

Иначе можно сказать, что каждый вектор $v \in V$ допускает линейное разложение

$$v = \sum_{b \in B} \lambda_b b, \quad \text{где } \lambda_b \in \mathbb{K}, \quad (7-12)$$

¹Линейно упорядоченные подмножества частично упорядоченного множества называются *цепями*.

²Как будет видно из доказательства, слово «линейно» можно заменить на слово «вполне», что делает утверждение более сильным, но классическая формулировка леммы Цорна именно такова.

³Т.е. найдётся такой элемент $w^* \in P$, что $w \leq w^*$ для всех $w \in W$.

в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b отлично от нуля. Порождающее подмножество $B \subset V$ называется *базисом* пространства V , если для каждого $v \in V$ разложение (7-12) единственно, то есть равенство $\sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{b \in B} \mu_b b$, в котором лишь конечное число коэффициентов λ_b, μ_b отлично от нуля, равносильно тому, что $\lambda_b = \mu_b$ при всех $b \in B$. Непустое множество $A \subset V$ называется *линейно независимым* если равенство

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{k},$$

возможно только когда все $\lambda_i = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.18. Убедитесь в том, что множество $E \subset V$ является базисом если и только если оно линейно независимо и порождает V .

ТЕОРЕМА 7.2 (СУЩЕСТВОВАНИЕ БАЗИСА)

В каждом отличном от нуля векторном пространстве V для любого¹ линейно независимого множества $A \subset V$ и любого² порождающего V множества векторов $B \supset A$ существует базис E , содержащий A и содержащийся в B .

Доказательство. Линейно независимые множества векторов $X \subseteq V$ со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ образуют частично упорядоченное отношением включения множество, удовлетворяющее лемме Цорна³. В качестве верхней грани линейно упорядоченной цепи вложенных друг в друга линейно независимых наборов векторов можно взять их объединение. Оно линейно независимо, поскольку любой конечный набор его векторов лежит в каком-то одном из множеств цепи, а оно линейно независимо. По лемме Цорна существует такое линейно независимое множество E , что $A \subseteq E \subseteq B$ и для любого линейно независимого множества X со свойством $A \subseteq X \subseteq B$ включение $E \subseteq X$ влечёт равенство $E = X$. Покажем, что E линейно порождает V . Достаточно убедиться, что каждый вектор $b \in B \setminus E$ линейно выражается через E . Так как множество $E \cup \{b\}$ строго больше E , оно линейно зависимо. Поскольку само множество E линейно независимо, любое линейное соотношение между векторами из $E \cup \{b\}$ содержит с ненулевым коэффициентом вектор b . Тем самым, он линейно выражается через E . \square

Следствие 7.6

Каждое ненулевое векторное пространство имеет базис, и любой базис любого подпространства можно дополнить до базиса во всём пространстве. \square

ТЕОРЕМА 7.3 (РАВНОМОЩНОСТЬ БАЗИСОВ)

В каждом векторном пространстве все базисы равномощны.

Доказательство. Пусть базис B строго мощнее базиса E . Поскольку в конечномерном пространстве это невозможно по теор. 4.1 на стр. 49, оба базиса бесконечны. Каждый вектор $e \in E$ является линейной комбинацией конечного множества векторов $B_e \subset B$. Так как множество E бесконечно, объединение $B_E = \bigcup_{e \in E} B_e$ всех этих конечных множеств равномощно E .

УПРАЖНЕНИЕ 7.19. Убедитесь в этом.

Стало быть, существует вектор $b \in B$, не лежащий в B_E . Линейно выражая b через векторы базиса E , а каждый из входящих в это выражение векторов $e \in E$ — через векторы из B_E , мы

¹В том числе, пустого.

²В том числе, совпадающего с V .

³См. предл. 7.4 на стр. 93.

получим линейное выражение вектора $b \in B \setminus B_E$ через векторы из B_E . Тем самым, множество B линейно зависимо. Противоречие. \square

Следствие 7.7

Всякое более мощное, чем базис, множество векторов линейно зависимо. \square

ТЕОРЕМА 7.4 (ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

Для каждого линейного отображения $F : U \rightarrow W$, заданного на подпространстве U векторного пространства V , существует такое (возможно, не единственное) линейное отображение $G : V \rightarrow W$, что $G|_U = F$.

Доказательство. Каждое линейное отображение $G : V \rightarrow W$ однозначно задаётся своими значениями на векторах любого базиса E пространства V , и для любого отображения множеств $g : E \rightarrow W$ существует единственное такое линейное отображение $G : V \rightarrow W$, что $G(e) = g(e)$ для всех $e \in E$.

УПРАЖНЕНИЕ 7.20. Убедитесь в этом.

Рассмотрим произвольный базис B в U , дополним его до базиса $E = B \sqcup C$ в V и рассмотрим любое отображение множеств $g : E \rightarrow W$, переводящее каждый вектор $b \in B$ в $F(b)$. Отвечающее этому отображению линейное отображение $G : V \rightarrow W$ обладает нужным свойством. \square

§8. Определители

8.1. Объём, полилинейные косые формы и определитель. Ненулевая функция от n аргументов $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ на n -мерном векторном пространстве V называется *объёмом ориентированного n -мерного параллелепипеда* или *формой n -мерного объёма*, если она обладает теми же двумя свойствами, что и форма площади из [п. 1.3](#) на стр. 12, а именно¹:

- 1) объём не меняется при добавлении к любому из аргументов произвольной кратности любого другого аргумента: $\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots)$
- 2) при умножении любого из аргументов на число объём умножается на это число:

$$\omega(\dots, \lambda v, \dots) = \lambda \omega(\dots, v, \dots).$$

На геометрическом языке эти свойства, как и раньше, означают, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, \dots, v_n , как на [рис. 8♦1](#), умножается на λ при умножении любого ребра на λ , и не меняется при сдвиге двух противоположных $(n - 1)$ -мерных граней друг относительно друга в направлении какого-нибудь параллельного этим граням ребра (параллельная проекция происходящего на двумерную плоскость, порождённую ребром, вдоль которого делается сдвиг, и ребром, соединяющим сдвигаемые грани, изображена на [рис. 8♦2](#)).

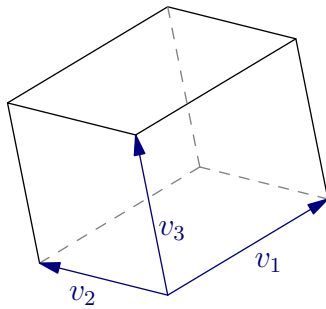


Рис. 8♦1. Параллелепипед.

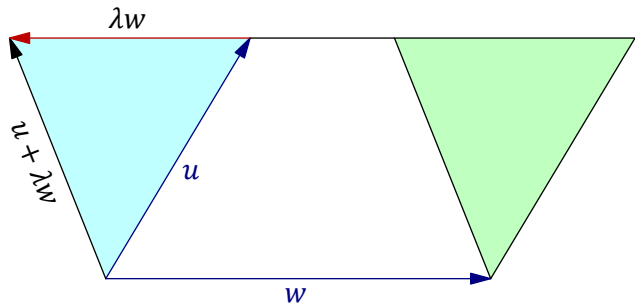


Рис. 8♦2. Параллельный перекос.

Дословно так же, как [лем. 1.3](#) на стр. 13, доказывается

Лемма 8.1

Каждая форма n -мерного объёма ω автоматически обладает следующими свойствами:

- 1) если векторы v_1, \dots, v_n линейно зависимы, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$, в частности, ω *кососимметрична*², т. е. $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$
- 2) форма ω линейна по каждому из своих аргументов при фиксированных остальных, т. е.

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu w, \dots) = \lambda \omega(\dots, u, \dots) + \mu \omega(\dots, w, \dots) \quad (8-1)$$

¹Здесь и далее мы обозначаем многоточиями аргументы, остающиеся неизменными в левой и правой части равенства.

²Функция от нескольких аргументов называется *кососимметричной*, если она обращается в нуль, когда какие-нибудь два аргумента совпадают.

3) форма ω знакопеременна¹, т.е. $\omega(\dots, u, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, u, \dots)$.

Доказательство. Если один из векторов линейно выражается через остальные, к примеру, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$, то $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \omega(0, v_2, \dots, v_n) = \omega(0 \cdot 0, v_2, \dots, v_n) = 0 \cdot \omega(0, v_2, \dots, v_n) = 0$. Это доказывает свойство (1). Свойство (2) очевидно, когда оба набора аргументов в правой части равенства (8-1) линейно зависимы: в этом случае набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и обе части (8-1) нулевые по уже доказанному свойству (1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что аргументы первого слагаемого в правой части (8-1) образуют базис пространства V . Тогда $w = \rho u + v$, где v является линейной комбинацией остальных $n - 1$ аргументов, и левая часть (8-1) равна

$$\omega(\dots, \lambda u + \mu \rho u + \mu v, \dots) = \omega(\dots, (\lambda + \mu \rho)u, \dots) = (\lambda + \mu \rho) \omega(\dots, u, \dots),$$

а второе слагаемое правой части переписывается как $\mu \omega(\dots, \rho u + v, \dots) = \mu \rho \cdot \omega(\dots, u, \dots)$, что доказывает свойство (2). Знакопеременность следует из линейности и кососимметричности:

$$\begin{aligned} \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) &= \\ &= \omega(\dots, u, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, u, \dots) + \omega(\dots, w, \dots, w, \dots) = \\ &= \omega(\dots, u + w, \dots, u + w, \dots) = 0. \end{aligned}$$

□

8.1.1. Кососимметричные n -линейные формы. Линейная по каждому своему аргументу функция $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ от k векторов пространства V называется k -линейной формой на V .

УПРАЖНЕНИЕ 8.1. Убедитесь, что k -линейные формы образуют векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на константы, а кососимметричные формы составляют в нём векторное подпространство.

ЛЕММА 8.2

Любые две n -линейные кососимметричные формы на n -мерном векторном пространстве V пропорциональны.

Доказательство. Рассмотрим n -линейную кососимметричную форму $\omega : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$, зафиксируем в пространстве V какой-нибудь базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ и выразим через $\omega(e_1, \dots, e_n)$ значение формы ω на произвольных векторах $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где в j -том столбце матрицы C стоят координаты вектора v_j в базисе e . Так как ω полилинейна по каждому аргументу, $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(\sum_{i_1} e_{i_1} c_{i_1 1}, \dots, \sum_{i_n} e_{i_n} c_{i_n n}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} c_{i_1 1} \dots c_{i_n n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$. Так как при совпадении каких-либо двух аргументов форма ω зануляется, в последней сумме отличны от нуля только слагаемые с попарно разными индексами i_1, \dots, i_n . Каждый такой набор индексов имеет вид $g(1), \dots, g(n)$, где $g : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ — некоторая биекция. Все такие биекции образуют группу перестановок² S_n . В силу знакопеременности формы ω для каждой перестановки $g \in S_n$ выполняется равенство $\omega(e_{g(1)}, \dots, e_{g(n)}) = \text{sgn}(g) \omega(e_1, \dots, e_n)$,

¹Функция от нескольких аргументов называется *знакопеременной*, если при перестановке любых двух аргументов она умножается на -1 .

²Также называемую *симметрической группой*. Я надеюсь, что читатель наслышан про группу S_n , чётность перестановок и мультипликативный гомоморфизм $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ из курса алгебры. Если это не так, то все необходимые сведения можно почерпнуть из добавления в н° 8.4 ниже.

где $\text{sgn}(g) = \pm 1$ означает знак перестановки g , равный $+1$ для чётных перестановок, и -1 для нечётных. Таким образом, $\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n}$. Последняя сумма называется *определителем* $n \times n$ матрицы $C = (c_{ij})$ и обозначается

$$\det C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) c_{g(1)1} c_{g(2)2} \cdots c_{g(n)n} \quad (8-2)$$

Поскольку $\det C$ зависит только от матрицы C , но не от формы ω , для любых двух n -линейных кососимметричных форм ω_1, ω_2 и векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ имеется равенство

$$\frac{\omega_1(v_1, \dots, v_n)}{\omega_2(v_1, \dots, v_n)} = \frac{\omega_1(e_1, \dots, e_n)}{\omega_2(e_1, \dots, e_n)}.$$

Мы заключаем, что его левая часть не зависит от выбора векторов v_i , т. е. функции ω_1 и ω_2 пропорциональны. \square

8.1.2. Определитель матрицы. Равенство (8-2) предписывает всеми возможными способами выбирать n элементов матрицы C так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось выбрано ровно по одному элементу. Клетки, где находятся выбранные элементы, задают биекцию $g : j \mapsto g(j)$ из множества столбцов в множество строк матрицы C . Каждую выбранную n -ку элементов следует перемножить и умножить на знак перестановки g , которую она задаёт. Полученные таким образом $n!$ произведений складываются.

ПРИМЕР 8.1

Определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \quad (8-3)$$

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \quad (8-4)$$

$$- c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33}.$$

Во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции.

ПРИМЕР 8.2 (ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ)

Если матрица C верхнетреугольная¹, т. е. $c_{ij} = 0$ при $i > j$, то единственным ненулевым слагаемым в сумме (8-2) будет произведение диагональных элементов матрицы C , отвечающее тождественной перестановке $g = \text{Id}$. Таким образом, для верхнетреугольной матрицы C определитель $\det C = \prod_i c_{ii}$. В частности, $\det E = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1

Для любой квадратной матрицы C выполняется равенство $\det C = \det C^t$.

¹См. прим. 5.6 на стр. 70.

Доказательство. Суммы (8-2), вычисляющие $\det C$ и $\det C^t$, состоят из одних и тех же произведений всевозможных n -ок элементов матрицы, устанавливающих биекцию $g : j \mapsto g_j$ между номерами столбцов и номерами строк, только в первой из сумм отвечающее такой биекции произведение берётся со знаком $\operatorname{sgn}(g)$, а во второй — со знаком $\operatorname{sgn}(g^{-1})$. Но обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность: если $g = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m$, где все σ_i являются транспозициями, то $g^{-1} = \sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_1$ в силу равенства $\sigma_i \sigma_i = \operatorname{Id}$. \square

Предложение 8.2

Определитель линейен по каждому столбцу матрицы C и обращается в нуль, если какие-то два столбца совпадают.

Доказательство. Первое вытекает из формулы (8-2): так как каждое из суммируемых произведений линейно зависит от каждого столбца, вся сумма тоже линейна по каждому столбцу. Если i -й столбец матрицы C совпадает с j -м, то в сумме (8-2) слагаемое, отвечающее перестановке g сократится со слагаемым, отвечающим перестановке $h = g \sigma_{ij}$, где σ_{ij} меняет местами i и j , а все остальные номера оставляет на месте. В самом деле, $\operatorname{sgn}(h) = -\operatorname{sgn}(g)$, а отвечающие h и g произведения матричных элементов совпадают: $\cdots c_{h(i)i} \cdots c_{h(j)j} \cdots = \cdots c_{g(j)i} \cdots c_{g(i)j} \cdots = \cdots c_{g(j)j} \cdots c_{g(i)i} \cdots = \cdots c_{g(i)i} \cdots c_{g(j)j} \cdots$. \square

Следствие 8.1

Определитель $n \times n$ -матрицы является n -линейной кососимметричной функцией как столбцов, так и строк.

Следствие 8.2

Пространство n -линейных кососимметричных форм на n -мерном векторном пространстве V одномерно.

Доказательство. По лем. 8.2 на стр. 97 все n -линейные кососимметричные формы на V пропорциональны. Поэтому достаточно предъявить хотя бы одну такую форму, не равную тождественно нулю. Зафиксируем в V любой базис e_1, \dots, e_n и для векторов v_1, \dots, v_n , которые линейно выражаются через него по формуле $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, положим $\omega(v_1, \dots, v_n) = \det C$. Эта форма полилинейна и кососимметрична по предл. 8.2, а в прим. 8.2 видели, что $\omega_e(e_1, \dots, e_n) = \det E = 1$. \square

Следствие 8.3

На каждом n -мерном векторном пространстве V существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма n -мерного объёма ω . Если векторы e_1, \dots, e_n образуют базис в V , а векторы v_1, \dots, v_n выражаются через него как $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, то

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det C.$$

Доказательство. По лем. 8.1 на стр. 96 каждая форма объёма на V кососимметрична и n -линейна. По предыдущему следствию n -линейные кососимметричные формы на V составляют одномерное векторное пространство. Достаточно убедиться, что любая из них является формой объёма, т. е. удовлетворяет условиям (1) и (2) из п° 8.1 на стр. 96. Но условие (2) является составной частью требования линейности формы по каждому аргументу, и в силу линейности

$$\omega(\dots, u + \lambda w, \dots, w, \dots) = \omega(\dots, u, \dots, w, \dots) + \lambda \omega(\dots, w, \dots, w, \dots).$$

Из-за кососимметричности второе слагаемое зануляется, что и доказывает условие (1). \square

8.1.3. Определитель линейного оператора. Зафиксируем на n -мерном векторном пространстве V форму объёма ω . Для любого линейного оператора $F : V \rightarrow V$ форма

$$\omega_F(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(Fv_1, \dots, Fv_n)$$

полилинейна и кососимметрична. Поэтому она пропорциональна форме ω . Коэффициент пропорциональности ω_F / ω равен отношению значений этих форм на элементах произвольного базиса $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства V и не зависит от выбора базиса. Поскольку

$$(Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot F_{\mathbf{e}},$$

где $F_{\mathbf{e}}$ — матрица оператора F в базисе \mathbf{e} , коэффициент пропорциональности

$$\frac{\omega_F}{\omega} = \frac{\omega(Fe_1, Fe_2, \dots, Fe_n)}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \frac{\omega(e_1, \dots, e_n) \cdot \det F_{\mathbf{e}}}{\omega(e_1, \dots, e_n)} = \det F_{\mathbf{e}}.$$

Мы заключаем, что определитель $\det F_{\mathbf{e}}$ матрицы оператора не зависит от выбора базиса \mathbf{e} , в котором пишется матрица, и при применении оператора F к любому набору векторов объём натянутого на них параллелепипеда умножается на $\det F_{\mathbf{e}}$. Определитель $\det F_{\mathbf{e}}$ называется *определителем линейного оператора* $F : V \rightarrow V$ и обозначается $\det F$.

Поскольку при последовательном выполнении операторов $G : V \rightarrow V$ и $F : V \rightarrow V$ объёмы параллелепипедов умножатся сначала на $\det(G)$, а потом на $\det(F)$, мы заключаем, что для любых двух линейных операторов $F, G : V \rightarrow V$ выполняется равенство

$$\det(FG) = \det(F) \det(G) \quad (8-5)$$

В частности, $\det(FG) = \det(GF)$.

Предложение 8.3

Линейный оператор $F : V \rightarrow V$ биективен если и только если $\det F \neq 0$.

Доказательство. Если оператор F биективен, то он обратим. Вычисляя определитель обеих частей в матричном равенстве $FF^{-1} = \text{Id}$, получаем $\det F \det F^{-1} = 1$, откуда $\det F \neq 0$. Если оператор не биективен, то столбцы его матрицы $F_{\mathbf{e}}$ линейно зависимы по [сл. 5.1](#) на стр. 66, откуда $\det F = \det F_{\mathbf{e}} = 0$. \square

Следствие 8.4

Квадратная матрица A обратима если и только если $\det A \neq 0$. \square

8.1.4. Специальная линейная группа. Из предыдущего вытекает, что операторы определителя 1 образуют в полной линейной группе $\text{GL}(V)$ подгруппу. Она обозначается $\text{SL}(V)$ и называется *специальной линейной группой* пространства V . Геометрически, специальная линейная группа состоит из всех операторов, сохраняющих ненулевую форму объёма на V , и это свойство не зависит от выбора формы объёма. Специальная линейная группа координатного пространства \mathbb{K}^n состоит из матриц определителя 1 и обозначается $\text{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

8.1.5. Мультипликативность определителя. Обозначим через $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от $2n^2$ независимых переменных a_{ij} и b_{ij} , где $1 \leq i, j \leq n$, и рассмотрим в кольце $\text{Mat}_n(K)$ матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, элементами которых являются эти переменные.

УПРАЖНЕНИЕ 8.2. Покажите, что многочлен $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ над бесконечным полем \mathbb{k} тогда и только тогда принимает нулевое значение в каждой точке координатного аффинного пространства \mathbb{k}^m , когда все его коэффициенты нулевые.

Следствие 8.5 (мультипликативность определителя)

В кольце $K = \mathbb{Z}[a_{ij}, b_{ij}]$ выполняется равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Доказательство. Поскольку поле \mathbb{Q} бесконечно, многочлен $\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B)$ является нулевым если и только если он принимает нулевое значение во всех точках аффинного пространства \mathbb{Q}^{2n^2} с координатами a_{ij}, b_{ij} , т. е. тогда и только тогда, когда равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ выполняется для всех рациональных матриц A и B . Но для таких матриц оно превращается в равенство (8-5) для линейных операторов

$$F: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n, x \mapsto Ax, \quad \text{и} \quad G: \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n, x \mapsto Bx,$$

имеющих в стандартном базисе координатного пространства \mathbb{Q}^n матрицы A и B . \square

8.1.6. Правило Крамера. Для векторов $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{k}^n$ обозначим через $\det(v_1, \dots, v_n)$ определитель матрицы, составленной из координат этих векторов. Поскольку определитель не меняется при транспонировании, не имеет значения, как записываются координаты — по строкам или по столбцам. Непосредственным обобщением лем. 1.2 на стр. 12 является

Предложение 8.4 (первое правило Крамера)

Векторы v_1, \dots, v_n образуют базис в \mathbb{k}^n если и только если $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, и тогда i -тая координата произвольного вектора $w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ в этом базисе равна

$$x_i = \frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det(v_1, \dots, v_n)}. \quad (8-6)$$

Доказательство. По предл. 5.2 на стр. 65 векторы $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{k}^n$ образуют базис если и только если матрица их координат обратима, что равносильно условию $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ по сл. 8.4 на стр. 100. Если v_1, \dots, v_n образуют базис, то у каждого $w \in \mathbb{k}^n$ есть единственное разложение $w = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Применяя к обеим частям этого равенства линейный функционал

$$V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \det(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

получаем равенство $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) = x_i \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$. \square

Пример 8.3 (уравнение гиперплоскости)

Пусть n точек p_1, \dots, p_n в аффинном координатном пространстве \mathbb{k}^n не лежат в одном $(n-2)$ -мерном аффинном подпространстве. Тогда, согласно предл. 4.4 на стр. 55 через них проходит единственная гиперплоскость. Точка x лежит в этой гиперплоскости если и только если вектор $\overline{p_n x} = x - p_n$ линейно выражается через $n-1$ векторов $\overline{p_n p_1}, \dots, \overline{p_n p_{n-1}}$, что равносильно равенству $\det(x - p_n, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = 0$. В силу полилинейности определителя, это соотношение представляет собою неоднородное линейное уравнение на x , которое можно переписать как $\det(x, p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n) = \det(p_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$.

Например, в трёхмерном аффинном координатном пространстве \mathbb{K}^3 плоскость $p + \lambda u + \mu v$, проходящая через точку p параллельно векторам u, v , задаётся неоднородным линейным уравнением $\det(x, u, v) = \det(p, u, v)$.

8.2. Присоединённая матрица. Для квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ обозначим через C_{ij} подматрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, которая получается из C удалением i -й строки и j -го столбца. Число $(-1)^{i+j} \det C_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* к элементу c_{ij} матрицы C . Транспонированная к матрице из алгебраических дополнений матрица

$$C^\vee = (c_{ij}^\vee), \quad \text{где} \quad c_{ij}^\vee = (-1)^{i+j} \det C_{ji},$$

называется *присоединённой*¹ к матрице C .

Предложение 8.5 (ФОРМУЛА ДЛЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ)

Если матрица $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ обратима, то $C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^\vee$.

Доказательство. Если матрица C обратима, то её столбцы v_1, \dots, v_n образуют базис \mathbf{v} координатного пространства \mathbb{K}^n . Стандартный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства \mathbb{K}^n выражается через него по формуле $\mathbf{e} = \mathbf{v} C^{-1}$. Таким образом, i -й элемент j -го столбца матрицы C^{-1} является коэффициентом при v_i в разложении вектора e_j по базису \mathbf{v} . По правилу Крамера он равен

$$\frac{\det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\det C}.$$

В числителе стоит определитель матрицы, имеющей в i -м столбце ровно один ненулевой элемент — единицу, стоящую в j -й строке. Переставим её в верхний левый угол, сделав $i-1$ транспозиций столбцов и $j-1$ транспозиций строк:

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n) &= (-1)^{i-1} \det(e_j, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) = \\ &= (-1)^{i+j-2} \det \begin{pmatrix} 1 & c_{j,1} & \cdots & c_{j,i-1} & c_{j,i+1} & \cdots & c_{j,n} \\ 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,i-1} & c_{1,i+1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{j-1,2} & \cdots & c_{j-1,i-1} & c_{j-1,i+1} & \cdots & c_{j-1,n} \\ 0 & c_{j+1,2} & \cdots & c_{j+1,i-1} & c_{j+1,i+1} & \cdots & c_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,i-1} & c_{n,i+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ненулевой вклад в этот определитель дают только перестановки, оставляющие 1 на месте. Сумма произведений матричных элементов, отвечающих таким перестановкам, равна определителю $(n-1) \times (n-1)$ -матрицы, получающейся удалением j -й строки и i -го столбца из матрицы C . Тем самым, $\det(v_1, \dots, v_{i-1}, e_j, v_{i+1}, \dots, v_n) = c_{ij}^\vee$. \square

¹По-английски *adjunct*.

Пример 8.4

Матрицы размеров 2×2 и 3×3 с определителем 1 обращаются по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) & -(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{31}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) \\ -(c_{21}c_{33} - c_{23}c_{31}) & (c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) & -(c_{11}c_{23} - c_{13}c_{21}) \\ (c_{21}c_{32} - c_{22}c_{31}) & -(c_{11}c_{32} - c_{12}c_{32}) & (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \end{pmatrix}$$

Для матриц с отличным от единицы определителем все матричные элементы в правых частях надо поделить на определитель матрицы из левой части.

Следствие 8.6 (крайне важное тождество)

Обозначим через $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ кольцо многочленов от n^2 переменных c_{ij} , где $1 \leq i, j \leq n$, а через $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ матрицу, элементами которой являются эти переменные. В кольце $\text{Mat}_n(K)$ матриц с элементами из K выполняется равенство

$$C \cdot C^\vee = C^\vee \cdot C = \det(C) \cdot E. \quad (8-7)$$

Доказательство. Приравнявая соответственные матричные элементы в правой и левой части равенства (8-7), мы получаем набор из n^2 равенств между многочленами с целыми коэффициентами от переменных c_{ij} . Чтобы доказать каждое такое равенство, достаточно проверить, что оно превращается в верное числовое равенство для всех наборов из n^2 численных значений $c_{ij} \in \mathbb{R}$ из некоторого всюду плотного подмножества в \mathbb{R}^{n^2} .

Упражнение 8.3 (по анализу). Убедитесь в этом, а также в том, что для любого ненулевого многочлена $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ множество $\mathcal{D}(f) = \{p \in \mathbb{R}^m \mid f(p) \neq 0\}$ всюду плотно в \mathbb{R}^m .

Таким образом, достаточно проверить равенство (8-7) для всех числовых матриц $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеющих $\det C \neq 0$, что и было сделано в [предл. 8.5](#). \square

Следствие 8.7 (разложение определителя по i -й строке или i -у столбцу)

В кольце $n \times n$ матриц $\text{Mat}_n(K)$ с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[c_{ij}]$ выполняется равенство

$$\det C = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ik} \det C_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} c_{ki} \det C_{ki}.$$

Доказательство. Соотношения получаются приравниванием (i, i) -тых диагональных элементов матриц из правой и левой части (8-7). \square

Пример 8.5

Раскладывая определитель 3×3 по первому столбцу, получаем

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11} (c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}) - c_{21} (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{32}) + c_{31} (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}).$$

что согласуется с прямым вычислением из [прим. 8.1](#).

8.2.1. Тожество Гамильтона–Кэли. Для любого коммутативного кольца K с единицей кольцо $n \times n$ матриц $\text{Mat}_n(K[t])$ с элементами из кольца многочленов $K[t]$ совпадает с кольцом многочленов $\text{Mat}_n(K)[t]$ от переменной t с коэффициентами в кольце матриц $\text{Mat}_n(K)$, поскольку каждую матрицу, в клетках которой стоят многочлены от t , можно записать как многочлен от t с матричными коэффициентами и наоборот. Например,

$$\begin{pmatrix} 3t^2 + 2t & t^3 - 1 \\ 2t + 3 & t^3 + t - 1 \end{pmatrix} = t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1

Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_n(K)$ многочлен

$$\chi_A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - A) = t^n - \sigma_1(A) \cdot t^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1}(A) \cdot t + (-1)^n \sigma_n(A) \in K[t]$$

называется *характеристическим многочленом* матрицы A . Коэффициент при t^{n-k} в характеристическом многочлене обозначается через $(-1)^k \sigma_k(A)$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.4. Убедитесь, что число $\sigma_k(A) \in K$ равно сумме определителей всех таких $k \times k$ подматриц матрицы A , главная диагональ которых является подмножеством главной диагонали матрицы A . В частности, $\sigma_1(A) = \text{tr}(A)$ и $\sigma_n(A) = \det A$.

ТЕОРЕМА 8.1 (тождество Гамильтона–Кэли)

Пусть, как и выше, $K = \mathbb{Z}[a_{ij}]$ является кольцом многочленов от n^2 переменных a_{ij} . Тогда в кольце матриц $\text{Mat}_n(K)$ для матрицы $A = (a_{ij})$ выполняется равенство $\chi_A(A) = 0$.

Доказательство. Подставляя в форм. (8-7) на стр. 103 вместо C матрицу $tE - A$, где E — единичная матрица размера $n \times n$, заключаем, что в кольце $\text{Mat}_n(K[t])$ выполняется равенство

$$\det(tE - A) \cdot E = (tE - A)(tE - A)^\vee,$$

где $(tE - A)^\vee$ — присоединённая¹ к $(tE - A)$ матрица. Перепишем это равенство в виде равенства между многочленами от t с коэффициентами в кольце матриц $\text{Mat}_n(K)$:

$$t^n \cdot E - \sigma_1(A) t^{n-1} \cdot E + \dots + (-1)^n \sigma_n(A) \cdot E = (tE - A) (t^m \cdot A_m^\vee + \dots + t \cdot A_1^\vee + A_0^\vee),$$

где $A_0^\vee, A_1^\vee, \dots, A_m^\vee \in \text{Mat}_n(K)$ — некоторые матрицы. Подставляя в него $t = A$, получаем в кольце $\text{Mat}_n(K)$ равенство $\chi_A(A) \cdot E = 0$, откуда $\chi_A(A) = 0$. \square

8.2.2. Однородные системы из n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных. Пространство решений системы из n линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (8-8)$$

¹См. п. 8.2 на стр. 102.

на $n + 1$ неизвестных (x_0, x_1, \dots, x_n) , рассматриваемых как вектор-столбец координатного пространства \mathbb{K}^{n+1} , является аннулятором линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

в двойственном координатном пространстве \mathbb{K}^{n+1*} . Если строки этой матрицы линейно независимы, пространство решений системы (8-8) одномерно, и базисный вектор в этом подпространстве можно указать явно. Для этого обозначим через

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (8-9)$$

определитель $n \times n$ матрицы, получающихся из A выкидыванием i -го столбца.

Предложение 8.6 (второе правило Крамера)

Уравнения (8-8) линейно независимы если и только если вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n) \neq 0$, и в этом случае вектор a порождает одномерное пространство решений системы (8-8).

Доказательство. Допишем к матрице A сверху ещё одну копию её i -той строки. Определитель получившейся матрицы размера $(n+1) \times (n+1)$ равен нулю. Раскладывая его по верхней строке, получаем $a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0$. Тем самым, вектор $a = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ в любом случае является решением системы (8-8). Если строки матрицы A линейно зависимы, то и строки всех матриц (8-9) линейно зависимы с теми же самыми коэффициентами. Поэтому все компоненты вектора A в таком случае нулевые. Если же ковекторы $\alpha_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ линейно независимы в \mathbb{K}^{n+1*} , то по лемме о замене¹ их можно дополнить до базиса в \mathbb{K}^{n+1*} одним из стандартных базисных ковекторов e_i^* . Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & \cdots & \cdots & a_{1i} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & \cdots & a_{ni} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в строки которой записаны координаты базисных ковекторов $e_i^*, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, отличен от нуля. Раскладывая его по первой строке, видим, что он равен $(-1)^i A_i$, откуда $A_i \neq 0$. \square

Пример 8.6 (пересечение аффинных плоскостей в \mathbb{K}^3)

Две непараллельные плоскости, заданные в трёхмерном аффинном координатном пространстве уравнениями

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c \\ b_1x + b_2y + b_3z = d \end{cases}$$

¹См. лем. 4.2 на стр. 49.

с непропорциональными левыми частями (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) , пересекаются по прямой с вектором скорости $v = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$, который является базисным решением системы однородных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

Если, скажем, первая компонента вектора v ненулевая, то эта прямая проходит через точку p с координатами $(0, p_2, p_3)$, где

$$p_2 = \frac{cb_3 - da_3}{a_2b_3 - b_2a_3}, \quad p_3 = \frac{a_2d - b_2c}{a_2b_3 - b_2a_3}$$

это единственное решение системы неоднородных уравнений

$$\begin{cases} a_2y + a_3z = c \\ b_2y + b_3z = d. \end{cases}$$

8.3. Геометрическое отступление: объём и барицентрические координаты. Пусть в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ задан набор из $n + 1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек p_0, p_1, \dots, p_n . Поместим это \mathbb{A}^n внутрь $(n+1)$ -мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(\mathbb{k} \oplus V)$ в качестве аффинной гиперплоскости $\Pi = (1, 0) + V$, проходящей через точку $(1, 0) \in \mathbb{k} \oplus V$ и имеющей направляющее векторное подпространство $V \subset \mathbb{k} \oplus V$. Рассмотрим в \mathbb{A}^{n+1} аффинный координатный репер с началом в точке $o = (0, 0) \in \mathbb{k} \oplus V$ и базисными векторами $e_0 = \overrightarrow{op_0}$, $e_1 = \overrightarrow{op_1}, \dots, e_n = \overrightarrow{op_n}$. Гиперплоскость $\Pi = \mathbb{A}^n$ проходит через концы этих базисных векторов и задаётся уравнением $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$. Координаты (x_0, x_1, \dots, x_n) точки $a \in \Pi$ в таком репере суть не что иное как *барицентрические координаты*¹ точки a относительно точек p_i , поскольку их сумма равна 1 и центр тяжести точек p_i , взятых с весами x_i , оказывается в точке a , так как $x_0\overrightarrow{ap_0} + x_1\overrightarrow{ap_1} + \dots + x_n\overrightarrow{ap_n} = \overrightarrow{oa} \cdot \sum x_i - \sum x_i e_i = 0$. Тем самым, мы получаем биекцию между точками $a \in \mathbb{A}^n$ и наборами весов (x_0, x_1, \dots, x_n) с суммой $\sum x_i = 1$. Основным результатом этого раздела является

Предложение 8.7

Барицентрические координаты (x_0, x_1, \dots, x_n) точки $a \in \mathbb{A}^n$ относительно набора не лежащих в одной гиперплоскости точек $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{A}^n$ равны отношениям объёмов пар n -мерных ориентированных параллелепипедов, первый из которых натянут на векторы, идущие из точки a во все точки p_i кроме p_i , а второй — на векторы, идущие из точки p_i во все остальные точки p_j :

$$x_i = \frac{\det(\overrightarrow{ap_0}, \dots, \overrightarrow{ap_{i-1}}, \overrightarrow{ap_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{ap_n})}{\det(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_{i-1}}, \overrightarrow{p_0p_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})}. \quad (8-10)$$

8.3.1. Неформальный комментарий. Координата x_i вектора \overrightarrow{oa} в базисе из векторов $e_i = \overrightarrow{op_i}$ вычисляется по правилу Крамера:

$$x_i = \frac{\omega(\overrightarrow{op_0}, \dots, \overrightarrow{op_{i-1}}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{op_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{op_n})}{\omega(\overrightarrow{op_0}, \dots, \overrightarrow{op_n})}. \quad (8-11)$$

¹Ср. с н° 1.6.1 на стр. 21.

Над полем \mathbb{R} стоящие в числителе и знаменателе этой формулы объёмы параллелепипедов можно заменить на объёмы пирамид, отсекаемых от этих параллелепипедов гиперплоскостью Π , как на рис. 8♦3 ниже. Основания этих $(n + 1)$ -мерных лежат в гиперплоскости Π и представляют собою n -мерные пирамиды с вершинами в точках $p_0, \dots, p_{i-1}, a, p_{i+1}, \dots, p_n$ и в точках p_0, \dots, p_n соответственно. Поскольку пирамиды имеют общую вершину o , их $(n + 1)$ -мерные объёмы относятся также, как n -мерные объёмы их оснований, что и даёт нужную формулу.

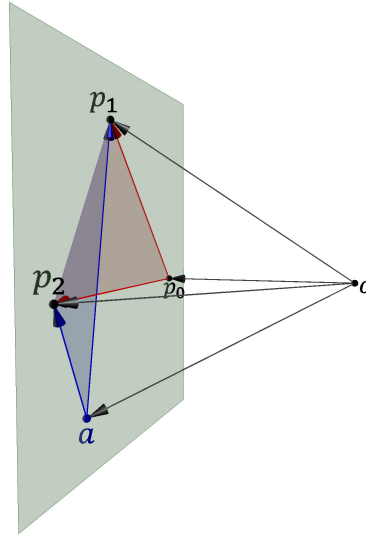
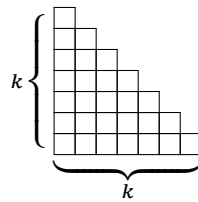


Рис. 8♦3. Барицентрические координаты как отношения объёмов

То, что над полем \mathbb{R} отношение объёма пирамиды, натянутой на линейно независимые векторы, к объёму параллелепипеда, натянутого на те же векторы, не зависит от векторов, а зависит только от размерности их линейной оболочки, можно увидеть следующим образом. Определим n -мерную «ступенчатую пирамиду высоты» k как стопку n -мерных кубиков со стороной 1, лежащих в положительном гипероктанте пространства \mathbb{R}^n на плоскости $x_n = 0$ так, что днища кубиков самого нижнего слоя образуют $(n - 1)$ -мерную ступенчатую пирамиду высоты k в плоскости $x_n = 0$, днища кубиков следующего, второго снизу этажа образуют $(n - 1)$ -мерную ступенчатую пирамиду высоты $k - 1$ в плоскости $x_n = 1$ и т. д. вплоть до единственного самого верхнего кубика, лежащего на плоскости $x_n = k - 1$. Обозначим объём такой пирамиды¹ через P_k^n . Например, при $n = 2$ двумерная ступенчатая пирамида высоты k имеет вид



и состоит из $P_k^2 = k(k + 1)/2$ квадратиков². Трёхмерная пирамида высоты k имеет на нижнем этаже P_k^2 кубиков, надстраивающих предыдущую картинку вверх вдоль третьей координатной

¹Т. е. число кубиков, из которых она состоит.

²По этой причине число $P_k^2 = \binom{k+1}{2}$ часто называют k -тым треугольным числом и обозначают T_k .

оси, её второй этаж состоит из Π_{k-1}^2 кубиков, надстраивающих вверх такую же двумерную пирамидку высоты $k - 1$ и т. д. Таким образом, трёхмерная пирамида состоит из

$$\Pi_k^3 = \Pi_1^2 + \dots + \Pi_k^2 = k(k+1)(k+2)/6$$

трёхмерных кубиков.

УПРАЖНЕНИЕ 8.5 (по анализу и комбинаторике). Убедитесь, что

$$\Pi_k^n \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1^{n-1} + \Pi_2^{n-1} + \dots + \Pi_k^{n-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

и выведите отсюда, что объём вещественного n -мерного параллелепипеда в $n!$ раз больше объёма n -мерной пирамиды с вершинами в какой-нибудь вершине этого параллелепипеда и всех вершинах, соединённые с нею ребром.

Например, площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_0, \overrightarrow{op}_1$, вдвое больше площади треугольника op_1p_2 , а объём трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_0, \overrightarrow{op}_1, \overrightarrow{op}_2$, вшестеро больше объёма тетраэдра $op_1p_2p_3$ и т. д. Поэтому над произвольным полем \mathbb{K} характеристики нуль уместно называть величину $\omega(\overrightarrow{op}_1, \dots, \overrightarrow{op}_n)/n!$ *объёмом ориентированного n -мерного симплекса* $[op_1 \dots p_n]$ с вершинами в точках o, p_1, \dots, p_n . Такой симплекс представляет собою пирамиду, которая отрезается от натянутого на векторы $\overrightarrow{op}_1, \dots, \overrightarrow{op}_n$ параллелепипеда с вершиной в точке o гиперплоскостью, проходящей через вершины p_1, \dots, p_n . Из [лем. 8.3](#) ниже вытекает, что объёмы $(n+1)$ -мерных пирамид с общей вершиной и лежащими в одной n -мерной гиперплоскости основаниями относятся точно также, как n -мерные объёмы этих оснований. И хотя доказательство этой леммы, как и доказательство [предл. 8.7](#), совершенно не используют объёмы пирамид и работают над любым полем, описанную только что картинку всё-таки полезно держать в голове.

Лемма 8.3

Для любого k -мерного подпространства U в m -мерном векторном пространстве W и таких векторов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in U$ и $w_1, \dots, w_{m-k} \in W$, что векторы $w_1, \dots, w_{m-k}, u_1, \dots, u_k$ составляют базис пространства W , выполняется равенство

$$\frac{\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k}, v_1, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k}, u_1, \dots, u_k)} = \frac{\omega_k(v_1, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, \dots, u_k)}, \quad (8-12)$$

в котором ω_k и ω_m суть любые ненулевые формы k -мерного и m -мерного объёмов в пространствах U и W соответственно.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что векторы u_1, \dots, u_k линейно независимы и составляют базис в U . Согласно [предл. 8.4](#) на стр. 101,

$$\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k}, u_1, \dots, u_k) \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega_k(u_1, \dots, u_k) \neq 0.$$

Определим на подпространстве U ещё одну форму объёма ω' равенством

$$\omega'(v'_1, \dots, v'_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_m(w_1, \dots, w_{m-k}, v'_1, \dots, v'_k)$$

для любых векторов $v'_1, \dots, v'_k \in U$.

УПРАЖНЕНИЕ 8.6. Убедитесь, что это действительно ненулевая форма объёма на U .

Поскольку ненулевая форма объёма единственна с точностью до пропорциональности и отлична от нуля на базисе u_1, \dots, u_k ,

$$\frac{\omega_k(v_1, \dots, v_k)}{\omega_k(u_1, \dots, u_k)} = \frac{\omega'(v_1, \dots, v_k)}{\omega'(u_1, \dots, u_k)} = \frac{\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k}, v_1, \dots, v_k)}{\omega_m(w_1, \dots, w_{m-k}, u_1, \dots, u_k)}.$$

□

8.3.2. Доказательство предл. 8.7. Для каждого $v \neq i$ подставим в числитель дроби из формулы (8-11) разложения $\overrightarrow{op}_v = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ap}_v$ и, пользуясь тем, что объём полилинеен и зануляется на линейно зависимых векторах, преобразуем этот числитель к виду

$$\omega(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n).$$

Аналогично, подставляя в знаменатель $\overrightarrow{op}_v = \overrightarrow{op}_i + \overrightarrow{pi}_v$ для всех $v \neq i$, преобразуем его в

$$\omega(\overrightarrow{pi}_0, \dots, \overrightarrow{pi}_{i-1}, \overrightarrow{op}_i, \overrightarrow{pi}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{pi}_n).$$

Так как \overrightarrow{op}_i отличается от \overrightarrow{oa} на линейную комбинацию векторов \overrightarrow{pi}_v , знаменатель равен

$$\begin{aligned} & \omega(\overrightarrow{pi}_0, \dots, \overrightarrow{pi}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{pi}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{pi}_n), \\ \text{а } x_i &= \frac{\omega(\overrightarrow{ap}_0, \dots, \overrightarrow{ap}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{ap}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{ap}_n)}{\omega(\overrightarrow{pi}_0, \dots, \overrightarrow{pi}_{i-1}, \overrightarrow{oa}, \overrightarrow{pi}_{i+1}, \dots, \overrightarrow{pi}_n)}. \end{aligned}$$

Остаётся применить лем. 8.3 для $k = n$, $U = V$, $m = n + 1$, $W = \mathbb{k} \oplus V$, $w_1 = \overrightarrow{oa}$, $u_v = \overrightarrow{pi}_v$ и $v_v = \overrightarrow{ap}_v$, где v пробегает отличные от i значения от 0 до n .

8.4. Комбинаторное отступление: длина и знак перестановки. Перестановку (g_1, \dots, g_n) чисел $(1, \dots, n)$ можно воспринимать как биективное отображение

$$g: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto g_i.$$

Все такие биекции образуют группу преобразований, которая обозначается S_n и называется *n-той симметрической группой*. Назовём пару возрастающих чисел $i < j$ *инверсной* для перестановки $g = (g_1, \dots, g_n) \in S_n$, если $g_i > g_j$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ возрастающих пар $1 \leq i < j \leq n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары. Количество $\ell(g)$ инверсных пар перестановки g называется *числом инверсий* или *длиной* перестановки g .

УПРАЖНЕНИЕ 8.7. Найдите $\max \ell(g)$ по всем $g \in S_n$ и укажите все перестановки на которых он достигается.

Число $\text{sgn}(g) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\ell(g)}$ называется *знаком* перестановки g . Перестановка g называется *чётной*, если $\text{sgn}(g) = 1$ и *нечётной*, если $\text{sgn}(g) = -1$.

Перестановка, меняющая местами какие-либо два элемента i, j и оставляющая все остальные элементы на месте, обозначается σ_{ij} и называется *транспозицией i-го и j-го элементов*.

УПРАЖНЕНИЕ 8.8. Убедитесь, что каждая перестановка $g \in S_n$ является композицией транспозиций.

Обратите внимание, что разложение перестановки в композицию транспозиций не единственно: например, транспозицию $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ иначе можно записать как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$ или как

$\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Тем не менее чётность количества транспозиций, в композицию которых раскладывается данная перестановка g , не зависит от способа разложения и совпадает с чётностью числа инверсных пар перестановки g , т. е. все чётные перестановки являются композициями чётного числа транспозиций, а нечётные — нечётного. Это вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8.4

$\text{sgn}(g\sigma_{ij}) = -\text{sgn}(g)$ для любой перестановки $g = (g_1, \dots, g_n)$ и любой транспозиции σ_{ij} .

Доказательство. Перестановки

$$\begin{aligned} g &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g_i}, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g_j}, g_{j+1}, \dots, g_n) \\ g\sigma_{ij} &= (g_1, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g_j}, g_{i+1}, \dots, g_{i-1}, \mathbf{g_i}, g_{j+1}, \dots, g_n) \end{aligned} \quad (8-13)$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов g_i и g_j , стоящих на i -том и j -том местах перестановки g . В этих двух перестановках пара (i, j) , а также $2(j - i - 1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность, а инверсность всех остальных пар одинакова. \square

Следствие 8.8

Если перестановка g является композицией m транспозиций, то $\text{sgn}(g) = (-1)^m$ и чётность перестановки совпадает с чётностью числа m .

