

# Элементарная топология

О. Я. Виро, О. А. Иванов,  
Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов

Аннотация. Предмет книги – элементарная топология. Включены: основополагающий материал по общей топологии и введение в алгебраическую топологию через ее наиболее классический и элементарный раздел, выстраивающийся вокруг понятий фундаментальной группы и накрывающего пространства. Стержнем изложения является материал, обычно входящий в лекционный курс геометрии математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета. Этот материал иллюстрирован и дополнен большим количеством других задач разной степени трудности.

*Памяти Владимира Абрамовича Рохлина (1919–1984)*  
– нашего учителя

## Предисловие

### Предмет книги – элементарная топология

Под элементарностью понимают близость к основам, элементам. Невозможно определить точно раз и навсегда, какая топология элементарна, а какая – не очень. Элементарная часть предмета – это то, с чего знаток предмета начинает обучать новичка.

Мы полагаем, что наш ученик уже готов изучать топологию и не будем пытаться завоевать его внимание и расположение торопливыми невразумительными рассказами о таких таинственных и привлекательных вещах как бутылка Клейна.<sup>1</sup> Всеми своё время. Когда дойдёт черёд до бутылки Клейна, будет и бутылка Клейна. Начнём же мы с того, что такое топологическое пространство. То есть начнём с общей топологии.

Общая топология уже давно является частью общематематического языка. Она учит понятно и точно говорить о вещах, связанных с идеей непрерывности. Она нужна не только для того, чтобы объяснить, что же такое бутылка Клейна. Это ещё и способ привести геометрические образы в любую область математики, как бы далека от геометрии эта область ни была на первый взгляд.

Как область активных научных исследований, общая топология практически завершена. Постоянное использование в качестве общего математического языка отполировали систему её определений и теорем. В наши дни её изучение действительно напоминает скорее изучение языка, нежели математики: приходится выучивать много новых слов, тогда как доказательства большинства теорем чрезвычайно просты. Зато теорем этих очень много. Это и не удивительно – они играют роль правил, регулирующих употребление слов.

Книга состоит из двух частей. Общая топология является предметом первой части книги. Вторая часть посвящена введению в алгебраическую топологию через её наиболее классический и элементарный раздел, выстраивающийся вокруг понятий фундаментальной группы и накрывающего пространства.

---

<sup>1</sup>Кто ищет такой элементарной топологии, легко найдёт её во множестве книжек по наглядной топологии с красивыми картинками.

В элементарную топологию мы включили бы ещё и начальные сведения о многообразиях – пространствах, локально устроенных так же, как евклидово пространство. Особенно элементарны одномерные и двумерные многообразия, то есть кривые и поверхности. Но книжка не должна быть слишком толстой, и нам пришлось остановиться.

Несколько особняком стоит глава 5, материал которой связан с различными разделами математики. Хотя он и играет в них существенную роль, он не столь уж важен при изучении общей топологии. Чаще всего его изучение можно отложить до той поры, пока он не появится содержательным образом в других математических курсах (в которых речь пойдет о группах Ли, функциональном анализе и т. д.). В контексте нашей книги он интересен тем, что обеспечивает большой набор разнообразных примеров и упражнений.

### **Особенности организации текста**

Даже при беглом просмотре обнаруживается нестандартность организации текста этой книги. Мы сознательно пошли на несколько нововведений. Надеемся, что читатель быстро освоится с ними и найдёт их полезными.

Мы знаем, что нужды и интересы наших читателей разнообразны, и осознаем, как трудно сделать книжку интересной и полезной для *каждого* читателя. Для решения этой задачи мы разметили текст так, чтобы читатель мог легко определить, чего можно ждать от каждого кусочка текста. Мы надеемся, что это позволит ему организовать изучение материала книги в соответствии со своими вкусами и возможностями. Этой цели служат несколько особенностей организации текста книги.

Прежде всего, мы выделили основную, так сказать, лекционную линию. Это тот материал, который мы считаем основным. Он составляет сравнительно небольшую часть текста.

Часто он перебивается конкретными примерами, иллюстративными и тренировочными задачами и обсуждением понятий, связанных с этими примерами и задачами, но не используемых в дальнейшем. Некоторые из этих понятий играют основополагающую роль в других областях математики, но здесь они второстепенны.

Словом, основная линия при первой же возможности перебивается *вариациями*. Вариации графически ясно отделены от *основной темы*.

Вторая особенность, отличающая эту книгу от большинства других учебников, – отделённость доказательств от формулировок. Она выглядит почти как задачник. При желании эту книгу легко было бы сделать малоотличимой по виду от сотен других учебников математики. Для этого нужно все вариации переместить в концы параграфов так, чтобы

они выглядели бы упражнениями к основному тексту, а доказательства теорем поместить непосредственно после их формулировок.

### Для кого эта книжка?

Читатель может смело браться за эту книжку, если в своем образовании он благополучно добрался до университета. Отдельные самоуверенные смельчаки могут попробовать взяться за неё и раньше. Однако сказать, что предварительных знаний не требуется, нельзя. Предполагается знакомство с вещественными числами. Ну и конечно с натуральными, целыми и рациональными. Знакомство с комплексными числами тоже не будет лишним, хотя в первой части книги без них можно и обойтись.

Мы предполагаем, что читатель знаком с наивной теорией множеств, но допускаем, что это знакомство может быть поверхностным. Поэтому там, где владение теорией множеств особенно желательно, сделаны специальные теоретико-множественные отступления.

Мы не опираемся всерьёз на знание анализа, но поскольку большинство наших читателей с ним всё равно хоть чуть-чуть знакомы, мы не стесняемся прибегать к обозначениям и понятиям из анализа.

Во второй части пригодится опыт работы с группами, хотя всё необходимое о группах мы сообщаем.

Одно из самых ценных приобретений, которое может сделать читатель, одолев эту книгу, — новые элементы математической культуры, способность понимать и ценить абстрактную аксиоматическую теорию. Чем в большей степени читатель этим уже обладает, тем легче ему освоить фактический материал этой книги.

Если вы хотите изучать топологию самостоятельно, попробуйте работать с этой книгой. Она может оказаться как раз тем, что вам нужно. Однако вам следует внимательно перечитать это предисловие с тем, чтобы разобраться, как организован материал и как им пользоваться.

### Основная тема

Стержнем книги является материал курса топологии для студентов математиков Санкт-Петербургского (Ленинградского) государственного университета. Этот материал сравнительно невелик и почти не содержит сложных рассуждений.

Пусть читатель не думает, что выделяя основную тему авторы просто пытаются навязывать ему свои вкусы. Мы не стесняемся при случае свои вкусы навязывать, но здесь мы стремимся прежде всего организовать изучение предмета.

Основная тема составляет законченное целое. Читатель, её освоивший, предмет выучил. Заглядывал он в вариации или нет – его дело. Но вариации для того и включены, чтобы помочь в освоении основного материала. Они не сосланы на заключительные страницы параграфов для того, чтобы быть под рукой именно тогда, когда они нужнее всего. Заодно из вариаций можно узнать много интересного. Однако чрезмерно буквальное и тщательное следование вариациям может неоправданно затянуть изучение предмета.

Мы считаем, что материал, представленный в основной теме, – это тот минимум топологии, который должен освоить каждый студент, решившим стать профессиональным математиком.

Студенту, чьи интересы окажутся связаны с топологией и другими геометрическими предметами, конечно, придётся изучить гораздо больше, чем мы включили в основную тему. Но и ему этот материал может послужить хорошей основой.

Студенту, не рассчитывающему стать профессиональным математиком, даже частичное знакомство с основной темой может оказаться полезным. Кому-то – для подготовки к экзамену, кому-то – для того, чтобы почувствовать вкус абстрактной математики, роль определений и ценность точных формулировок. . .

## Где доказательства?

Книга рассчитана на читателя, готового работать активно.

*Доказательства теорем отделены от их формулировок и помещены в конец текущей главы.*

По нашему убеждению, первой реакцией на формулировку любого утверждения, коль скоро вам кажется, что вы её поняли, должна быть попытка доказать её. Или опровергнуть, если доказать не удастся. Попытка опровергнуть может быть полезна и для достижения лучшего понимания формулировки и для поиска доказательства.

Отдаляя доказательства от формулировок, мы хотим поощрить читателя к продумыванию каждой формулировки, одновременно сделав книгу неудобной для легкомысленного скольжения по диагонали. Впрочем, читатель, предпочитающий более традиционный стиль и не желающий по каким-либо причинам работать чересчур активно, сможет либо найти доказательство в конце главы, либо и вовсе пропустить его (правда, рискуя и формулировку понять превратно).

Такой стиль может угодить и искушённому читателю, предпочитающему формулировки, не омрачённые доказательствами. Доказательства в большинстве своём легкие, придумывать их легко и приятно.

## Структура книги

Основными структурными единицами книги являются параграфы, которые разделены на пронумерованные и озаглавленные пункты. Каждый пункт посвящен отдельному сюжету и состоит из определений, комментариев, теорем, упражнений, задач и загадок.

Под *загадкой* мы понимаем задачу, решение (а часто и условие) которой следует скорее угадать, чем вычислить или вывести из формулировки.

Теоремы, упражнения, задачи и загадки, относящиеся к основному материалу, нумеруются парами, состоящими из номера параграфа и латинской буквы, отделенных друг от друга точкой.

**2.B. Загадка.** Принимая во внимание её номер, определите, каком параграфе должна находиться эта загадка? Да и загадка ли это?

Буквы присваиваются в алфавитном порядке и нумеруют утверждения в пределах параграфа.

Часто после трудной задачи (теоремы) сформулирована последовательность утверждений, являющихся леммами к этой задаче. Такая цепочка нередко завершается задачей, в которой предлагается вернуться к исходной задаче (теореме), вооружившись только что доказанными леммами.

## Вариации

Основной материал подаётся в окружении многочисленных тренировочных задач и дополнительных определений, теорем и утверждений. Несмотря на свои связи с основным материалом, они обычно остаются за рамками стандартного лекционного курса.

Этот дополнительный материал в книге легко распознаётся по более мелкому шрифту и широким полям, таким, как здесь. Упражнения, задачи и загадки, не включенные в основной материал, но тесно связанные с ним, нумеруются парами, состоящими из номера параграфа и номера этого утверждения в пределах параграфа.

**2.5.** Найдите в основном тексте книги задачу с тем же номером 2.5.

*Решения всех задач помещены в конце книги.*

Задачи, которые авторам показались наиболее трудными, помечены, как водится, звёздочкой. Они включены с разными целями: наметить связи с другими областями математики, указать возможные направления развития предмета, или просто доставить удовольствие амбициозному читателю.

## Дополнительные темы

Мы решили сделать доступными для заинтересованных студентов некоторые теоретические сюжеты, дополняющие основной материал. Их было бы естественно включать в лекционные курсы, предназначенные для старшекурсников (или аспирантов). Однако, как правило, этого не случается, поскольку сюжеты эти плохо вписываются в традиционные специальные курсы. Более того, их изучение кажется более естественным именно при первых контактах с топологией.

В книжке такие сюжеты выделены в отдельные пункты, в номера которых включен символ  $x$ , что означает *extra* (иногда таким образом помечен и весь параграф, а в одном случае и целая глава).

Отношение к этому материалу как к дополнительному зависит, конечно, от точки зрения. Относя какой-то сюжет к таковому, мы руководствуемся своими представлениями о том, что должно входить в первоначальное изучение топологии. Мы понимаем, что кто-то из коллег может не одобрить наш выбор, но надеемся, что наша разметка не мешает им пользоваться книжкой.

## Советы читателю

Этой книгой можно пользоваться при подготовке к экзамену по топологии (особенно если он состоит в решении задач). Однако если вы слушаете лекции по топологии, то разумно почитать ее перед лекциями, пытаясь самостоятельно доказывать приводимые утверждения до того, как их докажет лектор.

Читатели, которые могут самостоятельно доказать утверждения из основной темы, вообще говоря, не нуждаются в решении всех задач, предлагаемых в вариациях, и могут ограничиться беглым знакомством с их условиями и решением наиболее трудных из них. С другой стороны, чем труднее вам доказывать утверждения основной темы, тем с большим вниманием следует отнестись к иллюстративным задачам и с меньшим — к задачам со звездочкой.

Многие из предлагаемых иллюстративных задач придумать легко. Более того, при серьезном изучении предмета примеры такого типа и нужно постоянно придумывать.

С другой стороны, некоторые задачи, представленные в этой книжке, придумать совсем не просто. Мы широко использовали всевозможные источники, как литературные, так и преподавательский фольклор.



## Новое слово в математике: *согда*

В математической речи часто встречается сложный союз “тогда и только тогда, когда” (другие варианты: “в том и только в том случае, если”, “для того, чтобы ... необходимо и достаточно, чтобы”). Ни в одном естественном национальном языке нет короткого союза с тем же смыслом. В письменный английский математики ввели союз “iff”, и он получил широкое распространение. Мы предлагаем на ту же роль другое слово – *согда*, которое звучит по-русски и имеет достаточно ясную этимологию. Его второй слог *-гда* является активным славянским корнем, указывающим на время. Он входит в слова *тогда*, *всегда*, *когда*, *иногда*, *никогда*, *некогда*. Первый слог *со-* является не менее активной приставкой, которая служит для образования слов, означая общее участие, совместность и т. п., например, *современник*, *соавтор*, *согласие*, *соратник*. Вместе получается общность времени, что соответствует длинной форме “тогда и только тогда, когда”.

