

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

А. В. Грешнов, С. А. Малюгин, В. Н. Потапов

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

1-й семестр

Учебное пособие
2-е издание

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика».

Новосибирск
2012

УДК 517.1+517.2
ББК В 16я73-4
Г 818

Грешнов А. В., Малюгин С. А., Потапов В. Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 1-й семестр, 2-е изд., испр. / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. 157 с.

В настоящем учебном пособии собраны задачи по темам, соответствующим программе 1-го семестра курса математического анализа, который читается на механико-математическом факультете НГУ.

Сборник задач предназначается для студентов и преподавателей математических и физических факультетов университетов, а также для всех интересующихся математическим анализом.

Во 2-м издании добавлены новые задачи и исправлены опечатки.

Рецензенты

д-р физ.-мат. наук, проф. С. К. Водопьянов (ИМ СО РАН),
д-р физ.-мат. наук М. Ю. Васильчик (НГТУ)

© Новосибирский государственный
университет, 2-е изд., испр., 2012
© А. В. Грешнов, С. А. Малюгин,
В. Н. Потапов, 2-е изд., испр., 2012

Содержание

Предисловие	4
1. Элементы теории множеств	5
2. Математическая индукция	9
2.1. Комбинаторика и теория чисел	10
2.2. Неравенства	16
3. Линейный порядок и вещественные числа	18
4. Мощность множества	22
5. Последовательности	26
5.1. Арифметические свойства предела последовательности	27
5.2. Монотонные и рекуррентно заданные последовательности	31
5.3. Частичные пределы последовательности	36
5.4. Критерий Коши и другие свойства предела последовательности	40
5.5. Свойства числа e	43
5.6. Дополнения	45
6. Ряды	46
6.1. Ряды из положительных слагаемых	47
6.2. Знакопеременные ряды	55
6.3. Перестановки и некоторые другие преобразования рядов	59
7. Предел и непрерывность функции	64
7.1. Топологические свойства вещественной прямой	66
7.2. Свойства предела функции	68
7.3. Асимптотические выражения	75
7.4. Свойства непрерывных функций	77
8. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел и элементарных функций	84
9. Дифференцируемость функций	95
9.1. Свойства операции дифференцирования	96
9.2. Свойства дифференцируемых функций	101
9.3. Неравенства и локальные экстремумы функций	111
9.4. Вычисление производных высших порядков и производных неявно заданных функций	115
10. Равномерная непрерывность функций	119
11. Выпуклость функций	125
12. Построение кривых и графиков функций	136
13. Формула Тейлора и вычисление пределов	139
13.1. Формула Тейлора	139
13.2. Вычисление пределов	147
Предметный указатель	151
Список литературы	154

Предисловие

Основу сборника составляют задачи, рассматривавшиеся на практических занятиях по курсу математического анализа, который читает профессор С. К. Водопьянов на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета. Определения, формулировки теорем и порядок изложения материала в целом соответствуют этому курсу.

Задачи придумывались и собирались в течение нескольких лет, при этом были использованы различные источники — учебники, учебные пособия, задачки, монографии, интернет. Не представляется возможным дать точные ссылки на соответствующий источник для каждой задачи. В списке литературы указаны учебники и сборники задач, которые использовались при составлении этого сборника, особенно много задач было взято из изданий [9, 22, 30]. Сборник задач может быть использован и как учебное пособие: в нём имеются все необходимые определения. Задачи, являющиеся важными теоремами, которые необходимы для понимания последующих разделов, выделены знаком (!). Если для решения задачи требуются знания из какого-либо последующего раздела, то после номера задачи в скобках указан номер этого раздела.

Авторы благодарят А. Е. Гутмана за многочисленные ценные замечания, А. Д. Коршунова за редакционную правку текста и студентов ММФ НГУ, которые решали собранные в этой книге задачи на семинарских занятиях, контрольных, зачётах и экзаменах, в результате чего отдельные формулировки были уточнены и некоторые опечатки исправлены.

1. Элементы теории множеств

Множеством является некоторая совокупность объектов, называемых *элементами* этого множества¹. Формула $a \in A$ означает, что элемент a *принадлежит* множеству A . Если a не принадлежит множеству A , то пишут $a \notin A$. Формула $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ задаёт множество A перечислением всех его элементов a_1, \dots, a_n, \dots . Пусть X — некоторое множество, а $\Phi(x)$ — некоторое высказывание с переменной x . Тогда выражение $A = \{x \in X \mid \Phi(x)\}$ определяет множество A , состоящее из всех элементов множества X , удовлетворяющих свойству $\Phi(x)$. Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается символом \emptyset .

Если любой элемент множества A является элементом множества B , то говорят, что A является *подмножеством* множества B , и пишут $A \subseteq B$. Множества A и B равны ($A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Говорят, что A — *собственное* подмножество множества B ($A \subset B$), если $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Пусть $A, B \subseteq X$. Определим операции

$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (пересечение);

$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ (объединение);

$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ (дополнение).

Множества A и B называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \emptyset$.

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, состоящее из упорядоченных пар (a, b) . Аналогичным образом определяется множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Для декартова произведения одинаковых множеств используется обозначение $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$. Для любых множеств X и Y *отношение*

$F \subseteq X \times Y$ определяет *функцию* (или *отображение*) $f : X \rightarrow Y$, если для любого $x \in X$ найдётся единственный $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in F$. Установленную зависимость выражают формулой $f(x) = y$. Множество F называют *графиком* функции f , множество X — *областью определения* функции f и обозначают $\text{Dom} f$, элемент $f(x) \in Y$ называется *значением* функции f в точке $x \in X$. Для произвольного $X_1 \subseteq X$ определим множество $f(X_1) = \{f(x) \mid x \in X_1\}$ — *образ* множества X_1 под

¹ Формальное определение множества является трудной задачей. По этой причине мы не даём этого определения, считая, что в нашем распоряжении уже есть некоторый достаточно широкий класс множеств. Те операции над множествами, которые мы используем, не могут привести к противоречиям в силу того, что класс множеств обладает некоторым набором необходимых нам свойств и замкнут относительно естественных преобразований. Точное определение этих свойств и преобразований может быть дано в рамках аксиоматической теории множеств ZFC.

действием отображения f . Множество $f(X)$ называется *областью значений* функции f .

Если $f(X) = Y$, то функцию f называют *сюръективной* или говорят, что отображение f действует «на» множество Y . *Прообразом* множества $Y_1 \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X \mid f(x) \in Y_1\}$. Функция f называется *инъективной* (*вложением*), если для любого $y \in f(X)$ прообраз $f^{-1}(\{y\})$ состоит из одного элемента, другими словами, из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$. Функция называется *биективной* (*взаимно однозначной*), если она одновременно сюръективна и инъективна. Если отношение F определяет биективную функцию, то обратное отношение $F^{-1} \subseteq Y \times X$, $F^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in F\}$, определяет функцию f^{-1} , которая называется *обратной* к функции f . Нетрудно видеть, что прообраз множества Y_1 относительно f и образ множества Y_1 относительно f^{-1} совпадают, поэтому обозначение $f^{-1}(Y_1)$ не вызывает недоразумений.

Композицией двух функций $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ называется функция $g \circ f = h : X \rightarrow Z$, определяемая равенством $h(x) = g(f(x))$.

- 1.1. (!) Докажите, что для любых множеств A, B справедливы равенства

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B,$$

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

- 1.2. (!) Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

- 1.3. Докажите, что для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$

b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C);$

d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$

e) $C \setminus (A \setminus B) = (C \setminus A) \cup (B \cap C);$

f) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C);$

g) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$

- 1.4. Пусть $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — симметрическая разность двух множеств. Докажите, что $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- 1.5. Докажите, что $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
- 1.6. Докажите, что для любых множеств A, B существует ровно одно множество X , удовлетворяющее уравнению $A \triangle X = B$. Найдите формулу для множества X и убедитесь, что оно является также решением уравнения $B \triangle X = A$.
- 1.7. Докажите, что множество всех подмножеств множества A образуют коммутативную группу относительно операции \triangle .
- 1.8. Докажите, что множество всех подмножеств множества A образуют кольцо относительно операций \triangle и \cap .
- 1.9. (!) Пусть $f : X \rightarrow Y$. Докажите, что $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$ для всякого $M \subseteq Y$. Приведите примеры, показывающие, что равенство $f(f^{-1}(M)) = M$, вообще говоря, неверно.
- 1.10. (!) Пусть $E \subseteq X$. Докажите, что $f^{-1}(f(E)) \supseteq E$. Приведите примеры, показывающие, что равенство $f^{-1}(f(E)) = E$, вообще говоря, неверно.
- 1.11. (!) Докажите, что для всех $A, B \subseteq X$ справедливо равенство $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.
- 1.12. (!) Докажите, что для всех $A, B \subseteq X$ справедливо включение $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Приведите примеры, показывающие, что равенство $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, вообще говоря, неверно.
- 1.13. Приведите пример функции f и последовательности множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ таких, что $\bigcap_n A_n = \emptyset$ и $\bigcap_n f(A_n) \neq \emptyset$.
- 1.14. Приведите пример таких двух подмножеств $B \subset A$ множества X и отображения f , чтобы $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$.
- 1.15. Приведите примеры отображений $f : X \rightarrow Y$ и подмножеств $A \subset X$ таких, что
- $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$;
 - $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$;
 - ни одно из множеств $f(X \setminus A)$, $Y \setminus f(A)$ не содержится в другом.

- 1.16. Пусть f — отображение $X \rightarrow Y$. Покажите эквивалентность следующих свойств:
- а) f — вложение;
 - б) $f^{-1}(f(A)) = A$ для любого подмножества $A \subset X$;
 - в) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для любой пары A, B подмножеств X ;
 - г) $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ для любой такой пары A, B подмножеств X , что $A \cap B = \emptyset$;
 - д) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ для любой пары A, B подмножеств X таких, что $B \subset A$.
- 1.17. Пусть дано отображение $f : A \rightarrow B$. Докажите, что для любых множеств $P \subset B$, $Q \subset B$ справедливы равенства $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$, $f^{-1}(P \setminus Q) = f^{-1}(P) \setminus f^{-1}(Q)$, $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.
- 1.18. Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Докажите, что для любого множества $C \subseteq Z$ справедливо равенство $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
- 1.19. Обозначим через $\text{id}_X : X \rightarrow X$ тождественное отображение $\text{id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$. Докажите, что
- а) $f : X \rightarrow Y$ — инъективное отображение тогда и только тогда, когда существует такое $p : Y \rightarrow X$, что $p \circ f = \text{id}_X$,
 - б) $f : X \rightarrow Y$ — сюръективное отображение тогда и только тогда, когда существует такое $q : Y \rightarrow X$, что $f \circ q = \text{id}_Y$.
- 1.20. Если отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ таковы, что $g \circ f = \text{id}_X$, то отображение f называется *правым обратным* для g , а отображение g — *левым обратным* для f . Может ли существовать несколько односторонних обратных отображений?
- 1.21. Докажите, что если отображение $f : X \rightarrow Y$ имеет правое и левое обратные отображения, то правое и левое обратные отображения совпадают. Приведите примеры отображений, имеющих только правое или только левое обратные отображения.
- 1.22. (!) Пусть $f : X \rightarrow Y$. Докажите, что обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$, т. е. отображение, удовлетворяющее равенствам $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ и $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$, существует тогда и только тогда, когда отображение f взаимно однозначно, причём обратное отображение единственно.

- 1.23. (!) Пусть $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ являются биективными отображениями. Докажите, что отображение $g \circ f$ биективно, причём справедливо равенство $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 1.24. Пусть $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ и композиции $g \circ f$, $h \circ g$ — биективные функции. Докажите, что f, g, h — биективные функции.
- 1.25. Пусть $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow A$. Докажите, что
- а) композиция является ассоциативной операцией, т. е. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
 - б) если композиции $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ являются инъективными функциями, а $g \circ f \circ h$ — сюръективная функция, то f, g, h — биективные функции;
 - в) если композиции $h \circ g \circ f$, $f \circ h \circ g$ являются сюръективными функциями, а $g \circ f \circ h$ — инъективная функция, то f, g, h — биективные функции.
- 1.26. Пусть X, Y — два множества, f — инъективное отображение X в Y , g — инъективное отображение Y в X . Покажите, что найдутся два подмножества A, B множества X и два подмножества A', B' множества Y , удовлетворяющие равенствам $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$, $A' \cup B' = Y$, $A' \cap B' = \emptyset$, $A' = f(A)$ и $B = g(B')$.
- 1.27. Пусть $\{X_i\}$, $1 \leq i \leq n$, — конечное семейство множеств и $P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$, $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. Пусть Y — множество k -элементных подмножеств индексов из $\{1, \dots, n\}$. Докажите включения $\bigcup_{H \in Y} Q_H \supseteq \bigcap_{H \in Y} P_H$ при $k \leq \frac{n+1}{2}$ и $\bigcup_{H \in Y} Q_H \subseteq \bigcap_{H \in Y} P_H$ при $k \geq \frac{n+1}{2}$.
- 1.28. Докажите, что для любого конечного семейства $\{X_{i,j}\}$, $i, j \in I$, подмножеств множества B справедливо равенство $B = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in I} \bigcup_{k \in I} ((X_{j,k} \setminus X_{i,k}) \cup (B \setminus X_{i,i}) \cup X_{j,i})$.

2. Математическая индукция

Множество *натуральных* чисел \mathbb{N} можно определить как наименьшее по включению множество, удовлетворяющее условиям:

- а) $1 \in \mathbb{N}$;
- б) если $n \in \mathbb{N}$, то $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Отсюда вытекает способ доказательства утверждений, зависящих от натуральных чисел, называемый *методом математической индукции*.

Пусть

а) высказывание $F(1)$ истинно (*база индукции*);

б) из истинности $F(n)$ следует истинность $F(n+1)$ (*шаг индукции*),

тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ высказывание $F(n)$ истинно. В некоторых задачах возникает необходимость использовать в качестве базы индукции $n_0 \neq 1$, тогда метод математической индукции обеспечивает истинность соответствующего высказывания $F(n)$ при целых $n \geq n_0$. В дальнейшем всюду предполагаем, что $n \in \mathbb{N}$, если не указано противное.

Множество *целых* чисел \mathbb{Z} определяется равенством $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$. Множество *рациональных* чисел \mathbb{Q} определяется равенством $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Определение множества *вещественных* чисел \mathbb{R} будет дано в разделе 8.

2.1. Комбинаторика и теория чисел

2.1. Докажите, что метод математической индукции эквивалентен следующему, если

а) высказывание $F(1)$ ложно;

б) из истинности $F(n+1)$ следует истинность $F(n)$,

то для всех $n \in \mathbb{N}$ высказывание $F(n)$ ложно.

2.2. Укажите ошибку в доказательстве:

Одна лошадь одной масти (*база индукции*).

Если любые n лошадей одной масти, то и любые $n+1$ лошадей одной масти, поскольку в двух разных n -элементных подмножествах $(n+1)$ -элементного множества лошадей, а следовательно, и на их пересечении все лошади одной масти (*шаг индукции*). Таким образом, доказано, что все лошади одной масти.

2.3. Докажите малую теорему Ферма: если p — простое, то $n^p - n$ делится на p .

2.4. Докажите, что число $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ делится на 133.

2.5. Докажите, что число $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ делится на 19.

2.6. Числа $f_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. Докажите равенство $\prod_{k=0}^{n-1} f_k = f_n - 2$.

- 2.7. Докажите, что десятичная запись числа Ферма f_n при $n \geq 2$ оканчивается цифрой 7.
- 2.8. Докажите равенство $3 + 33 + \dots + \underbrace{33\dots 3}_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$.
- 2.9. Найдите целую часть числа $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$.
- 2.10. Докажите равенство $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos(\pi/2^{n+1})$ (в левой части равенства n корней).
- 2.11. Пусть $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$. Докажите равенство
- $$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n-1}}\right)\right) =$$
- $$a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_n \sqrt{2}}}.$$
- 2.12. Докажите равенство $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$.
- 2.13. Докажите, что функция $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ на отрезке $[-1, 1]$ является многочленом степени n (многочлены Чебышёва).
- 2.14. (!) Покажите, что множество всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов ($n \geq 0$), состоит из 2^n элементов.
- 2.15. Пусть множество A состоит из n элементов. Сколько различных подмножеств (включая пустое) содержится в декартовом произведении $A \times A$?
- 2.16. Пусть P — семейство подмножеств n -элементного множества X , удовлетворяющее следующему условию: $\bigcap_{A \in P} A \neq \emptyset$. Чему равно максимальное число элементов в семействе P ?
- 2.17. Пусть P — семейство подмножеств n -элементного множества X , удовлетворяющее следующему условию: если $A \in P$, то $X \setminus A \notin P$. Чему равно максимальное число элементов в семействе P ?
- 2.18. (!) Пусть A, B — конечные множества², $|A| = n$, $|B| = m$. Найдите общее число отображений множества A в множество B .

² Здесь и далее $|A|$ — число элементов в конечном множестве A .

- 2.19. Пусть A, B — конечные множества, $|A| = n$, $|B| = m$, $m \geq n$. Определите число инъективных отображений множества A в B .
- 2.20. Пусть A, B — конечные множества, $|A| = n$, $|B| = m$, $m \leq n$. Определите число сюръективных отображений множества A в B .
- 2.21. Докажите, что число перестановок конечного n -элементного множества A равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
- 2.22. Найдите число упорядоченных k -элементных наборов конечного множества A , $|A| = n$, $k \leq n$.
- 2.23. (!) Пусть A — конечное множество, $|A| = n$. Докажите, что число m -элементных подмножеств множества A , $0 \leq m \leq n$, равно $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Здесь и далее считаем $0! = 1$.
- 2.24. Укажите наибольшее среди чисел C_n^k при $k = 0, 1, \dots, n$.
- 2.25. Пусть A — произвольное множество, состоящее из $n \geq k$ элементов. Пусть $n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0$ — такие целые числа, что $n_1 + \dots + n_k = n$. Найдите число способов, которыми можно представить множество A в виде $A = B_1 \cup \dots \cup B_k$, $|B_i| = n_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$.
- 2.26. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + \dots + x_m = n$?
- 2.27. Сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + \dots + x_m = n$?
- 2.28. Сколько целых неотрицательных решений имеет неравенство $x_1 + \dots + x_m \leq n$?
- 2.29. Найдите число нестрого монотонных отображений из множества $\{1, 2, \dots, m\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$.
- 2.30. (!) Докажите равенство $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.
- 2.31. (!) Докажите равенство $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ (**бином Ньютона**).
- 2.32. Докажите равенство $C_{n_1+n_2}^n = \sum_{k=0}^{n_1} C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}$.
- 2.33. Докажите равенство $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

2.34. Докажите равенство $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

2.35. Докажите равенство

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{r_1 \geq 0, \dots, r_k \geq 0, r_1 + \dots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \dots r_k!} a_1^{r_1} \dots a_k^{r_k}.$$

2.36. Докажите равенство $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

2.37. Докажите равенство $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$.

2.38. Докажите равенство $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \dots + C_{r-1}^{r-1}$.

2.39. Найдите коэффициент при x^k у полинома $(1+x)^m + (1+x)^{m+1} + \dots + (1+x)^n$, если

а) $m \leq k \leq n$; б) $0 \leq k < m$.

2.40. Докажите равенство $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.41. Докажите равенство $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

2.42. Вычислите $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^m C_n^m$.

2.43. Докажите равенство $C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$.

2.44. Докажите равенство $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^m C_n^k = 0$ при $m < n$.

2.45. Докажите равенство $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^n C_n^k = (-1)^n n!$.

2.46. Докажите равенство $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1}$.

2.47. Докажите равенство $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

2.48. Докажите, что числа $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$ делятся на p , если p — простое число.

2.49. Докажите, что разность $\lfloor (2 + \sqrt{5})^p \rfloor - 2^{p+1}$ делится на p , если $p > 2$ простое число. Здесь и далее через $\lfloor x \rfloor$ обозначается целая часть числа x (см. задачу 3.7).

2.50. Для всех $k, n \in \mathbb{N}$ докажите равенство

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) \cdots (i+k-1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+k)}{k+1}.$$

2.51. Пусть $S_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$, где $p \in \mathbb{N}$. Докажите рекуррентную формулу для $S_n(p)$:

$$\sum_{p=1}^m C_{m+1}^p S_n(p) = (n+1)^{(m+1)} - (n+1).$$

Пользуясь этой формулой, докажите равенства

$$S_n(2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ и } S_n(3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2.52. Числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$. Докажите, что числа F_n и F_{n+1} взаимно просты.

2.53. Докажите, что число Фибоначчи F_k делит F_n тогда и только тогда, когда k делит n .

2.54. Для чисел Фибоначчи докажите равенство

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

2.55. Докажите равенство $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

2.56. Пусть A, B, C — конечные множества. Докажите равенства

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

2.57. Пусть A_1, \dots, A_n — конечные множества. Докажите равенство (формула включения и исключения)

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots \\ + (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

2.58. Пусть A_1, \dots, A_n — конечные множества. Докажите равенство

$$\begin{aligned} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cup A_{i_2}| + \dots \\ &+ (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cup \dots \cup A_n|. \end{aligned}$$

2.59. Докажите равенство³

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_n)^n - \sum_i (x_1 + \dots + \widehat{x_i} + \dots + x_n)^n + \dots + \\ + (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} (x_1 + \dots + \widehat{x_{i_1}} + \dots + \widehat{x_{i_k}} + \dots + x_n)^n + \dots + \\ + (-1)^n \sum_i x_i^n = n! x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

2.60. Пусть Ω — некоторое множество, состоящее из n элементов. Рассмотрим набор подмножеств A_1, \dots, A_k из Ω такой, что ни одно из множеств не является частью другого. Докажите неравенство $k \leq C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (**теорема Шпернера**).

2.61. Докажите, что если из чисел $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ выбрать произвольные $n+1$, то среди выбранных найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

2.62. Докажите, что каждая рациональная дробь $\frac{p}{q} \in (0, 1)$ может быть представлена в виде конечной суммы $\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$, где $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ натуральные числа. Является ли такое представление единственным?

2.63. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ — разложение натурального числа на простые множители. Докажите, что количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n , равно $n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_k})$.

2.64. Докажите, что в любом графе, являющемся деревом, количество вершин на единицу превышает количество рёбер⁴.

2.65. Докажите, что в двоичном дереве число листьев (висячих вершин) на единицу превышает число внутренних вершин.

³ Здесь $\widehat{x_i}$ означает, что слагаемое x_i отсутствует в сумме.

⁴ Необходимые определения можно найти в [6].

2.2. Неравенства

- 2.66. Какое из неравенств проще доказывать по индукции: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ или $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$? Здесь и далее $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n n!$. Из этой задачи видно, что иногда нужно усилить неравенство, чтобы его можно было доказывать методом математической индукции (парадокс изобретателя).
- 2.67. Докажите неравенства:
- a) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$;
b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.
- 2.68. Докажите неравенства для всех $n \geq 2$:
- a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} < n$;
b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{n}{2}$.
- 2.69. Докажите неравенство $(2 - \frac{1}{n})(2 - \frac{3}{n}) \dots (2 - \frac{2n-1}{n}) > \frac{1}{n!}$ при $n \geq 2$.
- 2.70. Докажите неравенство $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)}$ при $n \geq 3$.
- 2.71. Докажите неравенство $(n+2)^n < (n+1)^{n+1}$.
- 2.72. Докажите неравенство $(n+1)^{1/n} > (n+2)^{1/(n+1)}$.
- 2.73. (!) Докажите неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
- 2.74. Докажите неравенство $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
- 2.75. (!) Докажите неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.
- 2.76. (!) Докажите неравенство $\left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1} < n!$.
- 2.77. (!) Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n \geq 2$.
- 2.78. Докажите неравенство $(2n)! \leq (n(n+1))^n$ при $n \geq 1$.
- 2.79. Докажите неравенства $\frac{n^k}{k^k} \leq C_n^k \leq \frac{n^k}{k!}$.

- 2.80. Докажите неравенство $\frac{n!}{(n-k)!k!} \leq \frac{n^n}{(n-k)^{(n-k)}k^k}$ для $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k > 0$.
- 2.81. (!) Докажите, что если $x_1, x_2 > 0$ и $x_1 x_2 = 1$, то $x_1 + x_2 \geq 2$. Пусть $x_i > 0$ и $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. Докажите, что справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$, причём равенство достигается только тогда, когда $x_i = 1$ при всех $i = 1, \dots, n$.
- 2.82. (!) Пусть $x_i > 0$. Докажите неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)$.
- 2.83. Докажите, что для любых положительных чисел a и b , $a \neq b$, выполняется неравенство $(ab^n)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{a+nb}{n+1}$.
- 2.84. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.
- 2.85. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.
- 2.86. Докажите, что если x_i , $1 \leq i \leq n$, — положительные числа, то $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.
- 2.87. Докажите неравенство $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$.
- 2.88. (!) Докажите, что при $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ (неравенство Бернулли).
- 2.89. (§ 8) Пусть $x \geq -1$. Докажите, что если $0 < \alpha < 1$, то $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$; если же $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$, то $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$.
- 2.90. Пусть $0 \geq x_i \geq -1$ при всех $i = 1, \dots, n$. Докажите неравенство $(1+x_1) \cdots (1+x_n) \geq 1+x_1 + \dots + x_n$.
- 2.91. Для любого $n \in \mathbb{N}$ докажите неравенство $\log_2(n+1) < n$.
- 2.92. Для любых $x > 1$ докажите неравенство $\log_2 x < x$.
- 2.93. Докажите, что для любых $\alpha > 0$ и $a > 1$ найдутся $x_0 > 0$ и $C_\alpha > 0$ такие, что при любом $x \geq x_0$ справедливо неравенство $\log_a x \leq C_\alpha x^\alpha$.

2.94. Пусть $h_1, \dots, h_n > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{h_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{h_2}{\sqrt{h_1 + h_2}} + \dots + \frac{h_n}{\sqrt{h_1 + \dots + h_n}} \leq 2\sqrt{h_1 + \dots + h_n}.$$

2.95. Пусть $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$. Докажите неравенство $(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)$. Докажите, что равенство $(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) = n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)$ имеет место только если $a_1 = \dots = a_n$ или $b_1 = \dots = b_n$.

2.96. Докажите, что любое натуральное число n может быть представлено единственным образом в виде суммы $n = a_1 1! + a_2 2! + \dots + a_k k!$, где $a_i \in \mathbb{N}$ и $a_i \leq i$.

3. Линейный порядок и вещественные числа

Говорят, что на множестве X задан *линейный порядок*, если задано отношение \leq , удовлетворяющее условиям: для всех $x, y, z \in X$ справедливо

- a) $x \leq y$ или $y \leq x$;
- b) $x \leq x$ (*рефлексивность*);
- c) $x \leq y, y \leq x \Rightarrow y = x$ (*антисимметричность*);
- d) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (*транзитивность*).

В этом случае множество X называется *линейно упорядоченным*. Будем писать $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$. Элемент $x \in A \subseteq X$ называется *наименьшим* элементом множества A , если $x \leq a$ для всех $a \in A$. Элемент $x \in A \subseteq X$ называется *наибольшим* элементом множества A , если $a \leq x$ для всех $a \in A$. Элемент $x \in X$ называется *нижней границей* (*гранью*) множества A , если $x \leq a$ для всех $a \in A$. Элемент $x \in X$ называется *верхней границей* (*гранью*) множества A , если $a \leq x$ для всех $a \in A$. Если множество имеет верхнюю и нижнюю границу, то оно называется *ограниченным*, если только верхнюю — *ограниченным сверху*, только нижнюю — *ограниченным снизу*. Наименьшая (точная) верхняя граница множества A называется *супремумом* и обозначается через $\sup A$. Наибольшая (точная) нижняя граница множества A называется *инфимумом* и обозначается через $\inf A$. Пусть $A, B \subseteq X$, будем писать $A \leq B$, если для всех $a \in A, b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$.

Множество вещественных чисел \mathbb{R} определяется как минимальное линейно упорядоченное пополнение множества \mathbb{Q} , удовлетворяющее условию: для любых двух непустых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}$, если $A \leq B$, найдётся такое $c \in \mathbb{R}$, что $A \leq \{c\} \leq B$ (*аксиома непрерывности*)⁵.

⁵ Аксиоматическое построение вещественных чисел изложено в § 8.

Определим *расширенную вещественную прямую* $\overline{\mathbb{R}}$, добавив к множеству вещественных чисел два новых элемента $-\infty, +\infty$, т. е. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Линейный порядок распространяется на $\overline{\mathbb{R}}$ по правилу: $-\infty \leq x \leq +\infty$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Вместо $+\infty$ обычно пишут ∞ .

Множество $[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$ называется *отрезком*, а множество $(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ называется *интервалом*.

Пусть X и Y являются линейно упорядоченными множествами. Функция $f : X \rightarrow Y$ называется *возрастающей* (*строго возрастающей*), если неравенство $x_1 < x_2$ влечёт неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Функция $f : X \rightarrow Y$ называется *убывающей* (*строго убывающей*), если неравенство $x_1 < x_2$ влечёт неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Функция называется *монотонной*, если она убывающая или возрастающая.

- 3.1. (!) Докажите, что если $a \in A$ — наибольший элемент множества A , то $a = \sup A$.
- 3.2. (!) Докажите, что если $a \in A$ — наименьший элемент множества A , то $a = \inf A$.
- 3.3. Докажите, что любое непустое конечное линейно упорядоченное множество имеет наибольший и наименьший элементы.
- 3.4. (!) Докажите, что любое непустое подмножество множества \mathbb{N} имеет наименьший элемент.
- 3.5. Докажите, что любое непустое ограниченное сверху подмножество множества \mathbb{N} имеет наибольший элемент.
- 3.6. (!) Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \leq n$ (**принцип Архимеда**).
- 3.7. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{Z}$, что $n \leq x < n + 1$. Число n называется *целой частью* числа x и обозначается через $\lfloor x \rfloor$.
- 3.8. Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $0 < \frac{1}{n} < x$.
- 3.9. (!) Докажите, что для любых вещественных чисел α, β , $\alpha < \beta$, найдётся рациональное число $c \in (\alpha, \beta)$.
- 3.10. Докажите, что $\sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}$ — иррациональное число.

- 3.11. Для любых рациональных чисел α и β , $\alpha < \beta$, найдется иррациональное число $c \in (\alpha, \beta)$.
- 3.12. Докажите, что если $A \subseteq \mathbb{R}$ неограничено сверху, то $\sup A = \infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$.
- 3.13. Докажите, что если $A \subseteq \mathbb{R}$ неограничено снизу, то $\inf A = -\infty$ в $\overline{\mathbb{R}}$.
- 3.14. Существует ли множество A , для которого $\sup A < \inf A$?
- 3.15. (!) Докажите, что $a = \sup A$ тогда и только тогда, когда a — верхняя грань множества A и для любого $c < a$ найдётся такое $b \in A$, что $c \leq b \leq a$.
- 3.16. (!) Докажите, что $a = \inf A$ тогда и только тогда, когда a — нижняя грань множества A и для любого $c > a$ найдётся такое $b \in A$, что $c \geq b \geq a$.
- 3.17. Пусть $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Докажите неравенства:
 а) $\sup\{f(x) + g(x) \mid x \in A\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} + \sup\{g(x) \mid x \in A\}$;
 б) $\inf\{f(x) \mid x \in A\} + \inf\{g(x) \mid x \in A\} \leq \inf\{f(x) + g(x) \mid x \in A\}$.
 Приведите примеры функций f, g , для которых неравенства строгие.
- 3.18. Докажите, что строго монотонная функция инъективна.
- 3.19. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Докажите равенства:
 а) $\sup(-A) = -\inf A$;
 б) $\inf(-A) = -\sup A$;
 в) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
 г) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;
 е) $\sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$, если $0 \leq A, 0 \leq B$;
 ф) $\inf(A \cdot B) = (\inf A)(\inf B)$, если $0 \leq A, 0 \leq B$.
 Здесь и далее через $A + B$ и $A \cdot B$ обозначаются множества $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ и $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.
- 3.20. Докажите, что аксиома непрерывности эквивалентна утверждению: каждое непустое ограниченное сверху множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет $\sup A \in \mathbb{R}$.

- 3.21. Докажите, что аксиома непрерывности эквивалентна утверждению: каждое непустое ограниченное снизу множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет $\inf A \in \mathbb{R}$.
- 3.22. (!) Докажите, что аксиома непрерывности эквивалентна утверждению: каждое множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ имеет $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$.
- 3.23. (§ 4) Докажите, что аксиома непрерывности эквивалентна утверждению: пересечение счётной системы вложенных отрезков непусто.
- 3.24. (!) Докажите, что пересечение произвольного семейства отрезков, попарные пересечения которых непусты, непусто (**принцип вложенных отрезков Коши — Кантора**).
- 3.25. На квадрате $[0, 1]^2$ введём лексикографический порядок: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ тогда и только, когда $x_1 \leq x_2$ и $x_1 \neq x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Докажите, что для этого порядка верен принцип вложенных отрезков.
- 3.26. Докажите, что возрастающая функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ имеет неподвижную точку, т. е. найдётся такая $c \in [0, 1]$, что $f(c) = c$.
- 3.27. Пусть $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ — монотонно убывающая функция. Может ли при всех $t \in \varphi((0, \infty))$ выполняться неравенство $\varphi(t) > \varphi^{-1}(t)$?
- 3.28. (§ 4) Докажите, что интервал не является объединением счётного числа попарно непересекающихся отрезков.
- 3.29. Приведите пример такой последовательности интервалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$.
- 3.30. Пусть $a \in \mathbb{Q}, a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите существование единственного $v > 0$ такого, что $v^n = a$.
- 3.31. Найдите $\sup A$, где $A = \{p/q \mid 0 < p < q, p, q \in \mathbb{N}\}$ — множество правильных дробей.
- 3.32. Найдите $\sup\{\operatorname{arctg} n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и $\inf\{\operatorname{arctg} n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Обоснуйте ответ.
- 3.33. Найдите $\sup\{\operatorname{arctg}(1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\inf\{\operatorname{arctg}(1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Обоснуйте ответ.