Доказательство. Тожественная перестановка не имеет инверсных пар и, стало быть, чётна. В силу леммы, перестановка получающаяся из тождественной умножением на m транспозиций, имеет чётность $(-1)^m$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 8.9. Убедитесь, что $\text{sgn}(gh) = \text{sgn}(g)\text{sgn}(h)$, т. е. отображение $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ является гомоморфизмом групп.

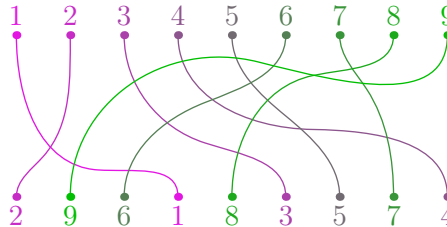


Рис. 8♦4. $\text{sgn}(2, 9, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

ПРИМЕР 8.7 (ПРАВИЛО НИТОЧЕК)

Чётность числа инверсных пар может быть определена следующим наглядным способом, известным как *правило ниточек*¹. Запишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 8♦4, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вышла за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки

¹Этот способ не слишком эффективен, когда требуется отыскать знак конкретной перестановки длинного набора чисел — обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны. Однако правило ниточек часто оказывается полезным при анализе абстрактных перестановок.

пересечения нитей были простыми двойными¹. Тогда чётность числа инверсных пар равна чётности числа точек пересечения нитей.

УПРАЖНЕНИЕ 8.10. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей* перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$, где номера в каждом из наборов (i_1, \dots, i_k) и (j_1, \dots, j_m) возрастают слева направо.

8.5. Алгебраическое отступление: грассманы многочлены. Полезным алгебраическим инструментом для работы с кососимметричными формами и определителями является алгебра $\mathbb{k}\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ грассмановых многочленов от переменных ξ_1, \dots, ξ_n с коэффициентами из поля \mathbb{k} . Она определяется также, как и обычная алгебра многочленов, вот только грассмановы переменные ξ_i не коммутируют, но *антикоммутируют*² друг с другом, т. е.

$$\forall i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0, \quad (8-14)$$

где символ « \wedge » обозначает кососимметричное грассманово умножение, дабы отличать его от обычного коммутативного. Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, всякий ненулевой грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Иначе говоря, базис векторного пространства $\mathbb{k}\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ над \mathbb{k} образуют грассмановы мономы

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}, \quad (8-15)$$

занумерованные всевозможными наборами возрастающих номеров $I = (i_1, \dots, i_n) \subseteq \{1, \dots, n\}$, включая $I = \emptyset$, для которого $\xi_\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Перестановка переменных в базисном мономе (8-15) равносильна его умножению на знак этой перестановки: $\xi_{i_{g(1)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \text{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}$ для всех $g \in S_n$. Перемножаются мономы (8-15) по правилу

$$\xi_I \wedge \xi_J = \begin{cases} \text{sgn}(I, J) \cdot \xi_{I \sqcup J} & \text{если } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{если } I \cap J \neq \emptyset, \end{cases} \quad (8-16)$$

где $\text{sgn}(I, J) = \pm 1$ означает знак *тасующей перестановки*, которая расставляет в порядке возрастания номера $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_k$, среди которых i_1, \dots, i_m и j_1, \dots, j_k по отдельности строго возрастают. Для дополнительных наборов $I = (i_1, \dots, i_n)$ и $J = \{1, \dots, n\} \setminus I$ этот знак был вычислен в [упр. 8.10](#) на стр. 111 и равен $(-1)^{i_1 + \dots + i_m + m(m+1)/2}$.

Однородные грассмановы многочлены степени k образуют векторное пространство размерности $\binom{n}{k}$, базис в котором составляют мономы (8-15), отвечающие всевозможным k -элементным подмножествам I . Размерность всей грассмановой алгебры $\dim \mathbb{k}\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = 2^n$. Грассмановы мономы произвольных степеней m и k коммутируют друг с другом по правилу

$$(\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}) \wedge (\xi_{j_1} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}) = (-1)^{km} (\xi_{j_1} \wedge \dots \wedge \xi_{j_k}) \wedge (\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}),$$

ибо при переносе каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i происходит m транспозиций. Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов η и ω

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{\deg \eta \deg \omega} \omega \wedge \eta. \quad (8-17)$$

¹Т. е. в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём их касательные в точке пересечения различны.

²Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и могут быть опущены. Однако когда $\text{char } \mathbb{k} = 2$ именно соотношения на квадраты $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных коммутативных.

В частности, каждый однородный многочлен чётной степени коммутирует со всеми грасмановыми многочленами. Отметим также, что единственный с точностью до знака моном старшей степени $\xi_{\text{top}} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ аннулируется умножением на любой грасманов многочлен с нулевым свободным членом.

УПРАЖНЕНИЕ 8.11. Опишите *центр*¹ грасмановой алгебры.

8.5.1. Грасманова алгебра векторного пространства. Если в векторном пространстве V выбран базис e_1, \dots, e_n , алгебра грасмановых многочленов $\mathbb{k}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ от базисных векторов пространства V обозначается ΛV и называется *грасмановой* (или *внешней*) алгеброй векторного пространства V . Не апеллирующие к выбору базиса название и обозначение вызваны тем, что пространство однородных грасмановых многочленов степени 1 канонически отождествляется с пространством V и не зависит от выбора базиса, а пространство однородных грасмановых многочленов степени k является линейной оболочкой всевозможных произведений $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ из k произвольных векторов $v_i \in V$ и тоже не зависит от выбора базиса. Обозначая пространство однородных грасмановых многочленов степени k через $\Lambda^k V$, мы получаем разложение алгебры ΛV в прямую сумму векторных пространств

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V,$$

где $\Lambda^0 V \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{k} \cdot 1$ обозначает одномерное пространство констант, тоже не зависящее от базиса.

ПРИМЕР 8.8 (ГРАССМАНОВЫ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ)

Покажем, что каждый ненулевой однородный грасманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем \mathbb{k} в подходящем базисе e пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}. \quad (8-18)$$

Для этого рассмотрим произвольный базис u и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2),$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису v из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора v_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 8.12. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = (v_2 - \alpha_3 v_3 - \dots - \alpha_n v_n) / \alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned} \omega &= v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ &= (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \mathbb{k}$. Переходя к базису w из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

¹Т.е. подалгебру, состоящую из всех грасмановых многочленов, которые коммутируют со всеми грасмановыми многочленами.

Предложение 8.8

Над полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V базис e , в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. \square

8.5.2. Линейные замены переменных. Если векторы $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_\ell)$ линейно выражены через векторы $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ по формуле $\mathbf{u} = \mathbf{w}C$, где $C = (c_{ij}) \in \text{Mat}_{k \times \ell}(\mathbb{k})$, то их грассмановы произведения $u_J = u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_m}$ линейно выражаются через грассмановы произведения $w_I = w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_m}$ по формулам

$$\begin{aligned} u_J &= u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_m} = \left(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1} \right) \wedge \left(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_m} w_{i_m} c_{i_m j_m} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_m} \cdot \sum_{g \in S_m} \text{sgn}(g) c_{i_{g(1)} j_1} c_{i_{g(2)} j_2} \dots c_{i_{g(m)} j_m} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}, \end{aligned}$$

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$ -подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I , а суммирование происходит по всем наборам $I = (i_1, \dots, i_m)$ из m строго возрастающих номеров. Определитель $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ называется IJ -тым минором m -того порядка в матрице C . Таким образом, IJ -тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ -тому минору m -того порядка в матрице выражающей векторы \mathbf{u} через векторы \mathbf{w} . В частности, если наборы векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ оба являются базисами пространства V , то базисные грассмановы мономы e_J пространства $\Lambda^m V$ выражаются через базисные мономы f_I при помощи матрицы перехода размера $\binom{m}{n} \times \binom{m}{n}$, у которой в позиции IJ стоит IJ -тый минор (c_{IJ}) матрицы $C_{f\mathbf{e}}$, выражающей \mathbf{e} через \mathbf{f} . Эта матрица обозначается $\Lambda^m C_{f\mathbf{e}}$ и называется m -той внешней степенью матрицы $C_{f\mathbf{e}}$.

8.5.3. Соотношения Лапласа. Для набора $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ возрастающих номеров мы полагаем $\deg J \stackrel{\text{def}}{=} m$, $|J| \stackrel{\text{def}}{=} j_1 + \dots + j_m$, и обозначаем дополнительный к J набор номеров через $\hat{J} = (\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$, столбцы которой обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и будем воспринимать их как векторы координатного пространства \mathbb{k}^n . Матрица A является матрицей перехода от этих векторов к стандартному базису e_1, \dots, e_n пространства \mathbb{k}^n . Для любых двух мультииндексов I, J одинаковой степени $\deg I = \deg J = m$ грассмановы мономы $\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_m}$ и $\alpha_{\hat{I}} = \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_{n-m}}$ имеют дополнительные степени m и $n - m$ и перемножаются по правилу¹

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\hat{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \quad (8-19)$$

Выражая мономы α_J и $\alpha_{\hat{I}}$ в левой части (8-19) через базисные мономы e_K , получаем

$$\left(\sum_K e_K a_{KJ} \right) \wedge \left(\sum_L e_L a_{L\hat{I}} \right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge \dots \wedge e_n \sum_K (-1)^{|K|} a_{KJ} a_{K\hat{I}},$$

¹См. форм. (8-16) на стр. 111 и упр. 8.10 на стр. 111

где K пробегает все возрастающие мультииндексы длины $\deg K = m$. Так как правая часть (8-19) при $I = J$ равна $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, для любых двух наборов J, I из m строк произвольной квадратной матрицы A выполняются соотношения Лапласа

$$\sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}I} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J, \end{cases} \quad (8-20)$$

где суммирование идёт по всем наборам K из $m = \deg K$ строк матрицы A .

При $I = J$ соотношение (8-20) даёт формулу для вычисления определителя¹

$$\det A = \sum_K (-1)^{|K|+|J|} a_{KJ} a_{\hat{K}J} \quad (8-21)$$

через всевозможные миноры a_{KJ} порядка m , сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J , и дополнительные к ним миноры $a_{\hat{K}J}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, которые отсекают минор a_{KJ} . Произведение $(-1)^{|K|+|J|} a_{\hat{K}J}$ называется алгебраическим дополнением к минору a_{KJ} и обозначается \hat{a}_{KJ} .

УПРАЖНЕНИЕ 8.13. Для любых матриц $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$, $C \in \text{Mat}_m(\mathbb{K})$, $B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ покажите,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

При $I \neq J$ соотношение (8-20) имеет вид $\sum_K a_{KJ} \hat{a}_{IK} = 0$ и называется теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения, поскольку его левая часть отличается от левой части формулы (8-21) тем, что миноры a_{KJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения \hat{a}_{KJ} , а на дополнения \hat{a}_{IK} к минорам a_{IK} , сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Если согласованно занумеровать все m -элементные подмножества и все $(n - m)$ -элементные подмножества в множестве $\{1, \dots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и \hat{J} имели одинаковые номера, то соотношения Лапласа можно записать одним равенством

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} \hat{A}^t = \det A \cdot E \quad (8-22)$$

на матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, в котором (IJ) -тый элемент матрицы $\Lambda^{n-m} \hat{A}^t$ равен

$$\hat{a}_{JI} = (-1)^{|J|+|I|} a_{\hat{J}I}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 8.14. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_K a_{JK} \hat{a}_{IK} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \quad (8-23)$$

ПРИМЕР 8.9 (соотношение ПЛЮККЕРА)

Рассмотрим 2×4 матрицу $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{2 \times 4}(\mathbb{K})$ и обозначим через A_{ij} её 2×2 минор, образованный i -м и j -м столбцами. Шесть чисел A_{ij} связаны квадратичным соотношением Пюккера

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0, \quad (8-24)$$

¹С геометрической точки зрения эта формула вычисляет объём n -мерного параллелепипеда через объёмы его m -мерных и $(n - m)$ -мерных граней.

которое получается если разложить по первым двум строкам равный нулю определитель 4×4 матрицы $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$.

Упражнение 8.15. Убедитесь в этом и для любых шести чисел A_{ij} , удовлетворяющих соотношению (8-24), явно предъявите 2×4 матрицу A с 2×2 минорами A_{ij} .

Это согласуется с [сл. 15.2](#) на стр. 198: если обозначить через e_1, e_2, e_3, e_4 стандартный базис координатного пространства \mathbb{k}^4 , то квадратичная форма $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} A_{ij} \cdot e_i \wedge e_j$ имеет квадрат $\omega \wedge \omega = 2(A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23}) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, и по [сл. 15.2](#) соотношение (8-24) означает, что $\omega = a_1 \wedge a_2$ для некоторых векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 + a_{14}e_4 \\ a_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 + a_{24}e_4, \end{aligned}$$

но $a_1 \wedge a_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix} \cdot e_i \wedge e_j$ имеет коэффициентами как раз 2×2 миноры 2×4 матрицы, составленной из координат векторов a_1 и a_2 .

Пример 8.10 (определитель пучка матриц)

Линейная оболочка пары непропорциональных квадратных матриц $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{k})$ называется *пучком матриц* и обозначается (AB) . Таким образом, всякая матрица из пучка (AB) имеет вид $t_0A + t_1B$, где $t_0, t_1 \in \mathbb{k}$, а её определитель $\det(t_0A + t_1B)$ является однородным многочленом степени n от t_0, t_1 . Покажем, что коэффициент этого многочлена при $t_0^k t_1^{n-k}$ равен

$$\sum_{IJ} a_{IJ} \hat{b}_{IJ}, \quad (8-25)$$

где суммирование идёт по всем k -элементным подмножествам $I, J \subset \{1, \dots, n\}$.

Для этого обозначим через a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n столбцы матриц A и B , понимаемые как векторы координатного пространства \mathbb{k}^n со стандартным базисом e_1, \dots, e_n . Тогда

$$(t_0a_1 + t_1b_1) \wedge \dots \wedge (t_0a_n + t_1b_n) = \det(t_0A + t_1B) e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Моном $t_0^k t_1^{n-k}$ возникает в левой части при выборе первого слагаемого в каких-нибудь k из перемножаемых скобок и второго слагаемого в остальных $n - k$ скобках. Если обозначить номера этих k скобок через $I = (i_1, \dots, i_k)$ то вклад в коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ будет равен

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} a_I \wedge b_I &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \left(\sum_J e_J a_{JI} \right) \wedge \left(\sum_K e_K b_{KI} \right) = \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + |I|} \sum_{JK} e_J \wedge e_K \cdot a_{JI} b_{KI} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n \cdot \sum_J (-1)^{|I| + |J|} a_{JI} b_{JI}. \end{aligned}$$

Полный коэффициент при $t_0^k t_1^{n-k}$ в $\det(t_0A + t_1B)$ получается суммированием таких подобных слагаемых по всем наборам I из k возрастающих номеров, что и даёт формулу (8-25). В обозначениях из (8-22) её можно переписать в виде

$$\det(t_0A + t_1B) = \sum_{k=0}^n \text{tr} \left(\Lambda^k A \cdot \Lambda^{n-k} \hat{B}^t \right) t_0^k t_1^{n-k}. \quad (8-26)$$

§9. Линейные операторы

9.1. Пространство с оператором. Пусть \mathbb{k} — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над \mathbb{k} , а $F : V \rightarrow V$ — линейный эндоморфизм пространства V . Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *линейным оператором* над \mathbb{k} . Линейное отображение $C : U_1 \rightarrow U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$, т. е. диаграмма линейных отображений

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \\ F_1 \uparrow & & \uparrow F_2 \\ U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \end{array}$$

коммутативна¹. Если при этом отображение C биективно, операторы F_1 и F_2 называются *изоморфными* или *подобными*. Таким образом, подобие операторов F_1 и F_2 означает равенство

$$F_2 = C F_1 C^{-1}$$

для некоторого обратимого линейного отображения C . В этой ситуации также говорят, что F_2 получается из F_1 *сопряжением* посредством C .

Подпространство $U \subset V$ называется *F-инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этой ситуации пара $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ является гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

УПРАЖНЕНИЕ 9.1. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ неприводим.

Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *разложимым*, если пространство V можно разложить в прямую сумму двух ненулевых F -инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Если оператор неприводим, то он и неразложим. Обратное неверно:

УПРАЖНЕНИЕ 9.2. Покажите, что при всех $n \geq 1$ оператор умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем \mathbb{k} имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности, и они могут быть приводимы. Каждое конечномерное разложимое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых инвариантных подпространств.

УПРАЖНЕНИЕ 9.3. Покажите, что двойственные операторы² $F : V \rightarrow V$, $F^* : V^* \rightarrow V^*$ либо оба разложимы, либо оба неразложимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. (КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ С ОПЕРАТОРОМ) Над произвольным полем \mathbb{k} каждое конечномерное неразложимое пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в кольце вычетов $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, где $p \in \mathbb{k}[t]$ — неприводимый приведённый многочлен, а $m \in \mathbb{N}$, и все такие пространства не изоморфны друг другу при разных p или m . Пространство $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ неприводимо если и только если $m = 1$. Произвольное пространство с оператором изоморфно оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме фактор колец вида³

¹Диаграмма отображений между множествами называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

²См. п. 7.3 на стр. 89.

³В сумме допускаются повторяющиеся слагаемые.

$\mathbb{k}[t]/(p^m)$, и такое представление пространства с оператором единственно с точностью до перестановки слагаемых. Доказательства всех этих фактов обычно даются в курсе алгебры¹. Мы не собираемся использовать данную классификацию в полной общности, а все её следствия, которые нам понадобятся, будут независимо установлены нами по мере необходимости.

9.1.1. Характеристический многочлен. Пусть оператор $F : V \rightarrow V$ имеет матрицу F_v в каком либо базисе v пространства V . Её характеристический многочлен $\det(tE - F_v)$ называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается $\chi_F(t)$. Он не зависит от выбора базиса, в котором пишется матрица оператора, поскольку в любом другом базисе $w = v C_{vw}$ матрица² $F_w = C_{wv} F_v C_{vw} = C_{wv} F_v C_{wv}^{-1}$ подобна матрице F_v , а любые две подобные матрицы F и $G = CFC^{-1}$ имеют равные характеристические многочлены:

$$\begin{aligned}\chi_G(t) &= \det(tE - G) = \det(tCEC^{-1} - CFC^{-1}) = \det(C(tE - F)C^{-1}) = \\ &= \det C \cdot \det(tE - F) \cdot \det^{-1} C = \det(tE - F) = \chi_F(t).\end{aligned}$$

В частности, подобные операторы тоже имеют равные характеристические многочлены.

УПРАЖНЕНИЕ 9.4. Для любого многочлена $f \in \mathbb{k}[t]$ со старшим коэффициентом 1 покажите, что характеристический многочлен оператора умножения на класс $[t]$ в фактор кольце $\mathbb{k}[t]/(f)$ равен f .

ПРИМЕР 9.1 (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕН РАЗЛОЖИМОГО ОПЕРАТОРА)

Пусть пространство с оператором (F, V) является прямой суммой пространств с операторами (G, U) и (H, W) . Тогда $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$, поскольку в любом базисе, согласованном с разложением $V = U \oplus W$, матрица оператора $tE - F$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$, и результат вытекает из [упр. 8.13](#) на стр. 114.

9.1.2. Аннулирующие многочлены. Линейный оператор $F : V \rightarrow V$, действующий в векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} , можно подставить вместо переменной t в любой многочлен $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in \mathbb{k}[t]$. Результатом такой подстановки является линейный оператор $f(F) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 \text{Id}_V + a_1 F + \dots + a_m F^m \in \text{End}(V)$. Подстановка фиксированного оператора $F \in \text{End } V$ во всевозможные многочлены задаёт гомоморфизм \mathbb{k} -алгебр

$$\text{ev}_F : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(V), \quad f \mapsto f(F),$$

который называется *гомоморфизмом вычисления* многочленов на операторе F . Многочлены, лежащие в ядре этого гомоморфизма, т. е. такие $f \in \mathbb{k}[t]$, что $f(F) = 0$, называются *аннулирующими* оператор F . Если $\dim V < \infty$, алгебра $\text{End } V$ конечномерна как векторное пространство над \mathbb{k} , а алгебра $\mathbb{k}[t]$ бесконечномерна. Поэтому $\ker \text{ev}_F \neq 0$, т. е. любой оператор на конечномерном пространстве аннулируется некоторым ненулевым многочленом. В силу тождества Гамильтона – Кэли³ примером такого многочлена является характеристический многочлен $\chi_F(t)$.

¹Например, см. лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_09.pdf и http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_10.pdf моего курса алгебры <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/list.html>.

²См. формулу (5-15) на стр. 66.

³См. [n° 8.2.1](#) на стр. 104.

Поскольку все идеалы¹ кольца $\mathbb{k}[t]$ главные², идеал $\ker \text{ev}_F = (\mu_F)$ состоит из всех многочленов, делящихся на некоторый многочлен μ_F , который однозначно задаётся как ненулевой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что $\mu_F(F) = 0$ в $\text{End}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.5 (ПО АЛГЕБРЕ). Убедитесь в этом.

Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора F .

ПРИМЕР 9.2 (ОТЫСКИВАНИЕ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА)

Для каждого вектора $v \in V$ и линейного оператора $F : V \rightarrow V$ существует такой приведённый многочлен наименьшей степени от оператора F , который аннулирует вектор v . Чтобы написать его явно, надо найти наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что вектор $F^k v$ линейно выражается через векторы $v, Fv, \dots, F^{k-1}v$. Если это выражение имеет вид $F^k v = \mu_1 F^{k-1}v + \dots + \mu_{k-1} Fv + \mu_k v$, то искомый многочлен $\mu_{v,F}(t) = t^k - \mu_1 t^{k-1} - \dots - \mu_{k-1} t - \mu_k$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.6. Убедитесь, что любой аннулирующий оператор F многочлен делится на все многочлены $\mu_{v,F}$, где $v \in V$.

Таким образом, минимальный многочлен μ_F оператора F представляет собою наименьшее общее кратное многочленов $\mu_{v,F}$ по всем $v \in V$. Очевидно, что для отыскания этого наименьшего общего кратного достаточно ограничиться только векторами v из некоторого базиса e_1, \dots, e_n пространства V .

УПРАЖНЕНИЕ 9.7. Убедитесь в этом.

Вычислим, к примеру, минимальный многочлен оператора $F : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, заданного в стандартном базисе e_1, \dots, e_4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Векторы³

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Fe_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F^2 e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Чтобы выяснить, выражается ли через них вектор⁴

$$F^3 e_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix},$$

¹См. начало лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-05.pdf>.

²См. Предложение 5.1 на стр. 74 той же лекции.

³Векторы Fe_1 и $F^2 e_1$ суть первые столбцы матриц A и A^2 .

⁴Это первый столбец матрицы A^3 .

необходимо решить неоднородную систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса преобразуем эту матрицу к приведённому ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

и получаем решение $(-4, 4, 1)$, т. е. $F^3 e_1 = -4e_1 + 4Fe_1 + F^2 e_1$. Таким образом, минимальный многочлен от оператора F , аннулирующий вектор e_1 , равен $F^3 - F^2 - 4F + 4E$. Вычисляя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 9 & 9 \\ 16 & 24 & -16 & -16 \\ 7 & 14 & -6 & -7 \\ 9 & 9 & -9 & -8 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $A^3 - A^2 - 4A + 4E = 0$. Тем самым, $\mu_F = t^3 - t^2 - 4t + 4$.

ТЕОРЕМА 9.1 (ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на произвольном¹ векторном пространстве V над любым полем \mathbb{K} аннулируется многочленом $q \in \mathbb{K}[t]$, который раскладывается в $\mathbb{K}[t]$ в произведение $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \mathbb{K}[t]$. Положим $Q_j = q/q_j$. Тогда $\ker q_j(F) = \operatorname{im} Q_j(F)$ для каждого j , все эти подпространства F -инвариантны, и пространство V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеем включение $\operatorname{im} Q_i(F) \subset \ker q_i(F)$. Поэтому достаточно показать, что V линейно порождается образами операторов $Q_i(F)$, а сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая², т. е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$ для всех i . Первое вытекает из того, что $\operatorname{nod}(Q_1, \dots, Q_r) = 1$, а значит, существуют такие $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{K}[t]$, что $1 = \sum Q_j(t)h_j(t)$. Подставляя в это равенство $t = F$ и применяя обе части к произвольному вектору $v \in V$, получаем разложение $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \operatorname{im} Q_j(F)$. Второе вытекает из взаимной простоты q_i и Q_i , в силу которой существуют такие $g, h \in \mathbb{K}[t]$, что $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$. Подставим сюда $t = F$ и применим обе части полученного равенства $E = g(F)q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$ к произвольному вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F)$. Так как $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$ при всех $j \neq i$, получим $v = Ev = g(F)q_i(F)v + h(F)Q_i(F)v = 0$, что и требовалось. \square

ПРИМЕР 9.3 (ПРОЕКТОРЫ)

Линейный оператор $\pi : V \rightarrow V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t - 1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По **теор. 9.1** образ любого идемпотента $\pi : V \rightarrow V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов: $\operatorname{im} \pi = \ker(\pi - \operatorname{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$, и всё пространство распадается в прямую сумму

¹Возможно даже бесконечномерном.

²См. **опр. 4.1** и **предл. 4.1** на стр. 52.

$V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$. Тем самым, оператор π проектирует V на $\operatorname{im} \pi$ вдоль $\ker \pi$. Отметим, что оператор $\operatorname{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker \pi$ вдоль $\operatorname{im} \pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов $\pi_1 = \pi_1^2$ и $\pi_2 = \pi_2^2$ пространства V , связанных соотношениями $\pi_1 + \pi_2 = 1$ и $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1 = 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.8. Выведите из этих соотношений, что $\ker \pi_1 = \operatorname{im} \pi_2$ и $\operatorname{im} \pi_1 = \ker \pi_2$.

ПРИМЕР 9.4 (инволюции)

Линейный оператор $\sigma : V \rightarrow V$ называется *инволюцией*, если $\sigma^2 = \operatorname{Id}_V$. Тожественная инволюция $\sigma = \operatorname{Id}_V$ называется *тривиальной*. Если $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, то аннулирующий инволюцию σ многочлен $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$ является произведением различных линейных множителей. Поэтому над таким полем $V = V_+ \oplus V_-$, где

$$\begin{aligned} V_+ &= \ker(\sigma - E) = \operatorname{im}(\sigma + \operatorname{Id}_V) = \{v \in V \mid \sigma v = v\} \\ V_- &= \ker(\sigma + E) = \operatorname{im}(\sigma - \operatorname{Id}_V) = \{v \in V \mid \sigma v = -v\}. \end{aligned}$$

Произвольный вектор $v = v_+ + v_-$ пространства V имеет в этом разложении компоненты

$$v_+ = \frac{v + \sigma v}{2} \in V_+ \quad \text{и} \quad v_- = \frac{v - \sigma v}{2} \in V_-.$$

9.2. Собственные подпространства. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора $F : V \rightarrow V$ если $F(v) = \lambda v$ для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{K}$. Это число называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора F на собственном векторе v . Собственные векторы с заданным собственным числом λ образуют вместе с нулевым вектором F -инвариантное подпространство

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F), \quad (9-1)$$

которое называется *собственным подпространством* оператора F . Поскольку $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$ если и только если $\det(\lambda \operatorname{Id}_V - F) = \chi_F(\lambda) = 0$, подпространство (9-1) отлично от нуля тогда и только тогда, когда число λ является корнем характеристического многочлена оператора F . Таким образом, множество собственных чисел оператора F есть множество корней многочлена χ_F в поле \mathbb{K} . Оно называется *спектром* оператора F в поле \mathbb{K} и обозначается $\operatorname{Spec}(F)$ или $\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(F)$, если важно явно указать поле. Так как $\deg \chi_F = \dim V$, количество различных собственных чисел не превышает размерности пространства: $|\operatorname{Spec}(F)| \leq \dim V$. Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} спектр всегда не пуст.

Предложение 9.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} каждый линейный оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. \square

Предложение 9.2

Множество корней любого многочлена, аннулирующего оператор F , содержит $\operatorname{Spec} F$.

Доказательство. Ограничение оператора F на собственное подпространство V_λ является гомотетией с коэффициентом λ . Поэтому для любого многочлена $g \in \mathbb{K}[t]$ оператор $g(F)$ действует на V_λ как гомотетия с коэффициентом $g(\lambda)$. Если $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)|_{V_\lambda} \neq 0$. \square

Предложение 9.3

Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы e_1, \dots, e_m имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим зависимость, содержащую минимально возможное число векторов, и перенумеруем их так, чтобы это были e_1, \dots, e_k . Тогда $k \geq 2$ и

$$e_k = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{k-1} e_{k-1},$$

где все $x_i \in \mathbb{K}$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k , получаем более короткую линейную зависимость $0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_2(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot e_2 + \dots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$ с ненулевыми коэффициентами. Противоречие. \square

Следствие 9.1

Сумма собственных подпространств с разными собственными числами является прямой. \square

Следствие 9.2

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda \leq \dim V.$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.9. Приведите пример оператора, для которого это неравенство строгое.

9.2.1. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \rightarrow V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F , и элементы диагональной матрицы являются собственными значениями оператора F , причём каждое число $\lambda \in \text{Spec } F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ . Таким образом, с точностью до перестановки диагональных элементов диагональная матрица диагонализуемого оператора F не зависит от выбора базиса, в котором оператор F имеет диагональную матрицу.

Предложение 9.4

Следующие свойства оператора $F : V \rightarrow V$ эквивалентны:

- 1) F диагонализуем
- 2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F
- 3) характеристический многочлен $\chi_F(t)$ полностью раскладывается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, и кратность каждого корня λ многочлена χ_F равна размерности собственного подпространства V_λ
- 4) оператор F аннулируется многочленом, который полностью раскладывается в $\mathbb{K}[t]$ на попарно различные линейные множители.

Доказательство. Эквивалентность свойств (1) и (2), а также импликация (1) \Rightarrow (3) очевидны. Покажем, что (3) \Rightarrow (1). Из (3) вытекает, что $\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} V_\lambda$ в силу [сл. 9.1](#). Теперь покажем, что (3) \Rightarrow (4). Так как каждое собственное

подпространство V_λ аннулируется оператором $(F - \lambda \text{Id}_V)$, всё пространство V аннулируется композицией $\prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (F - \lambda \text{Id}_V)$, т. е. оператор F аннулируется многочленом $\prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)$, что и утверждается в (4). Импликация $(4) \Rightarrow (1)$ следует из теоремы разложения¹: если оператор F аннулируется произведением $\prod_{\mu} (t - \mu)$, в котором μ пробегает без повторений некоторое конечное подмножество в \mathbb{k} , то V является прямой суммой тех подпространств $\ker(F - \mu \text{Id})$, которые отличны от нуля, т. е. собственных подпространств оператора F . \square

Следствие 9.3

Если оператор $F : V \rightarrow V$ диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (4) [предл. 9.4](#). \square

9.2.2. Перестановочные операторы. Если линейные операторы $F, G : V \rightarrow V$ на векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{k} коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя, поскольку

$$\begin{aligned} f(F)v = 0 &\Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0 \\ v = f(F)w &\Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$ инвариантны относительно любого перестановочного с F оператора G .

Предложение 9.5

В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем \mathbb{k} любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов можно одновременно диагонализовать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескаларный оператор F , то над замкнутым полем у него есть ненулевое собственное подпространство строго меньшей, чем V размерности, а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F останутся диагонализуемы по [сл. 9.3](#). Применяя к собственному подпространству (а в диагонализуемом случае — ко всем собственным подпространствам) оператора F предположение индукции, получаем требуемое. \square

Пример 9.5 (конечные группы операторов)

Если m линейных операторов на конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} > m$ образуют группу G , то каждый из этих операторов аннулируется многочленом² $t^m - 1$, который раскладывается в произведение m попарно различных

¹См. [теор. 9.1](#) на стр. 119.

²Поскольку порядок любого элемента конечной группы делит порядок этой группы, см. раздел 11.1.1 на стр. 149 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_11.pdf.

Если $\dim V > 1$ и $F \neq 0$, то подпространство $\ker F \subset V$ отлично от нуля и от V . Поэтому фактор $W = V / \ker F$ является ненулевым векторным пространством размерности строго меньшей, чем V . Оператор F корректно факторизуется до нильпотентного оператора

$$F_W : W \rightarrow W, \quad [v] \mapsto [Fv].$$

УПРАЖНЕНИЕ 9.11. Убедитесь в этом.

По предположению индукции, в пространстве V существуют векторы w_1, \dots, w_m , классы которых $[w_1], \dots, [w_m]$ по модулю $\ker F$ образуют жорданов базис оператора F_W . Образы этих векторов $F(w_1), \dots, F(w_m)$ линейно независимы в V , поскольку равенство

$$0 = \lambda_1 F(w_1) + \dots + \lambda_m F(w_m) = F(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m)$$

означает, что $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m \in \ker F$, т. е. $\lambda_1 [w_1] + \dots + \lambda_m [w_m] = [0]$ в $W = V / \ker F$, что возможно лишь если все $\lambda_i = 0$. Пусть классы $[w_1], \dots, [w_s]$ составляют первый столбец диаграммы (9-2) для оператора F_W . Тогда векторы $F(w_1), \dots, F(w_s)$ лежат в $\ker F$ и линейно независимы. Дополняя их векторами u_1, \dots, u_r до базиса в $\ker F$, получаем жорданов базис

$$u_1, \dots, u_r, F(w_1), \dots, F(w_s), w_1, \dots, w_m$$

для исходного оператора $F : V \rightarrow V$.

УПРАЖНЕНИЕ 9.12. Убедитесь в этом.

Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что жордановы базисные векторы, стоящие в первых j столбцах диаграммы (9-2) для оператора F , составляют базис в $\ker F^j$. \square

9.4. Корневое разложение и функции от операторов. Для заданных числа $\lambda \in \mathbb{K}$ и линейного оператора $F : V \rightarrow V$ множество

$$K_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id} - F)^m \quad (9-4)$$

называется *корневым подпространством* оператора F .

УПРАЖНЕНИЕ 9.13. Убедитесь, что $K_\lambda \subset V$ действительно является векторным подпространством и отлично от нуля если и только если $\lambda \in \text{Spec } F$.

Для каждого $\lambda \in \text{Spec } F$ имеется включение $V_\lambda \subseteq K_\lambda$, которое может быть как строгим, так и равенством. Из тождества Гамильтона–Кэли¹ и теоремы разложения² вытекает

СЛЕДСТВИЕ 9.4 (ТЕОРЕМА О КОРНЕВОМ РАЗЛОЖЕНИИ)

Пусть характеристический многочлен $\chi_F(t)$ линейного оператора $F : V \rightarrow V$ на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{K} полностью разлагается в $\mathbb{K}[t]$ на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$. Тогда $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$ и $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$ для всех $\lambda \in \text{Spec } F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ удовлетворяет условиям теор. 9.1 на стр. 119 для $q_i = (t - \lambda)^{m_\lambda}$, откуда $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}$. \square

¹См. п° 8.2.1 на стр. 104.

²См. теор. 9.1 на стр. 119.

9.4.1. Функции от операторов. Пусть линейный оператор F действует на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} , которое мы обозначим через \mathbb{K} . Всюду далее мы предполагаем, что F аннулируется многочленом $\alpha(t) \in \mathbb{K}[t]$, который полностью разлагается над \mathbb{K} на линейные множители, т. е.

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} (t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_s)^{m_s}, \quad (9-5)$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и все $m_i \in \mathbb{N}$. Мы полагаем $m = \deg \alpha = m_1 + \dots + m_s$. Алгебра \mathcal{A} , состоящая из функций $U \rightarrow \mathbb{K}$, заданных на каком-нибудь подмножестве $U \subset \mathbb{K}$, содержащем все корни многочлена (9-5), называется *алгебраически вычислимой* на операторе F , если $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ и для каждого корня λ кратности k многочлена (9-5) все функции $f \in \mathcal{A}$ определены в точке $\lambda \in \mathbb{K}$ вместе с первыми $k - 1$ производными $f^{(v)} = \frac{d^v f}{dt^v}$ и допускают разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t - \lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t - \lambda)^{k-1} + g_\lambda(t) \cdot (t - \lambda)^k, \quad (9-6)$$

где функция $g_\lambda(t)$ тоже лежит в алгебре \mathcal{A} .

Если характеристический многочлен $\chi_F(t)$ полностью разлагается в $\mathbb{K}[t]$ на линейные множители, можно положить $\alpha(t) = \chi_F(t)$. Алгебра \mathcal{A} всех функций, определённых в ε -окрестности каждого собственного числа $\lambda \in \text{Spec } F$ и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от $(t - \lambda)$, алгебраически вычислима на операторе F . Подалгебра в \mathcal{A} , состоящая из всех аналитических функций¹ $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, алгебраически вычислима на всех линейных операторах $F \in \text{End}(V)$, характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$.

ТЕОРЕМА 9.3

В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе $F : V \rightarrow V$ алгебра функций \mathcal{A} допускает единственный такой гомоморфизм \mathbb{K} -алгебр $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$, что $\text{ev}_F(p) = p(F)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2 (ГОМОМОРФИЗМ ВЫЧИСЛЕНИЯ)

Гомоморфизм $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \text{End } V$ из теор. 9.3 называется *вычислением* функций $f \in \mathcal{A}$ на операторе F . Линейный оператор $\text{ev}_F(f) : V \rightarrow V$, в который переходит функция $f \in \mathcal{A}$ при гомоморфизме вычисления, обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F* .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. (КАК ОТНОСИТЬСЯ К ФУНКЦИЯМ ОТ ОПЕРАТОРОВ) Из теор. 9.3 вытекает, что для любого оператора $F \in \text{End}(V)$, характеристический многочлен которого полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, определены такие аналитические функции, как e^F или $\sin F$, а если $F \in \text{GL}(V)$, то и такие аналитические вне нуля функции, как $\ln F$ или \sqrt{F} , причём алгебраические свойства соответствующих операторов $f(F)$ в алгебре $\text{End } V$ будут точно такими же, как у числовых функций e^t , $\sin t$, $\ln t$ и \sqrt{t} . В частности, все эти функции от оператора F коммутируют друг с другом и с F , а также удовлетворяют соотношениям вроде $\ln F^2 = 2 \ln F$ и $\sqrt{F} \sqrt{F} = F$. Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, для извлечения корней из невырожденных операторов.

¹Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в \mathbb{K} степенными рядами.

Доказательство **теор. 9.3**. Пусть оператор F аннулируется многочленом $\alpha(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m_{\lambda}}$, где $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_r$ пробегает все различные корни этого многочлена, и пусть искомым гомоморфизм $\text{ev}_F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ существует. По теореме о разложении¹ пространство V является прямой суммой F -инвариантных подпространств $K_{\lambda} = \ker(F - \lambda \text{Id})^{m_{\lambda}}$, и согласно формуле (9-6) оператор

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{f^{(m_{\lambda}-1)}(\lambda)}{(m_{\lambda}-1)!} (F - \lambda E)^{m_{\lambda}-1} + g_{\lambda}(F)(F - \lambda E)^{m_{\lambda}} \quad (9-7)$$

действует на каждом подпространстве K_{λ} точно так же, как результат подстановки оператора F в многочлен

$$j_{\lambda}^{m_{\lambda}-1} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(m_{\lambda}-1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{m_{\lambda}-1} / (m_{\lambda} - 1)!,$$

класс которого в фактор кольце $\mathbb{K}[t] / ((t - \lambda)^{m_{\lambda}})$ называется $(m_{\lambda} - 1)$ -й струёй функции $f \in \mathcal{A}$ в точке $\lambda \in \mathbb{K}$. По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени меньше $\deg \alpha(t)$, что

$$p_{f(F)}(t) \equiv j_{\lambda}^{m_{\lambda}-1} f(t) \pmod{\alpha(t)}$$

для всех корней λ многочлена α . Так как операторы $p_{f(F)}(F)$ и $f(F)$ одинаково действуют на каждом подпространстве K_{λ} и $V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}$, мы имеем равенство $f(F) = p_{f(F)}(F)$. Поскольку многочлен $p_{f(F)}$ однозначно определяется по f и $\alpha(t)$, гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ действительно является гомоморфизмом \mathbb{K} -алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$J : \mathcal{A} \rightarrow \frac{\mathbb{K}[t]}{((t - \lambda_1)^{m_1})} \times \dots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{((t - \lambda_r)^{m_r})} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)} \quad (9-8)$$

$$f \mapsto (j_{\lambda_1}^{m_1-1} f, \dots, j_{\lambda_r}^{m_r-1} f),$$

сопоставляющее функции $f \in \mathcal{A}$ набор её струй² во всех корнях многочлена α , является гомоморфизмом \mathbb{K} -алгебр, т. е. \mathbb{K} -линейно и удовлетворяет равенству $J(fg) = J(f)J(g)$. Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи j_{λ}^{m-1} отдельно. Используя правило Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} f^{(v)} g^{(k-v)}$, получаем следующие равенства по модулю $(t - \lambda)^m$:

$$\begin{aligned} j_{\lambda}^{m-1}(fg) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - \lambda)^k}{k!} \sum_{v+\mu=k} \frac{k!}{v!\mu!} f^{(v)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{v+\mu=k} \frac{f^{(v)}(\lambda)}{v!} (t - \lambda)^v \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t - \lambda)^{\mu} \equiv j_{\lambda}^{m-1}(f) j_{\lambda}^{m-1}(g). \end{aligned}$$

Отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ является композицией гомоморфизма (9-8) с гомоморфизмом вычисления многочленов $\text{ev}_F : \mathbb{K}[t] \rightarrow \text{End } V, p \mapsto p(F)$, который корректно пропускается через фактор $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$, так как $\alpha(F) = 0$. \square

¹См. теор. 9.1 на стр. 119.

²Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно фактору кольца $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3 (ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН)

Многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, принимающий на операторе F то же самое значение, что и функция $f \in \mathcal{A}$, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. Он однозначно определяется тем, что в каждом корне λ кратности m аннулирующего оператора f многочлена α многочлен $p_{f(F)}(t)$ и первые его $m - 1$ производных принимают те же значения, что функция f и её производные, т. е. многочлен $p_{f(F)}(t)$ решает интерполяционную задачу с кратными узлами из [прим. 4.7](#) на стр. 56. Если $\deg \alpha = n$, отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена $p_{f(F)}$ сводится к решению системы из n линейных уравнений на n неизвестных.

ПРИМЕР 9.6 (СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ)

Задача отыскания n -го члена a_n числовой последовательности $z: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$, $n \mapsto z_n$, решающей рекуррентное уравнение $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$ с начальным условием $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, сводится вычислению n -той степени *матрицы сдвига*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из m последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}),$$

так что член a_n оказывается равным первой координате вектора

$$(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n.$$

Матрица $S^n = p_{S^n}(S)$ является результатом подстановки матрицы S в интерполяционный многочлен $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$ для вычисления на матрице S *степенной функции* $f(t) = t^n$. Обратите внимание, что $\deg p_{S^n} < m$, и коэффициенты многочлена p_{S^n} находятся решением системы из m линейных уравнений на m неизвестных.

Например, для уравнения Фибоначчи $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ матрица сдвига

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции t^n на этой матрице линеен. Записывая его в виде $p_{S^n}(t) = at + b$ с неопределёнными коэффициентами a и b , получаем

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

В частности, n -тое число Фибоначчи, решающее уравнение Фибоначчи с начальным условием $(a_0, a_1) = (0, 1)$, равно первой координате вектора $(a_n, a_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$. Матрица S аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Функция t^n принимает на них значения λ_{\pm}^n . Коэффициенты a и b находятся из системы

$$\begin{cases} a\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\lambda_- + b = \lambda_-^n, \end{cases}$$

и по правилу Крамера первый из них $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n) / (\lambda_+ - \lambda_-)$. Тем самым,

$$a_n = a = \frac{\left((1 + \sqrt{5})/2\right)^n - \left((1 - \sqrt{5})/2\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

9.5. Разложение Жордана. Всюду в этом разделе речь идёт об операторах на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} .

ТЕОРЕМА 9.4 (РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА)

Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} существует единственная пара таких операторов F_d и F_n , что F_n нильпотентен, F_d диагонализуем, $F_d F_n = F_n F_d$ и $F = F_d + F_n$. Кроме того, операторы F_d и F_n являются многочленами от оператора F с нулевыми свободными членами.

Доказательство. Пусть $\text{Spes } F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В силу алгебраической замкнутости поля \mathbb{k} , характеристический многочлен оператора F полностью разлагается на линейные множители: $\chi_F(t) = \prod_i (t - \lambda_i)^{m_i}$, а пространство V является прямой суммой корневых подпространств: $V = \bigoplus_i K_i$, где $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$. Так как многочлены $(t - \lambda_i)^{m_i}$ попарно взаимно просты, по китайской теореме об остатках существуют такие многочлены $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$, что

$$f_i(t) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}} \\ 0 \pmod{(t - \lambda_j)^{m_j}} \text{ при } j \neq i. \end{cases}$$

Если $\lambda_i \neq 0$, то многочлен t обратим по модулю $(t - \lambda_i)^{m_i}$. Поэтому найдётся такой многочлен $g_i(t)$, что $t \cdot g_i(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$. Если $\lambda_i = 0$, то положим $g_i(t) = 0$. Тогда при каждом i многочлен $p_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t \sum_{j=1}^r g_j(t) f_j(t) \equiv \lambda_i \pmod{(t - \lambda_i)^{m_i}}$ и не имеет свободного члена. Из этих сравнений вытекает, что оператор $F_d \stackrel{\text{def}}{=} p_s(F)$ действует на каждом корневом подпространстве $K_i = \ker(F - \lambda_i \text{Id})^{m_i}$ как умножение на λ_i и, стало быть, диагонализуем. Оператор $F_n \stackrel{\text{def}}{=} F - F_d$ действует на K_i как $F - \lambda_i \text{Id}$ и, тем самым, нильпотентен. Будучи многочленами от F , операторы F_d и F_n перестановочны между собою и с F . Это доказывает существование операторов F_d и F_n с требуемыми свойствами, включая последнее утверждение предложения.

Докажем единственность. Пусть есть ещё одно разложение $F = F'_d + F'_n$, в котором F'_d диагонализуем, F'_n нильпотентен и $F'_d F'_n = F'_n F'_d$. Из последнего равенства вытекает, что F'_d и F'_n перестановочны с любым многочленом от $F = F'_d + F'_n$, в частности, с построенными выше F_d и F_n . Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_d переводится оператором F'_d в себя¹, причём F'_d диагонализуем² на каждом V_λ . Если бы оператор F'_d имел на V_λ собственный вектор с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то этот вектор был бы собственным для оператора

¹См. п. 9.2.2 на стр. 122.

²См. сл. 9.3 на стр. 122.

$F_n - F'_n = F_d - F'_d$ с собственным значением $\lambda - \mu \neq 0$, что невозможно, так как оператор $F_n - F'_n$ нильпотентен.

УПРАЖНЕНИЕ 9.14. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор F'_d действует на каждом собственном подпространстве V_λ оператора F_d как умножение на λ , откуда $F'_d = F_d$. Тогда и $F'_n = F - F'_d = F - F_d = F_n$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4

Операторы F_d и F_n из теор. 9.4 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора F .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. Поскольку операторы F_d и F_n являются многочленами от F , каждое F -инвариантное подпространство $U \subset V$ является инвариантным для F_d и F_n .