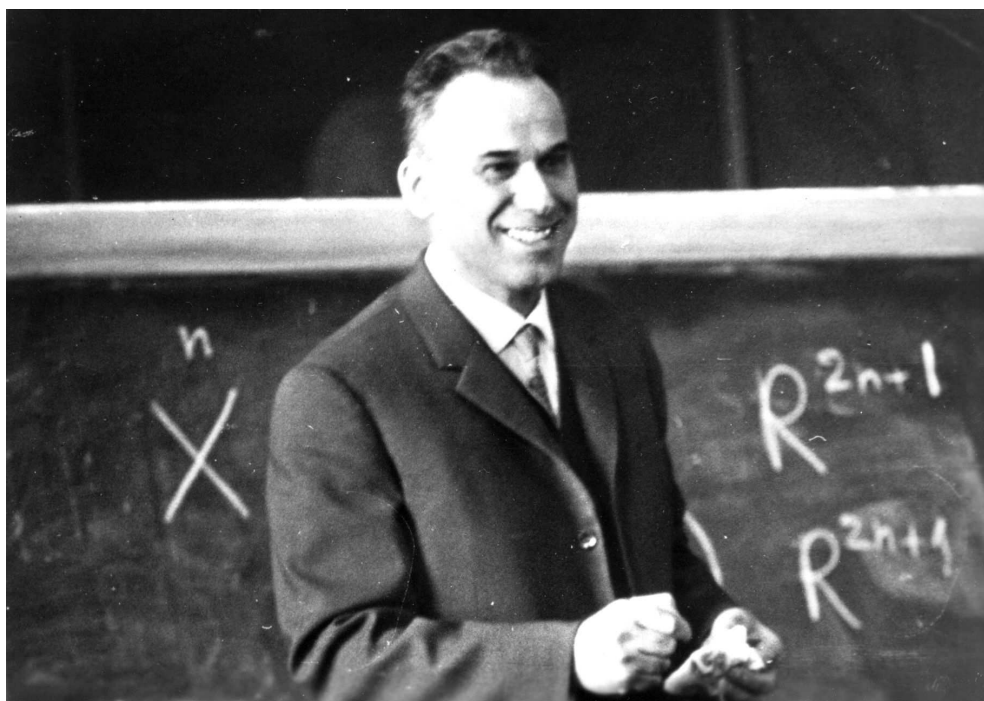
## Как создавалась эта книга

Основная тема следует курсу лекций, поставленному Владимиром Абрамовичем Рохлиным на математико-механическом факультете Ленинградского государственного университета в шестидесятые годы минувшего века. Нам кажется уместным начать с обстоятельств создания этого курса, хотя писать эту книгу мы стали уже после смерти Владимира Абрамовича (который умер в 1984 году). В шестидесятые годы в Советском Союзе математика была одной из наиболее привлекательных областей науки для молодых людей, уступая среди негуманитарных наук разве что физике. Каждый год на отделение математики мат-меха ЛГУ поступали более ста студентов, несколько десятков из которых были выпускниками математических школ. Программа лекционных курсов мат-меха подверглась серьёзному обновлению.

До создания рохлинского курса топология преподавалась на мат-мехе только в рамках спецкурсов. Рохлину удалось включить в систему общих обязательных курсов семестровый курс топологии. Курс состоял из трёх глав, посвященных, соответственно, общей топологии, фундаментальной группе и накрытиям и многообразиям. Содержание первых двух глав мало отличалось от основного материала этой книги. Последняя глава начиналась с общего определения топологического многообразия, включала топологическую классификацию одномерных многообразий и завершалась либо топологической классификацией триангулированных двумерных многообразий, либо элементами дифференциальной топологии вплоть до вложимости гладкого многообразия в евклидово пространство.

Трое из четырёх авторов принадлежат первым поколениям студентов, слушавших этот рохлинский курс лекций. Это был семестровый курс, три часа в неделю в первом семестре второго курса. От силы две двухчасовые лекции в течении всего семестра посвящались решению задач. Эти занятия проводил не

Рохлин, а его аспиранты. К примеру, в 1966–68 годах их вёл Миша Громов – выдающийся геометр, в настоящее время профессор парижского Института высших исследований и нью-йоркского Института Куранта. Рохлин считал курс теоретическим и не хотел тратить лекционное время на решение задач. И вправду, в рамках этого курса студентов не приходилось обучать решению серий рутинных задач наподобие традиционных для математического анализа задач на технику дифференцирования и интегрирования.



Владимир Абрамович Рохлин читает лекцию, шестидесятые годы.

Хоть мы и построили свою книгу, отправляясь от лекций Рохлина, никакого представления о стиле рохлинских лекций книга не даёт. Это были блестящие лекции. Владимир Абрамович почти ничего не писал на доске. Тем не менее, записывать за ним было легко. Он говорил не торопясь, максимально простыми и идеально правильными фразами.

Последний раз свой обязательный курс топологии Рохлин прочёл в 1973 году. В августе 1974 в связи с тяжёлой болезнью Рохлина администрации мат-меха пришлось искать, кем заменить его как лектора. Задача осложнялась тем, что экзаменационные результаты за предыдущий год были из рук вон плохи. В 1973 году время, отведённое на курс, было увеличено до четырёх часов в неделю, тогда как число студентов увеличилось, а уровень их подготовки, соответственно, снизился. И экзаменационные оценки “рухнули”.

Было решено весь поток, состоявший приблизительно из 175 студентов, разделить на два потока. Лекции студентам, которым предстояло специализироваться по прикладной математике, было поручено читать профессору

В. А. Залгаллеру, а лекции студентам-математикам – ассистенту О. Я. Виро. По предложению Залгаллера были введены практические занятия – один час в неделю. В результате время, отведённое на лекции, уменьшилось, а вместе со временем сократился *de facto* и объём материала.

Оставалось понять, что же делать на практических занятиях. Пришлось разработать систему задач и упражнений, которые давали бы возможность повторить определения, данные на лекциях, и позволяли бы развивать навыки в доказательстве простых теорем из общей топологии в обстановке несложной аксиоматической теории. При постепенно снижающемся уровне предварительной подготовки студентов практические занятия и задачи становились всё более полезными.

Задачи первой части книги – результат наших усилий в этом направлении. В 1988 году задачи эти были опубликованы издательством ЛГУ в небольшой книжке "Задачи по топологии".

Студенты нашли книжку полезной. Один из них, Алексей Соловьёв даже перевёл её на английский по собственной инициативе, когда поступил в аспирантуру Университета Калифорнии. Перевод открыл новый этап работы над книгой. Мы стали развивать параллельно русскую и английскую версии и охватили практически весь материал рохлинского курса. В 2000 году в издательстве Санкт-Петербургского государственного университета вышло второе русское издание книги, уже включавшее в себя главу о фундаментальной группе и накрытиях.

Авторы использовали английскую версию в своих лекциях в Соединённых Штатах (Университет Калифорнии), Франции (Страсбургский университет) и Швеции (Уппсальский университет). Лекции читались для весьма разных аудиторий: как для студентов, так и для аспирантов. Кроме того, мы получали запросы от знакомых и незнакомых профессоров на разрешение использовать английскую версию в их лекциях как в тех же, так и в других странах. Возникли новые требования к тексту. Например, нас просили включить в книгу решения задач и доказательства теорем, чтобы привести её в соответствие с западными стандартами и превратить из задачника в самостоятельный учебник. Поколебавшись, мы удовлетворили эти просьбы, тем более, что к ним присоединилось издательство Американского Математического Общества, которое публикует в 2007 году английскую версию.

Мы благодарны всем нашим коллегам за их советы и помощь. Многочисленные полезные замечания и предложения были высказаны М. Ю. Звагельским, А. В. Корчагиным, С. С. Подкорытовым, А. Н. Шумаковичем. Мы благодарны Алексею Соловьёву за английские переводы первого издания этой книжки.

Мы особо признательны Виктору Абрамовичу Залгаллеру, чей педагогический опыт и искреннее желание помочь сыграли неоценимую роль для нас тогда, когда мы были молодые.

Каждому из нас посчастливилось быть учеником Владимира Абрамовича Рохлина, памяти которого мы и посвящаем эту книгу.



Авторы, слева направо:  
Олег Янович Виро,  
Вячеслав Михайлович Харламов,  
Никита Юрьевич Нецветаев,  
Олег Александрович Иванов.

---

# Оглавление

Предисловие	iii
Часть 1. Общая топология	
Глава I. Структуры и пространства	3
1. Теоретико-множественное отступление: множества	3
2. Топология в множестве	11
3. Базы	17
4. Метрические пространства	20
5. Подпространства	29
6. Расположение точек относительно множества	31
7. Упорядоченные множества	38
Доказательства и комментарии	48
Глава II. Непрерывность	59
8. Теоретико-множественное отступление: отображения	59
9. Непрерывные отображения	63
10. Гомеоморфизмы	72
Доказательства и комментарии	81
Глава III. Топологические свойства	87
11. Связность	87
12. Приложения понятия связности	93

13. Линейная связность	96
14. Аксиомы отделимости	101
15. Аксиомы счетности	108
16. Компактность	113
17. Секвенциальная компактность	119
18х. Локальная компактность и паракомпактность	123
Доказательства и комментарии	128
Глава IV. Топологические конструкции	143
19. Перемножение	143
20. Факторизация	150
21. Зверинец факторпространств	155
22. Проективные пространства	166
23х. Конечные топологические пространства	171
24х. Пространства непрерывных отображений	176
Доказательства и комментарии	181
Глава V. Элементы топологической алгебры	193
25х. Алгебраическое отступление: группы и гомоморфизмы	195
26х. Топологические группы	201
27х. Конструкции	205
28х. Действия топологических групп	211
Доказательства и комментарии	215
<b>Часть 2. Алгебраическая топология</b>	
Глава VI. Гомотопии и фундаментальная группа	223
29. Гомотопии	223
30. Гомотопические свойства умножения путей	229
31. Фундаментальная группа	232
32. Роль отмеченной точки	238
Доказательства и комментарии	242
Глава VII. Накрытия и вычисление фундаментальной группы	249
33. Накрытия	249
34. Теоремы о накрывающих путях	254

35. Вычисление фундаментальных групп при помощи универсальных накрытий	256
Доказательства и комментарии	262
Глава VIII. Фундаментальная группа и отображения	267
36. Индуцированные гомоморфизмы и их первые применения	267
37. Ретракции и неподвижные точки	274
38. Гомотопические эквивалентности	277
39. Накрытия и фундаментальная группа	282
Доказательства и комментарии	290
Глава IX. Клеточная техника	301
40. Клеточные пространства	301
41. Клеточные конструкции	310
42. Одномерные клеточные пространства	314
43. Фундаментальная группа клеточного пространства	318
Доказательства и комментарии	328
Указания, комментарии, советы и ответы	343
Литература	425
Предметный указатель	427

---

*Часть 1*

# Общая топология



Цель этой части книги – обучение математическому языку. Точнее, одной из наиболее важных его компонент – языку теоретико-множественной топологии, которая имеет дело с основополагающими понятиями, связанными с идеей непрерывности. Термин *общая топология* обозначает топологию, которая используется большинством математиков. Постоянное использование в качестве общего математического языка отполировали систему ее определений и теорем. В наши дни изучение общей топологии действительно напоминает скорее изучение языка, нежели математики: приходится выучивать много новых слов, тогда как доказательства всех теорем чрезвычайно просты. Зато теорем очень много. Это и не удивительно – они играют роль правил, регулирующих употребление слов.

Мы должны предупредить студентов, для которых это один из самых первых математических предметов. Не спешите влюбиться в него слишком сильно, не дайте случиться импринтингу. Этот предмет может очаровать, но он не такой живой как многие другие области математики и не способен дать такого простора для захватывающих новых открытий.

# Структуры и пространства

## 1. Теоретико-множественное отступление: множества

Мы начинаем с отступления, которое хотелось бы считать излишним. Его предмет – наивная теории множеств – тоже часть общематематического языка, но он еще не топология. О топологии мы ни слова не сможем сказать без этой части (чтобы убедиться в этом, загляните в следующий параграф). Естественно ожидать, что знакомство с наивной теорией множеств происходит при изучении предметов, обычно предшествующих топологии, таких как математический анализ и алгебра. Если так оно и было, бегло просмотрите этот параграф и принимайтесь за следующий.

### 1'1. Множества и элементы

В любой интеллектуальной деятельности одно из самых основополагающих действий – соединение объектов в группы. Это соединение происходит в умах и совсем необязательно сопровождается каким бы то ни было не умственным действием. Как только группа образована и названа, о ней можно думать и рассуждать и, в частности, включать в другие группы. В математике имеется великолепно разработанная система понятий, которая организует и регламентирует создание таких групп и оперирование ими. Эта система понятий называется *наивная теория*

**множеств**, название несколько вводящее в заблуждение – это не столько теория, сколько язык.

Первые слова в этом языке – **множество** и **элемент**. Под множеством понимают произвольное собрание различных предметов. Предметы, входящие в это собрание, называются *элементами* этого множества. Множество **состоит** из своих элементов. Оно **образовано** из них. Чтобы разнообразить речь, слово *множество* заменяют словом *совокупность*. Иногда в том же смысле употребляют и другие слова, такие как *группа*, *класс*, *семейство*, но это не вполне безопасно, поскольку каждое из них наделается в математике другими, как правило, более узкими значениями.

То, что  $x$  является элементом множества  $A$ , обозначается формулой  $x \in A$ . Говорят  $x$  **принадлежит множеству**  $A$  и  $A$  **содержит**  $x$ . Значок  $\in$  называется *символом принадлежности*. Он возник как стилизованная греческая буква  $\epsilon$ , первая буква латинского слова *elementum*. Формулу  $x \in A$  записывают и так:  $A \ni x$ . Этим подчёркивается очевидная аналогия с символами  $<$  и  $>$ . То, что  $x$  не является элементом множества  $A$ , записывается формулой  $x \notin A$  или  $A \not\ni x$ .

## 1'2. Равенство множеств.

Множество определяется своими элементами. Оно есть ни что иное как собрание своих элементов. Наиболее выпукло это проявляется в том, что **множества считаются равными, когда они состоят из одних и тех же элементов**. В этом смысле слово множество имеет слегка уничижительный оттенок: когда мы говорим “множество”, мы подчёркиваем своё сиюминутное равнодушие к какой бы то ни было организации его элементов.

Например, говоря, что прямая есть множество точек, мы даём основание предположить, что две прямые совпадают, когда они состоят из одних и тех же точек. С другой стороны, мы обязуемся все взаимоотношения точек (расстояния между ними, их порядок на прямой и т.п.) рассматривать отдельно, не включая их в понятие прямой.

Элементы, в свою очередь, могут быть множествами, но постольку поскольку они рассматриваются как элементы, они исполняют роль своего рода атомов, чья внутренняя жизнь игнорируется.

Можно представлять себе множество как воображаемый ящик, созданный, чтобы отделить элементы этого множества от прочих вещей. Соединение каких-то вещей в множество даёт возможность присвоить им общее имя и демонстрирует намерение рассматривать эти вещи как единую общность, не вдаваясь до поры до времени в их природу и отношения между собой.

В современной математике слова *множество* и *элемент* являются одними из наиболее употребительных. Они употребляются почти во всех математических текстах, к месту и не к месту. Нехорошо словом элемент заменять другие, более значимые слова, превращая это слово в математический аналог слова-паразита *штука*. Когда что-то называют элементом, должно быть ясно, что подразумевается под множеством, чьим элементом это что-то служит. Слово элемент осмысленно только в комбинации со словом множество. Исключений из этого правила не много: нематематические термины (химический элемент, нагревательный элемент), редкие старомодные математические термины (например, подинтегральное выражение называют *инфинитезимальным элементом*, в старых геометрических текстах точки, прямые и плоскости называются элементами).