- 3.34. Найдите $\sup A, \inf A$, где
- а) $A = \{x > 0 \mid \sin \frac{1}{x} = 0\}$; с) $A = \{x > 0 \mid \sin \frac{2}{x} = -1\}$;
 б) $A = \{x > 0 \mid \cos \frac{2}{x} = 1\}$; д) $A = \{x > 0 \mid \cos \frac{1}{x} = 0\}$.
- 3.35. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что существуют такие $p, q \in \mathbb{Z}, q \leq n$, для которых справедливо неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$ (теорема Дирихле).
- 3.36. Пусть $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что равенства $\sup\{\{\alpha n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$ и $\inf\{\{\alpha n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$ справедливы для любого $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- 3.37. Докажите, что $\sup\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$ и $\inf\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\} = -1$, если известно, что число π иррационально.
- 3.38. Найдите $\inf\{\{\ln q\} \mid q \in \mathbb{Q}, q > 1\}$.
- 3.39. Найдите $\inf\{\{2^q\} \mid q \in \mathbb{Q}, q > 1\}$.
- 3.40. (§ 4, § 7) Докажите, что любое непустое открытое множество $U \subseteq \mathbb{R}$ является не более чем счётным объединением непересекающихся интервалов.
- 3.41. Имеет ли наименьший элемент подмножество \mathbb{N} , состоящее из натуральных чисел, которые можно однозначно определить не более чем десятью словами? Обнаруженный парадокс указывает на ограниченную применимость «наивного» понимания термина множество (парадокс Берри).

4. Мощность множества

Множества A и B называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение $f : A \rightarrow B$. Очевидно, что свойство быть равномощным является *отношением эквивалентности*, т. е.:

- а) множество A равномощно себе (*рефлексивность*);
 б) если A равномощно B , то B равномощно A (*симметричность*);
 с) если A равномощно B и B равномощно C , то A равномощно C (*транзитивность*).

Множество A , равномощное некоторому отрезку натурального ряда $\{1, 2, \dots, n\}$, называется *конечным*, а количество элементов в нём, равное n , называется *мощностью* множества A . Соответственно конечные множества равномощны, если они имеют одинаковое количество элементов. Пустое множество также считается конечным.

Говорят, что множество A *счётно* и пишут $\text{card } A = \aleph_0$, если A равно-
мощно \mathbb{N} . Говорят, что множество A *не более чем счётно* ($\text{card } A \leq \aleph_0$),
если оно конечно или счётно.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема Кантора — Бернштейна. Если существуют вложения
 $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$, то множества A и B равномощны.

Теорема. Если существуют сюръективные отображения $f : A \rightarrow B$
и $g : B \rightarrow A$, то множества A и B равномощны.

Теорема. Если множество A бесконечно, то множества A^n равно-
мощны при всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема. Множество подмножеств любого множества A не равно-
мощно множеству A .

Теорема Кантора. Множество $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ не счётно.

Говорят, что множество A имеет мощность *континуума*, и пишут,
 $\text{card } A = \mathfrak{c}$, если A равномощно множеству $[0, 1]$.

- 4.1. (!) Докажите, что любое бесконечное подмножество натурального
ряда счётно.
- 4.2. (!) Докажите, что в каждом бесконечном множестве можно вы-
брать счётное подмножество⁶.
- 4.3. Докажите, что множество бесконечно тогда и только тогда, когда
существует биекция множества на его собственное подмножество.
- 4.4. Докажите, что отображение $f(x, y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y$ биективно
отображает \mathbb{N}^2 на \mathbb{N} .
- 4.5. Докажите, что отображение $f(x, y) = 2^{x-1}(2y-1)$ биективно ото-
бражает \mathbb{N}^2 на \mathbb{N} .
- 4.6. (!) Докажите, что $\text{card } \mathbb{Q} = \aleph_0$, т. е. множество рациональных чи-
сел счётно.
- 4.7. Докажите, что всякое множество попарно непересекающихся ин-
тервалов не более чем счетно.
- 4.8. Докажите, что множество всех отрезков $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, счетно.
- 4.9. Докажите, что множество монотонных последовательностей цифр
счётно.

⁶ Строго говоря, для доказательства этого утверждения необходимо использовать
аксиому выбора.

- 4.10. Докажите, что для любого бесконечного множества M и не более чем счётного множества A , множество $A \cup M$ равномощно множеству M .
- 4.11. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — счётное подмножество такое, что для любых $x, y \in A$, $x < y$, существуют такие $u, v, w \in A$, для которых справедливы неравенства $u < x < v < y < w$. Докажите, что существует биективное отображение $f : A \rightarrow \mathbb{Q}$ такое, что из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$.
- 4.12. Докажите, что множество всех конечных подмножеств множества \mathbb{N} счётно.
- 4.13. Докажите, что не существует такого множества, что множество всех его подмножеств счётно.
- 4.14. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ и $M_a = \{x \in M \mid |f(x)| > a\}$. Докажите, что множество M_0 не более чем счётно тогда и только тогда, когда для каждого $a > 0$ множество M_a не более чем счётно.
- 4.15. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ и найдётся такая константа $C \in \mathbb{R}$, что модуль любой конечной суммы элементов из M не превосходит C . Докажите, что множество M конечно или счётно.
- 4.16. Докажите, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$ конечных наборов рациональных чисел счётно.
- 4.17. Докажите, что множество многочленов с рациональными коэффициентами счётно.
- 4.18. *Алгебраическими* числами называются корни многочленов с рациональными коэффициентами. Остальные действительные числа называются *трансцендентными*. Докажите, что
 а) множество алгебраических чисел счётно;
 б) множество трансцендентных чисел имеет мощность континуума.
- 4.19. Постройте взаимно однозначное отображение $[0, 1]$ на $(0, 1)$.
- 4.20. Постройте взаимно однозначное отображение $(-1, 1)$ на \mathbb{R} .
- 4.21. Докажите, что $\text{card } \mathbb{R} = \mathfrak{c}$, т. е. множество вещественных чисел имеет мощность континуума.

- 4.22. (§ 7) Докажите, что любое непустое открытое множество в \mathbb{R} имеет мощность континуума.
- 4.23. Докажите, что множество всех последовательностей из 0 и 1 имеет мощность континуума.
- 4.24. Докажите, что множество всех подмножеств множества \mathbb{N} имеет мощность континуума.
- 4.25. Докажите, что объединение счётного числа множеств мощности континуума имеет мощность континуума.
- 4.26. Докажите, что объединение континуума множеств мощности континуума имеет мощность континуума.
- 4.27. Докажите, что $\text{card}([0, 1]) \times [0, 1] = \mathfrak{c}$.
- 4.28. Докажите, что $\text{card}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{c}$.
- 4.29. Докажите, что множество последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума.
- 4.30. Докажите, что множество монотонных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума.
- 4.31. Докажите, что множество последовательностей вещественных чисел имеет мощность континуума.
- 4.32. (§ 7) Докажите, что множество непрерывных функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} имеет мощность континуума.
- 4.33. Докажите, что множество монотонных функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} имеет мощность континуума.
- 4.34. Докажите, что множество всех подмножеств отрезка, являющихся счётными объединениями интервалов, имеет мощность континуума.
- 4.35. (§ 7) Докажите, что множество открытых подмножеств прямой имеет мощность континуума.
- 4.36. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $\text{card } A = \aleph_0$. Докажите, что найдётся такое $x \in \mathbb{R}$, что $A \cap (A + x) = \emptyset$.
- 4.37. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $\text{card } A = \aleph_0$. Докажите, что найдётся счётный набор чисел x_1, \dots, x_n, \dots такой, что $(A + x_i) \cap (A + x_j) = \emptyset$ для всех пар номеров $i \neq j$.

- 4.38. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $\text{card } A = \aleph_0$. Докажите, что для каждого $\alpha > 0$ найдётся такое $x \in \mathbb{R}$, что равномерная сетка $\{x + \alpha m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ не пересекается с множеством A .
- 4.39. Докажите, что множество всех ограниченных функций из \mathbb{R} в \mathbb{R} имеет мощность большую, чем мощность континуума.
- 4.40. (§ 8) Докажите, что существует семейство \mathcal{U} подмножеств множества \mathbb{N} , удовлетворяющее условиям:
- \mathcal{U} имеет мощность континуума;
 - система \mathcal{U} линейно упорядочена по включению, т. е. для любых двух множеств из \mathcal{U} одно содержится в другом.
- 4.41. (§ 5) Докажите, что в \mathbb{N} можно выбрать континуум подмножеств, попарные пересечения которых конечны.

5. Последовательности

Последовательностью называется функция $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. В этом случае функция обозначается через (x_n) , а значение функции $x(n)$ обозначается через x_n . Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом* последовательности, если для любого положительного числа ε найдётся такой номер n_0 (зависящий от ε), что для любого номера $n \geq n_0$ справедливо неравенство $|x_n - a| \leq \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon).$$

Для обозначения предела используют формулы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Говорят, что последовательность имеет предел $+\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq E).$$

Соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq -E).$$

Если последовательность имеет конечный предел $a \in \mathbb{R}$, то говорят, что последовательность *сходится* (в \mathbb{R}).

Последовательность (x_n) называется *фундаментальной* (удовлетворяющей условию Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon),$$

см. задачу 5.132. Последовательность (x_n) называется ограниченной, если найдётся такое $c \in \mathbb{R}$, что $|x_n| < c$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Подпоследовательностью последовательности $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ называется композиция $x \circ n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, где $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — инъективная функция⁷. Множество $n(\mathbb{N})$ называется множеством индексов подпоследовательности. Подпоследовательность часто обозначается через (x_{n_k}) , где $x_{n_k} = x(n(k))$. Пределы подпоследовательностей последовательности (x_n) называются *частичными пределами* последовательности (x_n) . Наибольший частичный предел последовательности (x_n) называется *верхним пределом* последовательности и обозначается через $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, наименьший называется *нижним пределом* и обозначается через $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Говорят, что высказывание $F(n)$ истинно при $n \rightarrow \infty$, если существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $F(n)$ истинно при любом натуральном $n \geq n_0$.

5.1. Арифметические свойства предела последовательности

5.1. (!) Докажите по определению (т. е. найдите явную зависимость $n_0(\varepsilon)$), что

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ при $q > 1$;
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = 0$ при $k < 0$;
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ при $k > 0$;
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$.

5.2. Докажите по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, если

- a) $x_n = 2^{\frac{-1}{\log_2 n}}$; c) $x_n = 2^{\frac{1}{\log_2 n}}$;
- b) $x_n = 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$; d) $x_n = 2^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}$.

5.3. Докажите по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, если

- a) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; b) $x_n = \sqrt{\ln n}$.

⁷ Иногда требуют, чтобы функция $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ была строго возрастающей, однако в теории пределов это несущественно (см. задачу 5.80).

5.4. Докажите по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, если

а) $x_n = 2^{-\sqrt{n}}$; б) $x_n = 1/\ln(n^2 + 1)$.

5.5. (!) Докажите единственность предела последовательности.

5.6. (!) Сформулируйте утверждение, что последовательность не имеет предела, не используя отрицание.

5.7. Докажите, что последовательность (x_n) не имеет предела, если

а) $x_n = (-1)^n$; в) $x_n = 2^{n \sin(\pi n/3)}$;
б) $x_n = (-n)^n$; г) $x_n = 2^{-n \cos(\pi n/3)}$.

5.8. (!) Докажите, что если последовательность (x_n) имеет предел и $x_n \leq a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$.

5.9. (!) Докажите, что если последовательности (x_n) и (y_n) имеют пределы и $x_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

5.10. (!) Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $x_n \leq z_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ (**лемма о зажатой последовательности**).

5.11. (!) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ сдвинутая последовательность (y_n) , где $y_n = x_{n+k}$ имеет тот же предел $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Докажите аналогичное утверждение для последовательности (z_n) , где $z_n = 0$ при $1 \leq n \leq k$ и $z_n = x_{n-k}$ при $n > k$.

5.12. (!) Докажите, что если заменить конечное число элементов в сходящейся последовательности, то её предел не изменится.

5.13. Пусть последовательность (x_n) имеет предел. Докажите, что последовательность $(x_{\pi(n)})$, где $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — произвольная перестановка (биекция), будет иметь тот же предел.

5.14. (!) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

5.15. (!) Докажите, что если последовательность (x_n) , $x_n \neq 0$, сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 1/a$.

5.16. (!) Докажите, что если последовательность (x_n) , $x_n \neq 0$, имеет предел и $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 0$.

- 5.17. (!) Докажите, что если последовательность (x_n) , $x_n > 0$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = \infty$.
- 5.18. Приведите пример такой последовательности (x_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, что последовательность $1/x_n$ не имеет предела.
- 5.19. (!) Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Докажите, что последовательность $(x_n + y_n)$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- 5.20. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Что можно сказать о пределе $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$, если:
- последовательность (y_n) ограничена;
 - последовательность (y_n) не ограничена?
- 5.21. (!) Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Докажите, что последовательность $(x_n y_n)$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$.
- 5.22. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Следует ли из этого, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ для любой последовательности y_n ?
- 5.23. Пусть (x_n) — произвольная последовательность. Докажите, что существуют две последовательности (y_n) и (z_n) такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ и $x_n = y_n z_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
- 5.24. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Следует ли из этого, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?
- 5.25. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Что можно сказать о пределе последовательности $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$?
- 5.26. (!) Пусть $b_k \neq 0, a_m \neq 0$. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_0}$, если:
- $m = k$; б) $m > k$; в) $k > m$.
- 5.27. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Докажите, что последовательность $(\max\{x_n, y_n\})$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\}$.

5.28. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\min\{x_n, y_n\} \leq z_n \leq \max\{x_n, y_n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

5.29. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{(-2)^n + 3^{n+1}}$;
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n}\right)^n$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sin n}{n^2 - 1}$.
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

5.30. (!) Докажите следующие равенства:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$;
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, где $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$;
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^{n^{1/k}}} = 0$, где $k \in \mathbb{N}$, $a > 1$;
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, где $a > 0$;
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^{1/k}} = 0$, где $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$;
f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a^k n}{n} = 0$, где $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$;
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$;
h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;
i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$, где $a > 0$;
j) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$;
k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0$.

5.31. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + 1/n}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$;
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + n2^n)^{1/n}$.

5.32. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^{10} + n^2)}{n-2}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^3 + \ln^2 n)}{n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{8}} \cdot \cos n}$.
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + \ln n)}{n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{3}} \cdot \sin n}$;

- 5.33. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n!)^{1/n}$.
- 5.34. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^1 + 2^2 + \dots + n^n}{n^n}$.
- 5.35. Докажите равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{2n}^n)^{1/n} = 4$.
- 5.36. Пусть $a_1, \dots, a_k > 0$. Докажите равенства:
- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}{k} \right)^{1/n} = \max\{a_1, \dots, a_k\};$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^{-n} + a_2^{-n} + \dots + a_k^{-n}}{k} \right)^{-1/n} = \min\{a_1, \dots, a_k\}.$
- 5.37. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon) = \{a\}.$
- 5.38. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Докажите, что для любого числа $k \in \mathbb{N}$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i = a.$$
- 5.39. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $x_n > 0$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $k(n) \geq n$, что для всех $m \geq k(n)$ справедливо неравенство $x_m \leq x_{k(n)}$.
- 5.40. Докажите, что имеющая предел последовательность содержит монотонную подпоследовательность со строго возрастающими индексами.
- 5.41. (!) Пусть непустое множество $A \subseteq \mathbb{R}$ таково, что $\sup A \notin A$. Тогда найдётся строго возрастающая последовательность (x_n) такая, что $x_n \in A$ для всех n и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$.
- 5.42. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное задаче 5.41, для непустого множества $A \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\inf A \notin A$.

5.2. Монотонные и рекуррентно заданные последовательности

- 5.43. (!) Докажите, что если (x_n) монотонно возрастает, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, а если (x_n) монотонно убывает, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$

- 5.44. Докажите, что для последовательности (x_n) найдётся перестановка $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что последовательность $(x_{\pi(n)})$ строго монотонно возрастает тогда и только тогда, когда $x_n \neq x_m$ при любых $n \neq m$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и в множестве $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ нет наибольшего элемента.
- 5.45. (!) Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху, а последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и ограничена снизу. Выведите отсюда, что существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Этот предел называется *постоянной Эйлера* и обозначается символом e .
- 5.46. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n}$ имеет конечный предел.
- 5.47. (§ 6) Докажите, что существует конечный предел последовательностей:
- $x_n = \left(1 + \frac{\ln 1}{6}\right)\left(1 + \frac{\ln 2}{6^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\ln n}{6^n}\right)$;
 - $x_n = \left(1 + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{2}{6^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{6^n}\right)$.
- 5.48. Докажите, что существует конечный предел последовательностей:
- $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n(1 - 1/(2n))$;
 - $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n(1 + 1/2^n)$;
 - $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n(1 - 1/2^n)$;
- 5.49. Докажите, что существует предел последовательности x_n , и найдите его, если:
- $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{4x_n + 3}$;
 - $x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$;
 - $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{5x_n - 1}$;
 - $x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{5x_n + 4}$.
- 5.50. Пусть последовательность (x_n) определяется формулами $x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda$, то он удовлетворяет уравнению $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$.
- 5.51. Докажите, что существует предел последовательности (x_n) , и найдите его, если:
- $x_1 = \frac{3}{5}, x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - x_n^2$;
 - $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$;
 - $x_1 = \frac{1}{3}, x_{n+1} = \frac{10}{9}x_n - x_n^2$;
 - $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{5}{4}x_n - x_n^2$;
 - $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$.

- 5.52. Докажите, что существует предел последовательности (x_n) , и найдите его, если $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}$.
- 5.53. Докажите, что существует предел последовательности (x_n) , и найдите его, если:
- а) $x_1 = -1/2$, $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$;
 б) $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = 3x_n - x_n^2 - 1$.
- 5.54. Докажите, что существует предел последовательности (x_n) , и найдите его, если $x_1 = 3/2$, $x_{n+1} = (4x_n^2 - 5x_n + 2)^{1/3}$.
- 5.55. (§ 7) Пусть функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ возрастает. Докажите, что последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится, причём если f — непрерывная функция, то пределом последовательности (x_n) является неподвижная точка функции f , т. е. точка $c \in [0, 1]$, для которой верно равенство $f(c) = c$.
- 5.56. Докажите, что последовательность $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, где $x_1 = 1$ и $a > 0$, сходится и найдите её предел.
- 5.57. Пусть последовательность задана соотношениями $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Докажите, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, и найдите его. Найдите $a, \alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $0 < a = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x_n < \infty$.
- 5.58. Докажите, что найдутся такие целые числа q_n, r_n, s_n, t_n , что $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$. Найдите пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}$.
- 5.59. Докажите, что
- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin(\sin(\dots \sin x) \dots))}_n = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin(\sin(\dots \sin n) \dots))}_n = 0$.
- 5.60. (§ 13) Пусть последовательность (x_n) задана соотношениями $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \sin x_n$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sqrt{\frac{n}{3}} = 1$.
- 5.61. (§ 13) Пусть последовательность (x_n) задана соотношениями $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \arctg x_n$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sqrt{\frac{2n}{3}} = 1$.
- 5.62. (§ 13) Пусть последовательность (x_n) определена равенствами $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{2 \ln n}} = 1$.

- 5.63. Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ сходится.
- 5.64. Исследуйте сходимость последовательности

$$x_n = \sqrt{1 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \dots \cdot \sqrt{n}}}}.$$
- 5.65. Исследуйте сходимость последовательностей

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}$$
 и

$$y_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{2n}}}.$$
- 5.66. Докажите, что последовательность

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2^2 + \sqrt{3^3 + \dots + \sqrt{n^n}}}}$$
 имеет конечный предел.
- 5.67. Пусть $a_n \geq 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \dots + \sqrt{a_n}}}}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда величина $a_n^{1/2^n}$ ограничена сверху.
- 5.68. Пусть последовательность (x_n) определяется рекуррентно равенством $x_{n+1} = y_n x_n + z_n$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \neq 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = b$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b/(1-a)$.
- 5.69. Исследуйте сходимость последовательности (x_n) , заданной равенствами $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n + \frac{100}{n}$. Найдите предел последовательности (x_n) , если он существует.
- 5.70. (§ 7) Пусть $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ монотонно возрастающая непрерывная функция имеет единственную неподвижную точку $c \in [a, b]$, т. е. $f(c) = c$ и последовательность (z_n) такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Докажите, что рекуррентно заданная последовательность $x_{n+1} = f(x_n) + z_n$, $x_n \in [a, b]$ сходится к c .
- 5.71. Пусть последовательность (x_n) определяется формулами $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_{n+1} = x_n \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{n+2}$. Докажите существование $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и найдите этот предел.
- 5.72. Пусть последовательность (x_n) определяется формулами $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+1} = (x_{n-1} + x_n)/2$. Докажите существование $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и найдите этот предел.

- 5.73. (§ 5.5) Пусть последовательность (x_n) определяется формулами $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \frac{1}{n}x_{n-2} + \frac{n-1}{n}x_{n-1}$. Докажите существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и найдите его.
- 5.74. Определим последовательности (x_n) , (y_n) формулами $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_{n+1} = (2x_n + y_n)/3$, $y_{n+1} = (x_n + 2y_n)/3$. Докажите существование пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и найдите их.
- 5.75. Пусть $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta = 1$. Определим последовательности (x_n) , (y_n) формулами $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta y_n$, $y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n$. Докажите существование пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и найдите их.
- 5.76. Пусть последовательности (x_n) , (y_n) определяются формулами $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Докажите существование пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и их равенство.
- 5.77. Пусть последовательности (x_n) , (y_n) определяются формулами $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$. Докажите существование пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ и равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{ab}$.
- 5.78. Пусть последовательности (x_n) , (y_n) , (z_n) определяются формулами $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $z_1 = c > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{y_n z_n}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n z_n}$, $z_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (abc)^{1/3}$.
- 5.79. Определим функции $p_1(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}$, $p_2(x, y, z) = \frac{xy+yz+zx}{3}$, $p_3(x, y, z) = xyz$.
- а. Пусть последовательности (x_n) , (y_n) , (z_n) определяются формулами $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $z_1 = c > 0$, $x_{n+1} = p_1(x_n, y_n, z_n)$, $y_{n+1} = \frac{p_2(x_n, y_n, z_n)}{p_1(x_n, y_n, z_n)}$, $z_{n+1} = \frac{p_3(x_n, y_n, z_n)}{p_2(x_n, y_n, z_n)}$. Докажите существование пределов последовательностей (x_n) , (y_n) , (z_n) и равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = (abc)^{1/3}$.
- б. Пусть последовательности (x_n) , (y_n) , (z_n) определяются формулами $x_1 = a > 0$, $y_1 = b > 0$, $z_1 = c > 0$, $x_{n+1} = p_1(x_n, y_n, z_n)$, $y_{n+1} = (p_2(x_n, y_n, z_n))^{1/2}$, $z_{n+1} = (p_3(x_n, y_n, z_n))^{1/3}$. Докажите существование пределов последовательностей (x_n) , (y_n) , (z_n) и равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

5.3. Частичные пределы последовательности

- 5.80. (!) Докажите, что множество частичных пределов последовательности (x_n) и множество пределов подпоследовательностей (x_{n_k}) таких, что $n_k < n_{k+1}$, для всех $k \in \mathbb{N}$ совпадают.
- 5.81. (!) Докажите, что если $x_n \neq \sup\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
- 5.82. (!) Докажите, что если последовательность имеет предел, то все её подпоследовательности имеют тот же предел.
- 5.83. (!) Докажите, что последовательность имеет предел $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда множество её частичных пределов состоит из одной точки a .
- 5.84. Докажите, что последовательность (x_n) имеет предел a тогда и только тогда, когда из любой её подпоследовательности (x_{n_k}) можно извлечь подпоследовательность $(x_{n_{k_i}})$, имеющую предел a .
- 5.85. (!) Пусть $\mathbb{N} = I_1 \cup \dots \cup I_m$, где I_i бесконечные подмножества \mathbb{N} . Докажите, что если для любого j , $1 \leq j \leq m$, подпоследовательность последовательности (x_n) с множеством индексов I_j имеет предел, то множество частичных пределов последовательности (x_n) совпадает с множеством этих пределов.
- 5.86. Пусть найдётся $r \in \mathbb{N}$ такое, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nr+k} = L$ для всех $k = 0, 1, \dots, r-1$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$.
- 5.87. (!) Докажите, что число $a \in \mathbb{R}$ является частичным пределом последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда в любом интервале, содержащем точку a , содержится бесконечное число членов последовательности.
- 5.88. Докажите, что число $a \in \mathbb{R}$ является частичным пределом последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad (m \geq n, |x_m - a| \leq \varepsilon).$$

- 5.89. Докажите, что число $a \in \mathbb{R}$ является частичным пределом последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда $a \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$.

- 5.90. (! § 7) Докажите, что множество частичных пределов произвольной последовательности замкнуто в \mathbb{R} .
- 5.91. Докажите, что множества $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ не являются множествами частичных пределов никаких последовательностей.
- 5.92. Докажите, что множества $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $[0, 1]$ являются множествами частичных пределов некоторых последовательностей.
- 5.93. Пусть подпоследовательности (x_{2n}) , (x_{2n-1}) и (x_{5n}) имеют пределы. Докажите, что последовательность x_n имеет предел.
- 5.94. Пусть подпоследовательности (x_{2n}) , (x_{2n-1}) и (x_{n^2}) имеют пределы. Докажите, что последовательность (x_n) имеет предел.
- 5.95. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и подпоследовательности (x_{pn}) и (x_{qn}) имеют пределы. Докажите, что они равны.
- 5.96. Приведите пример последовательности (x_n) , которая не сходится, однако для каждого натурального $k \geq 2$ сходится подпоследовательность (x_{kn}) .
- 5.97. Найдите множество частичных пределов последовательностей
 а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$; б) $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- 5.98. (§ 7) Докажите, что для любого непустого замкнутого в $\overline{\mathbb{R}}$ множества F существует последовательность (x_n) , множество всех частичных пределов которой совпадает с F .
- 5.99. (!) Пусть (x_n) — ограниченная последовательность. Определим последовательности $y_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$, $z_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}$. Докажите, что
 а) существуют $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$;
 б) найдутся такие подпоследовательности (x_{k_m}) , (x_{i_m}) , что $Y = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_m}$, $Z = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{i_m}$;
 в) $Y = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, $Z = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, т. е. верхний и нижний пределы существуют у любой ограниченной последовательности.
- 5.100. (!) Докажите, что ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность (**теорема Вейерштрасса**).
- 5.101. (!) Докажите, что если последовательность (x_n) неограничена, то у неё найдётся подпоследовательность, имеющая предел $+\infty$ или $-\infty$.

5.102. (!) Докажите, что любая последовательность (x_n) имеет верхний и нижний пределы в \mathbb{R} .

5.103. Вычислите $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$, где

а) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$; с) $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$.

б) $x_n = 1 + 2(-1)^n + 3(-1)^{n(n+1)/2}$;

5.104. Найдите $\underline{\lim} x_n$, $\overline{\lim} x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$ для последовательностей

а) $x_n = \sin \frac{\pi n}{3} (1 + \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{2})$; б) $x_n = \cos \frac{\pi n}{3} (1 + \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n}{2})$.

5.105. Вычислите $\overline{\lim} x_n$ и $\underline{\lim} x_n$, где

а) $x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; е) $x_n = \frac{n^2}{3} - \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$;

б) $x_n = \log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor$; ф) $x_n = n - \frac{5}{n} - 5 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$;

с) $x_n = (n)^{1/3} - \lfloor n^{1/3} \rfloor$; г) $x_n = \frac{n^2}{4} - \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$;

д) $x_n = \log_3 n - \lfloor \log_3 n \rfloor$; х) $x_n = n - \frac{4}{n} - 4 \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.

5.106. Докажите неравенства, предполагая, что все суммы определены:

а) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

б) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Постройте примеры, когда в этих соотношениях имеются строгие неравенства.

5.107. Пусть $x_n \geq 0$ и $y_n \geq 0$. Докажите неравенства, предполагая, что все произведения пределов определены:

а) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

б) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Постройте примеры, когда в этих соотношениях имеются строгие неравенства.

5.108. Докажите, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то:

а) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

б) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

5.109. Докажите, что если $x_n \geq 0$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, то:

а) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

б) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

5.110. Пусть (x_{n_k}) — подпоследовательность последовательности (x_n) . Докажите неравенства $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

5.111. Пусть $x_n > 0$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 1/x_n = 1$. Докажите, что последовательность (x_n) сходится.

5.112. (§ 7) Пусть функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и последовательность (x_n) удовлетворяет равенству $f(x_{n+1}) = g(x_n)$. Докажите, что найдётся точка $x \in [a, b]$ такая, что $f(x) = g(x)$.

5.113. Докажите, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность со строго возрастающими индексами.

5.114. Докажите, что последовательность (x_n) не имеет предела, если:

а) $x_n = \sin 2^n$; в) $x_n = \sin n^2$.

б) $x_n = \sin 4^n$;

5.115. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{1}{n \sin n}$ не имеет предела.

5.116. Найдите $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, где

а) $x_n = \{\alpha n\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x ;

б) $x_n = \sin n$.

5.117. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Докажите, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = 1$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = 0$.

5.118. Докажите, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{n}) = 1$.

5.119. Докажите, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = 1$.

5.120. Найдите множество частичных пределов последовательностей

а) $x_n = \sin(n^{2/3})$; б) $x_n = \sin(\ln n)$.

- 5.121. Докажите, что для любой последовательности (x_n) , $x_n \neq 0$ справедливо неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right) / x_n \geq 4$.
- 5.122. Докажите, что для любой ограниченной последовательности (x_n) , $x_n > 0$ справедливо равенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ((x_1 + x_{n+1})/x_n)^n = \infty$.
- 5.123. (§ 5.5) Докажите, что для любой последовательности $x_n > 0$ справедливо неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ((x_1 + x_{n+1})/x_n)^n \geq e$. Покажите, что это неравенство нельзя усилить.

5.4. Критерий Коши и другие свойства предела последовательности

- 5.124. (!) Докажите, что если последовательность имеет конечный предел, то она фундаментальна.
- 5.125. (!) Пусть $x_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. Докажите, что для любого $m \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+m} - x_n) = 0$, однако (x_n) не фундаментальна.
- 5.126. Докажите, что если найдётся $\varepsilon > 0$, для которого $|x_n - x_m| > \varepsilon$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, то последовательность x_n не ограничена.
- 5.127. Докажите, что если $|x_n - x_m| > 1/n$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$ при $n < m$, то последовательность (x_n) не ограничена.
- 5.128. Докажите, что найдётся такая ограниченная последовательность, что $|x_n - x_m| \geq 1/(m - n)$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$ при $n < m$.
- 5.129. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n = 0$.
- 5.130. Докажите, что если $0 \leq x_{m+n} \leq x_n + x_m$, то существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n$.
- 5.131. (!) Докажите, что если фундаментальная последовательность (x_n) имеет сходящуюся подпоследовательность, то последовательность (x_n) сходится.
- 5.132. (!) Докажите, что последовательность сходится (имеет конечный предел) тогда и только тогда, когда она фундаментальна (**критерий Коши**).

- 5.133. Докажите, что последовательность (x_n) сходится тогда и только тогда, когда справедливо любое из утверждений:
- $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{m_k}) = 0$ для любых подпоследовательностей (x_{n_k}) и (x_{m_k}) ;
 - $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_{m_k}) = 0$ для любой подпоследовательности (x_{m_k}) ;
 - $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{m_{k+1}} - x_{m_k}) = 0$ для любой подпоследовательности (x_{m_k}) ;
 - $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{m_{2k}} - x_{m_k}) = 0$ для любой подпоследовательности (x_{m_k}) .
- 5.134. Пусть существует такое $C \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_n - x_{n-1}| \leq C$. Докажите, что последовательность (x_n) сходится.
- 5.135. Пусть последовательность (x_n) такова, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_{n+1} - x_n| \leq Cq^n$, где $0 < q < 1$. Докажите, что последовательность (x_n) сходится.
- 5.136. Пусть последовательность (x_n) удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_{n+k} - x_n > -\varepsilon$. Докажите, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > -\infty$.
- 5.137. (!) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$.
- 5.138. (!) Используя неравенство $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$, докажите, что
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \infty$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^t} < \infty$ для всех $t \geq 2$.
- 5.139. (!) Докажите неравенство $\frac{1}{(k+1)^{1+1/m}} \leq m \left(\frac{1}{k^{1/m}} - \frac{1}{(k+1)^{1/m}} \right)$ для любых $k, m \in \mathbb{N}$. Из этого неравенства выведите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ при $\alpha > 1$.
- 5.140. Докажите, что последовательность $x_n = \sin n$ не имеет предела.
- 5.141. Пусть (x_n) и (y_n) фундаментальные последовательности и для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие числа $m_1 > n$ и $m_2 > n$, что $x_{m_1} \leq y_{m_1}$ и $x_{m_2} \geq y_{m_2}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.
- 5.142. Пусть (x_n) — ограниченная последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = 0$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n+1}) = 0$.