СЛЕДСТВИЕ 9.5 (ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА)

Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} существует такой базис, в котором матрица оператора F состоит из расположенных на главной диагонали квадратных блоков вида¹

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda E + J_m(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (9-9)$$

где $\lambda \in \text{Spec } F$, а $m \in \mathbb{N}$ — размер блока, а все остальные её элементы нулевые. С точностью до перестановки блоков, эта матрица не зависит от выбора базиса с таким свойством, и суммарный размер блоков с заданным $\lambda \in \text{Spec } F$ на диагонали равен кратности корня λ характеристического многочлена оператора F . Два оператора подобны если и только если их матрицы указанного вида отличаются друг от друга перестановкой блоков.

Доказательство. Ограничение оператора $F = F_d + F_n$ на корневое подпространство K_λ имеет вид $\lambda \text{Id} + F_n|_{K_\lambda}$. В н° 9.3 на стр. 123 мы видели, в пространстве K_λ имеется жорданов базис, в котором матрица нильпотентного оператора $F_n|_{K_\lambda} : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ состоит из блоков вида (9-9) с $\lambda = 0$, причём набор блоков не зависит от выбора жорданова базиса. Объединяя жордановы базисы корневых подпространств друг с другом, мы получаем требуемый базис в V . Единственность и последнее утверждение следствия вытекают из того, что в любом базисе, где матрица оператора F имеет указанный вид, операторы F_d и F_n имеют матрицы, получающиеся из матрицы F обнулением всех, соответственно, наддиагональных и диагональных элементов, а линейная оболочка базисных векторов, задействованных во всех клетках (9-9) с заданным $\lambda \in \text{Spec } F$, совпадает с корневым подпространством K_λ , и тем самым, эти векторы образуют жорданов базис ограничения $F_n|_{K_\lambda}$. \square

¹Ср. с форм. (9-3) на стр. 123.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5 (ЖОРДАНОВ БАЗИС)

Базисы пространства V , удовлетворяющие условиям [сл. 9.5](#), называются *жордановыми*, а матрица оператора F , о которой идёт речь в [сл. 9.5](#), называется *жордановой нормальной формой* этого оператора.

ПРИМЕР 9.7

Рассмотрим оператор F умножения на класс $[t]$ в кольце вычетов $\mathbb{K}[t]/((t-\lambda)^m)$. Поскольку $t = \lambda + (t - \lambda)$, нильпотентная составляющая F_n этого оператора представляет собою оператор умножения на класс $[t - \lambda]$, а диагонализуемая составляющая $F_d = \lambda \text{Id}$. Классы

$$[(t - \lambda)^{m-1}], [(t - \lambda)^{m-2}], \dots, [t - \lambda], [1] \in \mathbb{K}[t]/((t - \lambda)^m) \quad (9-10)$$

образуют жорданову цепочку нильпотентного оператора¹ F_n , и в базисе из этих классов оператор $F = \lambda \text{Id} + F_n$ записывается матрицей (9-9) размера $n \times n$. Из [сл. 9.5](#) вытекает, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} каждый линейный оператор на конечномерном векторном пространстве подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме конечного числа фактор колец вида $\mathbb{K}[t]/((t - \lambda)^m)$, где слагаемые могут повторяться, и жорданов базис для такого оператора является объединением классов (9-10), приходящих из каждого слагаемого этой прямой суммы. Это частный случай общей классификации пространств с операторами, упомянутой в [зам. 9.1](#) на стр. 116.

¹См. [опр. 9.1](#) на стр. 123.

§10. Евклидова геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства на поле \mathbb{R} , см. §3 на стр. 34. Евклидово скалярное произведение¹ векторов u и w обозначается через (u, w) или через $u \cdot w$. Напомню, что оно билинейно, симметрично и положительно в том смысле, что $(v, v) > 0$ для всех $v > 0$.

10.1. Ортонормальные базисы. Набор ненулевых векторов v_1, \dots, v_k в евклидовом пространстве называется *ортгональным*, если все его векторы попарно перпендикулярны друг другу, т. е. $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональный набор автоматически линейно независим, так как скалярно умножая на вектор v_i равенство

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0,$$

получаем $\lambda_i(v_i, v_i) = 0$, откуда все $\lambda_i = 0$.

Ортогональный набор векторов e_1, \dots, e_k называется *ортонормальным*, если все его векторы имеют длину 1, т. е. $(e_i, e_i) = 1$ при всех i . Такой набор автоматически образует базис в своей линейной оболочке, и разложение $v = \sum x_i e_i$ произвольного вектора $v \in \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ по этому базису имеет коэффициенты $x_i = (e_i, v)$, а скалярное произведение векторов $u = \sum x_i e_i$ и $w = \sum y_i e_i$ равно $(u, w) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Проверьте оба эти факта.

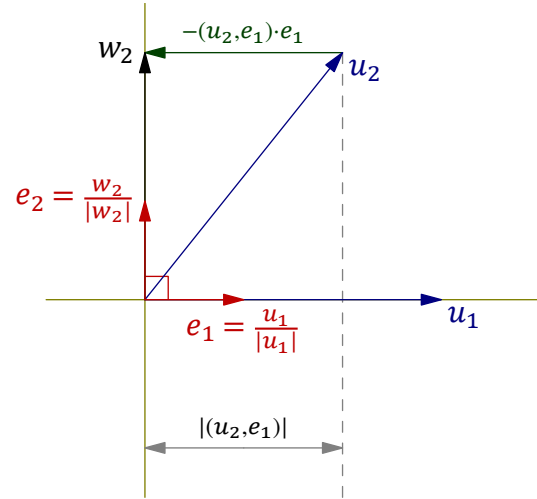


Рис. 10◊1. Второй шаг ортогонализации.

Предложение 10.1 (Ортогонализация Грама – Шмидта)

Пусть не все векторы u_1, \dots, u_m ненулевые. Тогда в их линейной оболочке существует такой ортонормальный базис e_1, \dots, e_n , что при каждом k линейная оболочка векторов u_1, \dots, u_k лежит в линейной оболочке векторов e_1, \dots, e_k .

Доказательство. Выбрасывая из набора нулевые векторы, будем считать, что все $u_i \neq 0$. В качестве первого вектора искомого базиса возьмём $e_1 = u_1 / |u_1|$. По построению $|e_1| = 1$ и u_1 лежит в одномерном пространстве, натянутом на e_1 . Допустим по индукции, что для векторов u_1, \dots, u_k уже построены такие ортонормальные векторы e_1, \dots, e_i , что $i \leq k$ и

$$\text{span}(e_1, \dots, e_i) = \text{span}(u_1, \dots, u_k). \quad (10-1)$$

Положим $w_{i+1} = u_{k+1} - \sum_{v=1}^i (u_{k+1}, e_v) \cdot e_v$, см. рис. 10◊1. Для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(w_{i+1}, e_j) = (u_{k+1}, e_j) - (u_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, т. е. вектор w_{i+1} ортогонален подпространству (10-1). Если $w_{i+1} = 0$, то вектор u_{k+1} лежит в подпространстве (10-1) и индуктивное предположение выполняется для наборов u_1, \dots, u_{k+1} и e_1, \dots, e_i . Если $w_{i+1} \neq 0$, полагаем $e_{i+1} = w_{i+1} / |w_{i+1}|$ и заключаем, что индуктивное предположение выполняется для наборов u_1, \dots, u_{k+1} и e_1, \dots, e_{i+1} . \square

¹См. опр. 3.1 на стр. 34.

СЛЕДСТВИЕ 10.1

В каждом конечномерном евклидовом пространстве имеется ортонормальный базис. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1

Описанный в доказательстве [предл. 10.1](#) способ построения ортонормального базиса в линейной оболочке заданных векторов называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

ПРИМЕР 10.1 (УРАВНЕНИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ)

Линейное неоднородное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$ на координаты x_1, \dots, x_n относительно ортонормального базиса n -мерного евклидова пространства V можно переписать как уравнение на неизвестный вектор $x \in V$

$$(a, x) = d, \quad (10-2)$$

в котором вектор $a \in V$ и число $d \in \mathbb{R}$ заданы. На геометрическом языке это уравнение гласит, что ортогональная проекция вектора x на вектор¹ a равна

$$x_a = a \cdot \frac{(a, x)}{(a, a)} = a \cdot \frac{d}{|a|^2} = \frac{d}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|}.$$

Концы векторов x с таким свойством замечают в аффинном пространстве $A(V)$ гиперплоскость, перпендикулярную вектору a и удалённую от нуля на расстояние $|d|/|a|$ вдоль вектора a , если $d > 0$, и в противоположную сторону, если $d < 0$ (см. [рис. 10◊2](#)).

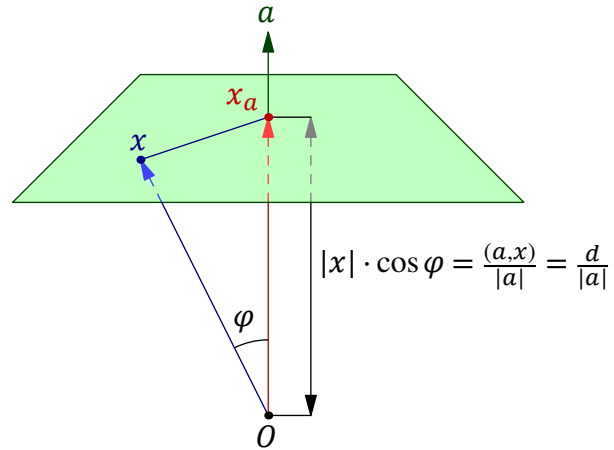


Рис. 10◊2. ГМТ $x : (a, x) = d$.

ПРИМЕР 10.2 (СРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР)

Покажем, что в евклидовом аффинном пространстве A^n ГМТ x , равноудалённых от двух заданных точек $p_0 \neq p_1$, представляет собою гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0 p_1}$ и проходящую через середину $(p_0 + p_1)/2$ отрезка $[p_0, p_1]$. Эта гиперплоскость называется *среди́нным перпендикуляром* к отрезку $[p_0, p_1]$. Равенство длин $|x, p_0| = |x, p_1|$ равносильно равенству скалярных произведений $(\overrightarrow{x p_0}, \overrightarrow{x p_0}) = (\overrightarrow{x p_1}, \overrightarrow{x p_1})$, т. е. равенству

$$(p_0 - x, p_0 - x) = (p_1 - x, p_1 - x),$$

где буквы p_0, p_1, x обозначают радиус-векторы соответствующих точек, выпущенные из произвольно выбранной начальной точки $O \in A^n$. После раскрытия скобок и сокращений, получаем $(p_0, p_0) - 2(p_0, x) = (p_1, p_1) - 2(p_1, x)$ или, что то же самое,

$$2(p_1 - p_0, x) = (p_1, p_1) - (p_0, p_0). \quad (10-3)$$

Это уравнение задаёт гиперплоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{p_0 p_1} = p_1 - p_0$ и проходящую через точку $(p_0 + p_1)/2$, ибо последняя, очевидно, равноудалена от p_0 и p_1 .

УПРАЖНЕНИЕ 10.2. Убедитесь прямым вычислением, что $x = (p_0 + p_1)/2$ удовлетворяет уравнению (10-3).

¹См. [предл. 3.1](#) и [опр. 3.2](#) на стр. 35.

10.2. Матрицы Грама. С любыми двумя наборами векторов евклидова пространства V

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k) \quad (10-4)$$

можно связать таблицу их попарных скалярных произведений — матрицу

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, w_j)) \in \text{Mat}_{m \times k}(\mathbb{R}), \quad (10-5)$$

в i -й строке и j -м столбце которой находится скалярное произведение (u_i, w_j) . Матрица (10-5) называется *матрицей Грама* наборов векторов (10-4). Если воспринимать эти наборы векторов как матрицы с элементами из V , а под произведением векторов $a, b \in V$ понимать их скалярное произведение $ab \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \in \mathbb{R}$, то матрица Грама будет описываться равенством

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w},$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ это строка из векторов, а \mathbf{u}^t — столбец, транспонированный к строке $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$. Если наборы векторов \mathbf{u} и \mathbf{w} линейно выражаются через какие-то другие наборы векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ и $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)$ по формулам $\mathbf{u} = \mathbf{e} \cdot C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{f} \cdot C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$, где $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} \in \text{Mat}_{r \times m}(\mathbb{R})$ и $C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} \in \text{Mat}_{s \times k}(\mathbb{R})$ некие матрицы, то матрица Грама $G_{\mathbf{u}\mathbf{w}}$ пересчитывается через матрицу Грама $G_{\mathbf{e}\mathbf{f}}$ по формуле¹

$$G_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}. \quad (10-6)$$

При $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ мы получаем таблицу умножения векторов из одного набора u_1, \dots, u_m . В этом случае обозначение $G_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ сокращается до $G_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} ((u_i, u_j)) \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{R})$, а правило преобразования (10-7) приобретает вид

$$G_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}. \quad (10-7)$$

Определитель $\Gamma_{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \det G_{\mathbf{u}}$ называется *определителем Грама* набора векторов \mathbf{u} . Ортонормальность набора векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_k)$ означает, что его матрица Грама $G_{\mathbf{e}} = E$, и в этом случае определитель Грама $\Gamma_{\mathbf{e}} = \det E = 1$.

Предложение 10.2

Для любого набора векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ выполняется неравенство $\Gamma_{\mathbf{u}} \geq 0$, которое обращается в равенство если и только если этот набор линейно зависим. Если набор \mathbf{u} линейно независим, а набор векторов $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ составляет ортонормальный базис в линейной оболочке $\text{span}(u_1, \dots, u_m)$, то $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$, где матрица $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ составлена из столбцов координат векторов u_j в ортонормальном базисе \mathbf{e} .

Доказательство. Если $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$ для некоторого ненулевого набора констант λ_i , то скалярно умножая это равенство на вектор u_ν , мы получаем при каждом ν равенство

$$\lambda_1 (u_\nu, u_1) + \lambda_2 (u_\nu, u_2) + \dots + \lambda_m (u_\nu, u_m) = 0,$$

означающее, что столбцы матрицы Грама $G_{\mathbf{u}} = ((u_i, u_j))$ линейно зависимы с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, откуда $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det G_{\mathbf{u}} = 0$. Если же векторы u_1, \dots, u_m линейно независимы, то их линейная оболочка m -мерна, и по [предл. 10.1](#) на стр. 131 в ней имеется ортонормальный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$. Тогда $G_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t G_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ согласно формуле (10-7), и $\Gamma_{\mathbf{u}} = \det^2 C_{\mathbf{e}\mathbf{u}} > 0$, т. к. матрица перехода $C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ обратима² и её определитель ненулевой³. \square

¹См. [упр. 5.3](#) на стр. 62 и предшествующее ему обсуждение.

²См. [предл. 5.2](#) на стр. 65.

³См. [сл. 8.4](#) на стр. 100.

10.2.1. Евклидов объём и ориентация. Зафиксируем в евклидовом пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и рассмотрим форму объёма $\omega_{\mathbf{e}}$, принимающую на этом базисе значение 1. Тогда квадрат объёма любого другого базиса $\mathbf{u} = \mathbf{e}C_{\mathbf{eu}}$ по предл. 10.2 равен определителю Грама этого базиса:

$$\omega_{\mathbf{e}}^2(\mathbf{u}) = \det^2 C_{\mathbf{eu}} = \Gamma_{\mathbf{u}}. \quad (10-8)$$

В частности, квадрат объёма любого ортонормального базиса \mathbf{u} равен 1. Мы заключаем, что матрица перехода $C_{\mathbf{eu}}$ между любыми двумя ортонормальными базисами \mathbf{e} и \mathbf{u} евклидова пространства V имеет определитель $\det C_{\mathbf{eu}} = \pm 1$. Ортонормальные базисы \mathbf{e} и \mathbf{u} называются *одинаково ориентированными*, если $\det C_{\mathbf{eu}} = +1$, и *противоположно ориентированными*, если $\det C_{\mathbf{eu}} = -1$. Обратите внимание, что любая нечётная перестановка базисных векторов меняет ориентацию базиса, а любая чётная — не меняет.

Из сказанного вытекает, что все ортонормальные базисы евклидова пространства V имеют одинаковый по абсолютной величине объём при любом выборе формы объёма на V , и что на пространстве V имеются ровно две формы объёма, принимающие на всех ортонормальных базисах значения ± 1 . Эти две формы объёма отличаются друг от друга знаком, и выбор одной из них в качестве стандартной формы объёма на V называется *выбором ориентации* евклидова пространства V . Ориентация координатного пространства \mathbb{R}^n , принимающая на стандартном базисе значение $+1$, называется *стандартной*.

Абсолютная величина объёма параллелепипеда, натянутого на произвольно заданные векторы v_1, \dots, v_n , вычисленная относительно одной из двух ориентирующих форм, не зависит от выбора ориентации и называется *евклидовым объёмом* неориентированного параллелепипеда. Согласно формуле (10-8), квадрат евклидова объёма равен определителю Грама. Мы будем обозначать евклидов объём через

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\Gamma_{(v_1, \dots, v_n)}} = \sqrt{\det(v_i, v_j)}. \quad (10-9)$$

10.3. Евклидова двойственность. С каждым вектором v евклидова пространства V связан линейный функционал $g_v : V \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto (u, v)$, скалярного умножения на этот вектор. Сопоставление вектору $v \in V$ линейного функционала g_v задаёт линейное отображение

$$G_V : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto g_v, \quad (10-10)$$

которое называется *евклидовой корреляцией*.

УПРАЖНЕНИЕ 10.3. Убедитесь в линейности функционала g_v и отображения G_V .

Так как $G_V(v) = (v, v) \neq 0$ для любого $v \neq 0$, ковектор $g_v \neq 0$ при $v \neq 0$. Поэтому отображение (10-10) инъективно, а значит, является изоморфизмом векторных пространств. Таким образом, любой линейный функционал на евклидовом векторном пространстве однозначно представляется в виде скалярного произведения с некоторым вектором.

УПРАЖНЕНИЕ 10.4. Убедитесь, что матрица отображения G_V в произвольном базисе \mathbf{v} пространства V и двойственном ему базисе \mathbf{v}^* пространства V^* совпадает с матрицей Грама $G_{\mathbf{v}}$ базиса \mathbf{v} .

10.3.1. Евклидово двойственный базис. Для любого базиса $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ в евклидовом пространстве V , прообразы $u_1^\times, \dots, u_n^\times \in V$ координатных функционалов $u_1^*, \dots, u_n^* \in V^*$ при изоморфизме (10-10) образуют в пространстве V базис, именуемый *евклидово двойственным* к базису \mathbf{u} и обозначаемый $\mathbf{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$. По определению, векторы этого базиса однозначно характеризуются соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (10-11)$$

На матричном языке эти соотношения означают, что матрица Грама¹ $G_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = \mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = E$. Согласно форм. (10-7) на стр. 133 матрица $C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, линейно выражающая базис \mathbf{u}^\times через базис \mathbf{u} по формуле $\mathbf{u}^\times = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, удовлетворяет равенству $E = G_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = G_{\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$, т. е. обратна к матрице Грама базиса \mathbf{u} . Тем самым,

$$(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n) \cdot G_{\mathbf{u}}^{-1}. \quad (10-12)$$

Ортонормальность базиса равносильна тому, что он совпадает со своим евклидово двойственным.

УПРАЖНЕНИЕ 10.5. Убедитесь, что $u_i^{\times \times} = u_i$.

По определению двойственного базиса², каждый вектор $v \in V$ раскладывается по любому базису u_1, \dots, u_n с коэффициентами, равными скалярным произведениям этого вектора с соответствующими векторами двойственного базиса:

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times), \quad (10-13)$$

в чём легко удостовериться и непосредственно, скалярно умножив обе части этого равенства на u_i^\times для каждого i .

10.3.2. Ортогоналы. Прообраз аннулятора $\text{Ann}(U) \subset V^*$ данного подпространства $U \subset V$ при изоморфизме (10-10) обозначается через

$$U^\perp = \{w \in V \mid \forall u \in U (u, w) = 0\}$$

и называется *ортогоналом* или *ортогональным дополнением* к U . По сл. 7.1 на стр. 87

$$\dim U^\perp = \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U \quad (10-14)$$

Из сл. 7.2 на стр. 88 и теор. 7.1 на стр. 88 вытекает, что соответствие $U \leftrightarrow U^\perp$ задаёт оборачивающую включения биекцию между подпространствами дополнительных размерностей в V , и эта биекция переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы, т. е. для любых подпространств $U, W \subset V$ выполняются равенства

$$U^{\perp\perp} = U, \quad (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \quad (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp. \quad (10-15)$$

¹См. формулу (10-5) на стр. 133.

²См. н° 7.1.1 на стр. 85.

10.4. Ортогональное проектирование, расстояния и углы. Так как $(u, u) = 0$ только для $u = 0$, пересечение $U \cap U^\perp = 0$. В силу равенства (10-14) подпространства U и U^\perp дополняют друг друга: $V = U \oplus U^\perp$ и каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение

$$v = v_U + v_{U^\perp}, \quad \text{где } v_U \in U, \quad v_{U^\perp} \in U^\perp. \quad (10-16)$$

Компоненты $v_U \in U$ и $v_{U^\perp} \in U^\perp$ этого разложения называются, соответственно *ортогональной проекцией* вектора v на U и его *нормальной составляющей* относительно U . Сопоставление каждому вектору $v \in V$ его ортогональной проекции на U задаёт линейное отображение

$$\pi_U : V = U \oplus U^\perp \rightarrow U, \quad v = v_U + v_{U^\perp} \mapsto v_U,$$

которое называется *ортогональным проектированием* V на U .

Предложение 10.3

Ортогональная проекция $v_U \in U$ произвольного вектора $v \in V$ на подпространство $U \subset V$ однозначно характеризуется любым из следующих эквивалентных друг другу свойств:

$$1) v - v_U \in U^\perp \quad 2) \forall u \in U \quad (u, v) = (u, v_U) \quad 3) \forall u \in U \quad u \neq v_U \Rightarrow |v - u| > |v - v_U|$$

и может найдена по формуле

$$v_U = \sum_i u_i \cdot (v, u_i^\times), \quad (10-17)$$

где u_1, \dots, u_m и $u_1^\times, \dots, u_m^\times$ — произвольные евклидово двойственные базисы в U .

Доказательство. Свойства (1) и (2) очевидным образом равносильны и утверждают, что векторы v_U и $v - v_U$ являются компонентами вектора v в прямом разложении $V = U \oplus U^\perp$. Поскольку для любого вектора $u = v_U + w \in U$, где $w \in U$ отличен от нуля, выполняется строгое неравенство $(v - u, v - u) = (v_{U^\perp} - w, v_{U^\perp} - w) = (v_{U^\perp}, v_{U^\perp}) + (w, w) > (v_{U^\perp}, v_{U^\perp})$, ортогональная проекция v_U вектора v на подпространство U обладает свойством (3). А так как вектор, обладающий свойством (3), очевидным образом единствен, это свойство равносильно свойствам (1) и (2). Остаётся проверить, что вектор v_U , определённый по формуле (10-17), обладает свойством (2). Поскольку свойство (2) линейно по $u \in U$, достаточно убедиться, что оно выполняется для базисных векторов $u = u_1^\times, \dots, u_m^\times$, что очевидно: $(v_U, u_i^\times) = \sum_j (u_j, u_i^\times) \cdot (v, u_j^\times) = (v, u_i^\times)$ для каждого v . \square

Следствие 10.2

В евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ для любого непустого аффинного подпространства $\Pi \subsetneq \mathbb{A}(V)$ и любой точки $a \notin \Pi$ существует единственная точка $a_\Pi \in \Pi$, удовлетворяющая двум эквивалентным друг другу условиям:

- 1) вектор $\overrightarrow{aa_\Pi}$ перпендикулярен любому вектору \overrightarrow{pq} с $p, q \in \Pi$
- 2) $|aq| > |aa_\Pi|$ для любой точки $q \in \Pi$, отличной от a_Π .

Доказательство. Поместим начало отсчёта в какую-нибудь точку $o \in \Pi$ и отождествим точки $a \in \mathbb{A}(V)$ с радиус-векторами $\overrightarrow{oa} \in V$. При этом аффинное подпространство Π превратится в векторное подпространство $U \subset V$, а точке $a \in \mathbb{A}$ сопоставится её радиус вектор $v = \overrightarrow{oa} \in V$. Остаётся применить к ним **предл. 10.3**. \square

10.4.1. Расстояние до подпространства. Точка $a_\Pi \in \Pi$ из [сл. 10.2](#) называется *ортогональной проекцией* точки a на аффинное подпространство $\Pi \subset \mathbb{A}(V)$. Длина $|a - a_\Pi|$ называется *расстоянием* от точки a до подпространства Π . По свойству (1) из [предл. 10.3](#) это расстояние равно длине $|\overline{qp}_{U^\perp}|$ ортогональной проекции вектора \overline{qp} , где $q \in \Pi$ — любая точка, на ортогональное дополнение U^\perp к направляющему векторному пространству $U \subset V$ аффинного подпространства Π .

Пример 10.3 (расстояние от точки до гиперплоскости)

Направляющим векторным пространством гиперплоскости Π с уравнением¹ $(a, x) = d$ является ортогонал a^\perp к вектору a . Расстояние от произвольно заданной точки p до гиперплоскости Π равно расстоянию между их ортогональными проекциями на одномерное подпространство, порождённое вектором a . Точка p проектируется в вектор $a \cdot (a, p)/(a, a)$, гиперплоскость Π — в вектор $a \cdot (x, p)/(a, a) = a \cdot d/(a, a)$. Разность между ними имеет длину

$$|(a, p) - d| \cdot |a|/(a, a) = |(a, p) - d|/|a|.$$

Пример 10.4 (евклидов объём через площадь основания и высоту)

Рассмотрим в евклидовом пространстве линейно независимый набор $\mathbf{w} = (v, u_1, \dots, u_n)$ из $n + 1$ векторов и обозначим через U линейную оболочку его поднабора $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, состоящего из последних n векторов. Вектор v единственным образом представляется в виде суммы $v = v_U + v_{U^\perp}$, где $v_U \in U$, а вектор v_{U^\perp} лежит в одномерном ортогональном дополнении U^\perp к подпространству U в линейной оболочке W набора векторов \mathbf{w} . Вектор v_{U^\perp} называется *высотой* параллелепипеда (v, u_1, \dots, u_n) , опущенной из вершины v на основание \mathbf{u} . Длина этой высоты равна расстоянию от вершины v до подпространства U или, что то же самое, длине ортогональной проекции v_{U^\perp} вектора v на U^\perp . Так как вектор v_U является линейной комбинацией векторов u_i , в координатах относительно любого ортонормального базиса в W квадрат ориентированного объёма натянутого на векторы \mathbf{w} параллелепипеда равен

$$\det^2(v, u_1, \dots, u_n) = \det^2(v - v_U, u_1, \dots, u_n) = \det^2(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n) = \Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n)}.$$

Единственным ненулевым элементом первой строки и первого столбца определителя Грама векторов $v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n$ является стоящий в левом верхнем углу квадрат $|v_{U^\perp}|^2$. Поэтому

$$\text{Vol}^2(v, u_1, \dots, u_n) = \Gamma_{(v_{U^\perp}, u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \Gamma_{(u_1, \dots, u_n)} = |v_{U^\perp}|^2 \cdot \text{Vol}^2(u_1, \dots, u_n).$$

Иначе говоря, $(n + 1)$ -мерный евклидов объём параллелепипеда \mathbf{w} равен произведению n -мерного евклидова объёма основания \mathbf{u} на длину опущенной на него высоты:

$$\text{Vol}_{n+1}(v, u_1, \dots, u_n) = |v_{U^\perp}| \cdot \text{Vol}_n(u_1, \dots, u_n). \quad (10-18)$$

Пример 10.5 (расстояние между аффинными подпространствами)

Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$, ассоциированном с евклидовым векторным пространством V , аффинные подпространства $K = p + U$ и $L = q + W$ с направляющими векторными пространствами $U, W \subset V$. Пусть эти пространства не пересекаются², т. е. $\overline{pq} \notin U + W$. Для любых двух векторов $x = p + u \in K$ и $y = q + w \in L$ расстояние $|y - x| = |\overline{pq} - (w - u)|$ достигает своего минимума по $u \in U, w \in W$ тогда и только тогда, когда вектор $w - u = \overline{pq}_{U+W}$

¹См. [прим. 10.1](#) на стр. 132.

²См. [предл. 4.3](#) на стр. 54.

является ортогональной проекцией вектора \overrightarrow{pq} на подпространство $U + W$ и этот минимум равен расстоянию между вектором \overrightarrow{pq} и подпространством $U + W$, т. е. длине ортогональной проекции $\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp}$ вектора \overrightarrow{pq} на подпространство $(U + W)^\perp$. Это число называется *расстоянием* между аффинными подпространствами K, L и обозначается

$$|K, L| = |\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp}| = \min_{x \in K, y \in L} |y - x| \quad (10-19)$$

Если $K \cap L \neq \emptyset$, т. е. $\overrightarrow{pq} \in U + W$, мы полагаем $|K, L| = 0$, что согласуется с равенством (10-19), так как в этом случае $\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp} = 0$. Если векторы v_1, \dots, v_k составляют базис подпространства $U + W$, то вектор $\overrightarrow{pq}_{(U+W)^\perp}$ является опущенной из вершины q высотой параллелепипеда, натянутого на векторы $\overrightarrow{pq}, v_1, \dots, v_k$, и длину этой высоты можно вычислять при помощи формулы (10-18):

$$|K, L| = \frac{\text{Vol}_{k+1}(\overrightarrow{pq}, v_1, \dots, v_k)}{\text{Vol}_k(v_1, \dots, v_k)} = \sqrt{\frac{\Gamma(\overrightarrow{pq}, v_1, \dots, v_k)}{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}}, \quad (10-20)$$

где Vol_m означает m -мерный евклидов объём.

10.4.2. Угол между вектором и подпространством. Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве V векторное подпространство $U \subset V$ и вектор $v \in V$, не лежащий ни в U , ни в U^\perp . Тогда абсолютная величина ориентированного угла¹ $0 < |\angle(v, u)| < \pi/2$ между этим вектором и ненулевыми векторами $u \in U$ достигает своего минимума на единственном с точностью до умножения на положительную константу векторе u , равном ортогональной проекции v_U вектора v на подпространство U . В самом деле, наименьшему значению угла отвечает наибольшее значение его косинуса

$$\cos(\angle(v, u)) = \frac{(v, u)}{|v| \cdot |u|} = \frac{(v_U, u)}{|v| \cdot |u|} = (v_U / |v_U|, u / |u|) \cdot \frac{|v_U|}{|v|}$$

(второе равенство выполняется в силу свойства (2) из предл. 10.3 на стр. 136). Последний сомножитель в правой части не зависит от u , а первый — в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца² — не превосходит произведения длин $|v_U| / |v_U| \cdot |u| / |u| = 1$ и в точности равен этому произведению если и только если векторы v_U и u сонаправлены. Угол $\varphi \in [0, \pi/2]$, однозначно определяемый из равенства $\cos \varphi = |v_U| / |v|$, называется *евклидовым углом* между ненулевым вектором v и подпространством U . При $v \in U$ и $v \in U^\perp$ эта формула даёт $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, так как в этих случаях $v_U = v$ и $v_U = 0$ соответственно. Обратите внимание, что возникающие в последних двух крайних случаях углы по-прежнему являются минимальными среди углов между вектором v и ненулевыми векторами $u \in U$.

Так как $|v_{U^\perp}| = |v| \cdot \sin \varphi$, евклидов угол φ между вектором v и подпространством U также можно вычислять при помощи форм. (10-18) на стр. 137:

$$\sin \varphi = \frac{|v_{U^\perp}|}{|v|} = \frac{\sqrt{\Gamma(v, u_1, \dots, u_k)}}{|v| \sqrt{\Gamma(u_1, \dots, u_k)}}, \quad (10-21)$$

где u_1, \dots, u_k — произвольный базис подпространства U .

¹См. формулу (3-9) на стр. 39.

²См. формулу (3-4) на стр. 35.

10.5. Векторные произведения. Зафиксируем в n -мерном евклидовом векторном пространстве V какой-нибудь ортонормальный базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и условимся записывать векторы $v \in V$ строками их координат в этом базисе. Сопоставим каждому набору из $n - 1$ векторов $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ матрицу A размера $(n - 1) \times n$, по строкам которой записаны координаты этих векторов в базисе \mathbf{e} , и назовём *векторным произведением* векторов v_1, \dots, v_{n-1} вектор

$$[v_1, \dots, v_{n-1}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n A_i e_i = (A_1, \dots, A_n), \quad (10-22)$$

i -я координата A_i которого равна взятому со знаком $(-1)^{i-1}$ определителю дополнительной к i -тому столбцу $(n - 1) \times (n - 1)$ -подматрицы в A , точно так же, как это было во втором правиле Крамера из н° 8.2.2 на стр. 104. Векторное произведение замечательно тем, что для любого вектора $u \in V$ выполняется равенство

$$\omega_{\mathbf{e}}(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = (u, [v_1, \dots, v_{n-1}]), \quad (10-23)$$

где $\omega_{\mathbf{e}}$ — единственная форма ориентированного объёма на V , принимающая на ортонормальном базисе \mathbf{e} значение 1.

УПРАЖНЕНИЕ 10.6. Докажите соотношение (10-23).

Иначе говоря, вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ является прообразом линейного функционала

$$V \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \omega_{\mathbf{e}}(u, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

при изоморфизме $V \simeq V^*$ из форм. (10-10) на стр. 134, сопоставляющем вектору $v \in V$ ковектор $g_v : V \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto (u, v)$. В частности, векторное произведение не меняется при замене ортонормального базиса \mathbf{e} на любой другой ортонормальный базис той же ориентации¹ и меняет знак при выборе вместо \mathbf{e} ортонормального базиса противоположной ориентации. Геометрически, векторное произведение однозначно определяется следующими своими свойствами.

Предложение 10.4

Вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ перпендикулярен векторам v_1, \dots, v_{n-1} , и его длина равна евклидову объёму $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, \dots, v_{n-1} . Если эта длина ненулевая, то направление вектора $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ таково, что матрица перехода от базиса

$$[v_1, \dots, v_{n-1}], v_1, \dots, v_{n-1}$$

к базису \mathbf{e} имеет положительный определитель.

Доказательство. Подставляя в формулу (10-23) вектор $u = v_i$, получаем

$$(v_i, [v_1, \dots, v_{n-1}]) = \omega_{\mathbf{e}}(v_i, v_1, \dots, v_{n-1}) = 0,$$

что доказывает первое утверждение. Подставляя $u = [v_1, \dots, v_{n-1}]$, получаем

$$\omega_{\mathbf{e}}([v_1, \dots, v_{n-1}], v_1, \dots, v_{n-1}) = |[v_1, \dots, v_{n-1}]|^2 \geq 0.$$

В силу первого утверждения вектор $[v_1, \dots, v_{n-1}]$ является высотой параллелепипеда, объём которого стоит в левой части последней формулы. Согласно прим. 10.4 этот объём равен произведению длины $|[v_1, \dots, v_{n-1}]|$ на евклидов объём $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, \dots, v_{n-1} . Отсюда вытекают второе и третье утверждения. \square

¹См. н° 10.2.1 на стр. 134.

Следствие 10.3

Векторы $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ линейно зависимы если и только если $[v_1, \dots, v_{n-1}] = 0$. \square

Пример 10.6 (расстояние между подпространствами, продолжение прим. 10.5)

Формулу из прим. 10.5 для минимального расстояния между непересекающимися аффинными подпространствами $p+U$ и $q+W$ в евклидовом аффинном пространстве $A(V)$ можно переписать как

$$\frac{\text{Vol}_{k+1}(\overrightarrow{qp}, e_1, \dots, e_k)}{\text{Vol}_k(e_1, \dots, e_k)} = \frac{|\det(\overrightarrow{qp}, e_1, \dots, e_k)|}{|[e_1, \dots, e_k]|},$$

где e_1, \dots, e_k — любой базис пространства $U+W$, а определитель в правой части — это определитель матрицы координат указанных в нём векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе пространства V .

Пример 10.7 (векторное произведение в \mathbb{R}^3)

Векторное произведение в \mathbb{R}^3 , заданное с помощью стандартного ортонормального базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$, представляет собою бинарную операцию $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, w) \mapsto [u, w]$, и часто обозначается¹ $u \times w$. Формула (10-23) в этом случае утверждает, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы

$$(a, b, c) = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

равен скалярному произведению вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ с вектором

$$\begin{aligned} [b, c] &\stackrel{\text{def}}{=} (b_2c_3 - b_3c_2, -b_1c_3 + b_3c_1, b_1c_2 - b_2c_1) = \\ &= \left(\det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (10-24)$$

в чём несложно убедиться, раскладывая по первому столбцу определитель

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2 \cdot (-b_1c_3 + b_3c_1) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1) = (a, [b, c]).$$

Так как $(b, [b, c]) = \det(b, b, c) = 0$ и $(c, [b, c]) = \det(c, b, c) = 0$, вектор $[b, c]$ перпендикулярен векторам b и c , а квадрат его длины $([b, c], [b, c]) = \text{Vol}_3([b, c], b, c) = |[b, c]| \cdot \text{Vol}_2(b, c)$, откуда $|[b, c]| = \text{Vol}_2(b, c)$.

УПРАЖНЕНИЕ 10.7. Убедитесь, что векторное произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ кососимметрично, т. е. $v \times v = 0$ для всех v , и не ассоциативно, но удовлетворяет *правилу Лебница*²

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w).$$

УПРАЖНЕНИЕ 10.8. Докажите для векторных произведений в \mathbb{R}^3 равенства

$$\text{а) } [a, [b, c]] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b) \quad \text{б) } [[a, b], [a, c]] = a \cdot \det(a, b, c)$$

$$\text{в) } ([a, b], [c, d]) = \det \begin{pmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{pmatrix}$$

¹В английской литературе векторное произведение даже и называется *cross-product*.

²Которое часто записывают в виде $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ и называют *тождеством Якоби*.

§11. Линейные отображения евклидовых пространств

Всюду в этом параграфе речь по-прежнему идёт про конечномерные евклидовы векторные пространства над полем \mathbb{R} .

11.1. Ортогональные операторы. Линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на евклидовом векторном пространстве V называется *ортогональным* или *изометрией*, если он сохраняет длины векторов, т. е. $|Fv| = |v|$ для каждого $v \in V$. Поскольку скалярное произведение однозначно выражается через длины векторов по формуле

$$(u, w) = \frac{1}{2}(|u + w|^2 - |u|^2 - |w|^2),$$

каждый ортогональный оператор F автоматически сохраняет скалярные произведения, т. е.

$$\forall u, w \in V \quad (Fu, Fw) = (u, w).$$

Сохранение скалярных произведений влечёт за собою сохранение углов между векторами и любых других величин, выражающихся через скалярные произведения. Например, каждый ортогональный оператор сохраняет евклидов объём параллелепипеда, равный корню из определителя Грама¹. Поэтому определитель любого ортогонального оператора равен ± 1 . В частности, все ортогональные операторы обратимы и составляют в полной линейной группе пространства V подгруппу, которая обозначается $O(V) \subset GL(V)$ и называется *ортогональной группой* евклидова пространства V . Сохраняющие ориентацию ортогональные операторы называются *собственными*. Они образуют в ортогональной группе подгруппу, которая обозначается

$$SO(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(V) \cap SL(V) = \{F \in O(V) \mid \det F = 1\}$$

и называется *специальной* или *собственной* ортогональной группой. Ортогональные операторы определителя -1 , меняющие ориентацию пространства на противоположную, называются *несобственными*.

ПРИМЕР 11.1 (ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ)

Оператор $-\text{Id} : v \mapsto -v$ является ортогональным на любом евклидовом векторном пространстве V . Он собственный, если $\dim V$ чётна, и несобственный, если $\dim V$ нечётна.

УПРАЖНЕНИЕ 11.1. Покажите, что ортогональная группа одномерного пространства исчерпывается операторами $\pm \text{Id}$.

ПРИМЕР 11.2 (СИММЕТРИИ)

Как мы видели в [н° 10.3.2](#) на стр. 135, с каждым векторным подпространством $U \subset V$ связано разложение в ортогональную прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$. Обозначим через $s_U : V \rightarrow V$ линейное отображение, тождественно действующее на U и умножающее все векторы из U^\perp на -1 , т. е. переводящее произвольный вектор $v = v_U + v_{U^\perp} \in U \oplus U^\perp = V$ в вектор

$$s_U(v) = v_U - v_{U^\perp} = v - 2v_{U^\perp}. \quad (11-1)$$

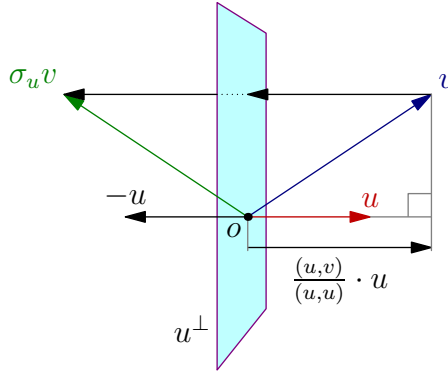
Так как $|s_U(v)|^2 = |u_v - u_v^\perp|^2 = |u_v|^2 + |u_v^\perp|^2 = |u_v + u_v^\perp|^2 = |v|^2$, оператор s_U ортогонален. Он называется *симметрией* относительно подпространства U . При $U = 0$ получается центральная

¹См. [н° 10.2.1](#) на стр. 134.

симметрия из предыдущего [прим. 11.1](#). В общем случае оператор s_U собственный тогда и только тогда, когда коразмерность подпространства U в V чётна. Все операторы σ_U инволютивны, т. е.

$$\sigma_U^2 = \text{Id}_V.$$

11.1.1. Отражения в гиперплоскостях. Важнейшим специальным случаем симметрии является отражение в гиперплоскости $U = u^\perp$, перпендикулярной какому-либо ненулевому вектору $u \in V$. Оно обозначается через $\sigma_u = s_{u^\perp}$ и действует по формуле



$$\sigma_u(v) = v - 2 \frac{(u, v)}{(u, u)} \cdot u. \quad (11-2)$$

в которую превращается (11-1) при $U^\perp = \mathbb{R} u$. Два отражения σ_u и σ_w совпадают тогда и только тогда, когда задающие их ненулевые векторы u и w пропорциональны. Отражения в гиперплоскостях являются несобственными изометриями. Любые два различных ненулевых вектора $a \neq b$ одинаковой длины $|a| = |b|$ переводятся друг в друга отражением σ_{a-b} относительно срединного перпендикуляра¹ к отрезку $[a, b]$ в $\mathbb{A}(V)$.

Рис. 11♦1. Отражение в гиперплоскости u^\perp .

УПРАЖНЕНИЕ 11.2. Убедитесь в этом.

ТЕОРЕМА 11.1

Каждый нетождественный ортогональный оператор на n -мерном евклидовом векторном пространстве V является композицией не более n отражений в гиперплоскостях.

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ покрывается [упр. 11.1](#). Пусть $n > 1$ и $F(v) \neq v$ для некоторого ненулевого вектора v . Обозначим через σ отражение, переводящее $F(v)$ в v . Ортогональный оператор $G = \sigma \circ F$ оставляет вектор v на месте и, тем самым, переводит в себя гиперплоскость v^\perp . По индукции, ограничение $G|_{v^\perp} = \bar{\sigma}_k \circ \dots \circ \bar{\sigma}_1$ является композицией $k \leq (n-1)$ отражений $\bar{\sigma}_i : v^\perp \rightarrow v^\perp$ в $(n-2)$ -мерных гиперплоскостях, лежащих в v^\perp . Каждое отражение $\bar{\sigma}_i$ является ограничением на подпространство v^\perp отражения $\sigma_i : V \rightarrow V$ в $(n-1)$ -й гиперплоскости, порождённой вектором v и $(n-2)$ -мерным зеркалом отражения $\bar{\sigma}_i$. Так как вектор v неподвижен при всех отражениях σ_i , оператор $G = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1 : V \rightarrow V$ является композицией отражений σ_i . Следовательно, $F = \sigma \circ G$ является композицией $k+1 \leq n$ отражений. \square

Следствие 11.1

Всякий собственный ортогональный оператор является композицией чётного, а всякий несобственный — нечётного числа отражений в гиперплоскостях. \square

ПРИМЕР 11.3 (СОБСТВЕННЫЕ ИЗОМЕТРИИ ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА)

Каждый нетождественный собственный ортогональный оператор F в трёхмерном евклидовом векторном пространстве V является композицией $F = \sigma_{u_2} \circ \sigma_{u_1}$ отражений в двух различных

¹См. [прим. 10.2](#) на стр. 132.

плоскостях u_2^\perp, u_1^\perp , ортогональных непропорциональным векторам u_2, u_1 . Обозначим порождённую этими векторами плоскость через U . Оператор F тождественно действует на прямой

$$U^\perp = u_1^\perp \cap u_2^\perp = \mathbb{R} \cdot [u_1, u_2]$$

с вектором скорости¹ $[u_1, u_2]$. Ортогональная этой прямой гиперплоскость U переводится оператором F в себя, и ограничение $F|_U$ является собственным ортогональным преобразованием этой плоскости, поскольку $\det F = \det F|_U$. В силу предл. 3.5 на стр. 42 каждое собственное ортогональное линейное преобразование плоскости является поворотом.

УПРАЖНЕНИЕ 11.3. Убедитесь, что это поворот на угол $2\angle(u_1, u_2)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль вектора $[u_1, u_2]$.

Мы заключаем, что собственная ортогональная группа трёхмерного евклидова пространства исчерпывается поворотами вокруг прямых. Этот факт известен как *теорема Эйлера*.

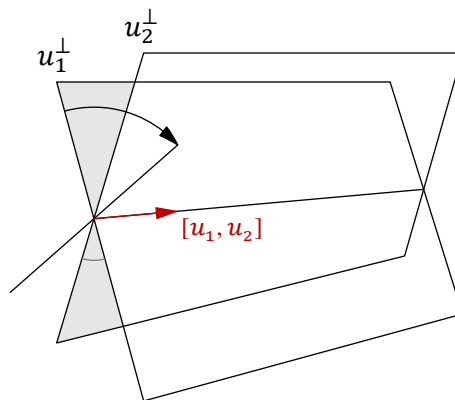


Рис. 11♦2. Поворот.

11.1.2. Ортогональные суммы поворотов. В этом разделе мы построим для любого ортогонального оператора $F : V \rightarrow V$ разложение пространства V в прямую сумму двумерных и одномерных F -инвариантных подпространств $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, в котором все подпространства попарно ортогональны друг другу и F действует на каждом двумерном подпространстве U_i как поворот на некоторый угол $\varphi_i \in (0, \pi)$, а на каждом одномерном — как Id или $-\text{Id}$. Отметим, что любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом 1 можно объединить в двумерную плоскость, на которой F действует поворотом на нулевой угол, а любые два одномерных собственных подпространства с собственным числом -1 — в двумерную плоскость, на которой F действует как поворот на угол π . Поэтому можно считать, что разложение, о котором идёт речь, состоит из двумерных подпространств U_i , на которых F действует поворотами на углы $\varphi_i \in [0, \pi]$, и, может быть, ещё одного или двух одномерных слагаемых, причём когда их два, то на одном из них F действует тождественно, а на другом — умножением на -1 . Оператор F собственный если и только если таких одномерных слагаемых либо нет вовсе, либо оно ровно одно, и F действует на нём тождественно.