### 1'3. Пустое множество

Итак, элемент не может быть без множества. А вот множество может быть без единого элемента. Имеется всего одно такое множество (поскольку множество определяется запасом своих элементов). Оно называется *пустым* и обозначается символом  $\emptyset$ .<sup>1</sup>

### 1'4. Основные числовые множества

Наряду с  $\emptyset$  имеются и другие уникальные множества, столь важные, что заполучили свои собственные общепринятые названия и обозначения. Множество всех натуральных чисел, т. е. 1, 2, 3, 4, 5, ..., обозначается через  $\mathbb{N}$ . Множество всех целых чисел (как положительных целых, т.е. натуральных чисел, так отрицательных и нуля) обозначается через  $\mathbb{Z}$ . Множество всех рациональных чисел (добавьте к целым числам числа, представимые дробями, такие как  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{7}{5}$ ) обозначается через  $\mathbb{Q}$ . Множество всех вещественных чисел (полученное присоединением к множеству рациональных чисел иррациональных чисел таких как  $\sqrt{2}$  и  $\pi = 3,14\dots$ ) обозначается через  $\mathbb{R}$ . Множество комплексных чисел обозначается через  $\mathbb{C}$ .

### 1'5. Задание множества явным перечнем его элементов

Множество, заданное списком  $a, b, \dots, x$  своих элементов, обозначается символом  $\{a, b, \dots, x\}$ . Другими словами, список объектов, заключенный в фигурные скобки, обозначает множество, элементы которого перечислены в этом списке. Например,  $\{1, 2, 123\}$  – множество состоящее из чисел 1, 2 и 123. Формула  $\{a, x, A\}$  обозначает множество, состоящее из элементов  $a$ ,  $x$  и  $A$ , какие бы объекты эти три буквы ни обозначали.

---

<sup>1</sup>Другие обозначения, например,  $\Lambda$ , тоже были в ходу, но постепенно обозначение  $\emptyset$  стало общепринятым.

1.1. Что такое  $\{\emptyset\}$ ? Сколько элементов в этом множестве?

1.2. Какие из нижеследующих формул верны:

- 1)  $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ; 2)  $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ ; 3)  $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$ ?

Множество, состоящее из одного элемента, так и называется *одноэлементным*.

1.3. Является ли множество  $\{\{\emptyset\}\}$  одноэлементным?

Заметьте, что множества  $\{1, 2, 3\}$  и  $\{3, 2, 1, 2\}$  равны, поскольку они состоят из одних и тех же элементов. На первый взгляд, список с повторениями никогда не может возникнуть естественно. Появляется даже соблазн на всякий случай запретить списки с повторениями в подобных обозначениях. Однако, как это часто случается с соблазном что-то запретить, в данном случае этот запрет не был бы разумен. Действительно, часто никто не может сказать, имеются в списке повторения, или нет. Например, если элементы списка зависят от параметра, то при одних значениях параметра некоторые члены списка могут совпасть, тогда как при других значениях они окажутся различными.

1.4. Сколько элементов содержат следующие множества?

- 1)  $\{1, 2, 1\}$ ; 2)  $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ ; 3)  $\{\{2\}\}$ ;  
 4)  $\{\{1\}, 1\}$ ; 5)  $\{1, \emptyset\}$ ; 6)  $\{\{\emptyset\}, \emptyset\}$ ;  
 7)  $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ ; 8)  $\{x, 3x - 1\}$  при  $x \in \mathbb{R}$ .

## 1'6. Подмножества

Если каждый элемент множества  $A$  принадлежит и множеству  $B$ , то говорят, что  $A$  есть *подмножество* множества  $B$ , и что  $B$  *содержит* множество  $A$ , а также пишут  $A \subset B$  и  $B \supset A$ . Знаки  $\subset$  и  $\supset$  называются *символами включения*. Они не случайно напоминают знаки неравенства  $<$  и  $>$ :

1.А. Пусть множество  $A$  состоит из  $a$  элементов, а множество  $B$  — из  $b$  элементов. Если  $A \subset B$ , то  $a \leq b$ .

## 1'7. Свойства включения

1.В Рефлексивность включения. Включение  $A \subset A$  имеет место для любого множества  $A$ , то есть любое множество содержится в самом себе.

Таким образом, знаки включения не вполне соответствуют знакам неравенств  $<$  и  $>$ . Они ближе к  $\leq$  и  $\geq$ . Обратите внимание, что нет такого числа  $a$ , которое было бы меньше самого себя; неравенство  $a < a$  решений не имеет.

**1.С** Вездесущность пустого множества.  $\emptyset \subset A$  для любого множества  $A$ . Другими словами, пустое множество присутствует, в качестве подмножества, в каждом множестве.

Итак, в любом множестве  $A$  имеются два очевидных подмножества: пустое множество  $\emptyset$  и само  $A$ . Подмножество множества  $A$ , отличное от  $\emptyset$  и  $A$ , называется его **собственным** подмножеством. Слово это употребляется, когда хотят исключить из рассмотрения очевидные подмножества (называемые **несобственными**.)

**1.D** Транзитивность включения. Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  – множества, такие что  $A \subset B$  и  $B \subset C$ , то  $A \subset C$ .

### 1'8. Доказывая равенство множеств, доказывают два включения

Имея дело с множествами, часто приходится доказывать, что какие-то два множества, которые возникают казалось бы совершенно по-разному, на самом деле совпадают. Наиболее обычный способ доказательства равенства множеств дает следующая теорема.

**1.E** Критерий равенства множеств.

$$A = B, \text{ когда } A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

### 1'9. Включение и принадлежность

**1.F.**  $x \in A$ , когда  $\{x\} \subset A$ .

Несмотря на эту очевидную связь и похожесть символов принадлежности  $\in$  и включения  $\subset$ , понятия принадлежности и включения весьма различны. В самом деле, принадлежность  $A \in B$  означает что  $A$  – один из элементов множества  $B$  (то есть один из неделимых объектов, составляющих  $B$ ), тогда как включение  $A \subset B$  означает, что  $A$  состоит из некоторых элементов множества  $B$ .

**1.G Нереплексивность принадлежности.** Постройте множество  $A$ , такое что  $A \notin A$ . Ср. 1.B.

**1.H Нетранзитивность принадлежности.** Постройте такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что  $A \in B$  и  $B \in C$ , но  $A \notin C$ . Ср. 1.D.

### 1'10. Задание подмножества заданием условия

Как мы знаем (см. 1'5), множество можно описать, представив список его элементов. К сожалению, этот простейший способ задания множеств не всегда доступен и уж во всяком случае не всегда легок. Например, легко сказать: “множество всех решений следующего уравнения” и выписать уравнение. Это – вполне приемлемое недвусмысленное описание множества. Приняв его, можно говорить об этом множестве,

обсуждать его свойства, и, в результате, если повезёт, решить уравнение и выписать список всех его решений. Последнее может оказаться не легким делом, но тот факт, что мы не имеем списка всех решений уравнения, не должен помешать нам рассуждать о множестве всех его решений.

Итак, множество можно задать, сформулировав свойства, выделяющие его элементы среди элементов более широкого и уже описанного множества. Соответствующее обозначение: подмножество множества  $A$ , состоящее из элементов  $x$ , которые удовлетворяют условию  $P(x)$ , обозначается через  $\{x \in A \mid P(x)\}$ .

**1.5.** Задайте следующие множества списками их элементов (т.е. как  $\{a, b, \dots\}$ )

- (a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ , (b)  $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$ , (c)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ .

## 1'11. Пересечение и объединение

*Пересечением* множеств  $A$  и  $B$  называется множество, составленное из их общих элементов, то есть элементов, принадлежащих и  $A$ , и  $B$ . Оно обозначается через  $A \cap B$ . Его можно описать и формулой

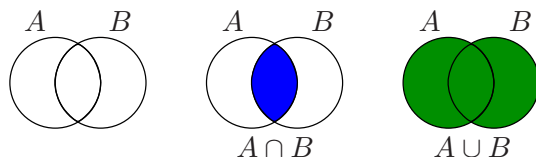
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Множества  $A$  и  $B$  называются *дизъюнктными* или *непересекающимися*, если их пересечение пусто, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ .

*Объединением* множеств  $A$  и  $B$  называется множество, составленное из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ . Объединение множеств  $A$  и  $B$  обозначается через  $A \cup B$ . Его можно описать формулой

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Здесь союз *или* понимается в неисключающем смысле: условие " $x \in A$  или  $x \in B$ " означает, что  $x$  принадлежит *хотя бы одному* из множеств  $A$  и  $B$ , а, быть может, и обоим.



**1.1** Коммутативность операций  $\cap$  и  $\cup$ . Для любых множеств  $A$  и  $B$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{и} \quad A \cup B = B \cup A$$

**1.6.** Докажите, что для любого множества  $A$

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A \text{ и } A \cap \emptyset = \emptyset.$$

**1.7.** Докажите, что для любых множеств  $A$  и  $B$

$$A \subset B, \text{ тогда } A \cap B = A, \text{ тогда } A \cup B = B.$$

**1. J** Ассоциативность операций  $\cap$  и  $\cup$ . Для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad \text{и} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Ассоциативность позволяет не заботиться о скобках и даже иногда опускать их, полагая  $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  и  $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ . Впрочем, пересечение и объединение сколь угодно большой (в частности, бесконечной) совокупности множеств проще определяется непосредственно. Действительно, пусть  $\Gamma$  – некоторая совокупность множеств. *Пересечением* множеств этой совокупности называется множество, составленное из элементов, которые принадлежат *каждому* множеству, входящему в  $\Gamma$ . Это множество обозначается через  $\bigcap_{A \in \Gamma} A$ . Аналогично, *объединением* множеств совокупности  $\Gamma$  называется множество, составленное из элементов, которые принадлежат *хотя бы одному* множеству, входящему в  $\Gamma$ . Это множество обозначается через  $\bigcup_{A \in \Gamma} A$ .

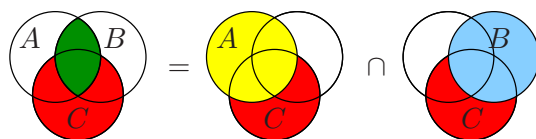
**1. K.** Понятия пересечения и объединения множеств произвольной совокупности обобщают понятия пересечения и объединения двух множеств: если  $\Gamma = \{A, B\}$ , то  $\bigcap_{C \in \Gamma} C = A \cap B$  и  $\bigcup_{C \in \Gamma} C = A \cup B$ .

**1.8. Загадка.** Как связаны понятия системы уравнений и пересечения множеств?

**1. L** Две дистрибутивности. Для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (1)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (2)$$



$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

На рисунке 1.11 первое из тождеств теоремы 1. L проиллюстрировано своего рода комиксом. Такие комиксы называются *диаграммами Венна* или *кругами Эйлера*. Они очень полезны и мы рекомендуем научиться их рисовать для иллюстрации всех теоретико-множественных формул (по крайней мере содержащих не более трех множеств).

**1. M.** Нарисуйте диаграмму Венна, иллюстрирующую равенство (2). Докажите равенства (1) и (2), отслеживая все детали доказательства на диаграммах Венна. Нарисуйте диаграммы Венна, иллюстрирующие все последующие формулы этого параграфа.

**1.9. Загадка.** Обобщите теорему 1. L на случай любого числа множеств.



**1.N** Ещё две дистрибутивности. Пусть  $A$  – множество, а  $\Gamma$  – множество, все элементы которого являются множествами. Тогда

$$A \cap \bigcup_{B \in \Gamma} B = \bigcup_{B \in \Gamma} (A \cap B) \quad \text{и} \quad A \cup \bigcap_{B \in \Gamma} B = \bigcap_{B \in \Gamma} (A \cup B).$$

## 1'12. Разные разности

**Разностью**  $A \setminus B$  множеств  $A$  и  $B$  называется совокупность тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ . При этом, вообще говоря, не предполагается, что  $A \supset B$ .

В случае, если  $A \supset B$ , множество  $A \setminus B$  называется также **дополнением** множества  $B$  в множестве  $A$ .

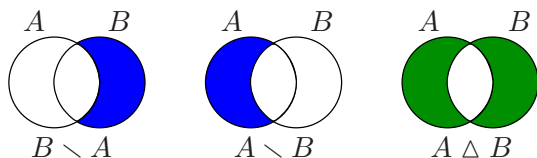
**1.10.** Докажите, что для любых множеств  $A$  и  $B$  их объединение  $A \cup B$  представляется как объединение следующих трёх множеств:  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  и  $A \cap B$  и что эти множества попарно не пересекаются.

**1.11.** Докажите, что  $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$  для любых множеств  $A$  и  $B$ .

**1.12.** Докажите, что  $A \subset B$ , тогда  $A \setminus B = \emptyset$ .

**1.13.** Докажите, что  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$  для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**Симметрической разностью** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Это множество обозначается через  $A \Delta B$ .



**1.14.** Докажите, что для любых множеств  $A$  и  $B$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

**1.15 Ассоциативность симметрической разности.** Докажите, что для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

**1.16. Загадка.** Найдите симметричное определение симметрической разности  $(A \Delta B) \Delta C$  трёх множеств и обобщите его на случай любого конечного набора множеств.

**1.17 Дистрибутивность.** Докажите, что  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$  для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**1.18.** Справедливо ли равенство  $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$  для любых множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ ?

## 2. Топология в множестве

### 2'1. Определение топологического пространства

Пусть  $X$  – некоторое множество. Рассмотрим набор  $\Omega$  его подмножеств, для которого:

- (1) объединение любого семейства множеств, принадлежащих совокупности  $\Omega$ , также принадлежит совокупности  $\Omega$ ;
- (2) пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих совокупности  $\Omega$ , также принадлежит совокупности  $\Omega$ ;
- (3) пустое множество  $\emptyset$  и всё  $X$  принадлежат  $\Omega$ .

В таком случае

- $\Omega$  есть *топологическая структура* или просто *топология*<sup>2</sup> в множестве  $X$ ;
- множество  $X$  с выделенной топологической структурой  $\Omega$  (т. е. пара  $(X, \Omega)$ ) называется *топологическим пространством*;
- элементы множества  $X$  называются *точками* этого топологического пространства;
- элементы множества  $\Omega$  называются *открытыми множествами* пространства  $(X, \Omega)$ .