- 5.143. Пусть $(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что
- существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
 - существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$.
- 5.144. Приведите пример такой ограниченной последовательности (x_n) , что $|x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}| \leq \frac{1}{n^2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность (x_n) не имеет предела.
- 5.145. (!) а) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $z_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.
- б) Пусть $\lambda_j > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = a$.
- 5.146. (!) Пусть $x_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $z_n = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.
- 5.147. Пусть $x_n > 0$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}/x_n = a$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{1/n} = a$.
- 5.148. Пусть для последовательности (x_n) справедливы следующие соотношения: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_{n+1} - x_n) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность (x_n) сходится и найдите её предел.
- 5.149. Докажите, что для любой последовательности (x_n) , $x_n > 0$ справедливы неравенства $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{1/n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.
- 5.150. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, (y_n) — ограниченная последовательность и $z_n = \frac{1}{n}(x_1 y_n + \dots + x_k y_{n-k+1} + \dots + x_n y_1)$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.
- 5.151. Пусть $z_n = \frac{1}{n}(x_1 y_n + \dots + x_k y_{n-k+1} + \dots + x_n y_1)$, где (x_n) и (y_n) — сходящиеся последовательности. Докажите равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

- 5.152. Пусть $y_{n+1} > y_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$.
Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$ (**теорема Штольца**).

5.5. Свойства числа e

- 5.153. (!) Докажите равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1/e$.
- 5.154. (!) Докажите, что для любого $x \in \mathbb{R}$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- 5.155. (!) Пусть $|x_n| \leq C/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = 1$.
- 5.156. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = 1$.
- 5.157. (!) Докажите, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$.
- 5.158. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^k$.
- 5.159. Пусть $p_n \rightarrow \infty$, $q_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$.
- 5.160. Найдите предел последовательности x_n , если
- а) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n+4}\right)^n$; с) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
б) $x_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n$; д) $x_n = (1 + n^2)^{1/n}$.
- 5.161. (§ 9) Докажите, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p}$ монотонно убывает тогда и только тогда, когда $p \geq \frac{1}{2}$.
- 5.162. (§ 13) Докажите неравенство $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n^2}}$.
- 5.163. (!) Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$.
- 5.164. Докажите, что при $n \geq 2$ справедливо равенство $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} = 3 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} - \dots - \frac{1}{(n-1)n \cdot n!}$.
Вычислите предел последовательности $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)n \cdot n!}$.

5.165. (!) Докажите, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n.$$

5.166. Докажите, что $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$, где $0 < \theta_n < 1$.

5.167. Докажите, что $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.168. Докажите, что $e^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.169. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = 2\pi$.

5.170. Пусть A_n — число перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, не оставляющее ни одного элемента неподвижным. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n!} = \frac{1}{e}$.

5.171. Докажите равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$.

5.172. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \underbrace{\left(n! + \left(n! + \dots + (n!)^{1/n} \dots \right)^{1/n} \right)^{1/n}}_n = \frac{1}{e}$.

5.173. Докажите неравенство $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

5.174. Докажите неравенство $n! < e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

5.175. Докажите, что при любом $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m i \frac{m^{m-i}}{(m-i)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i \frac{m^{m+i}}{(m+i)!}.$$

5.176. Докажите, что при любом $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!} e^{-m} < 1/2; \quad \text{b) } \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} e^{-m} > 1/2.$$

5.177. Докажите равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} (1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots + \frac{n^n}{n!}) = \frac{1}{2}$.

5.178. Докажите, что при любом $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=0}^m \frac{m^i}{i!} e^{-m} > \sum_{i=0}^{m+1} \frac{(m+1)^i}{i!} e^{-(m+1)}.$$

5.179. (!) Докажите неравенство $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

- 5.180. Докажите, что $\ln(1+p) < p$ при $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, p > -1$ и $1+p < e^p$ при $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- 5.181. (!) Вычислите пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + 1/n)$.
- 5.182. Найдите предел последовательности (x_n) , если:
- a) $x_n = \sqrt{n} \ln(1 + \frac{1}{n})$; c) $x_n = n \ln(1 + \frac{1}{n^2})$;
b) $x_n = 2^n \log_2(1 + \frac{1}{2^n})$; d) $x_n = \frac{1}{n} \ln(1 + n^2)$.
- 5.183. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{kn})$ при $k \in \mathbb{N}$.
- 5.184. Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ сходится. Предел этой последовательности называется *постоянной Эйлера* и обозначается буквой C .
- 5.185. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2}$ сходится.
- 5.186. Пусть $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2$.

5.6. Дополнения

- 5.187. Докажите, что последовательность (x_n) фундаментальна тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} |x_{n+k} - x_n| = 0$.
- 5.188. (§ 6) Пусть последовательность (x_n) стремится к нулю. Докажите, что можно выбрать подпоследовательность так, чтобы сходился ряд $\sum_{k \geq 1} x_{n_k}$.
- 5.189. (§ 6) Докажите, что для любой последовательности (x_n) пределы существуют одновременно и имеется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+k}}{2^n}$.
- 5.190. (§ 13) Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{n}$ при любом $x \in \mathbb{R}$.
- 5.191. Пусть $x_1 = a$, $x_n = a^{x_{n-1}}$. При каких $a > 1$ последовательность (x_n) имеет конечный предел?
- 5.192. Пусть $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$. При каких $a > 0$ последовательность (x_n) имеет конечный предел?

- 5.193. Докажите, что если $0 \leq x_{m+n} \leq 2(x_n + x_m)$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$, то существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/n^2$.
- 5.194. Докажите, что если $0 \leq x_{m+n} \leq x_n x_m$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$, то существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{1/n}$.
- 5.195. Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $a = a_0 + a_1 n + \dots + a_t n^t$, $0 \leq a_i < n$, — n -ичное представление числа a . Определим число $F_n(a) = a_0 + a_1(n+1) + \dots + a_t(n+1)^t$. Пусть $x_{n+1} = F_n(x_n) - 1$, вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- 5.196. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n n$ и $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n n}$.
- 5.197. (§ 6) Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 0} \cos^n n$ расходится.
- 5.198. (§ 6, § 7) Пусть $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k}$, где последовательность (x_n) не убывает. Докажите, что $x_n \sim n$ тогда и только тогда, когда $y_n \sim n$ при $n \rightarrow \infty$.
- 5.199. (§ 6) Пусть последовательность (x_n) удовлетворяет условиям:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} \geq 0$. Доказать, что
 а) $x_n \geq 0$ и x_n убывает (нестрого);
 б) $x_n - x_{n+1} = o(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$;
 в) ряд $\sum_{n \geq 1} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2})$ сходится.

6. Ряды

Для любой последовательности (x_n) выражение $\sum_{n \geq 1} x_n$ называется числовым *рядом*, а суммы $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ называются *частичными суммами* этого ряда. Ряд называется *сходящимся*⁸, если последовательность (s_n) сходится, в противном случае ряд называется *расходящимся*. Предел последовательности частичных сумм обозначается через $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и называется *суммой ряда*. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ сходится. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся*.

⁸ Нередко вместо термина «сходящийся» используют термин «суммируемый».

6.1. Ряды из положительных слагаемых

6.1. (!) Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

6.2. (!) Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 \left| \sum_{i=n}^m x_i \right| \leq \varepsilon$$

(критерий Коши сходимости ряда).

6.3. (!) Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

6.4. Выясните, сходятся ли ряды:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; c) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n-1}}$;

6.5. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n \geq 1} x_{n+k}$.

6.6. Докажите, что если ряды $\sum_{n \geq 1} x_n$ и $\sum_{n \geq 1} y_n$ сходятся, то и ряд $\sum_{n \geq 1} (x_n + y_n)$ сходится, причём $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$.

6.7. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится, а ряд $\sum_{n \geq 1} y_n$ расходится, то ряд $\sum_{n \geq 1} (x_n + y_n)$ расходится.

6.8. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n \geq 1} y_n$ сходится условно, то ряд $\sum_{n \geq 1} (x_n + y_n)$ сходится условно.

6.9. Приведите примеры, показывающие, что сумма двух расходящихся рядов может быть сходящимся рядом, а сумма двух условно сходящихся рядов может быть как условно, так и абсолютно сходящимся рядом.

6.10. (!) Докажите, что если изменить конечное число слагаемых ряда, то наличие свойства сходимости ряда не изменится.

- 6.11. (!) Докажите, что если $|x_n| \leq y_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} y_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ абсолютно сходится (**признак сравнения**).
- 6.12. Докажите, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{|y_n|} = a$ и $0 < a < \infty$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n \geq 1} y_n$ абсолютно сходится.
- 6.13. Пусть $a_n > 0$. Докажите, что ряды $\sum_{n \geq 1} a_n$ и $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$ сходятся или расходятся одновременно.
- 6.14. Докажите, что если $z_n \leq x_n \leq y_n$ и ряды $\sum_{n \geq 1} z_n$ и $\sum_{n \geq 1} y_n$ сходятся, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится.
- 6.15. Покажите, что в предыдущей задаче условие $z_n \leq x_n \leq y_n$ нельзя заменить на условие $\min\{z_n, y_n\} \leq x_n \leq \max\{z_n, y_n\}$.
- 6.16. Постройте пример таких двух монотонных последовательностей a_n, b_n , что ряды $\sum_{n \geq 1} a_n$ и $\sum_{n \geq 1} b_n$ расходятся, а ряд $\sum_{n \geq 1} \min\{a_n, b_n\}$ сходится.
- 6.17. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$, если $x_1 = 2, x_n = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + 1$.
- 6.18. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
- 6.19. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
- 6.20. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
- 6.21. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
- 6.22. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Докажите равенства
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{(n+1)^2}.$$

6.23. (!) Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} q^n$ сходится (абсолютно) тогда и только

тогда, когда $|q| < 1$ и найдите его сумму $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

6.24. Докажите, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = q$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{q_1^n} = 0$ при $q_1 > q$.

6.25. Докажите, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно.

6.26. (!) Пусть существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = q$. Докажите, что если $q > 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится, а если $q < 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно (**признак Даламбера**).

6.27. (!) Пусть $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n} = q$. Докажите, что если $q > 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится, а если $q < 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно (**признак Коши**).

6.28. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ удовлетворяет признаку сходимости Даламбера, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ удовлетворяет признаку сходимости Коши.

6.29. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+k}}{x_n} \right| = q$. Докажите, что если $q > 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится, а если $q < 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно.

6.30. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{(4n)!}{3^{4n}(n!)^4}; & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{((2n)!)^{1/2}}{3^n n!}; \\ \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(3n)!}{4^{3n}(n!)^3}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{((2n)!)^{1/3}}{n!}; \\ \text{c)} \sum_{n \geq 1} \frac{(3n)!}{5^{3n}(n!)^2}; & \text{g)} \sum_{n \geq 1} \frac{((3n)!)^{1/3}}{2^n n!}; \\ \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{(4n)!}{(n!)^5}; & \text{h)} \sum_{n \geq 1} \frac{((3n)!)^{1/2}}{5^n n!}. \end{array}$$

6.31. При каких $p > 0$ сходится ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{p^n n!}{n^n}$?

- 6.32. При каких $k \in \mathbb{Z}$ сходится ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{n^k}{2^n}$?
- 6.33. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{(n+1/n)}}{(n+1/n)^n}$.
- 6.34. (!) Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} n^k a^n$, где $0 < a < 1$, сходится при любом $k \in \mathbb{R}$.
- 6.35. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} n^k a^{n^\alpha}$, где $0 < a < 1$, сходится при любых $\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{R}$.
- 6.36. Выясните, сходятся ли ряды:
- а) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$; с) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.
- б) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n}$;
- 6.37. (!) Пусть (x_n) — монотонно убывающая последовательность и $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряды $\sum_{n \geq 1} x_n$ и $\sum_{n \geq 1} 2^n x_{2^n}$ сходятся или расходятся одновременно (**телескопический признак** сходимости ряда).
- 6.38. (!) Выясните при каких $a \in \mathbb{R}$ сходятся ряды:
- а) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$; с) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log_b n (\log_b \log_b n)^a}$.
- б) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log_b^a n}$;
- 6.39. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = a \neq 0$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится.
- 6.40. Пусть $x_n > 0$ и найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $nx_{kn} \geq x_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится.
- 6.41. Пусть неотрицательная последовательность (x_n) монотонно убывает и ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$.
- 6.42. (§ 7) Докажите, что не существует такой функции $\varphi(n)$, что $\varphi(n) = o(1/n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\varphi(n)} = 0$ для любой монотонно убывающей неотрицательной последовательности (x_n) такой, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится.

6.43. Пусть $x_n \geq 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$.

6.44. Докажите, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/\ln n} < 1/e$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно.

6.45. Докажите, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |nx_n|^{1/\ln \ln n} < 1/e$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно.

6.46. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$.

6.47. Пусть $\nu(n)$ — число цифр в десятичной записи числа $n \in \mathbb{N}$. Исследуйте сходимость рядов:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\nu(n)}{n^2}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\nu(n)n}.$$

6.48. Итеративным логарифмом $\mu(p)$ числа $p > 1$ называется количество возможных итераций логарифмирования числа p , т. е. $\ln p \geq 1, \dots, \underbrace{\ln(\ln \dots (\ln p) \dots)}_{\mu(p)-1} \geq 1, \underbrace{\ln(\ln(\ln \dots (\ln p) \dots))}_{\mu(p)} < 1$.

Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} 1/x_n$ сходится, если $x_n = e^{\mu(n)} n \cdot (\ln n) \cdot \dots \cdot \underbrace{(\ln(\ln \dots (\ln n) \dots))}_{\mu(n)}$, и расходится, если $x_n = n \cdot (\ln n) \cdot (\ln \ln n) \cdot \dots \cdot \underbrace{(\ln(\ln \dots (\ln n) \dots))}_{\mu(n)}$.

6.49. Пусть $b_n = 1/n$, если в десятичном разложении числа n содержится цифра 9 и $b_n = 0$ в противном случае. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ расходится.

6.50. Пусть $b_n = 1/n$, если в десятичном разложении числа n не содержится цифры 9 и $b_n = 0$ в противном случае. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится.

6.51. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln 2n}{n^{3/2}}; & \text{e) } \sum_{n \geq 1} \frac{(\ln 3n)^2}{n^{3/2+1}}; \\ \text{b) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2} + n \ln n}; & \text{f) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{4/3} - n}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n(\log_2 \log_2 n)^4}; & \text{g)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{1/2}(\ln n)^4}; \\ \text{d)} \sum_{n \geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n+n^2 \ln n}; & \text{h)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{5n+n \ln n}. \end{array}$$

6.52. Пусть (x_n) — строго убывающая последовательность, причём $x_n \geq 0$ и $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что ряды $\sum_{n \geq 1} 2^n x_n$ и $\sum_{n \geq 1} 2^n (x_n - x_{n+1})$ сходятся или расходятся одновременно.

6.53. Пусть задана последовательность (a_n) такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $a_n \geq 0$ и p_m — наибольший из номеров элементов последовательности, удовлетворяющих неравенству $a_n \geq 2^{-m}$. Докажите, что ряды $\sum_{n \geq 1} a_n$ и $\sum_{m \geq 1} p_m 2^{-m}$ сходятся или расходятся одновременно (**признак Лобачевского**).

6.54. Пусть (x_n) — монотонно убывающая неотрицательная последовательность и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n x_{2^n}}{x_n} = q$. Докажите, что если $q > 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится, а если $q < 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится.

6.55. Пусть $x_n > 0$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n} = q$. Докажите, что при $q > 1$ ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится, а при $q < 1$ — расходится (**логарифмический признак сходимости ряда**).

6.56. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}; & \text{d)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\ln \ln n}}; \\ \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}; & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(3/2)^{\ln n}}. \\ \text{c)} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}; & \end{array}$$

6.57. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n \geq 1} 1/x_n$, где (x_n) — последовательность положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} \sqrt{x}$, занумерованных в порядке возрастания.

6.58. Пусть x_n — положительный корень уравнения $x^k - x - n = 0$, где $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} 1/x_n$ расходится.

6.59. Пусть $x_n \geq 0$. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится, то и ряд

$\sum_{n \geq 1} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ сходится. Докажите, что обратное верно, если последовательность (x_n) монотонно убывает.

6.60. Пусть последовательность (x_n) монотонно убывает, причём $x_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится. Докажите, что и ряд $\sum_{n \geq 1} x_n e^{(-x_n/x_{n+1})}$ расходится.

6.61. Докажите, что если $a_n > 0$, $b_n > 0$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ при любых $n \in \mathbb{N}$, то из сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} a_n$.

6.62. Пусть $(b_n), (c_n)$ — последовательности положительных чисел и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - c_{n+1} > 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится (**признак Куммера**).

6.63. Пусть $(b_n), (c_n)$ — последовательности положительных чисел, ряд $\sum_{n \geq 1} 1/c_n$ расходится и $c_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ расходится.

6.64. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| - 1 \right) > 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ абсолютно сходится, а если $n \left(\left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| - 1 \right) \leq 1$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ расходится (**признак Раабе**).

6.65. Пусть (a_n) — последовательность положительных чисел и для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^\tau}$, где $\tau > 1$ и $|\theta_n| < L < \infty$. Докажите, что

а) при $\lambda > 1$, а также при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ сходится;

б) при $\lambda < 1$, а также при $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$ ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ расходится

(**признак Гаусса**).

6.66. (§ 13) Выясните, при каких $p > 0$ и $q \in \mathbb{R}$ сходятся ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sum_{n \geq 1} \frac{p(p+1) \cdots (p+n-1)}{n! n^q}; & \text{с) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p; \\ \text{б) } \sum_{n \geq 1} \frac{n! n^{-q}}{p(p+1) \cdots (p+n-1)}; & \text{д) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^q} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p. \end{array}$$

- 6.67. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (1 - |b_n|^{1/n}) > 1$, то ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ абсолютно сходится, а если $\frac{n}{\ln n} (1 - |b_n|^{1/n}) \leq 1$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ расходится (**признак Жамэ**).
- 6.68. Докажите, что если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + a_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ сходится, то последовательность (b_n) имеет конечный предел.
- 6.69. (§ 7) Докажите, что если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + a_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ сходится, то $b_n \asymp \frac{1}{n^p}$ при $n \rightarrow \infty$.
- 6.70. Докажите, что если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + a_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.
- 6.71. Пусть (x_n) — монотонно возрастающая ограниченная последовательность и $x_n > 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} (1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$ сходится.
- 6.72. Пусть (x_n) — монотонно возрастающая неограниченная последовательность и $x_n > 0$. Докажите, что ряды $\sum_{n \geq 1} (1 - \frac{x_n}{x_{n+1}})$ и $\sum_{n \geq 1} (\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1)$ расходятся.
- 6.73. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n S_n^\alpha}$?
- 6.74. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ расходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{s_n}$, где $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, расходится.
- 6.75. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ расходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{s_n^\alpha}$, где $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, сходится при любом $\alpha > 1$.
- 6.76. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ расходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{s_n \ln s_n}$, где $s_n = \sum_{i=1}^n a_i > 1$, расходится.

6.77. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ расходится. Докажите, что ряд

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{s_n \ln s_n^2}, \text{ где } s_n = \sum_{i=1}^n a_i > 1, \text{ сходится.}$$

6.78. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$,

$$\text{где } r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i, \text{ сходится.}$$

6.79. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ сходится. Пусть $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{r_n^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

6.80. (§ 13) Выясните, при каких α сходятся ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n \geq 1} (a^{1/n} - 1)^\alpha; & \text{c) } \sum_{n \geq 1} ((1 + \frac{1}{n})^{n+1} - e)^\alpha; \\ \text{b) } \sum_{n \geq 1} (n^{1/n} - 1)^\alpha; & \text{d) } \sum_{n \geq 1} (1 - n \sin(1/n))^\alpha. \end{array}$$

6.2. Знакопеременные ряды

6.81. (!) Пусть (a_n) — монотонно убывающая неотрицательная последовательность. Докажите, что $|\sum_{n=k}^m (-1)^n a_n| \leq a_k$ при любом $m \geq k$.

6.82. (!) Пусть (a_n) — монотонно убывающая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ сходится (**признак Лейбница**).

6.83. Выясните, сходятся ли абсолютно или условно ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^{1/2}}; & \text{e) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln \ln n}}; \\ \text{b) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}; & \text{f) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln \ln n}; \\ \text{c) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-\ln n)^n}{n}; & \text{g) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(2n+1)!!}; \\ \text{d) } \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}}; & \end{array}$$

6.84. Пусть (a_n) — монотонно убывающая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Докажите, что

а) ряд $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{s_n}{n}$, где $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, сходится;

б) ряд $\sum_{n \geq 1} (-1)^n p_n$, где $p_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$, сходится.

6.85. (!) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \cdots \geq 0$ и $|\sum_{i=1}^k b_i| \leq h$ при любом k , $1 \leq k \leq n$. Докажите, что $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq a_1 h$ (неравенство Абеля).

6.86. (!) Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ сходится, если ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится и (a_n) — монотонная ограниченная последовательность (**признак Абеля**).

6.87. (!) Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ сходится, если частичные суммы ряда $\sum_{n \geq 1} b_n$ ограничены, (a_n) — монотонная последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (**признак Дирихле**).

6.88. Приведите примеры, показывающие, что признаки Абеля и Дирихле не являются необходимыми условиями сходимости ряда.

6.89. (!) Докажите, что если $\sum_{n \geq 1} a_n$ — абсолютно сходящийся ряд, а $\sum_{n \geq 1} b_n$ — условно сходящийся ряд, то ряд $\sum_{n \geq 1} (a_n + b_n)$ сходится условно.

6.90. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(-1)^n + 2}{n}$. Можно ли в данном случае применить признаки сходимости Абеля и Дирихле?

6.91. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ сходится, если ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится и ряд $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится (**признак Дюбуа — Реймона**).

6.92. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ сходится, если частичные суммы ряда $\sum_{n \geq 1} b_n$ ограничены, ряд $\sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n+1})$ абсолютно сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (**признак Дедекинда**).

6.93. Пусть последовательность (b_n) периодическая (т. е. $b_{n+t} = b_n$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$), причём $b_1 + b_2 + \dots + b_t = 0$, а (a_n) — монотонная последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ сходится.

6.94. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ сходится условно, то найдётся такая последовательность (b_n) , что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ расходится.

6.95. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ сходится условно, то найдётся такая ограниченная последовательность (b_n) , $b_n > 0$, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ расходится.

6.96. Докажите, что при $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, справедливы равенства:

a) $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}};$

b) $\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$

6.97. (!) Выясните, сходятся ли ряды:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n};$ c) $\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n}.$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 n}{n};$

6.98. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \alpha n}{n}$?

6.99. Выясните, сходятся ли ряды:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n^2) \sin n}{n};$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n^2) \sin n}{n}.$

6.100. Выясните, сходятся ли ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

6.101. Выясните, сходятся ли абсолютно или условно ряды:

a) $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots;$

b) $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots;$

c) $\frac{1}{1^p} - \frac{2}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \dots$

6.102. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}; & \text{c)} \sum_{n \geq 2} \sin(n + \frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{n}). \\ \text{b)} \sum_{n \geq 2} \frac{\cos(1 + \frac{1}{n})}{\ln n}; & \end{array}$$

6.103. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}; & \text{c)} \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{\ln n}; \\ \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \cos 1/n}{\sqrt{n}}; & \text{d)} \sum_{n \geq 1} (-1)^n (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n). \end{array}$$

6.104. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{\ln n}; & \text{d)} \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n^{\frac{1}{n}} \sin \frac{n^2-5}{n^3-6n}}{\ln n}; \\ \text{b)} \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{\ln n}; & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln^{1/3} n}{|n^{1/8} - 100|}. \\ \text{c)} \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \operatorname{tg} \frac{n^2-7n}{n^4-10n}}{\ln n}; & \end{array}$$

6.105. Выясните, сходятся ли абсолютно или условно ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+2(-1)^n}; & \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n - \sin n}; \\ \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}; & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + \cos n}. \\ \text{c)} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n+2 \sin n}; & \end{array}$$

6.106. При каких α , $1 \geq \alpha \geq 0$, ограничены частичные суммы последовательности $x_n = (-1)^{\lfloor n^\alpha \rfloor}$?

6.107. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}; & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}. \end{array}$$

6.108. Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin 2n \cdot \operatorname{arctg} n}{n}; & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos^3(\pi n/4) \ln^2 n}{n}; \\ \text{b)} \sum_{n \geq 2} \frac{\sin^3(\pi n/3) \ln^3 n}{n}; & \text{g)} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^4(\pi n/3) - 3/8}{\sqrt{n}}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \sum_{n \geq 2} \frac{\cos^2(\pi n/4) - 1/2}{\ln n}; & \text{h)} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\pi n/3) + \cos^2(\pi n/2)}{(\ln^4 n) \sqrt{n}}; \\ \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi n/2) + \sin^2(\pi n/3)}{(\ln n) \sqrt{n}}; & \text{i)} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^3(\pi n/3)}{\arctg n}; \\ \text{e)} \sum_{n \geq 2} \frac{\cos 3n \cos(1/n)}{\ln n}; & \text{j)} \sum_{n \geq 2} \frac{\sin^2(\pi n/4) - 1/3}{\ln n}. \end{array}$$

6.109. Выясните, сходится ли ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{\ln n + \sin n}$.

6.110. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ сходятся ряды:

$$\text{a)} \sum_{n \geq 2} \frac{\sin n \cdot \ln n}{n^\alpha}; \quad \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1) \cdot \cos n}{n^\alpha \cdot \ln n}; \quad \text{c)} \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^n}?$$

6.111. (§ 13) Выясните, сходятся ли ряды:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right); & \text{c)} \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{(n+1)^{2/3}}\right); \\ \text{b)} \sum_{n \geq 1} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}); & \text{d)} \sum_{n \geq 1} 1 - e^{(-1)^n \sin \frac{1}{n}}. \end{array}$$

6.3. Перестановки и некоторые другие преобразования рядов

6.112. (!) Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится, то ряд $\sum_{n \geq 1} X_n$, где

$X_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} x_i$ ($p_1 = 1$, $0 < p_{n+1} - p_n$), полученный в результате произвольной группировки членов ряда $\sum_{n \geq 1} x_n$, сходится к той же сумме. Приведите пример расходящегося ряда, некоторая группировка которого сходится.

6.113. (!) Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} X_n$,

где $X_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} x_i$, полученный в результате ограниченной ($0 < p_{n+1} - p_n \leq k$) группировки членов ряда $\sum_{n \geq 1} x_n$, сходятся или расходятся одновременно и имеют одинаковые суммы.

6.114. Докажите, что если $x_n \geq 0$, то ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} X_n$, где

$X_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} x_i$, полученный в результате группировки членов ряда

$\sum_{n \geq 1} x_n$, сходятся или расходятся одновременно и имеют одинаковые суммы.

6.115. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ и ряд $\sum_{n \geq 1} X_n$, где $X_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} x_i$, полученный в результате группировки членов ряда $\sum_{n \geq 1} x_n$ одного знака в каждой группе, сходятся или расходятся одновременно и имеют одинаковые суммы.

6.116. Докажите, что слагаемые условно сходящегося ряда можно сгруппировать так, что полученный ряд будет абсолютно сходящимся, причём все его слагаемые, кроме, быть может, первого, имеют одинаковый знак.

6.117. Ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ называется *сходящимся по Чезаро*, если имеется ко-

нечный предел последовательности $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$, где $s_k = \sum_{i=1}^k x_i$. Этот предел называется *суммой ряда по Чезаро*. Докажите, что

а) если ряд сходится, то он сходится по Чезаро, причём сумма ряда и сумма ряда по Чезаро совпадают;

б) сходимости ряда из положительных слагаемых следует из его сходимости по Чезаро;

с) из сходимости ряда по Чезаро не следует сходимости ряда.

6.118. Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится по Чезаро и $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится к той же сумме.

6.119. Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится по Чезаро. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$.

6.120. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum_{k \geq 1} x_{n_k}$ сходится абсолютно для любой подпоследовательности (x_{n_k}) .

6.121. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится и перестановка $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ переставляет слагаемые не далее, чем на k позиций, т. е. $|\sigma(n) - n| \leq k$, то и ряд $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ сходится и имеет ту же сумму.

- 6.122. (!) Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно, то произвольная перестановка преобразует его в абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.
- 6.123. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n \geq 1} x_n^+$, $\sum_{n \geq 1} x_n^-$, где $x_n^+ = \max\{0, x_n\}$, $x_n^- = \min\{0, x_n\}$.
- 6.124. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится условно, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = -\infty$, где $x_n^+ = \max\{0, x_n\}$, $x_n^- = \min\{0, x_n\}$.
- 6.125. (!) Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится условно, то для любого числа $a \in \overline{\mathbb{R}}$ найдётся такая перестановка $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)} = a$ (**теорема Римана**).
- 6.126. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ сходится условно, то для любых чисел $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$ найдётся такая перестановка $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} = b$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} = a$.
- 6.127. Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} x_n$ расходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Докажите, что для любого $a \in \overline{\mathbb{R}}$ найдётся такая последовательность (ε_n) , принимающая только два значения 1 и -1 , что $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n = a$.
- 6.128. Вычислите суммы рядов:
- $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$;
 - $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$;
 - $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5} + \dots$.
- 6.129. Докажите, что если члены ряда $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ переставить так, чтобы группу из p положительных членов сменяла группа из q отрицательных членов, то сумма нового ряда будет $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

- 6.130. Докажите, что если, не переставляя слагаемых, изменить знаки членов гармонического ряда $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных, то полученный ряд останется расходящимся при $p \neq q$ и станет сходящимся при $p = q$.
- 6.131. Пусть $x_n > 0$, $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i$ и ряд $\sum_{n \geq 1} nx_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} r_n$ сходится.
- 6.132. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n$ сходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ сходится.
- 6.133. Пусть $a_n > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ сходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} (a_n)^{1/n}$ сходится.
- 6.134. Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ сходится. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ сходится.
- 6.135. Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится условно. Всегда ли будет сходиться ряд $\sum_{n \geq 1} b_n^3$?
- 6.136. (§ 7) Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ сходится и функция f такова, что $f(x) = O(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $f(0) = 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} f(b_n)$ сходится.
- 6.137. (§ 7) Пусть $\alpha > 0$ и ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится. Докажите, что $\sum_{k=1}^n b_k k^\alpha = o(n^\alpha)$ при $n \rightarrow \infty$.
- 6.138. Пусть ряд $\sum_{n \geq 1} b_n$ сходится. Докажите, что существует такая последовательность a_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, что ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ сходится.
- 6.139. Рассмотрим последовательность (x_n) . Докажите, что если для любого абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n \geq 1} b_n$ ряд $\sum_{n \geq 1} |x_n b_n|$ сходится, то последовательность (x_n) ограничена.

- 6.140. Рассмотрим последовательность (x_n) . Докажите, что если для любой сходящейся к нулю последовательности (b_n) ряд $\sum_{n \geq 1} x_n b_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ сходится.
- 6.141. Постройте пример расходящегося ряда $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$, удовлетворяющего условиям: последовательность $b_n \geq 0$ монотонно убывает, $a_n \geq 0$ монотонно возрастает и ряд $\sum_{n \geq 1} a_n b_{n+1}$ сходится.
- 6.142. Пусть $(x_n), (y_n)$ — монотонно возрастающие последовательности положительных чисел и ряды $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x_n}$ и $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{y_n}$ расходятся. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x_n + y_n}$ расходится?
- 6.143. Пусть ряды $\sum_{n \geq 1} x_n^2$ и $\sum_{n \geq 1} y_n^2$ сходятся. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} |x_n y_n|$ сходится.
- 6.144. Пусть $a_n \geq 0$. Докажите, что если ряд $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ сходится, то и ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ сходится.
- 6.145. Найдите инфимум множества таких α , что для любой неотрицательной последовательности (a_n) из сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} a_n^2$ следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha}$.
- 6.146. Пусть $p > 0$. Найдите инфимум множества таких α , что для любой неотрицательной последовательности (a_n) из сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} a_n^p$ следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^\alpha}$.
- 6.147. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} x_n^2$ сходится, если для любой последовательности (b_n) из сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} x_n b_n$.
- 6.148. Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что ряд $\sum_{n \geq 1} |x_n|^p$ сходится, если для любой последовательности (b_n) из сходимости ряда $\sum_{n \geq 1} |b_n|^q$ следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} |x_n b_n|$.

6.149. (§9) Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что из сходимости рядов $\sum_{n \geq 1} |x_n|^p$ и $\sum_{n \geq 1} |y_n|^q$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} x_n y_n$ и справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

7. Предел и непрерывность функции

Элементарной окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$. Элементарной окрестностью $+\infty$ называется множество $(E, +\infty)$, а $-\infty$ — множество $(-\infty, E)$, $E \in \mathbb{R}$. Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $U \subseteq \mathbb{R}$, для которого найдётся элементарная окрестность точки a , содержащаяся в нём. Множество всех окрестностей точки $a \in \mathbb{R}$ обозначается через $\mathcal{N}(a)$. Множество, являющееся окрестностью всех своих точек, называется *открытым*. Если любая окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ содержит точки множества $X \subseteq \mathbb{R}$, отличные от a , то a называется *предельной* точкой множества X . Множество предельных точек обозначается через $\text{Lim}(X)$. *Замыканием* X называется множество $\overline{X} = X \cup \text{Lim}(X)$, точки этого множества называются точками *прикосновения*. Точки множества X , не являющиеся предельными, называются *изолированными*. Множество $A \subseteq X$ называется *замкнутым в множестве X* , если оно содержит все свои предельные точки, принадлежащие множеству X , т. е. $\text{Lim}(A) \cap X \subseteq A$. Множество A называется *плотным в множестве X* , если замыкание A содержит X . Множество называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит интервалов.