ЛЕММА 11.1

Каждый линейный оператор $F : V \rightarrow V$ на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$ и образуем из него $n + 1$ векторов $v, Fv, F^2v, \dots, F^n v$, где $n = \dim V$ и $F^k v$ обозначает результат k -кратного последовательного применения оператора F к вектору v . Поскольку эти векторы линейно зависимы, найдутся такие $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, что $(F^k + a_1 F^{k-1} + \dots + a_{k-1} F + a_k)v = 0$. Заключённый в скобки линейный оператор является результатом подстановки $t = F$ в многочлен $f(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k \in \mathbb{R}[t]$. Такой многочлен представляет собою произведение

¹См. прим. 10.7 на стр. 140.

$f(t) = g_1(t) \cdots g_m(t)$ линейных двучленов вида $t - \alpha$ и квадратных трёхчленов вида $t^2 - \alpha t - \beta$ с вещественными коэффициентами. Подставляя в это разложение F и применяя полученный оператор к вектору v , мы заключаем, что $g_1(F) \circ \cdots \circ g_m(F) v = 0$. Рассмотрим наименьшее k , для которого вектор $w = g_{k+1}(F) \circ \cdots \circ g_m(F) v \neq 0$. Тогда $g_k(F) w = 0$. Для $g_k(F) = F - \alpha$ это значит, что $F(w) = \alpha w$, т. е. одномерное подпространство $\mathbb{R} w$ переводится оператором F в себя. Для $g_k(F) = F^2 - \alpha F - \beta$ получаем равенство $F(F(w)) = \alpha F(w) + \beta w$, означающее, что линейная оболочка векторов w и $F(w)$ переводится оператором F в себя. \square

ТЕОРЕМА II.2

Каждый ортогональный линейный оператор F на конечномерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей, на главной диагонали которой стоят числа ± 1 и 2×2 блоки вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 < \varphi_i < \pi, \quad (11-3)$$

а все остальные элементы равны нулю. С точностью до перестановки блоков и диагональных элементов эта матрица не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором оператор имеет матрицу такого вида.

Доказательство теор. II.2. Разложение пространства V в ортогональную прямую сумму F -инвариантных одномерных и двумерных подпространств U_i строится индукцией по $\dim V$. Случаи $\dim V = 1, 2$ уже были разобраны в [упр. 11.1](#) на стр. 141 и [предл. 3.5](#) на стр. 42 соответственно. Пусть $\dim V \geq 3$. Согласно [лем. 11.1](#) оператор $F: V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое одномерное или двумерное подпространство $U \subset V$. Поскольку F сохраняет скалярное произведение, ортогонал U^\perp к подпространству U тоже переводится оператором F в себя. По индукции, ограничения F на U и на U^\perp обладают нужными разложениями. Складывая эти разложения вместе, получаем требуемое разложение для $V = U \oplus U^\perp$. Если выбрать в каждом подпространстве U_i ортонормальный базис и соединить эти базисы в один ортонормальный базис e пространства V , то оператор F запишется в этом базисе матрицей F_e , состоящей из расположенных на главной диагонали блоков вида (11-3), и, может быть, ещё нескольких диагональных элементов вида ± 1 . Поэтому характеристический многочлен оператора F является произведением линейных множителей вида $t \pm 1$ и характеристических многочленов блоков (11-3):

$$\det \begin{pmatrix} t - \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & t - \cos \varphi_i \end{pmatrix} = t^2 - 2t \cos \varphi_i + 1.$$

Все они приведены и неприводимы. Поскольку характеристический многочлен не зависит от выбора базиса и разложение в произведение неприводимых приведённых многочленов в $\mathbb{R}[t]$ единственно с точностью до перестановки сомножителей, набор отличных от нуля и π углов поворотов и количества стоящих на диагонали чисел $+1$ и -1 не зависят от способа разложения. \square

ПРИМЕР II.4 (несобственные ортогональные операторы в трёхмерном пространстве)

Согласно [теор. 11.2](#) каждый несобственный ортогональный оператор на трёхмерном евклидовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 \leq \varphi_i \leq \pi,$$

и является композицией поворота вокруг прямой с направляющим вектором e_1 и отражения в перпендикулярной оси поворота плоскости e_1^\perp .

ПРИМЕР 11.5 (движения трёхмерного евклидова аффинного пространства)

Напомним¹, что эндоморфизм $F : A(V) \rightarrow A(V)$ аффинного пространства $A(V)$, ассоциированного с евклидовым векторным пространством V , называется *движением*, если он сохраняет расстояния между точками. Каждое движение автоматически биективно и переводит прямые в прямые, а значит, является аффинным преобразованием², т. е. композицией $F = \tau_v \circ G_p$ параллельного переноса τ_v на некоторый вектор $v \in V$ и линейного ортогонального преобразования $G_p : V \rightarrow V$, оставляющего на месте некоторую точку $p \in A(V)$. Пусть теперь $\dim V = 3$.

Если движение F собственное³, то ортогональный оператор G_p тоже собственный и является поворотом $\varrho_{\ell, \varphi}$ на угол φ (возможно, нулевой) вокруг некоторой проходящей через точку p прямой ℓ . Разложим вектор сдвига в сумму $v = u + w$ вектора u , параллельного прямой ℓ , и вектора w перпендикулярного прямой ℓ . Композиция $\tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi}$ переводит в себя каждую перпендикулярную прямой ℓ плоскость Π и действует в ней как композиция поворота со сдвигом, т. е. как поворот на тот же угол φ , но с другим центром⁴, зависящим только от вектора w . Таким образом, композиция $\tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \varrho_{\ell', \varphi}$ является поворотом пространства на тот же угол φ , но относительно прямой ℓ' , которая параллельна оси ℓ поворота G_p . Такой поворот перестановочен со сдвигом τ_u вдоль оси поворота и композиция

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_u \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \tau_u \circ \varrho_{\ell', \varphi} = \varrho_{\ell', \varphi} \circ \tau_u$$

представляет собою *винтовое движение* — композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и сдвига вдоль этой прямой. Ось винтового движения с ненулевым углом закрутки однозначно характеризуется как единственная прямая в пространстве, переводимая этим движением в себя. Итак, каждое собственное движение пространства есть винтовое движение — возможно, с нулевым вектором сдвига и/или нулевым углом закрутки.

Если движение F несобственное⁵, то ортогональный оператор G_p тоже несобственный и является либо отражением σ_Π в проходящей через точку p плоскости Π , либо композицией такого отражения с поворотом $\varrho_{\ell, \varphi}$ вокруг проходящей через p перпендикулярно плоскости Π прямой ℓ . Раскладывая, как и выше, сдвиг τ_v в композицию сдвигов на перпендикулярный к плоскости Π вектор u и параллельный Π вектор w , мы видим, что в первом случае композиция $\tau_u \sigma_\Pi = \sigma_{\Pi'}$ является отражением в плоскости $\Pi' = \Pi + u/2$, полученной из Π сдвигом на вектор⁶ $u/2$, и движение $F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w$ представляет собою *скользящую симметрию* — композицию отражения в плоскости с параллельным этой плоскости сдвигом. Во втором случае, в силу уже сказанного,

$$F = \tau_v \circ G_p = \tau_w \circ \tau_u \circ \sigma_\Pi \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \tau_w \circ \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \tau_w \circ \varrho_{\ell, \varphi} = \sigma_{\Pi'} \circ \varrho_{\ell', \varphi}$$

представляет собою композицию перестановочных друг с другом поворота вокруг прямой и отражения в плоскости, перпендикулярной оси поворота. В обоих случаях зеркало отражения

¹См. н° 3.4 на стр. 41.

²См. н° 2.1 на стр. 23.

³Т. е. сохраняет ориентацию.

⁴См. н° 3.4.2 на стр. 42.

⁵Т. е. меняет ориентацию на противоположную.

⁶Ибо $\sigma_{\Pi'} \circ \sigma_\Pi = \tau_u$, см. н° 3.4.2 на стр. 42.

однозначно описывается как геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пространства с их образами при движении F .

11.2. Евклидово сопряжение линейных отображений. С каждым линейным отображением $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W связано *евклидово сопряжённое* отображение $F^\times : W \rightarrow U$, которое однозначно характеризуется тем, что для всех $u \in U, w \in W$

$$(Fu, w) = (u, F^\times w). \quad (11-4)$$

Предложение 11.1

Для любого линейного отображения евклидовых пространств $F : U \rightarrow W$ удовлетворяющее равенству (11-4) линейное отображение $F^\times : W \rightarrow U$ существует и единственно. Матрицы F_{wu} и F_{uw}^\times отображений F и F^\times в произвольных базисах $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ пространств U и W связаны соотношением

$$F_{wu}^t G_w = G_u F_{uw}^\times, \quad (11-5)$$

где $G_u = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u}$ и $G_w = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w}$ — матрицы Грама базисов \mathbf{u} и \mathbf{w} .

Доказательство. Левая часть (11-4) является результатом применения к вектору $Fu \in W$ линейного функционала $g_w : W \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto (v, w)$, в который переходит вектор $w \in W$ при задаваемом евклидовой структурой на пространстве W изоморфизме $G_W : W \simeq W^*, w \mapsto g_w$, из форм. (10-10) на стр. 134. Композиция $g_w \circ F$ линейного функционала $g_w : W \rightarrow \mathbb{R}$ с линейным отображением $F : U \rightarrow W$ является результатом применения к ковектору $g_w \in W^*$ двойственного к F линейного отображения¹ $F^* : W^* \rightarrow U^*, \xi \mapsto \xi \circ F$. Таким образом, в левой части (11-4) стоит значение ковектора $F^*(g_w) = F^* G_W(w)$ на векторе u . В правой части (11-4) написан результат применения к вектору u ковектора $g_{F^\times w} = G_U F^\times(w)$, в который переходит вектор $F^\times(w) \in U$ при изоморфизме $G_U : U \simeq U^*, u \mapsto g_u$, задаваемом евклидовой структурой на пространстве U . Таким образом, равенство (11-4) равносильно соотношению $F^* G_W = G_U F^\times$, в котором $G_U : U \simeq U^*$ и $G_W : W \simeq W^*$ суть евклидовы корреляции из п° 10.3 на стр. 134, а линейное отображение $F^* : W^* \rightarrow U^*$ двойственно к F . Этому соотношению удовлетворяет ровно одно линейное отображение $F^\times = G_U^{-1} F^* G_W : W \rightarrow U$.

В терминах базисов \mathbf{u} и \mathbf{w} равенство (11-4) равносильно mn соотношениям

$$(Fu_i, w_j) = (u_i, F^\times w_j)$$

на скалярные произведения базисных векторов. Они собираются в матричное равенство

$$G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})},$$

где $G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = F(\mathbf{u})^t \cdot \mathbf{w}$ — матрица Грама наборов $F(\mathbf{u}) = (Fu_1, \dots, Fu_n)$ и $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, а $G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})} = \mathbf{u}^t \cdot F^\times(\mathbf{w})$ — матрица Грама наборов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $F^\times(\mathbf{w}) = (F^\times w_1, \dots, F^\times w_m)$. Поскольку $F(\mathbf{u}) = \mathbf{w} F_{wu}$, а $F^\times(\mathbf{w}) = \mathbf{u} F_{uw}^\times$, эти матрицы Грама имеют вид

$$G_{F(\mathbf{u}), \mathbf{w}} = F_{wu}^t \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w} = F_{wu}^t G_w \quad \text{и} \quad G_{\mathbf{u}, F^\times(\mathbf{w})} = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u} F_{uw}^\times = G_u F_{uw}^\times.$$

Таким образом, соотношение (11-4) равносильно матричному равенству (11-5). \square

¹См. п° 7.3 на стр. 89.

Замечание 11.1. Обратите внимание, что матричное равенство $F_{uw}^\times = G_u^{-1} F_{wu}^t G_w$ согласуется с операторным равенством $F^\times = G_U^{-1} F^* G_W$: матрицы Грама G_u и G_w суть матрицы евклидовых корреляций¹ $G_U : U \xrightarrow{\sim} U^*$ и $G_W : W \xrightarrow{\sim} W^*$, записанные в парах двойственных базисов u, u^* и w, w^* пространств U, U^* и W, W^* , а $F_{wu}^t = F_{w^*u^*}^*$ есть матрица двойственного к F оператора² $F^* : W^* \rightarrow U^*$, записанная в базисах w^*, u^* .

Следствие 11.2

В ортонормальных базисах u, w пространств U, W матрицы евклидово сопряжённых операторов F и F^\times транспонированы друг другу: $F_{uw}^\times = F_{wu}^t$. \square

Предложение 11.2

Для любого линейного отображения $F : U \rightarrow W$ выполняются равенства

$$F^{\times\times} = F, \quad \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp, \quad \operatorname{im} F^\times = (\ker F)^\perp,$$

а для любой пары линейных отображений $F : U \rightarrow V, G : V \rightarrow W$ — равенство $(GF)^\times = F^\times G^\times$.

Доказательство. Равенство $F^{\times\times} = F$ вытекает из соотношения (11-4) и симметричности скалярного произведения. Вектор $w \in \ker F^\times$ если и только если для всех $u \in U$ выполняется равенство $(u, F^\times w) = 0$, которое в силу соотношения (11-4) равносильно равенству $(Fu, w) = 0$, т. е. ортогональности подпространства $\operatorname{im} F$ вектору w . Поэтому $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp$. Написав это равенство для оператора F^\times в роли F и беря ортогонал к обеим частям, получаем равенство $(\ker F)^\perp = \operatorname{im} F^\times$. Последнее утверждение вытекает из равенств $(GFu, w) = (Fu, G^\times w) = (u, F^\times G^\times w)$, выполненных для всех $u \in U, w \in W$. \square

11.3. Самосопряжённые и антисамосопряжённые операторы. В прим. 9.4 на стр. 120 мы видели, что каждое пространство с линейной инволюцией является прямой суммой собственных подпространств с собственными значениями ± 1 . Таким образом,

$$\operatorname{End}(V) = \operatorname{End}^+(V) \oplus \operatorname{End}^-(V), \quad \text{где} \\ \operatorname{End}^+(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F : V \rightarrow V \mid F^\times = F\} \quad \text{и} \quad \operatorname{End}^-(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{F : V \rightarrow V \mid F^\times = -F\}.$$

Операторы из $\operatorname{End}^+(V)$ называются *самосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство $(Fu, w) = (u, Fw)$. Матрица такого оператора в ортонормальном базисе симметрична относительно главной диагонали, т. е. не меняется при транспонировании. Операторы из $\operatorname{End}^-(V)$ называются *антисамосопряжёнными* и характеризуются тем, что для любых векторов $u, w \in V$ выполняется равенство $(Fu, w) = -(u, Fw)$. Матрица такого оператора в ортонормальном базисе кососимметрична, т. е. меняет при транспонировании знак. Разложение произвольного оператора F в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого задаётся формулой $F = (F + F^\times)/2 + (F - F^\times)/2$.

Лемма 11.2

Если (анти)самосопряжённый линейный оператор $F : V \rightarrow V$ переводит в себя некоторое подпространство $U \subset V$, то он переводит в себя и его ортогонал U^\perp .

¹См. упр. 10.4 на стр. 134.

²См. предл. 7.3 на стр. 91.

Доказательство. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, Fw) = \pm(Fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $Fu \in U$. Тем самым, $Fw \in U^\perp$. \square

Лемма 11.3

Собственные векторы с разными собственными значениями у самосопряжённого оператора ортогональны друг другу.

Доказательство. Если $Fu = \lambda u$ и $Fw = \mu w$, то из равенства $(Fu, w) = (u, Fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 11.4. Покажите, что все одномерные инвариантные подпространства антисамосопряжённого оператора содержатся в его ядре (в частности, у антисамосопряжённого оператора нет ненулевых вещественных собственных чисел).

ТЕОРЕМА 11.3 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Каждый самосопряжённый оператор F на конечномерном евклидовом пространстве можно диагонализировать в некотором ортонормальном базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, доказывать нечего. Если $\dim V = 2$, оператор F задаётся в произвольно взятом ортонормальном базисе e симметричной матрицей

$$F_e = F_e^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

При $a = c$ и $b = 0$ эта матрица уже диагональна. Если $a \neq c$ или $b \neq 0$, характеристический многочлен $\det(tE - F_e) = t^2 - (a + c) \cdot t + (ac - b^2)$ оператора F имеет дискриминант

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 > 0,$$

а значит, имеет два различных вещественных корня. Отвечающие им ненулевые собственные векторы перпендикулярны по лем. 11.3. Деля их на их длины, получаем искомый ортонормальный базис. При $\dim V \geq 3$ у оператора F имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, и его ортогональное дополнение U^\perp тоже F -инвариантно по лем. 11.2. По индукции, в U и U^\perp есть ортонормальные базисы из собственных векторов оператора F . Объединение этих базисов даёт искомый базис в V . \square

ТЕОРЕМА 11.4 (КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД АНТИСАМОСOPЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА)

Каждый антисамосопряжённый оператор F на конечномерном евклидовом пространстве имеет в подходящем ортонормальном базисе матрицу, ненулевые элементы которой исчерпываются расположенными на главной диагонали 2×2 блоками вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_i > 0,$$

причём набор этих блоков с точностью до перестановки не зависит от выбора такого базиса.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если $F = 0$, что так при $\dim V = 1$, то доказывать нечего. Если $\dim V = 2$ и $F \neq 0$, то в любом ортонормальном базисе e оператор F имеет антисимметричную матрицу

$$F_e = -F_e^t = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Меняя при необходимости знак у первого базисного вектора, можно считать, что $a > 0$. При $\dim V \geq 3$ у оператора F имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, и его ортогональное дополнение U^\perp тоже F -инвариантно по лем. 11.2. По индукции, в U и U^\perp есть ортонормальные базисы, в которых матрицы ограничений $F|_U$ и $F|_{U^\perp}$ имеют требуемый вид. Объединение этих базисов даёт искомый базис в V . Поскольку характеристический многочлен оператора F является произведением монома t^m , где $m = \dim \ker F = \dim V - \operatorname{rk} F$, и неприводимых двучленов $(t^2 + a_i^2)$ по всем диагональным 2×2 блокам матрицы F_e , набор блоков не зависит от выбора базиса в силу единственности разложения на неприводимые множители в $\mathbb{R}[t]$. \square

11.4. Сингулярные числа и сингулярные направления. В этом разделе мы покажем, что каждое линейное отображение $F : U \rightarrow W$ однозначно раскладывается в композицию $F = GSP$ ортогональной проекции $P : U \rightarrow V$ на ортогонал $V = (\ker F)^\perp \subset U$ к ядру оператора F , невырожденного самосопряжённого оператора $S : V \rightarrow V$, представляющего собою композицию коммутирующих друг с другом растяжений с положительными коэффициентами во взаимно перпендикулярных направлениях, и ортогонального вложения $G : V \hookrightarrow W$. Ортогональные направления, вдоль которых растягивает подпространство $V \subset U$ оператор S , и коэффициенты этих растяжений называются, соответственно, *сингулярными направлениями* и *сингулярными числами* линейного отображения F . Если $\ker F \neq 0$, ненулевые векторы из $\ker F$ тоже считаются сингулярными направлениями с сингулярным числом нуль. Если $\ker F = 0$, то $V = U$ и $P = \operatorname{Id}_U$.

ЛЕММА 11.4

Для любого линейного отображения $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W обе композиции $FF^\times \in \operatorname{End}(W)$, $F^\times F \in \operatorname{End}(U)$ являются самосопряжёнными линейными операторами с неотрицательными собственными числами. Отображение F сюръективно (соотв. инъективно) если и только если все собственные числа оператора FF^\times (соотв. $F^\times F$) строго положительны.

Доказательство. Каждый из операторов FF^\times и $F^\times F$ очевидно самосопряжён и следовательно диагонализуем по теор. 11.3 на стр. 148. Если для некоторого ненулевого вектора $w \in W$ выполняется равенство $FF^\times w = \lambda w$, то $(F^\times w, F^\times w) = (FF^\times w, w) = \lambda \cdot (w, w)$ и либо $w \in \ker F^\times$ и $\lambda = 0$, либо $\lambda = (F^\times w, F^\times w) / (w, w) > 0$. Аналогично, если $F^\times F u = \mu u$ для ненулевого $u \in U$, то либо $\mu = 0$ и $u \in \ker F$, либо $\mu = (F u, F u) / (u, u) > 0$. Поэтому все ненулевые собственные числа каждого из операторов положительны. Если $\operatorname{im} F = W$, то¹ $\ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp = 0$, откуда все собственные числа оператора FF^\times положительны. Наоборот, если $\operatorname{im} F \neq W$, то $\ker FF^\times \supset \ker F^\times = (\operatorname{im} F)^\perp \neq 0$. Аналогично, если $\ker F = 0$, то все собственные числа оператора $F^\times F$ строго положительны, и наоборот, если $\ker F \neq 0$, то и $\ker F^\times F \supset \ker F \neq 0$. \square

ТЕОРЕМА 11.5

Каждое линейное отображение $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W единственным образом раскладывается в композицию $F = G_F \circ S_F \circ P_F$ ортогональной проекции $P_F : U \rightarrow V$ на ортогонал V к ядру $\ker F \subset U$, невырожденного самосопряжённого оператора $S_F : V \rightarrow V$ с положительными собственными значениями $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, где $r = \operatorname{rk} F = \dim \operatorname{im} F = \dim V$, и изометрического вложения $G_F : V \hookrightarrow W$. При этом набор $\alpha_1^2, \dots, \alpha_r^2$ квадратов собственных чисел оператора S_F является набором всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел оператора $F^\times F : U \rightarrow U$.

¹См. предл. 11.2 на стр. 147.

Доказательство. Согласно [теор. 11.3](#) на стр. 148 в евклидовом пространстве U имеется ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов u_1, \dots, u_n самосопряжённого линейного оператора $F^\times F : U \rightarrow U$, причём все собственные значения этого оператора неотрицательны по [лем. 11.4](#), т. е. $F^\times F u_i = \alpha_i^2 u_i$ для некоторых вещественных $\alpha_i \geq 0$. Перенумеруем базис так, чтобы $\alpha_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $\alpha_i = 0$ при $i > r$. Тогда, как мы видели в доказательстве [лем. 11.4](#), все векторы u_i с $i > r$ лежат в ядре отображения F . Напротив, при $1 \leq i, j \leq r$ равенства

$$(Fu_i, Fu_j) = (F^\times F u_i, u_j) = \alpha_i^2 (u_i, u_j) = \begin{cases} \alpha_i^2 > 0 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

показывают, что векторы $w_i = Fu_i / \alpha_i$ образуют в пространстве W ортонормальную систему. В частности, они линейно независимы. Так как $F(u_j) = 0$ при $j > r$, для любого $u = \sum x_i u_i \in U$ выполняется равенство $F(u) = \alpha_1 x_1 w_1 + \dots + \alpha_r x_r w_r$, т. е. векторы w_i с $1 \leq i \leq r$ составляют ортонормальный базис в $\text{im } F$, а векторы u_i с $1 \leq i \leq r$ — ортонормальный базис в ортогональном дополнении V к ядру $\ker F$. Оператор F является композицией изометрического изоморфизма $G_F : V \xrightarrow{\sim} \text{im } F$, $u_i \mapsto w_i$, диагонального оператора $S_F : V \rightarrow V$, $u_i \mapsto \alpha_i u_i$, и ортогональной проекции $P_F : U \rightarrow V$ вдоль $\ker F$.

Если имеется какое-либо ещё разложение $F = G S P_F$, где $P_F : U \rightarrow V$ — ортогональная проекция вдоль $\ker F$, то из предыдущего рассуждения вытекает, что пространство $V = (\ker F)^\perp$ является прямой ортогональной суммой всех собственных подпространств V_i оператора $F^\times F$, отвечающих ненулевым собственным значениям α_i^2 этого оператора, а композиция $G S : V \xrightarrow{\sim} \text{im } F$ совпадает с ограничением $F|_V$. Поскольку $S^\times = S$ как операторы $V \rightarrow V$, а $G^\times = G^{-1}$ как изометрические операторы $\text{im } F \xrightarrow{\sim} V$, мы заключаем, что $F^\times F|_V = S^2$. Так как оператор S^2 диагонализуется в том же самом базисе, что и S , мы заключаем, что самосопряжённый оператор S действует на каждом подпространстве V_i умножением на α_i и, тем самым, определяется по F однозначно. А тогда и $G = S^{-1} \circ F|_V : V \rightarrow W$ определяется однозначно. \square

УПРАЖНЕНИЕ 11.5. Убедитесь, что оператор $F^\times : W \rightarrow V$ действует на построенные в доказательстве [теор. 11.5](#) векторы $w_1, \dots, w_r \in W$ по правилу $w_i \mapsto \alpha_i u_i$ и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов $F^\times F$ и $F F^\times$ одинаковы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1 (сингулярные числа и сингулярные направления)

В условиях [теор. 11.5](#) набор из $\dim U$ неотрицательных квадратных корней α_i из собственных значений самосопряжённого оператора $F^\times F : U \rightarrow U$ называется *набором сингулярных чисел* линейного отображения $F : U \rightarrow W$ между евклидовыми пространствами U, W . Ровно $\text{rk } F$ из них строго положительны. Одномерные инвариантные подпространства¹ оператора $F^\times F$ называются *сингулярными направлениями* отображения F .

ПРИМЕР 11.6 (этимология эпитета «сингулярный»)

Свяжем с отображением $F : U \rightarrow W$ функцию $\varphi : U \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto (Fu, Fu)/(u, u)$. Покажем, что её производная зануляется ровно на собственных направлениях оператора $F^\times F$.

УПРАЖНЕНИЕ 11.6. Покажите, что $(u, u)'(v) = 2(u, v)$ и $(Fu, Fu)'(v) = 2(Fu, Fv) = 2(F^\times F u, v)$.

Согласно правилу дифференцирования дробей, условие $\varphi'(u) = 0$ равносильно тому, что для любого $v \in V$ выполняется равенство $2(F^\times F u, v)(u, u) - 2(Fu, Fu)(u, v) = 0$, означающее, что

¹Т. е. одномерные подпространства, порождённые ненулевыми собственными векторами.

$F^\times F u = u \cdot (Fu, Fu) / (u, u)$, т. е. что вектор u является собственным для оператора $F^\times F$ с собственным значением $(Fu, Fu) / (u, u) = (F^\times F u, u) / (u, u)$.

Следствие 11.3 (полярное разложение)

Каждое биективное линейное преобразование $F \in GL(V)$ евклидова пространства V допускает единственное разложение $F = G_F S_F$, в котором оператор $G_F \in O(V)$ ортогонален, а $S_F \in GL(V)$ самосопряжён и имеет положительные собственные значения. Квадраты этих собственных значений являются собственными числами оператора $F^\times F$.

Доказательство. Поскольку оператор F биективен, правый член его канонического разложения $F = G_F \circ S_F \circ P_F$ из теор. 11.5 является тождественным отображением, а самосопряжённый оператор S_F не имеет ядра. Следовательно все собственные числа оператора S_F строго положительны. \square

Замечание 11.2. (явные формулы для G_F и S_F) Компоненты $G_F \in O(V)$ и S_F полярного разложения $F = G_F \circ S_F$ однозначно находятся из условий $G_F^\times G = \text{Id}_V$ и $S_F^\times = S_F$. А именно,

$$F^\times F = S_F^\times G_F^\times G_F S_F = S_F^2,$$

откуда $S_F = \sqrt{F^\times F}$ и $G_F = F S_F^{-1}$. Отметим, что так как нуль не является собственным числом оператора $F^\times F$, аналитическая вне нуля функция \sqrt{t} алгебраически вычислима на операторе $F^\times F$ при помощи стандартной интерполяционной процедуры из п° 9.4.1 на стр. 125.

Упражнение 11.7. Покажите, что каждый невырожденный линейный оператор $F \in GL(V)$ на евклидовом пространстве V также допускает единственное разложение $F = SR$, в котором $R \in O(V)$, а S самосопряжён и имеет положительные собственные значения, квадраты которых равны собственным числам оператора FF^\times .

Пример 11.7

Найдём полярное разложение $F = GS$ для оператора $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

в стандартном базисе. Поскольку $\det F = -4$, оператор F невырожден. Самосопряжённый оператор $F^\times F$ имеет матрицу

$$C = F^t F = \begin{pmatrix} 22/15 & 4/15 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/15 & 28/15 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 & 2/3 \\ -4/3 & 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

у которой след $\text{tr}(C) = 9$, сумма главных 2×2 -миноров

$$\det \begin{pmatrix} 8/3 & -4/3 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} = 16/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3, \quad \det \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 2/3 & 11/3 \end{pmatrix} = 28/3$$

равна 24, определитель $\det(C) = \det^2 F = 16$ и характеристический многочлен

$$\det(tE - C) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = (t-1)(t-4)^2.$$

Так как оператор $F^\times F$ диагонализуем, он аннулируется многочленом¹ $(t-1)(t-4)$. Следовательно, матрица $H = \sqrt{C}$ самосопряжённого сомножителя h полярного разложения $F = gh$ имеет вид² $aE + bC$, где интерполяционный многочлен $p(t) = a + bt$ для вычисления функции \sqrt{t} на матрице C однозначно определяется тем, что $p(1) = \sqrt{1} = 1$ и $p(4) = \sqrt{4} = 2$, т. е. $a + b = 1$ и $a + 4b = 2$, откуда $a = 2/3$, $b = 1/3$. Таким образом, полярное разложение имеет вид $F = GH$, где самосопряжённая матрица $H = \sqrt{C}$ равна

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 8/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 11/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 14/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & 17/9 \end{pmatrix}$$

а ортогональная матрица $G = FH^{-1}$ равна

$$\begin{pmatrix} 22/15 & -4/3 & 4/15 \\ 4/15 & 2/3 & 28/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13/18 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & 13/18 & -1/9 \\ -1/9 & -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/15 & -2/3 & 2/15 \\ 2/15 & 1/3 & 14/15 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

УПРАЖНЕНИЕ 11.8. Убедитесь, что $G^t G = E$.

СЛЕДСТВИЕ 11.4 (SVD-РАЗЛОЖЕНИЕ³)

Каждая вещественная прямоугольная матрица $F \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ раскладывается в произведение $F = T_m D T_n$, в котором матрицы $T_m \in O_m$ и $T_n \in O_n$ ортогональны, а $m \times n$ -матрица $D = (d_{ij})$ диагональна и неотрицательна в том смысле, что $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а все $d_{ii} \geq 0$. При этом ровно $\text{rk } F$ диагональных элементов матрицы D отлично от нуля, и они с точностью до перестановки диагональных элементов не зависят от выбора указанного разложения.

Доказательство. Будем воспринимать $F = F_{mn}$ как записанную в стандартных базисах \mathbf{n} и \mathbf{m} пространств $U = \mathbb{R}^n$ и $W = \mathbb{R}^m$ матрицу линейного оператора $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ортонормальный базис пространства U , построенный в доказательстве теор. 11.5, а через $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ — любой ортонормальный базис пространства W , содержащий ортонормальный набор векторов $w_i = F(u_i)/\alpha_i$, $1 \leq i \leq r$, из доказательства теор. 11.5. Оператор $F: u_i \mapsto \alpha_i w_i$ задаётся в базисах \mathbf{u} и \mathbf{w} диагональной матрицей $D = F_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, ненулевые диагональные элементы которой суть сингулярные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ оператора F . Поэтому $F = F_{mn} = C_{\mathbf{m}\mathbf{w}} F_{\mathbf{w}\mathbf{u}} C_{\mathbf{u}\mathbf{n}}$, где $C_{\mathbf{m}\mathbf{w}}$ — ортогональная матрица перехода от базиса \mathbf{w} к стандартному базису \mathbf{m} в \mathbb{R}^m , а $C_{\mathbf{u}\mathbf{n}} = C_{\mathbf{n}\mathbf{u}}^{-1} = C_{\mathbf{n}\mathbf{u}}^t$ — ортогональная матрица перехода от стандартного базиса \mathbf{n} в \mathbb{R}^n к базису \mathbf{u} . Для любого другого разложения $F = T_m A T_n$ с ортогональными T_n , T_m и диагональной матрицей A имеем $F^t F = T_n^{-1} A^t A T_n$. Поскольку подобные матрицы имеют одинаковые с точностью до перестановки собственные числа, стоящие на диагонали диагональной матрицы $A^t A$ квадраты диагональных элементов матрицы A суть собственные числа матрицы $F^t F$. \square

¹См. предл. 9.4 на стр. 121.

²См. п. 9.4.1 на стр. 125.

³«SVD» является аббревиатурой от английского *singular values decomposition*.

11.5. Инвариантные углы между подпространствами. Рассмотрим в евклидовом пространстве \mathbb{R}^k пару векторных подпространств U, W размерностей $\dim U = n \leq m = \dim W$ и обозначим через $\pi : U \rightarrow W$ ортогональную проекцию вдоль W^\perp . Пусть эта проекция имеет сингулярные числа $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$. Так как $|\pi u| = |u| \cdot \cos \angle(\pi u, u)$ для всех $u \in U$, числа $\alpha_i = \cos \varphi_i$ являются косинусами неубывающих углов

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq \pi/2, \quad \varphi_i = \angle(w_i, u_i), \quad (11-6)$$

между векторами u_1, \dots, u_n некоторого ортонормального базиса \mathbf{u} в U и первыми n векторами такого ортонормального базиса $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ в W , что вектор πu_i пропорционален вектору w_i при $1 \leq i \leq n$, причём по [теор. 11.5](#) этот набор углов не зависит от выбора ортонормального базиса в U , проектирующегося в ортогональный набор векторов из W . Поэтому углы (11-6) называются *инвариантными углами* между подпространствами U, W . Мы будем обозначать набор инвариантных углов через $\angle(U, W) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Предложение 11.3

Максимальное значение скалярного произведения (u, w) всевозможных пар векторов $u \in U, w \in W$ единичной длины $|u| = |w| = 1$ равно максимальному сингулярному числу ортогональной проекции $\pi : U \rightarrow W$ вдоль W^\perp . Минимальный угол $\angle(u, w)$ между ненулевыми векторами $u \in U, w \in W$ достигается на сингулярном направлении u_1 проекции π с максимальным коэффициентом растяжения α_1 и его ортогональной проекции $\pi(u_1)$.

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение, первое является его переформулировкой. Пусть ортонормальные базисы $u_1, \dots, u_n \in U$ и $w_1, \dots, w_m \in W$ таковы, что

$$\pi u_i = \alpha_i w_i \quad \text{при } 1 \leq i \leq n.$$

Так как $u_i = w_i + w'_i$ для некоторых векторов $w'_1, \dots, w'_n \in W^\perp$, мы имеем при всех $i \neq j$ соотношения ортогональности $(u_i, w_j) = 0$, из которых в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца¹ вытекает, что для любых $u = \sum x_i u_i$ и $w = \sum y_j w_j$ длины $|u| = |w| = 1$

$$\begin{aligned} (u, w) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i (u_i, w_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \leq \sqrt{\alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \leq \\ &\leq \alpha_1 \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \leq \alpha_1 |u| |w| = \alpha_1 = (u_1, w_1). \end{aligned}$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 11.9. Выведите существование минимального угла между ненулевыми векторами $u \in U, w \in W$ из компактности сферы и непрерывности скалярного произведения.

Пример 11.8 (явные формулы для инвариантных углов)

Если в пространствах $U, W \subset \mathbb{R}^k$ заданы (не обязательно ортонормальные) базисы

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) = \mathbf{e} C_{eu} \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m) = \mathbf{e} C_{ew},$$

¹См. [прим. 3.2](#) на стр. 35.

где \mathbf{e} — стандартный ортонормальный базис в \mathbb{R}^k , то набор ортогональных проекций

$$\mathbf{u}_W = (u_{1W}, \dots, u_{n_W})$$

базисных векторов пространства U на пространство W выражается через базис \mathbf{w} по формуле¹ $\mathbf{u}_W = \mathbf{w} (\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{w} G_w^{-1} G_{wu}$, где $G_{wu} = C_{ew}^t C_{eu}$ — взаимная матрица Грама² наборов \mathbf{w} и \mathbf{u} . Таким образом, проектор $\pi : U \rightarrow W$ имеет в базисах \mathbf{u} и \mathbf{w} матрицу

$$\Pi_{wu} = G_w^{-1} G_{wu} = G_w^{-1} C_{ew}^t C_{eu}.$$

Согласно форм. (11-5) на стр. 146 евклидово сопряжённый к нему оператор имеет в тех же базисах матрицу $\Pi_{uw}^\times = G_u^{-1} \Pi_{wu}^t G_w = G_u^{-1} G_{wu}^t = G_u^{-1} G_{uw}$. Тем самым, квадраты косинусов инвариантных углов $\angle(U, W)$ суть собственные числа симметричной матрицы

$$\Pi_{uw}^\times \Pi_{wu} = G_u^{-1} G_{uw} G_w^{-1} G_{wu} = G_{u \times w} G_{wu}.$$

ПРИМЕР 11.9 (индуктивное геометрическое описание инвариантных углов)

Ортонормальные базис u_1, \dots, u_n в U и набор векторов w_1, \dots, w_n в W , такие что

$$\angle(U, W) = (\angle(u_1, w_1), \dots, \angle(u_n, w_n)),$$

можно получить следующим образом. Сначала выберем произвольный ортонормальный базис u_1, \dots, u_i в пересечении $U \cap W$ и положим $w_v = u_v$ при $v \leq i$. Далее рассмотрим пространства $V_i = (U \cap W)^\perp$, $U_i = U \cap V_i$ и $W_i = W \cap V_i$. По предл. 11.3 (или по упр. 11.9) угол $\angle(u, w)$ между ненулевыми векторами $u \in U_i$, $w \in W_i$ достигает минимума на некоторой паре векторов u_{i+1}, w_{i+1} единичной длины. Добавим эти векторы к уже построенным наборам u_1, \dots, u_i и w_1, \dots, w_i . Теперь обозначаем через $V_{i+1} \subset V_i$ ортогональное дополнение к плоскости, порождённой векторами u_{i+1}, w_{i+1} , полагаем $U_{i+1} = U_i \cap V_{i+1}$, $W_{i+1} = W_i \cap V_{i+1}$ и повторяем процедуру.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.4

Пара векторных подпространств U', W' евклидова пространства тогда и только тогда переводится ортогональным линейным преобразованием в пару подпространств U'', W'' , когда

$$\dim U' = \dim U'', \quad \dim W' = \dim W'' \quad \text{и} \quad \angle(U', W') = \angle(U'', W'') \quad (11-7)$$

Доказательство. Необходимость равенств (11-7) очевидна. Если они выполняются, то

$$\dim(U' \cap W') = \dim(U'' \cap W'') \quad \text{и} \quad \dim(U' + W') = \dim(U'' + W''),$$

первое — в силу того, что $\dim(U \cap W)$ совпадает с количеством равных единице сингулярных чисел ортогональной проекции $\pi : U \rightarrow W$, второе — по предл. 4.2 на стр. 53. Поэтому существует такое ортогональное преобразование g объёмлющего евклидова пространства, что $g(U' + W') = U'' + W''$, $g(U' \cap W') = U'' \cap W''$ и $g(W') = W''$. Тем самым, можно считать, что

¹Как и выше, точкой обозначается произведение матриц из векторов, при вычислении которого векторы перемножаются скалярно. Обратите внимание, что левое произведение в формуле $\mathbf{w} (\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u})$ это произведение матрицы из векторов на числовую матрицу $\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u}$, и его не следует путать со скалярным произведением матриц из векторов: равенство $\langle \mathbf{w} (\mathbf{w}^{\times t} \cdot \mathbf{u}) \rangle = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^{\times t}) \mathbf{u}$ категорически неверно!

²См. формулу (10-5) на стр. 133.

$W' = W'' = W$, а объемлющее евклидово пространство совпадает с суммой $W + U' = W + U''$, причём $W \cap U' = W \cap U''$. Обозначая последнее пересечение через V мы можем заменить объемлющее пространство на V^\perp , а подпространства W, U', U'' — их пересечениями с V^\perp . Таким образом, можно без ограничения общности считать, что объемлющее пространство имеет вид $W \oplus W^\perp$, где $W = W' = W''$, а подпространства U' и U'' имеют нулевое пересечение с W и $\dim U' = \dim U'' = \dim W^\perp$. В этом случае оба подпространства U' и U'' изоморфно проектируются на W^\perp вдоль W . Выберем в U' и U'' ортонормальные базисы из таких векторов

$$u'_i = \alpha_i w'_i + v'_i \quad \text{и} \quad u''_i = \alpha_i w''_i + v''_i, \quad \text{где} \quad v'_i, v''_i \in W^\perp, \quad (11-8)$$

что векторы w'_i и w''_i образуют ортонормальные системы в W . Дополним эти ортонормальные системы до ортонормальных базисов \mathbf{w}' и \mathbf{w}'' в W . Набор \mathbf{v}' векторов v'_i и набор \mathbf{v}'' векторов v''_i в (11-8) оба являются (возможно, не ортонормальными) базисами в W^\perp . Обозначим через $f \in \text{End}(W \oplus W^\perp)$ линейный оператор, переводящий базисы \mathbf{w}' и \mathbf{v}' соответственно в базисы \mathbf{w}'' и \mathbf{v}'' . Тогда $f(U') = U''$. Покажем, что f сохраняет скалярные произведения. Для этого достаточно убедиться, что базисы \mathbf{v}' и \mathbf{v}'' имеют одинаковые матрицы Грама. Это действительно так, поскольку из равенств $(u'_i, w'_i) = \alpha_i = (u''_i, w''_i)$ и $(u'_i, w'_j) = 0 = (u''_i, w''_j)$ вытекает, что как векторы $v'_i = u'_i - \alpha_i w'_i$, так и векторы $v''_i = u''_i - \alpha_i w''_i$ ортогональны и имеют скалярные квадраты $(v'_i, v'_i) = (v''_i, v''_i) = 1 - \alpha_i$. \square

§12. Выпуклая геометрия

Всюду в этом параграфе речь идёт про конечномерные векторные и аффинные пространства над полем \mathbb{R} .

12.1. Выпуклые фигуры. Барицентрическая комбинация¹ $x_1 p_1 + \dots + x_m p_m$ точек p_i вещественного аффинного пространства \mathbb{A}^n называется *выпуклой*, если все её коэффициенты $x_i \geq 0$. Фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ называется *выпуклой*, если она содержит все выпуклые барицентрические комбинации любых своих точек. Из теоремы о группировании масс² вытекает, что для выпуклости фигуры необходимо и достаточно, чтобы вместе с любыми двумя своими точками a, b она содержала и соединяющий их отрезок $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda a + \mu b \mid \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0\}$. Очевидно, что пересечение выпуклых фигур выпукло. Пересечение всех выпуклых фигур, содержащих данную фигуру Φ , называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\text{conv } \Phi$. Иначе $\text{conv } \Phi$ можно описать как множество всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ : это множество выпукло по [упр. 1.8](#) на стр. 17 и содержится в любом выпуклом множестве, содержащем фигуру Φ .

12.1.1. Топологическое отступление. Для произвольного вещественного $\varepsilon > 0$ мы называем ε -окрестностью точки $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ правильный куб с центром в p и направленными вдоль стандартных координатных осей рёбрами длины 2ε :

$$B_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \ |x_i - p_i| \leq \varepsilon\}. \quad (12-1)$$

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ *открыто*³, если вместе с каждой точкой $p \in U$ в U лежит и какая-нибудь её ε -окрестность $B_\varepsilon(p)$. Кубы (12-1) являются шарами радиуса ε относительно *sup-нормы*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\text{sup}} = \max_i |x_i|.$$

Рассматриваемая нами топология является *метрической топологией*, определяемой при помощи этой нормы. Поскольку все нормы на векторном пространстве \mathbb{R}^n задают одну и ту же топологию, данное выше определение открытого множества не зависит от выбора системы координат, использованной для определения ε -окрестностей.

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Докажите это непосредственно, без ссылок на курс топологии.

Напомним, что точка p называется *внутренней* точкой фигуры Φ , если она лежит в Φ вместе с некоторой своей ε -окрестностью. Множество внутренних точек фигуры Φ обозначается $\text{int } \Phi$. Внутренние точки дополнения $\mathbb{A}^n \setminus \Phi$ называются *внешними* точками фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$. Точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными*. Множество граничных точек фигуры Φ обозначается $\partial\Phi$. Объединение $\bar{\Phi} = \Phi \cup \partial\Phi$ называется *замыканием* фигуры Φ .

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Покажите, что $p \in \partial\Phi$ если и только если в любой ε -окрестности точки p имеются как точки фигуры Φ , так и точки не лежащие в Φ , и докажите, что замыкание $\bar{\Phi}$ является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим Φ .

Предложение 12.1

Внутренность и замыкание любой выпуклой фигуры выпуклы.

¹См. п° 1.4.2 на стр. 16.

²См. [упр. 1.8](#) на стр. 17.

³Все необходимые нам сведения из курса топологии имеются в лекции:

http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.

Доказательство. Первое вытекает из того, что если точки a и b содержатся в выпуклом множестве Φ вместе с некоторыми ε -кубами $B_\varepsilon(a), B_\varepsilon(b) \subset \Phi$, то все точки отрезка $[ab]$ содержатся в Φ вместе с такими же ε -кубами, см. рис. 12♦1. Второе — из того, что если $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ и $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$, то при любых фиксированных λ и μ предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \mu \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lambda a + \mu b$. Таким образом, каждая точка отрезка $[a, b]$ является пределом последовательности точек фигуры Φ , если таковыми являются концы a, b этого отрезка. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Докажите, что замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью является замыканием множества своих внутренних точек, и приведите пример невыпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью, которое не является замыканием множества своих внутренних точек.

ПРИМЕР 12.1 (СИМПЛЕКСЫ)

Выпуклая оболочка $n + 1$ точек p_0, \dots, p_n , не лежащих в $(n - 1)$ -мерной плоскости, называется n -мерным симплексом с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n x_i p_i \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}. \quad (12-2)$$

Одномерные, двумерные и трёхмерные симплексы суть отрезки, треугольники и тетраэдры соответственно. В порождённом вершинами симплекса пространстве \mathbb{A}^n , в аффинных координатах (x_1, \dots, x_n) относительно репера с началом в p_0 и базисными векторами $\overrightarrow{p_0 p_i}$, где $1 \leq i \leq n$, симплекс (12-2) задаётся системой из $n + 1$ линейных неоднородных неравенств $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1$. Так как в точке с координатами $(1/2n, \dots, 1/2n)$ все эти неравенства выполнены строго, она принадлежит симплексу вместе с некоторым ε -кубом, т. е. каждый n -мерный симплекс в \mathbb{R}^n имеет непустую внутренность.

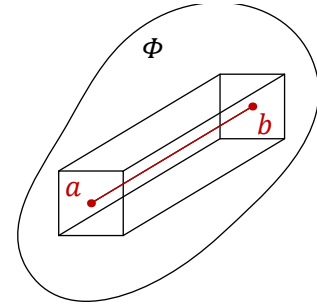


Рис. 12♦1. Выпуклость внутренности.