Три условия, наложенные выше на  $\Omega$ , называются *аксиомами топологической структуры*.

### 2'2. Простейшие примеры

*Дискретное пространство* – множество, в котором выделенной совокупностью является множество всех его подмножеств.

**2.А.** Убедитесь в том, что это топологическое пространство, т. е. что здесь действительно выполнены аксиомы топологической структуры.

*Антидискретное пространство* – противоположный пример, в котором топологическая структура самая скромная. Она состоит из  $X$  и  $\emptyset$ .

**2.В.** Это тоже топологическая структура, не правда ли?

Теперь несколько чуть более содержательных примеров.

**2.1.** Пусть  $X$  есть луч  $[0; +\infty)$ , а  $\Omega$  состоит из  $\emptyset$ ,  $X$  и всевозможных лучей  $(a; +\infty)$ , где  $a \geq 0$ . Докажите, что  $\Omega$  – топологическая структура.

---

<sup>2</sup>Эти названия говорят, что  $\Omega$  – действительно важная птица: она носит то же имя, что и целая ветвь математики. Это не означает, конечно же, что  $\Omega$  совпадает со всей наукой, к изучению которой Вы приступаете, но все в этой науке и в самом деле так или иначе связано с  $\Omega$ .

**2.2.** Пусть  $X$  есть плоскость. Является ли топологической структурой набор множеств, состоящих из  $\emptyset$ ,  $X$  и открытых кругов с центром в начале координат и всевозможными радиусами?

**2.3.** Пусть  $X$  состоит из четырех элементов:  $X = \{a, b, c, d\}$ . Выясните, какие из следующих трех наборов его подмножеств являются топологическими структурами в  $X$  (т. е. удовлетворяют аксиомам топологической структуры):

- (1)  $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}$ ;
- (2)  $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}$ ;
- (3)  $\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ ?

Пространство из задачи 2.1 называется *стрелкой*. Пространство из задачи 2.3 (1) будем обозначать пиктограммой  $\mathbf{V}$ , смысл которой будет разъяснен в 7. Оба эти пространства, как и пространство из задачи 2.2, не играют серьезной роли, но хороши как учебные примеры.

### 2'3. Самый важный пример: вещественная прямая

Пусть  $X = \mathbb{R}$  – множество всех вещественных чисел,  $\Omega$  – совокупность объединений всевозможных семейств интервалов (*интервалом* мы называем множество вида  $(a; b)$ , где, разумеется,  $a \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{R}$ ).

**2.С.** Убедитесь в том, что эта совокупность удовлетворяет аксиомам топологической структуры.

Именно эту топологическую структуру имеют в виду всегда, когда о множестве  $\mathbb{R}$  говорят как о топологическом пространстве, не описывая явно топологическую структуру. Это пространство называется обычно *вещественной прямой*, а топологическую структуру называют *канонической* или *стандартной* топологией в  $\mathbb{R}$ .

### 2'4. Дополнительные примеры

**2.4.** Пусть  $X = \mathbb{R}$ , и  $\Omega$  состоит из пустого множества и всевозможных бесконечных подмножеств прямой  $\mathbb{R}$ . Является ли  $\Omega$  топологической структурой?

**2.5.** Пусть опять  $X = \mathbb{R}$ , а  $\Omega$  состоит из пустого множества и дополнений всевозможных конечных подмножеств прямой  $\mathbb{R}$ . Является ли такое  $\Omega$  топологической структурой?

Пространство из задачи 2.5 в дальнейшем обозначается через  $\mathbb{R}_{T_1}$  и называется *прямой с  $T_1$ -топологией* или *прямой с топологией Зариского*.

**2.6.** Пусть  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство, а  $Y$  – множество, полученное из  $X$  добавлением к нему одного элемента  $a$ . Является ли набор  $\{\{a\} \cup U \mid U \in \Omega\} \cup \{\emptyset\}$  топологической структурой в  $Y$ ?

**2.7.** Является ли топологической структурой в двухэлементном множестве  $\{0, 1\}$  набор множеств  $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ ?

Топология в  $Y$  из задачи 2.6 в случае, если топология  $\Omega$  дискретна, называется *топологией всюду плотной точки*. Топология задачи 2.7 называется *топологией связного двоеточия* или *топологией Серпинского*.

**2.8.** Перечислите все топологические структуры в двухэлементном множестве, скажем, в  $\{0, 1\}$ .

## 2'5. Употребление новых терминов: точки, открытые множества, замкнутые множества

Напомним, что если  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство, то элементы множества  $X$  называются *точками*, а элементы множества  $\Omega$  – *открытыми множествами*.<sup>3</sup>

**2.D.** Переформулируйте аксиомы топологической структуры, употребляя термин “открытое множество”, где только можно.

Говорят, что множество  $F \subset X$  *замкнуто* в пространстве  $(X, \Omega)$ , если его дополнение  $X \setminus F$  открыто (т. е. если  $X \setminus F \in \Omega$ ).

## 2'6. Теоретико-множественное отступление: формулы де Моргана

**2.E.** Пусть  $\Gamma$  произвольная совокупность подмножеств множества  $X$ . Тогда

$$X \setminus \bigcup_{A \in \Gamma} A = \bigcap_{A \in \Gamma} (X \setminus A) \quad (3)$$

$$X \setminus \bigcap_{A \in \Gamma} A = \bigcup_{A \in \Gamma} (X \setminus A). \quad (4)$$

Формула (4) “в одно действие” выводится из (3), не правда ли? Формулы этой задачи являются несимметричными вариантами формулировки, в которую симметричным образом входят множества и их дополнения, объединения и пересечения.

**2.9. Загадка.** Найдите такую формулировку.

**2.F** Свойства замкнутых множеств. Докажите что:

- (1) пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто;
- (2) объединение любого конечного набора замкнутых множеств замкнуто;
- (3) пустое множество и все пространство (т. е. все множество — носитель топологической структуры) замкнуты.

---

<sup>3</sup>Буква  $\Omega$  – греческий аналог буквы  $O$ , с которой начинаются слова многих языков, означающие одно и то же: *open* в английском, *открытый* в русском, *open* в немецком, *ouvert* во французском.

## 2'7. Открытость и замкнутость

Обратите внимание на то, что замкнутость не есть отрицание открытости. (Кстати, и в обыденной речи это не совсем антонимы.)

**2.G.** Приведите примеры множеств:

- (1) являющихся одновременно и открытыми и замкнутыми (разумеется, в одном и том же пространстве);
- (2) не являющихся ни открытыми, ни замкнутыми.

**2.10.** Дайте прямое описание замкнутых множеств

- |                                       |                                 |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| (a) дискретного                       | (b) антидискретного             |
| пространства;                         | пространства;                   |
| (c) стрелки;                          | (d) пространства $\mathbb{Y}$ ; |
| (e) пространства $\mathbb{R}_{T_1}$ . |                                 |

**2.H.** Замкнуты ли в  $\mathbb{R}$  замкнутые отрезки  $[a; b]$ ?

Замкнутость и открытость – во многом аналогичные свойства. Фундаментальное различие между ними состоит в том, что пересечение бесконечного набора открытых множеств не обязательно открыто, тогда как пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто, и объединение бесконечного набора замкнутых множеств не обязательно замкнуто, тогда как объединение любого набора открытых множеств открыто.

**2.11.** Полуоткрытый промежуток  $[0; 1)$  не открыт и не замкнут в  $\mathbb{R}$ , но представим и как объединение замкнутых множеств и как пересечение открытых.

**2.12.** Множество  $A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  замкнуто на числовой прямой.

## 2'8. Задание топологии совокупностью замкнутых множеств

**2.13.** Если совокупность  $\mathcal{F}$  подмножеств множества  $X$  удовлетворяет условиям:

- (1) пересечение любого набора множеств, принадлежащих  $\mathcal{F}$ , принадлежит  $\mathcal{F}$ ;
- (2) объединение любого конечного набора множеств, принадлежащих  $\mathcal{F}$ , принадлежит  $\mathcal{F}$ ;
- (3)  $\emptyset$  и  $X$  принадлежат  $\mathcal{F}$ ,

то  $\mathcal{F}$  есть совокупность всех замкнутых множеств некоторого топологического пространства (какого?).

**2.14.** Перечислите все наборы подмножеств трехэлементного множества, такие, что существуют топологии, в которых эти наборы являются полными наборами замкнутых множеств.

## 2'9. Окрестности

*Окрестностью* точки топологического пространства называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Аналитики и французы (следуя Н. Бурбаки) понимают окрестности шире: они называют так любое множество, содержащее окрестность в указанном выше смысле.

**2.15.** Дайте прямое описание окрестностей точек

- |                                |                                      |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| (a) в дискретном пространстве; | (b) в антидискретном пространстве;   |
| (c) в стрелке;                 | (d) в $\mathbb{V}$ ;                 |
| (e) в связном двоеточии;       | (f) в топологии всюду плотной точки. |

## 2'10х. Открытые множества на прямой

**2.Ах.** Любое открытое множество вещественной прямой есть объединение дизъюнктивных интервалов.

На первый взгляд может показаться, что из теоремы 2.Ах следует, что открытые подмножества прямой устроены вполне просто. Однако это далеко не так, они могут располагаться на прямой самым причудливым образом. Как показывает пример из следующего пункта, их дополнения – замкнутые множества – могут быть вполне сложно устроены. И уж не надо думать, что всякое замкнутое множество является объединением отрезков.

## 2'11х. Канторово множество

Пусть  $K$  – множество вещественных чисел, представимых в виде  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$  с  $a_k = 0$  или 2. Другими словами,  $K$  состоит из тех чисел, представление которых  $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  в троичной системе не содержит единиц, т. е.  $a_k \neq 1$  при всех  $k$ .

**2.Вх.** Найдите геометрическое описание множества  $K$ .

**2.Вх.1.** Докажите, что

- (1)  $K \subset [0; 1]$ ,
- (2)  $K$  не пересекается с  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ ,
- (3)  $K$  не пересекается ни с одним из интервалов вида  $(\frac{3s+1}{3^k}, \frac{3s+2}{3^k})$ , где  $k$  и  $s$  – произвольные целые числа.

**2.Вх.2.** Представьте  $K$  как разность  $[0; 1]$  и объединения бесконечного семейства открытых интервалов.

**2.Вх.3.** Постарайтесь нарисовать  $K$ .

Множество  $K$  называется *канторовым множеством* (*канторовым континуумом*, *канторовым дисконтинуумом*). Оно обладает многочисленными замечательными свойствами и появляется во многих последующих задачах.

**2.Сх.** Докажите, что множество  $K$  является замкнутым.

## 2'12х. Топология и арифметические прогрессии

**2.Дх\*.** Рассмотрим следующее свойство подмножества  $F$  множества натуральных чисел  $\mathbb{N}$ : существует такое  $N \in \mathbb{N}$ , что  $F$  не содержит арифметической прогрессии длиной больше  $N$ . Докажите, что набор, состоящий из таких подмножеств и всего множества  $\mathbb{N}$ , образует совокупность замкнутых множеств некоторой топологии в  $\mathbb{N}$ .

При решении этой задачи, вероятно, не обойтись без следующей теоремы, относящейся к комбинаторике.

**2.Ех** Теорема ван дер Вардена\*. Для всякого  $n \in \mathbb{N}$  существует такое  $N \in \mathbb{N}$ , что если множество  $\{1, 2, \dots, N\}$  разбить на два подмножества, то в одном из них найдется арифметическая прогрессия длиной  $n$ .

## 3. Базы

### 3'1. Определение базы

Часто топологическую структуру задают посредством описания некоторой ее части, достаточной для восстановления всей структуры. *Базой* топологии называется некоторый набор открытых множеств, такой что всякое непустое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этого набора. К примеру, всевозможные интервалы составляют базу топологии вещественной прямой.

**3.1.** Могут ли различные топологические структуры иметь одну и ту же базу?

**3.2.** Найдите какие-нибудь базы топологических структур:

- |                                   |                                 |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| (a) дискретного пространства;     | (b) пространства $\mathbb{N}$ ; |
| (c) антидискретного пространства; | (d) стрелки.                    |

Постарайтесь выбрать базы поменьше.

**3.3. Загадка.** Какие топологические структуры имеют в точности одну базу?

**3.4.** Докажите, что любую базу канонической топологии пространства  $\mathbb{R}$  можно уменьшить.

### 3'2. Какие наборы множеств являются базами

**3.A.** Совокупность  $\Sigma$  открытых множеств является базой топологии  $\Omega$ , тогда для всякого множества  $U \in \Omega$  и всякой точки  $x \in U$  существует такое множество  $V \in \Sigma$ , что  $x \in V \subset U$ .

**3.B.** Совокупность  $\Sigma$  подмножеств множества  $X$  является базой некоторой топологии в  $X$ , тогда  $X$  есть объединение множеств из  $\Sigma$  и пересечение любых двух множеств из  $\Sigma$  представляется в виде объединения множеств из  $\Sigma$ .

**3.C.** Покажите, что второе условие в 3.B (т. е. условие относительно пересечения) равносильно следующему: пересечение любых двух множеств из  $\Sigma$  вместе с каждой своей точкой содержит некоторое множество из  $\Sigma$ , содержащее эту точку. (Ср. 3.A.)

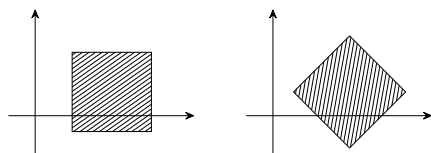
### 3'3. Базы плоскости

Рассмотрим следующие три набора подмножеств плоскости  $\mathbb{R}^2$ :

- набор  $\Sigma^2$ , состоящий из всевозможных открытых кругов (т. е. кругов, в которые не включаются ограничивающие их окружности);



- набор  $\Sigma^\infty$ , состоящий из всевозможных открытых квадратов (в которые не включаются их стороны и вершины), стороны которых параллельны координатным осям (они задаются неравенствами вида  $\max\{|x - a|, |y - b|\} < r$ )
- набор  $\Sigma^1$ , состоящий из всевозможных открытых квадратов, стороны которых параллельны биссектрисам координатных углов (они задаются неравенствами вида  $|x - a| + |y - b| < r$ ).



**3.D.** Докажите, что любой элемент набора  $\Sigma^2$  есть объединение элементов набора  $\Sigma^\infty$ .

**3.E.** Докажите, что пересечение любых двух элементов набора  $\Sigma^1$  есть объединение элементов набора  $\Sigma^1$ .

**3.F.** Докажите, что каждый из наборов  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^\infty$  и  $\Sigma^1$  служит базой некоторой топологической структуры в  $\mathbb{R}^2$ , и структуры, определяемые этими базами, совпадают.