Точка $x_0 \in X$ называется *локальным максимумом* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, если найдётся такая окрестность $U \in \mathcal{N}(x_0)$, что $f(x_0) = \max\{f(x) \mid x \in X \cap U\}$. Аналогично определяется точка *локального минимума* функции. Точки локального минимума и точки локального максимума называются точками *локального экстремума*.

Говорят, что $b \in \mathbb{R}$ является *пределом* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in \text{Lim}(S \cap X)$ по множеству $S \subseteq \mathbb{R}$, если

$$\forall U \in \mathcal{N}(b) \exists V \in \mathcal{N}(x_0) \quad f(V \cap S) \subseteq U.$$

Используются обозначения: $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) = b$ или $f(x) \xrightarrow[S]{x \rightarrow x_0} b$.

Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \text{Lim}(X)$, то предел по множеству $S = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ называют просто пределом функции f в точке x_0 и обозначают через $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. *Пределом справа* называют предел по множеству $S = \{x > x_0\}$ и обозначают как $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, *пределом слева* — предел по множеству $S = \{x < x_0\}$ и обозначают как $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Верхним пределом $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ функции f в точке x_0 называется наибольший из пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, где максимум берётся по всем последовательностям (x_n) , $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. *Нижним пределом* $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ функции f в точке x_0 называется наименьший из пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, где минимум берётся по всем последовательностям (x_n) , $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$.

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in X \cap \text{Lim}(X)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция называется непрерывной на множестве X , если она непрерывна в каждой точке множества $X \cap \text{Lim}(X)$. Множество непрерывных функций $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ обозначается через $C(X)$.

Функция терпит *разрыв* в точке $x_0 \in X \cap \text{Lim}(X)$, если она не является непрерывной в этой точке. Говорят, что функция имеет разрыв *1-го рода* в точке x_0 , если функция терпит разрыв в этой точке и имеет в ней конечные пределы справа и слева. В остальных случаях разрыв называется разрывом *2-го рода*.

Говорят, что функция $g(x)$ является *o*-малой относительно $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 , возможно, за исключением самой точки x_0 и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in V \setminus \{x_0\} |g(x)| \leq \varepsilon |f(x)|.$$

Говорят, что функция $g(x)$ является *O*-большой относительно $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если функции f и g определены в некоторой окрестности точки x_0 , возможно, за исключением самой точки x_0 и

$$\exists E > 0 \exists V \in \mathcal{N}(x_0) \forall x \in V \setminus \{x_0\} |g(x)| \leq E |f(x)|.$$

O-большое и *o*-малое обозначаются соответственно как $g(x) = O(f(x))$ и $g(x) = o(f(x))$. В частности, если $f(x) \equiv 1$, то используют обозначения $g(x) = o(1)$ и $g(x) = O(1)$.

Величина $\text{osc}_f(X_1) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in X_1\}$ называется *колебанием* функции f на множестве $X_1 \subseteq X$. Величина

$$\text{osc}_f(x_0) = \inf_{V \in \mathcal{N}(x_0)} \text{osc}_f(V \cap X)$$

называется *колебанием* функции f в точке $x_0 \in \text{Lim}(X)$.

7.1. Топологические свойства вещественной прямой

- 7.1. (!) Докажите, что объединение произвольного семейства окрестностей точки x_0 является окрестностью точки x_0 .
- 7.2. (!) Докажите, что пересечение конечного семейства окрестностей точки x_0 есть окрестность точки x_0 . Останется ли данное утверждение справедливым, если рассмотреть пересечение бесконечного семейства окрестностей?
- 7.3. (!) Докажите, что для любых $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, интервал (a, b) — открытое множество.
- 7.4. (!) Докажите, что для любых $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$, отрезок $[a, b]$ замкнут в $\overline{\mathbb{R}}$.
- 7.5. (!) Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, отрезок $[a, b]$ замкнут в \mathbb{R} .
- 7.6. (!) Докажите, что
а) замыкание множества \mathbb{R} есть расширенная числовая прямая $\overline{\mathbb{R}}$;
б) $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- 7.7. (!) Докажите, что множество $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, т. е. $A = \overline{A}$.
- 7.8. (!) Докажите, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто в \mathbb{R} и ограничено, т. е. для ограниченных множеств свойства замкнутости в \mathbb{R} и $\overline{\mathbb{R}}$ совпадают.
- 7.9. (!) Докажите, что если множество $X \subset \mathbb{R}$ замкнуто в \mathbb{R} , то множество $\mathbb{R} \setminus X$ открыто.
- 7.10. Докажите, что предельная точка множества $\text{Lim}(A)$ является предельной точкой множества $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.
- 7.11. (!) Докажите, что для любого множества $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ множество предельных точек $\text{Lim}(A)$ замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$.
- 7.12. (!) Докажите, что для любого множества $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ множество \overline{A} замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$.

- 7.13. Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ — бесконечное множество. Докажите, что $\text{Lim}(A) \neq \emptyset$.
- 7.14. Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Докажите, что множество изолированных точек множества A не более чем счётно.
- 7.15. Докажите, что если $\text{Lim}(A) = \emptyset$, то множество $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ конечно.
- 7.16. Докажите, что если множество $\text{Lim}(A)$ непусто и конечно, то множество A счётно.
- 7.17. Докажите, что если множество $\text{Lim}(A)$ счётно, то и множество A счётно.
- 7.18. Пусть $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Найдите $\text{Lim}(A)$.
- 7.19. Пусть $A = \{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} \mid k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$. Найдите $\text{Lim}(A)$.
- 7.20. Найдите множество $\text{Lim}(\mathbb{Q} \cap (0, 1))$.
- 7.21. Пусть $A = \{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$. Найдите множество $\text{Lim}(A)$.
- 7.22. Пусть $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Найдите замыкание \overline{A} множества A .
- 7.23. Найдите замыкание подмножества \mathbb{R} , состоящего из всевозможных чисел вида $m + \alpha n$, где m, n — целые, а α — иррациональное.
- 7.24. (!) Докажите, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- 7.25. (!) Докажите, что $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Приведите пример множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ таких, что $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
- 7.26. *Открытым покрытием* множества A называется такое семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$, что $A \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$. Докажите, что из любого открытого покрытия произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}$ можно извлечь не более чем счётное подпокрытие.
- 7.27. (!) Множество A называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие. Докажите, что множество $A \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности (x_n) , $x_n \in A$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in A$.
- 7.28. (!) Докажите, что компактное множество $A \subseteq \mathbb{R}$ является замкнутым в \mathbb{R} и ограниченным.

- 7.29. (!) Докажите, что любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ является компактным множеством (**теорема Бореля — Лебега**).
- 7.30. Докажите, что любое замкнутое в \mathbb{R} и ограниченное подмножество \mathbb{R} является компактным.
- 7.31. (!) Докажите, что множество $\overline{\mathbb{R}}$ компактно.
- 7.32. (см. задачу 7.131) Докажите, что образ компактного множества при непрерывном отображении является компактным множеством.
- 7.33. Докажите, что если множество $A \subseteq \mathbb{R}$ нигде не плотно, то его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ всюду плотно.
- 7.34. Докажите, что если открытое множество всюду плотно, то его дополнение нигде не плотно. Приведите пример, показывающий, что для произвольных всюду плотных множеств это утверждение неверно.
- 7.35. Пусть имеется счётная система вложенных интервалов $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots \supset (a_n, b_n) \supset \dots$, т. е. $a_n < a_{n+1}, b_n > b_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что эта система имеет непустое пересечение.
- 7.36. Докажите, что отрезок нельзя представить в виде счётного объединения нигде не плотных замкнутых в нём множеств (**теорема Бэра**).
- 7.37. Можно ли множество иррациональных чисел представить в виде счётного объединения замкнутых подмножеств в \mathbb{R} ?
- 7.38. Пусть $A, A_i \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутые в \mathbb{R} множества при всех $i \in \mathbb{N}$, причём $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Пусть $A \cap (a, b) \neq \emptyset$. Докажите, что найдутся такие $k \in \mathbb{N}$ и $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, что $A \cap (\alpha, \beta) = A_k \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$.

7.2. Свойства предела функции

- 7.39. (!) Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \text{Lim}(X)$. Докажите, что
 а) если $b \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon);$$

b) если $b \in \mathbb{R}$ и $x_0 = \infty(-\infty)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 \forall x \in X \quad (x > \Delta \text{ (} x < -\Delta \text{)} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon);$$

с) если $b = \infty(-\infty)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\forall E > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E \text{ (} f(x) < -E \text{)});$$

d) если $b = \infty(-\infty)$ и $x_0 = \infty(-\infty)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\forall E > 0 \exists \Delta > 0 \forall x \in X \quad (x > \Delta \text{ (} x < -\Delta \text{)} \Rightarrow f(x) > E \text{ (} f(x) < -E \text{)}).$$

7.40. (!) Докажите, что если предел функции f в точке x по множеству S существует, то он единственный.

7.41. (!) Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in X \cap \text{Lim}(X)$. Докажите, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует предел функции f в точке x_0 по множеству X .

7.42. (!) Докажите, что функция, определённая в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке функция имеет равные пределы справа и слева.

7.43. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Липшица*, если для некоторого $L > 0$ и любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. Докажите, что функция, удовлетворяющая условию Липшица, непрерывна на X .

7.44. (!) Докажите, что из $f(x) \leq g(x)$ следует $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) \leq \lim_{x \xrightarrow{S} x_0} g(x)$, если эти пределы существуют⁹.

7.45. (!) Пусть $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{S} x_0} h(x) = a$. Докажите, что существует предел функции g , причём $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} g(x) = a$ (**лемма о зажатой функции**).

⁹ Здесь и далее в § 7.2 полагаем, что найдётся такая окрестность $V \in \mathcal{N}(x_0)$ предельной точки $x_0 \in \text{Lim}(S \cap \text{Dom } f)$, что $(V \cap S \cap \text{Dom } f) = (V \cap S \cap \text{Dom } g) = (V \cap S \cap \text{Dom } h)$.

- 7.46. (!) Докажите, что справедливы следующие равенства при условии существования пределов в левых частях равенств:
- a) $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) + \lim_{x \xrightarrow{S} x_0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{S} x_0} (f(x) + g(x))$ (за исключением случая $+\infty - \infty$);
- b) $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) \cdot \lim_{x \xrightarrow{S} x_0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{S} x_0} (f(x) \cdot g(x))$ (за исключением случая $0 \cdot \infty$).
- 7.47. (!) Докажите, что если $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) = a \neq 0$, то $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} 1/f(x) = 1/a$, (здесь считаем, что $1/\pm\infty = 0$).
- 7.48. (!) Докажите, что сумма и произведение двух непрерывных функций непрерывны.
- 7.49. (!) Докажите, что произвольный многочлен является непрерывной функцией.
- 7.50. (!) Докажите, если функция f непрерывна в x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то функция $1/f$ непрерывна в x_0 .
- 7.51. Пусть f, g — непрерывные функции. Докажите, что $\max\{f, g\}$ — непрерывная функция.
- 7.52. Пусть f, g — непрерывные функции. Докажите, что $\min\{f, g\}$ — непрерывная функция.
- 7.53. Для произвольной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и константы $c > 0$ определим функцию срезки $\text{cut}_{c,f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\text{cut}_{c,f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq c; \\ c \cdot \text{sgn} f(x), & \text{если } |f(x)| > c. \end{cases}$$

Докажите, что если f — непрерывная функция, то и $\text{cut}_{c,f}$ — непрерывная функция.

- 7.54. (!) Докажите, что если $f(x) = g(x)$ при любом $x \in U$, где $U \in \mathcal{N}(x_0)$, то пределы $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x)$ и $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} g(x)$ существуют одновременно и равны.
- 7.55. (!) Докажите, что если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ и $f(x_0) > 0$, то найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $f(x) > 0$ при любом $x \in X \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

7.56. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

7.57. (!) Докажите, что функции e^x , $\sin x$ непрерывны в точке 0.

7.58. (!) Докажите, что следующие функции непрерывны на своей области определения:

a) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
b) $f(x) = \sin x$; e) $f(x) = e^x$.
c) $f(x) = \cos x$;

7.59. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/n}-1}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/m}-1}{x^{1/n}-1}$, где $n, m \in \mathbb{N}$.
b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

7.60. (!§8) Докажите, что следующие функции непрерывны на своей области определения:

a) $f(x) = \arcsin x$; c) $f(x) = \ln x$.
b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

7.61. (!) Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$.

7.62. (!) Из геометрических соображений найдите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

7.63. Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

7.64. (!) Пусть $f : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$, $f(S \cap X) = P$, $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) = b$ и $\lim_{y \xrightarrow{P} b} \psi(y) = c$. Докажите, что $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} \psi(f(x)) = c$ (**теорема о пределе композиции**).

7.65. (!) Приведите пример, когда из $f : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} \psi(y) = c$ не следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(f(x)) = c$.

7.66. Докажите, что для выполнения последнего равенства в предыдущей задаче достаточно добавить условие $f(x) \neq b$ при $x \neq x_0$ или условие $\psi(b) = c$.

7.67. Докажите, что композиция непрерывных функций непрерывна.

7.68. (§ 8) Докажите, что функция $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, непрерывна при $x > 0$.

7.69. (§ 8) Докажите, что функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, непрерывна при $x \in \mathbb{R}$.

7.70. (!) Вычислите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\arccos^2(1-x)}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$;

7.71. (!) Докажите равенства:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$ при всех $k \in \mathbb{Q}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ при всех $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^k x}{x^a} = 0$ при всех $a, k \in \mathbb{Q}$, $a > 0$.

7.72. Пусть функция f определена на промежутке $(0, \infty)$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательности $L_n = \sup_{x \in [n, 2n]} f(x)$ и $l_n = \inf_{x \in [n, 2n]} f(x)$ имеют тот же предел L .

7.73. (!) Пусть $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) = b$, $x_n \in S \cap \text{Dom } f$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

7.74. Пусть для любой последовательности (x_n) , $x_n \in S \cap \text{Dom } f$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, последовательность $f(x_n)$ имеет конечный предел. Докажите, что пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ равны для всех таких последовательностей $x_n \in S \cap \text{Dom } f$.

7.75. (!) Докажите, что $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, для любой последовательности (x_n) , $x_n \in S \cap \text{Dom } f$, такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ (**критерий Гейне**).

- 7.76. (!) Докажите, что существует конечный предел $\lim_{x \xrightarrow{S} x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда
- $$\forall \varepsilon > 0 \exists V \in \mathcal{N}(x_0) (x, y \in V \cap S \cap \text{Dom } f \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$
- (критерий Коши).**
- 7.77. (!) Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция и $x_0 \in \text{Lim}(\text{Dom } f)$. Докажите, что существуют $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- 7.78. (!) Докажите, что функция имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда верхний и нижний пределы в точке x_0 существуют и совпадают.
- 7.79. Докажите, что функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда она переводит сходящиеся последовательности из $[a, b]$ в сходящиеся.
- 7.80. Докажите, что если функция переводит фундаментальные последовательности из области определения в фундаментальные, то она непрерывна.
- 7.81. Приведите пример функции $f \in C(0, 1)$, которая переводит некоторые фундаментальные последовательности в нефундаментальные.
- 7.82. Пусть функция f определена на промежутке $(0, \infty)$. Докажите, что предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны пределы последовательностей $L_n = \sup_{x \in [n, 2n]} f(x)$ и $l_n = \inf_{x \in [n, 2n]} f(x)$.
- 7.83. Пусть $f \in C(a, \infty)$ — ограниченная функция. Докажите, что для любого $t \in \mathbb{R}$ найдётся последовательность $x_n \rightarrow \infty$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + t) - f(x_n)) = 0$.
- 7.84. Пусть $f \in C(a, \infty)$ — ограниченная функция, не имеющая предела при $x \rightarrow \infty$. Докажите, что для любого $t \in \mathbb{R}$ найдётся последовательность $x_n \rightarrow \infty$ такая, что $f(x_n + t) = f(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
- 7.85. Исследуйте на непрерывность функции, т. е. найдите точки разрыва и определите их характер. Если функция неопределена в некоторой точке, то нужно исследовать её произвольное доопределение:

- a) $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$; e) $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/(1-x)}}$;
 b) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$; f) $f(x) = \frac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$;
 c) $f(x) = e^{-1/x^2}$; g) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$;
 d) $f(x) = e^{-1/x}$; h) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{1}{x})$.

7.86. Исследуйте на непрерывность функции:

- a) $f(x) = \frac{|x|}{\operatorname{arctg} x}$; f) $f(x) = \frac{x+1}{\operatorname{arctg}(1/x)}$;
 b) $f(x) = \frac{x}{|\operatorname{arcsin} x|}$; g) $f(x) = \frac{x-1}{\operatorname{arctg}(1/x^2)}$;
 c) $f(x) = \frac{|\operatorname{arctg} x|}{x^2}$; h) $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg}(1/x)}$;
 d) $f(x) = \frac{|\operatorname{arcsin}^3 x|}{x^3}$; i) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(1/x)}{x}$.
 e) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

7.87. (!) Существует ли $a \in \mathbb{R}$ такое, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0; \\ a, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна?

7.88. Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

7.89. (!) Исследуйте на непрерывность функцию Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7.90. Исследуйте на непрерывность функцию $x\chi(x)$.

7.91. Исследуйте на непрерывность функцию

$$\rho_{10}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — не конечная десятичная дробь;} \\ 1/10^k, & \text{если } x = p/10^k \text{ — несократимая дробь, } p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

7.92. Исследуйте на непрерывность функцию Римана

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \\ 1/q, & \text{если } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ — несократимая дробь или } p = 0. \end{cases}$$

7.93. Исследуйте на непрерывность функцию

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \\ 1/q^q, & \text{если } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ — несократимая дробь или } p = 0. \end{cases}$$

7.94. Пусть $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ — биективное отображение и $\sum_{n \geq 1} h_n$ — сходящийся ряд из положительных слагаемых. Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x) = \sum_{\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \leq x\}} h_n.$$

7.95. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — периодическая функция и существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Докажите, что $f \equiv \text{const}$.

7.96. Пусть $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — периодические функции и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Докажите, что $f \equiv g$.

7.97. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \text{Lim}(X)$. Докажите, что

$$\text{osc}_f(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{osc}_f(\{x \in X \mid |x_0 - x| < \varepsilon\}).$$

7.98. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Докажите равенство $\text{osc}_f(X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$.

7.99. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in X \cap \text{Lim}(X)$. Докажите, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\text{osc}_f(x_0) = 0$.

7.100. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ и X замкнуто в \mathbb{R} . Докажите, что множество $\{x \in X \mid \text{osc}_f(x) \geq a\}$ замкнуто в \mathbb{R} .

7.101. Докажите, что для любой непрерывной функции $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ найдётся функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\text{osc}_f(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

7.3. Асимптотические выражения

7.102. (!) Докажите, что $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

- 7.103. (!) Докажите, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)o(1)$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.104. (!) Докажите, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x)O(1)$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.105. (!) Пусть $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 . Докажите, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- 7.106. Докажите, что если $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.107. Докажите, что если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.108. Докажите, что если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.109. Докажите, что если $f(x) = O(h(x))$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x) + g(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.110. Докажите, что если $f(x) = o(h(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x) + g(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.111. Докажите, что если $f(x) = O(1)$ и $g(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x)g(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.112. Докажите, что если $f(x) = o(1)$ и $g(x) = O(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(x)g(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.113. Докажите, что если $f(y) = O(g(y))$ при $y \rightarrow y_0$ и $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$, то $f(\alpha(x)) = O(g(\alpha(x)))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.114. Докажите, что если $f(y) = o(g(y))$ при $y \rightarrow y_0$ и $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$, то $f(\alpha(x)) = o(g(\alpha(x)))$ при $x \rightarrow x_0$.
- 7.115. Какое из двух асимптотических равенств верно при $x \rightarrow 0$:
 $x \cos \frac{1}{x} = O(x)$ или $x = O(x \cos \frac{1}{x})$?
- 7.116. Какое из двух асимптотических равенств верно при $x \rightarrow \infty$:
 $\ln(x^2 + 2^x \sin x) = O(x)$ или $x = O(\ln(x^2 + 2^x \sin x))$?

- 7.117. (!) Докажите, что
 а) $x^n = o(e^x)$ при $x \rightarrow \infty$; с) $\ln|x| = o(\frac{1}{|x|})$ при $x \rightarrow 0$.
 б) $\ln x = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$;
- 7.118. Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны по порядку величины* при $x \rightarrow x_0$ и пишут $f \asymp g$, если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \rightarrow x_0$. Докажите, что это отношение действительно является отношением эквивалентности, т. е. удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности.
- 7.119. (!) Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны* при $x \rightarrow x_0$ и пишут $f \sim g$, если $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$. Докажите, что это отношение действительно является отношением эквивалентности.
- 7.120. (!) Пусть $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 . Докажите, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- 7.121. Докажите, что функции $e^x, \sin x, x, x^2$, заданные на \mathbb{R} , являются линейно независимыми, т. е. из тождества $a_1 e^x + a_2 \sin x + a_3 x + a_4 x^2 \equiv 0$ следует, что $a_k = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4$.
- 7.122. Рассмотрим множество функций $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. На этом множестве определим отношение $f \ll g$, если $g(x) = o(f(x))$ при $x \rightarrow \infty$. Докажите, что отношение \ll является отношением строгого частичного порядка, т. е. оно транзитивно и антирефлексивно (т. е. для любого f неверно, что $f \ll f$).
- 7.123. Докажите, для частичного порядка \ll на множестве функций $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ справедлив принцип вложенных отрезков, т. е. если $f_1 \ll f_2 \ll \dots \ll f_n \ll \dots \ll g_n \ll \dots \ll g_2 \ll g_1$, то найдётся такая функция $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, что $f_k \ll h \ll g_k$ при любых $k \in \mathbb{N}$.
- 7.124. Докажите, что решение уравнения $x(t)e^{x(t)} = t$ при $t \rightarrow \infty$ имеет вид $x(t) = \ln t - \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + o(\frac{1}{\ln t})$.

7.4. Свойства непрерывных функций

- 7.125. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ — открытое множество и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ является открытым.

- 7.126. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутое в \mathbb{R} множество и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ является замкнутым в \mathbb{R} .
- 7.127. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутое в \mathbb{R} множество и функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) = a\}$ является замкнутым в \mathbb{R} .
- 7.128. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутое в \mathbb{R} множество и функции $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что множество $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ является замкнутым в \mathbb{R} .
- 7.129. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ — открытое множество и функции $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что множества $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ и $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ являются открытыми.
- 7.130. Докажите, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз произвольного интервала относительно отображения f является открытым множеством.
- 7.131. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, докажите эквивалентность следующих условий:
- f — непрерывная функция;
 - прообраз $f^{-1}(U)$ произвольного открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}$ есть открытое множество;
 - прообраз $f^{-1}(M)$ произвольного замкнутого в \mathbb{R} множества $M \subseteq \mathbb{R}$ есть замкнутое в \mathbb{R} множество.
- 7.132. Докажите, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbb{R}$ множества $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ и $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ являются открытыми.
- 7.133. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что $\sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \sup\{f(x) \mid x \in (a, b)\}$.
- 7.134. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$. Докажите, что $\sup_{x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.
- 7.135. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция и $g(x) = \sup\{f(t) \mid t \in (a, x)\}$. Докажите, что функция g непрерывна.
- 7.136. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция и $g(x) = \sup\{f(t) \mid t \in (a, x)\}$. Докажите, что функция g непрерывна слева. Приведите пример такой функции f , что функция g не является непрерывной.

- 7.137. Для любого непустого замкнутого в \mathbb{R} множества $A \subseteq \mathbb{R}$ рассмотрим функцию $d_A(x) = \inf_{y \in A} |x - y|$. Докажите, что функция d_A непрерывна.
- 7.138. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутые в \mathbb{R} непересекающиеся множества. Докажите, что существует такая непрерывная на \mathbb{R} функция f , что $f(x) = 1$ при всех $x \in A$ и $f(x) = 0$ при всех $x \in B$.
- 7.139. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$. Докажите, что если $a = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ и $a \in \mathbb{R}$, то $f(a) = 0$.
- 7.140. (!) Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что для любого числа d , заключённого между числами $f(a)$ и $f(b)$ найдётся такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = d$ (**теорема Больцано — Коши**).
- 7.141. Приведите пример функции f , определенной на $[0, 1]$ и принимающей на любом отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, но не являющейся непрерывной на $[0, 1]$.
- 7.142. Докажите, что функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда образом любого промежутка относительно отображения f является промежуток и прообраз любой точки замкнут в \mathbb{R} .
- 7.143. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $A = \sup\{f(x) \mid x \in U\}$. Докажите, что найдётся последовательность (x_n) такая, что $x_n \in U$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.
- 7.144. (!) Пусть $f \in C[a, b]$ и $A = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Докажите существование такого $c \in [a, b]$, что $f(c) = A$ (**теорема Вейерштрасса**).
- 7.145. (!) Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что функция f ограничена (**теорема Вейерштрасса**).
- 7.146. Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$. Докажите существование такого $c > 0$, что $|f(x)| > c$ при $x \in [a, b]$.
- 7.147. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что $f([a, b])$ — отрезок.
- 7.148. Докажите, что не имеющая локальных экстремумов непрерывная функция монотонна.
- 7.149. Постройте пример функции на \mathbb{R} , не имеющей экстремумов (даже нестрогих) и промежутков монотонности.

- 7.150. Докажите, что монотонная функция может иметь разрывы только 1-го рода.
- 7.151. Приведите пример монотонной функции $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ с бесконечным числом точек разрыва.
- 7.152. Приведите пример монотонной функции $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, множество точек разрыва которой плотно в $[0, 1]$.
- 7.153. (!) Докажите, что монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ или $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.
- 7.154. (!) Докажите, что если строго возрастающая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то существует непрерывная строго возрастающая обратная к ней функция $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$.
- 7.155. Существует ли немонотонная функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, для которой существует обратная функция $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$?
- 7.156. Существует ли разрывная функция такая, что обратная к ней функция является непрерывной? Изменится ли ответ, если предположить, что образ функции является интервалом?
- 7.157. Отображение называется *открытым*, если образ любого открытого множества является открытым множеством. Докажите, что если непрерывная функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ является открытым отображением, то она монотонна.
- 7.158. Докажите, что если f непрерывна на $[a, b]$ и имеет обратную функцию, то f — монотонная функция на $[a, b]$.
- 7.159. Пусть $\varphi : (0, c) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная строго возрастающая функция, причём $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. Докажите, что если существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\varphi(x)} = a \neq 0$, то $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi^{-1}(y)}{y} = a$.
- 7.160. Пусть $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, g — инъективная функция и при некотором $h \in \mathbb{R}$ существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)} = c$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.
- 7.161. Пусть $f : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$, причём $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

- 7.162. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Докажите, что f — ограниченная функция.
- 7.163. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Докажите, что функция f имеет экстремум.
- 7.164. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Докажите, что функция f имеет минимум.
- 7.165. (!) Пусть $f(x) > 0$ — многочлен чётной степени. Докажите существование такого $c \in \mathbb{R}$, что $f(c) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.
- 7.166. Пусть $f(x)$ — произвольный многочлен. Докажите существование такого $c \in \mathbb{R}$, что $|f(c)| = \inf_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.
- 7.167. (!) Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет вещественный корень.
- 7.168. Существуют ли непрерывные взаимно однозначные отображения отрезка на интервал и интервала на отрезок?
- 7.169. Докажите, что взаимно однозначное отображение отрезка на интервал имеет бесконечное число точек разрыва.
- 7.170. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции и справедливы неравенства $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. Докажите существование такого $c \in (a, b)$, что $f(c) = g(c)$.
- 7.171. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и справедливы неравенства $f(0) > 0, f(1) < 1$. Докажите существование такого $a \in (0, 1)$, что $f(a) = a$.
- 7.172. Пусть $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ — непрерывная функция. Докажите существование такого $x \in [a, b]$, что $f(x) = x$ (**теорема Брауэра о неподвижной точке**).
- 7.173. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f(f(x)) = x$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Докажите существование такого $a \in \mathbb{R}$, что $f(a) = a$.
- 7.174. Пусть $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — непрерывные сюръективные отображения. Докажите существование такого $c \in [0, 1]$, что $f(c) = g(c)$.

- 7.175. Пусть f непрерывна на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Покажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ разность $f(x + 1/n) - f(x)$ равна нулю хотя бы в одной точке $x \in [0, 1 - 1/n]$.
- 7.176. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная периодическая функция и $d \in \mathbb{R}$. Докажите существование такого $x \in \mathbb{R}$, что $f(x + d) = f(x)$.
- 7.177. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и справедливы неравенства $f(0) > 0, f(1) < 1$. Докажите, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдутся две точки x_1, x_2 такие, что $f(x_1) = f(x_2)$ и $x_1 - x_2 = \alpha$ или $x_1 - x_2 = 1 - \alpha$.
- 7.178. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что для любых $x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ найдётся такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \frac{1}{k}(f(x_1) + \dots + f(x_k))$.
- 7.179. Докажите, что для любых двух выпуклых многоугольников на плоскости существует прямая, делящая каждый из них на две равновеликие части.
- 7.180. Докажите, что для любого многоугольника на плоскости существуют две перпендикулярные прямые, делящие его на четыре равновеликие части.
- 7.181. Докажите, что уравнение $x = 2 \sin x$ имеет положительное решение.
- 7.182. Докажите неравенство $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
- 7.183. Докажите, что уравнение $x^n = e^x$ имеет два положительных корня $0 < a_n < b_n$ при любом $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- 7.184. Докажите существование такого $k \in \mathbb{N}$, что при всех целых $n \geq k$ уравнение $\frac{1}{n}x^3 - x^2 + 1 = 0$ имеет три вещественных корня $x_n, y_n, z_n, x_n < y_n < z_n$. Найдите пределы последовательностей $(x_n), (y_n), (z_n)$.
- 7.185. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(x)$ принимает любое значение не более чем в двух точках. Докажите, что имеется значение, которое f принимает в единственной точке.
- 7.186. Приведите пример непрерывной функции $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, принимающей некоторые значения в трёх точках, а остальные только в одной.

- 7.187. Докажите, что монотонная функция имеет не более чем счётное число точек разрыва.
- 7.188. Докажите, что имеется не более счётного числа значений монотонной функции, прообраз которых содержит более одного элемента.
- 7.189. Докажите, что если функция непрерывна справа, то число точек, в которых функция разрывна слева, не более чем счётно.
- 7.190. Докажите, что если функция имеет только разрывы первого рода, то множество точек разрыва не более чем счётно.
- 7.191. Докажите, что не существует непрерывной функции, принимающей иррациональные значения в рациональных точках и рациональные в иррациональных.
- 7.192. Докажите, что множество точек разрыва вещественной функции есть объединение не более чем счётного числа замкнутых в \mathbb{R} множеств.
- 7.193. Докажите, что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не может быть множеством точек разрыва никакой функции.
- 7.194. Докажите, что множество точек строгих экстремумов функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не более чем счётно.
- 7.195. Экстремальным значением функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть такое число $y \in \mathbb{R}$, что $y = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}$ — точка локального экстремума. Докажите, что множество экстремальных значений любой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не более чем счётно.
- 7.196. Пусть $E \subset [0, 1]$ — замкнутое в $[0, 1]$ множество и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что f можно доопределить на всём отрезке $[0, 1]$ так, чтобы она стала непрерывной на $[0, 1]$.
- 7.197. Пусть $E \subset [0, 1]$ и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что f можно доопределить на всём отрезке $[0, 1]$ так, чтобы она осталась непрерывной на E .
- 7.198. Пусть $r(n)$ — некоторое биективное отображение множества натуральных чисел на множество $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Определим на $[0, 1]$ функцию $f(x)$, полагая $f(x) = \sum_{r(n) < x} \frac{1}{2^n}$. Докажите, что $f(x)$ непрерывно на $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, но не имеет непрерывного продолжения на $[0, 1]$.

- 7.199. Постройте пример такой непрерывной на $[a, b]$ функции, что точки её экстремумов образуют плотное множество в $[a, b]$.
- 7.200. Докажите равенства
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \inf\{f(x) \mid x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\};$
 - $\overline{\lim}_{x_0 \rightarrow x} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \sup\{f(x) \mid x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)\}.$
- 7.201. Пусть для функции $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ при некотором $h > 0$ выполняется свойство $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+h) - f(x)) = 0$. Докажите, что $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.
- 7.202. Пусть функция $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ограничена на интервале $(0, 1)$ и удовлетворяет неравенству $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ при любых $x, y > 0$. Докажите, что существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x$.
- 7.203. Докажите, что если определённая на отрезке функция имеет разрывы только 1-го рода, то она ограничена.
- 7.204. Докажите, что $\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m!x))$.
- 7.205. Пусть $0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ двоичное представление числа $x \in (0, 1)$. Докажите, что функция ω , заданная равенством $\omega(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, разрывна в каждой точке $x \in (0, 1)$ и принимает все промежуточные значения в любом интервале.
- 7.206. Докажите, что для любого счётного семейства функций $\{f_n \mid f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ найдётся функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая свойством: для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $f_n(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow \infty$.

8. Аксиоматическое определение вещественных чисел и элементарных функций

Множеством *вещественных чисел* называется множество \mathbb{R} с определёнными на нём операциями $+$, \cdot и отношением \leq , которые удовлетворяют следующим аксиомам.

Аксиомы алгебраической структуры поля:

- Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a + b = b + a$ (*коммутативность сложения*).
- Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*ассоциативность сложения*).

3. Существует (единственный) элемент $0 \in \mathbb{R}$ такой, что для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a + 0 = a$.