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{v_1}, \dots, p_{v_m}]$, где $m < n$ и $v_i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

ЛЕММА 12.1

Для любого открытого выпуклого множества U в аффинном пространстве размерности $n \geq 2$ через каждую точку $p \notin U$ можно провести не пересекающую U прямую.

Доказательство. Обозначим через C объединение всех открытых лучей

$$]p, u) \stackrel{\text{def}}{=} \{p + t \cdot \overrightarrow{pu} \mid u \in U, t > 0\},$$

начинающихся в p и проходящих через всевозможные точки $u \in U$. Из рис. 12♦2 и рис. 12♦3 на стр. 158 очевидно, что C является открытой выпуклой фигурой, и $p \in \partial C$. Так как $U \subset C$, достаточно провести через p прямую, не пересекающую C . Из выпуклости C следует, что любая проходящая через p прямая ℓ либо не пересекает C , либо пересекает C по одному из лучей $]p, u)$, все точки которого являются внутренними точками C , а все остальные отличные от p точки прямой ℓ являются для C внешними, см. рис. 12♦2. В частности, внешние для C точки существуют. Пусть q — одна из них. Поскольку объемлющее аффинное пространство по крайней

мере двумерно, через q можно провести пересекающую C прямую, отличную от прямой (qp) . На ней имеется отличная от p граничная точка r конуса C . Тем самым, $(pr) \cap C = \emptyset$. \square

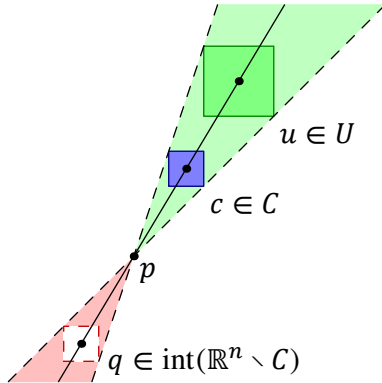


Рис. 12.2. Открытость C и непустота $\text{int}(\mathbb{A}^n \setminus C)$.

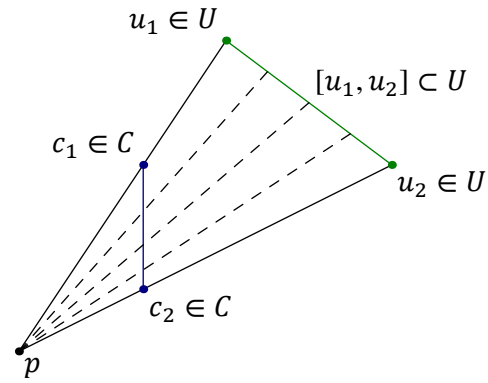


Рис. 12.3. Выпуклость C .

12.2. Опорные полупространства. Мы называем *аффинными функционалами* на пространстве $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V)$ аффинные отображения¹ $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Если произвольно фиксировать начальную точку $c \in \mathbb{A}^n$, то действие такого функционала на точку $p \in \mathbb{A}^n$ задается формулой

$$a(p) = a(c) + \alpha(\overrightarrow{cp}),$$

которую мы будем коротко записывать в виде $a = a_c + \alpha$, где $a_c = a(c) \in \mathbb{R}$, а дифференциал $\alpha = D_a \in V^*$ не зависит от c . Ограничение аффинного функционала $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ на любой отрезок $[p, q] \subset \mathbb{A}^n$ представляет собою «школьную линейную функцию» $a(x) = \alpha x + \beta$ на этом отрезке, и для неё имеются следующие исключаяющие друг друга возможности: она либо тождественно нулевая, либо нигде не обращается в нуль и имеет на всём отрезке постоянный знак, либо зануляется ровно в одной точке $z \in [p, q]$. В последнем случае имеется дальнейшая альтернатива: либо точка z является одним из концов отрезка, и функционал a имеет постоянный знак на полуинтервале $[p, q] \setminus z$, либо $z \in (a, b)$, а a имеет постоянные и противоположные друг другу знаки на полуинтервалах $[p, z]$ и $(z, b]$. Таким образом, каждый непостоянный аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задает разбиение аффинного пространства \mathbb{A}^n в дизъюнктное объединение аффинной гиперплоскости $H_a = \{p \in \mathbb{A}^n \mid a(p) = 0\}$ и двух выпуклых открытых полупространств $\text{int } H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\}$ и $\text{int } H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}$, которые являются внутренностями двух замкнутых полупространств $H_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geq 0\}$ и $H_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leq 0\}$ с общей границей $\partial H_a^+ = \partial H_a^- = H_a$. Каждый отрезок $[p, q]$ с $p \in \text{int } H_a^+$ и $q \in \text{int } H_a^-$ пересекает гиперплоскость H_a в единственной точке, и она является внутренней точкой отрезка $[p, q]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1 (ОПОРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, ГИПЕРПЛОСКОСТИ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА)

Аффинный функционал $a : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *опорным* для фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$, если $H_a \cap \partial \Phi \neq \emptyset$ и $\Phi \subseteq H_a^+$. В этой ситуации гиперплоскость $H_a \subset \mathbb{A}^n$ и замкнутое полупространство H_a^+ тоже называются *опорными* для фигуры Φ .

¹См. п. 2.2 на стр. 25.

ТЕОРЕМА 12.1

Для любых открытого выпуклого множества U и не пересекающегося с ним аффинного подпространства Π в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ существует аффинная гиперплоскость, содержащая Π и не пересекающая U .

Доказательство. Поместим начало координат внутрь Π и отождествим Π с векторным подпространством $W \subset V$ (возможно нулевым). Обозначим через $H \subset V$ какое-нибудь максимальное по включению векторное подпространство, содержащее W и не пересекающее U , а через H' — любое дополнительное к H векторное подпространство. Проекция пространства $V = H \oplus H'$ на H' вдоль H переводит отрезки из $\mathbb{A}(V)$ в отрезки или точки из $\mathbb{A}(H')$, а кубы из $\mathbb{A}(V)$ со сторонами, направленными вдоль базисных векторов любого базиса в V , согласованного с разбиением $V = H \oplus H'$, — в аналогичные кубы в $\mathbb{A}(H')$. Поэтому множество U спроектируется в открытое выпуклое множество $U' \subset \mathbb{A}(H')$, не содержащее нуля, поскольку ядро проекции H не пересекается с U . Если $\dim H' > 1$, то по лем. 12.1 в H' найдётся одномерное подпространство L , не пересекающее U' . Но тогда подпространство $H \oplus L \subset V$ не пересекает U и строго больше, чем H , вопреки выбору H . Поэтому $\dim H' = 1$ и H является искомой гиперплоскостью. \square

ТЕОРЕМА 12.2

Через каждую граничную точку p любой выпуклой фигуры Φ можно провести опорную гиперплоскость (возможно, не единственную).

Доказательство. Если фигура $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ целиком лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то эта гиперплоскость и будет опорной. Если же в Φ есть $n + 1$ точек, не лежащих в одной гиперплоскости, то $\text{int } \Phi \neq \emptyset$ согласно прим. 12.1 на стр. 157. Проведём через p гиперплоскость H_a , не пересекающую $\text{int } \Phi$. Функционал a имеет на $\text{int } \Phi$ постоянный знак, так как в противном случае, соединив точки разного знака отрезком, мы получим на этом отрезке нуль функционала, т. е. точку из $H_a \cap \text{int } \Phi$. Меняя, если нужно, знак у a , мы можем считать, что $\text{int } \Phi \subset \text{int } H_a^+$. Поскольку Φ лежит в замыкании своей внутренней части $\text{int } \Phi$, которое в свою очередь содержится в замкнутом полупространстве H_a^+ , мы заключаем, что $\Phi \subset H_a^+$. \square

ТЕОРЕМА 12.3

Всякое замкнутое выпуклое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением своих опорных полупространств.

Доказательство. Применяя индукцию по размерности наименьшего аффинного подпространства, содержащего Z , мы можем считать, что Z не содержится в гиперплоскости, а значит, имеет непустую внутренность. Покажем, что в этом случае каждая внешняя точка $q \notin Z$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств множества Z . Для этого соединим q отрезком $[q, p]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \text{int } Z$ и проведём опорное полупространство H_a^+ к Z в граничной точке $r \in [q, p] \cap \partial Z$. Поскольку r лежит строго внутри $[q, p]$, из $a(p) > 0$ и $a(r) = 0$ следует, что $a(q) < 0$, т. е. $q \notin H_a^+$. \square

12.3. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутой выпуклой фигуры Φ с любой её опорной гиперплоскостью называется *гранью* фигуры Φ . Каждая грань фигуры Φ тоже является замкнутым выпуклым множеством. Размерностью грани называется размерность наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань. Отметим, что размерность любой грани

фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ строго меньше n . Нульмерные грани (т. е. грани-точки) называются *вершинами*. Под внутренними, внешними и граничными точками грани понимаются таковые точки в топологии наименьшего аффинного подпространства, содержащего эту грань.

Интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками, не всегда адекватно при работе с произвольными выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а у фигуры на рис. 12◊4, где пара отрезков гладко сопрягается с овалами, есть две одномерных грани, нульмерные грани которых не являются гранями самой фигуры. Таким образом, грань грани замкнутой выпуклой фигуры Φ может не быть гранью самой фигуры Φ .

Точка $p \in \Phi$ называется *крайней точкой* замкнутой выпуклой фигуры Φ , если она не является внутренней точкой никакого отрезка $[a, b] \subset \Phi$. Крайняя точка не может быть внутренней точкой никакой замкнутой выпуклой фигуры, отличной от точки. Если же точка q является внутренней точкой какого-либо отрезка $[a, b] \subset \Phi$, то она может оказаться в грани фигуры Φ только если весь отрезок $[a, b]$ лежит в этой грани, поскольку в противном случае высекающий грань функционал менял бы на концах отрезка знак и не был бы опорным. Таким образом, крайние точки суть последние, нульмерные элементы всевозможных цепочек вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , грань грани грани фигуры Φ и т. д., при условии, что такая цепочка действительно заканчивается нульмерной фигурой. В частности, все вершины фигуры Φ являются её крайними точками. Обратите внимание, что крайние точки всех граней замкнутой выпуклой фигуры Φ являются крайними и для Φ , хотя при этом они могут не быть вершинами фигуры Φ .



Рис. 12◊4.

ТЕОРЕМА 12.4

Каждая ограниченная замкнутая выпуклая фигура является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Доказательство. Индукция по размерности фигуры. Любая внутренняя точка фигуры является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого из фигуры произвольной проходящей через точку прямой. Эти концы лежат на гранях фигуры и по индукции являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Последние являются крайними точками и для самой фигуры. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2 (цилиндры)

Замкнутая выпуклая фигура вида $\Phi = A(U) \times B \subset A(U) \times A(W)$, где $\dim U > 0$, а $B \subset A(W)$ — непустая замкнутая выпуклая фигура, не содержащая аффинных подпространств положительной размерности, называется *цилиндром с основанием B и образующей $A(U)$* . Если основание B состоит из одной точки, цилиндр совпадает со своей образующей $A(U)$ и является аффинным пространством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2

Через каждую точку p любой замкнутой выпуклой фигуры $\Phi \subset A(V)$ проходит единственное максимальное по включению аффинное подпространство, целиком содержащееся в Φ . Все такие подпространства имеют одно и то же направляющее векторное пространство $U \subset V$. Если $U \neq 0$, то для любого дополнительного¹ векторного подпространства $U' \subset V$ замкнутая выпук-

¹Т. е. такого, что $U \oplus U' = V$.

лая фигура $\Phi' = \Phi \cap (p + U')$ не содержит аффинных пространств положительной размерности, и $\Phi = \mathbb{A}(U) \times \Phi'$ является цилиндром с основанием Φ' с образующей $\mathbb{A}(U)$.

Доказательство. Если аффинные подпространства $p + W_1$ и $p + W_2$ содержатся в Φ , то Φ содержит и аффинное подпространство $p + (W_1 + W_2)$, т. к. для любых $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ точка $p + w_1 + w_2$ является серединой отрезка с концами в точках $p + 2w_1$ и $p + 2w_2$. Поэтому аффинное пространство $p + U$, где $U \subset V$ это сумма всех таких подпространств $W \subset V$, что $p + W \subset \Phi$, содержит все лежащие в Φ аффинные подпространства, проходящие через p . Если $q + W$ это максимальное содержащееся в Φ аффинное подпространство, проходящее через точку $q \notin p + U$, то $U \subset W$, так как для любого вектора $u \in U$ точка $r = q + u$ является концом содержащегося в Φ интервала $[p, r] = \{(1 - t)p + tr \mid 0 \leq t < 1\}$ (см. рис. 12◊5), ибо для каждого $t \in [0, 1)$

$$(1 - t)p + t(q + u) = (1 - t)\left(p + \frac{t}{1 - t}u\right) + tq \in \Phi.$$

По той же причине $W \subset U$. Это доказывает первые два утверждения и первую половину третьего. Прямое разложение $V = U \oplus U'$ задаёт разложение $\mathbb{A}(V) = (p + U) \times (p + U')$, в котором $p + U \subset \Phi$. Для любой точки $q = p + u + u' \in \Phi$ точка $p + u' = q - u \in q + U$ лежит в $(p + U') \cap \Phi = \Phi'$. Наоборот, для любой точки $p + u' \in \Phi' \subset \Phi$ всё аффинное пространство $p + u' + U \subset \Phi$. Поэтому $\Phi \subset (p + U) \times \Phi'$. \square

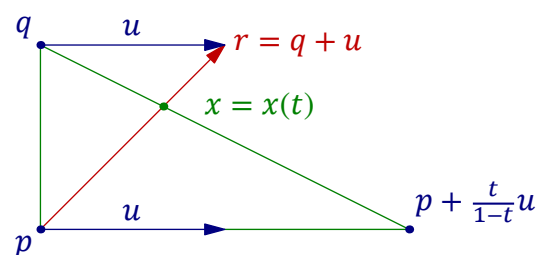


Рис. 12◊5. $\overrightarrow{px} : \overrightarrow{xr} = t : (1 - t)$.

Следствие 12.1

Следующие свойства непустой замкнутой выпуклой фигуры Φ эквивалентны друг другу:

- 1) Φ является цилиндром
- 2) Φ не имеет крайних точек
- 3) Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2). Если Φ цилиндр, то через любую точку $p \in \Phi$ проходит содержащееся в Φ аффинное пространство положительной размерности. Поэтому никакая точка $p \in \Phi$ не может быть крайней.

Импликация (2) \Rightarrow (3). Если фигура Φ не совпадает с наименьшим аффинным подпространством, в котором она содержится, то в этом подпространстве у Φ есть опорная гиперплоскость, а значит, и грань строго меньшей размерности, чем $\dim \Phi$. Заменяя Φ на эту грань и повторяя рассуждение, мы построим цепочку вида: фигура Φ , грань фигуры Φ , грань грани фигуры Φ , и т. д., последний элемент в которой совпадает с наименьшим содержащим его аффинным подпространством. Если это подпространство — точка, то она крайняя. Если нет, то Φ содержит аффинное подпространство положительной размерности.

Импликация (3) \Rightarrow (1) вытекает из предл. 12.2. \square

12.4. Выпуклые многогранники. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$M = H_{a_1}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+, \quad (12-3)$$

заданных в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ аффинными функционалами $a_1, \dots, a_m : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, называется *выпуклым многогранником*. В координатном пространстве \mathbb{R}^n многогранник (12-3), заданный функционалами $a_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i$, где $1 \leq i \leq m$, представляет собою множество всех решений системы линейных неоднородных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \geq 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \end{cases} \quad (12-4)$$

которую в матричных обозначениях можно коротко записать в виде $Ax + b \geq 0$, где столбец переменных $x \in \mathbb{R}^n$, столбец констант $b \in \mathbb{R}^m$, а $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Пересечение конечного множества выпуклых многогранников является выпуклым многогранником. В частности, выпуклыми многогранниками являются аффинные гиперплоскости $H_a = H_a^+ \cap H_a^- = H_a^+ \cap H_{-a}^+$, представляющие собою пересечения аффинных полупространств, и вообще все аффинные подпространства, включая пустое множество. Удобно считать выпуклым многогранником и всё пространство — множество решений неравенства $1 \geq 0$. Мы будем называть этот многогранник *несобственным*, а все остальные многогранники (12-3) — *собственными*. Все сечения выпуклых многогранников аффинными подпространствами являются выпуклыми многогранниками. Под *размерностью* выпуклого многогранника мы всегда понимаем размерность наименьшего аффинного подпространства, в котором он содержится.

12.4.1. Перечисление граней. Каждый непустой собственный многогранник M имеет грани, и все они тоже являются многогранниками. Сам многогранник M является своей гранью если и только если он содержится в некоторой гиперплоскости. В этом случае мы будем называть совпадающую с M грань *несобственной*, а все остальные грани $G \subsetneq M$ — *собственными*. Размерность каждой собственной грани строго меньше размерности многогранника. Грани $G \subset M$ размерности $\dim G = \dim M - 1$ называются *гипергранями*.

Для многогранника (12-3) и непустого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ обозначим через $H_I \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i \in I} H_{a_i}$ аффинное подпространство (возможно пустое), задаваемое системой линейных уравнений, получающейся из (12-4) выкидыванием части неравенств и заменой всех оставшихся неравенств на равенства. Для каждой грани $G = H_b \cap M$, высекаемой из многогранника M каким-либо опорным функционалом $b : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{R}$, обозначаем через $I(G) = \{i \mid G \subset H_{a_i}\}$ номера тех функционалов a_i в (12-3), которые тождественно нулюются на G . Таким образом, $G \subset H_{I(G)}$ и каждый функционал a_j с $j \notin I(G)$ положителен в какой-нибудь точке грани G .

ТЕОРЕМА 12.5 (ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ГРАНЕЙ)

Для каждой грани $G \subset M$ аффинное подпространство $H_{I(G)}$ является наименьшим по включению аффинным пространством, содержащим грань G . Точка $p \in G$ является внутренней точкой грани G если и только если $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(G)$. Для каждого непустого подмножества $I \subset \{1, \dots, m\}$ пересечение $G_I \stackrel{\text{def}}{=} M \cap H_I$ либо пусто, либо является гранью M , и все собственные грани многогранника M получают таким образом.

Доказательство. Сначала докажем первые два утверждения. Рассмотрим произвольную грань $\Gamma = M \cap H_b$, высекаемую из M каким-либо опорным функционалом b . Пусть точка $p \in \Gamma$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Тогда эти строгие неравенства выполняются и на некоторой кубической окрестности C точки p в аффинном пространстве $H_{I(\Gamma)}$. Покажем, что вся эта окрестность содержится в грани Γ , т. е. лежит и в M , и в H_b . Первое очевидно, второе вытекает из того, что если $b(q) > 0$ в некоторой точке $q \in C$, то продолжая отрезок $[q, p]$ за точку p , мы получим точку $r \in C$, в которой $b(r) < 0$, что невозможно, ибо $C \subset M$ и функционал b на M неотрицателен. Итак, если точка $p \in \Gamma$ такова, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$, то подпространство $H_{I(\Gamma)}$ является наименьшим аффинным пространством, содержащим грань Γ , а точка p является внутренней точкой грани Γ .

Заметим теперь, что точка $p \in \Gamma$, в которой $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$ обязательно существует, так как для каждого $j \notin I(\Gamma)$ есть точка $p_j \in \Gamma$, в которой $a_j(p_j) > 0$, и в качестве p можно взять равновесный барицентр этих точек p_j . Это доказывает первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения остаётся проверить, что если хоть один функционал a_j с $j \notin I(\Gamma)$ зануляется в некоторой точке $p \in \Gamma$, то точка p не может быть внутренней точкой грани Γ . Для этого рассмотрим такую точку $q \in \Gamma$, в которой $a_j(q) > 0$. Если бы точка p содержалась в Γ вместе с некоторой своей кубической окрестностью в пространстве $H_{I(\Gamma)}$, то мы могли бы немного продлить отрезок $[q, p]$ за точку p внутри этой окрестности и получить в Γ точку r с $a_j(r) < 0$, что невозможно.

Теперь рассмотрим произвольное непустое подмножество $I \subset \{1, \dots, m\}$. Если многогранник $\Gamma_I = M \cap H_I$ не пуст, то сумма $a_I = \sum_{i \in I} a_i$ является опорным функционалом для M и $\Gamma_I = M \cap H_{a_I}$. Поэтому все непустые многогранники Γ_I являются гранями многогранника M . Покажем, что каждая собственная грань $\Gamma = H_b \cap M$, высекаемая из M произвольным опорным функционалом b , имеет вид $\Gamma = \Gamma_I = M \cap H_I$ для множества индексов $I = I(\Gamma) = \{i \mid \Gamma \subset H_{a_i}\}$. Сначала убедимся, что $I(\Gamma) \neq \emptyset$. Как мы видели в предыдущем абзаце, в грани Γ имеется такая точка $p \in \Gamma$, что $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I(\Gamma)$. Если бы множество $I(\Gamma)$ было пусто, то в такой точке p были бы положительны сразу все задающие многогранник M функционалы a_i , а значит, они остались бы положительными и на некоторой кубической окрестности точки p во всём пространстве $A(V)$. Тем самым, точка p была бы внутренней точкой M и не могла бы лежать ни в какой собственной грани. Мы заключаем, что $I = I(\Gamma) \neq \emptyset$ и $\Gamma \subseteq H_I \cap M = \Gamma_I$. Остаётся доказать обратное включение $\Gamma_I \subseteq \Gamma$. Для этого рассмотрим произвольную точку $q \in \Gamma_I$ и любую такую точку $p \in \Gamma$, в которой $a_j(p) > 0$ для всех $j \notin I$. Тогда точка p лежит внутри грани Γ вместе с некоторой своей кубической окрестностью в пространстве H_I , и отрезок $[q, p]$ можно немного продлить за точку p так, чтобы его новый конец r всё ещё лежал в Γ . Из соотношений $b(p) = 0$ и $b(r) = 0$ вытекает, что $b(q) = 0$. Следовательно, каждая точка $q \in \Gamma_I$ лежит в грани Γ . \square

Следствие 12.2

Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, и каждая грань любой грани является гранью самого многогранника. \square

Следствие 12.3

Крайними точками любого выпуклого многогранника являются его вершины и только они. \square

Следствие 12.4

Каждый ограниченный выпуклый многогранник имеет конечное множество вершин и совпадает с их выпуклой оболочкой. \square

Следствие 12.5

Непустой выпуклый многогранник M тогда и только тогда является цилиндром¹, когда он не имеет вершин. \square

12.5. Выпуклые многогранные конусы. Каждое непустое конечное подмножество $R \subset V$ задаёт в аффинном пространстве $A(V)$ замкнутую выпуклую фигуру

$$\sigma_R = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, w_i \in R \subset V\}, \quad (12-5)$$

которая называется *выпуклым многогранным конусом* с множеством образующих R .

УПРАЖНЕНИЕ 12.5. Убедитесь, что σ_R действительно является замкнутой выпуклой фигурой.

Каждый конус (12-5) не пуст, поскольку содержит нулевой вектор $0 \in V$. Вместе с каждым ненулевым вектором $v \in \sigma_R$ в конусе $\sigma_{\mathbb{R}}$ лежат и все неотрицательные кратные этого вектора, т. е. замкнутый луч $[0, v) = \mathbb{R}_{\geq 0} v$. Поэтому любая опорная гиперплоскость H_α конуса σ проходит через нуль: в противном случае из неравенства $\alpha(0) > 0$ и равенства $\alpha(v) = 0$, которое должно выполняться в некоторой точке $v \in H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$, вытекало бы, что $\alpha(w) < 0$ для всех $w \in [0, v) \setminus [0, v]$. Таким образом, все опорные гиперплоскости любого конуса являются *векторными* подпространствами в V и имеют вид H_α для некоторого *линейного* функционала $\alpha \in V^*$. Будучи замкнутой выпуклой фигурой, каждый конус σ_R является пересечением своих опорных полупространств $H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}$, по всем таким $\alpha \in V^*$, что $\alpha(w) \geq 0$ для всех $w \in \sigma_R$ и $H_\alpha \cap \sigma_R \neq \emptyset$. Поэтому для любого вектора $u \notin \sigma_R$ найдётся такой ковектор $\alpha \in V^*$, что $\alpha(u) < 0$, но $\alpha(w) \geq 0$ для всех $w \in \sigma_R$. Это наблюдение известно как *лемма Фаркаша*.

ТЕОРЕМА 12.6 (ТЕОРЕМА ФАРКАША – МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Подмножество $\sigma \subset V$ тогда и только тогда является выпуклым многогранным конусом, когда оно является пересечением конечного числа векторных полупространств

$$H_\alpha^+ = \{v \in V \mid \alpha(v) \geq 0\}, \quad \text{где } \alpha \in V^*. \quad (12-6)$$

В частности, каждый выпуклый многогранный конус является выпуклым многогранником.

Доказательство. Пусть подмножество $\sigma \subset V$ является пересечением конечного числа векторных полупространств (12-6). Тогда σ является выпуклым многогранником в $A(V)$, содержит нуль $0 \in V$, и вместе с каждой точкой $p \neq 0$ содержит весь замкнутый луч $[0, p)$. Пересечение многогранника σ со стандартным единичным кубом $B_1(0) \subset A(V)$ с центром в нуле является ограниченным выпуклым многогранником и по сл. 12.4 совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, которые образуют конечное множество $R \subset \sigma$. Так как для каждого $v \in \sigma$ существует такое $\lambda \geq 0$, что $\lambda v \in \sigma \cap B_1(0)$ является выпуклой комбинацией векторов из R , сам вектор v является неотрицательной линейной комбинацией векторов из R , т. е. $\sigma = \sigma_R$.

Наоборот, любой многогранный конус $\sigma_R \subset V$, как мы видели, является пересечением опорных полупространств вида (12-6). Для того, чтобы неравенство $\alpha(w) \geq 0$ выполнялось для всех $w \in \sigma_R$, достаточно, чтобы оно выполнялось для всех $w \in R$. Поэтому множество всех таких ковекторов $\alpha \in V^*$, что $\sigma_R \subset H_\alpha^+$ представляет собою пересечение конечного числа векторных полупространств $H_w^+ = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(w) \geq 0\}$, задаваемых векторами $w \in R$, рассматриваемыми как линейные функционалы на V^* . По уже доказанному, такое пересечение является выпуклым многогранным конусом $\sigma_{R^\vee} \subset V^*$, порождённым конечным множеством ковекторов $R^\vee \subset V^*$.

¹См. *опр. 12.2* на стр. 160. Являющиеся цилиндрами многогранники также называют *призмами*.

Так как каждый ковектор $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$ является неотрицательной линейной комбинацией ковекторов $\psi \in R^\vee$, все неравенства $\alpha(v) \geq 0$, где $\alpha \in \sigma_{R^\vee}$, следуют из конечного набора неравенств $\psi(v) \geq 0$, где $\psi \in R^\vee$, т. е. $\sigma = \bigcap_{\psi \in R^\vee} H_\psi^+$. \square

12.5.1. Двойственные конусы. Множество линейных функционалов $\alpha \in V^*$, принимающих неотрицательные значения на выпуклом многогранном конусе $\sigma_R \subset V$, является пересечением конечного числа векторных полупространств $H_w^+ \subset V^*$, задаваемых образующими $w \in R$ конуса σ_R , рассматриваемыми как линейные функционалы на V^* , и по [теор. 12.6](#) представляет собою выпуклый многогранный конус

$$\sigma_R^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* \mid \forall v \in \sigma_R \alpha(v) \geq 0\} = \bigcap_{w \in R} H_w^+ \subset V^*,$$

порождённый конечным набором ковекторов, который мы обозначим через $R^\vee \subset V^*$. Конус $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ называется *двойственным* к конусу $\sigma_R \subset V$. По лемме Фаркаша исходный конус

$$\sigma_R = \{v \in V \mid \forall \alpha \in \sigma_{R^\vee} \alpha(v) \geq 0\} = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} \alpha^+ \subset V$$

двойствен к своему двойственному конусу. Таким образом, для любого выпуклого многогранного конуса σ выполняется равенство $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$. Множество $R^\vee \subset V^*$ образующих двойственного к σ_R конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$ состоит из таких ковекторов $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in V^*$, что конус $\sigma_R = H_{\alpha_1}^+ \cap \dots \cap H_{\alpha_m}^+$.

12.5.2. Проективный и асимптотический конусы многогранника. Вложим \mathbb{R}^n со стандартными базисом e_1, \dots, e_n и координатами (x_1, \dots, x_n) в этом базисе в $(n+1)$ -мерное пространство $W = \mathbb{R}^{n+1}$ с базисом e_0, e_1, \dots, e_n и координатами (x_0, x_1, \dots, x_n) в качестве векторного подпространства $V \subset W$, задаваемого уравнением $x_0 = 0$, и обозначим через $U = e_0 + V$ аффинную гиперплоскость, заданную уравнением $x_0 = 1$. Каждый выпуклый многогранник $M = H_{\alpha_1}^+ \cap \dots \cap H_{\alpha_m}^+ \subset \mathbb{R}^n$, задаваемый неоднородными неравенствами на (x_1, \dots, x_n) :

$$b_i + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m, \quad (12-7)$$

является пересечением аффинной гиперплоскости U с выпуклым многогранным конусом $\bar{M} \subset W = \mathbb{R}^{n+1}$, который задаётся однородными неравенствами на (x_0, x_1, \dots, x_n) :

$$b_0x_0 + \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m, \quad (12-8)$$

см. [рис. 12.6](#). Конус \bar{M} называется *проективным конусом* многогранника M . Его пересечение с векторным подпространством $V \subset W$, которое задаётся уравнением $x_0 = 0$ и является направляющим векторным подпространством аффинной гиперплоскости $U = e_0 + V \subset W$, называется *асимптотическим конусом* или *конусом рецессии* многогранника M и обозначается $M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bar{M} \cap V$. Конус M_∞ описывается в векторном пространстве $V = \mathbb{R}^n$ однородными неравенствами

$$\alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n \geq 0, \quad \text{где } 1 \leq i \leq m,$$

в которые превращаются неравенства (12-8) при $x_0 = 0$ и которые получаются удалением свободных членов из неоднородных неравенств (12-7). Таким образом, асимптотический конус $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee$ двойствен конусу $\sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \subset V^*$, порождённому дифференциалами $\alpha_i = D_{a_i}$ аффинных функционалов α_i , задающих многогранник M .

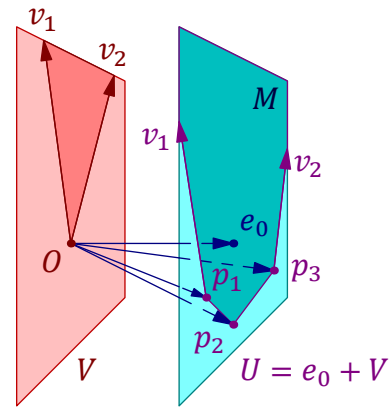


Рис. 12.6. Конус \bar{M} .

Геометрически, проективный конус \overline{M} непустого многогранника M является замыканием объединения всех лучей $[0, w)$, где $w \in M$, а асимптотический конус M_∞ образован пределами

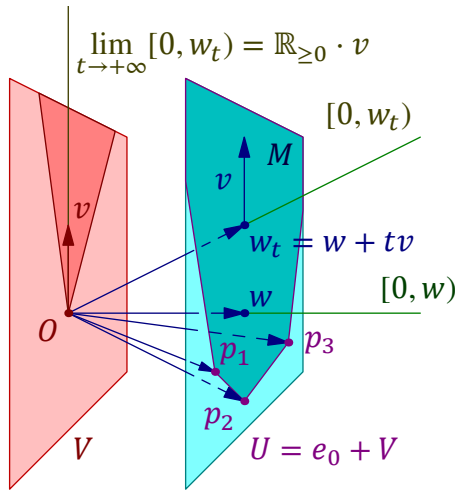


Рис. 12♦7. Конус M_∞ .

$[0, v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [0, w_t)$ таких лучей, проходящих через переменную точку $w_t = w + tv \in M$, которая стартует при $t = 0$ из некоторой точки $w \in M$ и уходит при $t \rightarrow +\infty$ на бесконечность в направлении вектора $v \in V$, оставаясь всё время внутри M , см. рис. 12♦7.

УПРАЖНЕНИЕ 12.6. Убедитесь в этом и покажите, что асимптотический конус M_∞ непустого многогранника M состоит из всех тех векторов $v \in V$, которые обладают следующими эквивалентными свойствами¹: (1) для любой точки $p \in M$ точка $p + v$ тоже лежит в M (2) для любой точки $p \in M$ луч $\{p + tv \mid t \geq 0\}$ содержится в M (3) M содержит какой-нибудь луч $[p, q)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{pq} = v$.

ТЕОРЕМА 12.7 (ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ)

Выпуклая оболочка любого конечного набора точек в \mathbb{R}^n является ограниченным выпуклым многогранником. Наоборот, всякий компактный выпуклый многогранник в \mathbb{R}^n является выпуклой оболочкой конечного множества точек, а именно — своих вершин.

Доказательство. Последнее утверждение уже было установлено нами в сл. 12.4 на стр. 163. Докажем первое. Вложим \mathbb{R}^n в векторное пространство $W = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ в качестве аффинной гиперплоскости U с уравнением $x_0 = 1$, как это объяснялось выше. Выпуклая оболочка любого конечного множества $P \subset U$ ограничена, так как содержится в любом содержащем P кубе, и высекается из аффинной гиперплоскости U конусом $\sigma_P \subset W$, поскольку каждая выпуклая барицентрическая комбинация $\sum x_i p_i$ точек $p_i \in P$ лежит в конусе σ_P , и наоборот, для любого ненулевого вектора $w = \sum \lambda_i p_i \in \sigma_P$ пересечение луча $[0, w)$ с аффинной гиперплоскостью $x_0 = 1$ происходит в точке $w / x_0(w) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^{-1} \sum \lambda_i p_i$, которая является выпуклой барицентрической комбинацией точек p_i , так как все $\lambda_i \geq 0$. По теор. 12.6 конус σ_P является выпуклым многогранником. Поэтому $M = \sigma_P \cap U$ тоже является выпуклым многогранником. \square

ТЕОРЕМА 12.8 (РАЗЛОЖЕНИЕ МОЦКИНА)

Всякий выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму

$$M = \text{conv } P + M_\infty = \{p + v \mid p \in \text{conv } P, v \in M_\infty\},$$

где $P \subset M$ — некоторое конечное подмножество, а $M_\infty = \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\vee \subset V$ — асимптотический конус многогранника M . Иначе говоря, каждый выпуклый многогранник является объединением семейства своих асимптотических конусов, отложенных от точек некоторого компактного выпуклого многогранника (возможно, пустого или состоящего из одной точки).

Доказательство. Как и выше, отождествим \mathbb{R}^n с аффинной гиперплоскостью U , которая задаётся в $(n + 1)$ -мерном пространстве $W = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}^n$ уравнением $x_0 = 1$, и обозначим через $V \subset W$

¹Направления таких векторов v называют асимптотическими или направлениями рецессии.

направляющее векторное подпространство гиперплоскости U , которое задаётся в W уравнением $x_0 = 0$. По теор. 12.6 на стр. 164 проективный конус $\bar{M} = \sigma_S$ порождается некоторым конечным множеством векторов $S \subset W$. Высекаемая векторным подпространством $V \subset W$ грань $M_\infty = V \cap \bar{M}$ проективного конуса \bar{M} , будучи пересечением конусов с общей вершиной, также представляет собою конус $\sigma_R \subset V$, порождённый некоторым конечным множеством векторов $R = S \cap V$. Умножая все не лежащие в V образующие проективного конуса \bar{M} на положительные константы, мы можем и будем считать, что все они лежат в U , а значит, и в M . Обозначим множество таких образующих через $P \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus R \subset M \subset U$. Тогда $\bar{M} = \sigma_{P \cup R} = \{p + r, | p \in \sigma_P, r \in \sigma_R\}$. Луч $[0, p + r)$, где $p \in \sigma_P, r \in \sigma_R$, пересекает аффинную гиперплоскость U если и только если $p \neq 0$, и в этом случае точка пересечения $(p + r)/x_0(p + r) = (p + r)/x_0(p)$ является суммой точки $p/x_0(p) \in \text{conv } P$ и вектора $r/x_0(p) \in \sigma_R = M_\infty$. \square

Следствие 12.6

Следующие свойства непустого многогранника $M = H_{a_1}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+$, задаваемого аффинными функционалами $a_i = b_i + \alpha_i$ эквивалентны:

$$M \text{ ограничен} \iff \text{конус } M_\infty = 0 \iff \text{конус } \sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = V^*.$$

\square

12.5.3. Коасимптотический конус многогранника. Выпуклый многогранник

$$M = H_{a_1}^+ \cap \dots \cap H_{a_m}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b + Ax \geq 0\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (12-9)$$

является прообразом положительного гипероктанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^m \subset \mathbb{R}^m$ при аффинном отображении¹

$$a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax + b,$$

с дифференциалом $D_a = A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$. Двойственное к дифференциалу линейное отображение² $D_a^* = D_a^* : \mathbb{R}^{m*} \rightarrow \mathbb{R}^{n*}, y \mapsto yA$, переводит стандартные базисные ковекторы $e_i^* \in \mathbb{R}^{m*}$ в линейные функционалы $\alpha_i = D_{a_i}$, координатами которых в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^{n*} являются строки матрицы A . Ядро $\ker D_a^* = \{y \in \mathbb{R}^{m*} \mid yA = 0\} = \text{Ann im } D_a$ состоит из всех линейных соотношений между функционалами³ α_i или, что то же самое, между строками матрицы A . Пересечение ядра $\ker D_a^*$ с положительным координатным гипероктантом в \mathbb{R}^{m*} называется коасимптотическим конусом многогранника M и обозначается

$$\kappa_M \stackrel{\text{def}}{=} \ker D_a^* \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^{m*}.$$

Он зависит только от линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, но не от вектора $b \in \mathbb{R}^m$.

Отметим, что при замене вектора $b \in \mathbb{R}^m$ лежащим в том же классе по модулю векторного подпространства $\text{im } D_a \subset \mathbb{R}^m$ вектором $b' = b + Av$, где $v \in \mathbb{R}^n$, многогранник $M \subset \mathbb{R}^n$ параллельно сдвигается на вектор $-v$, ибо $Ax + b' \geq 0 \iff A(x + v) + b \geq 0$. Поэтому многогранник M с точностью до сдвига зависит только от класса $[b]_A = b + \text{im } D_a \in \mathbb{R}^m / \text{im } D_a$ вектора b по модулю линейной оболочки столбцов матрицы A . По сл. 7.5 на стр. 91 фактор пространство $\mathbb{R}^m / \text{im } D_a = \mathbb{R}^m / \text{Ann ker } D_a^*$ канонически двойственно пространству $\ker D_a^*$. Таким образом, класс $[b]_A$ задаёт линейный функционал $[b]_A : \ker D_a^* \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto yb$.

¹Мы придерживаемся матричных обозначений, введённых после форм. (12-4) на стр. 162.

²См. н° 7.3 на стр. 89.

³В том смысле, что строка $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m*}$ лежит в $\ker D_a^*$ если и только если в \mathbb{R}^{n*} выполняется равенство $y_1 \alpha_1 + \dots + y_m \alpha_m = 0$.

Предложение 12.3

Двойственный к коасимптотическому конус $\mathcal{K}_M^\vee \subset \mathbb{R}^m / \text{im } D_a$ образован всеми такими классами $[b]_A \in \mathbb{R}^m / \text{im } D_a = (\ker D_a^*)^*$, что многогранник $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b + Ax \geq 0\}$ не пуст.

Доказательство. Условие $M \neq \emptyset$ равносильно тому, что класс $[b]_A = \{Ax + b \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ имеет непустое пересечение с положительным гипероктантом $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$, что в свою очередь равносильно тому, что класс $[b]_A$ содержится в объединении классов $[w]_A = w + \text{im } D_a$ по всем $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Такое объединение представляет собою выпуклый многогранный конус в пространстве $\mathbb{R}^m / \text{im } D_a$ — образ положительного гипероктанта $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ при линейной сюръекции $\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m / \text{im } D_a$. Он натянут на классы $[e_i]_A$ стандартных базисных векторов $e_i \in \mathbb{R}^m$. Двойственный к нему конус в пространстве $\text{Ann im } D_a = (\mathbb{R}^m / \text{im } D_a)^*$ состоит из ковекторов, принимающих неотрицательные значения на всех базисных векторах e_i , т. е. из таких строк $y \in \mathbb{R}^{m*}$, что $yA = 0$ и все $y_i \geq 0$, а это и есть коасимптотический конус. \square

Замечание 12.1. На языке линейных неравенств [предл. 12.3](#) формулируется следующим образом: система неоднородных линейных неравенств $Ax + b \geq 0$ имеет решение если и только если $yb \geq 0$ для всех лежащих в $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ решений системы однородных линейных уравнений $yA = 0$.

Упражнение 12.7. Покажите, что система однородных линейных уравнений $yA = 0$ тогда и только тогда имеет ненулевое решение $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, когда при некотором $b \in \mathbb{R}^m$ система неоднородных линейных неравенств $Ax + b \geq 0$ не имеет решений.

12.5.4. Грани конусов. Условимся, что помимо собственных граней, отсекаемых из конуса его опорными гиперплоскостями H_α , где $\alpha \in V^*$, у каждого конуса $\sigma \subset V$ имеется также и *несобственная* грань $\sigma = V \cap \sigma$ размерности $\dim \sigma$, отсекаемая нулевым ковектором $0 \in V^*$. Для каждой грани $\Gamma \subset \sigma_R$ обозначим через $L(\Gamma) \subset V$ её линейную оболочку.

Предложение 12.4 (перечисление граней)

Каждая грань Γ конуса σ_R является конусом, порождённым множеством $R \cap \Gamma$ лежащих в этой грани образующих конуса σ_R , причём это множество линейно порождает векторное пространство $L(\Gamma)$.

Доказательство. По [теор. 12.5](#) на стр. 162 каждая грань Γ конуса σ_R представляет собою пересечение $\Gamma = \sigma_R \cap L(\Gamma)$ и, тем самым, тоже является конусом. Достаточно убедиться, что в представлении каждого вектора $v \in \Gamma$ в виде неотрицательной линейной комбинации векторов из R ненулевые коэффициенты могут иметь лишь образующие $w \in R \cap \Gamma$. Для этого представим конус σ_R в виде пересечения $\sigma_R = \bigcap_{\alpha \in R^\vee} H_\alpha^+$ полупространств, заданных конечным набором ковекторов $R^\vee \subset V^*$, и обозначим через $R^\vee(\Gamma) = R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ множество всех тех ковекторов $\alpha \in R^\vee$, которые тождественно зануляются на грани Γ . Тогда по той же [теор. 12.5](#) $L(\Gamma) = \text{Ann } R^\vee(\Gamma)$. Тем самым, для каждой образующей $w' \in R \setminus \Gamma = R \setminus L(\Gamma)$ найдётся такой функционал $\alpha \in R^\vee(\Gamma)$, что $\alpha(w') > 0$. Если бы образующая w' входила с положительным коэффициентом в разложение какого-нибудь вектора $v \in \Gamma$, то значение $\alpha(v)$ было бы строго положительным, что невозможно, поскольку α аннулирует грань Γ . \square

Упражнение 12.8. Приведите пример, показывающий, что не каждое непустое подмножество $I \subset R$ порождает конус, являющийся гранью конуса σ_R .

Предложение 12.5 (двойственность между гранями двойственных конусов)

Для любой пары двойственных конусов $\sigma_R \subset V$ и $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee} \subset V^*$ при всех $0 \leq k \leq \dim \sigma$ имеется оборачивающая включения биекция между k -мерными гранями конуса σ_R и $(\dim V - k)$ -мерными гранями конуса σ_R^\vee , переводящая каждую грань Γ конуса σ в пересечение $\sigma^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ двойственного конуса с аннулятором грани Γ . В частности, одномерные рёбра каждого из конусов являются уравнениями $(n - 1)$ -мерных граней двойственного конуса и наоборот.

Доказательство. Каждая образующая $w \in R \cap \Gamma$ любой грани $\Gamma = \sigma_{R \cap \Gamma}$ конуса σ_R является опорным функционалом для двойственного конуса $\sigma_R^\vee = \sigma_{R^\vee}$. Поэтому по теор. 12.5 на стр. 162 подпространство $\text{Ann } \Gamma = \text{Ann}(R \cap \Gamma) \subset V^*$ отсекает из двойственного конуса σ_R^\vee некоторую грань. Обозначим её $\Gamma^\vee = \sigma_{R^\vee} \cap \text{Ann } \Gamma$. По предл. 12.4 эта грань представляет собою конус $\sigma_{R^\vee \cap \Gamma^\vee}$, порождённый множеством $R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ всех аннулирующих грань Γ образующих конуса σ_{R^\vee} , причём множество $R^\vee \cap \text{Ann } \Gamma$ линейно порождает линейную оболочку $L(\Gamma^\vee) = \text{Ann } L(\Gamma)$ грани Γ^\vee . Так как $\text{Ann } \Gamma^\vee = \text{Ann } L(\Gamma^\vee) = L(\Gamma)$, двойственная к Γ^\vee грань $\Gamma^{\vee\vee} = \sigma_R \cap \text{Ann } \Gamma^\vee$ конуса σ_R совпадает с Γ . Тем самым, отображение $\Gamma \mapsto \Gamma^\vee$ инволютивно, а значит, биективно. \square

Замечание 12.2. В предл. 12.5 не предполагается равенства $\dim \sigma_R = \dim V$. Например, одномерный конус $\sigma_v = \{tv \mid t \geq 0\}$ представляет собою луч, выпущенный из нуля в направлении вектора v и имеет две грани — нульмерную грань 0 и одномерную грань, совпадающую с самим этим лучом. Двойственный ему конус $\sigma_v^\vee = H_v^+ \subset V^*$ является векторным полупространством и тоже имеет две грани: n -мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } 0 = H_v^+ \cap V^* = H_v^+$ и $(n - 1)$ -мерную грань $\sigma_v^\vee \cap \text{Ann } v = H_v$.

§13. Пространство с билинейной формой

13.1. Билинейные формы. Отображение $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ называется *билинейной формой* на векторном пространстве V , если оно линейно по каждому из двух своих аргументов при фиксированном другом, т. е. удовлетворяет равенству

$$\beta(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j \beta(u_i, w_j) \quad (13-1)$$

при всех $u_1, u_2, w_1, w_2 \in V$ и $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{K}$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.1. Убедитесь, что билинейные формы образуют векторное подпространство в пространстве всех функций $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$.

Если форма β на пространстве V зафиксирована, то её значение $\beta(u, w) \in \mathbb{K}$ на паре векторов $u, w \in V$ иногда бывает удобно записывать в виде *скалярного произведения* $u \cdot w$, принимающего значения в поле \mathbb{K} и, вообще говоря, некоммутативного. В таких обозначениях формула (13-1) утверждает, что это произведение дистрибутивно по отношению к линейным комбинациям векторов, т. е. подчиняется стандартным правилам раскрытия скобок:

$$(x_1 u_1 + x_2 u_2) \cdot (y_1 w_1 + y_2 w_2) = \sum_{i,j=1}^2 x_i y_j u_i \cdot w_j.$$

13.1.1. Матрицы Грама. Как и в евклидовом пространстве¹, в каждом пространстве с билинейной формой с любыми двумя наборами векторов $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$, где все $u_i, w_j \in V$, связана матрица их попарных скалярных произведений $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ с элементами $b_{ij} = v_i \cdot w_j = \beta(u_i, w_j)$. Она называется *матрицей Грама* наборов \mathbf{u}, \mathbf{w} и формы β . Когда наборы совпадают: $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, мы пишем просто $B_{\mathbf{u}}$ вместо $B_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$. В этом случае $\det B_{\mathbf{u}} \in \mathbb{K}$ называется *определителем Грама* формы β и набора векторов \mathbf{u} .