### 3'4. Предбазы

Набор  $\Delta$  открытых множеств топологического пространства  $(X, \Omega)$  называется *предбазой*, если набор

$$\Sigma = \{V \mid V = \cap_{i=1}^k W_i, W_i \in \Delta, k \in \mathbb{N}\}$$

всевозможных конечных пересечений множеств из  $\Delta$  является базой топологии  $\Omega$ .

**3.5.** Покажите, что в любом множестве  $X$  набор  $\Delta$  его подмножеств является предбазой некоторой топологической структуры на  $X$ , тогда  $X = \cup_{W \in \Delta} W$ .

### 3'5. Бесконечность множества простых чисел

**3.6.** Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в  $\mathbb{N}$ .

**3.7.** С помощью этой топологии докажите, что множество простых чисел бесконечно.

Воспользуйтесь тем, что в противном случае множество  $\{1\}$  было бы открытым (?!).

### 3'6. Иерархия топологий

Если  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – топологические структуры в множестве  $X$  и  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  то говорят, что структура  $\Omega_2$  *тоньше*, чем  $\Omega_1$ , а  $\Omega_1$  – *грубее*, чем  $\Omega_2$ .

К примеру, из всех топологических структур в данном множестве антидискретная – самая грубая, а дискретная – самая тонкая, не правда ли?

**3.8.** Покажите, что  $T_1$ -топология (см. 2) грубее обычной топологии вещественной прямой.

Базы, задающие одну и ту же топологическую структуру, называются *эквивалентными*.

**3.Г. Загадка.** Не упоминая топологических структур, сформулируйте условие, необходимое и достаточное для эквивалентности двух баз. (Ср. 3.D; базы  $\Sigma^2, \Sigma^\infty$  и  $\Sigma^1$  должны удовлетворять найденному вами условию!)

## 4. Метрические пространства

### 4'1. Определение и первые примеры

Функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  называется *метрикой* (или *расстоянием*) в множестве  $X$ , если

- (1)  $\rho(x, y) = 0$ , когда  $x = y$ ;
- (2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in X$ ;
- (3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для любых  $x, y, z \in X$ .

Пара  $(X, \rho)$ , где  $\rho$  – метрика в  $X$ , называется *метрическим пространством*. Условие (3) называется *неравенством треугольника*.

**4.А.** Покажите, что для любого множества  $X$  функция

$$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

является метрикой.

**4.В.** Докажите, что функция  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |x - y|$  есть метрика.

**4.С.** Докажите, что функция  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  есть метрика.

Именно метрики 4.В и 4.С имеют в виду всегда, когда говорят об  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^n$  как о метрических пространствах, не описывая метрику. Метрика 4.В есть специальный случай метрики 4.С. Эти метрики называют *евклидовыми*.

### 4'2. Дальнейшие примеры

**4.1.** Докажите, что функция  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$  есть метрика.

**4.2.** Докажите, что функция  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$  есть метрика.

Метрики в  $\mathbb{R}^n$ , введенные в 4.С–4.2, включаются в бесконечную серию метрик

$$\rho^{(p)} : (x, y) \mapsto \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

**4.3.** Докажите, что для любого  $p \geq 1$  функция  $\rho^{(p)}$  есть метрика.

**4.3.1 Неравенство Гёльдера.** Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

если  $x_i, y_i \geq 0$ ,  $p, q > 0$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Метрика из 4.С есть  $\rho^{(2)}$ , метрика из 4.2 есть  $\rho^{(1)}$ , метрику из 4.1 естественно обозначить через  $\rho^{(\infty)}$  и включить в эту серию, поскольку, если  $a_i$  – произвольные неотрицательные числа, то  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} = \max a_i$ .

**4.4. Загадка.** Какое отношение имеет это к  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^\infty$  и  $\Sigma^1$  из 3?

Для вещественного  $p \geq 1$  обозначим через  $l^{(p)}$  множество всех последовательностей  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , таких что ряд  $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p$  сходится.

**4.5.** Докажите, что для любых двух элементов  $x, y \in l^{(p)}$  ряд

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i - y_i|^p$$

сходится и что функция

$$(x, y) \mapsto \left( \sum_{i=1}^\infty |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

является метрикой в  $l^{(p)}$ .

### 4'3. Шары и сферы

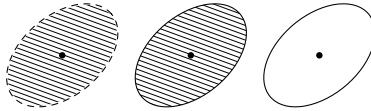
Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $a$  – его точка и  $r$  – положительное вещественное число. Множества

$$B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}, \quad (5)$$

$$D_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}, \quad (6)$$

$$S_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) = r\} \quad (7)$$

называются, соответственно, *открытым шаром* (или просто *шаром*), *замкнутым шаром* и *сферой* пространства  $(X, \rho)$  с *центром* в точке  $a$  и *радиусом*  $r$ .



### 4'4. Подпространства метрического пространства

Если  $(X, \rho)$  – метрическое пространство и  $A \subset X$ , то сужение метрики  $\rho$  на  $A \times A$  является метрикой в  $A$  и  $(A, \rho|_{A \times A})$  – метрическое пространство. Оно называется *подпространством* пространства  $(X, \rho)$ .

Шар  $D_1(0)$  и сфера  $S_1(0)$  пространства  $\mathbb{R}^n$  (с евклидовой метрикой, см. 1.3) обозначаются символами  $D^n$  и  $S^{n-1}$  и называются  *$n$ -мерным шаром* и  *$(n-1)$ -мерной сферой*. Они рассматриваются как метрические пространства – подпространства пространства  $\mathbb{R}^n$ .

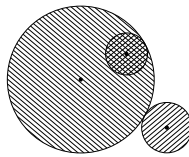
**4.D.** Убедитесь в том, что:  $D^1$  есть отрезок  $[-1; 1]$ ,  $D^2$  есть круг,  $S^0$  – пара точек  $\{-1, 1\}$ ;  $S^1$  – окружность,  $S^2$  – сфера,  $D^3$  – шар.

Последние два факта объясняют происхождение терминов шар и сфера (в контексте метрических пространств).

Некоторые свойства шаров и сфер в произвольном метрическом пространстве напоминают хорошо знакомые свойства плоских кругов и окружностей и пространственных шаров и сфер.

**4.Е.** Докажите, что для любых точек  $x, a$  произвольного метрического пространства и любого числа  $r > \rho(x, a)$  имеют место включения

$$B_{r-\rho(x,a)}(x) \subset B_r(a) \quad \text{и} \quad D_{r-\rho(x,a)}(x) \subset D_r(a).$$



**4.6. Загадка.** А что, если  $r < \rho(x, a)$ ? Каков в этом случае аналог утверждения задачи 4.Е?

#### 4'5. Удивительные шары

Однако в некоторых метрических пространствах шары и сферы могут обладать и неожиданными свойствами.

**4.7.** Каковы шары и сферы в плоскости  $\mathbb{R}^2$  с метриками из 4.1 и 4.2 (ср. 4.4)?

**4.8.** Найдите  $D_1(a)$ ,  $D_{\frac{1}{2}}(a)$ , и  $S_{\frac{1}{2}}(a)$  в пространстве из задачи 4.А.

**4.9.** Найдите такое метрическое пространство и два таких шара в нем, чтобы шар большего радиуса содержался в шаре меньшего радиуса и не совпадал с ним.

**4.10.** Каково наименьшее число точек в том пространстве, которое требуется построить в задаче 4.9?

**4.11.** Докажите, что в условиях задачи 4.9 больший радиус не превышает удвоенного меньшего радиуса.

#### 4'6. Отрезок — это то, что лежит между

**4.12.** Докажите, что отрезок с концами в точках  $a, b \in \mathbb{R}^n$  можно описать как множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b)\},$$

где  $\rho$  — евклидова метрика.

**4.13.** Как устроены множества такого вида в  $\mathbb{R}^n$  (или хотя бы в  $\mathbb{R}^2$ ) с метриками  $\rho^{(p)}$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ?

#### 4'7. Ограниченные множества и шары

Подмножество  $A$  метрического пространства  $(X, \rho)$  называется *ограниченным*, если существует такое число  $d > 0$ , что  $\rho(x, y) < d$  для любых  $x, y \in A$ . Точная нижняя грань таких  $d$  называется *диаметром* множества  $A$  и обозначается через  $\text{diam } A$ .

**4.F.** Докажите, что множество  $A$  ограничено, когда оно содержится в некотором шаре.

**4.14.** Как связаны между собой радиус этого шара и  $\text{diam } A$ ?

#### 4'8. Нормы и нормированные пространства

Пусть  $X$  – векторное пространство (над полем  $\mathbb{R}$ ). Функция  $X \rightarrow \mathbb{R}_+ :$   $x \mapsto \|x\|$  называется *нормой*, если

- (1)  $\|x\| = 0$ , тогда  $x = 0$ ;
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для любых  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $x \in X$ ;
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in X$ .

**4.15.** Если  $x \mapsto \|x\|$  – норма, то  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \|x - y\|$  – метрика.

Векторное пространство с выделенной нормой называется *нормированным*. Метрика, определяемая нормой (как в 4.15), канонически превращает нормированное векторное пространство в метрическое.

**4.16.** Просмотрите задачи этого параграфа и определите, какие из упомянутых в них метрических пространств являются на самом деле нормированными векторными пространствами.

**4.17.** Докажите, что всякий шар в нормированном пространстве является симметричным относительно своего центра выпуклым множеством.<sup>4</sup>

**4.18\*.** Всякое центрально-симметричное выпуклое замкнутое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ , не лежащее ни в каком отличном от  $\mathbb{R}^n$  аффинном подпространстве, является замкнутым шаром единичного радиуса относительно некоторой нормы, которая однозначно определяется этим множеством.

#### 4'9. Метрическая топология

**4.G.** Множество всех открытых шаров метрического пространства является базой некоторой топологии.

Эту топологию называют *метрической* и говорят, что она *порождается* метрикой. Всякий раз, когда о метрическом пространстве говорят как о топологическом (например, когда говорят о его открытых и замкнутых множествах, окрестностях и т. п.), имеют в виду эту топологическую структуру.

---

<sup>4</sup>Напомним, что множество  $A$  называется *выпуклым* если для любых его точек  $x, y \in A$  сегмент, соединяющий  $x, y$ , содержится в  $A$ . Конечно, поскольку это определение опирается на понятие *сегмента*, оно имеет смысл только в пространствах, где имеется понятие сегмента, соединяющего точки. Это так, в частности, в векторных и аффинных пространствах над  $\mathbb{R}$ .

**4.Н.** Докажите, что введенная в 2 стандартная топологическая структура в  $\mathbb{R}$  порождается метрикой  $(x, y) \mapsto |x - y|$ .

**4.19.** Какая топологическая структура задается метрикой задачи 4.А?

**4.1** Критерий открытости. *Множество открыто в метрическом пространстве, когда оно содержит каждую свою точку вместе с некоторым шаром, центром которого она является.*

#### 4'10. Открытость и замкнутость шаров и сфер

**4.20.** Докажите, что всякий замкнутый шар замкнут (относительно метрической топологии).

**4.21.** Найдите замкнутый шар, являющийся открытым множеством.

**4.22.** Найдите открытый шар, являющийся замкнутым множеством.

**4.23.** Докажите, что сферы являются замкнутыми множествами.

**4.24.** Найдите сферу, являющуюся открытым множеством.

#### 4'11. Метризуемые пространства

Топологическое пространство называется *метризуемым*, если его топологическая структура порождается некоторой метрикой.

**4.Ж.** Антидискретное пространство, состоящее более чем из одной точки, неметризуемо.

**4.К.** Пространство с конечным множеством точек метризуемо, когда оно дискретно.

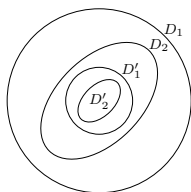
**4.25.** Какие из топологических пространств, приведенных в качестве примеров в 2, метризуемы?

#### 4'12. Эквивалентные метрики

Две метрики в одном множестве называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же топологию.

**4.26.** Эквивалентны ли метрики в  $\mathbb{R}^n$ , введенные в 4.С, 4.1, and 4.2?

**4.27.** Метрики  $\rho_1, \rho_2$  в  $X$  эквивалентны, если существует такие числа  $c, C > 0$ , что  $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$  для любых  $x, y \in X$ .



**4.28.** Обратное, вообще говоря, неверно.

**4.29. Задача.** Значит, условие эквивалентности метрик, сформулированное в 10.2, можно ослабить. Как?

**4.30.** Метрики  $\rho^{(p)}$  в  $\mathbb{R}^n$ , определенные выше перед задачей 4.3, эквивалентны.

**4.31\*.** Докажите, что следующие две метрики  $\rho_1$  и  $\rho_c$  в множестве всех непрерывных функций  $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  не эквивалентны:

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx; \quad \rho_c(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0; 1]\}.$$

Правда ли, что одна из порождаемых ими метрических топологий тоньше другой?

#### 4'13. Действия с метриками

**4.32.** 1) Докажите, что если  $\rho_1, \rho_2$  – метрики в  $X$ , то  $\rho_1 + \rho_2$  и  $\max\{\rho_1, \rho_2\}$  – тоже метрики в  $X$ . 2) Являются ли метриками функции  $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$  и  $\rho_1 \rho_2$ ?

**4.33.** Докажите, что если  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  есть метрика, то:

- (1) функция  $(x, y) \mapsto \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$  – тоже метрика;
- (2) функция  $(x, y) \mapsto \min\{\rho(x, y), 1\}$  – тоже метрика;
- (3) функция  $(x, y) \mapsto f(\rho(x, y))$  тоже является метрикой, если  $f$  удовлетворяет следующим требованиям:
  - (a)  $f(0) = 0$ ;
  - (b)  $f$  монотонно возрастает;
  - (c)  $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  для любых  $x, y \in \mathbb{R}_+$ .

**4.34.** Докажите, что метрики  $\rho$  и  $\frac{\rho}{1 + \rho}$  эквивалентны.

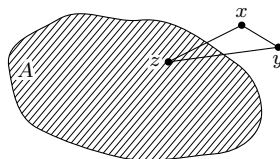
#### 4'14. Расстояние от точки до множества

Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $A \subset X$ ,  $b \in X$ . *Расстоянием от точки  $b$  до множества  $A$*  называется число

$$\rho(b, A) = \inf\{\rho(b, a) \mid a \in A\}.$$

**4.L.** Докажите, что если  $A$  – замкнутое множество, то  $\rho(b, A) = 0$ , тогда  $b \in A$ .

**4.35.** Докажите, что  $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$  для любого множества  $A$  и точек  $x, y$  того же метрического пространства.



$$\rho(x, A) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$



#### 4'15х. Расстояния между множествами

Пусть  $A$  и  $B$  – ограниченные подмножества метрического пространства  $(X, \rho)$ . *Расстоянием Хаусдорфа* между  $A$  и  $B$  называется число

$$d_\rho(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A) \right\}.$$

**4.Ах.** Докажите, что расстояние Хаусдорфа в множестве ограниченных подмножеств метрического пространства удовлетворяет требованиям (2) и (3) из определения метрики.