4. Для любого $a \in \mathbb{R}$ найдётся (единственный) такой элемент $-a \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство $a + (-a) = 0$ (существование *противоположного* элемента).

5. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $ab = ba$ (коммутативность умножения).

6. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность умножения).

7. Существует (единственный) элемент $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, такой, что для любых $a \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a \cdot 1 = a$.

8. Для любого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдётся такой элемент $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (существование *обратного* элемента).

9. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $a(b + c) = (ab) + (ac)$ (*дистрибутивность*).

Аксиомы линейного порядка (см. § 3):

10. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо $a \leq b$ или $b \leq a$.

11. Для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо $a \leq a$.

12. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ из $a \leq b$, $b \leq a$ следует $a = b$.

13. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ из $a \leq b$, $b \leq c$ следует $a \leq c$.

Аксиомы, связывающие порядок с операциями умножения и сложения:

14. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$.

15. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ если $0 \leq a$ и $0 \leq b$, то $0 \leq ab$.

Аксиома непрерывности (см. § 3):

16. Для любых двух непустых множеств $A, B \subseteq \mathbb{R}$, если $A \leq B$ (т. е. $a \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$), то существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $A \leq \{c\} \leq B$.

Две системы $(X, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ и $(Y, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ называются *изоморфными*, если существует *изоморфизм*, т. е. такое взаимно однозначное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$, что $\varphi(a) +_2 \varphi(b) = \varphi(a +_1 b)$, $\varphi(a) \cdot_2 \varphi(b) = \varphi(a \cdot_1 b)$ и $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b) \Leftrightarrow a \leq_1 b$ для любых $a, b \in X$.

Теорема. Любые две системы, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам 1–16, изоморфны.

Множеством *комплексных чисел* \mathbb{C} называется множество пар вещественных чисел со следующим образом определёнными операциями сложения и умножения: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Нетрудно убедиться, что введённые операции удовлетворяют аксиомам алгебраической структуры поля. Множество $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ изоморфно \mathbb{R} и его элементы принято обозначать $(a, 0) = a$. Число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается че-

рез i . Заметим, что $i^2 = -1$. Комплексные числа удобно записывать в виде $(a, b) = a + ib$. *Вещественной частью* числа $c = (a, b) \in \mathbb{C}$ называется число $\operatorname{Re}(c) = a$, *мнимой частью* — число $\operatorname{Im}(c) = b$. *Комплексно сопряжённым* к числу $a + ib$ называется число $a + i\bar{b} = a - ib$. *Абсолютной величиной (модулем)* комплексного числа $a + ib$ называется величина $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + i\bar{b})(a + ib)}$. Элементарной окрестностью точки $z_0 \in \mathbb{C}$ называется круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, элементарной окрестностью бесконечности — множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > E\}$, где $E > 0$. При помощи элементарных окрестностей понятие предела для комплексных последовательностей и функций определяется также, как и для вещественных последовательностей и функций. Определим комплексные (действующие из \mathbb{C} в \mathbb{C}) функции Exp , Sin , Cos , Sh и Ch равенствами:

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}; \quad \operatorname{Sin}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \operatorname{Cos}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}; \\ \operatorname{Sh}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \operatorname{Ch}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Вещественные функции \exp , \sin , \cos , sh и ch определяются как сужение соответствующих комплексных функций на вещественную прямую.

- 8.1. Докажите, что если отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — изоморфизм, то φ — тождественное отображение.
- 8.2. Докажите, что если взаимно однозначное отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b)$, $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, то φ сохраняет порядок и по предыдущей задаче является тождественным отображением.
- 8.3. *Сечением* множества рациональных чисел \mathbb{Q} (далее просто сечением) называется множество A , удовлетворяющее условиям: $A \neq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, $\mathbb{Q} \setminus A \leq A$ и A не имеет наименьшего элемента. Докажите, что отношение $A \leq B$, если $B \subseteq A$, определяет линейный порядок.
- 8.4. Докажите, что если A и B — сечения и найдётся $a \in A \setminus B$, то $A \leq B$ и $A \neq B$, т. е. $A < B$.
- 8.5. Докажите, что операция $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ на множестве сечений удовлетворяет аксиомам 1–4, 14, где нулевое сечение определяется как $O = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{Q}\}$, причём если $O \leq A$, то $-A \leq O$.

- 8.6. Для сечений A, B определим умножение $A \cdot B = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, если $O \leq A$ и $O \leq B$; $A \cdot B = -A(-B)$, если $O \leq A$ и $B \leq O$; $A \cdot B = -(-A)B$, если $O \leq B$ и $A \leq O$; $A \cdot B = (-A)(-B)$, если $A \leq O$ и $B \leq O$. Докажите, что так определённая операция удовлетворяет аксиомам 5–9, 15.
- 8.7. (!) Докажите, что множество сечений удовлетворяет аксиоме непрерывности и, следовательно, с учётом предыдущих задач, является моделью вещественных чисел.
- 8.8. Каждому рациональному числу $r \in \mathbb{Q}$ сопоставим сечение $A(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$. Докажите, что данное отображение есть изоморфизм поля \mathbb{Q} и подмножества множества сечений с операциями сложения, умножения и линейным порядком, определёнными в предыдущих задачах.
- 8.9. Рассмотрим множество $F(\mathbb{Q})$ фундаментальных последовательностей (x_n) , $x_n \in \mathbb{Q}$. Определим на $F(\mathbb{Q})$ отношение: $(x_n) \sim (y_n)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$. Докажите, что отношение \sim является отношением эквивалентности на $F(\mathbb{Q})$.
- 8.10. Докажите, что две фундаментальные последовательности (x_n) (y_n) эквивалентны тогда и только тогда, когда их объединение (z_n) , определяемое равенствами $z_{2n} = x_n$, $z_{2n+1} = y_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, является фундаментальной последовательностью.
- 8.11. Докажите, что произвольная фундаментальная последовательность ограничена.
- 8.12. Докажите, что сумма и произведение двух фундаментальных последовательностей является фундаментальной последовательностью.
- 8.13. Докажите, что если $(x'_n) \sim (x''_n)$ и $(y'_n) \sim (y''_n)$, то $(x'_n + y'_n) \sim (x''_n + y''_n)$ и $(x'_n y'_n) \sim (x''_n y''_n)$.
- 8.14. Множество $F(\mathbb{Q})$ всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел разбивается по отношению \sim на непересекающиеся классы эквивалентности. Определим операции сложения и умножения классов эквивалентности с помощью формул
- $$X + Y = \{(x_n + y_n) \mid (x_n) \in X, (y_n) \in Y\},$$
- $$X \cdot Y = \{(x_n y_n) \mid (x_n) \in X, (y_n) \in Y\}.$$

Докажите, что $X + Y$ и $X \cdot Y$ являются классами эквивалентности фундаментальных последовательностей, причём введённые операции сложения и умножения удовлетворяют аксиомам 1–9.

- 8.15. На множестве классов эквивалентности фундаментальных последовательностей зададим отношение порядка: $X \leq Y$ тогда и только тогда, когда найдутся представители классов $(x_n) \in X$ и $(y_n) \in Y$ такие, что $x_n \leq y_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что это отношение является линейным порядком и удовлетворяет аксиомам 14, 15.
- 8.16. Каждому рациональному числу $r \in \mathbb{Q}$ сопоставим класс эквивалентности X , содержащий последовательность (x_n) , где $x_n = r$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что данное отображение есть изоморфизм поля \mathbb{Q} и подмножества классов эквивалентности фундаментальных последовательностей с операциями сложения, умножения и линейным порядком, определёнными в предыдущих задачах.
- 8.17. (!) Докажите, что множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей удовлетворяет аксиоме непрерывности и, следовательно, с учётом предыдущих задач, является моделью вещественных чисел.
- 8.18. (!) Докажите, что отрезок $[0, 1]$ не является счётным множеством (**теорема Кантора**).
- 8.19. Докажите, что каждое рациональное число $a \in \mathbb{Q}$ единственным образом представляется в виде периодической (начиная с некоторого номера) десятичной¹⁰ дроби без 9 в периоде.
- 8.20. Выведите формулу, по которой из представления рационального числа в виде периодической десятичной дроби можно получить его представление в виде несократимой дроби p/q .
- 8.21. Рассмотрим множество неотрицательных (бесконечных) десятичных дробей $a_0, a_1 \dots a_k \dots$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ при $k \in \mathbb{N}$ без 9 в периоде. Определим на этом множестве лексикографический порядок: $a_0, a_1 \dots a_k \dots < b_0, b_1 \dots b_k \dots$, если найдётся $k \geq 0$ такое, что $a_i = b_i$ при $i = 0, \dots, k - 1$ и $a_k < b_k$. Докажите, что введённый порядок удовлетворяет аксиомам линейного

¹⁰ Аналогичным образом можно рассмотреть дроби по любому целому основанию $p \geq 2$.

порядка ($a \leq b$, если $a < b$ или $a = b$). Покажите, что этот порядок можно распространить и на отрицательные десятичные дроби (т. е. такие, что $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_0 < 0$) так, чтобы он удовлетворял аксиомам линейного порядка.

- 8.22. Докажите, что множество периодических десятичных дробей с введённым в предыдущей задаче порядком изоморфно множеству \mathbb{Q} с естественным порядком на нём.
- 8.23. Докажите, что для двух десятичных дробей a и b , $a < b$, найдётся периодическая десятичная дробь c такая, что $a < c < b$.
- 8.24. Пусть $a_0, a_1 \dots a_k \dots$ — десятичная дробь. Определим рациональные числа $\langle a \rangle_k = a_0, a_1 \dots a_k 0 \dots 0 \dots$, $\langle a \rangle^k = \langle a \rangle_k + 10^{-k}$. Суммой двух десятичных дробей $a_0, a_1 \dots a_k \dots$ и $b_0, b_1 \dots b_k \dots$ назовём такую десятичную дробь $c_0, c_1 \dots c_k \dots$, что при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\langle a \rangle_k + \langle b \rangle_k \leq c_0, c_1 \dots c_k \dots \leq \langle a \rangle^k + \langle b \rangle^k$. Докажите, что сложение определено однозначно и удовлетворяет аксиомам 1–4, 14.
- 8.25. Произведением двух положительных десятичных дробей $a_0, a_1 \dots a_k \dots$ и $b_0, b_1 \dots b_k \dots$ назовём такую десятичную дробь $c_0, c_1 \dots c_k \dots$, что при любом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\langle a \rangle_k \cdot \langle b \rangle_k \leq c_0, c_1 \dots c_k \dots \leq \langle a \rangle^k \cdot \langle b \rangle^k$. Докажите, что умножение определено однозначно и удовлетворяет аксиомам 5–9, 15. Распространите операцию умножения на отрицательные десятичные дроби так, чтобы она удовлетворяла соответствующим аксиомам.
- 8.26. Докажите, что монотонно убывающая ограниченная последовательность десятичных дробей (x_n) стабилизируется, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $n(k)$, что первые k разрядов десятичных дробей x_n одинаковые при любом $n \geq n(k)$.
- 8.27. (!) Докажите, что множество бесконечных десятичных дробей удовлетворяет аксиоме непрерывности и, следовательно, с учётом предыдущих задач, является моделью вещественных чисел.
- 8.28. (!) Докажите, что если функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны и $f(x) = g(x)$ при любых $x, y \in \mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.
- 8.29. (!) Докажите, что если $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные, то существует непрерывная функция $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $F(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{Q}$.

- 8.30. (!) Отображение $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейным*, если для любых $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. Докажите, что для любого линейного отображения f найдётся такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \alpha x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
- 8.31. (!) Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Докажите, что существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \alpha x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
- 8.32. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная функция и для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Докажите, что существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \alpha x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
- 8.33. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и при любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Докажите, что существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \alpha x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.
- 8.34. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и существует такое $C \in \mathbb{R}$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq C$. Докажите, что существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что функция $f(x) - \alpha x$ ограничена.
- 8.35. (!) Докажите соотношения $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- 8.36. (!) Докажите равенство $\text{Exp}(z_1 + z_2) = \text{Exp}(z_1) \text{Exp}(z_2)$.
- 8.37. (!) Докажите, что функция Exp непрерывна в нуле.
- 8.38. (!) Докажите, что функция Exp непрерывна на \mathbb{C} .
- 8.39. (!) Покажите, что при $r \in \mathbb{Q}$ справедливо равенство¹¹ $\text{Exp}(r) = e^r$.
- 8.40. (!) Докажите **формулы Эйлера**: $\text{Exp}(iz) = \text{Cos}(z) + i\text{Sin}(z)$;

$$\text{Cos}(z) = \frac{\text{Exp}(iz) + \text{Exp}(-iz)}{2}; \quad \text{Sin}(z) = \frac{\text{Exp}(iz) - \text{Exp}(-iz)}{2i}.$$

- 8.41. Докажите равенства: $\text{Exp}(z) = \text{Ch}(z) + \text{Sh}(z)$;

$$\text{Ch}(z) = \frac{\text{Exp}(z) + \text{Exp}(-z)}{2}; \quad \text{Sh}(z) = \frac{\text{Exp}(z) - \text{Exp}(-z)}{2};$$

$$\text{Sin}(z) = -i\text{Sh}(iz); \quad \text{Cos}(z) = \text{Ch}(iz).$$

¹¹ Поэтому обычно используют обозначение $\text{Exp}(z) = e^z$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

8.42. Докажите равенства:

$$\operatorname{Sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{Sh}(z_1)\operatorname{Ch}(z_2) + \operatorname{Sh}(z_2)\operatorname{Ch}(z_1);$$

$$\operatorname{Ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{Ch}(z_1)\operatorname{Ch}(z_2) + \operatorname{Sh}(z_1)\operatorname{Sh}(z_2).$$

8.43. Докажите равенства: $\operatorname{Sh}(2z) = 2\operatorname{Sh}(z)\operatorname{Ch}(z)$; $\operatorname{Ch}(2z) = \operatorname{Ch}^2(z) + \operatorname{Sh}^2(z)$; $\operatorname{Ch}^2(z) - \operatorname{Sh}^2(z) = 1$.

8.44. (!) Докажите равенства:

$$\operatorname{Sin}(z_1 + z_2) = \operatorname{Sin}(z_1)\operatorname{Cos}(z_2) + \operatorname{Sin}(z_2)\operatorname{Cos}(z_1);$$

$$\operatorname{Cos}(z_1 + z_2) = \operatorname{Cos}(z_1)\operatorname{Cos}(z_2) - \operatorname{Sin}(z_1)\operatorname{Sin}(z_2).$$

8.45. (!) Докажите, что при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $|\operatorname{Exp}(ix)| = 1$. Выведите отсюда равенство $\operatorname{Cos}^2(x) + \operatorname{Sin}^2(x) = 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

8.46. Докажите, что $\operatorname{Cos}(3) < 0$.

8.47. Докажите, что функция $\operatorname{Cos} x$ непрерывна и имеются вещественные решения уравнения $\operatorname{Cos} x = 0$. Число $2x_0$, где x_0 — наименьший положительный корень этого уравнения, обозначается через π .

8.48. (!) Докажите, что если непрерывные функции $C, S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют равенствам

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1)C(x_2) + S(x_2)C(x_1);$$

$$C(x_1 + x_2) = C(x_1)C(x_2) - S(x_1)S(x_2);$$

$$C^2(x) + S^2(x) = 1; S(0) = C(\pi/2) = 0; C(0) = S(\pi/2) = 1;$$

то функции S и C периодические с периодом 2π .

8.49. (!) Докажите, что две функции, удовлетворяющие условиям предыдущей задачи, определяются единственным образом. Эта задача завершает формальное аксиоматическое определение тригонометрических функций, свойства которых известны из школьной геометрии.

8.50. (!) Докажите, что функции $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ обратимы на промежутках $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0, \pi]$ и $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ соответственно. Обратные функции обозначают через $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ соответственно.

8.51. (!) Докажите, что каждое комплексное число можно представить в виде $z = |z|e^{i \arg(z)}$, где $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Докажите, что если $z \neq 0$, то $\arg(z)$ определяется единственным образом. Число $\arg(z)$ и называется *главным значением аргумента* числа z .

8.52. Докажите, что если $0 \neq z = |z|e^{i\varphi}$, то $\varphi = \arg(z) + 2k\pi$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Число φ называется аргументом числа z , который отличается от главного аргумента некоторым слагаемым вида $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.53. Докажите, что если $z = x + iy$, то

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{при } x \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{при } x < 0, y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

8.54. (!) Докажите, что функция e^x имеет обратную функцию $\ln x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, которая является непрерывной и монотонно возрастающей.

8.55. (!) Пусть $w, z \in \mathbb{C}$. Докажите, что $e^w = z$ тогда и только тогда, когда $w = \ln |z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

8.56. Докажите, что

a) функция $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет обратную функцию, удовлетворяющую равенству $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

b) функция $\operatorname{ch} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет обратную функцию, удовлетворяющую равенству $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$;

c) функция $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, определённая равенством $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, имеет обратную функцию, удовлетворяющую равенству $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

8.57. Докажите равенства:

a) $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$; c) $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$;

b) $\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$; d) $\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}$.

8.58. (!) Докажите **формулу Муавра** $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.59. Вычислите суммы

$$\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\beta) \text{ и } \sum_{k=0}^n \sin(\alpha + k\beta), \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- 8.60. Найдите n комплексных решений уравнения $z^n = 1$.
- 8.61. Определим функцию $x^y = e^{y \ln x}$ для $x > 0, y \in \mathbb{R}$. Покажите, что справедливы соотношения:
- $x^y \leq x^z$ при $1 \leq x, y \leq z$;
 - $x^y \leq z^y$ при $1 \leq x \leq z, 0 \leq y$;
 - $x^{y+z} = x^y x^z$ для всех $x > 0, y, z \in \mathbb{R}$;
 - $(x^{p/q})^q = x^p$ для всех $x > 0, p/q \in \mathbb{Q}$.
- 8.62. Докажите, что для любого $x \in (1, \infty)$ существует единственная функция $f_x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющая равенствам:
- $f_x(y) \leq f_x(z)$ при $y \leq z$;
 - $f_x(y+z) = f_x(y)f_x(z)$ для всех $y, z \in \mathbb{R}$;
 - $f_x(p/q) = (x^p)^{1/q}$ для $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.
- 8.63. (!) Определим функцию $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ при $x, a > 0$. Покажите, что справедливы соотношения
- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$;
 - $\log_a x \leq \log_a y$ при $1 \leq a, 0 < x \leq y$;
 - $\log_a x \leq \log_b x$ при $1 \leq b \leq a, x > 0$;
 - $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ при $a > 0, x > 0$;
 - $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ при всех $a, x, y > 0$.
- 8.64. Пусть две последовательности $(a_n), (b_n)$ удовлетворяют следующим условиям: $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.
- 8.65. (!) Докажите неравенства
- $1 + x \leq e^x$ при всех $x \in \mathbb{R}$;
 - $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ при $x < 1$;
 - $1 - 1/x \leq \ln x \leq x - 1$ при $x > 0$.
- 8.66. (!) Вычислите пределы
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.
- 8.67. (!) Докажите, что если непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(1) = a > 0$, при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x)f(y)$, то $f(x) = a^x$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

- 8.68. (!) Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x)f(y)$ и ограничена в окрестности 0, то $f(x) = a^x$, при некотором $a \geq 0$ и любом $x \in \mathbb{R}$.
- 8.69. (!) Докажите, что если непрерывная функция $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(a) = 1$ и при любых $x, y \in (0, \infty)$ удовлетворяет равенству $f(xy) = f(x) + f(y)$, то $f(x) = \log_a x$ при любом $x \in \mathbb{R}$.
- 8.70. Найдите все непрерывные на \mathbb{R} функции, удовлетворяющие равенству $f(x) = f(2x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$.
- 8.71. (!) Пусть функция $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна и удовлетворяет равенству $f(x^k) = kf(x)$ при каждом $x > 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f(x) = C \ln x$ при любом $x \in \mathbb{R}$, где $C \in \mathbb{R}$ — некоторая постоянная.
- 8.72. (!) Докажите, что если непрерывная функция $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ при любых $x, y \in (0, \infty)$ удовлетворяет равенству $f(x \cdot y) = f(x)f(y)$, $f(1) \neq 0$, то $f(x) = x^a$ при некотором $a \in \mathbb{R}$ и любом $x \in \mathbb{R}$.
- 8.73. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, при любых $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющие уравнению $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.
- 8.74. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям $f(z+z') = f(z) + f(z')$, $f(zz') = f(z)f(z')$. Докажите, что $f(z) = 0$, или $f(z) = z$, или $f(z) = \bar{z}$ для любого $z \in \mathbb{C}$.
- 8.75. Установите иррациональность следующих чисел:
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
 - $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$;
 - $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$;
 - $\log_2 r$, если $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ и $r \neq 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- 8.76. Докажите, что число $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ иррационально.
- 8.77. Докажите, что для любого $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0, \pm 1$ число $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} r$ иррационально.
- 8.78. Докажите, что для любого положительного рационального числа $r \neq 1$ существуют такие два положительных иррациональных числа a и b , что $r = a^b$.
- 8.79. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *чётной*, если выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ и *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что функции $\cos x$ и $\operatorname{ch} x$ являются чётными, а $\sin x$ и $\operatorname{sh} x$ — нечётными.

- 8.80. Пусть $F(x) = f_1(x) \cdots f_n(x) \cdot g_1(x) \cdots g_m(x)$, где f_i — чётные функции, g_j — нечётные функции. При каких n и m функция $F(x)$ будет чётной (нечётной)?
- 8.81. Докажите, что любая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ может быть представлена единственным образом в виде суммы чётной и нечётной функций.
- 8.82. Найдите все функции, являющиеся одновременно чётными и нечётными.
- 8.83. Докажите, что если непрерывная функция удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, то f — линейная функция.
- 8.84. Докажите, что если монотонная функция удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, то f — линейная функция.
- 8.85. Приведите пример чисел $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ таких, что $a^\gamma = b$ для некоторого иррационального числа γ .
- 8.86. Докажите, что для любого рационального числа $a \neq 1$ существует иррациональное число γ такое, что $a^\gamma \in \mathbb{Q}$.
- 8.87. К множеству сечений на \mathbb{Q} добавим два элемента \mathbb{Q} и \emptyset и отождествим \mathbb{Q} с $-\infty$, а \emptyset с $+\infty$. Докажите, что справедливы равенства $-\infty + x = -\infty$ и $+\infty + x = +\infty$ для любых сечений x . Чему равно $-\infty + \infty$?
- 8.88. Будем называть точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ рациональной, если $x, y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что
- а) если окружность содержит три рациональных точки, то она содержит бесконечно много рациональных точек;
 - б) существуют окружности, которые не содержат рациональных точек;
 - в) существуют окружности содержащие одну или две рациональные точки.

9. Дифференцируемость функций

Функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in (a, b)$, если имеется конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Конечный или бесконечный предел $f'(x_0)$ называется *производной* функции f в точке x_0 . Пределы $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$ называются соответственно *правой и левой производной*. Функцию называют дифференцируемой на (a, b) , если она дифференцируема в каждой точке $x \in (a, b)$. Множество дифференцируемых функций обозначают через $D(a, b)$. Функцию $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема на интервале (a, b) и имеет конечные правую и левую производные в точках a и b соответственно, которые в этом случае будем обозначать через $f'(a)$ и $f'(b)$.

Дифференциалом $df(x_0)$ функции f в точке x_0 называется такое линейное отображение, действующее из \mathbb{R} в \mathbb{R} , что¹² $f(x) - f(x_0) = df(x_0)\langle x - x_0 \rangle + o(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$.

Введём обозначение k -й производной $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$. Будем считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$. Множество функций, k раз дифференцируемых на (a, b) , будем обозначать через $D^k(a, b)$, множество функций, у которых k -я производная непрерывна, будем обозначать через $C^k(a, b)$. Соответственно через $C^k[a, b]$ будем обозначать множество таких функций f , что функция $f^{(k)}$ непрерывна на $[a, b]$. Функции класса C^1 называются *непрерывно дифференцируемыми*.

9.1. Свойства операции дифференцирования

- 9.1. (!) Докажите, что функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда она имеет дифференциал в этой точке, причём $df(x_0)\langle y \rangle = f'(x_0)y$.
- 9.2. (!) Докажите, что дифференцируемая в точке функция является непрерывной в этой точке.
- 9.3. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$. Докажите, что $f + g, f \cdot g \in D(a, b)$ и справедливы равенства:
 - а) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
 - б) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- 9.4. (!) Пусть $f \in D(a, b)$ и $f(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Докажите, что $1/f(x) \in D(a, b)$ и $(1/f(x))' = -f'(x)/f^2(x)$.

¹² Если функция имеет более одного аргумента, то аргумент, от которого она зависит линейно, будем писать в угловых скобках.

9.5. Пусть $f_1, \dots, f_n \in D(a, b)$. Докажите равенство

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = \sum_{k=1}^n f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n.$$

9.6. (!) Пусть $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ и $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции. Докажите, что $g \circ f \in D(a, b)$ и $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.

9.7. Докажите, что производная чётной функции — нечётная функция, а нечётной — чётная.

9.8. Пусть $f \in D(-h, h)$ — чётная функция. Докажите, что $f'(0) = 0$.

9.9. Пусть $f(x) = g(x)$ при любом $x \in U$, где $U \in \mathcal{N}(x_0)$. Докажите, что функции f и g дифференцируемы или не дифференцируемы в x_0 одновременно и их производные в первом случае равны.

9.10. (!) Пусть функция f имеет обратную, причём функция f^{-1} дифференцируема в точке $y = f(x) \in \mathbb{R}$, а функция f дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$. Докажите равенство $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$.

9.11. Докажите свойство определителя матрицы

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{21}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{21}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

9.12. (!) Вычислите по определению производную функции $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

9.13. (!) Докажите, что $(e^x)' = e^x$.

9.14. (!) Докажите, что $(a^x)' = a^x \ln a$, где $a > 0$.

9.15. (!) Докажите, что $(\ln x)' = 1/x$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, где $a > 0$.

9.16. Найдите производную функции $f(x) = x^x$, $x > 0$.

9.17. (!) Докажите, что $(f(x)^{g(x)})' = (\ln f(x))f(x)^{g(x)}g'(x) + g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$, т. е. первое слагаемое есть производная от $f(x)^{g(x)}$ как показательной функции (считаем $f(x)$ постоянной), а второе слагаемое есть производная от $f(x)^{g(x)}$ как степенной функции (считаем $g(x)$ постоянной).

- 9.18. (!) Докажите равенство $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 9.19. (!) Докажите равенства $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.
- 9.20. (!) Докажите равенства $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 9.21. (!) Докажите равенства $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
- 9.22. Докажите, что многочлены Чебышёва T_n (см. задачу 2.13) удовлетворяют уравнению $(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n(x) = 0$.
- 9.23. Вычислите суммы:
- a) $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$; c) $\sum_{k=1}^n k \sin kx$;
b) $\sum_{k=1}^n k^2 e^{kx}$; d) $\sum_{k=1}^n k \cos kx$.
- 9.24. Вычислите производную функции f в нуле, где
- $$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots + \sqrt{x + \sqrt{x+1}}}} \quad (n \text{ корней}) .$$
- 9.25. Пусть $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ и функции f_n заданы рекуррентной формулой $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. Найдите $f_n'(0)$.
- 9.26. Исследуйте на дифференцируемость функции:
- a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = \sqrt{|x|}$.
- 9.27. (!) Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

всюду дифференцируема, однако её производная разрывна в точке $x = 0$.

- 9.28. Пусть $f(x) = g(x)$ для всех $x \in [x_0, a)$. Докажите, что f и g имеют правые производные в x_0 одновременно и $f'_+(x) = g'_+(x)$.
- 9.29. Исследуйте на дифференцируемость функции:
- a) $f(x) = |\sin(x^2)|$; f) $f(x) = |x \cos^5 x|$;
b) $f(x) = |x \cos^3 x|$; g) $f(x) = |\cos^3 \frac{1}{x}|$, $f(0) = 0$;
c) $f(x) = |\sin^3 \frac{1}{x}|$, $f(0) = 0$; h) $f(x) = |x^3 \sin^3 \frac{1}{x}|$, $f(0) = 0$;
d) $f(x) = |x^3 \cos^3 \frac{1}{x}|$, $f(0) = 0$; i) $f(x) = \frac{x \sin(1/x)}{\ln|x|}$, $f(0) = 0$.
e) $f(x) = |\sin(x^3)|$;

9.30. Исследуйте на дифференцируемость функции:

- a) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$; c) $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.
b) $f(x) = x(\sin x)^{1/3}$;

9.31. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

При каких значениях параметров $\alpha, \beta > 0$ функция f является

a) непрерывной; b) дифференцируемой; c) непрерывно дифференцируемой?

9.32. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\cos \frac{\pi}{x}| & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x = 0$, но дифференцируема в этой точке.

9.33. Приведите пример функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей точки разрыва в любой окрестности нуля, но дифференцируемой в нуле.

9.34. Исследуйте на дифференцируемость функции:

- a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 \ln x^2 & \text{при } x > 0; \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 \ln x & \text{при } x > 0. \end{cases}$

9.35. Выясните, существует ли число $a \in \mathbb{R}$, при котором функция f дифференцируема в нуле, где

- a) $f(x) = \begin{cases} 1/x - \operatorname{ctg} x & \text{при } x \neq 0, \\ a & \text{при } x = 0; \end{cases}$
b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ a & \text{при } x = 0; \end{cases}$
c) $f(x) = \begin{cases} |\frac{\sin x}{x}| & \text{при } x \neq 0, \\ a & \text{при } x = 0. \end{cases}$

9.36. Исследуйте на непрерывную дифференцируемость функции:

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

9.37. Существует ли такое число $a \in \mathbb{R}$, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x < 0, \\ a, & \text{при } x = 0, \\ x^2 \ln x, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

является непрерывно дифференцируемой?

9.38. Пусть $f \in C(a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$. Докажите, что функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\substack{t > s > 0 \\ t > h > 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-s)}{h+s}$.

9.39. Пусть $f \in D(a, b)$. Докажите, что функция f удовлетворяет условию Липшица (см. 7.43) с константой $L > 0$ тогда и только, когда $\sup_{x \in (a, b)} |f'(x)| \leq L$.

9.40. Пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (см. 7.43), а функция φ дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}$ и $\varphi'(a) = 0$. Докажите, что композиция $f \circ \varphi$ дифференцируема в точке a и $(f \circ \varphi)'(a) = 0$.

9.41. Докажите, что функция f имеет производную в точке $a \in \mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда её можно представить в виде $f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$, где функция φ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$. Найдите $f'(a)$.

9.42. Докажите, что функция $f(x) = |x - a|\varphi(x)$ не дифференцируема в $a \in \mathbb{R}$, если функция φ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ и $\varphi(a) \neq 0$.

9.43. Пусть $f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$ и $\varphi \in D^n(a - h, a + h)$. Докажите, что функция f дифференцируема $(n + 1)$ раз в точке a .

9.44. Пусть функция f непрерывна, но не дифференцируема в x_0 , а функция f^2 дифференцируема в x_0 . Докажите, что $f(x_0) = 0$.

9.45. Исследуйте на дифференцируемость функцию $f(x) = \chi(x)x^2 + (1 - \chi(x))(2|x| - 1)$, где $\chi(x)$ — функция Дирихле (см. задачу 7.89), и найдите её производные в точках дифференцируемости.

9.46. Исследуйте на дифференцируемость функцию Римана $\rho(x)$ (см. задачу 7.92).

- 9.47. С помощью теоремы Дирихле (см. задачу 3.35) исследуйте на дифференцируемость квадрат функции Римана $\rho^2(x)$.
- 9.48. Докажите, что как множество точек дифференцируемости, так и множество точек недифференцируемости функции $\rho_{10}^2(x)$ (см. задачу 7.91) плотно в \mathbb{R} .
- 9.49. Известна **теорема Лиувилля**: если число $\alpha \in \mathbb{R}$ является корнем многочлена n -й степени с целыми коэффициентами, то найдётся такое $M > 0$, что $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{1}{Mq^n}$ при любых $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$. Докажите, что как множество точек дифференцируемости, так и множество точек недифференцируемости функции $\rho^3(x)$ плотно в \mathbb{R} .
- 9.50. Известна **теорема Роты**: если число $\alpha \in \mathbb{R}$ является алгебраическим и $\tau \geq 2$, то найдётся не более конечного числа пар ненулевых взаимно простых чисел $p, q \in \mathbb{Z}$ таких, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\tau}$. Докажите, что как множество точек дифференцируемости, так и множество точек недифференцируемости функции $\sigma(x)$ (см. задачу 7.93) плотно в \mathbb{R} .

9.2. Свойства дифференцируемых функций

- 9.51. (!) Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в $c \in (a, b)$ и $f'(c) > 0$. Докажите, что найдётся окрестность $U \in \mathcal{N}(c)$, в которой для всех $x_1, x_2 \in U$, $x_1 < c < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$.
- 9.52. (!) Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $c \in (a, b)$ своего локального экстремума. Докажите, что $f'(c) = 0$ (**лемма Ферма**).
- 9.53. (!) Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) , причём $f(a) = f(b)$. Докажите существование такого числа $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$ (**теорема Ролля**).
- 9.54. Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) , причём имеются n таких точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, что $f(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Докажите, что найдутся $n - 1$ точек $a < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < b$, в которых $f'(y_i) = 0$.
- 9.55. Пусть $f \in D^n(x_0, x_n)$ и функция f непрерывна на $[x_0, x_n]$. Докажите, что если $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$ при $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, то найдётся число $c \in (x_0, x_n)$ такое, что $f^{(n)}(c) = 0$.