Если наборы векторов \mathbf{u} и \mathbf{w} линейно выражаются через наборы \mathbf{e} и \mathbf{f} по формулам $\mathbf{u} = \mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$, то $B_{\mathbf{u}\mathbf{w}} = \mathbf{u}^t \mathbf{w} = (\mathbf{e} C_{\mathbf{e}\mathbf{u}})^t (\mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}) = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t \mathbf{e}^t \mathbf{f} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}} = C_{\mathbf{e}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{e}\mathbf{f}} C_{\mathbf{f}\mathbf{w}}$. В частности, если $\mathbf{u} = \mathbf{w} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}$, то

$$B_{\mathbf{u}} = C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}^t B_{\mathbf{w}} C_{\mathbf{w}\mathbf{u}}. \quad (13-2)$$

Если векторы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ образуют базис в V , а векторы $\mathbf{u} = \mathbf{e} \mathbf{x}$ и $\mathbf{w} = \mathbf{e} \mathbf{y}$ заданы столбцами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ своих координат в этом базисе, то

$$\beta(u, w) = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{w} = \mathbf{x}^t \mathbf{e}^t \cdot \mathbf{e} \mathbf{y} = \mathbf{x}^t B_{\mathbf{e}} \mathbf{y}. \quad (13-3)$$

Так как любая квадратная матрица $B_{\mathbf{e}} \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ задаёт по этой формуле билинейную форму на пространстве V , сопоставление билинейной форме её матрицы Грама в произвольно зафиксированном базисе устанавливает биекцию между пространством билинейных форм на n -мерном векторном пространстве V и пространством матриц размера $n \times n$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.2. Убедитесь, что эта биекция линейна.

¹Ср. с н° 10.2 на стр. 133.

13.1.2. Корреляции. Задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ эквивалентно заданию линейного отображения *правой корреляции* $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$, сопоставляющего каждому вектору $v \in V$ линейный функционал $\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{K}$, который задаётся правым скалярным умножением на вектор v и является ограничением билинейного отображения $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ на подмножество $V \times \{v\} \subset V \times V$:

$$\beta^\wedge v : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad u \mapsto u \cdot v = \beta(u, v). \quad (13-4)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.3. Убедитесь, что для каждого $v \in V$ функционал (13-4) линеен и линейно зависит от v .

Форма $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ однозначно восстанавливается по правой корреляции $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ как

$$\beta(u, w) = \beta^\wedge w(u).$$

Если зафиксировать в V и V^* двойственные базисы $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, то в этих базисах матрица $B_{\mathbf{e}^* \mathbf{e}}^\wedge$ линейного отображения $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ имеет в клетке (i, j) значение i -той координаты функционала $\beta^\wedge e_j : u \mapsto \beta(u, e_j)$ в базисе \mathbf{e}^* , которая равна¹ значению этого функционала на базисном векторе e_i , т. е. скалярному произведению $\beta(e_i, e_j)$. Таким образом, матрица правой корреляции $B_{\mathbf{e}^* \mathbf{e}}^\wedge = B_{\mathbf{e}}$ совпадёт с матрицей Грама формы β в базисе \mathbf{e} . Мы заключаем, что сопоставление билинейной форме β её правой корреляции β^\wedge устанавливает линейный изоморфизм пространства билинейных форм на V с пространством линейных отображений $V \rightarrow V^*$.

Симметричным образом, задание билинейной формы $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ эквивалентно заданию *левой корреляции* ${}^\wedge\beta : V \rightarrow V^*$, которая переводит каждый вектор $v \in V$ в линейный функционал ${}^\wedge\beta v : V \rightarrow \mathbb{K}$, получающийся ограничением отображения $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ на подмножество $\{v\} \times V \subset V \times V$ и задаваемый левым скалярным умножением на вектор v :

$${}^\wedge\beta v : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad u \mapsto \beta(v, u) = v \cdot u. \quad (13-5)$$

Иначе можно сказать, что левая корреляция билинейной формы β является правой корреляцией для *транспонированной* формы $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$, матрица Грама которой транспонирована к матрице Грама формы β . Поэтому матрица левой корреляции билинейной формы β в двойственных базисах \mathbf{e} и \mathbf{e}^* пространств V и V^* равна транспонированной матрице Грама $B_{\mathbf{e}}^t$ формы β в базисе \mathbf{e} .

13.1.3. Ядра, ранг и коранг. Векторные пространства

$$\begin{aligned} V^\perp &= \ker \beta^\wedge = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(v, u) = 0\} \\ {}^\perp V &= \ker {}^\wedge\beta = \{u \in V \mid \forall v \in V \beta(u, v) = 0\} \end{aligned} \quad (13-6)$$

называются соответственно *правым* и *левым* ядром билинейной формы β . Если форма β не является симметричной или кососимметричной², то подпространства V^\perp и ${}^\perp V$, вообще говоря, различны. Тем не менее, их размерности всегда одинаковы и равны

$$\dim V^\perp = \dim {}^\perp V = \dim V - \text{rk } B_{\mathbf{e}}, \quad (13-7)$$

¹См. н° 7.1.1 на стр. 85.

²Т. е. не удовлетворяет соотношениям $\beta^t = \pm \beta$. Мы подробнее поговорим о таких формах в н° 13.4 на стр. 179 ниже.

где B_e — матрица Грама формы β в произвольном базисе e пространства V , поскольку ранги¹ $\text{rk } B_e = \text{rk } B_e^t$ равны размерностям образов $\text{im } \beta^\wedge$ и $\text{im } {}^\wedge\beta$ операторов правой и левой корреляций, а $\dim \ker \beta^\wedge = \dim V - \dim \text{im } \beta^\wedge$ и $\dim \ker {}^\wedge\beta = \dim V - \dim \text{im } {}^\wedge\beta$. В частности, мы видим, что ранг матрицы Грама B_e , равный размерности образа каждой из корреляций, не зависит от выбора базиса. Он называется *рангом* билинейной формы β и обозначается $\text{rk } \beta$, а разность $\dim V - \text{rk } \beta$ из формулы (13-7) называется *корангом* формы β и обозначается $\text{corank } \beta$.

13.1.4. Изометрии. Линейное отображение $f : U \rightarrow W$ между векторными пространствами U и W , на которых заданы билинейные формы β и γ , называется *изометрическим* или *гомоморфизмом пространств с билинейными формами*, если для любых векторов $u_1, u_2 \in U$ выполняется равенство $\beta(u_1, u_2) = \gamma(f(u_1), f(u_2))$. Билинейные формы β и γ называются *изоморфными*, если между пространствами U и W имеется изометрический линейный изоморфизм.

Если произвольно зафиксировать в U и W базисы $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_m)$, то отображение f с матрицей F_{wu} в этих базисах является изометрическим если и только если матрица Грама набора векторов $f(u) = (f(u_1), \dots, f(u_n)) = w F_{wu}$ равна матрице Грама базиса u . По форм. (13-2) на стр. 170 это равносильно матричному равенству

$$F_{wu}^t B_w F_{wu} = B_u. \quad (13-8)$$

13.2. Невырожденные формы. Билинейная форма β называется *невырожденной*², если она удовлетворяет условиям следующего ниже [предл. 13.1](#). Формы, не удовлетворяющие этим условиям, называются *вырожденными* или *особыми*.

Предложение 13.1 (критерии невырожденности)

Следующие свойства билинейной формы β на конечномерном векторном пространстве V равносильны друг другу:

- 1) в V существует базис с ненулевым определителем Грама
- 2) любой базис в V имеет ненулевой определитель Грама
- 3) левая корреляция $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ является изоморфизмом
- 4) правая корреляция $\beta^\wedge : V \rightarrow V^*$ является изоморфизмом
- 5) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(v, u) \neq 0$
- 6) для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой вектор $u \in V$, что $\beta(u, v) \neq 0$
- 7) для любой линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ существует такой вектор $v \in V$, что

$$\varphi(u) = \beta(v, u) \quad \text{для всех } u \in V$$

- 8) для любой линейной функции $\varphi : V \rightarrow \mathbb{K}$ существует такой вектор $v \in V$, что

$$\varphi(u) = \beta(u, v) \quad \text{для всех } u \in V,$$

¹Напомним, что транспонированные матрицы имеют одинаковый ранг, см. [теор. 5.1](#) на стр. 67 и [прим. 7.5](#) на стр. 88.

²А также *неособой* или *регулярной*.

причём при выполнении этих условий вектор v в последних двух пунктах определяется формой φ однозначно.

Доказательство. Поскольку $\dim V = \dim V^*$, биективность, инъективность и сюръективность линейного отображения $V \rightarrow V^*$ равносильны друг другу и тому, что это отображение задаётся невырожденной матрицей в каких-нибудь базисах. Поэтому условия (3), (5), (7) и условия (4), (6), (8), утверждающие, соответственно, биективность, обращение в нуль ядра и сюръективность для операторов ${}^\wedge\beta$ и β^\wedge , равносильны между собой и условию (1), означающему, что транспонированные друг другу матрицы этих операторов обратимы. Условие (1) равносильно условию (2) в силу форм. (13-2) на стр. 170, из которой вытекает, что определители Грама двух базисов e и f связаны друг с другом по формуле $\det B_e = \det B_f \cdot \det^2 C_{fe}$, где C_{fe} — матрица перехода¹ от базиса e к базису f . \square

ПРИМЕР 13.1 (ЕВКЛИДОВА ФОРМА)

Симметричная билинейная форма на координатном пространстве \mathbb{K}^n с единичной матрицей Грама E в стандартном базисе называется *евклидовой*. Эта форма невырождена и над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ задаёт евклидову структуру на пространстве \mathbb{R}^n . Однако над отличными от \mathbb{R} полями свойства этой формы могут существенно отличаться от интуитивно привычных свойств евклидовой структуры. Например, над полем \mathbb{C} ненулевой вектор $e_1 - ie_2 \in \mathbb{C}^2$ имеет нулевой скалярный квадрат.

УПРАЖНЕНИЕ 13.4. Приведите пример n -мерного подпространства в \mathbb{C}^{2n} , на которое евклидова форма ограничивается в тождественно нулевую форму.

Базисы, в которых матрица Грама евклидовой формы равна E называются *ортонормальными*. Ниже² мы увидим, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} характеристики $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ любая невырожденная симметричная билинейная форма изометрически изоморфна евклидовой.

ПРИМЕР 13.2 (ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ФОРМА)

Симметричная билинейная форма h на чётномерном координатном пространстве \mathbb{K}^{2n} , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$H = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (13-9)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *гиперболической*. Она невырождена и над алгебраически замкнутым полем изометрически изоморфна евклидовой форме: ортонормальный базис гиперболической формы состоит из векторов

$$\varepsilon_{2v-1} = (e_v - e_{n+v})/\sqrt{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2v} = (e_v + e_{n+v})/\sqrt{2}, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Над полями \mathbb{R} и \mathbb{Q} гиперболическая форма не изоморфна евклидовой, поскольку евклидовы скалярные квадраты всех ненулевых векторов положительны, тогда как ограничение гиперболической формы на линейную оболочку первых n базисных векторов тождественно нулевое. Базис, в котором матрица Грама гиперболической формы имеет вид (13-9), называется *гиперболическим базисом*.

¹См. п. 5.3 на стр. 63.

²См. сл. 13.1 на стр. 181.

ПРИМЕР 13.3 (СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ФОРМА)

Кососимметричная форма на чётномерном координатном пространстве \mathbb{K}^{2n} , матрица Грама которой в стандартном базисе равна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad (13-10)$$

где E — единичная матрица размера $n \times n$, называется *симплектической*. Матрица J вида (13-10) называется *симплектической единицей*. Она имеет $J^2 = -E$ и $\det J = 1$. Таким образом, симплектическая форма невырождена. Базис, в котором матрица Грама кососимметричной формы равна J , называется *симплектическим базисом*. Ниже¹ мы покажем, что всякая невырожденная кососимметричная билинейная форма над *любым* полем изометрически изоморфна симплектической. Это означает, в частности, что размерность пространства с невырожденной кососимметричной формой обязательно чётна.

УПРАЖНЕНИЕ 13.5. Убедитесь в том, что все кососимметричные квадратные матрицы нечётного размера над полем \mathbb{K} характеристики $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ вырождены.

13.2.1. Левый и правый двойственный базис. Если билинейная форма β на пространстве V невырождена, то у любого базиса $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в V есть *правый* и *левый* двойственные базисы $\mathbf{e}^\vee = (e_1^\vee, \dots, e_n^\vee)$ и ${}^\vee\mathbf{e} = ({}^\vee e_1, \dots, {}^\vee e_n)$, состоящие из прообразов векторов двойственного к \mathbf{e} базиса $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ в V^* относительно изоморфизмов правой и левой корреляций соответственно. Они однозначно характеризуются соотношениями ортогональности

$$\beta(e_i, e_j^\vee) = \beta({}^\vee e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (13-11)$$

которые на матричном языке означают, что взаимные матрицы Грама двойственных относительно формы β базисов единичные: $B_{\mathbf{e}\mathbf{e}^\vee} = B_{{}^\vee\mathbf{e}\mathbf{e}} = E$. Согласно формулам из н° 13.1.1 матрицы переходов $C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee}$ и $C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}}$, в j -тых столбцах которых стоят координаты векторов e_j^\vee и ${}^\vee e_j$ в базисе \mathbf{e} , удовлетворяют соотношениям $B_{\mathbf{e}} C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = B_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = E$ и $C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}}^t B_{\mathbf{e}} = B_{{}^\vee\mathbf{e},\mathbf{e}} = E$, откуда

$$C_{\mathbf{e},\mathbf{e}^\vee} = B_{\mathbf{e}}^{-1} \quad \text{и} \quad C_{\mathbf{e},{}^\vee\mathbf{e}} = (B_{\mathbf{e}}^t)^{-1}.$$

Знание двойственного к базису \mathbf{e} относительно билинейной формы β базиса позволяет находить коэффициенты разложения любого вектора $v \in V$ по каждому из двойственных базисов как взятые с надлежащей стороны скалярные произведения вектора v с соответствующими элементами двойственного базиса:

$$v = \sum_i \beta({}^\vee e_i, v) e_i = \sum_i \beta(v, e_i^\vee) e_i = \sum_i \beta(v, e_i) {}^\vee e_i = \sum_i \beta(e_i, v) e_i^\vee. \quad (13-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.6. Убедитесь в этом.

13.2.2. Изотропные подпространства. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным* для билинейной формы β , если эта форма ограничивается на него в тождественно нулевую форму, т. е. когда $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$. Например, каждое одномерное подпространство является изотропным для любой кососимметричной формы, а линейные оболочки первых n и последних n базисных векторов пространства \mathbb{K}^{2n} изотропны для гиперболической формы из прим. 13.2 и симплектической формы из прим. 13.3.

¹См. теор. 13.3 на стр. 181.

Предложение 13.2

Размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы на пространстве V не превосходит $\dim V / 2$.

Доказательство. Подпространство $U \subset V$ изотропно если и только если его образ при корреляции $\beta^\wedge : V \simeq V^*$ лежит в подпространстве $\text{Ann } U \subset V^*$. Так как корреляция невырожденной формы инъективна, $\dim U \leq \dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$, откуда $2 \dim U \leq \dim V$. \square

Замечание 13.1. Примеры гиперболической и симплектической форм показывают, что оценка из предл. 13.2 в общем случае не улучшаема.

13.2.3. Группа изометрий. Как мы видели в н° 13.1.4 на стр. 172, линейный эндоморфизм $f : V \rightarrow V$ является изометрическим для билинейной формы β на пространстве V если и только если его матрица F_e в произвольном базисе e пространства V связана с матрицей Грама B_e этого базиса соотношением¹ $F_e^t B_e F_e = B_e$. Если форма β невырождена, то беря определители обеих частей, заключаем, что $\det^2 F_e = 1$, откуда $\det F_e = \pm 1$. Поэтому любая изометрия конечномерного пространства с невырожденной билинейной формой обратима и с точностью до знака сохраняет объём. Так как композиция изометрий и обратное к изометрии отображение тоже являются изометриями, изометрические преобразования пространства V образуют группу. Она обозначается $O_\beta(V)$ и называется группой изометрий² невырожденной билинейной формы β . Изометрии определителя 1 называются специальными или собственными и образуют в группе всех изометрий подгруппу, обозначаемую $SO_\beta(V)$.

Из форм. (13-8) на стр. 172 вытекает, что обратная к изометрии f изометрия имеет матрицу

$$F_e^{-1} = B_e^{-1} F_e^t B_e. \quad (13-13)$$

Пример 13.4 (изометрии вещественной гиперболической плоскости)

Оператор $f : H_2 \rightarrow H_2$, имеющий в стандартном гиперболическом базисе $e_1, e_2 \in H_2$ матрицу

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

является изометрическим тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что равносильно уравнениям $ac = bd = 0$ и $ad + bc = 1$, имеющим два семейства решений:

$$F_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{F}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus \{0\}. \quad (13-14)$$

Над полем \mathbb{R} оператор F_λ является собственным, и при $\lambda > 0$ называется гиперболическим поворотом, т. к. каждый вектор $v = (x, y)$, обе координаты которого ненулевые, движется при действии на него операторов F_λ с $\lambda \in (0, \infty)$ по гиперболе $xy = \text{const}$. Если положить $\lambda = e^t$ и

¹См. формулу (13-8) на стр. 172.

²А также ортогональной группой или группой автоморфизмов.

перейти к ортогональному базису из векторов $p = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $q = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$, то оператор F_λ запишется в нём матрицей, похожей на матрицу евклидова поворота

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ch} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t + e^{-t})/2$ и $\operatorname{sh} t \stackrel{\text{def}}{=} (e^t - e^{-t})/2$ называются *гиперболическими косинусом* и *синусом* вещественного числа t . Оператор F_λ с $\lambda < 0$ является композицией гиперболического поворота и центральной симметрии. Несобственный оператор \tilde{F}_λ является композицией гиперболического поворота с отражением относительно той оси гиперболы, которая пересекается с её ветвями.

13.2.4. Биекция между формами и операторами. На пространстве V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ каждому линейному оператору $f : V \rightarrow V$ можно сопоставить билинейную форму $\beta_f(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, fw)$ с матрицей Грама $e^t \cdot f(e) = e^t \cdot e F_e = B_e F_e$ в произвольно выбранном базисе e пространства V . Поскольку на языке матриц отображение $f \mapsto \beta_f$ заключается в левом умножении матрицы оператора на матрицу Грама: $F_e \mapsto B_e F_e$, оно линейно и обратимо, если форма β невырождена. Обратное отображение задаётся умножением матрицы оператора слева на обратную к матрице Грама матрицу. Поэтому каждая билинейная форма

$$\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

на конечномерном векторном пространстве V с фиксированной невырожденной билинейной формой β имеет вид $\alpha(u, w) = \beta(u, f_\alpha w)$ для некоторого линейного оператора $f_\alpha : V \rightarrow V$, однозначно определяемого формой α . Матрица F_e оператора f_α выражается через матрицы Грама B_e и A_e форм β и α по формуле $F_e = B_e^{-1} A_e$.

ПРИМЕР 13.5 (КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР)

Задаваемая невырожденной билинейной формой β биекция между формами и операторами сопоставляет транспонированной к β форме $\beta^t(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(w, u)$ оператор $\kappa : V \rightarrow V$, который называется *каноническим оператором* невырожденной билинейной формы β и однозначно характеризуется свойством

$$\forall u, w \in V \quad \beta(w, u) = \beta(u, \kappa w). \quad (13-15)$$

Матрица K_e канонического оператора в произвольном базисе e пространства V выражается через матрицу Грама B_e формы β по формуле $K_e = B_e^{-1} B_e^t$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.7. Убедитесь, что при замене матрицы Грама по правилу $B \mapsto C^t B C$, где $C \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$, матрица $K = B^{-1} B^t$ меняется по правилу $K \mapsto C^{-1} K C$, т. е. канонические операторы изоморфных билинейных форм подобны.

Так как $\beta(u, w) = \beta(w, \kappa u) = \beta(\kappa u, \kappa w)$ для всех $u, w \in V$, канонический оператор является изометрическим.

ТЕОРЕМА 13.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, две невырожденные билинейные формы изометрически изоморфны если и только если их канонические операторы подобны.

Доказательство. Импликация «только если» вытекает из [упр. 13.7](#) и имеет место над любым полем. Докажем обратную импликацию. Пусть невырожденные билинейные формы α и β имеют подобные канонические операторы κ_α и $\kappa_\beta = g^{-1} \kappa_\alpha g$. Тогда форма $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw)$

изометрически изоморфна форме α и имеет канонический оператор $g^{-1}\kappa_\alpha g = \kappa_\beta$, поскольку $\alpha'(u, w) = \alpha(gu, gw) = \alpha(gw, \kappa_\alpha gu) = \alpha'(w, g^{-1}\kappa_\alpha gu)$ для всех u, w . Таким образом, заменяя форму α на форму α' , мы без ограничения общности можем считать, что формы α и β имеют один и тот же канонический оператор κ . Линейный оператор f , однозначно определяемый равенством $\beta(u, w) = \alpha(u, fw)$ для всех u, w , обратим в силу невырожденности форм α, β и самосопряжён относительно α в том смысле¹, что для всех u, w выполняется равенство

$$\alpha(fu, w) = \alpha(\kappa^{-1}w, fu) = \beta(\kappa^{-1}w, u) = \beta(u, w) = \alpha(u, fw).$$

Любой многочлен от оператора f тоже самосопряжён относительно формы α . В силу идущей ниже лем. 13.1, над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль существует такой многочлен $P(t)$, что оператор $h = P(f)$ удовлетворяет равенству $h^2 = f$. Такой оператор h биективен и самосопряжён относительно α . Поэтому форма

$$\beta(u, w) = \alpha(u, fw) = \alpha(u, h^2w) = \alpha(hu, hw)$$

изометрически изоморфна форме α . □

ЛЕММА 13.1

Над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от двух, из любого биективного линейного оператора f на конечномерном векторном пространстве V можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора f .

Доказательство. Из курсов алгебры и комбинаторики известно, что при всех целых $k \geq 0$ биномиальный коэффициент $\binom{2k}{k}$ нацело делится² на $(k+1)$. Поэтому над любым полем \mathbb{K} характеристики $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ корректно определён биномиальный степенной ряд

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} x^k = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3) \cdot x^k = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \frac{x^k}{k}. \quad (13-16) \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 13.8. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых $n+1$ членов этого ряда, сравним в $\mathbb{K}[x]$ с $1+x$ по модулю x^{n+1} .

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} характеристический многочлен $\chi_f(t)$ оператора f разлагается на взаимно простые множители $(t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda \in \text{Spec}(f)$, и пространство V распадается в прямую сумму f -инвариантных корневых подпространств³ $K_\lambda = \ker(f - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}$. Так как f биективен, в этом разложении все λ отличны от нуля, и для каждого λ корректно определён многочлен $p_\lambda(t) \in \mathbb{K}[t]$, равный сумме первых m_λ членов формального разложения Тэйлора

¹Ср. с н° 11.3 на стр. 147.

²Частное $c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ называется k -тым числом Каталана и имеет несколько чисто комбинаторных описаний, см. пример 4.7 на стр. 61 лекции:

http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_04.pdf.

³См. н° 9.4 на стр. 124.

функции \sqrt{t} в точке λ , которое получается из биномиальной формулы (13-16) заменой переменных:

$$\begin{aligned}\sqrt{t} &= \sqrt{\lambda + (t - \lambda)} = \sqrt{\lambda} \cdot (1 + \lambda^{-1/2}(t - \lambda))^{1/2} = \\ &= \lambda^{1/2} + \frac{1}{2}(t - \lambda) - \frac{\lambda^{-1/2}}{8}(t - \lambda)^2 + \frac{\lambda^{-1}}{16}(t - \lambda)^3 - \dots\end{aligned}$$

Согласно упр. 13.8, $p_\lambda^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}}$. По китайской теореме об остатках существует многочлен $p(t)$, сравнимый с $p_\lambda(t)$ по модулю $(t - \lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Его квадрат

$$p^2(t) \equiv t \pmod{(t - \lambda)^{m_\lambda}} \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(f).$$

Поэтому квадрат оператора $p(f)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ точно также, как f . Тем самым, $p^2(f) = f$. \square

13.3. Ортогоналы и ортогональные проекции. С каждым подпространством U векторного пространства V с билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ связаны *левый* и *правый ортогоналы*

$$\begin{aligned}{}^\perp U &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(v, u) = 0\}, \\ U^\perp &= \{v \in V \mid \forall u \in U \beta(u, v) = 0\}.\end{aligned}\tag{13-17}$$

Вообще говоря, это два разных подпространства в V .

Предложение 13.3

Если билинейная форма β на конечномерном пространстве V невырождена, то для всех подпространств $U \subset V$ выполняются равенства

$$\dim {}^\perp U = \dim V - \dim U = \dim U^\perp \quad \text{и} \quad ({}^\perp U)^\perp = U = {}^\perp(U^\perp).$$

Доказательство. Первые два равенства верны, так как ортогоналы (13-17) суть прообразы подпространства $\text{Ann } U \subset V^*$ при изоморфизмах ${}^\wedge\beta, {}^\vee\beta : V \xrightarrow{\sim} V^*$, и $\dim \text{Ann } U = \dim V - \dim U$. Вторые два равенства вытекают из первых, поскольку оба подпространства $({}^\perp U)^\perp$ и ${}^\perp(U^\perp)$ содержат U и имеют размерность $\dim U$. \square

Предложение 13.4

Пусть билинейная форма β на произвольном¹ векторном пространстве V ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$. Тогда $V = U \oplus U^\perp$, и проекция $v_U \in U$ каждого вектора $v \in V$ на подпространство U вдоль U^\perp однозначно определяется тем, что $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$ для всех $u \in U$. Вектор v_U выражается через произвольный базис u_1, \dots, u_n пространства U по формуле

$$v_U = \sum_{i=1}^n \beta({}^\vee u_i, v) u_i = \sum_{i=1}^n \beta(u_i, v) u_i^\vee, \tag{13-18}$$

где ${}^\vee u_1, \dots, {}^\vee u_n$ и $u_1^\vee, \dots, u_n^\vee$ суть левый и правый двойственные к u_1, \dots, u_n относительно формы β базисы² в U .

¹Возможно даже бесконечномерном.

²См. п. 13.2.1 на стр. 174.

Доказательство. Так как ограничение формы β на U невырождено, для любого вектора $v \in V$ существует единственный такой вектор $v_U \in U$, что линейная функция $u \mapsto \beta(u, v)$ на пространстве U задаётся правым скалярным умножением векторов из U на этот вектор v_U , т. е. для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v_U)$. Поэтому разность $v - v_U \in U^\perp$. Таким образом, каждый вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = v_U + (v - v_U)$ с $v_U \in U$ и $v - v_U \in U^\perp$. Поскольку в любом разложения $v = v'_U + w$ с $v'_U \in U$ и $w \in U^\perp$ для всех $u \in U$ выполняется равенство $\beta(u, v) = \beta(u, v'_U)$, имеем равенство $v'_U = v_U$, а значит и равенство $w = v - v'_U = v - v_U$, что доказывает первые два утверждения предложения. Последнее утверждение вытекает из форм. (13-12) на стр. 174: $v_U = \sum_i \beta(\vee u_i, v_U) u_i = \sum_i \beta(\vee u_i, v) u_i$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 13.9. Докажите симметричное утверждение: $V = {}^\perp U \oplus U$ если и только если билинейная форма β ограничивается на конечномерное подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве билинейную форму $\beta|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{k}$; при этом проекция ${}_U v$ каждого вектора $v \in V$ на U вдоль ${}^\perp U$ однозначно определяется тем, что $\beta(v, u) = \beta({}_U v, u)$ для всех $u \in U$ и находится по формуле ${}_U v = \sum \beta(v, u_i^\vee) u_i = \sum \beta(v, u_i) \vee u_i$.

13.4. Симметричные и кососимметричные формы. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(u, w) = \beta(w, u)$ для всех $u, w \in V$, и *кососимметричной* — если $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$. В последнем случае для любых $u, w \in V$ выполняется равенство

$$0 = \beta(u + w, u + w) = \beta(u, w) + \beta(w, u),$$

откуда $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$.

УПРАЖНЕНИЕ 13.10. Убедитесь, что при $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ равенство $\beta(u, w) = -\beta(w, u)$ всех $u, w \in V$ равносильно равенству $\beta(v, v) = 0$ для всех $v \in V$ и что формы $\beta(u, w)$ и $\beta^t(u, w) = \beta(w, u)$ пропорциональны ровно в двух случаях: когда $\beta^t = \pm \beta$.

Если $\text{char } \mathbb{k} = 2$, каждая кососимметричная форма автоматически симметрична, но не наоборот. Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, пространства симметричных и кососимметричных билинейных форм имеют нулевое пересечение, и каждая билинейная форма β однозначно раскладывается в сумму $\beta = \beta_+ + \beta_-$ симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(v, w) = \frac{\beta(v, w) + \beta(w, v)}{2} \quad \text{и} \quad \beta_-(v, w) = \frac{\beta(v, w) - \beta(w, v)}{2}.$$

13.4.1. Левая и правая корреляции симметричной билинейной формы совпадают друг с другом, и мы будем в этом случае обозначать оператор $\beta^\wedge = {}^\wedge \beta$ через $\hat{\beta} : V \rightarrow V^*$ и называть просто *корреляцией* симметричной формы β . Напомним, корреляция переводит вектор $v \in V$, в линейную функцию

$$\hat{\beta} v : V \rightarrow \mathbb{k}, \quad u \mapsto \beta(u, v) = \beta(v, u).$$

Для кососимметричной формы левая и правая корреляции различаются знаком: $\beta^\wedge = -{}^\wedge \beta$.

13.4.2. Ядро. Левое и правое ядро (косо)симметричной формы β совпадают друг с другом и называются просто *ядром* этой формы. Поэтому для (косо)симметричной формы β пространство $\ker {}^\wedge \beta = \ker \beta^\wedge$ обозначается просто $\ker \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in V \mid \forall v \in V \beta(v, w) = \pm \beta(w, v) = 0\}$.

Предложение 13.5

Ограничение (косо) симметричной билинейной формы β на любое дополнительное к ядру $\ker \beta$ подпространство $U \subset V$ невырождено.

Доказательство. Пусть подпространство $U \subset V$ таково, что $V = \ker \beta \oplus U$, а вектор $w \in U$ удовлетворяет для всех $u \in U$ соотношению $\beta(u, w) = 0$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ в виде $v = e + u$, где $e \in \ker \beta$ и $u \in U$, получаем $\beta(v, w) = \beta(e, w) + \beta(u, w) = 0$, откуда $w \in U \cap \ker \beta = 0$. \square

Предложение 13.6

Любая (косо) симметричная билинейная форма β на пространстве V корректно определяет на фактор пространстве $V / \ker \beta$ невырожденную билинейную форму $\bar{\beta}$ по формуле

$$\bar{\beta}([u], [w]) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(u, w). \quad (13-19)$$

Доказательство. Если $[u] = [u']$, а $[w] = [w']$, то векторы $u - u'$ и $w - w'$ лежат в $\ker \beta$ и имеют нулевые левые и правые скалярные произведения с любым вектором. Поэтому

$$\bar{\beta}([u'], [w']) = \beta(u', w') = \beta(u + (u' - u), w + (w' - w)) = \beta(u, w) = \bar{\beta}([u], [w]),$$

что доказывает корректность формулы (13-19). Пусть класс $[u] \in V / \ker \beta$ имеет нулевое скалярное произведение $\bar{\beta}([u], [w]) = 0$ со всеми классами $[w] \in V / \ker \beta$. По определению формы $\bar{\beta}$ это означает, что $\beta(u, w) = 0$ для всех $w \in U$, откуда $u \in \ker \beta$ и $[u] = 0$. \square

Предостережение 13.1. Для произвольной билинейной формы, которая не является симметричной или кососимметричной, левое и правое ядра $\ker({}^V\beta)$ и $\ker(\beta^V)$ могут быть различны, и в этом случае предл. 13.5 и предл. 13.6, вообще говоря, неверны.

13.4.3. Ортогоналы и проекции. Если форма β на пространстве V (косо) симметрична, то левый и правый ортогоналы к любому подпространству $U \subset V$ совпадают друг с другом и обозначаются через U^\perp . Если (косо) симметричная форма β ограничивается на подпространство $U \subset V$ в невырожденную на этом подпространстве форму, то $V = U \oplus U^\perp$ по предл. 13.4. В этом случае подпространство U^\perp называется *ортогональным дополнением* к подпространству U . Проекция v_U вектора $v \in V$ на U вдоль U^\perp называется *ортогональной проекцией* на U относительно формы β . Вектор v_U однозначно характеризуется тем, что его левое и правое скалярное произведение со всеми векторами из U такие же, как и у вектора v .

Если форма β невырождена на всём пространстве V , то по предл. 13.4

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U \quad \text{и} \quad U^{\perp\perp} = U$$

для всех подпространств $U \subset V$. В этом случае ограничение формы β на подпространство $U \subset V$ невырождено если и только если невырождено её ограничение на U^\perp .

ТЕОРЕМА 13.2 (ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА)

Каждое конечномерное векторное пространство с симметричной билинейной формой β над любым полем \mathbb{K} характеристики $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ обладает базисом с диагональной матрицей Грама¹.

Доказательство. Если $\dim V = 1$ или форма β нулевая, то матрица Грама любого базиса диагональна. Если форма β ненулевая, то найдётся вектор $e \in V$ с $\beta(e, e) \neq 0$, ибо в противном случае $2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0$ для всех $u, w \in V$. Возьмём такой вектор e

¹Такие базисы называются *ортогональными*.

в качестве первого вектора искомого базиса. Поскольку ограничение формы β на одномерное подпространство $U = \mathbb{k} \cdot e$ невырождено, пространство V распадается в прямую ортогональную сумму $U \oplus U^\perp$. По индукции, в U^\perp есть базис с диагональной матрицей Грама. Добавляя к нему e , получаем искомый базис в V . \square

Следствие 13.1

Над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ две симметричных билинейных формы изометрически изоморфны если и только если их матрицы Грама имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем каждый ненулевой диагональный элемент матрицы Грама ортогонального базиса можно сделать единичным, заменив соответствующий ему базисный вектор e_i на $e_i / \sqrt{\beta(e_i, e_i)}$. \square

Пример 13.6 (Ортогональный базис гиперболического пространства)

В гиперболическом пространстве¹ \mathbb{k}^{2n} с гиперболическим базисом $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ в качестве ортогонального базиса можно взять, например, векторы $p_i = e_i + e_{n+i}$ и $q_i = e_i - e_{n+i}$ со скалярными квадратами $h(p_i, p_i) = 2$ и $h(q_i, q_i) = -2$.

Теорема 13.3 (Теорема Дарбу)

Над произвольным полем \mathbb{k} любой характеристики для каждой кососимметричной билинейной формы ω на конечномерном векторном пространстве V имеется базис с матрицей Грама, ненулевые элементы которой сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2 блоках вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13-20)$$

В частности, $\text{rk } \omega$ всегда чётен.

Доказательство. Если форма тождественно нулевая, то доказывать нечего. Если $\omega(u, w) \neq 0$ для каких-то u, w , положим $e_1 = u, e_2 = w/\omega(u, w)$. Так как матрица Грама векторов e_1, e_2 имеет вид (13-20), эти векторы не пропорциональны и порождают двумерное подпространство $U \subset V$, на которое форма ω ограничивается невырождено. Поэтому $V = U \oplus U^\perp$. Применяя индукцию по $\dim V$, можно считать, что в подпространстве U^\perp требуемый базис есть. Добавляя к нему e_1, e_2 , получаем искомый базис в V . \square

Следствие 13.2

Над произвольным полем \mathbb{k} любой характеристики всякая невырожденная кососимметричная форма изометрически изоморфна симплектической форме из [прим. 13.3](#) на стр. 174.

Доказательство. Согласно [теор. 13.3](#) все ненулевые элементы матрицы Грама формы в подходящем базисе сосредоточатся в расположенных на главной диагонали 2×2 блоках (13-20). Чтобы получить из такого базиса симплектический, надо лишь переставить базисные векторы: сначала написать подряд все векторы с нечётными номерами, а потом — с чётными. \square

¹См. [прим. 13.2](#) на стр. 173.

§14. Симметричные билинейные и квадратичные формы

В этом параграфе мы по умолчанию считаем, что основное поле \mathbb{K} имеет $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

14.1. Пространства со скалярным произведением. Будем называть *пространством со скалярным произведением* конечномерное векторное пространство V над произвольным полем \mathbb{K} характеристики $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ с зафиксированной на нём невырожденной¹ симметричной билинейной формой $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. В этом и следующем разделах буква V по умолчанию обозначает именно такое пространство.

14.1.1. Ортогональные прямые суммы. Из двух пространств V_1, V_2 со скалярными произведениями β_1, β_2 можно изготовить пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dot{+} \beta_2$, относительно которого слагаемые ортогональны друг другу и которое ограничивается на V_1 и V_2 в β_1 и β_2 . Это скалярное произведение задаётся формулой

$$[\beta_1 \dot{+} \beta_2]((u_1, u_2), (w_1, w_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1(u_1, u_2) + \beta_2(w_1, w_2).$$

Его матрица Грама в любом базисе, первые $\dim V_1$ векторов которого образуют базис в V_1 с матрицей Грама B_1 , а последние $\dim V_2$ векторов — базис в V_2 с матрицей Грама B_2 , имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пространство $V_1 \oplus V_2$ со скалярным произведением $\beta_1 \dot{+} \beta_2$ обозначается $V_1 \dot{+} V_2$ и называется *ортогональной прямой суммой* пространств V_1 и V_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Обозначим через H_{2n} гиперболическое пространство² размерности $2n$. Постройте изометрический изоморфизм³ $H_{2m} \dot{+} H_{2k} \simeq H_{2(m+k)}$.

14.1.2. Изотропные и анизотропные подпространства. Вектор $v \in V$ называется *изотропным*, если $\beta(v, v) = 0$. Подпространство $U \subset V$, целиком состоящее из изотропных векторов, изотропно в смысле п° 13.2.2 на стр. 174, т. е. $\beta(u, w) = 0$ для всех $u, w \in U$, поскольку

$$2\beta(u, w) = \beta(u + w, u + w) - \beta(u, u) - \beta(w, w) = 0.$$

Подпространство $U \subset V$ называется *анизотропным*, если в нём нет ненулевых изотропных векторов. Если анизотропно всё пространство V , то говорят, что скалярное произведение на V *анизотропно*. Например, евклидово скалярное произведение на вещественном векторном пространстве анизотропно. Так как анизотропная форма обладает свойствами (5,6) из предл. 13.1 на стр. 172, каждая анизотропная форма невырождена. Поэтому для любого анизотропного подпространства $U \subset V$ имеет место ортогональное разложение $V = U \oplus U^\perp$ из предл. 13.4 на стр. 178.

Предложение 14.1

Каждое изотропное подпространство U в пространстве V со скалярным произведением β содержится в некотором гиперболическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim U$. При этом любой базис подпространства U дополняется до гиперболического базиса пространства W .

¹ См. предл. 13.1 на стр. 172.

² См. прим. 13.2 на стр. 173.

³ См. п° 13.1.4 на стр. 172.

Доказательство. Рассмотрим произвольный базис u_1, \dots, u_m в U , дополним его до базиса в V и обозначим через $u_1^\vee, \dots, u_m^\vee$ первые m векторов ортогонально двойственного базиса. Тогда

$$\beta(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (14-1)$$

и эти соотношения ортогональности не нарушаются при добавлении к любому из векторов u_j^\vee произвольной линейной комбинации векторов u_i . Заменяем каждый из векторов u_j^\vee на вектор

$$w_j = u_j^\vee - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^m \beta(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v.$$

Векторы w_1, \dots, w_m по-прежнему удовлетворяют соотношениям (14-1) и вдобавок

$$\beta(w_i, w_j) = \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_i^\vee, u_j^\vee) - \frac{1}{2} \beta(u_j^\vee, u_i^\vee) = 0,$$

т. е. $2m$ векторов $u_i, w_j, 1 \leq i, j \leq m$, образуют гиперболический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W . \square

ТЕОРЕМА 14.1

Каждое пространство V со скалярным произведением распадается в прямую ортогональную сумму $V \simeq H_{2k} \dot{+} A$, первое слагаемое которой гиперболическое и может быть нулевым или совпадать со всем пространством V , а второе слагаемое $A = H_{2k}^\perp$ анизотропно.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если V анизотропно (что так при $\dim V = 1$), доказывать нечего. Если существует ненулевой изотропный вектор $e \in V$, то по [предл. 14.1](#) он лежит в некоторой гиперболической плоскости $H_2 \subset V$, и $V = H_2 \oplus H_2^\perp$ согласно [предл. 13.4](#). По индукции, $H_2^\perp = H_{2m} \oplus A$, где $A = H_{2m}^\perp$ анизотропно. Поэтому $V = H_{2m+2} \oplus A$ и $A = H_{2m+2}^\perp$. \square

Замечание 14.1. Ниже, в [теор. 14.4](#) на стр. 186, мы увидим, что разложение из [теор. 14.1](#) единственно в следующем смысле: если $V \simeq H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2m} \dot{+} W$, где U и W анизотропны, то $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Следствие 14.1

Следующие свойства пространства V со скалярным произведением эквивалентны:

- 1) V изометрически изоморфно гиперболическому пространству
- 2) V является прямой суммой двух изотропных подпространств
- 3) $\dim V$ чётна, и в V имеется изотропное подпространство половинной размерности.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) очевидна. Пусть выполнено (2). По [предл. 13.2](#) размерность каждого из двух изотропных прямых слагаемых не превышает половины размерности V , что возможно только если обе эти размерности равны $\frac{1}{2} \dim V$. Тем самым, (2) \Rightarrow (3). По [предл. 14.1](#) на стр. 182 каждое изотропное подпространство размерности $\frac{1}{2} \dim V$ содержится в гиперболическом подпространстве размерности $\dim V$, которое таким образом совпадает со всем пространством V , что даёт импликацию (3) \Rightarrow (1). \square

14.2. Изометрии и отражения. Всякий анизотропный вектор $e \in V$ задаёт разложение пространства V в прямую ортогональную сумму $V = \mathbb{K} \cdot e \oplus e^\perp$. Линейный оператор $\sigma_e : V \rightarrow V$, тождественно действующий на гиперплоскости e^\perp и переводящий вектор e в $-e$, называется *отражением* в гиперплоскости e^\perp , см. рис. 14♦1. Произвольный вектор $v = v_e + v_{e^\perp} \in V$, где $v_e = e \beta(e, v) / \beta(e, e)$ — проекция вектора v на одномерное подпространство¹ $\mathbb{K} \cdot e$ вдоль гиперплоскости e^\perp , а $v_{e^\perp} = v - v_e \in e^\perp$, переходит при этом в вектор

$$\sigma_e(v) = -v_e + v_{e^\perp} = v - 2v_e = v - 2 \frac{\beta(e, v)}{\beta(e, e)} \cdot e. \quad (14.2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что $\sigma_e \in O_\beta(V)$ и $\sigma_e^2 = \text{Id}_V$, и докажите для любых изометрии $f \in O(V)$ и анизотропного вектора $e \in V$ равенство $f \circ \sigma_e \circ f^{-1} = \sigma_{f(e)}$.

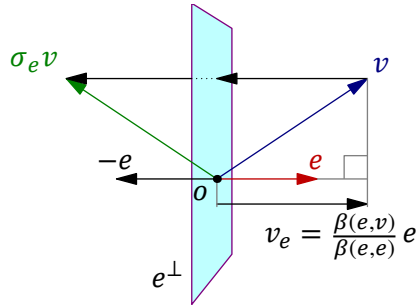


Рис. 14♦1. Отражение σ_e .

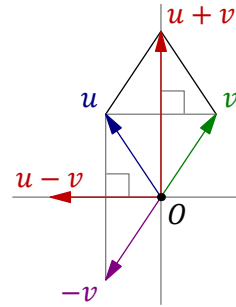


Рис. 14♦2. Отражения в ромбе.

ЛЕММА 14.1

В любом пространстве V со скалярным произведением β для каждой пары различных анизотропных векторов u, v с равными скалярными квадратами $\beta(u, u) = \beta(v, v) \neq 0$ существует отражение, переводящее u либо в v , либо в $-v$.

Доказательство. Если u и v коллинеарны, то искомым отражением является $\sigma_v = \sigma_u$. Если u и v не коллинеарны, то хотя бы одна из двух диагоналей $u + v, u - v$ натянутого на них ромба (см. рис. 14♦2) анизотропна, поскольку эти диагонали ортогональны:

$$\beta(u + v, u - v) = \beta(u, u) - \beta(v, v) = 0,$$

и их линейная оболочка содержит анизотропные векторы u, v . Тем самым, хотя бы одно из отражений $\sigma_{u-v}, \sigma_{u+v}$ определено. При этом $\sigma_{u-v}(u) = v$, а $\sigma_{u+v}(u) = -v$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.3. Проверьте, последние два равенства.

ТЕОРЕМА 14.2

Всякая изометрия n -мерного пространства со скалярным произведением является композицией не более чем $2n - 1$ отражений.

¹Мы пользуемся тем, что $e^\vee = e / \beta(e, e)$ является двойственным к e относительно формы β базисным вектором одномерного пространства $\mathbb{K} e$ и по форм. (13-18) на стр. 178 ортогональная проекция произвольного вектора v на это подпространство равна $v_e = \beta(e, v) e^\vee$.

Доказательство. Индукция по n . Ортогональная группа одномерного пространства состоит из тождественного оператора E и отражения $-E$. Пусть $n > 1$ и $f : V \rightarrow V$ — изометрия. Выберем в V какой-нибудь анизотропный вектор v и обозначим через σ отражение, переводящее $f(v)$ в v или в $-v$. Композиция σf переводит v в $\pm v$, а значит, переводит в себя $(n - 1)$ -мерную гиперплоскость v^\perp . По индукции, действие σf на v^\perp является композицией не более $2n - 3$ отражений в гиперплоскостях внутри v^\perp . Продолжим их до отражений всего пространства V , добавив в зеркало каждого отражения вектор v . Композиция полученных отражений совпадает с σf на гиперплоскости v^\perp , а её действие на v либо такое же, как у σf (при $\sigma f(v) = v$), либо отличается от него знаком (при $\sigma f(v) = -v$). Поэтому σf , как оператор на всём пространстве V , есть композиция построенных $2n - 3$ отражений и, возможно, ещё одного отражения в гиперплоскости v^\perp . Следовательно, $f = \sigma \sigma f$ это композиция не более $2n - 1$ отражений. \square

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Покажите, что в анизотропном пространстве V в условиях [лем. 14.1](#) всегда найдётся отражение, переводящее u в точности в v , и выведите отсюда, что любая изометрия n -мерного анизотропного пространства является композицией не более n отражений.