**4.Вх.** Докажите, что для любого метрического пространства расстояние Хаусдорфа является метрикой в множестве его ограниченных замкнутых подмножеств.

Пусть  $A$  и  $B$  – два ограниченных многоугольника на плоскости.<sup>5</sup> Положим

$$d_\Delta(A, B) = S(A) + S(B) - 2S(A \cap B),$$

где  $S(C)$  – площадь многоугольника  $C$ .

**4.Сх.** Докажите, что  $d_\Delta$  является метрикой на множестве всех плоских многоугольников.

**4.Дх.** Докажите, что на множестве выпуклых многоугольников метрика  $d_\Delta$  эквивалентна метрике Хаусдорфа.

**4.Ех.** Докажите, что на множестве всех (не обязательно выпуклых) многоугольников метрика  $d_\Delta$  не эквивалентна метрике Хаусдорфа.

#### 4'16х. Ультраметрики и $p$ -адические числа

Метрика  $\rho$  называется *ультраметрикой*, если она удовлетворяет *ультраметрическому неравенству треугольника*:

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$$

для любых  $x, y, z$ .

Метрическое пространство  $(X, \rho)$  с ультраметрикой  $\rho$  называется *ультраметрическим*.

**4.Фх.** Среди метрик, введенных в задачах 4.А–4.2, только одна является ультраметрикой. Какая?

---

<sup>5</sup>Хотя думается, что многоугольники хорошо известны из элементарной геометрии, все же напомним, что это такое. Многоугольник – это множество, состоящее из точек простой замкнутой ломаной и точек, охваченных ею. Под простой замкнутой ломаной понимают циклическую последовательность отрезков, в которой каждый отрезок начинается в конце предыдущего и других пересечений отрезки не имеют.

**4. Gx.** Докажите, что в ультраметрическом пространстве все треугольники – равнобедренные (т. е. для любых трех точек  $a, b$  и  $c$  два из трех расстояний  $\rho(a, b)$ ,  $\rho(b, c)$  и  $\rho(a, c)$  равны).

**4. Hx.** Докажите, что в ультраметрическом пространстве сферы не только замкнуты (см. задачу 4.23), но еще и открыты.

Важнейшим примером ультраметрики является  *$p$ -адическая метрика* в множестве  $\mathbb{Q}$  всех рациональных чисел: пусть  $p$  – простое число и разность  $x - y$  различных чисел  $x, y \in \mathbb{Q}$  представляется в виде  $\frac{r}{s}p^\alpha$ , где  $r, s$  и  $\alpha$  – целые, а числа  $r$  и  $s$  взаимно просты с  $p$ . Положим  $\rho(x, y) = p^{-\alpha}$  (ясно, что следует считать  $\rho(x, x) = 0$ ).

**4. Ix.** Докажите, что это – ультраметрика.

#### 4'17x. Асимметрии

Функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется *асимметрикой* в множестве  $X$ , если

- (1)  $\rho(x, y) \geq 0$  и  $\rho(y, x) = 0$ , тогда  $x = y$ ;
- (2)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для любых  $x, y, z \in X$ .

Так что асимметрика удовлетворяет условиям 1 и 3 определения метрики, но не удовлетворяет условию 2.

Пример асимметрии “из жизни” – наименьшая длина пути на автомобиле между точками в городе, в котором имеются улицы с односторонним движением.

**4. Jx.** Докажите, что если функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  является асимметрикой, то функция  $(x, y) \mapsto \rho(x, y) + \rho(y, x)$  – метрика в  $X$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – ограниченные подмножества метрического пространства  $(X, \rho)$ . *Асимметрикой от  $A$  до  $B$*  называется число

$$a_\rho(A, B) = \sup_{b \in B} \rho(b, A).$$

**4. Kx.** Асимметрика  $a_\rho$  в множестве ограниченных подмножеств метрического пространства удовлетворяет неравенству треугольника из определения асимметрии.

**4. Lx.** В метрическом пространстве  $(X, \rho)$  множество  $B$  содержится в замыкании множества  $A$ , тогда  $a_\rho(A, B) = 0$ .

**4. Mx.** Докажите, что  $a_\rho$  является асимметрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств любого метрического пространства  $(X, \rho)$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – многоугольники на плоскости. Положим

$$a_{\Delta}(A, B) = S(B) - S(A \cap B) = S(B \setminus A),$$

где  $S(C)$  – площадь многоугольника  $C$ .

**4.1х.** Докажите, что  $a_{\Delta}$  является асимметрикой на множестве всех плоских многоугольников.

Пара  $(X, \rho)$ , где  $\rho$  – асимметрика в  $X$ , называется *асимметрическим пространством*. Разумеется, всякое метрическое пространство является и асимметрическим. В асимметрическом пространстве шары (открытые и замкнутые) и сферы определяются так же, как и в метрическом пространстве, см. 4'3.

**4.Нх.** Множество всех открытых шаров асимметрического пространства является базой некоторой топологии.

Говорят, что эту топологию *порождает* асимметрика.

**4.2х.** Докажите, что формула  $a(x, y) = \max\{x - y, 0\}$  определяет асимметрию в  $[0; \infty)$ , и что топология, порождаемая этой асимметрикой совпадает с топологией стрелки (см. 2'2).

## 5. Подпространства

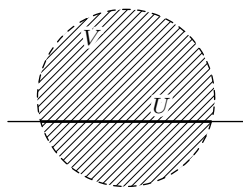
### 5'1. Определение и простейшие примеры

Пусть  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство,  $A \subset X$ . Обозначим через  $\Omega_A$  совокупность множеств вида  $A \cap V$ , где  $V \in \Omega$ ,

$$\Omega_A = \{A \cap V \mid V \in \Omega\}.$$

**5.A.** Совокупность  $\Omega_A$  есть топологическая структура в множестве  $A$ .

Пара  $(A, \Omega_A)$  называется *подпространством* пространства  $(X, \Omega)$ , совокупность  $\Omega_A$  – *относительной* топологией или топологией, *индуцированной* в  $A$  топологией  $\Omega$ , а ее элементы – множествами, *открытыми* в  $A$ .



**5.B.** Стандартная топология в  $\mathbb{R}^1$  и топология, индуцированная в  $\mathbb{R}^1$  как в подмножестве плоскости, совпадают.

**5.1. Загадка.** Как по базе топологии в  $X$  построить базу топологии, индуцированной на  $A \subset X$ ?

**5.2.** Опишите топологические структуры, которые индуцируются:

- (1) в множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$  топологией прямой;
- (2) в  $\mathbb{N}$  топологией стрелки;
- (3) в двухточечном множестве  $\{1, 2\}$  топологией пространства  $\mathbb{R}_{T_1}$ ;
- (4) в том же множестве  $\{1, 2\}$  топологией стрелки.

**5.3.** Открыт ли полуоткрытый промежуток  $[0; 1)$  в отрезке  $[0; 2]$ , рассматриваемом как подпространство прямой  $\mathbb{R}^1$ ?

**5.C.** Множество  $F$  замкнуто в подпространстве  $A \subset X$ , тогда  $F = A \cap E$ , где множество  $E$  замкнуто в пространстве  $X$ .

**5.4.** Докажите, что если подмножество подпространства открыто (замкнуто) в объемлющем пространстве, то оно также открыто (соответственно, замкнуто) в подпространстве.

### 5'2. Относительность открытости

Множества, открытые в подпространстве, не обязательно открыты в объемлющем пространстве.

**5.D.** Единственным открытым множеством прямой  $\mathbb{R}^1$ , открытым и в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , является пустое множество  $\emptyset$ .

Однако, справедливо следующее утверждение.

**5.E.** Открытые множества открытого подпространства открыты и во всем пространстве. (Другими словами, если  $A \in \Omega$ , то  $\Omega_A \subset \Omega$ .)

Таково же соотношение между замкнутостью в подпространстве и в пространстве. В частности:

**5.F.** Замкнутые множества замкнутого подпространства замкнуты во всем пространстве.

**5.5.** Докажите, что множество  $U$  открыто в  $X$ , тогда каждая его точка обладает в  $X$  такой окрестностью  $V$ , что множество  $U \cap V$  открыто в  $V$ .

Имея в виду этот факт, говорят, что открытость является локальным свойством. Действительно, утверждение 5.5 можно понимать следующим образом: множество открыто, тогда оно открыто в окрестности каждой своей точки.

**5.6.** Покажите, что замкнутость не является локальным свойством.

### 5'3. Транзитивность относительной топологии

**5.G Транзитивность относительной топологии.** Пусть  $(X, \Omega)$  – топологическое пространство и  $X \supset A \supset B$ . Тогда  $(\Omega_A)_B = \Omega_B$ , т. е. топология, которая индуцируется в  $B$  топологией, индуцированной в  $A$ , совпадает с топологией, индуцированной непосредственно из  $X$ .

**5.7.** Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство, и пусть  $A \subset X$ . Тогда топология, порождаемая в  $A$  метрикой  $\rho|_{A \times A}$ , совпадает с топологией, которую индуцирует в  $A$  топология, порожденная в  $X$  метрикой  $\rho$ .

**5.8. Загадка.** Для доказательства совпадения нужно доказывать два включения. Какое включение здесь менее очевидно?)

### 5'4. Традиционная неполнота обозначений

Рассматривать различные топологические структуры в одном и том же множестве приходится сравнительно редко. Поэтому обычно топологическое пространство обозначают так же, как и его множество точек, т. е. вместо  $(X, \Omega)$  пишут просто  $X$ . Аналогично поступают и в случае метрических пространств: вместо  $(X, \rho)$  пишут  $X$ .

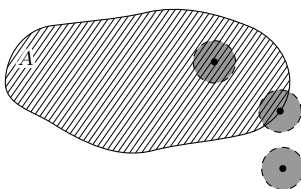
## 6. Расположение точек относительно множества

Этот параграф посвящен дальнейшему расширению словаря, необходимого для обсуждения явлений, происходящих в топологических пространствах.

### 6'1. Внутренние, внешние и граничные точки

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $A \subset X$  и  $b \in X$ . Точка  $b$  называется:

- **внутренней** точкой множества  $A$ , если у нее имеется окрестность, содержащаяся в  $A$ ;
- **внешней** точкой множества  $A$ , если у нее имеется окрестность, не пересекающаяся с  $A$ ;
- **граничной** точкой множества  $A$ , если всякая её окрестность пересекается и с  $A$  и с его дополнением.



### 6'2. Внутренность и внешность

**Внутренностью** множества, лежащего в топологическом пространстве, называется наибольшее (по включению) открытое множество, содержащееся в нем (т. е. его открытое подмножество, содержащее любое другое его открытое подмножество). Внутренность множества  $A$  обозначается символом  $\text{Int } A$  или, подробнее,  $\text{Int}_X A$  (от французского *intérieur* и английского *interior*).

**6.A.** Всякое подмножество топологического пространства обладает внутренностью. Ею является объединение всех открытых множеств, содержащихся в этом множестве.

**6.B.** Внутренность всякого множества есть множество его внутренних точек.

**6.C.** Множество открыто, когда оно совпадает со своей внутренностью.

**6.D.** Докажите, что в  $\mathbb{R}$ :

- (a)  $\text{Int}[0; 1) = (0; 1)$ , (b)  $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$ , (c)  $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ .

**6.1.** Найдите внутренность множества  $\{a, b, d\}$  в пространстве  $\Psi$ .

**6.2.** Найдите внутренность интервала  $(0; 1)$  на прямой с топологией Зарисского.

*Внешностью* множества называется наибольшее не пересекающееся с ним открытое множество. Ясно, что внешность  $A$  совпадает с  $\text{Int}(X \setminus A)$ .

### 6'3. Замыкание

*Замыканием* множества называется наименьшее содержащее его замкнутое множество. Замыкание множества  $A$  обозначается символом  $\text{Cl } A$  или, подробнее,  $\text{Cl}_X A$  (от французского *clôture* и английского *closure*).

**6.E.** Всякое подмножество топологического пространства обладает замыканием. Им является пересечение всех замкнутых множеств, содержащих это множество.

**6.3.** 1) Если  $A$  – подпространство пространства  $X$  и  $B \subset A$ , то  $\text{Cl}_A B = (\text{Cl}_X B) \cap A$ . 2) Верно ли, что  $\text{Int}_A B = (\text{Int}_X B) \cap A$ ?

Точка  $b$  называется *точкой прикосновения* множества  $A$ , если всякая ее окрестность пересекается с  $A$ .

**6.F.** Замыкание множества  $A$  совпадает с множеством точек прикосновения множества  $A$ .

**6.G.** Множество  $A$  замкнуто, тогда  $A = \text{Cl } A$ .

**6.H.** Замыкание множества совпадает с дополнением его внешности, т. е.  $\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ , где  $X$  – пространство и  $A \subset X$ .

**6.I.** Докажите, что в  $\mathbb{R}$ :

- (a)  $\text{Cl}[0; 1) = [0; 1]$ , (b)  $\text{Cl } \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ , (c)  $\text{Cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ .

**6.4.** Найдите замыкание множества  $\{a\}$  в  $\Psi$ .

### 6'4. Замыкание в метрическом пространстве

Пусть  $A$  – подмножество и  $b$  – точка метрического пространства  $(X, \rho)$ . Напомним (см. 4), что расстоянием от точки  $b$  до множества  $A$  называется число  $\rho(b, A) = \inf\{\rho(b, a) \mid a \in A\}$ .

**6.J.** Докажите, что  $b \in \text{Cl } A$ , тогда  $\rho(b, A) = 0$ .

### 6'5. Граница

*Границей* множества  $A$  называется множество  $\text{Cl } A \setminus \text{Int } A$ . Обозначается граница множества  $A$  символом  $\text{Fr } A$  или, подробнее,  $\text{Fr}_X A$  (от французского *frontière* и английского *frontier*).