- 9.56. (!) Пусть непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b) . Докажите, что существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$ (**теорема Лагранжа**).
- 9.57. (!) Пусть непрерывные функции $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a, b) , причём $g'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Докажите, что существует точка $c \in (a, b)$, в которой $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (**теорема Коши**).
- 9.58. Пусть $f \in D(a, b)$ и функция f не ограничена на (a, b) . Докажите, что $f'(x)$ не ограничена на (a, b) .
- 9.59. Приведите пример такой функции $f \in D(a, b)$, что $f'(x)$ не ограничена на (a, b) , а $f(x)$ ограничена на (a, b) .
- 9.60. Пусть $f \in D(a, b)$ и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ и $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)f'(x) = \beta$. Докажите, что $\beta = 0$.
- 9.61. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Докажите, что найдётся точка $a \in \mathbb{R}$, в которой $f'(a) = 0$.
- 9.62. Пусть непрерывные функции $f, g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a, b) . Докажите существование такой точки $\xi \in (a, b)$, что
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(\xi) \\ g(a) & g(b) & g'(\xi) \\ h(a) & h(b) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$
- 9.63. Пусть $f \in D(a, b)$ и $f((a+b)/2) \neq f(a) = f(b) = 0$. Докажите существование таких $x_1, x_2 \in (a, b)$, что $f'(x_1) > 0 > f'(x_2)$.
- 9.64. Пусть $f \in C^2(a, b)$. Верно ли, что для любого $\xi \in (a, b)$ найдутся такие $x_1, x_2 \in (a, b)$, что $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$?
- 9.65. Докажите, что если функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и не является линейной, то имеется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|$.
- 9.66. Докажите неравенство $\frac{1}{x^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(x-1)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} \right)$ при всех $x > 1$ и $\alpha > 0$.
- 9.67. Докажите, что если функция f непрерывна на $[0, 1]$, дифференцируема на $(0, 1)$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f'(x) \geq -2$ при любом $x \in (0, 1)$, то $f(x)$ является линейной функцией.

- 9.68. Докажите, что если $f \in C^2[a, b]$, $f'(a) = f'(b) = 0$, то имеется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f''(\xi) \leq 0$.
- 9.69. Докажите, что если $f \in C^2[a, b]$ и $f'(a) = f'(b) = 0$, то имеется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $|f''(\xi)| \geq \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}$.
- 9.70. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, тогда найдётся такое число $\theta \in (0, 1)$, что справедливо равенство $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$. Найдите все функции f , для которых θ не зависит от точки x .
- 9.71. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и существуют такие ненулевые $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что $f'(\alpha x + \beta y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ при любых $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Докажите, что если $\alpha = \beta = 1/2$, то функция f является многочленом не более чем второй степени, а в остальных случаях функция f является линейной.
- 9.72. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Докажите, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ найдутся $x_1, x_2 \in [0, 1]$, $x_1 \neq x_2$ такие, что $\frac{\alpha_1}{f'(x_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(x_2)} = \alpha_1 + \alpha_2$.
- 9.73. Пусть $f \in D(0, a)$. Докажите, что для любых $x_1, x_2 \in (0, a)$ найдётся точка $\xi \in (x_1, x_2)$, в которой $\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$.
- 9.74. Пусть $f \in D(a, b)$, производная f' строго монотонна и найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$.
- 9.75. Приведите пример такой функции $f \in D(\mathbb{R})$, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$,
а $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ не существует.
- 9.76. Приведите пример такой функции $f \in D(\mathbb{R})$, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,
а $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ не существует.
- 9.77. Докажите, что если $f \in D(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \infty$, то
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.
- 9.78. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
- 9.79. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = a \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Докажите, что $a = 0$.

- 9.80. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$. Докажите, что если имеется такая последовательность (x_n) , что $x_n \rightarrow \infty$ и $\frac{f(x_n)}{x_n} \rightarrow 0$, то найдётся такая последовательность (y_n) , что $y_n \rightarrow \infty$ и $f'(y_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
- 9.81. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$, производная f' возрастает (убывает) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- 9.82. Пусть $f \in D(0, \infty)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = a$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.
- 9.83. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ и имеется такое $C \in (0, \infty)$, что $f'(x) \leq C f(x)$ при любом $x > 0$. Докажите, что $f(x) \leq 0$ при любом $x > 0$.
- 9.84. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Докажите, что при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет место предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+a) - f(x)) = 0$.
- 9.85. Пусть $f \in D^2(\mathbb{R})$ и имеется такое $C \in (0, \infty)$, что $|f''(x)| \leq C$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
- 9.86. Пусть $f \in D^2(\mathbb{R})$ и найдутся такие $C \in (0, \infty)$ и $0 < \alpha < 1$, что $|f'(x)| \leq C|x|^\alpha$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 9.87. Пусть $f \in D^r(\mathbb{R})$. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^r} = 0$, то найдётся такая последовательность x_n , что $x_n \rightarrow \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(r)}(x_n) = 0$.
- 9.88. Пусть $f \in D^r(\mathbb{R})$ и $f^{(r)}(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. Докажите, что существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{r-1}}$.
- 9.89. (§ 13) Пусть функция $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема, $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$ и для некоторого $\alpha > 1$ выполняется $\frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2} \leq \alpha$ для всех $x \in (0, \infty)$. Докажите, что $\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^\alpha} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.
- 9.90. Пусть функция $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дважды дифференцируема и $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2} \leq 1$.

- 9.91. Для любого $\alpha \leq 1$ приведите пример дважды дифференцируемой функции $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2} = \alpha$.
- 9.92. Пусть функция $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ трижды дифференцируема, $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$ и $\varphi''(x) > 0$. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(x)\varphi'''(x)}{(\varphi''(x))^2} = \alpha$. Докажите, что существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2} = \frac{1}{2-\alpha}$.
- 9.93. Пусть $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-k}$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?
- 9.94. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$ — периодическая функция. Докажите, что $f'(x)$ также является периодической.
- 9.95. Докажите, что функция $f(x) = \sin x + \cos \sqrt{2}x$ — непериодическая.
- 9.96. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$ — периодическая функция с периодом T . Докажите, что на промежутке $[0, T)$ функция f' принимает значение 0 не менее двух раз.
- 9.97. Докажите, что если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = o(|x - x_0|)$ при $x \rightarrow x_0$.
- 9.98. Докажите, что если функция f дифференцируема n раз в точке x_0 и $f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, то $f(x) - f(x_0) = o(|x - x_0|^n)$ при $x \rightarrow x_0$.
- 9.99. Приведите пример функции f такой, что $f(x) - f(x_0) = o((x - x_0)^2)$ при $x \rightarrow x_0$, но f не дифференцируема дважды в точке x_0 .
- 9.100. Пусть $f(x) = o((x - x_0)^2)$. Докажите, что функция f имеет вторую производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она представима в виде $f(x) = g(x)(x - x_0)^2$, где $g(x) = o(1)$, g дифференцируема во всех точках x , $x \neq x_0$ некоторой окрестности точки x_0 и $g'(x) = o\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$ при $x \rightarrow x_0$.
- 9.101. Приведите пример функции f такой, что $f(x) = o((x - x_0)^2)$ при $x \rightarrow x_0$, которая не имеет второй производной в точке x_0 , но f представима в виде $f(x) = g(x)(x - x_0)^2$, где $g(x) = o(1)$, g дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , $g(x) = o(1)$ и $g'(x) = O\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$ при $x \rightarrow x_0$.

- 9.102. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$, $g(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$ и $f, g \in C[a, b]$. Докажите, что если $f'(x) = o(g'(x))$ при $x \rightarrow a$, то $(f(x) - f(a)) = o(g(x) - g(a))$ при $x \rightarrow a$.
- 9.103. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$, $g(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$ и $f, g \in C[a, b]$. Докажите, что если $f'(x) = O(g'(x))$ при $x \rightarrow a$, то $(f(x) - f(a)) = O(g(x) - g(a))$ при $x \rightarrow a$.
- 9.104. Пусть $f \in D(a, b)$ и $\alpha \geq 0$. Докажите, что если $f'(x) = o((x - a)^\alpha)$ при $x \rightarrow a + 0$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $(f(x) - A) = o((x - a)^{\alpha+1})$ при $x \rightarrow a$.
- 9.105. Для произвольного $\alpha \geq 0$ приведите пример функции $f \in D(0, a)$, $f \in C[0, a]$, для которой $(f(x) - f(0)) = o(x^{\alpha+1})$, но не верно, что $f'(x) = o(x^\alpha)$ при $x \rightarrow 0$.
- 9.106. Пусть $f \in D(a, b)$ и $\alpha \geq 0$. Докажите, что если $f'(x) = O((x - a)^\alpha)$ при $x \rightarrow a$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $(f(x) - A) = O((x - a)^{\alpha+1})$ при $x \rightarrow a$.
- 9.107. (!) Докажите, что если $f \in D(a, b)$ и $f'(x) = 0$ при любом $x \in (a, b)$, то $f(x)$ — постоянная функция.
- 9.108. Докажите тождества:
 а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} (1/x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$;
 б) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) = \pi \operatorname{sgn} x$ при $|x| \geq 1$.
- 9.109. Докажите, что если $f \in D^1(a, b)$ и $f'(x) = \alpha$ при любом $x \in (a, b)$, то $f(x) = \alpha x + c$ — аффинная функция.
- 9.110. Докажите, что если $f \in D^2(\mathbb{R})$ и $f'' \equiv 0$, то имеются такие $a, b \in \mathbb{R}$, что функция f представляется в виде $f(x) = ax + b$.
- 9.111. (!) Докажите, что если $f \in D^n(\mathbb{R})$ и $f^{(n)}(x) \equiv 0$, то функция f является многочленом степени не выше $n - 1$.
- 9.112. Докажите (не используя лемму Безу), что не равный нулю тождественно многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ имеет не более n корней.
- 9.113. Докажите, что два многочлена степени n совпадают, если их значения совпадают в $n + 1$ точке.

- 9.114. (!) Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Докажите, что для произвольного набора точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ справедливо равенство (интерполяционная формула Лагранжа)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) \frac{(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_1) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)}.$$

- 9.115. Пусть многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n вещественных корней. Докажите, что многочлен $f^{(k)}(x)$ имеет $n-k$ вещественных корней.
- 9.116. Пусть $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{a_i x}$, $f(x) \not\equiv 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет не более $n-1$ корней.
- 9.117. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0$ при любом $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и функция f является многочленом на $(0, h)$. Докажите, что $f(x) = 0$ для всех $x \in (0, h)$.
- 9.118. Докажите, что если для каждой точки $x \in \mathbb{R}$ найдётся интервал $(x-h, x+h)$, на котором функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ является многочленом, то функция f является многочленом на всём \mathbb{R} .
- 9.119. Докажите, что если $f \in D^2(\mathbb{R})$ и при любом $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f(x)f'(x)f''(x) = 0$, то функция f является аффинной.
- 9.120. Докажите, что если $f \in D^n(\mathbb{R})$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое k , $0 \leq k \leq n$, что $f^{(k)}(x) = 0$, то функция f есть многочлен степени не выше $n-1$.
- 9.121. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(x) = 0$. Докажите, что функция f есть многочлен.
- 9.122. Пусть $f \in C^\infty(0, \infty)$ и при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется $f^{(n)}(0) = 0$ и $f^{(n)}(x) \geq 0$ при $x > 0$. Докажите, что $f(x) = 0$ при любом $x \geq 0$.
- 9.123. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и существует предел $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$. Докажите, что $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x)$.
- 9.124. Пусть $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$, причём $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < |\alpha - \beta|/2$. Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и функция f имеет в каждой точке $x \in (a, b)$ правую

$f'_+(x)$ и левую $f'_-(x)$ производные. Рассмотрим множество $B_{\varepsilon, \delta}^{\alpha, \beta} = \{x \in (a, b) \mid \forall y \in (a, b) (x < y < x + \delta \Rightarrow |\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \beta| < \varepsilon)\} \cap \{x \in (a, b) \mid \forall y \in (a, b) (x - \delta < y < x \Rightarrow |\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \alpha| < \varepsilon)\}$. Докажите, что множество $B_{\varepsilon, \delta}^{\alpha, \beta}$ конечно.

- 9.125. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет всюду левые и правые производные. Докажите, что $f'_+(x) = f'_-(x)$ всюду за исключением не более чем счётного множества точек.
- 9.126. Пусть $f \in D(a, b)$, причём $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Докажите, что $f'(x_0) = 0$.
- 9.127. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, причём $f'_+(a) > 0$ и $f'_-(b) < 0$ (или $f'_+(a) < 0$ и $f'_-(b) > 0$). Докажите, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.
- 9.128. (!) Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, причём $f'_+(a) = A$ и $f'_-(b) = B$. Докажите, что для любого $C \in (A, B)$ существует такая точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = C$ (**теорема Дарбу**).
- 9.129. Пусть $f \in D(a, b)$. Докажите, что производная f' может иметь разрывы только 2-го рода.
- 9.130. Пусть $f \in D(a, b)$ и имеются $\lim_{x \rightarrow c+0} f'(x)$ и $\lim_{x \rightarrow c-0} f'(x)$, где $c \in (a, b)$. Докажите, что f' непрерывна в точке c .
- 9.131. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и $f'_+(0) = 1$, а $f'_-(1) = 0$. Докажите существование такой точки $c \in (0, 1)$, что $f'(c) = c$.
- 9.132. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и $f(0) = f(1) = 0$. Докажите существование такой точки $c \in (0, 1)$, что $f'(c) = f(c)$.
- 9.133. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция. Докажите, что функция $f + f'$ принимает на $(0, 1)$ все значения из промежутка $(f(0) + f'_+(0), f(1) + f'_-(1))$.
- 9.134. Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такая точка $c \in (0, 1)$, что $f'(c) = \alpha f(c)$.

- 9.135. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и найдётся такая последовательность (x_n) , что $x_n \rightarrow \infty$ и $f(x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 9.136. Пусть функция $f \in C^1(0, +\infty)$, причём $f(0) = 1$ и $|f(x)| \leq e^{-x}$. Докажите, что найдётся такая точка x_0 , что $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.
- 9.137. Постройте пример функции, дифференцируемой в точке x_0 и разрывной в каждой точке множества $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- 9.138. Постройте пример непрерывной функции, дифференцируемой в точке x_0 и не дифференцируемой в каждой точке множества $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- 9.139. Постройте пример непрерывной на $[-1, 1]$ функции, недифференцируемой в каждой точке.
- 9.140. (!) Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow (A, B)$ является дифференцируемой, причём $f'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Докажите, что существует обратная функция $f^{-1} : (A, B) \rightarrow (a, b)$, дифференцируемая на (A, B) , причём $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ при любом $y \in (A, B)$.
- 9.141. (!) Пусть $f \in D(a, b)$, причём f' непрерывна и не равна 0 в некоторой точке $c \in (a, b)$. Докажите, что найдётся такой интервал (α, β) , что функция f обратима на (α, β) и обратная к ней на этом промежутке функция является дифференцируемой.
- 9.142. Существенно ли условие непрерывности f' в задаче 9.141? Рассмотрите функцию $f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$.
- 9.143. (!) Пусть взаимно обратные функции f и f^{-1} непрерывны в точках $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f(x_0) \in \mathbb{R}$ соответственно. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то функция f^{-1} дифференцируема в точке $f(x_0)$, причём $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$.
- 9.144. Постройте пример функции f , удовлетворяющей всем условиям предыдущей задачи и не являющейся непрерывной ни в какой окрестности точки x_0 .
- 9.145. Докажите, что уравнение Кеплера $y = x - \alpha \sin x$, $|\alpha| \leq 1$ имеет единственное решение при любом $y \in \mathbb{R}$.
- 9.146. Пусть $f \in D^1(a, b)$. Докажите, что производная f' непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что из $|s|, |t| < \delta$ вытекает неравенство $|f(x_0 + s) - f(x_0 + t) - f'(x_0)(s - t)| \leq \varepsilon|s - t|$.

9.147. Пусть $f \in C^1(a, b)$ и $S = \{x \in (a, b) \mid f'(x) = 0\}$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют последовательность чисел (r_n) , $r_n > 0$, со свойством $\sum_{n=1}^{\infty} r_n \leq \varepsilon$ и такая последовательность интервалов (a_n, b_n) , $b_n - a_n \leq r_n$, что $f(S) \subset \bigcup_n (a_n, b_n)$.

9.148. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x . Если существует предел $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, то он называется *производной Шварца* функции f в точке x . Докажите, что если в точке x существует обычная производная, то существует и производная Шварца, однако обратное неверно.

9.149. Если существует предел $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$, то он называется *второй производной Шварца* функции $f(x)$ в точке x . Доказать, что если в точке x существует обычная вторая производная, то существует и вторая производная Шварца, однако обратное неверно.

9.150. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что если вторая производная Шварца функции f всюду на (a, b) равна 0, то f есть аффинная функция (**теорема Шварца**).

9.151. Для функции $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ определим по индукции *разностную производную* порядка k , полагая $\Delta_h^0 f(x) = f(x)$ и

$$\Delta_h^k f(x) = \frac{\Delta_h^{k-1} f(x+h) - \Delta_h^{k-1} f(x)}{h} = \frac{1}{h^k} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(x+(k-j)h)$$

для $x, x+kh \in (a, b)$, $h \neq 0$. Пусть $f \in D^{k+1}(a, b)$. Докажите, что найдётся такая точка $\xi \in (x, x+kh)$ (либо $\xi \in (x+kh, x)$), для которой справедливо равенство

$$\Delta_h^k f(x) = f^{(k)}(x) + \frac{1}{2} kh f^{(k+1)}(\xi).$$

9.152. Пусть $f \in D^k(a, b)$, $h \neq 0$ и $x, x+kh \in (a, b)$. Докажите, что найдутся такие x_1, x_2 , $x \leq x_1 < x_2 \leq x_1+h \leq x+kh$ либо $x+kh \leq x_2 < x_1 \leq x_2+h \leq x$, что справедливо равенство

$$\Delta_h^k f(x) = f^{(k)}(x) + \frac{1}{2}(k+1)(f^{(k)}(x_2) - f^{(k)}(x_1)).$$

9.153. Пусть $f \in D^k(a, b)$. Докажите, что $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h^k f(x) = f^{(k)}(x)$ при любом $x \in (a, b)$.

- 9.154. Приведите пример такой функции f , для которой существует конечный предел $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h^k f(x_0)$, однако не существует $f^{(k)}(x_0)$.

9.3. Неравенства и локальные экстремумы функций

- 9.155. (!) Пусть $f \in D(a, b)$, причём $f'(x) \leq 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f'(x) \geq 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Докажите, что x_0 является точкой локального минимума функции f .
- 9.156. (!) Пусть $f \in D(a, b)$, причём $f'(x) \geq 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f'(x) \leq 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Докажите, что x_0 является точкой локального максимума функции f .
- 9.157. (!) Пусть функция f дифференцируема в $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f'(x_0) \neq 0$. Докажите, что точка x_0 не является точкой локального экстремума функции f .
- 9.158. Пусть функция f дифференцируема в точке $x = 0$, последовательности (x_n) , (y_n) стремятся к нулю. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(-x_n)}{2x_n} = f'(0)$. Верно ли, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(-y_n)}{x_n + y_n} = f'(0)$?
- 9.159. Пусть функция f непрерывна в $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f'_+(x_0) > 0 > f'_-(x_0)$. Докажите, что x_0 есть точка локального минимума функции f .
- 9.160. (!) Пусть $f \in D(a, b)$ и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) при всех $x \in (a, b)$. Докажите, что функция f монотонно возрастает (убывает).
- 9.161. Найдите $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, если $f(x) = x + \frac{A}{x}$, $A > 0$.
- 9.162. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$ и f, g непрерывны на $[a, b]$. Докажите, что если $f'(x) \leq g'(x)$ при любом $x \in (a, b)$, то $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.
- 9.163. Докажите, что если при выполнении условий предыдущей задачи $f'(c) < g'(c)$ хотя бы в одной точке $c \in (a, b)$, то $f(b) - f(a) < g(b) - g(a)$.
- 9.164. (!) Пусть $f, g \in D^n(a, b)$. Докажите, что если $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$ для всех $k = 0, \dots, n-1$ и $f^{(n)}(x) < g^{(n)}(x)$ при любом $x \in (c, b)$, то $f(x) < g(x)$ при любом $x \in (c, b)$.

9.165. Пусть функция f непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$ и $f \in D^n(a, \infty)$, причём $f'(x) > \alpha > 0 > f(a)$ при любом $x \in (a, \infty)$. Докажите, что в интервале $(a, a - \frac{f(a)}{\alpha})$ уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень.

9.166. Для $x, y \in \mathbb{R}$ докажите неравенства:

- a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;
- b) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$;
- c) $|\ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2)| \leq |x - y|$;
- d) $|\ln(1 + \cos^2 x) - \ln(1 + \cos^2 y)| \leq |x - y|$;
- e) $|\arctg(\sin x) - \arctg(\sin y)| \leq |x - y|$;
- f) $|\cos(\arctg x) - \cos(\arctg y)| \leq |x - y|$.

9.167. Докажите неравенство

$$\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y} \quad \text{при } 0 < y < x.$$

9.168. Докажите неравенства:

- a) $e^x - 1 - x < x^2 e^x$ при $x > 0$;
- b) $\ln(1 + x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ при $x > 0$;
- c) $\ln(1 + x^2) < x \arctg x$ при $x > 0$;
- d) $e^x + \ln(1 + x) > 2x + 1$ при $x > 0$.

9.169. Пусть $x \in (0, \pi/2)$. Докажите неравенства:

- a) $\sin x > x - x^3/6$;
- b) $x + \frac{x^3}{3} < \tg x$;
- c) $\tg x + \sin x > 2x$;
- d) $\cos x < (\frac{\sin x}{x})^3$.

9.170. Докажите, что если $f \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и $f''(x) \leq 1$ для всех $x \in (0, 1)$, то $f(x) \geq x(x-1)/2$ при любом $x \in [0, 1]$.

9.171. Докажите неравенство $x^e < e^x$ при $x > e$.

9.172. Что больше — e^π или π^e ?

9.173. Пусть $f \in D^n(\mathbb{R})$ и $f^{(k)}(0) = 0$ при всех $k = 0, \dots, n$. Докажите, что если $A \leq f^{(n)}(x) \leq B$ при всех $x \in (0, h)$, то $A \frac{x^n}{n!} \leq f(x) \leq B \frac{x^n}{n!}$ при каждом $x \in (0, h)$.

9.174. Докажите неравенство $a^{b^a} > b^{a^b}$, если $a > b > 0$.

- 9.175. (!) Пусть $f \in D^2(a, b)$, причём $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$. Докажите, что x_0 является точкой локального минимума функции f .
- 9.176. (!) Пусть $f \in D^2(a, b)$, причём $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$. Докажите, что x_0 является точкой локального максимума функции f .
- 9.177. Пусть функция φ непрерывна в x_0 и $\varphi(x_0) \neq 0$. При каких $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ имеет экстремум в точке $x_0 \in \mathbb{R}$?
- 9.178. (!) Пусть $f \in D^n(a, b)$, $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) > 0$. Докажите, что если n чётно, то $x_0 \in (a, b)$ является точкой локального минимума, а если n нечётно, то в точке x_0 нет локального экстремума.
- 9.179. Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что функция $f^2(x)$ имеет локальные экстремумы в тех же точках, что и функция $f(x)$. Будет ли это утверждение верным для произвольной функции?
- 9.180. Пусть даны функции $f, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, причём φ строго монотонно возрастает. Докажите, что
- функция $\varphi(f(x))$ имеет локальные экстремумы в тех же точках, что и функция $f(x)$;
 - если φ — сюръективное отображение на \mathbb{R} , то максимальные и минимальные значения функций $f(\varphi(x))$ и $f(x)$ совпадают по величине.
- 9.181. Сколько точек локального минимума и локального максимума имеет функция $f(x) = \sin(x^\alpha) \ln x$, $\alpha \geq 1$, на интервале $(0, 1)$?
- 9.182. Сколько точек локального минимума и локального максимума имеет функция $f(x) = (1 - \cos x) \ln x$ на интервале $(0, 1)$?
- 9.183. Сколько вещественных корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$ на интервале $[2\pi, \infty)$, если
- $$f(x) = x \cos x + x^2 \sin x - 3x^3 + 1000, \quad g(x) = x \sin x + 4x^2?$$
- 9.184. Докажите, что уравнение $1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} = 0$ имеет один вещественный корень, если n нечётно, и ни одного, если n чётно.
- 9.185. Докажите, что уравнение $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = 0$ имеет один вещественный корень, если n нечётно, и ни одного, если n чётно.
- 9.186. Верно ли, что произведение двух строго возрастающих на интервале (a, b) функций будет возрастающей функцией?

- 9.187. Может ли произведение строго возрастающей на интервале (a, b) функции и строго убывающей на интервале (a, b) функции быть строго возрастающей на интервале (a, b) функцией?
- 9.188. Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции, имеющие правые производные. Докажите, что если $|f'_+(x)| \leq g'_+(x)$ при любом $x \in (a, b)$, то $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.
- 9.189. Докажите утверждение, сформулированное в предыдущей задаче, в случае, когда правые производные отсутствуют в не более чем счётном числе точек.
- 9.190. (§ 11) Докажите, что если строго выпуклая вниз функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет локальный экстремум, то он единственный и это минимум функции на (a, b) . Соответственно для выпуклой вверх функции — максимум.
- 9.191. Пусть $f \in D(a, b)$. Являются ли условия $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 + \varepsilon < x < x_0$ для некоторого $\varepsilon > 0$ необходимыми для того, чтобы точка x_0 была точкой локального максимума функции? Рассмотрите функцию $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} - 2x^2$.
- 9.192. Приведите пример такой функции f , что для некоторой точки $x_1 \in \mathbb{R}$ верно неравенство $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$ при любых $x_0 < x_1 < x_2$, однако x_1 не содержится ни в каком интервале монотонности функции f .
- 9.193. Постройте пример непрерывной на (a, b) функции такой, что в некоторой точке $c \in (a, b)$ она имеет строгий максимум, однако не является монотонной ни в каком интервале вида $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$.
- 9.194. Постройте пример непрерывной на $[a, b]$ функции, строгие локальные экстремумы которой плотны в $[a, b]$.
- 9.195. Найдите наибольшее значение произведения m -й и n -й степеней ($m, n > 0$) двух положительных чисел, сумма которых равна a , т. е. вычислите $\max\{x^m y^n \mid x + y = a, x, y > 0\}$.
- 9.196. Найдите наименьшее значение суммы m -й и n -й степеней ($m, n > 0$) двух положительных чисел, произведение которых равно a , т. е. вычислите $\min\{x^m + y^n \mid xy = a, x, y > 0\}$.
- 9.197. Найдите наибольший объём цилиндра, вписанного в шар радиуса R .

- 9.198. Найдите наибольшую поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R .
- 9.199. Найдите наибольший объём конуса с заданной образующей l .

9.4. Вычисление производных высших порядков и производных неявно заданных функций

- 9.200. (!) Пусть $f, g \in D^n(a, b)$. Докажите, что $fg \in D^n(a, b)$ и $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ (формула Лейбница).
- 9.201. Вычислите производные:
 а) $(x^n e^x)^{(n)}$; б) $(x^n \ln x)^{(n)}$.
- 9.202. Докажите, что $(e^x \cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(x + \frac{\pi n}{4})$.
- 9.203. Пусть $f \in D^n(-a, a)$ и для любого $x \in (-a, a)$ справедливо равенство $f'(x) = f^n(x) + x^{n+1}$, где $n \geq 2$. Докажите, что если $f(0) = 0$, то $f^{(n)}(0) = 0$.
- 9.204. Докажите, что функция $u(x) = (x^2 - 1)^m$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(x^2 - 1)u' = 2mxu$.
- 9.205. Докажите, что многочлены Лежандра $P_m(x) = \frac{1}{2^m}((x^2 - 1)^m)^{(m)}$ удовлетворяют уравнению
- $$(1 - x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$
- 9.206. Докажите, что многочлены Лежандра $P_m(x)$ удовлетворяют уравнениям:
 а) $(m+1)P_{m+1}(x) - (2m+1)xP_m(x) + mP_{m-1}(x) = 0$;
 б) $P_m(x) = P'_{m+1}(x) - 2xP'_m(x) + P'_{m-1}(x)$;
 в) $(2m+1)P_m(x) = P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x)$.
- 9.207. Докажите, что в интервале $(-1, 1)$ многочлен Лежандра $P_m(x)$ имеет m корней.
- 9.208. Докажите, что функция $u(x) = x^m e^{-x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xu' + (x - m)u = 0$.

9.209. Докажите, что *многочлены Лагерра* $L_m(x) = \frac{1}{m!}e^x(x^m e^{-x})^{(m)}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

9.210. Докажите, что многочлены Лагерра удовлетворяют рекуррентному уравнению $L_m' = L_{m-1}' - L_{m-1}$.

9.211. Докажите, что многочлены Лагерра удовлетворяют равенству
$$L_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k m!}{(k!)^2 (m-k)!} x^k.$$

9.212. Докажите, что в интервале $(0, \infty)$ многочлен Лагерра L_m имеет m корней.

9.213. Многочлены $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ называются *многочленами Эрмита*. Докажите тождество $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

9.214. Докажите, что многочлены Эрмита удовлетворяют уравнению $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

9.215. Докажите, что многочлен Эрмита $H_n(x)$ имеет n вещественных корней.

9.216. Докажите, что функция Эрмита $\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\psi_n''(x) = (x^2 - (2n+1))\psi_n(x)$. Используя это уравнение, докажите, что корни многочлена Эрмита $H_n(x)$ лежат в интервале $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$.

9.217. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство
$$\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \text{ при } x \neq 0.$$

9.218. Пусть $f \in D^n(\mathbb{R})$. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ и $x \neq 0$ имеет место равенство
$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

9.219. Докажите, что уравнение $x^{2n} e^{1/x} (e^{-1/x})^{(n)} = 0$ имеет $n-1$ вещественный корень.

9.220. Докажите, что уравнение $(1+x^2)^{n+1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = 0$ имеет n вещественных корней.

9.221. Пусть $f \in D^n(a, b)$ и $f'(x) \neq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Докажите, что существует обратное отображение $f^{-1} : f(a, b) \rightarrow (a, b)$ и $f^{-1} \in D^n(f(a, b))$.

9.222. Пусть $g \in D^n(a, b)$ и $f \in D^n(g(a, b))$. Докажите, что $f \circ g \in D^n(a, b)$ и справедливо равенство

$$(f(g(t)))^{(n)} = \sum \frac{n! f^{(k)}(g(t))}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{g'(t)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{g^{(2)}(t)}{2!} \right)^{k_2} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!} \right)^{k_n},$$

где $k = k_1 + \cdots + k_n$ и сумма берётся по всем наборам (k_1, \dots, k_n) таким, что $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$ (**формула Фaa ди Бруно**).

9.223. Найдите $f^{(100)}(0)$, где $f(x) = 2(ax^2 + bx + c)e^{\frac{2x}{\sqrt{3}}} \cos^2 x$ и

а) $a = (\sqrt{3})^{98}$, $b = 0$, $c = (\sqrt{3})^{100}$;

б) $a = (\sqrt{3})^{98}$, $b = (\sqrt{3})^{99}$, $c = 0$.

9.224. Пусть $f(x) = (x^2 + x + 1) \sin^3 x$. Найдите $f^{(100)}(0)$.

9.225. Пусть $f(x) = \sin(x^{21} + x^{29})$. Найдите $f^{(100)}(0)$.

9.226. Пусть $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{-1}$. Вычислите производные $f^{(n)}(0)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

9.227. Вычислите производную n -го порядка функции $y(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0$, используя равенство $(1 + x^2)y'(x) \equiv 1$.

9.228. Вычислите производную n -го порядка функции $y(x)$ при $x = 0$, где

а) $y(x) = \arccos x$; б) $y(x) = (\arcsin x)^2$.

9.229. Вычислите производную n -го порядка функции $y(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$ при $x = 0$.

9.230. Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Докажите, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

9.231. (!) Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

9.232. Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & \text{при } |x| < 1; \\ 0, & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Докажите, что $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

9.233. Постройте пример функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, которая равна -1 на $(-\infty, -1]$ и равна 1 на $[1, +\infty)$.

9.234. Существует ли функция $f \in C^\infty(a, b)$ такая, что в некоторой точке $c \in (a, b)$ функция f имеет строгий локальный экстремум и $f^{(k)}(c) = 0$ при любом $k \in \mathbb{N}$?

9.235. Пусть функция f определена равенством

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что функция f дифференцируема n раз в точке $x = 0$ и не дифференцируема $n + 1$ раз в этой точке.

9.236. Найдите $g^{(7)}(0)$, если $g(x) = f(x)(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ и

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

9.237. Пусть $f \in D^2(\mathbb{R})$ и $f'(x_0) \neq 0$. Выразите $(f^{-1})''(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, через производные функции f .

9.238. Пусть трижды дифференцируемая функция $y = f(x)$ взаимно однозначна и $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = 1$, $f''(x_0) = 2$, $f'''(x_0) = 3$. Найти первую, вторую и третью производные обратной функции $x = f^{-1}(y)$ в точке y_0 .

9.239. (!) Пусть $f, g : T \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что функция $y(x)$ определена системой уравнений

$$(*) \begin{cases} y = f(t), \\ x = g(t), \end{cases}$$

если для любых $t_1, t_2 \in T$ из $g(t_1) = g(t_2)$ следует $f(t_1) = f(t_2)$ и $y(x) = f(t)$ при $g(t) = x$.

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке t_0 и $g'(t_0) \neq 0$. Докажите, что функция $y(x)$ определена системой уравнений $(*)$ в некоторой окрестности точки $x_0 = g(t_0)$, дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$ и $y'(x_0) = f'(t_0)/g'(t_0)$.