ТЕОРЕМА 14.3 (ЛЕММА ВИТТА)

Пусть четыре пространства U_1, W_1, U_2, W_2 со скалярными произведениями таковы, что некоторые два из трёх пространств $U_1, U_1 \dot{+} W_1, W_1$ изометрически изоморфны соответствующей паре пространств из тройки $U_2, U_2 \dot{+} W_2, W_2$. Тогда оставшиеся третьи элементы троек тоже изометрически изоморфны.

Доказательство. Если есть изометрические изоморфизмы $f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ и $g : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$, то их прямая сумма $f \oplus g : U_1 \dot{+} W_1 \rightarrow U_2 \dot{+} W_2, (u, w) \mapsto (f(u), g(w))$, является требуемым изометрическим изоморфизмом. Оставшиеся два случая симметричны, и мы разберём один из них. Пусть имеются изометрические изоморфизмы

$$f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \quad \text{и} \quad h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \dot{+} W_2.$$

Изометрический изоморфизм $g : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ строится индукцией по $\dim U_1 = \dim U_2$. Если пространство U_1 одномерно с базисом u , то вектор u анизотропен. Поэтому векторы $f(u)$ и $h(u, 0)$ тоже анизотропны и имеют одинаковые скалярные квадраты. Обозначим через σ отражение пространства $U_2 \dot{+} W_2$, переводящее $h(u, 0)$ в $(\pm f(u), 0)$. Композиция

$$\sigma h : U_1 \dot{+} W_1 \xrightarrow{\sim} U_2 \dot{+} W_2$$

изометрично отображает одномерное подпространство U_1 первой суммы на одномерное подпространство U_2 второй, а значит, изометрично отображает ортогональное дополнение к U_1 в первой сумме на ортогональное дополнение к U_2 во второй, что и даёт требуемый изоморфизм $\sigma h|_{W_1} : W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$. Пусть теперь $\dim U_1 > 1$. Выберем в U_1 любой анизотропный вектор u и рассмотрим ортогональные разложения

$$U_1 \dot{+} W_1 = \mathbb{k} \cdot u \dot{+} u^\perp \dot{+} W_1 \quad \text{и} \quad U_2 \dot{+} W_2 = \mathbb{k} \cdot f(u) \dot{+} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

в которых $u^\perp \subset U_1$ и $f(u)^\perp \subset U_2$ означают ортогональные дополнения к анизотропным векторам u и $f(u)$ внутри U_1 и U_2 соответственно. Так как пространства $\mathbb{k} \cdot u$ и $\mathbb{k} \cdot f(u)$ изометрически изоморфны, по уже доказанному существуют изометрии

$$f' : u^\perp \xrightarrow{\sim} f(u)^\perp \quad \text{и} \quad h' : u^\perp \dot{+} W_1 \xrightarrow{\sim} f(u)^\perp \dot{+} W_2,$$

к которым применимо индуктивное предположение. \square

ТЕОРЕМА 14.4

Построенное в [теор. 14.1](#) разложение пространства V со скалярным произведением в прямую ортогональную сумму гиперболического и анизотропного подпространств единственно в том смысле, что для любых двух таких разложений $V = H_{2k} \dot{+} U = H_{2m} \dot{+} W$ имеет место равенство $k = m$ и существует изометрический изоморфизм $U \simeq W$.

Доказательство. Пусть $m \geq k$, так что $H_{2m} = H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)}$. Тожественное отображение $\text{Id} : V \rightarrow V$ задаёт изометрический изоморфизм $H_{2k} \dot{+} U \simeq H_{2k} \dot{+} H_{2(m-k)} \dot{+} W$. По лемме Витта существует изометрический изоморфизм $U \simeq H_{2(m-k)} \dot{+} W$. Так как U анизотропно, $H_{2(m-k)} = 0$ (иначе в U будет ненулевой изотропный вектор), откуда $k = m$ и $U \simeq W$. \square

ТЕОРЕМА 14.5

Если скалярное произведение на пространстве V невырожденно ограничивается на подпространства $U, W \subset V$ и существует изометрический изоморфизм $\varphi : U \simeq W$, то он продолжается (неоднозначно) до такого изометрического автоморфизма $f : V \simeq V$, что $f|_U = \varphi$.

Доказательство. Если есть хоть какой-нибудь изометрический изоморфизм $\psi : U^\perp \simeq W^\perp$, то изометрия $f = \varphi \oplus \psi : U \oplus U^\perp \simeq W \oplus W^\perp$, $(u, u') \mapsto (\varphi(u'), \psi(u'))$ является требуемым автоморфизмом пространства V . Поскольку тождественный автоморфизм пространства V является изометрией между $U \dot{+} U^\perp \simeq V$ и $W \dot{+} W^\perp \simeq V$, и по условию существует изометрия $U \simeq W$, из леммы Витта тоже изометрический изоморфизм. Так что по лемме Витта¹ ортогоналы U^\perp и W^\perp изометрически изоморфны. \square

СЛЕДСТВИЕ 14.2

Для каждого натурального числа k в диапазоне $1 \leq k \leq \dim V / 2$ группа изометрий $O(V)$ транзитивно действует на k -мерных изотропных и $2k$ -мерных гиперболических подпространствах в V .

Доказательство. Утверждение про гиперболические подпространства вытекает непосредственно из [теор. 14.5](#), а про изотропные — получается из него применением [предл. 14.1](#). \square

14.3. Квадратичные формы. Функция $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ на n -мерном векторном пространстве V над полем \mathbb{K} называется *квадратичной формой*, если она является однородным многочленом степени 2 от координат, т. е. существуют такие базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ в V и однородный многочлен второй степени $q_e \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, что $q(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = q_e(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ для всех $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Если $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, то многочлен q_e можно записать в виде

$$q_e(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (14.3)$$

где суммирование происходит по всем парам индексов $1 \leq i, j \leq n$, а коэффициенты q_{ij} симметричны по i и j , т. е. при $i \neq j$ число $q_{ji} = q_{ij}$ равно половине² фактического коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене q_e , получающегося после приведения подобных слагаемых в (14.3). Если организовать числа q_{ij} в симметричную матрицу $Q_e = (q_{ij})$, которую мы будем называть

¹См. [теор. 14.3](#) на стр. 185.

²Обратите внимание, что над полем характеристики 2 многочлен $x_1 x_2$ не записывается в виде (14.3).

матрицей Грама многочлена q_e , и обозначить через x и $x^t = (x_1, \dots, x_n)$ столбец и строку, составленные из переменных, то (14-3) можно переписать в виде

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i q_{ij} x_j = x^t Q_e x. \quad (14-4)$$

Сравнивая это с форм. (13-3) на стр. 170, мы заключаем, что $q(v) = \tilde{q}(v, v)$, где $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ — симметричная билинейная форма с матрицей Грама Q_e в базисе e . Поскольку

$$q(u+w) - q(u) - q(w) = \tilde{q}(u+w, u+w) - \tilde{q}(u, u) - \tilde{q}(w, w) = 2\tilde{q}(u, w),$$

симметричная билинейная форма \tilde{q} со свойством $\tilde{q}(v, v) = q(v)$ однозначно определяется квадратичной формой q , если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Симметричная билинейная форма \tilde{q} называется *поляризацией* квадратичной формы q . Обратите внимание, что взаимно однозначное соответствие между квадратичными и симметричными билинейными формами

$$\begin{aligned} \tilde{q}(u, w) &\mapsto q(v) = \tilde{q}(v, v) \\ q(v) &\mapsto \tilde{q}(u, w) = \frac{1}{2}(q(u+w) - q(u) - q(w)) \end{aligned} \quad (14-5)$$

не зависят от базиса e в V . В частности, для любого базиса $f = e C_{ef}$ в V значение $q(v)$ является однородным многочленом второй степени q_f от координат вектора v в базисе f , причём матрица Грама этого многочлена, равная матрице Грама билинейной формы \tilde{q} в базисе f , будет равна¹ $Q_f = C_{ef}^t Q_e C_{ef}$.

Поскольку при переходе от базиса к базису определитель Грама умножается на квадрат определителя матрицы перехода, класс числа $\det Q_e \in \mathbb{k}$ по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля \mathbb{k} не зависит от выбора базиса e . Мы будем обозначать этот класс $\det q \in \mathbb{k}/\mathbb{k}^{*2}$ и называть его *определителем Грама* квадратичной формы q . Квадратичная форма q называется *вырожденной*, если $\det q = 0$. Формы с $\det q \neq 0$ называются *невырожденными*. Таким образом, невырожденность квадратичной формы q означает в точности то же, что невырожденность её поляризации² \tilde{q} . Под *рангом* квадратичной формы q мы понимаем ранг её поляризации \tilde{q} , равный рангу матрицы Грама Q_e в любом базисе e . Также, как и для симметричных билинейных форм, мы будем называть ненулевой вектор $v \in V$ *изотропным* для квадратичной формы q , если $q(v) = 0$. Квадратичная форма называется *анизотропной*, если $q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$.

Из доказанных выше результатов про симметричные билинейные формы немедленно получаются аналогичные результаты про квадратичные формы.

Следствие 14.3 (из теор. 14.1 на стр. 183)

Всякая квадратичная форма q над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ в подходящих координатах записывается в виде $x_1 x_{i+1} + x_2 x_{i+2} + \dots + x_i x_{2i} + \alpha(x_{2i+1}, x_{2i+2}, \dots, x_r)$, где $r = \text{rk}(q)$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. \square

Следствие 14.4 (из теор. 13.2 на стр. 180)

Всякая квадратичная форма над произвольным полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ линейной обратимой заменой переменных приводится к виду $\sum a_i x_i^2$. \square

¹См. формулу (13-2) на стр. 170.

²См. предл. 13.1 на стр. 172.

Следствие 14.5 (из сл. 13.1 на стр. 181)

Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ над алгебраически замкнутым полем \mathbb{K} характеристики $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые им квадратичные формы $f, g: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ имеют одинаковый ранг. \square

Пример 14.1 (квадратичные формы от двух переменных)

Согласно сл. 14.4, ненулевая квадратичная форма от двух переменных

$$q(x) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (14-6)$$

подходящей линейной заменой координат приводятся либо к виду αt^2 с $\alpha \neq 0$, либо к виду

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2, \quad \text{где } \alpha\beta \neq 0.$$

Условимся писать $\xi \sim \eta$ для таких чисел $\xi, \eta \in \mathbb{K}$, что $\xi = \lambda^2 \eta$ для какого-нибудь ненулевого $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда в первом случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha \cdot 0 = 0$, т. е. форма q вырождена, а во втором случае $ac - b^2 \sim \det q \sim \alpha\beta \neq 0$ и форма q невырождена. Тем самым, вырожденность ненулевой квадратичной формы (14-6) означает, что с точностью до постоянного множителя она является полным квадратом линейной формы $t \in V^*$. Такая форма q зануляется вдоль одномерного подпространства $\text{Ann}(t) \subset V$ и отлична от нуля на всех остальных векторах.

Если форма (14-6) невырождена, и у неё есть ненулевой изотропный вектор $v = (\vartheta_1, \vartheta_2)$, то из равенства $\alpha\vartheta_1^2 + \beta\vartheta_2^2 = 0$ вытекает, что $\vartheta_2 \neq 0$ и $-\det q \sim -\alpha\beta \sim -\beta/\alpha = (\vartheta_1/\vartheta_2)^2$ является квадратом в поле \mathbb{K} . В этом случае многочлен

$$\alpha t_1^2 + \beta t_2^2 = \alpha \left(t_1 + \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right) \left(t_1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} t_2 \right)$$

раскладывается над полем \mathbb{K} в произведение двух непропорциональных линейных форм. Поэтому квадратичная форма q , у которой $-\det q$ является ненулевым квадратом, тождественно зануляется на двух одномерных подпространствах и отлична от нуля на всех прочих векторах. Мы будем называть такие формы *гиперболическими*¹. Если же $-\det q$ не квадрат, то форма q анизотропна. Число $-\det(q) = b^2 - ac$ часто обозначают через $D/4$ и называют D *дискриминантом* квадратичной формы (14-6).

14.4. Квадратичные формы над конечными полями. Из курса алгебры известно², что для каждого простого $p \in \mathbb{N}$ любого $m \in \mathbb{N}$ существует единственное с точностью до изоморфизма поле \mathbb{F}_q из $q = p^m$ элементов, и каждое конечное поле изоморфно одному и только одному из полей \mathbb{F}_q . Следуя принятому в начале этой лекции соглашению, всюду далее мы считаем, что $p = \text{char } \mathbb{F}_q > 2$. Зафиксируем какой-нибудь элемент $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$, не являющийся квадратом.

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Убедитесь, что ненулевые квадраты образуют в мультипликативной группе \mathbb{F}_q^* поля \mathbb{F}_q подгруппу индекса 2. В частности, нужный нам элемент ε существует, и любой ненулевой элемент поля \mathbb{F}_q умножением на подходящий ненулевой квадрат можно сделать равным либо 1, либо ε .

¹Поскольку поляризация такой формы является гиперболическим скалярным произведением.

²См. раздел 3.5 на стр. 45 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-03.pdf>.

Лемма 14.2

При любых $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$ квадратичная форма $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ на двумерном координатном пространстве \mathbb{F}_q^2 принимает все значения из поля \mathbb{F}_q .

Доказательство. В силу [упр. 14.5](#) при любых фиксированных $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q^*$ и $b \in \mathbb{F}_q$ чисел вида $a_1x_1^2$ и чисел вида $b - a_2x_2^2$, где x_1, x_2 независимо пробегают \mathbb{F}_q , имеется ровно по

$$1 + \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2}$$

штук. Следовательно эти два множества чисел имеют общий элемент $a_1x_1^2 = b - a_2x_2^2$. Тем самым, $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = b$. \square

Предложение 14.2

Каждая квадратичная форма f ранга r над полем \mathbb{F}_q в подходящих координатах записывается как $x_1^2 + \dots + x_r^2$ или как $x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$, и эти две формы изометрически не изоморфны.

Доказательство. По [теор. 13.2](#) форма f в подходящих координатах записывается в виде

$$a_1x_1^2 + \dots + a_rx_r^2, \quad \text{где все } a_i \neq 0.$$

Согласно [упр. 14.5](#), умножая базисные векторы на подходящие ненулевые константы, мы можем считать, что каждое a_i равно либо 1, либо ε . Если $a_i = a_j = \varepsilon$ при каких-то $i \neq j$, то в линейной оболочке U базисных векторов e_i, e_j по [лем. 14.2](#) найдётся вектор v_i с $f(v_i) = 1$. Ортогональное дополнение к v_i в плоскости U одномерно, и форма f ограничивается на него невырождено. Пусть вектор v_j его порождает.

Упражнение 14.6. Покажите, что $f(v_j)$ является ненулевым квадратом в \mathbb{F}_q .

Заменяя e_i, e_j на $v_i, v_j / \sqrt{f(v_j)}$, мы сохраняем диагональный вид формы и уменьшаем на два количество коэффициентов, равных ε . Эту процедуру можно повторять, пока таких коэффициентов останется не более одного. Формы $f = x_1^2 + \dots + x_r^2$ и $g = x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 + \varepsilon x_r^2$ изометрически не изоморфны, поскольку индуцированные ими невырожденные квадратичные формы f_{red} и g_{red} на факторах $V/\ker \tilde{f}$ и $V/\ker \tilde{g}$ исходного пространства V , где были заданы формы, имеют разные определители Грама: $\det f_{\text{red}} = 1$ является квадратом, а $\det g_{\text{red}} = \varepsilon$ — нет. \square

Предложение 14.3

Всякая квадратичная форма на пространстве размерности ≥ 3 над полем \mathbb{F}_q имеет ненулевой изотропный вектор.

Доказательство. По [теор. 13.2](#) форма записывается в подходящем базисе как

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \dots$$

Если $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$, то вектор $(1, 0, 0, \dots)$ или вектор $(0, 1, 0, \dots)$ изотропен. Если $a_1a_2 \neq 0$, то по [лем. 14.2](#) найдутся такие $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$, что $a_1\lambda^2 + a_2\mu^2 = -a_3$. Тогда вектор $(\lambda, \mu, 1, 0, \dots)$ изотропен. \square

Предложение 14.4 (перечисление анизотропных форм)

Анизотропные формы над полем \mathbb{F}_q , где $q = p^m$ и $p > 2$, имеются только в размерностях 1 и 2. В размерности 2 квадратичная форма $x_1^2 + x_2^2$ анизотропна если и только если $q \equiv -1 \pmod{4}$, а форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ анизотропна если и только если $q \equiv 1 \pmod{4}$.

Доказательство. Из [прим. 14.1](#) на стр. 188 вытекает, что форма $x_1^2 + x_2^2$ имеет изотропный вектор если и только если её $D/4 = -1$ является квадратом в \mathbb{F}_q . В этом случае вторая форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ анизотропна, так как $D/4 = -\varepsilon$ не является квадратом. Наоборот, если -1 не квадрат, то $-\varepsilon$ квадрат, и форма $x_1^2 + \varepsilon x_2^2$ имеет изотропный вектор. Остаётся убедиться, что -1 является квадратом в \mathbb{F}_q если и только если $q \equiv 1 \pmod{4}$. Для этого рассмотрим гомоморфизм мультипликативных групп $\gamma: \mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*, x \mapsto x^{\frac{q-1}{2}}$. Поскольку порядок $|\mathbb{F}_q^*| = q-1$, для каждого $x \in \mathbb{F}_q^*$ выполняется равенство $x^{q-1} = 1$, из которого вытекает, что все ненулевые квадраты лежат в $\ker \gamma$, а все $x \in \text{im } \gamma$ имеют $x^2 = 1$, откуда $\text{im } \gamma \subset \{\pm 1\}$. Так как у уравнения $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$ не более $(q-1)/2$ корней в поле \mathbb{F}_q , образ γ имеет порядок 2, а $\ker \gamma \subset \mathbb{F}_q^*$ имеет индекс 2 и совпадает с группой квадратов, т. е. $x \in \mathbb{F}_q^*$ является квадратом тогда и только тогда, когда $x^{\frac{q-1}{2}} = 1$. В частности, -1 квадрат если и только если $(q-1)/2$ чётно. \square

14.5. Вещественные квадратичные формы. Из [сл. 14.4](#) вытекает, что любая квадратичная форма на вещественном векторном пространстве V в подходящем базисе записывается в виде

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+m}^2. \quad (14-7)$$

Для этого надо перейти к базису с диагональной матрицей Грама и поделить каждый базисный вектор e_i с $q(e_i) \neq 0$ на $\sqrt{|q(e_i)|}$. Числа p и m в представлении (14-7) называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, упорядоченная пара (p, m) — *сигнатурой*, а разность $p - m$ — просто *индексом* вещественной квадратичной формы q .

ТЕОРЕМА 14.6

Числа p и m в представлении (14-7) не зависят от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет вид (14-7).

Доказательство. Будем считать, что $p \geq m$, поскольку противоположный случай сводится к этому заменой q на $-q$. Сумма $p + m = \text{rk } q$ равна рангу билинейной формы \tilde{q} и не зависит от выбора базиса. Линейная оболочка базисных векторов e_k с номерами $k > p + m$ является ядром билинейной формы \tilde{q} . Классы $[e_i]$ остальных базисных векторов по модулю $\ker \tilde{q}$ образуют базис фактор пространства $W = V / \ker \tilde{q}$. По [предл. 13.6](#) на стр. 180 форма \tilde{q} корректно задаёт на W невырожденную симметричную билинейную форму $\tilde{q}_{\text{red}}([u], [w]) = \tilde{q}(u, w)$, которая в базисе из классов $[e_i]$ с $1 \leq i \leq p + m$ записывается той же самой формулой (14-7). Каждая пара базисных векторов $[e_i], [e_{p+i}]$ порождает гиперболическую плоскость с гиперболическим базисом из векторов $([e_i] \pm [e_{p+i}])/\sqrt{2}$. Поэтому форма \tilde{q}_{red} является прямой ортогональной суммой гиперболического пространства H_{2m} , натянутого на классы $[e_i], [e_{p+i}]$ с $1 \leq i \leq m$, и анизотропного пространства размерности $p - m$, натянутого на оставшиеся классы $[e_j]$ с $m < j \leq p$. По [теор. 14.4](#) на стр. 186 размерности гиперболического и анизотропного слагаемых не зависят от выбора разложения пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму гиперболического и анизотропного. Поэтому индекс $p - m$ и отрицательный индекс инерции m не зависят от выбора базиса, в котором форма q имеет вид (14-7). \square

Следствие 14.6 (из доказательства [теор. 14.6](#))

Для каждого n на пространстве \mathbb{R}^n с точностью до изометрического изоморфизма имеются ровно два анизотропных скалярных произведения — евклидово и *антиевклидово*, получающиеся

из евклидова сменой знака. Вещественные квадратичные формы положительного индекса имеют ненулевое евклидово анизотропное слагаемое, а формы отрицательного индекса — ненулевое антиевклидово анизотропное слагаемое, размерности которых равны абсолютной величине индекса. Гиперболичность невырожденной вещественной квадратичной формы равносильна тому, что её индекс равен нулю. \square

Следствие 14.7

Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ тогда и только тогда переводятся друг в друга линейными обратимыми заменами переменных, когда задаваемые ими квадратичные формы $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют одинаковый ранг и индекс. \square

14.5.1. Квадратичные формы на евклидовом пространстве. Если на вещественном векторном пространстве V имеется евклидова структура, то поляризацию \tilde{q} любой квадратичной формы q на V можно единственным образом представить в виде $\tilde{q}(u, w) = (u, F_q w)$, где скобки в правой части означают евклидово скалярное произведение на V , а через $F_q : V \rightarrow V$ обозначен линейный оператор, отвечающий симметричной билинейной форме \tilde{q} при задаваемом евклидовым скалярным произведением изоморфизме между формами и операторами¹. В любом евклидово ортонормальном базисе пространства V матрица оператора F_q совпадает с матрицей Грама формы \tilde{q} в этом базисе. В частности, она симметрична, а значит, оператор F_q евклидово самосопряжён. Согласно теор. 11.3 на стр. 148 в пространстве V найдётся евклидово ортонормальный базис, в котором матрица оператора F_q диагональна и имеет на диагонали в точности все собственные числа оператора F_q учёт их кратностей. Мы получаем следующие полезные результаты.

ТЕОРЕМА 14.7 (ТЕОРЕМА О НОРМАЛЬНОМ БАЗИСЕ)

Для любой квадратичной формы q на евклидовом пространстве V существует евклидово ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна. Диагональные элементы такой матрицы с точностью до перестановки не зависят от выбора указанного базиса и равны собственным числам того единственного линейного оператора $f : V \rightarrow V$, для которого

$$q(v) = (v, f v) \quad \text{при всех } v \in V.$$

Если все $\dim V$ собственных чисел различны, то ортонормальный базис, в котором матрица Грама формы q диагональна, единственен с точностью до перестановки базисных векторов и замены их направлений на противоположные. \square

Следствие 14.8

Два однородных многочлена второй степени $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ тогда и только тогда переводятся друг в друга ортогональными² заменами переменных, когда их матрицы Грама в ортонормальном базисе имеют равные характеристические многочлены. \square

14.5.2. Вычисление сигнатуры квадратичной формы на \mathbb{R}^n можно осуществить несколькими способами.

¹См. н° 13.2.4 на стр. 176.

²Т. е. сохраняющими стандартное евклидово скалярное произведение на \mathbb{R}^n

ПРИМЕР 14.2 (использование евклидовой структуры)

Согласно [теор. 14.7](#) и предваряющему её рассуждению, положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы на \mathbb{R}^n равны количествам положительных и отрицательных собственных чисел (с учётом кратностей) матрицы Грама этой формы в любом ортонормальном для стандартной евклидовой структуры базисе пространства \mathbb{R}^n .

ПРИМЕР 14.3 (метод Якоби – Сильвестра)

Обозначим через $V_k \subset \mathbb{R}^n$ линейную оболочку первых k базисных векторов e_1, \dots, e_k , а через Δ_k их определитель Грама, т. е. рассматриваемый с точностью до умножения на ненулевые положительные числа¹ главный угловой $k \times k$ минор матрицы Грама формы, сосредоточенный в первых k строках и столбцах. Если ограничение формы на подпространство V_k неособо, то знак $\operatorname{sgn} \Delta_k = (-1)^{m_k}$, где показатель m_k равен отрицательному индексу инерции ограничения формы на V_k . Таким образом, когда все $\Delta_i \neq 0$, соседние миноры Δ_k, Δ_{k+1} различаются знаком если и только если отрицательный индекс инерции $m_{k+1} = m_k + 1$. Поэтому полный отрицательный индекс инерции $m = m_n$ в этом случае равен числу перемен знака в последовательности $1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Если некоторый $\Delta_k = 0$, но при этом Δ_{k-1} и Δ_{k+1} оба ненулевые, то ограничения формы на подпространства V_{k+1} и V_{k-1} , а также на двумерное ортогональное дополнение W к подпространству V_{k-1} внутри V_{k+1} невырождены, и в W имеется изотропный вектор, порождающий ядро ограничения формы на подпространство V_k , где она вырождена. Тем самым, $W \simeq H_2$ является гиперболической плоскостью с сигнатурой $(1, 1)$, и из ортогонального разложения $V_{k+1} = V_{k-1} \dot{+} W$ вытекает равенство $(p_{k+1}, m_{k+1}) = (p_{k-1} + 1, m_{k-1} + 1)$. Обратите внимание, что в этом случае Δ_{k-1} и Δ_{k+1} имеют противоположные знаки, т. е. при $\Delta_k = 0$ неравенство $\Delta_{k-1}\Delta_{k+1} > 0$ невозможно.

Если $\Delta_k = \Delta_{k+1} = 0$, но при этом $\Delta_{k-1}\Delta_{k+2} \neq 0$, то $V_{k+2} = V_{k-1} \dot{+} W$, где W — трёхмерное ортогональное дополнение к V_{k-1} внутри V_{k+2} . Как и выше, ограничение формы на W невырождено, и в W есть изотропный вектор. Поэтому W имеет сигнатуру $(2, 1)$ или $(1, 2)$ и

$$\begin{aligned} (p_{k+2}, m_{k+2}) &= (p_{k-1} + 2, m_{k-1} + 1), & \text{если } \Delta_{k-1}\Delta_{k+2} < 0, \\ (p_{k+2}, m_{k+2}) &= (p_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2), & \text{если } \Delta_{k-1}\Delta_{k+2} > 0. \end{aligned}$$

Итак, когда в последовательности $1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ не встречается более двух нулей подряд, прочтение её слева направо позволяет проследить за изменением сигнатуры (p_i, m_i) ограничения формы на пространства V_i с ненулевыми Δ_i и найти индекс.

Скажем, пусть $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 < 0$. Тогда

$$(p_1, m_1) = (0, 1), \quad (p_3, m_3) = (2, 1), \quad (p_6, m_6) = (4, 2).$$

Примером такой формы является форма с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¹Т. е. на ненулевые квадраты поля \mathbb{R} .

Пример 14.4 (метод Гаусса)

Над любым полем \mathbb{k} перейти от произвольного базиса e_1, \dots, e_n к ортогональному базису заданной симметричной билинейной формы \tilde{q} можно при помощи гауссовых элементарных преобразований базисных векторов¹: перестановок каких-нибудь двух векторов e_i, e_j местами и замен одного из базисных векторов e_i на вектор $e'_i = e_i + \lambda e_j$, где $j \neq i$, а $\lambda \in \mathbb{k}$ произвольно, или на вектор $e'_i = \lambda e_i$, где $\lambda \in \mathbb{k}^*$ отлично от нуля. При перестановке местами векторов e_i, e_j в матрице Грама формы \tilde{q} одновременно² переставляются друг с другом i -я и j -я строки, а также i -й и j -й столбцы. Обратите внимание, что диагональные элементы $\tilde{q}(e_i, e_i)$ и $\tilde{q}(e_j, e_j)$ при этом переставляются друг с другом, а элементы $\tilde{q}(e_i, e_j) = \tilde{q}(e_j, e_i)$ остаются без изменения, и матрица в целом остаётся симметричной. Например, перестановка первого и третьего базисного вектора действует на симметричную 3×3 матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f & e & c \\ e & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Если заменить вектора e_i на λe_i , то i -я строка и i -й столбец матрицы Грама умножатся на λ (всё равно в каком порядке). Обратите внимание, что диагональный элемент $\tilde{q}(e_i, e_i)$ при этом умножится на λ^2 . Например, замена e_2 на $2e_2$ подействует на предыдущую матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ 2b & 4d & 2e \\ c & 2e & f \end{pmatrix}.$$

Наконец, замена e_i на $e'_i = e_i + \lambda e_j$ преобразует стоящие в i -й строке и i -м столбце недиагональные элементы $q_{ik} = \tilde{q}(e_i, e_k)$ и $q_{ki} = \tilde{q}(e_k, e_i)$ с $k \neq i$ в элементы $q'_{ik} = q_{ik} + \lambda q_{jk}$ и $q'_{ki} = q_{ki} + \lambda q_{kj}$ соответственно, а диагональный элемент $q_{ii} = \tilde{q}(e_i, e_i)$ — в $q'_{ii} = q_{ii} + \lambda q_{ij} + \lambda q_{ji} + \lambda^2 q_{jj}$, т. е. к i -й строке матрицы Грама прибавится j -я, умноженная на λ , после чего в получившейся матрице к i -у столбцу матрицы прибавится j -й, умноженный на λ . Обратите внимание, что те же действия можно произвести в другой последовательности: сначала к i -у столбцу матрицы прибавить j -й, умноженный на λ , а потом в полученной матрице к i -у столбцу прибавить j -й, умноженный на λ , — результат получится тот же, и матрица в целом останется симметричной. Например, замена e_3 на $e_3 + 3e_2$ подействует на предыдущую матрицу так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c + 3b \\ b & d & e + 3d \\ c + 3b & e + 3d & f + 6e + 9d \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса заключается в том, чтобы при помощи описанных трёх типов преобразований матрицы Грама превратить заданную симметричную матрицу в диагональную³. Для вещественной формы количества положительных и отрицательных чисел на диагонали итоговой матрицы — это в точности положительный и отрицательный индексы инерции.

¹См. п. 6.1 на стр. 72.

²Точнее, i -я строка переставляется с j -й, а потом i -й столбец переставляется с j -м, либо в другой последовательности: сначала i -й столбец переставляется с j -м, а потом i -я строка переставляется с j -й, и результат не зависит от того, какая перестановка осуществляется первой, а какая второй.

³Обратите внимание, что эта процедура похожа на ортогонализацию Грама – Шмидта из предл. 10.1 на стр. 131, только порядок действий предлагается таким, как в доказательстве теор. 13.2 на стр. 180: выбрать базисный вектор с ненулевым скалярным квадратом, спроектировать все остальные базисные векторы на ортогонал к нему, затем выбрать среди них вектор с ненулевым квадратом и т. д.

Для иллюстрации вычислим методом Гаусса сигнатуру вещественной квадратичной формы с матрицей Грама

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сначала обнулим¹ 1-ю строку и 1-й столбец вне диагонали, добавляя к векторам e_2, e_4 соответственно векторы $2e_1$ и $-3e_1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь обнулим вне диагонали 2-ю строку и 2-й столбец, добавляя к текущим векторам e_3, e_4 соответственно текущие векторы $e_1/6$ и e_1 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Наконец, обнулим вне диагонали 3-ю строку и 3-й столбец, добавляя к текущему вектору e_4 текущий вектор $-18e_3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, форма имеет сигнатуру $(2, 2)$.

14.6. Самосопряжённые операторы. Пусть на векторном пространстве V над произвольным полем \mathbb{K} задана невырожденная симметричная билинейная форма

$$(*, *): V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad u, w \mapsto (u, w). \quad (14-8)$$

Как и в евклидовом пространстве², будем называть линейный оператор $f: V \rightarrow V$ *самосопряжённым* относительно скалярного произведения (14-8), если $(fu, w) = (u, fw)$ при всех $u, w \in V$. Самосопряжённость оператора f равносильна тому, что при биекции между формами и операторами, которая задаётся скалярным произведением³ (14-8), отвечающая оператору f билинейная форма $\beta_f(u, w) = (u, fw)$ является симметричной.

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Убедитесь в этом.

¹Обратите внимание, что вычисления достаточно проделывать только для клеток, стоящих на главной диагонали и под нею — наддиагональная часть матрицы восстанавливается из соображений симметрии.

²Ср. с п° 11.2 на стр. 146.

³См. п° 13.2.4 на стр. 176.

На матричном языке самосопряжённость оператора f означает, что его матрица F в любом базисе пространства V связана с матрицей Грама G скалярного произведения (14-8) в том же базисе соотношением $F^t G = G F$. Дословно теми же рассуждениями, что и для евклидовых пространств¹ устанавливаются два ключевых свойства самосопряжённых операторов:

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Пусть линейный оператор $f : V \rightarrow V$ самосопряжён. Покажите, что

- а) для любого f -инвариантного подпространства $U \subset V$ ортогонал U^\perp тоже f -инвариантен
- б) собственные векторы оператора f с разными собственными значениями ортогональны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.5

Если характеристический многочлен самосопряжённого линейного оператора $f : V \rightarrow V$ полностью раскладывается в поле \mathbb{K} на линейные множители и все ненулевые собственные векторы оператора f анизотропны, то в пространстве V имеется ортогональный базис из собственных векторов оператора f .

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если оператор f является умножением на скаляр (что имеет место при $\dim V = 1$), то подойдёт любой ортогональный базис пространства V . Допустим, что $\dim V > 1$ и оператор f не скалярен. Поскольку характеристический многочлен $\det(tE - F)$ имеет корни в поле \mathbb{K} , у оператора F есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\} \subsetneq V.$$

По условию леммы, оно анизотропно, и значит, скалярное произведение ограничивается на него невырождено. Поэтому $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, и ограничение скалярного произведения на V_λ^\perp тоже невырождено. По [упр. 14.8](#) оператор f переводит подпространство V_λ^\perp в себя. Тем самым, характеристический многочлен оператора f является произведением характеристических многочленов ограничений $f|_{V_\lambda}$ и $f|_{V_\lambda^\perp}$. В силу единственности разложения на множители в кольце $\mathbb{K}[t]$ и предположения леммы, каждый из этих двух характеристических многочленов полностью раскладывается на линейные множители в поле \mathbb{K} . По индуктивному предположению, в подпространстве V_λ^\perp есть ортогональный базис из собственных векторов оператора f . Добавляя к нему любой ортогональный базис собственного пространства V_λ , получаем нужный базис в V . \square

¹См. [лем. 11.2](#) и [лем. 11.3](#) на стр. 148.

§15. Кососимметричные билинейные и грассмановы квадратичные формы

15.1. Симплектические пространства. Согласно [сл. 13.2](#) из теоремы Дарбу¹, каждое векторное пространство с невырожденной кососимметричной формой изометрически изоморфно координатному пространству \mathbb{K}^{2n} , на котором форма имеет в стандартном базисе матрицу Грама

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

как в [прим. 13.3](#) на стр. 174. Мы будем называть такие пространства *симплектическими* и обозначать Ω_{2n} по аналогии с гиперболическими пространствами H_{2n} .

УПРАЖНЕНИЕ 15.1. Убедитесь, что прямая ортогональная сумма $\Omega_{2m} \dot{+} \Omega_{2k}$ изометрически изоморфна $\Omega_{2(m+k)}$.

Прямым аналогом [предл. 14.1](#) на стр. 182 является следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.1

Каждое изотропное подпространство U невырожденной кососимметричной формы ω на пространстве V содержится в некотором симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim U$, и любой базис в U дополняется² до симплектического базиса в W .

Доказательство. Выберем в U базис u_1, \dots, u_m , дополним его до базиса в V и рассмотрим двойственный к нему относительно ω базис. Первые m векторов $u_1^\vee, \dots, u_m^\vee$ этого двойственного базиса удовлетворяют равенствам

$$\omega(u_i, u_j^\vee) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad (15-1)$$

которые не нарушаются при добавлении к любому из векторов u_j^\vee любой линейной комбинации векторов u_i . Заменяя каждый вектор u_j^\vee вектором

$$w_j = u_j^\vee - \sum_{v < j} \omega(u_j^\vee, u_v^\vee) \cdot u_v, \quad (15-2)$$

получаем набор векторов w_1, \dots, w_m , также удовлетворяющий равенствам (15-1), но порождающий изотропное подпространство, поскольку для всех $i < j$

$$\omega(w_i, w_j) = \omega(u_i^\vee, u_j^\vee) - \omega(u_j^\vee, u_i^\vee) \cdot \omega(u_i^\vee, u_i) = 0.$$

Таким образом, векторы u_i и w_j с $1 \leq i, j \leq m$ составляют симплектический базис в своей линейной оболочке, которую мы и возьмём в качестве W . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1 (ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДПРОСТРАНСТВА)

Изотропные подпространства максимальной возможной размерности n в симплектическом пространстве Ω_{2n} называются *лагранжевыми подпространствами*.

¹См. [теор. 13.3](#) на стр. 181.

²Многими способами.

СЛЕДСТВИЕ 15.1

Каждое изотропное подпространство $U \subset \Omega_{2n}$ содержится в некотором лагранжевом подпространстве $L \subset \Omega_{2n}$.

Доказательство. Пусть $\dim U = k$. Тогда U содержится в некотором симплектическом подпространстве $\Omega_{2k} \subset \Omega_{2n}$. Поскольку ограничение симплектической формы ω с Ω_{2n} на Ω_{2k} невырождено, $\Omega_{2n} = \Omega_{2k} \oplus \Omega_{2k}^\perp$ и ограничение формы ω на Ω_{2k}^\perp тоже невырождено, т. е. ортогонал Ω_{2k}^\perp изометрически изоморфен симплектическому подпространству $\Omega_{2(n-k)}$, которое в свою очередь является прямой суммой двух $2(n-k)$ -мерных изотропных подпространств. Прямая сумма любого из них с подпространством U является лагранжевым подпространством, содержащим U . \square

ТЕОРЕМА 15.1

Для каждого лагранжева подпространства $L \subset V$ найдётся такое лагранжево подпространство $L' \subset V$, что $V = L \oplus L'$. При этом каждый базис e подпространства L однозначно достраивается некоторым базисом e' подпространства L' до симплектического базиса пространства V . При фиксированном L' все дополнительные к L лагранжевы подпространства L'' биективно соответствуют линейным операторам $f : L' \rightarrow L$, удовлетворяющим равенству¹

$$\omega(u_1, fu_2) = -\omega(fu_1, u_2) \text{ для всех } u_1, u_2 \in L'.$$

Доказательство. Согласно предл. 15.1 базис e подпространства L достраивается до симплектического базиса в некотором содержащем L симплектическом подпространстве $W \subset V$ размерности $\dim W = 2 \dim L = \dim V$. Поэтому $W = V$ и в качестве L' можно взять линейную оболочку последних $n = \dim L$ векторов получающегося таким образом симплектического базиса в V . Индуцированное правой корреляцией $\omega^\wedge : V \rightarrow V^*$ отображение

$$\omega_L^\wedge : L' \rightarrow L^*, v \mapsto \omega(*, v)|_L, \quad (15-3)$$

переводящее вектор $v \in L'$ в линейную форму $u \mapsto \omega(u, v)$ на подпространстве $L \subset V$, является изоморфизмом векторных пространств, поскольку переводит любой базис e' подпространства L' , дополняющий базис e в L до симплектического базиса в V , в двойственный к e базис e^* пространства L^* .

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Убедитесь в этом.

Таким образом, базис e' в L' однозначно восстанавливается по e как прообраз двойственного к e базиса в L^* при независимом от выбора базиса изоморфизме (15-3).

Далее, каждое дополнительное к L подпространство $L'' \subset V = L' \oplus L$ биективно проектируется на L' вдоль L , ибо ядро такой проекции равно $L'' \cap L$. Поэтому для любого вектора $u \in L'$ существует единственный такой вектор $f(u) \in L$, что $u + f(u) \in L''$. Правило $u \mapsto f(u)$ задаёт линейное отображение $f : L' \rightarrow L$, графиком которого является подпространство $L'' \subset L' \oplus L$. Таким образом, мы получаем биекцию между линейными отображениями $f : L' \rightarrow L$ и подпространствами $L'' \subset L' \oplus L = V$, которые изоморфно проектируются на L' вдоль L . При этом изотропность такого подпространства $L'' \subset V$ равносильна антисамосопряжённости задаваемого им оператора $f : L' \rightarrow L$, графиком которого является L'' , так как

$$\omega(u_1 + f(u_1), u_2 + f(u_2)) = \omega(u_1, f(u_2)) + \omega(f(u_1), u_2)$$

в силу изотропности подпространств $L' \ni u_1, u_2$ и $L \ni f(u_1), f(u_2)$. \square

¹Такие операторы называются *антисамосопряжёнными* относительно формы ω .

15.2. Грассмановы квадратичные формы. Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен¹ второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем \mathbb{k} в подходящем базисе \mathbf{e} пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}. \quad (15-4)$$

Для этого рассмотрим произвольный базис \mathbf{u} и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2),$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$ и вектор $v_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \neq 0$. Перейдём к новому базису \mathbf{v} из векторов $v_i = u_i$ при $i \neq 2$ и вектора v_2 .

УПРАЖНЕНИЕ 15.3. Убедитесь, что это действительно базис.

Подставляя в предыдущую формулу $u_2 = (v_2 - \alpha_3 v_3 - \dots - \alpha_n v_n) / \alpha_2$, получаем

$$\begin{aligned} \omega &= v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ &= (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \mathbb{k}$. Переходя к базису \mathbf{w} из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Следствие 15.2

Над полем \mathbb{k} характеристики $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V базис \mathbf{e} , в котором $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с ненулевым коэффициентом 2, а значит, $\omega \wedge \omega \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. \square

15.2.1. Поляризация грассмановой квадратичной формы. Напомню², что с каждым базисом $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ пространства V связан базис в $\Lambda^2 V$, состоящий из $n(n-1)/2$ грассмановых мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$ с $i < j$, и каждый однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ однозначно представляется в виде

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} e_{ij}, \quad \text{где } \omega_{ij} \in \mathbb{k}, \quad (15-5)$$

и суммирование происходит по всем $1 \leq i < j \leq n$. Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, то подобно тому, как это делалось для коммутативных квадратичных форм³, каждое слагаемое в (15-5) можно переписать в виде $\omega_{ij} e_{ij} = \omega'_{ij} e_i \wedge e_j + \omega'_{ji} e_j \wedge e_i$, где $\omega'_{ij} = -\omega'_{ji} = \omega_{ij} / 2$. Составленная из чисел ω'_{ij} кососимметричная квадратная матрица $\Omega_{\mathbf{e}} = (\omega'_{ij}) \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ называется *матрицей Грама*

¹См. п° 8.5 на стр. 111.

²См. 8-15 на стр. 111.

³Ср. с п° 14.3 на стр. 186.

грассмановой квадратичной формы ω в базисе \mathbf{e} . В терминах матрицы Грама форма ω записывается в виде

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega'_{ij} e_i \wedge e_j = (\mathbf{e} \Omega_e) \wedge \mathbf{e}^t, \quad (15-6)$$

где в отличие от (15-5) суммирование происходит по всем n^2 парам индексов i, j , а обозначение $A \wedge B$ для матриц A, B , элементами которых являются векторы, предписывает перемножить эти матрицы по обычному правилу, используя в качестве произведения матричных элементов грассманово произведение соответствующих векторов, т. е. в (i, j) -й позиции матрицы $A \wedge B$ стоит вектор $a_{i1} \wedge b_{1j} + a_{i2} \wedge b_{2j} + \dots + a_{in} \wedge b_{nj}$.

При выборе в V другого базиса \mathbf{f} , через который базис \mathbf{e} выражается по формуле $\mathbf{e} = \mathbf{f} C_{fe}$, матрица Грама Ω_f грассмановой квадратичной формы ω в базисе \mathbf{f} будет связана с матрицей Грама Ω_e соотношением

$$\Omega_e = C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t \quad (15-7)$$

поскольку $\omega = (\mathbf{e} \Omega_e) \wedge \mathbf{e}^t = (\mathbf{f} C_{fe} \Omega_e) \wedge (C_{fe}^t \mathbf{f}^t) = (\mathbf{f} C_{fe} \Omega_e C_{fe}^t) \wedge \mathbf{f}^t$.

ПРИМЕР 15.1 (НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ДАРБУ)

Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, то существование базиса \mathbf{e} , в котором заданная грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ имеет вид (15-4), вытекает из теоремы о приведении кососимметричной билинейной формы к нормальному виду Дарбу¹. Действительно, доказывая эту теорему, мы установили, что для любой кососимметричной матрицы Ω существует такая обратимая матрица C , что все ненулевые элементы матрицы $C \Omega C^t$ сосредоточены в расположенных на главной диагонали 2×2 -блоках вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому грассманова квадратичная форма, имеющая матрицу Грама Ω в некотором базисе \mathbf{f} , запишется в базисе $\mathbf{g} = \mathbf{f} C$ как $\omega = 2g_1 \wedge g_2 + 2g_3 \wedge g_4 + \dots$. Искомый базис \mathbf{e} получается из \mathbf{g} удвоением векторов с нечётными номерами: $e_{2i+1} = 2g_{2i+1}$, $e_{2i} = g_{2i}$.

15.3. Пфаффиан. Рассмотрим кососимметричную матрицу $A = (a_{ij})$ размера $(2n) \times (2n)$. Будем считать её элементы a_{ij} с $i < j$ независимыми коммутирующими переменными и обозначим через $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ кольцо многочленов с целыми коэффициентами от этих $2n^2 - n$ переменных. Мы собираемся показать, что существует единственный такой многочлен $\text{Pf}(A) \in \mathbb{Z}[a_{ij}]$, что

$$\text{Pf}^2(A) = \det(A) \quad \text{и} \quad \text{Pf}(J') = 1,$$

где J' — блочно диагональная матрица из n идущих по главной диагонали 2×2 -блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

как в теор. 13.3 на стр. 181. Многочлен $\text{Pf}(A)$ называется *пфаффианом* кососимметричной матрицы A и явно выражается через матричные элементы по формуле

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n) \cdot a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \quad (15-8)$$

¹См. теор. 13.3 на стр. 181.

где суммирование происходит по всем разбиениям множества $\{1, \dots, 2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых тоже не существует, а sgn означает знак указанной в его аргументе перестановки из симметрической группы S_{2n} .

УПРАЖНЕНИЕ 15.4. Убедитесь, что этот знак не меняется при перестановках пар друг с другом, а вся правая часть (15-8) не меняется при перестановке элементов внутри любой из пар.

Например,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}^2, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

Чтобы извлечь квадратный корень из $\det A$, интерпретируем A как матрицу Грама невырожденной кососимметричной формы в стандартном базисе координатного векторного пространства K^{2n} над полем $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ рациональных функций от переменных a_{ij} с коэффициентами в поле \mathbb{Q} . По теореме Дарбу¹ в K^{2n} есть базис, в котором эта форма имеет матрицу Грама J' . Поэтому $A = CJ'C^t$ для некоторой матрицы $C \in \text{GL}_{2n}(K)$. Так как $\det J' = 1$, определитель $\det(A) = \det^2(C)$.