**6.5.** Найдите в пространстве  $\mathbb{Y}$  границу множества  $\{a\}$ .

**6.К.** Граница множества совпадает с множеством его граничных точек.

**6.Л.** Множество  $A$  замкнуто, тогда  $\text{Fr } A \subset A$ .

**6.6.** 1) Докажите, что  $\text{Fr } A = \text{Fr}(X \setminus A)$ . 2) Найдите формулу для  $\text{Fr } A$ , в которую  $A$  и  $X \setminus A$  входили бы симметрично.

**6.7.** Граница множества равна пересечению замыканий этого множества и его дополнения. Иначе говоря,  $\text{Fr } A = \text{Cl } A \cap \text{Cl}(X \setminus A)$ .

### 6'6. Внутренность и замыкание при утончении топологии

**6.8.** Пусть  $\Omega_1, \Omega_2$  – топологические структуры в  $X$ ,  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  и пусть  $\text{Cl}_i$  – замыкание относительно  $\Omega_i$ . Тогда  $\text{Cl}_1 A \supset \text{Cl}_2 A$  для любого  $A \subset X$ .

**6.9.** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о внутренности.

### 6'7. Внутренность и замыкание как операции над множествами

**6.10.** Докажите, что если  $A \subset B$ , то  $\text{Int } A \subset \text{Int } B$ .

**6.11.** Докажите, что  $\text{Int } \text{Int } A = \text{Int } A$ .

**6.12.** Правда ли, что для любых множеств  $A$  и  $B$  справедливы равенства:

$$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B, \quad (8)$$

$$\text{Int}(A \cup B) = \text{Int } A \cup \text{Int } B? \quad (9)$$

**6.13.** Приведите пример, в котором одно из равенств предыдущей задачи не выполняется.

**6.14.** В примере, который вы построили, решив предыдущую задачу, равенство не справедливо, но, вероятно, имеет место включение одной части равенства в другую. Справедливо ли это включение для любых  $A$  и  $B$ ?

**6.15.** Проведите исследование операции  $\text{Cl}$ , аналогичное намеченному в задачах 6.10–6.14 исследованию операции  $\text{Int}$ .

**6.16.** Найдите  $\text{Cl}\{1\}$ ,  $\text{Int}[0; 1]$  и  $\text{Fr}(2; +\infty)$  в стрелке.

**6.17.** Найдите  $\text{Int}((0; 1] \cup \{2\})$ ,  $\text{Cl}(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\})$ , и  $\text{Fr } \mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ .

**6.18.** Найдите  $\text{Cl } \mathbb{N}$ ,  $\text{Int}(0; 1)$ , и  $\text{Fr}[0; 1]$  в пространстве  $\mathbb{R}_{T_1}$ . Как в этом пространстве находить замыкание и внутренность произвольного множества?

**6.19.** Содержит ли сфера границу открытого шара с теми же центром и радиусом?



**6.20.** Содержит ли сфера границу замкнутого шара с теми же центром и радиусом?

**6.21.** Найдите сферу, не пересекающуюся с замыканием открытого шара с теми же центром и радиусом.

## 6'8. Попеременное применение Cl и Int

**6.22 Задача Куратовского.** Какое наибольшее число попарно различных множеств можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int?

Следующая серия задач поможет Вам решить задачу 6.22.

**6.22.1.** Найдите такое множество  $A \subset \mathbb{R}$ , чтобы  $A$ ,  $\text{Cl } A$ , и  $\text{Int } A$  были бы попарно различны.

**6.22.2.** Существует ли такое множество  $A \subset \mathbb{R}$ , что

- (1)  $A$ ,  $\text{Cl } A$ ,  $\text{Int } A$ ,  $\text{Cl Int } A$  попарно различны;
- (2)  $A$ ,  $\text{Cl } A$ ,  $\text{Int } A$ ,  $\text{Int Cl } A$  попарно различны;
- (3)  $A$ ,  $\text{Cl } A$ ,  $\text{Int } A$ ,  $\text{Cl Int } A$ ,  $\text{Int Cl } A$  попарно различны?

Если такие множества удалось построить, то продолжайте в том же духе, пока получается. Если эта цепочка перестала удлиняться, то попытайтесь сформулировать теорему, объясняющую неудачу в построениях.

**6.22.3.** Докажите, что  $\text{Cl Int Cl Int } A = \text{Cl Int } A$ .

## 6'9. Множества с общей границей

**6.23\*.** Постройте три открытых множества на прямой, имеющих одну и ту же границу. Можно ли в Вашем построении увеличить число множеств?

## 6'10. Выпуклость и операции Int, Cl и Fr

Напомним, что множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется **выпуклым**, если вместе с любыми своими двумя точками оно содержит весь отрезок, соединяющий их (другими словами, для любых  $x, y \in A$  каждая точка  $z$ , принадлежащая отрезку  $[x; y]$ , принадлежит и  $A$ ).

**6.24.** Если  $A$  – выпуклое подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$ , то множества  $\text{Cl } A$  и  $\text{Int } A$  тоже выпуклы.

**6.25.** Докажите, что выпуклое подмножество  $A$  пространства  $\mathbb{R}^n$  или содержит шар или же содержится в  $(n - 1)$ -мерном аффинном подпространстве пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**6.26.** При каких условиях  $\text{Fr } A$  – выпуклое множество?

### 6'11. Задание топологии посредством операций замыкания и внутренности

**6.27\*.** Пусть в множестве всех подмножеств множества  $X$  задана операция  $\text{Cl}_*$ , обладающая следующими свойствами:

- (1)  $\text{Cl}_* \emptyset = \emptyset$ ;
- (2)  $\text{Cl}_* A \supset A$ ;
- (3)  $\text{Cl}_*(A \cup B) = \text{Cl}_* A \cup \text{Cl}_* B$ ;
- (4)  $\text{Cl}_* \text{Cl}_* A = \text{Cl}_* A$ .

Докажите, что тогда  $\Omega = \{U \subset X \mid \text{Cl}_*(X \setminus U) = X \setminus U\}$  является топологической структурой и  $\text{Cl}_* A$  совпадает с замыканием  $\text{Cl} A$  в пространстве  $(X, \Omega)$ .

**6.28.** Найдите систему аксиом для  $\text{Int}$ , аналогичную системе аксиом для  $\text{Cl}$ , данной в 6.27.

### 6'12. Плотные множества

Пусть  $A$  и  $B$  – подмножества топологического пространства  $X$ . Говорят, что  $A$  *плотно в  $B$* , если  $\text{Cl} A \supset B$ , и что  $A$  *всюду плотно*, если  $\text{Cl} A = X$ .

**6.M.** Множество *всюду плотно в некотором пространстве, когда оно пересекается со всяким непустым открытым в этом пространстве множеством*.

**6.N.** Множество  $\mathbb{Q}$  *всюду плотно в  $\mathbb{R}$* .

**6.29.** Дайте прямое описание множеств, всюду плотных в: 1) антидискретном пространстве; 2) стрелке; 3)  $\mathbb{R}_{T_1}$ .

**6.30.** Докажите, что топологическое пространство дискретно, когда в нем имеется единственное всюду плотное подмножество (какое, кстати?).

**6.31.** Каким свойством обладает топологическая структура, если в пространстве существует всюду плотное одноточечное множество? Найдите соответствующий пример в 2.

**6.32.** Верно ли, что объединение всюду плотных множеств всюду плотно, пересечение всюду плотных множеств всюду плотно?

**6.33.** Докажите, что пересечение двух открытых всюду плотных множеств всюду плотно.

**6.34.** Какое условие в предыдущей задаче является лишним?

**6.35\*.** 1) Докажите, что пересечение счетного семейства открытых всюду плотных в пространстве  $\mathbb{R}$  множеств всюду плотно. 2) Можно ли заменить  $\mathbb{R}$  на произвольное топологическое пространство?

**6.36\*.** Докажите, что множество  $\mathbb{Q}$  не является пересечением никакого счетного семейства открытых всюду плотных в  $\mathbb{R}$  множеств.

### 6'13. Нигде не плотные множества

Множество называется *нигде не плотным*, если его внешность всюду плотна.

**6.37.** Может ли множество быть одновременно всюду плотным и нигде не плотным?

**6.О.** Множество  $A$  нигде не плотно, тогда в любой окрестности любой точки существует точка, входящая в дополнение множества  $A$  вместе с некоторой своей окрестностью.

**6.38. Загадка.** Что можно сказать о внутренности нигде не плотного множества?

**6.39.** Является ли  $\mathbb{R}$  нигде не плотным в  $\mathbb{R}^2$ ?

**6.40.** Докажите, что если  $A$  нигде не плотно, то  $\text{Int Cl } A = \emptyset$ .

**6.41.** Докажите, что граница замкнутого множества нигде не плотна. Верно ли это утверждение для границы открытого множества; произвольного множества?

**6.42.** Докажите, что объединение конечного набора нигде не плотных множеств нигде не плотно.

**6.43.** Докажите, что для всякого множества  $A$  существует наибольшее открытое множество  $B$ , в котором  $A$  плотно. Крайние случаи  $B = X$  и  $B = \emptyset$  означают, что  $A$  всюду плотно или  $A$  нигде не плотно соответственно.

**6.44\*.** Докажите, что  $\mathbb{R}$  не является объединением счетного числа нигде не плотных множеств.

### 6'14. Предельные и изолированные точки

Точка  $b$  называется *предельной точкой* множества  $A$ , если всякая ее окрестность пересекается с множеством  $A \setminus b$ .

**6.Р.** Всякая предельная точка множества является его точкой прикосновения.

**6.45.** Постройте пример, демонстрирующий, что точка прикосновения может не быть предельной точкой.

Точка множества  $A$ , не являющаяся предельной для этого множества, называется *изолированной*.

**6.Q.** Множество  $A$  замкнуто, тогда оно содержит все свои предельные точки.

**6.46.** Укажите предельные и изолированные точки множеств  $(0; 1] \cup \{2\}$ ,  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  в  $\mathbb{Q}$  и в  $\mathbb{R}$ .

**6.47.** Укажите предельные и изолированные точки множества  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{R}_{T_1}$ .

**6'15. Локально замкнутые множества**

Говорят, что подмножество топологического пространства *локально замкнуто*, если каждая его точка обладает такой окрестностью  $U$ , что  $A \cap U$  замкнуто в  $U$  (ср. 5.5–5.6).

**6.48.** Докажите, что следующие условия равносильны:

- (1)  $A$  локально замкнуто в  $X$ ;
- (2)  $A$  есть открытое подмножество своего замыкания  $\text{Cl}_X A$ ;
- (3)  $A$  – пересечение открытого и замкнутого подмножеств пространства  $X$ .

## 7. Упорядоченные множества

Этот параграф посвящен структурам порядка, которые играют в математике роль, сравнимую с ролью топологических структур. После краткого общего введения мы сосредоточим внимание на связях между структурами этих двух типов. Как и метрические пространства, частично упорядоченные множества определяют естественные топологические структуры и служат источниками интересных примеров топологических пространств.

### 7'1. Строгие порядки

Напомним, что бинарное отношение  $\prec$  в множестве  $X$  называется *отношением строгого частичного порядка*, или просто *строгим порядком*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

- *Иррефлексивность*. Ни для какого  $a \in X$  не верно, что  $a \prec a$ ,
- *Транзитивность*. Для любых  $a, b, c \in X$  из  $a \prec b$  и  $b \prec c$  следует  $a \prec c$ .

**7.A Антисимметричность.** Если  $\prec$  – строгий порядок в множестве  $X$ , то ни для каких  $a, b \in X$  не могут выполняться одновременно как  $a \prec b$ , так и  $b \prec a$ .

**7.B.** Отношение  $<$  в множестве вещественных чисел  $\mathbb{R}$  является строгим порядком.

Формула  $a \prec b$  иногда читается как “ $a$  меньше, чем  $b$ ” или “ $b$  больше, чем  $a$ ”, но часто для того, чтобы не слишком связывать общее отношения порядка с отношением порядка в  $\mathbb{R}$ , вместо этого говорят “ $b$  следует за  $a$ ” или “ $a$  предшествует  $b$ ”.

### 7'2. Нестрогие порядки

Бинарное отношение  $\preceq$  в множестве  $X$  называется *отношением нестрогого частичного порядка*, или просто *нестрогим порядком*, если оно удовлетворяет следующим трём условиям:

- *Транзитивность*. Если  $a \preceq b$  и  $b \preceq c$ , то  $a \preceq c$ .
- *Антисимметричность*. Если  $a \preceq b$  и  $b \preceq a$ , то  $a = b$ .
- *Рефлексивность*.  $a \preceq a$  для любого  $a$ .

**7.C.** Отношение  $\leq$  в  $\mathbb{R}$  является нестрогим порядком.

**7.D.** В множестве  $\mathbb{N}$  натуральных чисел отношение  $a|b$  (т. е.  $a$  является делителем  $b$ ) есть отношение нестрогого частичного порядка.

**7.1.** Является ли отношение  $a|b$  нестрогим порядком в множестве  $\mathbb{Z}$  целых чисел?

**7.Е.** В множестве подмножеств множества  $X$  отношение включения является нестрогим порядком.

### 7'3. Взаимосвязь между строгими и нестрогими порядками

**7.F.** С каждым строгим порядком  $<$  ассоциировано бинарное отношение  $\preceq$ , определённое в том же множестве следующим образом:  $a \preceq b$ , если либо  $a < b$ , либо  $a = b$ . Это – нестрогий порядок.

**7.G.** С каждым нестрогим порядком  $\preceq$  ассоциировано бинарное отношение  $<$ , определённое в том же множестве следующим образом:  $a < b$ , если  $a \preceq b$  и  $a \neq b$ . Это – строгий порядок.

**7.H.** Конструкции предыдущих двух задач взаимно обратны: применённые одна за другой в любом порядке, они дают исходное отношение.

Таким образом, строгий и нестрогий порядки определяются друг по другу и являются разными ликами одной и той же структуры порядка. Мы уже встречались с подобным явлением в топологии: открытые и замкнутые множества топологического пространства определяются друг по другу и дают различные способы задания топологии.

Множество, снабжённое отношением частичного порядка (строгим или нестрогим), называется (*частично*) *упорядоченным множеством* или, короче, *чумом*. Другими словами, частично упорядоченное множество (чум) – это пара  $(X, <)$ , составленная из множества  $X$  и отношения строгого частичного порядка  $<$  на нем. Конечно, сделав необходимые оговорки, вместо строгого частичного порядка можно взять соответствующий нестрогий. Каким порядком, строгим или нестрогим, пользуются в каждом конкретном случае – вопрос удобства, вкуса и традиции. Хотя удобно иметь обе версии, нестрогие порядки постепенно завоевывают одну конкретную ситуацию за другой. Никто, например, не вводит обозначений для строгой делимости, а обозначение  $\subseteq$  для нестроого включения множеств вытесняется обозначением  $\subset$ , которое уже почти никогда не понимается как строгое включение. В абстрактной ситуации мы будем пользоваться и тем и другим порядком, обозначая строгий порядок значком  $<$ , а нестрогий – значком  $\preceq$ .