9.240. Пусть $x(t) = \ln(\cos t)$, $y(t) = \ln(\sin t)$. Вычислите $y'(x)$.

9.241. Пусть функция $y(x)$ определена системой уравнений

$$\begin{cases} y = f(t), \\ x = g(t), \end{cases}$$

где $f, g \in D^2(\mathbb{R})$ и $g'(t_0) \neq 0$. Выразите $y''(x_0)$, где $x_0 = g(t_0)$ через производные функций f и g .

9.242. Найдите $y''(x)$, если:

- a) $x = \ln(\cos t)$, $y = \ln(\sin t)$;
- b) $x = e^t/(1+t)$, $y = e^t(t-1)$;
- c) $x = \ln(\cos t)$, $y = \ln(\cos 2t)$;
- d) $x = e^t/(1-t)$, $y = e^t(t+1)$;
- e) $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$;
- f) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$;
- g) $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$;
- h) $x = t \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$.

9.243. Пусть $x = \frac{1}{4}(t + e^{-t})$, $y = e^{-t/2}$ ($t > 0$). Докажите, что

$$yy''(x) = (y'(x))^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2}.$$

9.244. Пусть $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$. Вычислите $y^{(n)}(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

9.245. Пусть $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$. Вычислите $y^{(n)}(x)$ в точке $(x, y(x)) = (1, 3)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

9.246. Докажите, что если $f \in D^k(\mathbb{R})$ — ограниченная функция, а её производная $f^{(k)}$ имеет период t , то и функция f имеет период t .

10. Равномерная непрерывность функций

Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на $X_1 \subseteq X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X_1 (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Функция $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in X_1, |x - y| < \delta\}$ называется *модулем непрерывности* функции f на множестве X_1 .

- 10.1. (!) Докажите, что f равномерно непрерывна на X тогда и только тогда, когда $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega_f(\delta) = 0$.
- 10.2. (!) Докажите, что если f равномерно непрерывна на X , то она непрерывна в каждой неизолированной точке множества X .
- 10.3. (!) Докажите, что равномерно непрерывная функция является ограниченной на ограниченном множестве.
- 10.4. (!) Докажите, что f является равномерно непрерывной на X тогда и только тогда, когда для любых последовательностей $(x_n), (y_n)$ таких, что $x_n, y_n \in X$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
- 10.5. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция и $\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x) - \psi(x)) = 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(\varphi(x)) - f(\psi(x))) = 0$.
- 10.6. Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x) - \psi(x)) = 0$. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \varphi(x) - \sin \psi(x))$.
- 10.7. (!) Докажите, что функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является равномерно непрерывной на $[a, b]$ (**теорема Кантора**).
- 10.8. (!) Докажите, что функция $f(x) = 1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$.
- 10.9. (!) Докажите, что функция $f(x) = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$.
- 10.10. (!) Докажите, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на \mathbb{R} .
- 10.11. (!) Пусть функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица (см. 7.43). Докажите, что f есть равномерно непрерывная функция на X .
- 10.12. (!) Пусть $f \in D(a, b)$ и $|f'(x)| \leq L$ при любом $x \in (a, b)$. Докажите, что функция f равномерно непрерывна на (a, b) .
- 10.13. (!) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $L < 1$. Докажите, что рекуррентно заданная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится для любого $x_1 \in \mathbb{R}$, причём её предел $a \in \mathbb{R}$ является неподвижной точкой функции f , т. е. $f(a) = a$ (**принцип сжимающего отображения**).

- 10.14. Докажите, что функция $f(x) = x - \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет условию $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, но не имеет неподвижных точек.
- 10.15. Докажите, что последовательность (x_n) , определённая рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \cos x_n$, имеет предел, который не зависит от выбора $x_1 \in \mathbb{R}$.
- 10.16. Пусть $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ и $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ при любых $x, y \in [-1, 1]$. Докажите, что $f(x) \equiv x$ или $f(x) \equiv -x$.
- 10.17. Докажите, что если функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$ и на $[b, c]$, то f равномерно непрерывна на $[a, c]$.
- 10.18. Приведите пример функции, равномерно непрерывной на $[a, b]$ и на $(b, c]$, но не равномерно непрерывной на $[a, c]$.
- 10.19. Докажите, что если функция f равномерно непрерывна на ограниченном интервале (a, b) , то существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.
- 10.20. Докажите, что непрерывная функция, определённая на ограниченном интервале, равномерно непрерывна на нём тогда и только тогда, когда на концах этого интервала функция имеет конечные пределы.
- 10.21. Докажите, что если функция f непрерывна, ограничена и монотонна на интервале (a, b) , то f равномерно непрерывна на (a, b) .
- 10.22. Докажите, что если функция f непрерывна, ограничена и монотонна на $(a, +\infty)$, то f равномерно непрерывна на $(a, +\infty)$.
- 10.23. Докажите, что если функция f непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, то f равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.
- 10.24. (§ 12) Докажите, что если функция f непрерывна на $[a, +\infty)$ и график функции f имеет наклонную асимптоту при $x \rightarrow \infty$, то f равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.
- 10.25. Пусть функция f равномерно непрерывна на $(0, \infty)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + n) = 0$ для любого $x > 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- 10.26. Пусть $f \in D(\mathbb{R})$, причём функции f и f' равномерно непрерывны. Докажите, что функция f' ограничена на \mathbb{R} .

10.27. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Гёльдера*, т. е. для некоторых констант $L > 0$ и $\alpha > 0$ и любых $x, y \in X$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$. Докажите, что f есть равномерно непрерывная функция на X .

10.28. Докажите, что если определённая на промежутке функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha > 1$, то f постоянна.

10.29. Докажите, что функция \sqrt{x} на $[0, \infty)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha = 1/2$ и не удовлетворяет условию Гёльдера ни с каким большим показателем.

10.30. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)$ на $(0, \infty)$, где

a) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$.

b) $f(x) = \sin(e^x)$;

10.31. При каких значениях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $|x - a|^\alpha |x - b|^\beta$ является равномерно непрерывной на \mathbb{R} ?

10.32. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)$ на $[1, \infty)$, где

a) $f(x) = x \cos x$; d) $f(x) = \sin(\ln x)$;

b) $f(x) = x \sin(1/x)$; e) $f(x) = \cos(e^x)$;

c) $f(x) = x^2 \cos(1/x)$; f) $f(x) = \sin x \cos \frac{1}{x}$.

10.33. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x)$ на $(0, 1)$, где

a) $f(x) = \operatorname{tg} x/x$; d) $f(x) = \cos x \sin(1/x)$;

b) $f(x) = \sin x \sin(1/x)$; e) $f(x) = x \ln x$.

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x/x$;

10.34. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f'(x)$ на $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, если

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x > 0, \\ 1, & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$$

с)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{при } x > 0, \\ 1 - \frac{x}{2}, & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$$

д)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{при } x > 0, \\ 1 + \frac{x}{2}, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

10.35. Исследуйте на равномерную непрерывность функции:

а) $f(x) = \frac{\ln x}{x^4 - 10x^3 + 25x^2}$ на $[6, \infty)$;

б) $f(x) = \frac{\ln x}{3x^4 - 11x^3 + x^2}$ на $[4, \infty)$.

10.36. Докажите, что равномерно непрерывная функция переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные.

10.37. Приведите пример функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, которая переводит любую фундаментальную последовательность в фундаментальную, но не является равномерно непрерывной.

10.38. Докажите, что функция, определённая на ограниченном множестве, является равномерно непрерывной тогда и только тогда, когда эта функция переводит любую фундаментальную последовательность в фундаментальную.

10.39. Докажите, что сумма равномерно непрерывных функций является равномерно непрерывной функцией.

10.40. Пусть функция $f : X \rightarrow Y$ равномерно непрерывна, $f(x) > c > 0$ ($f(x) < c < 0$) для всех $x \in X$. Докажите, что функция $1/f$ является равномерно непрерывной. Приведите пример, показывающий, что условие $f(x) > c > 0$ ($f(x) < c < 0$) не является необходимым.

10.41. Пусть функции f, g равномерно непрерывны и ограничены. Докажите, что их произведение $f \cdot g$ является равномерно непрерывной функцией.

10.42. Приведите пример двух равномерно непрерывных функций, одна из которых неограничена, таких, что их произведение не является равномерно непрерывной функцией.

10.43. Приведите пример двух равномерно непрерывных неограниченных функций, произведение которых является равномерно непрерывной функцией.

- 10.44. Приведите пример двух не равномерно непрерывных функций, произведение которых является равномерно непрерывной функцией.
- 10.45. Пусть $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ — равномерно непрерывные функции. Докажите, что их композиция $g \circ f$ является равномерно непрерывной функцией.
- 10.46. Пусть функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Докажите, что существует и единственно равномерно непрерывное продолжение $F : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = f(x)$ для всех $x \in A$.
- 10.47. Функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *положительно определённой*, если она чётная и для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых наборов $t_1, \dots, t_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ справедливо неравенство $\sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0$. Докажите, что
- а) функция $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cos \beta_k x$ положительно определена, если $\alpha_k \geq 0$ при $k = 1, \dots, m$;
- б) непрерывная в нуле положительно определённая функция является равномерно непрерывной.
- 10.48. Функция $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ называется *абсолютно монотонной*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $x \geq 0, h \geq 0$ ($0 \leq nh \leq x$) выполняется неравенство $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x - kh) \geq 0$. Докажите, что
- а) функция $f(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{-\beta_k x}$ является абсолютно монотонной, если $\alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0$ при $k = 1, \dots, m$;
- б) непрерывная в нуле абсолютно монотонная функция равномерно непрерывна на $[0, \infty)$.
- 10.49. Докажите, что периодическая непрерывная на \mathbb{R} функция является равномерно непрерывной на \mathbb{R} .
- 10.50. *Почти периодической* называется функция, удовлетворяющая следующему условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое τ , что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$. Докажите, что функция $\sin x + \sin \sqrt{2}x$ является почти периодической.

- 10.51. Докажите, что любая почти периодическая функция ограничена на \mathbb{R} .
- 10.52. Докажите, что почти периодическая непрерывная на \mathbb{R} функция является равномерно непрерывной на \mathbb{R} .
- 10.53. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Докажите, что найдётся такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leq C(1 + |x|)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

11. Выпуклость функций

Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in M$ отрезок, соединяющий эти точки, целиком содержится в M , т. е. $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$ при любом $\alpha \in (0, 1)$. *Надграфиком* функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}$, называется множество $H_f = \{(x, y) \mid x \in X, f(x) \leq y\}$. Функция f называется *выпуклой вниз* (иногда просто выпуклой), если её надграфик H_f — выпуклое подмножество \mathbb{R}^2 . Функция называется *выпуклой вверх* (*вогнутой*), если её подграфик $L_f = \{(x, y) \mid x \in X, f(x) \geq y\}$ — выпуклое подмножество \mathbb{R}^2 . Точкой *перегиба* дифференцируемой функции называется точка, имеющая окрестность $U \in \mathcal{N}(x_0)$ такую, что касательная $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ лежит в подграфике функции f при $x \in U \cap \{x < x_0\}$ и лежит в надграфике функции f при $x \in U \cap \{x > x_0\}$ или наоборот лежит в надграфике функции f при $x \in U \cap \{x < x_0\}$ и лежит в подграфике функции f при $x \in U \cap \{x > x_0\}$.

- 11.1. (!) Докажите, что функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда X — промежуток и $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ для любых $x, y \in X$ и $\alpha \in (0, 1)$. Говорят, что функция *строго выпукла вниз*, если приведённое выше неравенство строгое.
- 11.2. (!) Докажите, что множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда для произвольных наборов $x_1, \dots, x_k \in M$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ таких, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, выполнено $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in M$.
- 11.3. Докажите, что пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым.
- 11.4. (!) Докажите, что если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, то для произвольных наборов $x_1, \dots, x_k \in X$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ таких,

что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, справедливо неравенство $f(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$
(**неравенство Йенсена**).

11.5. (!) Докажите, что если функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вверх, то для произвольных наборов $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ таких, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, справедливо неравенство $f(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i) \geq \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_i)$.

11.6. Докажите, что функция f выпукла вниз тогда и только тогда, когда функция $-f$ выпукла вверх.

11.7. Докажите, что если функция f строго возрастает и выпукла вниз, то обратная функция f^{-1} выпукла вверх.

11.8. Докажите, что если функция f строго убывает и выпукла вниз, то обратная функция f^{-1} выпукла вниз.

11.9. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз. Докажите, что если $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$, то для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

11.10. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз. Докажите, что если $n, m \in \mathbb{N}, n > m$, то для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\frac{nf(x_1) - mf(x_2)}{n - m} \leq f\left(\frac{nx_1 - mx_2}{n - m}\right).$$

11.11. Докажите, что если f выпукла одновременно вниз и вверх, то $f(x) = ax + b$ при некоторых $a, b \in \mathbb{R}$.

11.12. Докажите, что функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда для любой тройки чисел x_1, x_2, x_3 , $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, справедливо неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

11.13. Докажите, что функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда для любых $a < x < y < z < b$ справедливо неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} \geq 0.$$

- 11.14. (!) Докажите, что функция, выпуклая на интервале (a, b) , является непрерывной на нём.
- 11.15. Приведите пример функции, выпуклой на отрезке $[a, b]$, но не непрерывной.
- 11.16. Докажите, что функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда для любой точки $c \in (a, b)$ функция $s_c(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ (при $x \neq c$) возрастает, и f строго выпукла вниз, если s_c строго возрастает.
- 11.17. Пусть функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз. Докажите, что функция $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$ убывает на $[0, 1/2]$.
- 11.18. Пусть $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Докажите, что функции $xf(x)$ и $f(1/x)$ выпуклы вниз или не выпуклы вниз одновременно.
- 11.19. (!) Докажите, что выпуклая на интервале (a, b) функция имеет в каждой точке правую и левую производные.
- 11.20. (!) Докажите, что если функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, то $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ в каждой точке $x \in (a, b)$, причём функции $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ монотонно возрастают. Соответственно если f выпукла вверх, то $f'_-(x) \geq f'_+(x)$ в каждой точке $x \in (a, b)$, причём функции $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$ монотонно убывают (**теорема Штольца**).
- 11.21. Докажите, что необходимое условие выпуклости, сформулированное в предыдущей задаче, является достаточным.
- 11.22. Докажите, что если функция f выпукла вниз (вверх), то множество точек, в которых $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, не более чем счётно.
- 11.23. (!) Пусть $f \in D(a, b)$. Докажите, что функция f выпукла вниз тогда и только тогда, когда $f'(x)$ монотонно возрастает. Соответственно функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'(x)$ монотонно убывает.
- 11.24. (!) Пусть $f \in D^2(a, b)$. Докажите, что функция f выпукла вниз тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ при любом $x \in (a, b)$. Соответственно функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f''(x) \leq 0$ при любом $x \in (a, b)$.
- 11.25. (!) Пусть $f \in D(a, b)$. Докажите, что f выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in (a, b)$ касательная $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ лежит ниже графика функции, т.е.

$l(x) \leq f(x)$ для всех $x \in (a, b)$. Соответственно f выпукла вверх тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in (a, b)$ касательная $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ лежит выше графика функции, т. е. $f(x) \leq l(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

- 11.26. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх). Докажите, что сужение f на любой отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ удовлетворяет условию Липшица.
- 11.27. Пусть функция $f \in C(\mathbb{R})$ выпукла вниз. Докажите, что существует аффинная функция $ax + b$, для которой $f(x) > ax + b$.
- 11.28. Пусть $f \in D^2(a, b)$ и $f''(c) \neq 0$. Докажите, что имеются такие $x_1, x_2 \in (a, b)$, что $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
- 11.29. (!) Докажите, что если функция f непрерывна на (a, b) и $f(x/2 + y/2) \leq f(x)/2 + f(y)/2$ при всех $x, y \in (a, b)$, то f выпукла вниз на (a, b) .
- 11.30. Докажите, что если функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в точках a, b конечные пределы и $f(x/2 + y/2) \leq f(x)/2 + f(y)/2$ при всех $x, y \in (a, b)$, то f непрерывна и, следовательно (см. задачу 11.29), выпукла вниз на (a, b) .
- 11.31. Докажите, что если вторая производная Шварца (см. задачу 9.149) непрерывной функции $f(x)$ неотрицательна, то эта функция выпукла вниз.
- 11.32. Пусть $\hat{D}^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$. Докажите, что непрерывная функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда $\hat{D}^2 f(x) \geq 0$ при любом $x \in (a, b)$.
- 11.33. Докажите, что непрерывная функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любых $x \in (a, b)$ и $\alpha, \beta > 0$ таких, что $a < x < x + \alpha + \beta < b$, справедливо неравенство $f(x + \alpha) + f(x + \beta) \leq f(x) + f(x + \alpha + \beta)$.
- 11.34. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз и имеется два упорядоченных набора вещественных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Докажите, что для любой перестановки σ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & f(a_1 + b_n) + \dots + f(a_i + b_{n+1-i}) + \dots + f(a_n + b_1) \leq \\ & \leq f(a_1 + b_{\sigma(1)}) + \dots + f(a_n + b_{\sigma(n)}) \leq f(a_1 + b_1) + \dots + f(a_n + b_n). \end{aligned}$$

- 11.35. Докажите, что непрерывная функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3} \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right).$$

- 11.36. Докажите, что если $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, то для любого набора чисел $a < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 < b$ справедливо неравенство

$$\frac{f(x_1)+f(x_4)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_4}{2}\right) \geq \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} - f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right).$$

- 11.37. Докажите, что функция $\ln x$ выпукла вверх, а функция $x \ln x$ выпукла вниз.

- 11.38. Пусть $f(x) > 0$. Докажите, что из выпуклости вниз функции $\ln f(x)$ следует выпуклость вниз функции $f(x)$.

- 11.39. Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $\ln f(x)$, $\ln g(x)$ — выпуклые вниз функции. Докажите, что функция $\ln(f(x) + g(x))$ выпукла вниз.

- 11.40. Докажите, что функция $f(x)$ выпукла вниз, где

a) $f(x) = \ln \frac{e^{ax}-1}{e^x-1}$ при $x \in \mathbb{R}, a \geq 1$;

b) $f(x) = b \ln \cos(x/\sqrt{b}) - a \ln \cos(x/\sqrt{a})$ при $x \in (0, \pi/2), b \geq a \geq 1$.

- 11.41. Докажите неравенства:

a) $\operatorname{arctg} x + 2\operatorname{arctg} y \leq 3\operatorname{arctg} \frac{x+2y}{3}$ при $x, y > 0$;

b) $\arcsin x + 3\arcsin y \geq 4\arcsin \frac{x+3y}{4}$ при $0 < x, y < 1$;

c) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \leq 2\operatorname{arctg} \frac{x+y}{2}$ при $x, y > 0$;

d) $\arcsin x + 2\arcsin y \geq 3\arcsin \frac{x+2y}{3}$ при $0 < x, y < 1$;

e) $\frac{e^x+e^y}{2} > e^{(x+y)/2}$ при $x \neq y$;

f) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$ при $x > y > 0$.

- 11.42. Докажите неравенства:

a) $2\operatorname{arctg} x \leq x - 1 + \pi/2$ при $x > 0$;

b) $\ln x \geq (x-1)/(e-1)$ при $x \in (1, e)$;

c) $\operatorname{tg} x \leq 4x/\pi$ при $x \in (0, \pi/4)$;

d) $e^x \geq ex$ при $x > 0$.

- 11.43. Докажите, что при $a, b \geq 1$ справедливо неравенство

$$ab \leq e^{a-1} + b \ln b.$$

11.44. (!) Докажите неравенство $x \geq \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ при $x \in [0, \pi/2]$.

11.45. Докажите неравенство $1 - x < \cos \frac{\pi x}{2}$ при $x \in (0, 1)$.

11.46. Докажите неравенство

$$\frac{x \sin a}{a} \leq \sin x \text{ при всех } 0 \leq x \leq a \leq \pi/2.$$

11.47. Пусть $x, y, z > 0$ и $x + y + z = \pi/2$. Докажите неравенство

$$\sin x \sin y \sin z \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3 xyz \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

11.48. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ такие, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Докажите неравенство

$$-\sum_{i=1}^k \alpha_i \ln \alpha_i \leq \ln k.$$

11.49. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ и $\beta_1, \dots, \beta_k > 0$ такие, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \beta_i = 1$.

$$\text{Докажите неравенство } -\sum_{i=1}^k \alpha_i \ln \alpha_i \leq -\sum_{i=1}^k \alpha_i \ln \beta_i.$$

11.50. Для произвольного набора чисел $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ докажите неравенство

$$\ln \left(1 + e^{\left(\sum_{i=1}^n x_i/n \right)} \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{x_i})}{n}.$$

11.51. Для произвольного набора чисел $a_1, \dots, a_n > 0$ докажите неравенство Гюйгенса

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \right)^{1/n}.$$

11.52. Для произвольного набора чисел $a_1, \dots, a_n > 0$ докажите неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3} \right) \cdots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1} \right).$$

11.53. (!) Для произвольных наборов чисел $a_1, \dots, a_n > 0$ докажите неравенства:

$$\text{а) } (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n;$$

$$\text{b) } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}};$$

$$\text{c) } \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}.$$

11.54. (!) Докажите неравенство $b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_k^{\alpha_k} \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i$ для произвольных наборов $b_1, \dots, b_k > 0$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

11.55. (!) Пусть $a, b, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите **неравенство Юнга** $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

11.56. (!) Докажите **неравенство Коши — Буняковского — Шварца** для любых $x_i, y_i \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

11.57. (!) Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$. Докажите **неравенство Гёльдера**

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

11.58. Пусть $-\infty < p < 1, p \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \geq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

11.59. Пусть $p, q, r \neq 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Пусть $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Докажите, что

а) в любом из 3-х случаев

$p > 0, q > 0, r > 0$; $p < 0, q > 0, r < 0$; $p > 0, q < 0, r < 0$

справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i y_i|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^q \right)^{1/q};$$

б) в любом из 3-х случаев

$p > 0, q < 0, r > 0$; $p < 0, q > 0, r > 0$; $p < 0, q < 0, r < 0$

справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i y_i|^r \right)^{1/r} \geq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

11.60. (!) Пусть $p \geq 1$ и $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Докажите **неравенство Минковского**

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

11.61. (!) Докажите неравенство $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q}$ при $1 \leq q \leq p$.

11.62. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) и $|f(x)| \leq C$. Докажите, что $f(x)$ — постоянная.

11.63. Пусть выпуклая вниз (вверх) функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет конечные пределы при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$. Докажите, что $f(x)$ — постоянная.

11.64. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ строго выпукла вверх и $f(0) > 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет вещественные корни, причём не более одного корня каждого знака.

11.65. Пусть $f \in D^2(a, \infty)$ и $f''(x) \leq 0$ при $x > b > a$. Докажите, что если $f(b) > 0 > f'(b)$, то в интервале (b, ∞) уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень.

11.66. Пусть функция $f \in D^1[a, b]$ выпукла вниз и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Докажите, что

а) существует единственный корень $c \in (a, b)$ уравнения $f(x) = 0$, который является пределом последовательности (x_n) , заданной равенствами: $x_0 = b$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$;

б) если $f \in D^2[a, b]$ и $M = \sup_{x \in [a, b]} f''(x) < \frac{2f'(c)}{b-c}$, то имеет место следующая оценка $|x_n - c| \leq \left(\frac{M}{2f'(c)} \right)^{2^n - 1} (b - c)^{2^n}$ (метод Ньютона нахождения корней нелинейного уравнения).

- 11.67. а) Пусть функции $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклы вниз. Докажите, что функция $\max\{f, g\}$ выпукла вниз.
 б) Пусть функции $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклы вверх. Докажите, что функция $\min\{f, g\}$ выпукла вверх.
- 11.68. Пусть функции $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклы вниз (вверх). Докажите, что функция $f + g$ выпукла вниз (вверх).
- 11.69. Приведите пример двух выпуклых вниз (вверх) функций $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что
 а) их произведение не выпукло вниз (вверх);
 б) их композиция не выпукла вниз (вверх).
- 11.70. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх), а $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$ — аффинная функция. Докажите, что композиция $f \circ g$ выпукла вниз (вверх).
- 11.71. Пусть функции $f, g \in D^1(a, b)$ такие, что $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ на (a, b) и функция $f'(x)/g'(x)$ строго возрастает на (a, b) . Докажите, что функция f/g выпукла вниз.
- 11.72. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/x = 0$. Докажите, что $f(x)$ — постоянная.
- 11.73. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх). Докажите, что существует конечный или бесконечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$.
- 11.74. Докажите, что если точка $c \in (a, b)$ является точкой перегиба функции $f \in C(a, b)$, то либо $f''(c) = 0$, либо функция f не дифференцируема дважды в точке $c \in (a, b)$.
- 11.75. Докажите, что если $f \in C^2(\mathbb{R})$ и $f''(x_1) < 0 < f''(x_2)$ для некоторых $x_1 < x_2$, то в интервале (x_1, x_2) найдётся точка перегиба функции f .
- 11.76. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x) < 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Докажите, что f имеет не менее двух точек перегиба.
- 11.77. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ не константа и $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Докажите, что f имеет точку перегиба.

- 11.78. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ и $f(a) \neq 0$ для некоторой точки $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $f(x)$ имеет не менее двух точек перегиба.
- 11.79. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — ограниченная непостоянная функция. Докажите, что f имеет точку перегиба.
- 11.80. Докажите, что любой многочлен нечётной степени n , $n \geq 3$, имеет точку перегиба.
- 11.81. Докажите, что если точка $c \in (a, b)$ является точкой перегиба функции $f \in C^1(a, b)$, то точка $c \in (a, b)$ является локальным экстремумом функции f' .
- 11.82. Пусть $f \in C[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что существует выпуклая вверх функция $g(x)$ такая, что $g(0) = g(1) = 0$ и $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in [0, 1]$.
- 11.83. Пусть $f \in C[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что существует выпуклая вниз функция $g(x)$ такая, что $g(0) = g(1) = 0$ и $f(x) \geq g(x)$ при всех $x \in [0, 1]$.
- 11.84. Преобразованием Лежандра функции $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, определённой на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, называется функция $f^*(t) = \sup_{x \in I} (tx - f(x))$. Докажите, что функция f^* выпукла вниз, причём область определения $I^* = \{t \in \mathbb{R} \mid f^*(t) < \infty\}$ функции f^* является неограниченным, ограниченным, одноточечным или пустым промежутком.
- 11.85. Пусть $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вниз, $I \neq \emptyset$. Докажите, что $I^* \neq \emptyset$ и $(f^*)^* \equiv f$.
- 11.86. Пусть $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Докажите неравенство $xt \leq f(x) + f^*(t)$ при всех $x \in I$, $t \in I^*$.
- 11.87. Пусть $f(x) = x^\alpha / \alpha$, где $\alpha > 1$, $x \geq 0$. Докажите, что $f^*(t) = t^\beta / \beta$, где $t \geq 0$ и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Выведите отсюда неравенство Юнга (см. задачу 11.55).
- 11.88. Пусть $f \in D(a, b)$ — выпуклая вниз функция, $b > x_1 \geq \dots \geq x_n > a$, $y_1, \dots, y_n \in (a, b)$, причём $\sum_{k=1}^m x_k \leq \sum_{k=1}^m y_k$ при всех m , $1 \leq m < n$, и $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k$. Докажите **неравенство Харди — Литтлвуда — Поля**

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq \sum_{k=1}^n f(y_k).$$

11.89. Пусть $f \in D(a, b)$ — выпуклая вниз функция, $b > x_1 \geq \dots \geq x_n > a$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, причём $\sum_{k=1}^m \alpha_k > 0$ при всех m ,

$1 \leq m < n$, и $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Докажите **неравенство Йенсена** —

$$\text{Стефенсена} \quad f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k).$$

11.90. Пусть функция $f \in C^\infty(0, +\infty)$ является абсолютно монотонной (см. задачу 10.48). Докажите, что

а) для всех $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$;

б) функция f выпукла вниз;

с) для всех $x > 0$ и целых $n \geq k \geq 0$ справедливо неравенство $(-1)^{nk} (f^{(k)}(x))^n \leq (-1)^{nk} (f^{(n)}(x))^k (f(x))^{n-k}$;

д) функция $\ln f(x)$ выпукла вниз.

11.91. Приведите пример дифференцируемой функции f такой, что $x = 0$ — точка перегиба функции f и имеются две неотрицательные последовательности (x_n) и (y_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ и $f'(x_n) > 0$, $f'(y_n) < 0$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

11.92. Докажите, что если производная f' имеет экстремум в точке $x \in \mathbb{R}$, то x — точка перегиба функции f .

11.93. Пусть $a_i, b_i > 0$ при $i = 1, \dots, n$. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \ln \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}.$$

11.94. Пусть $a_i > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$ при $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Докажите,

что верно неравенство $\sum_{i=1}^n a_i (-\ln a_i + b_i) \leq \ln \left(\sum_{i=1}^n e^{b_i}\right)$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_i = \frac{e^{b_i}}{\sum_{i=1}^n e^{b_i}}$.

11.95. Пусть $x_1 \neq 0$ и $p > 1$. Докажите, что неравенство Минковского

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$$

обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x_i = \alpha y_i$ при всех $i = 1, \dots, n$ для некоторого $\alpha > 0$.

12. Построение кривых и графиков функций

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, множество $\{(x(t), y(t)) \mid t \in (a, b)\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *плоской кривой*, если функции $x, y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны или имеют конечное число точек разрыва. График $\{(x, y(x)) \mid x \in (a, b)\}$ непрерывной (за возможным исключением конечного числа точек) функции $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ является частным случаем плоской кривой. Кривая может быть задана неявно как множество решений уравнения $F(x, y) = 0$.

Касательной к кривой в точке $(x(t_0), y(t_0))$ называется прямая $x = x'(t_0)t + x(t_0)$, $y = y'(t_0)t + y(t_0)$, ($x'(t_0) \neq 0$ или $y'(t_0) \neq 0$). Если $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ или одна из функций $x(t), y(t)$ не дифференцируема при $t = t_0$, причём имеются пределы $\lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = l_+$, $\lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = l_-$, то прямые $y - y(t_0) = l_-(x - x(t_0))$ и $y - y(t_0) = l_+(x - x(t_0))$ называются односторонними касательными. Если l_- или l_+ равняется бесконечности, то уравнение односторонней касательной имеет вид $x = x(t_0)$. В случае, когда $l_- \neq l_+$ точка $(x(t_0), y(t_0))$ называется *угловой*, если $l_- = l_+$ и производные $x'(t), y'(t)$ меняют знак при $t = t_0$, то $(x(t_0), y(t_0))$ называется *точкой возврата*.

Асимптотой кривой называется прямая $y = Ax + B$ ($x = A'y + B'$), если в некоторой точки $t_0 \in [a, b]$ справедливы соотношения $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = A$, $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - Ax(t)) = B$ ($\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = A'$, $\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - A'y(t)) = B'$).

Промежутки возрастания и убывания, а также выпуклости вверх и вниз кривой относительно координатных осей определяются как соответствующие промежутки для функции $y(x) = y(t(x))$, где $t(x)$ — функция, обратная к функции $x(t)$ на этом промежутке.

Исследование кривой (графика функции) состоит в нахождении следующих характеристик ¹³.

1. Область определения и область значения функции. Точки разрыва.
2. Симметрии кривой (для графиков функций — чётность и периодичность).
3. Асимптоты.

¹³ Даже если кривая определяется элементарными функциями, некоторые из пересчитанных далее характерных точек могут иметь координаты, не представимые через элементарные функции от рациональных чисел.

4. Локальные экстремумы, промежутки монотонности.
5. Точки перегиба, промежутки выпуклости.
6. Точки пересечения с осями координат, точки самопересечения, точки самокасания, угловые точки, точки возврата.

12.1. Пусть кривая задана уравнением $f(x) = g(y)$, где f, g — дифференцируемые функции. Докажите, что прямая $f'(x_0)(x - x_0) = g'(y_0)(y - y_0)$ является касательной к кривой в точке (x_0, y_0) ($f(x_0) = g(y_0)$).

12.2. Найдите уравнение касательной к кривой второго порядка вида $a_1x^2 + a_2y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ в произвольной точке.

12.3. Найдите уравнение касательной к кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$ в произвольной точке.

12.4. Докажите, что график непрерывной на всём \mathbb{R} функции не имеет вертикальных асимптот.

12.5. Докажите, что левая и правая части графика функции $f(x) = 2x^3 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ ($f(0) = 0$) лежат по разные стороны от касательной, проведённой к графику функции f в точке $(0, 0)$, однако $x = 0$ не является точкой перегиба функции f .

12.6. Докажите, что график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax + b$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$ (или $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = b$).

12.7. Найдите асимптоты кривой, заданной уравнением $8x^3 + y^3 - 6xy - 3 = 0$.

12.8. Исследуйте кривые и постройте их эскизы:

- | | |
|---|--|
| a) $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (цепная линия); | |
| b) $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; | g) $y = x + \operatorname{arctg} x$; |
| c) $y = \frac{1}{1+x^2}$; | h) $y = \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$; |
| d) $y = x \ln x$; | i) $y = \ln \sin x $; |
| e) $y = \sin x^2$; | j) $y = e^{1/x}$. |
| f) $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$; | |

12.9. Исследуйте кривые и постройте их эскизы:

- а) $y = \frac{x^2-4}{x^2-9}$; е) $y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}$;
 б) $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$; ф) $y = x((x+1)^2)^{1/3}$;
 в) $y = \frac{x}{(x^2-1)^{1/3}}$; г) $y = x^2\sqrt{1-x}$;
 д) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; h) $y = x^{2/3}(1-x)^{2/3}$.