Покажем, что $\det C$ является многочленом с целыми коэффициентами и вычисляется по формуле (15-8). Для этого рассмотрим ещё одну кососимметричную матрицу $B = (b_{ij})$, наддиагональные элементы b_{ij} которой также будем считать независимыми переменными, и образуем грассманову квадратичную форму

$$\beta_B(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi B) \wedge \xi^t = \sum_{ij} b_{ij} \xi_i \wedge \xi_j$$

от $2n$ переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n})$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[b_{ij}]$. Поскольку чётные мономы $\xi_i \wedge \xi_j$ лежат в центре грассмановой алгебры, n -тая грассманова степень

$$\begin{aligned} \beta_B(\xi)^n &= \beta_B(\xi) \wedge \dots \wedge \beta_B(\xi) = \left(\sum_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} \xi_{i_1} \wedge \xi_{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_n j_n} b_{i_n j_n} \xi_{i_n} \wedge \xi_{j_n} \right) = \\ &= 2^n n! \sum_{\substack{\{i_1, j_1\} \sqcup \dots \sqcup \{i_n, j_n\} = \\ = \{1, 2, \dots, 2n\}}} \text{sgn}(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) b_{i_1 j_1} \dots b_{i_n j_n} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} = \\ &= 2^n n! \text{Pf}(B) \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}, \end{aligned} \tag{15-9}$$

где в суммирование предпоследней строке происходит, как и в формуле (15-8), по всем разбиениям множества $\{1, \dots, 2n\}$ в объединение n неупорядоченных непересекающихся двухэлементных множеств $\{i_\nu, j_\nu\}$, порядок внутри которых не существует, и $\text{Pf}(B) \in \mathbb{Z}[b_{ij}]$ означает тот же самый многочлен, что и в формуле (15-8). Заменяем в (15-9) грассмановы переменные ξ на новые грассмановы переменные η по формуле $\xi = \eta C$, где $C \in \text{GL}_{2n}(K)$. В правой части (15-9) получим $2^n n! \text{Pf}(B) \det C \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Квадратичная форма $\beta_B(\xi)$ в самой левой части (15-9) превратится в $\beta_B(\xi) = (\xi B) \wedge \xi^t = (\eta C B) \wedge (\eta C)^t = (\eta C B C^t) \wedge \eta^t = \beta_{C B C^t}(\eta)$, а её n -тая грассманова степень — в $\beta_{C B C^t}(\eta)^n = 2^n n! \text{Pf}(C B C^t) \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{2n}$. Таким образом, для любой матрицы

¹См. теор. 13.3 на стр. 181.

$C \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$ в кольце многочленов $K[b_{ij}]$ от переменных b_{ij} с коэффициентами в поле K выполняется равенство

$$\mathrm{Pf}(CBC^t) = \mathrm{Pf}(B) \det C. \quad (15-10)$$

Полагая в этом равенстве $B = J'$ и беря в качестве C такую матрицу, что $CJ'C^t = A$, получаем в поле $K = \mathbb{Q}(a_{ij})$ равенство $\mathrm{Pf}(A) = \det C$.

УПРАЖНЕНИЕ 15.5. Убедитесь, что $\mathrm{Pf}(J') = 1$.

Это доказывает существование пфаффиана и формулу (15-8). Единственность пфаффиана вытекает из того, что многочлен $x^2 - \det A = (x - \mathrm{Pf}(A))(x + \mathrm{Pf}(A)) \in \mathbb{Z}[a_{ij}][x]$ имеет в целостном кольце $\mathbb{Z}[a_{ij}]$ ровно два корня $x = \pm \mathrm{Pf}(A)$, и требование $\mathrm{Pf}(J') = 1$ однозначно фиксирует нужный знак.

15.4. Симплектическая группа. Изометрии $f : \Omega_{2n} \xrightarrow{\sim} \Omega_{2n}$ называются *симплектическими преобразованиями* и образуют группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$, называемую *симплектической группой* пространства Ω_{2n} . Сопоставление оператору его матрицы в симплектическом базисе изоморфно отображает группу $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ на *группу симплектических матриц*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{k}) \mid F^t J F = J\}, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.6. Убедитесь, что $J^2 = -E$ и $\det J = 1$.

Если записать симплектическую матрицу F в блочном виде

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{где } A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{k}),$$

то условие $F^t J F = J$ примет вид

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

и будет равносильно выполнению соотношений $C^t A = A^t C$, $D^t B = B^t D$, $E + C^t B = A^t D$.

УПРАЖНЕНИЕ 15.7. Убедитесь в этом.

Из этих соотношений вытекает, что полная линейная группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ гомоморфно вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$ по правилу

$$G \mapsto \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G^{t-1} \end{pmatrix}. \quad (15-11)$$

На бескоординатном языке вложение (15-11) описывается в духе [теор. 15.1](#) на стр. 197. Разложим симплектическое пространство в прямую сумму $\Omega_{2n} = L \oplus L'$ лагранжевых подпространств L, L' . В доказательстве [теор. 15.1](#) мы видели, что сопоставление вектору $w \in L'$ линейного функционала $\omega_L^\wedge(w) : L \rightarrow \mathbb{k}, u \mapsto \omega(u, w)$, устанавливает изоморфизм пространства L' с двойственным к L пространством L^* . Прямая сумма этого изоморфизма с тождественным изоморфизмом $\mathrm{Id}_L : L \xrightarrow{\sim} L$ даёт изоморфизм $\Omega_{2n} = L \oplus L' \xrightarrow{\sim} L \oplus L^*$, который переводит симплектическую форму ω на Ω_{2n} в невырожденную кососимметричную форму ω_L на $L \oplus L^*$, действующую на векторы (u, ξ) и (w, η) из $L \oplus L^*$ по правилу

$$\omega_L((u, \xi), (w, \eta)) = \eta(u) - \xi(w). \quad (15-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.8. Убедитесь в этом.

Вложение $\mathrm{GL}(L) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(\omega_L)$ переводит обратимый оператор $g : L \xrightarrow{\sim} L$ в оператор

$$g \oplus (g^{-1})^* : L \oplus L^* \xrightarrow{\sim} L \oplus L^*, \quad (v, \xi) \mapsto (gv, (g^{-1})^*\xi), \quad (15-13)$$

где $(g^{-1})^* : L^* \rightarrow L^*$ — оператор, двойственный к обратному к g оператору $g^{-1} : L \rightarrow L$. Так как оператор (15-13) сохраняет симплектическую форму (15-12):

$$\begin{aligned} \omega_L((gu, (g^{-1})^*\xi), (gw, (g^{-1})^*\eta)) &= (g^{-1})^*\eta(gu) - (g^{-1})^*\xi(gw) = \\ &= \eta(g^{-1}gu) - \xi(g^{-1}gw) = \eta(u) - \xi(w) = \omega_L((u, \xi), (w, \eta)), \end{aligned}$$

он действительно задаёт инъективный гомоморфизм групп $\mathrm{GL}(L) \hookrightarrow \mathrm{Sp}(L \oplus L^*)$. Матричная формула (15-11) получается если записать операторы g и $(g^{-1})^*$ в двойственных базисах \mathbf{e} и \mathbf{e}^* пространств L и L^* .

УПРАЖНЕНИЕ 15.9. Убедитесь что базис $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1^*), \dots, (0, e_n^*)$, где e_i и e_i^* пробегает двойственные друг другу базисы в L и L^* , является симплектическим для формы (15-12) на $L \oplus L^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.2

Каждая симплектическая матрица $F \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{k})$ имеет единичный определитель $\det F = 1$ и возвратный¹ характеристический многочлен: $\chi_F(t) = t^{2n}\chi_F(t^{-1})$.

Доказательство. Из равенства $F^t J F = J$ и форм. (15-10) на стр. 201 вытекает, что

$$\mathrm{Pf}(J) = \mathrm{Pf}(F^t J F) = \det(F) \mathrm{Pf}(J),$$

откуда $\det F = 1$, так как $\mathrm{Pf}(J) \neq 0$. Кроме того, из равенства $F^t J F = J$ вытекает, что обратная к F матрица $F^{-1} = J^{-1} F^t J = -J F^t J$, откуда характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \chi_F(t) &= \det(tE - F) = t^{2n} \det(F) \det(F^{-1} - t^{-1}E) = t^{2n} \det(t^{-1}J^2 - JF^tJ) = \\ &= t^{2n} \det^2(J) \det(t^{-1}E - F^t) = t^{2n} \det(t^{-1}E - F) = t^{2n} \chi_F(t^{-1}), \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15.3

Симплектическая группа $\mathrm{Sp}(\Omega_{2n})$ транзитивно действует на изотропных и на симплектических подпространствах любой фиксированной размерности.

Доказательство. Если подпространства $W_1, W_2 \subset \Omega_{2n}$ оба изометрически изоморфны Ω_{2k} , то их ортогоналы $W_1^\perp, W_2^\perp \subset \Omega_{2n}$ оба изометрически изоморфны $\Omega_{2(n-k)}$. Прямая сумма любых двух изометрических изоморфизмов $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$ и $W_1^\perp \xrightarrow{\sim} W_2^\perp$ даёт изометрический изоморфизм $\Omega_{2n} = W_1 \oplus W_1^\perp \xrightarrow{\sim} W_2 \oplus W_2^\perp = \Omega_{2n}$, переводящий W_1 в W_2 . Если k -мерные подпространства $U_1, U_2 \subset \Omega_{2n}$ изотропны, то любой базис \mathbf{u}_1 в U_1 и любой базис \mathbf{u}_2 в U_2 дополняются по предл. 15.1 на стр. 196 до состоящих из $2k$ векторов наборов \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 , являющихся симплектическими базисами в своих линейных оболочках W_1 и W_2 . Отобразив первый набор во второй, мы получаем изометрический изоморфизм $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$, переводящий U_1 в U_2 . Беря, как и выше, прямую сумму этого автоморфизма с любым изометрическим изоморфизмом $W_1^\perp \xrightarrow{\sim} W_2^\perp$, получаем изометрический автоморфизм пространства Ω_{2n} , переводящий U_1 в U_2 . \square

¹Напомним, что многочлен $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ называется *возвратным*, если последовательность его коэффициентов симметрична относительно своей середины: $a_k = a_{m-k}$ при всех $k = 0, 1, \dots, m$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 0.1. См. [предл. 1.2](#) на стр. 19.

Упр. 1.1. Равенство $F(0) = 0$ получается прибавлением вектора $-F(0)$ к левой и правой части равенства $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$. Из равенства $0 = F(0) = F(v + (-v)) = F(v) + F(-v)$ вытекает, что $-F(v) = F(-v)$.

Упр. 1.4. Ответ: $v = y_1 w_1 + y_2 w_2$, где $y_1 = c_{11} x_1 + c_{12} x_2$, $y_2 = c_{21} x_1 + c_{22} x_2$.

Упр. 1.5. Первое следует из выкладки $0 = f(a + b, a + b) = f(a, b) + f(b, a)$, второе — из выкладки $f(v, v) = -f(v, v)$.

Упр. 1.6. Первое следует из того, что по правилу треугольника $\overline{aa} + \overline{ab} = \overline{ab}$ для любого вектора $\overline{ab} \in V$, второе — из того, что $\overline{pq} + \overline{qp} = \overline{pp} = 0$, третье — из того, что при $\overline{ab} = \overline{dc}$ имеем $\overline{bc} = \overline{ba} + \overline{ad} + \overline{dc} = -\overline{ab} + \overline{ad} + \overline{dc} = \overline{ad}$. Если $\tau_0 = \text{Id}_{\mathbb{A}}$, то для каждого $v \in V$ преобразования τ_v и τ_{-v} обратны друг другу в силу равенств $\tau_v \circ \tau_{-v} = \tau_{-v} \circ \tau_v = \tau_{v+(-v)} = \tau_0 = \text{Id}_{\mathbb{A}}$, а значит, оба биективны.

Упр. 1.8. Первое вытекает из равенства $(\mu + v)^{-1}(\mu p + vq) = (\mu + v)^{-1}(\sum_i \mu_i p_i + \sum_j \mu_j q_j)$. Второе проверяется выкладкой: $\sum_{i=1}^m y_i p_i = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} q_{ij} = \sum_{ij} z_{ij} q_{ij}$, где $z_{ij} = y_i x_{ij}$ и $\sum_{ij} z_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^{k_j} x_{ij} = \sum_{i=1}^m y_i = 1$.

Упр. 1.10. $s(pab) : s(pbc) = s(\overline{pa}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{pc}) = s(\overline{pa} - \overline{pb}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{pc} - \overline{pb}) = s(\overline{ba}, \overline{pb}) : s(\overline{pb}, \overline{bc}) = s(\overline{pb}, \overline{ab}) : s(\overline{pb}, \overline{pc}) = \overline{ab} : \overline{bc}$.

Упр. 2.1. Вычитая $\psi(0)$ из правой и левой части равенства $\psi(0) = \psi(0 + 0) = \psi(0) + \psi(0)$, получаем $0 = \psi(0)$. Поскольку $\psi(\mu) + \psi(-\mu) = \psi(\mu - \mu) = \psi(0) = 0$, имеет место равенство $\psi(-\mu) = -\psi(\mu)$. Поэтому $\psi(\lambda - \mu) = \psi(\lambda) + \psi(-\mu) = \psi(\lambda) - \psi(\mu)$. Если $\psi(1) \neq 0$, то аналогичным образом умножая на $\psi(1)^{-1}$ обе части равенства $\psi(1) = \psi(1 \cdot 1) = \psi(1) \cdot \psi(1)$ получаем $\psi(1) = 1$, откуда, как и выше, $\psi(\mu^{-1}) = \psi(\mu)^{-1}$ и $\psi(\lambda/\mu) = \psi(\lambda)/\psi(\mu)$ при всех λ и $\mu \neq 0$. Если же $\psi(1) = 0$, то $\psi(\lambda) = \psi(1 \cdot \lambda) = \psi(1) \cdot \psi(\lambda) = 0$ для всех λ .

Упр. 2.3. Обратным к $x + y\sqrt{2}$ числом является $\frac{x}{x^2 - 2y^2} - \frac{y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2}$, нетривиальный автоморфизм переводит $x + y\sqrt{2}$ в $x - y\sqrt{2}$.

Упр. 2.5. Рассмотрим в координатном пространстве \mathbb{K}^2 с базисом (e_1, e_2) пару векторов $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)A$ и пару векторов $(g_1, g_2) = (f_1, f_2)B = (e_1, e_2)AB$. Тогда по [сл. 1.2](#) для любой ненулевой формы площади s на V выполняются равенства $s(f_1, f_2) = s(e_1, e_2) \det A$, $s(g_1, g_2) = s(f_1, f_2) \det B$, $s(g_1, g_2) = s(e_1, e_2) \det(AB)$, из которых вытекает, что $\det(A) \det(B) = \det(AB)$.

Упр. 2.6. Все площади умножаются на $\det A$, ср. с [предл. 2.4](#) на стр. 29.

Упр. 2.7. Это следует из равенства $q + w = \varphi(q) = p + u + D_\varphi(\overline{pq})$.

Упр. 2.8. Условие $\overline{op_3} = \overline{op_1} + \overline{op_2}$ означает, что четырёхугольник $op_1 p_3 p_2$ является параллелограммом, т. е. прямые $(p_1 p_3)$ и $(p_2 p_3)$ параллельны прямой $\ell_2 = (op_2)$ и $\ell_1 = (op_1)$ соответственно. Но для любой точки $p_1 \in \ell_1$ имеется единственная проходящая через p_1 прямая, параллельная прямой ℓ_2 , и она пересекает прямую ℓ_3 в единственной точке p_3 . Через точку p_3 проходит единственная прямая, параллельная прямой ℓ_1 , и она пересекает прямую ℓ_2 в единственной точке p_2 . Таким образом, параллелограмм $op_1 p_3 p_2$ однозначно определяется выбором точки $p_1 \in \ell_1$. При выборе другой точки p'_1 с радиус-вектором $\overline{op'_1} = \lambda \overline{op_1}$ определяемый ею параллелограмм $op'_1 p'_3 p'_2$ получается из параллелограмма $op_1 p_3 p_2$ гомотетией с коэффициентом λ относительно точки o .

Упр. 2.9. При замене функции s на λs или любого из векторов $\overrightarrow{op_i}$ на $\lambda \overrightarrow{op_i}$, где $\lambda \neq 0$, коэффициент λ сократится. Неизменность двойного отношения при одновременной перестановке двух пар прямых видна непосредственно из формулы форм. (2-16) на стр. 32.

Упр. 2.10. Всё следует из равенства $[\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\ell_2, \ell_1, \ell_3, \ell_4]^{-1}$.

Упр. 3.2. $\frac{(\lambda a, b)}{(\lambda a, \lambda a)} \cdot \lambda a = \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a$.

Упр. 3.5. Если $p \notin \ell$, утверждение вытекает из предл. 3.2. Если $p \in \ell$, выберите p за начало отсчёта, обозначьте через e_1 вектор скорости прямой ℓ , возьмите любой вектор b , не пропорциональный ℓ и положите $e_2 = b_{e_1^\perp}$. Тогда $e_2 \neq 0$ и перпендикулярен e_1 . Поэтому прямая $p + te_2$ перпендикулярна ℓ . Произвольный вектор $w = xe_1 + ye_2$ перпендикулярен e_1 если и только если $x = 0$. Поэтому такая прямая единственна.

Упр. 3.6. Рассмотрим любой ортонормальный базис e, e^\perp . Если вектор $f = xe + ye^\perp$ образует вместе с вектором e ортонормальный базис e, f , то $(e, f) = 0$ влечёт $x = 0$, после чего $(f, f) = 1$ влечёт $y^2 = 1$, т. е. $f = \pm e^\perp$.

Упр. 3.7. Воспользуйтесь тем, что объединение биссектрис это ГМТ, равноудалённых от двух данных прямых.

Упр. 3.8. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца равносильно неравенству

$$(u, v)^2 - (u, u) \cdot (u, v) \geq 0,$$

в левой части которого стоит определитель Грама, по предл. 3.4 равный квадрату отношения площадей $s(u, w)/s(e_1, e_2)$, положительному, когда u и w не пропорциональны, и нулевому — когда пропорциональны.

Упр. 3.9. $\det^2(a, b) = \det^2(a, b_a + b_{a^\perp}) = \det^2(a, b_{a^\perp}) = (a, a) \cdot (b_{a^\perp}, b_{a^\perp})$.

Упр. 3.10. Вычислите $\det(f, f^\perp)$ (f^\perp, f^\perp) и $s(f, f^\perp)$.

Упр. 3.12. Равенство длин $|v| = |u|$ влечёт равенство углов $\angle(v, u+v) = \angle(u+v, u)$. Поэтому каждый из них составляет половину от $\angle(v, u)$. Аналогично, $2\angle(v, w+v) = \angle(v, w)$, откуда $2\angle(u+v, w+v) = \angle(u, w)$.

Упр. 3.16. Оба линейных преобразования — композиция отражений и поворот — одинаково действуют на базис u_1, u_2 .

Упр. 3.17. Ответ: $\frac{|u|}{2} \cdot (1, \operatorname{ctg}(\vartheta/2))$.

Упр. 3.18. Выясните, куда переходит аффинный репер $(o; v, n)$ с началом в произвольной точке $o \in \ell$ и ортонормальными базисными векторами v, n , направленными, соответственно, параллельно и перпендикулярно прямым ℓ_i .

Упр. 3.19. Импликации $(в) \Rightarrow (б) \Rightarrow (а)$ очевидны. В н° 2.1.2 на стр. 24 мы видели, что если отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ перестановочно со сложением и умножением, то оно тождественно. Поэтому $(а) \Leftrightarrow (б)$. Так как соотношение $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$ влечёт $\varphi(i) = \pm i$, из линейности φ над \mathbb{R} вытекает, что $\varphi(x + yi) = x\varphi(1) + y\varphi(i) = x \pm iy$, т. е. $(б) \Rightarrow (в)$.

Упр. 4.1. См. стр. 28 лекции <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-02.pdf>.

Упр. 4.4. Пусть $\mathbb{k}^n = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$, где гиперплоскость $U = \operatorname{Ann} \xi_i \subset \mathbb{k}^n$ задаётся линейным уравнением $\xi_i(x_1, \dots, x_n) = \xi_{i1}x_1 + \xi_{i2}x_2 + \dots + \xi_{in}x_n = 0$. Произведение всех линейных форм $\xi_i(x_1, \dots, x_n)$ является ненулевым многочленом m -й степени от x_1, \dots, x_n , но при этом задаёт тождественно нулевую функцию $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}$. Индукцией по n покажите, что над бесконечным такое невозможно.

Упр. 4.5. Пусть $W \not\subseteq U$ два подпространства в V . Выберем вектор $w \in W \setminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall u \in U \quad w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.

Упр. 4.7. Поскольку $\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$, любая линейная комбинация векторов из образа лежит в образе, а векторов из ядра — в ядре. Так как $F(\vec{0}) = F(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot F(\vec{0}) = 0$, ядро содержит нулевой вектор. Образ содержит нулевой вектор, поскольку $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$, откуда $0 = F(0)$.

Упр. 4.8. Линейность F вытекает из того, что отображение дифференцирования

$$d/dx : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}[x], \quad g \mapsto g',$$

и все отображения вычисления $\text{ev}_a : \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}, g \mapsto g(a)$, где $a \in \mathbb{K}$, линейны и композиция линейных отображений тоже линейна. Если $g \in \ker F$, то каждое число $a_i \in \mathbb{K}$ является как минимум (m_i+1) -кратным корнем многочлена g , и g делится на $\prod_i (x-a_i)^{m_i+1}$, что невозможно при $g \neq 0$, поскольку степень этого произведения равна $m+1 > \deg g$.

Упр. 4.9. Если $F^2 = F$, то $F(Fv) = F^2v = Fv$ для любого $v \in V$. Поэтому F тождественно действует на $\text{im } F$ и $v - F(v) \in \ker F$ для любого $v \in V$. Тем самым, $\ker F \cap \text{im } F = 0$ и $\text{im } F + \ker F = V$, т. е. $V = \ker F \oplus \text{im } F$, причём $F(u + w) = w$ для любых $u \in \ker F, w \in \text{im } F$.

Упр. 4.10. Если $v_1 = v_2 + u$ и $w_1 = w_2 + u'$, где $u, u' \in U$, то $v_1 + w_1 = (v_2 + w_2) + (u + u')$ и $\lambda v_1 = \lambda v_2 + \lambda u$. Выполнение аксиом векторного пространства наследуется из V .

Упр. 5.3. Пусть $AB = P$ и $BC = Q$. Матрицы PC и AQ имеют равные (ij) -е элементы:

$$\sum_k p_{ik} c_{kj} = \sum_{k\ell} (a_{i\ell} b_{\ell k}) c_{kj} = \sum_{k\ell} a_{i\ell} (b_{\ell k} c_{kj}) = \sum_{\ell} a_{i\ell} q_{\ell j}.$$

Дистрибутивность проверяется аналогично.

Упр. 5.4. Первое равенство очевидно. Для доказательства второго положим $AB = C, B^t A^t = D$, тогда $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ki}^t b_{jk}^t = \sum_k b_{jk}^t a_{ki}^t = d_{ji}$.

Упр. 5.6. Поскольку $(AB)^t = B^t A^t$ и $E^t = E$, равенство $AB = E$ равносильно равенству $B^t A^t = E$, и матрица B обратна матрице A если и только если матрица B^t обратна матрице A^t .

Упр. 5.8. Первое доказывается выкладкой $0 \cdot a = (b + (-1) \cdot b)a = ba + (-1)ba = 0$, второе — выкладкой $e' = e' \cdot e'' = e''$.

Упр. 5.9. Матрица $A = \sum_{ij} a_{ij} E_{ij}$ лежит в центре алгебры $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ если и только если $AE_{ij} = E_{ij}A$ для всех матричных единиц E_{ij} . В силу форм. (5-18) на стр. 69 это равносильно равенствам $a_{ii} = a_{jj}$ и $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Упр. 5.11. Обозначим через $\mu_\xi \in \ker \text{ev}_\xi$ приведённый многочлен наименьшей встречающейся в $\ker \text{ev}_\xi$ положительной степени. Деля произвольный многочлен $f \in \ker \text{ev}_\xi$ на μ_ξ с остатком, получаем равенство $f(x) = \mu_\xi(x) \cdot q(x) + r(x)$, в котором многочлен r либо нулевой, либо имеет $\deg r < \deg \mu_\xi$. Подставляя в это равенство $x = \xi$, убеждаемся, что $r \in \ker \text{ev}_\xi$, и значит, имеет место первое, т. е. все $f \in \ker \text{ev}_\xi$ делятся на μ_ξ . В частности, любой приведённый многочлен наименьшей встречающейся в $\ker \text{ev}_\xi$ положительной степени совпадает с μ_ξ .

Упр. 6.1. Если матрица координат векторов u_1, \dots, u_r содержит единичную $r \times r$ матрицу в столбцах с номерами j_1, \dots, j_r , то при j_i -я координата вектора $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$ равна λ_i каждому $i = 1, \dots, r$. Поэтому такой вектор зануляется только когда все $\lambda_i = 0$.

Упр. 6.2. Пусть базисными являются столбцы с номерами j_1, \dots, j_r . Тогда в любом другом столбце могут быть отличны от нуля только числа, стоящие в первых r строках. Если они равны $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, то сам столбец является линейной комбинацией $\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_r c_r$ базисных столбцов c_1, \dots, c_r .

Упр. 6.3. Согласно форм. (5-13) на стр. 65 при $ad - bc \neq 0$ матрица

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

обратна к матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Поэтому векторы w_i, w_j линейно выражаются через преобразованные строки $w'_i = aw_i + bw_j, w'_j = cw_i + dw_j$ по формулам $w_i = a'w'_i + b'w'_j, w_j = c'w'_i + d'w'_j$.

Упр. 6.5. Если отнять из произвольной такой матрицы матрицу E_J , имеющую единичную $r \times r$ подматрицу в столбцах с номерами j_1, \dots, j_r и нули в остальных местах, то получится матрица, у которой равны нулю все элементы в столбцах с номерами j_1, \dots, j_r , а также, при каждом $i = 1, \dots, r$, все элементы i -й строки в клетках с 1-й по j_i -ю включительно. Ну а остальные $r^2 + \sum_{v=1}^r (i_v - v + 1)$ элементов могут принимать любые значения. Тожество выражает собою равенство количества r -мерных векторных подпространств в n -мерном координатном пространстве над полем \mathbb{F}_q из q элементов количеству приведённых ступенчатых матриц с r ненулевыми строками в $\text{Mat}_{r \times n}(\mathbb{F}_q)$.

Упр. 7.1. Множество всевозможных конечных \mathbb{K} -линейных комбинаций счётного множества векторов равномощно $\mathbb{K} \times \mathbb{N}$ — дизъюнктному объединению счётного множества одинаковых копий поля \mathbb{K} , тогда как множество $\mathbb{K}[[t]]$ равномощно множеству $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ всевозможных отображений $\mathbb{N} \rightarrow K$, которое строго мощнее, чем $\mathbb{K} \times \mathbb{N}$ (используйте рассуждение Кантора).

Упр. 7.3. Достаточно убедиться, что векторы v_1, \dots, v_n линейно независимы. Применяя к обеим частям соотношения $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ функционал ξ_i , получаем $\lambda_i = 0$, и так для каждого $i = 1, \dots, n$.

Упр. 7.4. Ядро $\ker \text{ev} = \{v \in V \mid \forall \varphi \in V^* \varphi(v) = 0\} = 0$, поскольку для любого ненулевого вектора $v \in V$ существует такой линейный функционал $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}$, что $\varphi(v) \neq 0$. Например, можно дополнить вектор v до базиса пространства V и взять в качестве φ функционал, сопоставляющий вектору его координату в направлении базисного вектора относительно этого базиса.

Упр. 7.5. Если линейная форма зануляется на каком-то множестве векторов, то она зануляется и всех линейных комбинациях этих векторов.

Упр. 7.7. Выберем базис u_1, \dots, u_n в U , дополним его векторами w_1, \dots, w_m до базиса в V и зададимся любыми m числами $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$. Существует единственный линейный функционал $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}$, принимающий на выбранных базисных векторах значения $\varphi(u_i) = \psi(u_i), \varphi(w_j) = c_j$, где $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Ограничение $\varphi|_U = \psi$. В бесконечномерном случае утверждение следует из теор. 7.4 на стр. 95.

Упр. 7.8. Ковекторы w_1^*, \dots, w_m^* лежат в $\text{Ann } U$ и линейно независимы, так как являются частью базиса в V^* . Поскольку координатами каждого линейного функционала $\varphi \in V^*$ в базисе

$$u_1^*, \dots, u_k^*, w_1^*, \dots, w_m^*$$

являются значения $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \varphi(w_1), \dots, \varphi(w_m)$, ковектор $\varphi \in \text{Ann } U$ если и только если он является линейной комбинацией ковекторов w_1^*, \dots, w_m^* . Тем самым, эти ковекторы линейно порождают $\text{Ann } U$.

Упр. 7.9. По [упр. 7.5](#) на стр. 87 $\text{Ann } N = \text{Ann span } N$, откуда $\text{Ann Ann } N = \text{Ann Ann span } N = \text{span } N$.

Упр. 7.11. Оператор $F^{**} : U^{**} \rightarrow W^{**}$ переводит функционал вычисления $\text{ev}_u : U^* \rightarrow \mathbb{K}$ в композицию $\text{ev}_u \circ F^* : W^* \rightarrow \mathbb{K}$, которая в свою очередь переводит ковектор $\xi : W \rightarrow \mathbb{K}$ в число $\text{ev}_u(F^*\xi) = F^*\xi(u) = \xi(Fu) = \text{ev}_{Fu}(\xi)$. Таким образом, $F^{**}(\text{ev}_v) = \text{ev}_{F(v)}$. Отождествления $U^{**} \simeq U$ и $W^{**} \simeq W$ переводят функционалы вычисления $\text{ev}_u : U^* \rightarrow \mathbb{K}$ и $\text{ev}_w : W^* \rightarrow \mathbb{K}$ в векторы $u \in U$ и $w \in W$, на которых эти вычисления производятся. Формула $F^{**}(\text{ev}_v) = \text{ev}_{F(v)}$ утверждает, что при этом действие оператора F^{**} на функционалы вычисления превращается в действие F на векторы.

Упр. 7.14. Пусть множество $S \subset X$ состоит из всех таких элементов $z \in X$, что утверждение $\Phi(z)$ ложно. Если $S \neq \emptyset$, то в нём есть начальный элемент $s_* \in S$. Поскольку утверждение $\Phi(y)$ истинно для всех $y < s_*$, утверждение $\Psi(s_*)$ тоже истинно, т. е. $s_* \notin S$. Противоречие.

Упр. 7.15. Обозначим через x_I начальный элемент дополнения $X \setminus I$. Начальный интервал $[x_I) \subset X$ является объединением начальных интервалов $[y) \subset X$ по всем $y < x_I$. Так как I содержит все интервалы $[y)$ с $y < x_I$, мы заключаем, что $I \supseteq [x_I)$, откуда $I = [x_I)$.

Упр. 7.16. Рассмотрим подмножество $Z \subseteq W_1$, состоящее из всех таких $z \in W_1$, что начальный интервал $[z)_1$ в множестве W_1 является одновременно начальным интервалом $[z)_2$ множества W_2 . Множество Z не пусто, поскольку содержит общий начальный элемент множеств W_1 и W_2 . Если $Z \subsetneq W_1$ и $Z \subsetneq W_2$, то по [упр. 7.15](#) на стр. 92 подмножество Z является начальным интервалом как в W_1 , так и в W_2 , что невозможно, поскольку точные верхние границы этих интервалов в W_1 и W_2 , с одной стороны, не лежат в Z и, стало быть, различны, а с другой стороны в силу q -рекурсивности множеств W_1 и W_2 обе они равны $q(Z)$, то есть совпадают. Тем самым, $Z = W_1$ или $Z = W_2$. По [упр. 7.15](#) в первом случае W_1 является начальным интервалом в W_2 , а во втором — W_2 является начальным интервалом в W_1 .

Упр. 7.17. Каждое подмножество $S \subset U$ имеет непустое пересечение с каким-нибудь q -рекурсивным вполне упорядоченным подмножеством $W \subset P$ с начальным элементом $q(\emptyset)$. По [упр. 7.16](#) подмножество W является начальным интервалом всех содержащих W q -рекурсивных вполне упорядоченных подмножеств с начальным элементом $q(\emptyset)$. Поэтому начальный элемент пересечения $S \cap W$ не зависит от выбора W с $W \cap S \neq \emptyset$ и является начальным элементом подмножества S . Каждый начальный интервал $[u) \subset U$ является начальным интервалом любого содержащего u множества W из цепи. В силу q -рекурсивности W элемент $q[u) = u$.

Упр. 7.18. Годится дословно то же рассуждение, что и в доказательстве [лем. 4.1](#) на стр. 48.

Упр. 7.19. Очевидно, что E вкладывается в B_E , а B_E вкладывается в множество $\mathbb{N} \times E$ — дизъюнктное объединение счётного множества копий множества E , которое равномощно E , так как E бесконечно. Тем самым, B_E вкладывается в E . Остаётся применить теорему Кантора – Бернштейна.

Упр. 7.20. Линейное отображение G действует на каждый вектор $v = \sum_{e \in E} x_e e$ по правилу $G(v) = \sum_{e \in E} x_e g(e)$, и для любого отображения множеств $g : E \rightarrow W$ это правило задаёт линейное отображение $G : V \rightarrow W$.

Упр. 8.2. При $m = 1$ ненулевой многочлен $f(x_1) \in \mathbb{K}[x_1]$ имеет не более $\deg f$ корней и, тем самым, не обращается в нуль почти во всех точках бесконечной прямой \mathbb{K}^1 . При $m > 1$ перепишите многочлен $f(x_1, \dots, x_m)$ в виде многочлена от x_m с коэффициентами из $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{m-1}]$ и примените индукцию по m .

Упр. 8.3. Так как разность двух многочленов является непрерывной функцией, из того, что она обращается в нуль на всюду плотном подмножестве, вытекает, что она равна нулю всюду, а поскольку поле \mathbb{R} бесконечно, многочлен от n^2 переменных, принимающий нулевые значения во

всех точках аффинного пространства \mathbb{R}^{n^2} , является нулевым многочленом¹. Всюду плотность множества $\mathcal{D}(f)$ означает, что в любой ε -окрестности² каждой точки $p \in \mathbb{R}^m$ найдётся точка $r \neq p$, в которой $f(r) \neq 0$. Так как многочлен f ненулевой, имеется точка $q \in \mathbb{R}^m$ с $f(q) \neq 0$. Ограничение f на прямую (pq) , будучи ненулевым многочленом от одной переменной, обращается в нуль лишь в конечном числе точек.

Упр. 8.5. Равенство $P_k^n = \binom{n+k-1}{n}$ доказывается индукцией по n при помощи суммирования по треугольнику Паскаля. При фиксированной размерности n предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{n+k-1}{n} / k^n = 1/n!$.

Упр. 8.7. $\max \ell(g) = n(n-1)/2$ достигается на единственной перестановке $(n, n-1, \dots, 1)$.

Упр. 8.8. Индукция по n . Каждая перестановка $g = (g_1, \dots, g_n)$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ , переставляющей между собою элементы n и g_n , и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей элемент n на месте. По индукции, g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемент n .

Упр. 8.10. Если все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, выходящие из элементов i и j пересекаются между собою нечётное число раз если и только если (i, j) инверсна³. Знак тасующей перестановки $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I| + \frac{1}{2}k(k+1)}$, где вес $|I| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v i_v$. Действительно, нити, выходящие из чисел i_1, \dots, i_k верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1, i_2 - 2, \dots, i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j -точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 8.11. При чётном n центр алгебры $\mathbb{K}\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$, степень которого нечётна.

Упр. 8.13. Разложите определитель по первым n столбцам.

Упр. 8.14. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 8.15. Если $A_{12} \neq 0$, то можно взять

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно квадратичному соотношению Плюккера⁴.

Упр. 9.1. Если отождествить $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ с полем \mathbb{C} , отправив классы $[1]$ и $[t]$ в 1 и i соответственно, умножение на класс $[t]$ превратится в умножение на i , т. е. в поворот на угол $\pi/2$, у которого нет инвариантных прямых.

Упр. 9.2. Пусть $\mathbb{K}[t]/(t^n) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на $[t]$. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на $[t]$, так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет U , имеется

¹См. упр. 8.2 на стр. 101.

²Под ε -окрестностью точки $p \in \mathbb{R}^m$ мы понимаем m -мерный куб с центром в точке p и стороной 2ε .

³В действительности картинку всегда можно нарисовать так, чтобы в этом случае была ровно одна точка пересечения.

⁴См. формулу (8-24) на стр. 114.

класс $[g]$ многочлена g с ненулевым свободным членом. Тогда классы $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$ выражаются через базис $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$ пространства $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонали которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена g . Следовательно, эти классы тоже образуют базис в $\mathbb{k}[t]/(t^n)$, и значит, содержащее их подпространство U совпадает со всем пространством $\mathbb{k}[t]/(t^n)$.

Упр. 9.3. Если $V = U \oplus W$, где U и W F -инвариантны, то $V^* = \text{Ann } U \oplus \text{Ann } W$, где оба подпространства $\text{Ann } U, \text{Ann } W$ тоже F^* -инвариантны: если $\xi \in \text{Ann } U$, то для всех $u \in U$

$$\langle F^* \xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle = 0,$$

так как $Fu \in U$, и значит, $F^* \xi \in \text{Ann } U$. Обратная импликация получается по двойственности в силу изоморфизма $V^{**} = V$.

Упр. 9.4. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на t в факторе кольца $\mathbb{k}[x]/(f)$ в базисе из классов мономов $t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, t, 1$ и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.

Упр. 9.5. Пусть $f(F) = 0$. Разделим f в $\mathbb{k}[t]$ на μ_F с остатком: $f(t) = q(t)\mu_F(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_F$. Подставляя в это равенство $t = F$, заключаем, что $r(F) = 0$, откуда либо $\deg r \geq \deg \mu_F$ по определению μ_F , либо $r = 0$. Следовательно, f делится на μ_F . Если ν_F — другой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, такой что $\nu_F(F) = 0$ в $\text{End}(V)$, то по уже доказанному ν_F делится на μ_F , и частное имеет степень нуль, т. к. $\deg \mu_F = \deg \nu_F$. Поскольку старшие коэффициенты у μ_F и ν_F одинаковы, константа $\mu_F/\nu_F = 1$.

Упр. 9.6. Пусть $f(t) = \mu_{v,F}(t)g(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_{v,F}$. Если $f(F) = 0$, то $r(F)v = 0$, что невозможно для ненулевого r с $\deg r < \deg \mu_{v,F}$ по определению многочлена $\mu_{v,F}$. Поэтому $r = 0$.

Упр. 9.7. Если оператор $q(F)$ аннулирует все векторы некоторого базиса, то он аннулирует вообще все векторы пространства.

Упр. 9.9. Умножение на класс t в факторе $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ с $n \geq 2$.

Упр. 9.10. Над алгебраически замкнутым полем каждый многочлен, у которого нет ненулевых корней, имеет вид t^m . Поэтому $\chi_F(t) = t^m$, и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.

Упр. 9.12. Модифицируйте доказательство [предл. 4.8](#) на стр. 59.

Упр. 9.13. Для любого линейного оператора $G : V \rightarrow V$ подпространства

$$0 \subseteq \ker F \subseteq \ker F^2 \subseteq \ker F^3 \subseteq \dots$$

образуют вложенную цепочку и отличны от нуля если и только если $\ker G \neq 0$.

Упр. 9.14. Если $a^n = 0, b^m = 0$ и $ab = ba$, то $(a - b)^{m+n-1} = 0$ по формуле Ньютона.

Упр. 10.4. Значение линейной формы g_{v_j} на базисном векторе v_i равно (v_i, v_j) , т. е. столбец координат этой формы в двойственном базисе v^* состоит из произведений (v_i, v_j) .

Упр. 10.6. Запишите все векторы строками их координат в базисе e и разложите

$$\det(u, v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(u, v_1, \dots, v_{n-1})$$

по первой строке u .

Упр. 11.1. Ортогональный оператор F переводит базисный вектор e в вектор $Fe = \lambda e$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и

$$(e, e) = (Fe, Fe) = \lambda^2 = (e, e),$$

откуда $\lambda = \pm 1$.

Упр. 11.2. Так как $(a + b, a - b) = (a, a) - (b, b) = 0$, вектор $(a + b)/2 \in (a - b)^\perp$. Поскольку

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}, \quad (15-14)$$

для любого вектора $w \in (a - b)^\perp$ выполняются равенства $(w, a) = (w, (a + b)/2) = (w, b)$. Поэтому векторы a и b ортогонально проектируются на гиперплоскость $(a - b)^\perp$ в один и тот же вектор $(a + b)/2$, а равенства (15-14) дают ортогональные разложения векторов a и b в сумме $V = (a - b)^\perp \oplus \mathbb{R} \cdot (a - b)$.

Упр. 11.3. Рассматриваемый поворот плоскости U является композицией отражений относительно прямых $u_1^\perp \cap U$ и $u_2^\perp \cap U$.

Упр. 11.4. Если $Fu = \lambda u$ для ненулевого вектора u , то из равенства $(Fu, u) = -(u, Fu)$ вытекает равенство $2\lambda \cdot (u, u) = 0$, возможное только при $\lambda = 0$.

Упр. 11.6. $(u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + o(|u|)$, $(F(u + v), F(u + v)) = (Fu, Fu) + 2(Fu, Fv) + o(|u|)$.

Упр. 11.7. Так как оператор FF^\times самосопряжён и биективен, все его собственные числа строго положительны. Поэтому имеется единственный самосопряжённый оператор S с положительными собственными значениями, квадрат которого равен¹ FF^\times . Тогда $F = SR$, где $R = S^{-1}F$ ортогонален, поскольку $R^\times R = R^\times S^{-2}F = F^\times (FF^\times)^{-1}F = \text{Id}_V$.

Упр. 11.9. Поскольку произведение двух компактов компактно, а функция (u, w) непрерывна, она достигает максимума на декартовом произведении единичных сфер в U и W .

Упр. 12.6. Если $w = e_0 + v \in M$, то $\bar{a}_i(w) = \alpha_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$ при всех i , поэтому $w \in \bar{M}$, а с ним и $[0, w) \subset \bar{M}$. Наоборот, если $w = \lambda e_0 + v \in \bar{M}$, то при $\lambda \neq 0$ из неравенств $\bar{a}_i(w) = \lambda \alpha_i(e_0) + \alpha_i(v) \geq 0$ вытекает, что точка $[0, w) \cap U_\xi = \lambda^{-1}w = e_0 + \lambda^{-1}v \in M$, а при $\lambda = 0$ луч $[0, v) \subset V$ является пределом при $s \rightarrow +\infty$ пересекающих многогранник M лучей $[0, w_s)$, где $w_s = w + sv$, поскольку при всех $s \geq 0$ точка $w_s = w + sv \in M$, коль скоро $w \in M$ и $\alpha_i(v) \geq 0$ при всех i , а луч $[0, w_s]$ имеет при каждом $s > 0$ ненулевой направляющий вектор $v_s = s^{-1}w + v$, стремящийся к v при $s \rightarrow \infty$. Для доказательства эквивалентности свойств (1) – (3) заметим, что если $\alpha_i(v) < 0$ хотя бы для одного функционала α_i , то для всех $p \in \mathbb{A}(V)$ при всех $\lambda \gg 0$ выполняется неравенство $\alpha_i(p + \lambda v) = \alpha_i(p) + \lambda \alpha_i(v) < 0$, и ни одно из свойств (1) – (3) не имеет места. Напротив, если $\alpha_i(v) \geq 0$ для всех i , то для любой точки $p \in M$ при всех $\lambda \geq 0$ выполняются неравенства $\alpha_i(p + \lambda v) = \alpha_i(p) + \lambda \alpha_i(v) \geq \alpha_i(p) \geq 0$, а с ними и каждое из свойств (1) – (3).

Упр. 12.8. Четырёхгранный конус в \mathbb{R}^3 , порождённый векторами

$$v_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + e_2 - e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2 - e_3, \quad v_4 = e_1 - e_2 + e_3,$$

не имеет двумерной грани, порождённой векторами v_1 и v_3 .

Упр. 13.3. Это переформулировка того, что форма $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ билинейна.

Упр. 13.4. Линейная оболочка векторов $e_\nu + ie_{n+\nu}$ с $1 \leq \nu \leq n$.

¹Так как S и S^2 диагонализуются в одном базисе, оператор S обязан действовать на каждом собственном подпространстве V_λ оператора S^2 умножением на положительный $\sqrt{\lambda}$.

Упр. 13.5. Если матрица $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ кососимметрична, то при нечётном n

$$\det B = \det B^t = \det(-B) = (-1)^n \det B = -\det B,$$

откуда $\det B = 0$ если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Упр. 13.6. Пусть $v = \sum x_i e_i$. Скалярно умножая v слева на ${}^\vee e_i$, получаем $\beta({}^\vee e_i, v) = x_i$. Скалярно умножая v справа на e_i^\vee , получаем $\beta(v, e_i^\vee) = x_i$, и т. д.

Упр. 13.8. В $\mathbb{k}[[x]]$ квадрат ряда $\sqrt{1+x}$ равен $1+x$, а коэффициенты при x^k для $0 \leq k \leq n$ у квадрата ряда $\sqrt{1+x}$ такие же, как и у квадрата многочлена из условия.

Упр. 14.5. Ненулевые квадраты составляют образ гомоморфизма мультипликативных групп

$$\mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q^*, \quad x \mapsto x^2.$$

Так как уравнение $x^2 = 1$ имеет в поле \mathbb{F}_q ровно два корня $x = \pm 1$, ядро этого гомоморфизма состоит из двух элементов, а значит, образ является подгруппой порядка $(q-1)/2$.

Упр. 14.6. Исходный базис (e_i, e_j) плоскости U имеет определитель Грама ε^2 , а определитель Грама базиса (v_i, v_j) равен $f(v_j)$.

Упр. 14.7. Если оператор f самосопряжён, то $\beta_f(u, w) = (u, fw) = (fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u)$. Если билинейная форма β_f симметрична, то $(fu, w) = (w, fu) = \beta_f(w, u) = \beta_f(u, w) = (u, fw)$.

Упр. 14.8. Пусть $w \in U^\perp$, т. е. $(u, w) = 0$ для всех $u \in U$. Тогда $(u, fw) = (fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, ибо $fu \in U$. Тем самым, $fw \in U^\perp$. Если $fu = \lambda u$ и $fw = \mu w$, то из равенства $(fu, w) = (u, fw)$ вытекает равенство $(\lambda - \mu) \cdot (u, w) = 0$.

Упр. 15.4. Перестановка одной пары с другой как единого целого чётная (это пара транспозиций). Перестановка между собою элементов из v -й пары меняет $\text{sgn}(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n)$, но одновременно заменяет матричный элемент $a_{i_v j_v}$ элементом $a_{j_v i_v} = -a_{i_v j_v}$.

Упр. 15.8. Пусть $\xi = \omega^\wedge(u')|_L$ и $\eta = \omega^\wedge(w')|_L$ для некоторых $u', w' \in L'$. Тогда $\omega(u + u', w + w') = \omega(u, w') - \omega(w, u') = \eta(u) - \xi(w)$, что и утверждается.