12.10. Исследуйте кривые и постройте их эскизы:

- а) $x(t) = \frac{t^2}{4(1-t)}$, $y(t) = \frac{t^3}{8(t-1)}$;
 б) $x(t) = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y(t) = \frac{1}{1+t^2}$;
 в) $x(t) = t \ln t$, $y(t) = \ln t/t$.

12.11. Исследуйте и постройте эскизы кривых, заданных уравнениями:

- а) $y^2 - x^4 + x^6 = 0$; в) $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$.
 б) $y^2 - x^3 = 0$;

12.12. Используя подстановку $y = tx$, исследуйте и постройте эскизы кривых, заданных уравнениями:

- а) $x^3 + y^3 = 3xy$ (декартов лист);
 б) $y^2x - 2x^2y + x^3 = 0$ (строфоида);
 в) $y^2(2-x) = x^3$ (циссоида Диокла);
 д) $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

12.13. Исследуйте кривые и постройте их эскизы:

- а) $x(t) = a \sin t$, $y(t) = b \cos t$, $a, b > 0$ (эллипс);
 б) $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \cos 3t$;
 в) $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$ (астроида);
 г) $x(t) = 1 + h \cos t$, $y(t) = \operatorname{tg} t + h \sin t$, $h > 1$ (конхоида Никомеда);
 д) $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$ (эвольвента);
 е) $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ (циклоида окружности);
 ж) $x(t) = t - d \sin t$, $y(t) = 1 - d \cos t$, $d > 1$ (удлинённая циклоида);
 з) $x(t) = t - d \sin t$, $y(t) = 1 - d \cos t$, $0 < d < 1$ (укороченная циклоида);
 и) $x(t) = (R+r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r}t$, $y(t) = (R+r) \sin t - r \sin \frac{R+r}{r}t$, $0 < r < R$ (эпициклоида);
 к) $x(t) = (R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r}t$, $y(t) = (R-r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r}t$, $0 < r < R$ (гипоциклоида);
 л) $x(t) = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t$, $y(t) = \sin t$ (трактрисса).

- 12.14. Исследуйте и постройте эскиз кривой $r(t) = 1 - e^{-t} \cos \frac{\pi}{2}t$, $\varphi(t) = 1 - e^{-t} \sin \frac{\pi}{2}t$, заданной в *полярной системе координат* $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.
- 12.15. Выведите дифференциальные условия возрастания и убывания (относительно координатных осей), а также направления выпуклости для кривой, заданной в полярной системе координат.
- 12.16. Исследуйте и постройте эскизы кривых, заданных в полярной системе координат:
- a) $r(\varphi) = 1 - \cos \varphi$ (кардиоида);
 - b) $r = \cos 3\varphi$ (трилистник);
 - c) $r(\varphi) = k\varphi$, $k > 0$ (спираль Архимеда);
 - d) $r(\varphi) = e^{k\varphi}$, $k > 0$ (логарифмическая спираль);
 - e) $r(\varphi) = k/\varphi$, $k > 0$ (гиперболическая спираль);
 - f) $r(\varphi) = k\sqrt{\varphi}$, $k > 0$ (спираль Ферма).
- 12.17. Исследуйте и постройте эскиз, заданной в полярной системе координат кривой $r(\varphi) = \cos \varphi + h$ (улитка Паскаля), если:
- a) $1 > h > 0$; b) $h \geq 1$.
- 12.18. Перейдя в полярную систему координат, исследуйте кривые и постройте их эскизы:
- a) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли);
 - b) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = a^2 - 1$, $a > 2$ (овал Кассини);
 - c) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = a^2 - 1$, $1 < a < 2$;
 - d) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$;
 - e) $(x^2 + y^2)y^2 = x^2$ (капша);
 - f) $(\frac{x}{a})^n + (\frac{y}{b})^n = 1$, $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ (кривая Ламэ).

13. Формула Тейлора и вычисление пределов

13.1. Формула Тейлора

- 13.1. (!) Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Докажите, что $a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$.

- 13.2. (!) Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ и $f(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$.
- 13.3. (!) Пусть $f \in D(a, b)$ и $f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})$ при $x \rightarrow x_0$. Докажите, что $f(x) = f(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{n}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$.
- 13.4. (!) Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in (a, b)$. Докажите, что $f(x) - T_n[f, x_0](x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \rightarrow x_0$, где $T_n[f, x_0](x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ — *полином Тейлора* функции f в точке x_0 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).
- 13.5. (!) Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in (a, b)$ и $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ для некоторого полинома $P_n(x)$ степени не выше n . Докажите, что $P_n(x) = T_n[f, x_0](x)$ — полином Тейлора функции f в точке x_0 .
- 13.6. Пусть функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз в точке $x_0 \in (a, b)$. Определим функцию φ_n равенством $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \varphi_n(x)(x - x_0)^n$. Докажите, что функция φ_n непрерывна в x_0 и $\varphi_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
- 13.7. Пусть $f \in D^{n-1}(a, b)$. Определим функцию φ_n равенством $f(x) = a_n + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \varphi_n(x)(x - x_0)^n$. Докажите, что функция f дифференцируема n раз в точке $x_0 \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x)$ и $\varphi_n^{(n-1)}(x) = o\left(\frac{1}{(x - x_0)^{n-1}}\right)$ при $x \rightarrow x_0$, ($x \neq x_0$).
- 13.8. Пусть $f \in D^{n+1}(a, b)$. Определим функцию $F(t) = f(x) - T_n[f, t](x) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \dots - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n$. Докажите, что $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n$.
- 13.9. Пусть $f \in D^{n+1}(x_0, x) \cap C^n[x_0, x]$, $\varphi \in C^1[x_0, x]$ и $\varphi'(t) \neq 0$ при $t \in [x_0, x]$. Докажите, что найдётся такая точка $\xi \in (x_0, x)$, для которой справедливо равенство

$$f(x) - T_n[f, x_0](x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

- 13.10. (!) Пусть $f \in D^{n+1}(x_0, x) \cap C^n[x_0, x]$. Докажите, что найдётся такая точка $\xi \in (x_0, x)$, для которой справедливо равенство

$$f(x) - T_n[f, x_0](x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0)$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме **Коши**).

- 13.11. (!) Пусть $f \in D^{n+1}(x_0, x) \cap C^n[x_0, x]$. Докажите, что найдётся такая точка $\xi \in (x_0, x)$, для которой справедливо равенство

$$f(x) - T_n[f, x_0](x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме **Лагранжа**).

- 13.12. Пусть $f \in D^{n+1}(x_0, x) \cap C^n[x_0, x]$, $p > 0$. Докажите, что найдётся такая точка $\xi \in (x_0, x)$, для которой справедливо равенство

$$f(x) - T_n[f, x_0](x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} (x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме **Шлёмилля — Роша**).

- 13.13. Пусть $f \in D^n(x_0 - h, x_0 + h)$. Докажите, что для любого $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ найдётся такое $\xi \in (x_0, x)$, для которого

$$f(x) - T_n[f, x_0](x) = \left(\frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{\xi - x_0} \right) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- 13.14. Пусть $f \in D^n(-h, h)$. Докажите, что если f — чётная функция, то разложение Тейлора функции f в точке $x = 0$ не содержит ненулевых слагаемых нечётных степеней, а если нечётная — чётных степеней.

- 13.15. (!) Докажите асимптотические равенства при $x \rightarrow 0$:

- а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;
- б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$;
- в) $\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;
- г) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;
- е) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + C_\alpha^n x^n + o(x^n)$, где $C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

13.16. (!) Докажите, что если $T_n(x)$ — полином Тейлора функции $f \in D^n(-a, a)$, а $P_n(x)$ — полином Тейлора функции $g \in D^n(-a, a)$ в некоторой точке $x_0 \in (-a, a)$, то $T_n(x) + P_n(x)$ — полином Тейлора функции $f + g$ в той же точке.

13.17. (!) Пусть $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$, $g = P_n(x) + o(x^n)$, где $T_n(x)$, $P_n(x)$ — полиномы Тейлора функций $f \in D^n(-a, a)$ и $g \in D^n(-a, a)$ соответственно в некоторой точке $x_0 \in (-a, a)$. Докажите, что $f(x)g(x) = T_n(x)P_n(x) + o(x^n)$, но, вообще говоря, $T_n(x)P_n(x)$ не является полиномом Тейлора функции $f(x)g(x)$.

13.18. (!) Разложите по формуле Тейлора до $o(x^5)$ функцию f и найдите $f^{(5)}(0)$, если:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \operatorname{tg} x; & \text{c) } f(x) = (1+x)^{\sin x}; \\ \text{b) } f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}; & \text{d) } f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}. \end{array}$$

13.19. Разложите по формуле Тейлора до $o(x^5)$ функцию f и найдите $f^{(5)}(0)$, если:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = (\cos x)^{1/3}; & \text{d) } f(x) = e^{\cos x}; \\ \text{b) } f(x) = \sqrt{1/\cos x}; & \text{e) } f(x) = (\cos x)^{\sin x}; \\ \text{c) } f(x) = \sqrt{\ln(e+x^2)}; & \text{f) } f(x) = \frac{1}{1-\sin x}. \end{array}$$

13.20. Для всех $n \in \mathbb{N}$ найдите $f^{(n)}(0)$, если:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = e^{-x^2}; & \text{c) } f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}; \\ \text{b) } f(x) = \cos(x^2); & \text{d) } f(x) = \sqrt{1-x^3}. \end{array}$$

13.21. (!) Докажите асимптотические равенства при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}); \\ \text{b) } \arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k)!!(2k+1)} + o(x^{2n+2}). \end{array}$$

13.22. Разложите по формуле Тейлора до $o((x - \frac{\pi}{2})^5)$ функцию $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

13.23. Докажите неравенства:

$$\begin{array}{l} \text{a) } |\sin x - x| < |x|^3/6; \\ \text{b) } |\cos x - 1 + x^2/2| \leq x^4/24. \end{array}$$

13.24. Докажите неравенство

$$0 < a + \frac{x}{na^{n-1}} - (a^n + x)^{1/n} < \frac{(n-1)x^2}{2n^2a^{2n-1}}$$

при любых $a, x > 0$ и целых $n \geq 2$.

13.25. Докажите, что $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, если $x > 0$ или если $x < 0$ и n нечётно.

13.26. Докажите, что $e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$, если $x < 0$ и n чётно.

13.27. Докажите, что при любом $x \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

а) $\left| \sin x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!};$

б) $\left| \cos x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

13.28. Докажите, что при любом $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\left| \ln(x+1) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

13.29. Докажите, что при любом $x \in (-1, 0)$ справедливо неравенство

$$\left| \ln(x+1) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq |x|^{n+1}.$$

13.30. Пусть $f \in D^n(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Пусть $\theta(h)$ определяется из формулы $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(x_0 + \theta(h)h)}{n!}$. Докажите равенство $\lim_{h \rightarrow 0} f^{(n)}(x_0 + \theta(h)h) = f^{(n)}(x_0)$. Приведите пример функции $f \in D^n(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, для которой в то же время $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x) = \infty$.

13.31. Пусть $f \in D^{n+1}(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ и $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Пусть $\theta(h)$ определяется из формулы $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{h^{n-1}f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(x_0 + \theta(h)h)}{n!}$. Найдите предел $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h)$.

13.32. Пусть $f \in D^5(-h, h)$ — нечётная функция. Докажите, что для каждой точки $x \in (-h, h)$ найдётся точка $\xi \in (0, x)$ (или $\xi \in (x, 0)$) такая, что верно равенство $f(x) = \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) - \frac{x^5}{180}f^{(5)}(\xi)$.

13.33. Пусть $f \in D^5[a, b]$. Докажите, что найдётся точка $\xi \in (a, b)$, для которой верно равенство $f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6} (f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)$ (**формула Симпсона**).

13.34. Докажите, что $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ — бесконечно дифференцируемая функция.

13.35. Существует ли такое $a \in \mathbb{R}$, что при $x \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство:

a) $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + ax^4 + o(x^4)$;

b) $\sqrt{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{4} + ax^4 + o(x^4)$;

c) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + ax^4 + o(x^4)$;

d) $e^{\cos x} = e - \frac{ex^2}{2} + ax^4 + o(x^4)$;

e) $e^{e^x} = e + ex + ex^2 + ax^3 + o(x^3)$.

13.36. Найдите $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ такие, что при $x \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$e^x = \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2} + O(x^5).$$

13.37. Найдите $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что при $x \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$(a + b \cos x) \sin x = x + O(x^4).$$

13.38. Найдите $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что при $x \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$\cos x = \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} + O(x^5).$$

13.39. Найдите $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что при $x \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$\operatorname{tg} x = \frac{x + ax^3}{1 + bx^2} + O(x^6).$$

13.40. Найдите $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что при $x \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + ax^2}{x + bx^3} + O(x^5).$$

13.41. Выясните, существуют ли такие числа $a, b \in \mathbb{R}$, что

a) $\operatorname{ctg} x = \frac{1+ax^2}{x+bx^3} + O(x^3)$; b) $\operatorname{ctg} x = \frac{1+ax^2}{x+bx^3} + O(x^7)$.

13.42. Пусть $g \in C^{n+1}(-h, h)$ и функция f определена равенствами

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(0)}{x}, & \text{при } x \neq 0; \\ g'(0), & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что функция f дифференцируема в нуле n раз, причём $f^{(n)}(0) = \frac{g^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

13.43. Пусть $g(x) = xf(x)$ при $x \in (-h, h)$ и $f(0) = 0$. Докажите, что $g \in D^n(-h, h)$ и существует $g^{(n+1)}(0)$ тогда и только тогда, когда $f \in D^n(-h, h)$ и $f^{(n)}$ непрерывна в нуле.

13.44. Пусть $g \in D^{n+k}(-h, h)$ и $g^{(i)}(0) = 0$ при $0 \leq i \leq n-1$ и функция f определена равенствами $g(x) = x^n f(x)$ при $x \in (-h, h)$, $f(0) = g^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что $f \in D^k(-h, h)$ и $f^{(k)}$ непрерывна в нуле.

13.45. Пусть $f \in D^{n+k-1}(-h, h)$ и существует $f^{(k+n)}(0)$. Определим функцию φ_n равенством $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{x^{n-1}f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \varphi_n(x)x^n$, $\varphi_n(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Докажите, что $\varphi_n \in D^k(-h, h)$, функция $\varphi_n^{(k)}$ непрерывна в нуле и $\varphi_n^{(j)}(0) = \frac{j!}{(n+j)!}f^{(n+j)}(0)$ при $j = 0, \dots, k$.

13.46. Разложите по формуле Тейлора до $o(x^5)$ функцию f и найдите $f^{(5)}(0)$, где:

a) $f(x) = \sqrt{x/\sin x}$; c) $f(x) = (\arcsin x/x)^{1/2}$;
b) $f(x) = (\sin x/x)^{1/3}$; d) $f(x) = (\operatorname{tg} x/x)^{1/2}$.

13.47. Разложите по формуле Тейлора по степеням $(5-x)$ до 4-го порядка включительно функцию $\ln^2 x$.

13.48. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$ до 3-го порядка включительно трижды дифференцируемую в $x = 1$ функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению

a) $x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + y^3 = 1$;

b) $x^3 + y^3 + y^5 - x = 1$;

c) $x^2 + y^2x + x^2y^3 - 7xy = -4$.

- 13.49. Пусть $p(x)$ — многочлен, не имеющий вещественных корней. Докажите, что многочлен $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x)}{k!}$ не имеет вещественных корней.
- 13.50. Пусть $p(x)$ — многочлен, не имеющий вещественных корней. Докажите, что многочлен $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(2k)}(x)}{(2k)!}$ не имеет вещественных корней.
- 13.51. Пусть $f \in C^2[a, b]$, $\max_{x \in [a, b]} |f''(x)| = A$ и $f(a) = f(b) = 0$. Докажите неравенство $\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \leq \frac{A(b-a)}{2}$.
- 13.52. Пусть $f \in C^n[a, b]$ и f не менее n раз обращается в 0 на отрезке $[a, b]$. Докажите неравенство $\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|$.
- 13.53. Пусть $f \in C^n[0, 1]$, причём $f^{(n)}(x) \geq M$ при всех $x \in [0, 1]$ и $f^{(k)}(x) \neq 0$ при всех $x \in [0, 1]$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$. Докажите, что $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \geq \frac{M}{n!}$.
- 13.54. Пусть $f \in D^2(\mathbb{R})$ и $m_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$, $k = 0, 1, 2$. Докажите неравенство $m_1^2 \leq 2m_0m_2$.
- 13.55. Пусть $f \in D^2[-a, a]$ и $m_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| \mid x \in [-a, a]\}$, $k = 0, 2$. Докажите неравенство $|f'(x)| \leq \frac{m_0}{2} + \frac{x^2+a^2}{2a}m_2$.
- 13.56. Пусть $f \in D^n(\mathbb{R})$ и $m_k = \sup\{|f^{(k)}(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$. Докажите неравенство $m_k \leq 2^{k(n-k)/2} m_0^{1-k/n} m_n^{k/n}$ при $k = 1, \dots, n-1$.
- 13.57. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(0) = 0$ и $\sup_{x \in [-a, a]} |f^{(n)}(x)| \leq c$ при некотором $c > 0$ и любом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [-a, a]$.
- 13.58. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(n)}(0) = 0$ и $\sup_{x \in [-a, a]} |f^{(n)}(x)| \leq c^n n!$ при некотором $c > 0$ и любом $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $f(x) = 0$ при всех $x \in [-a, a]$.
- 13.59. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $|f^{(n)}(x)| \leq c^n$ при некотором $c > 0$ и любом $n \geq n_0$. Докажите, что ряд Тейлора функции f сходится к ней всюду.

- 13.60. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, заданы точки $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ и числа $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$. Докажите, что существует такой полином P степени $\left(\sum_{i=1}^m r_i\right) - 1$, что $P^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k)$ при всех $k = 1, \dots, m$ и $i = 0, \dots, r_k - 1$. Проверьте справедливость интерполяционной формулы Лагранжа — Эрмита

$$P(x) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=0}^{r_k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{f(x)}{\prod_{s \neq k} (x - x_s)^{r_s}} \right)_{x=x_k}^{(j)} \right) \prod_{s \neq k} (x - x_s)^{r_s}.$$

- 13.61. Пусть $f \in D^n(\mathbb{R})$ и P — многочлен степени $n - 1$ такой, что $f^{(k)}(x_i) = P^{(k)}(x_i)$ при $0 \leq k \leq n_i - 1$, $1 \leq i \leq p$. Докажите, что внутри наименьшего отрезка, содержащего все точки x_i , $1 \leq i \leq p$, найдётся такая точка ξ , что

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\dots(x-x_p)^{n_p}}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

13.2. Вычисление пределов

- 13.62. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ и $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$, если значение последней дроби определено.
- 13.63. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ (считаем, что $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$). Докажите, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (**правило Лопиталя**, 1-я часть)
- 13.64. (!) Пусть $f, g \in D(a, b)$, где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ и существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$ (считаем, что $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$). Докажите, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (**правило Лопиталя**, 2-я часть).
- 13.65. Пусть последовательности (x_n) , (y_n) таковы, что для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$. Докажите, что найдутся функции $x(t), y(t) \in C^1(0, \infty)$, удовлетворяющие условиям $x(n) = x_n$, $y(n) = y_n$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} = a$.

- 13.66. Докажите теорему Штольца для последовательностей (см. задачу 5.152), используя правило Лопиталя.
- 13.67. (!) Докажите асимптотические равенства:
- а) $|x|^\alpha = o(e^{\beta x})$ при $x \rightarrow \infty$ для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$;
 - б) $\ln^\alpha x = o(|x|^\beta)$ при $x \rightarrow \infty$ для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$;
 - с) $\ln^\alpha |x| = o(|x|^\beta)$ при $x \rightarrow 0$ для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta < 0$.
- 13.68. Пусть $f, g \in D^1(a, b)$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$. Докажите, что если $f'(x) = o(g'(x))$ ($f'(x) = O(g'(x))$) при $x \rightarrow b$, то $f(x) = o(g(x))$ ($f(x) = O(g(x))$) при $x \rightarrow b$. Приведите пример, показывающий, что из $f(x) = o(g(x))$ ($f(x) = O(g(x))$) не следует $f'(x) = o(g'(x))$ ($f'(x) = O(g'(x))$) при $x \rightarrow b$.
- 13.69. Пусть $f \in D^1(a, b)$ и $\alpha < -1$. Докажите, что если $f'(x) = o((x-a)^\alpha)$ ($f'(x) = O((x-a)^\alpha)$) при $x \rightarrow a$, то $f(x) = o((x-a)^{\alpha+1})$ ($f(x) = O((x-a)^{\alpha+1})$) при $x \rightarrow a$.
- 13.70. Пусть $f \in D^1(a, \infty)$, $\alpha > -1$. Докажите, что если $f'(x) = o(x^\alpha)$ ($f'(x) = O(x^\alpha)$) при $x \rightarrow \infty$, то $f(x) = o(x^{\alpha+1})$ ($f(x) = O(x^{\alpha+1})$) при $x \rightarrow \infty$.
- 13.71. Пусть $f \in D^1(a, \infty)$. Докажите, что если $f'(x) = o(1/x)$ ($f'(x) = O(1/x)$) при $x \rightarrow \infty$, то $f(x) = o(\ln x)$ ($f(x) = O(\ln x)$) при $x \rightarrow \infty$.
- 13.72. Пусть $f \in D^1(a, b)$ и $\alpha > -1$. Докажите, что если $f'(x) = o((x-a)^\alpha)$ ($f'(x) = O((x-a)^\alpha)$) при $x \rightarrow a$, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $f(x) - A = o(x^{\alpha+1})$ ($f(x) - A = O(x^{\alpha+1})$) при $x \rightarrow a$.
- 13.73. Пусть $f \in D^1(a, \infty)$, $\alpha < -1$. Докажите, что если $f'(x) = o(x^\alpha)$ ($f'(x) = O(x^\alpha)$) при $x \rightarrow \infty$, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ и $f(x) - A = o(x^{\alpha+1})$ ($f(x) = O(x^{\alpha+1})$) при $x \rightarrow \infty$.
- 13.74. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x$.
- 13.75. Пусть $f(x) = 1 + kx + o(x)$ при $x \rightarrow 0$. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +0} (f(x))^{1/x} = e^k$.
- 13.76. Вычислите пределы при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \pi/2 - 0$:

- a) $\lim(\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}$; e) $\lim(1-2x^3)^{1/\sin^3 x}$;
 b) $\lim(\cos x)^{1/\ln(1+x^2)}$; f) $\lim(1+\sin x)^{1/\ln(1+x)}$;
 c) $\lim(\ln(e-x^2))^{1/\sin^2 x}$; g) $\lim(1+\sin(x^2))^{(1/\sin^2 x)}$;
 d) $\lim(\sin x/x)^{1/x^2}$; h) $\lim(1+3x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

13.77. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} (\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4})^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + \cos \frac{\pi x}{2})}{\sqrt{x}-1}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\ln x \cdot \sin \pi x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1+\ln x)}$.

13.78. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)$;
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctg x\right)^x$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

13.79. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x)^{1/x}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+1/x)^{\ln^2 x}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln(1/x))^{1/\ln x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x^2)^{\ln x}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/\ln x}$; g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+1/x^2)^{\ln x}$;
 d) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln(1/x))^x$; h) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{\ln^2 x}$.

13.80. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}+5} - e^x}{\ln \cos x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}}{x^3}$.

13.81. Вычислите пределы:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - e^{x/3}}{\sin^2 x}$; g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$;
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{x^4}$; h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg}^2 x)(e^{-x} + \sin x - 1)$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{\sin(x^4)}$; i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - 1}{x^5}$;
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x^2)^{1/2} - \sin \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$; j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{(-2x^2 + \frac{4x^4}{3})}}{\operatorname{tg} x^4}$;
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{1/2} - e^x}{\sin(x^2)}$; k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - \sqrt{1-x^3}}{x^6}$;
 f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \sin x}{(e^x - 1)^2}$; l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x\right)x$.

13.82. Вычислите пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$$

13.83. Вычислите пределы:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x - \ln(1+x)} \right)^{1/x^2}; & \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x^2} \right)^{1/x^2}; \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - \sin x}{\sqrt{1-2x} + \ln(1+x)} \right)^{1/x^2}; & \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0+0} (1 + \sqrt{x})^{1/\sin \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

13.84. Пусть $a_1, \dots, a_k > 0$. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1^{1/n} + \dots + a_k^{1/n}}{k} \right)^n$.

13.85. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \dots \left(1 - \left(1 - (n^{1/n} - 1)^{1/n} \right)^{1/n} \right)^{1/n} \dots \right)^{1/n},$$

где корень n -ой степени извлекается $k \in \mathbb{N}$ раз.

Предметный указатель

- абсолютная величина числа 86
- аксиомы
 - алгебраической структуры поля 84
 - линейного порядка 85
 - непрерывности 85
 - связывающие порядок с операциями 85
- асимптота 136
- база индукции 10
- бином Ньютона 12
- вещественная часть числа 86
- вложение 6
- главное значение аргумента числа 92
- граница (грань) 18
 - нижняя 18
 - верхняя 18
- график функции 5
- декартово произведение 5
- дифференциал функции 96
- замыкание множества 64
- изоморфные системы 85
- интервал 19
- инфимум 18
- итеративный логарифм 51
- касательная к кривой 136
- композиция 6
- континуум 23
- критерий
 - Гейне 72
 - Коши (для последовательности) 40
 - Коши сходимости ряда 47
 - Коши (для функции) 73
- колебание 65
- лемма
 - о зажатой последовательности 28
 - о зажатой функции 69
 - Ферма 101
- линейный порядок 18
- метод
 - математической индукции 10
 - Ньютона нахождения корней уравнения 132
- мнимая единица 85
- многочлен
 - Лагерра 116
 - Лежандра 115
 - Чебышёва 11
 - Эрмита 116
- множество 5
 - выпуклое 125
 - замкнутое 64
 - компактное 67
 - конечное 22
 - линейно упорядоченное 18
 - не более чем счётное 23
 - нигде не плотное 64
 - ограниченное 18
 - открытое 64
 - плотное 64
 - счётное 23
- модуль непрерывности 119
- мощность множества 22
- надграфик функции 125
- неравенство
 - Гёльдера 131
 - Йенсена 126
 - Йенсена — Стеффенсена 135
 - Коши — Буняковского — Шварца 131
 - Минковского 132
 - Харди — Литтлвуда — Поля 134
 - Юнга 131
- область определения функции 5
- значений функции 6
- образ множества при отображении 5
- окрестность 64
- — элементарная 64
- открытое покрытие 67
- отображение
 - открытое 80
 - линейное 90
- отрезок 19
- плоская кривая 136
- подмножество 5
- собственное 5
- подпоследовательность 27
- полином Тейлора 140
- полярная система координат 139
- последовательность 26
 - сходящаяся 26
 - фундаментальная 26
- постоянная Эйлера
- C 45
- e 32
- правило Лопиталя 147
- предел
 - последовательности 26
 - — верхний 27
 - — нижний 27
 - — частичный 27
 - функции 64
 - справа 65
 - — верхний 65
 - — нижний 65
- преобразование Лежандра 134
- признак сходимости ряда
 - Абеля 56
 - Гаусса 53
 - Даламбера 49
 - Дирихле 56
 - Дюбуа — Реймона 56
 - Дедекинда 56
 - Жамэ 54
 - Коши 50
 - Куммера 53

- Лейбница 55
- Лобачевского 52
- логарифмический 52
- Раабе 53
- Роты 101
- сравнения 48
- телескопический 50
- принцип
 - Архимеда 19
 - вложенных отрезков Коши — Кантора 21
 - сжимающего отображения 120
- производная функции 96
 - правая 96
 - разностная 110
 - Шварца 110
- равномощные множества 22
- расширенная вещественная прямая 19
- ряд 46
 - расходящийся 46
 - сходящийся (суммируемый) 46
 - абсолютно 46
 - по Чезаро 60
 - условно 46
- свойство
 - антисимметричности 18
 - ассоциативности 84
 - дистрибутивности 85
 - коммутативности 84
 - рефлексивности 18, 22
 - симметричности 22
 - транзитивности 18, 22
- сечение 86
- сумма ряда 46
 - — частичная 46
 - — по Чезаро 60
- супремум 18
- теорема
 - Больцано — Коши 79
 - Бореля — Лебега 68
 - Брауэра о неподвижной точке 81
 - Бэра 68
 - Вейерштрасса (об экстремуме функции) 79
 - Вейерштрасса (о подпоследовательности) 37
 - Дарбу 108
 - Дирихле 22
 - Кантора (о несчётности континуума) 23, 88
 - Кантора (о равномерной непрерывности) 120
 - Кантора — Бернштейна 23
 - Коши 102
 - Лагранжа 102
 - Лиувилля 101
 - о пределе композиции 71
 - Римана 61
 - Ролля 101
 - Шварца 110
 - Шпернера 15
 - Штольца (о пределе последовательности) 43
 - Штольца (о выпуклости функции) 127
- точка
 - возврата 136
 - изолированная 64
 - локального максимума 64
 - — минимума 64
 - — экстремума 64
 - перегиба 125
 - предельная 64
 - прикосновения 64
 - разрыва 65
 - — 1-го рода 65
 - — 2-го рода 65
- условие
 - Гёльдера 122
 - Липшица 69
- формула
 - включения и исключения 14
 - Лагранжа (интерполяционная) 107
 - Лагранжа — Эрмита (интерполяционная) 147
 - Лейбница 115
 - Муавра 92
 - Симпсона 144
 - Тейлора с остаточным членом в форме
 - — Коши 141
 - — Лагранжа 141
 - — Пеано 140
 - — Шлёмилха — Роша 141
 - Фаа ди Бруно 117
 - Эйлера 90
- функция (отображение) 5
 - абсолютно монотонная 124
 - биективная 6
 - — возрастающая 19
 - выпуклая вверх (вогнутая) 125
 - выпуклая вниз 125
 - — — строго 125
 - дифференцируемая 95
 - инъективная 6
 - непрерывная 65
 - непрерывно дифференцируемая 96
 - нечётная 94
 - обратная 6
 - — правая 8
 - положительно определённая 124
 - почти периодическая 124
 - равномерно непрерывная 119
 - сюръективная 6
 - убывающая 19
 - четная 94
- функции
 - эквивалентные 77
 - — по порядку величины 77
- число
 - алгебраическое 24
 - вещественное 84

- комплексное 85
- натуральное 9
- рациональное 10
- трансцендентное 24
- Фибоначчи 14
- целое 10

числа комплексно сопряжённые 86

шаг индукции 10

элемент

- множества 5
- наибольший 18
- обратный 85
- противоположный 85

Список литературы

1. *Алексеев В. М.* Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly». Сборник. М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. *Богданов Ю. С., Кострица О. А.* Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск: Вышэйшая школа, 1988.
3. *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
4. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Высш. шк., 2000. Кн. 1, 2.
5. *Волковыский Л. И., Луц Г. Л., Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
6. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.
7. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе М.: Мир, 1967.
8. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
9. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.
10. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.
11. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ: Сб. задач. Киев: Вища школа, 1987.
12. *Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.
13. *Зорич В. А.* Математический анализ. М.: Наука, 1981. Ч. 1, 2.
14. *Иванов В. В.* Задачи и упражнения для семинаров и домашних заданий по курсу «Математический анализ». Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2008. Ч. 1–4.
15. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1973. Ч. 1.

16. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1982. Ч. 2.
17. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1985. Т. 1, 2.
18. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
19. *Коровкин П. П.* Неравенства. Популярные лекции по математике. М.: Наука, 1983. Вып. 5.
20. *Кречмар В. А.* Задачник по алгебре. М.: Наука, 1968.
21. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1–3.
22. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М.: Наука, 1984.
23. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. М.: Наука, 1986.
24. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1995.
25. *Кутасов А. Д.* Элементы математической логики. М.: Просвещение, 1977.
26. *Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.
27. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1975. Т. 1, 2.
28. *Очан Ю. С.* Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. М.: Просвещение, 1965.
29. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.
30. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. Ч. 1. Кн. 1, 2.

31. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. Ч. 2. Кн. 1, 2.
32. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
33. Садовничий В. А., Григорян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во МГУ, 1987.
34. Садовничий В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978.
35. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 1.
36. Теляковский С. А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1980.
37. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. Т. 1, 2.
38. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Гос. изд-во физ.-ма. лит., 1970. Т. 1–3.
39. Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1, 2.
40. Шведов И. А. Компактный курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003. Ч. 1–3.
41. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. М.: Наука, 1969. Ч. 1–2.
42. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. М.: Наука, 1969. Ч. 3.
43. Ширяев А. Н. Задачи по теории вероятностей. М.: Изд-во МЦНМО, 2006.
44. Korevaar J. Tauberian theory. A century of developments. Berlin: Springer, 2004.
45. Niculescu C., Persson L.-E. Convex functions and their applications. A contemporary approach. Berlin: Springer, 2006.

Учебное издание

Грешнов Александр Валерьевич,
Малюгин Сергей Артемьевич,
Потапов Владимир Николаевич

Сборник задач и упражнений по математическому анализу
1-й семестр

Учебное пособие
2-е изд., испр.

Корректор *К. В. Шмугурова*

Подписно в печать 13.01.2012 г.
Формат 60×84 1/16. Оффсетная печать.
Уч.-изд. л. 9,4, усл.-печ. л. 8,6. Тираж экз.
Заказ №
Редакционно-издательский центр НГУ.
630090, Новосибирск, 90, ул. Пирогова, 2.