### 7'4. Конусы

Пусть  $(X, <)$  – упорядоченное множество и  $a \in X$ . Множество  $\{x \in X \mid a < x\}$  называется *верхним конусом* элемента  $a$ , а множество  $\{x \in X \mid x < a\}$  – его *нижним конусом*. Сам элемент  $a$  не принадлежит своим

конусам. Добавив его к ним, мы получим *пополненные конусы*: *верхний пополненный конус* или *звезду*  $C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\}$  и *нижний пополненный конус*  $C_X^-(a) = \{x \in X \mid x \preceq a\}$ .

**7.1 Свойства конусов.** Пусть  $(X, \prec)$  – частично упорядоченное множество.

- (1)  $C_X^+(b) \subset C_X^+(a)$ , если  $b \in C_X^+(a)$ ;
- (2)  $a \in C_X^+(a)$  для любого  $a \in X$ .
- (3) если  $C_X^+(a) = C_X^+(b)$ , то  $a = b$ ;

**7.2 Конусы определяют порядок.** Пусть  $X$  – произвольное множество, и пусть в нём для каждого элемента  $a \in X$  определено множество  $C_a$ . Если

- (1)  $C_b \subset C_a$  для любого  $b \in C_a$ ;
- (2)  $a \in C_a$  для любого  $a \in X$ ,
- (3) если  $C_a = C_b$ , то  $a = b$ ;

то отношение:  $a \preceq b$ , если  $b \in C_a$ , является нестрогим порядком в  $X$  и относительно этого порядка  $C_a = C_X^+(a)$ .

**7.2.** Пусть  $C \subset \mathbb{R}^3$  – множество. Рассмотрим отношение  $\triangleleft_C$  между точками в  $\mathbb{R}^3$ , которое определяется следующим образом:  $a \triangleleft_C b$ , если  $b - a \in C$ . Каким условиям должно удовлетворять  $C$  для того, чтобы  $\triangleleft_C$  было нестрогим частичным порядком в  $\mathbb{R}^3$ ? Как в этом упорядоченном множестве устроены верхний и нижний конусы произвольного элемента?

**7.3.** Докажите, что всякий выпуклый конус  $C$  в  $\mathbb{R}^3$  с вершиной в  $(0, 0, 0)$ , пересекающийся с некоторой плоскостью, проходящей через  $(0, 0, 0)$  только по  $(0, 0, 0)$ , удовлетворяет условиям, найденным в результате решения предыдущей задачи.

**7.4.** В пространстве-времени  $\mathbb{R}^4$  специальной теории относительности (в котором точки изображают моментальные точечные события, первые три координаты  $x_1, x_2, x_3$  – пространственные, а четвертая координата  $t$  – время) имеется отношение *событие*  $(x_1, x_2, x_3, t)$  *предшествует* (и может оказать влияние на)  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{t})$ , определяющееся неравенством

$$c(\tilde{t} - t) \geq \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_1)^2 + (\tilde{x}_2 - x_2)^2 + (\tilde{x}_3 - x_3)^2}.$$

Является ли это отношение порядком? Если является, то каковы верхние и нижние конусы точки?

**7.5.** Ответьте на вопросы предыдущей задачи относительно двумерной и трехмерной версий этого пространства, в которых число пространственных координат равно 1 и 2, соответственно, и подмножества которых легче изображать на рисунках.

### 7'5. Расположение элемента относительно множества

Пусть  $(X, <)$  – это чум,  $A$  – некоторое его подмножество. Говорят, что  $b$  – **наибольший элемент** множества  $A$ , если  $b \in A$  и  $c \preceq b$  для любого  $c \in A$ . Аналогично,  $b$  – **наименьший элемент** множества  $A$ , если  $b \in A$  и  $b \preceq c$  для любого  $c \in A$ .

**7.К.** Элемент  $b$  множества  $A$  является наименьшим, тогда  $A \subset C_X^+(b)$ ; элемент  $b$  множества  $A$  является наибольшим, тогда  $A \subset C_X^-(b)$ .

**7.Л.** Всякое множество имеет не более одного наибольшего и не более одного наименьшего элемента.

Элемент  $b$  множества  $A$  называется его **максимальным** элементом, если в  $A$  нет элемента, большего чем  $b$ . Если же в  $A$  нет элемента, меньшего, чем  $b$ , то  $b$  называется **минимальным** элементом множества  $A$ .

**7.М.** Элемент  $b$  множества  $A$  максимален, тогда  $A \cap C_X^-(b) = b$ ; элемент  $b$  множества  $A$  минимален, тогда  $A \cap C_X^+(b) = b$ .

**7.6. Загадка.** Как связаны понятия максимального элемента и наибольшего элемента? минимального и наименьшего? Что можно сказать об упорядоченном множестве, для любого подмножества которого эти понятия совпадают?

### 7'6. Линейные порядки

Обратите внимание на то, что определение отношения строгого порядка не требует, чтобы для любых  $a, b \in X$  было выполнено или  $a < b$ , или  $b < a$ , или  $a = b$ .

Если отношение порядка удовлетворяет этому дополнительному требованию (т. е. любые два элемента  $a$  и  $b$  множества  $X$  сравнимы: или  $a \preceq b$ , или  $b \preceq a$ ), то говорят, что порядок  $\preceq$  **линеен**, а  $(X, \preceq)$  – **линейно упорядоченное множество** или просто **упорядоченное множество**.<sup>6</sup> Если хотят подчеркнуть, что отношение порядка не обязательно линейно, то говорят, что порядок **частичный**, а множество – **частично упорядоченное**.

**7.Н.** Отношение  $<$  в множестве вещественных чисел  $\mathbb{R}$  является линейным порядком.

---

<sup>6</sup>Израдную неразбериху в терминологию внес(ли) Бурбаки. Тогда линейные порядки назывались просто порядками, а порядки не линейные назывались частичными порядками, в редких же ситуациях, когда было не известно линеен ли порядок, так прямо и говорили, что это не известно. Бурбаки предложил(и) изъять слово *частично*, мотивируя это тем, что частичный порядок, как явление более общее, чем линейный порядок (который тогда все называли просто порядком), заслуживает более простого и короткого названия. Во Франции они в этом вполне преуспели, в русской терминологии успех был частичен, а в англоязычной – и вовсе не возможен. Дело в том, что частично упорядоченное множество по-английски называется *partially ordered set*, а сокращённо – *poset*. От такого короткого удобного слова, конечно же, невозможно отказаться.



Это – важнейший пример линейно упорядоченного множества. Слова и образы, корнящиеся в нем, нередко распространяются и на все линейно упорядоченные множества. Например, конусы называются *лучами*, причем верхние конусы называются *правыми лучами*, а нижние – *левыми*.

**7.7.** Упорядоченное множество  $(X, \prec)$  является линейно упорядоченным, тогда  $X = C_X^+(a) \cup C_X^-(a)$  для любого  $a \in X$ .

**7.8.** В множестве  $\mathbb{N}$  натуральных чисел отношение  $a|b$  не является линейным порядком.

**7.9.** При каких  $X$  отношение включения в множестве подмножеств множества  $X$  является линейным порядком?

### 7'7. Топологии линейного порядка

**7.О.** Пусть  $(X, \prec)$  – линейно упорядоченное множество. Множество его подмножеств, составленное из множества  $X$  и всевозможных *правых лучей*, т. е. множеств вида  $\{x \in X \mid a \prec x\}$ , где  $a$  пробегает все  $X$ , есть база топологической структуры в  $X$ .

Топологическая структура, порожденная этой базой, называется *топологией правых лучей* линейно упорядоченного множества  $(X, \prec)$ . Аналогично определяется *топология левых лучей* линейно упорядоченного множества: она порождается базой, составленной из  $X$  и множеств вида  $\{x \in X \mid x \prec a\}$  с  $a \in X$ .

**7.10.** Топология стрелки (см. 2) совпадает с топологией правых лучей полупрямой  $[0; \infty)$ , снабженной порядком  $<$ .

**7.11. Загадка.** Насколько условие линейности порядка необходимо в теореме 7.О? Найдите ослабление этого условия, которое обеспечивало бы справедливость заключения теоремы 7.О и позволяло бы представить топологическую структуру, описанную в задаче 2.2, как топологию правых лучей подходящего частичного порядка на плоскости.

**7.Р.** Пусть  $(X, \prec)$  – линейно упорядоченное множество. Множество его подмножеств, составленное из  $X$  и всевозможных множеств вида  $\{x \in X \mid a \prec x \prec b\}$ ,  $\{x \in X \mid x \prec b\}$  и  $\{x \in X \mid a \prec x\}$ , где  $a$  и  $b$  пробегают всё множество  $X$ , есть база топологической структуры в  $X$ .

Топологическая структура, порожденная этой базой, называется *интервальной топологией* линейно упорядоченного множества.

**7.12.** Покажите, что интервальная топология есть наименьшая топологическая структура, содержащая топологию правых лучей и топологию левых лучей.

**7.Q.** Стандартная топология прямой совпадает с интервальной топологией в  $(\mathbb{R}, <)$ .

### 7'8. Топология частичного порядка

**7.R.** Пусть  $(X, \preceq)$  – (частично) упорядоченное множество. Множество его подмножеств, составленное из всевозможных конусов вида

$$C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\},$$

где  $a$  пробегает всё  $X$ , есть база топологической структуры в  $X$ .

Топологическая структура, порожденная этой базой, называется **топологией порядка**.

**7.S.** В топологии порядка всякая точка  $a \in X$  обладает наименьшей (по включению) окрестностью. Такой окрестностью является  $C_X^+(a) = \{x \in X \mid a \preceq x\}$ .

**7.T.** Следующие свойства топологического пространства равносильны:

- (1) каждая точка обладает наименьшей (по включению) окрестностью,
- (2) пересечение любой совокупности открытых множеств открыто,
- (3) объединение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.

Пространство, удовлетворяющее условиям теоремы 7.T, называется **пространством наименьших окрестностей**.<sup>7</sup>

В пространстве наименьших окрестностей открытые и замкнутые множества удовлетворяют одинаковым условиям. В частности, совокупность замкнутых множеств пространства наименьших окрестностей является топологической структурой. Будем говорить, что эта структура **противоположна** исходной. Она отвечает противоположному частичному порядку.

**7.13.** Как охарактеризовать в терминах порядка точки, открытые в топологии порядка? То же самое относительно замкнутых точек.

**7.14.** Дайте непосредственное описание открытых множеств в топологии порядка прямой  $\mathbb{R}$  с порядком  $<$ .

**7.15.** Дайте непосредственное описание замыкания точки в топологии частичного порядка.

**7.16.** Какие одноточечные множества всюду плотны в топологии частичного порядка?

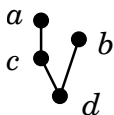
---

<sup>7</sup>Этот класс топологических пространств был введен и изучен П. С. Александровым в 1937 году, Александров назвал их *дискретными*. Теперь так называются пространства намного более узкого класса. Название *пространство наименьших окрестностей* (smallest neighborhood space) предложено Кристером Шисельманом.

**7.17.** В множестве  $\{a, b, c, d\}$  рассмотрим частичный порядок, котором все строгие неравенства таковы:  $c \prec a$ ,  $d \prec c$ ,  $d \prec a$ ,  $d \prec b$ . Проверьте, что это – частичный порядок, и докажите, что топология этого порядка совпадает с топологией пространства  $\mathfrak{V}$ , описанной в задаче 2.3 (1).

## 7'9. Как нарисовать чум

Теперь мы можем объяснить пиктограмму  $\mathfrak{V}$ , которой пользуемся для обозначения пространства, определённого в задаче 2.3 (1). Она описывает порядок в множестве  $\{a, b, c, d\}$ , задающий топологию согласно 7.17. Действительно, если расставить элементы рассматриваемого упорядоченного множества в узлах графа пиктограммы, как показано на рисунке справа, то окажется, что узлы, отвечающие сравнимым элементам, соединены отрезком или восходящей ломаной, и больший элемент отвечает верхнему узлу.

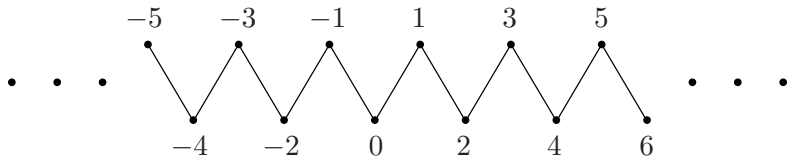


Так можно нарисовать схему, задающую любое конечное частично упорядоченное множество. Элементы его изображаются точками плоскости, причем, если  $a \prec b$ , то точка, изображающая  $b$ , выше точки, изображающей  $a$  и эти точки соединены либо отрезком, либо ломаной, звенья которой соединяют точки, изображающие промежуточные элементы возрастающей цепочки  $a \prec c_1 \prec c_2 \prec \dots \prec c_n \prec b$ . Можно было бы соединить отрезками каждую пару точек, отвечающих сравнимым элементам, но это сделало бы диаграмму излишне запутанной. Поэтому отрезки, которые можно восстановить по другим в силу транзитивности, проводить не стоит.

Диаграммы указанного вида называются *диаграммами Хассе*.

**7.U.** Докажите, что любое конечное частично упорядоченное множество можно описать такой диаграммой Хассе.

**7.V.** Опишите топологическую структуру в множестве  $\mathbb{Z}$  целых чисел, которая является топологией порядка, заданного следующей диаграммой Хассе



Пространство задачи 7.V называется *цифровой прямой* или *прямой Халимского*. В нем каждое четное число замкнуто и каждое нечетное – открыто.

**7.18.** Сопоставим каждому четному числу  $2k$  интервал  $(2k-1, 2k+1)$ , а каждому нечетному числу  $2k-1$  одноточечное множество  $\{2k-1\}$ . Докажите, что множество целых чисел открыто в топологии Халимского, тогда объединение сопоставленных им множеств открыто на стандартной числовой прямой.

**7.19.** Среди примеров топологических пространств, данных в 2, найдите все, в которых топологию можно задать как топологию порядка. В случаях конечных множеств нарисуйте диаграммы, описывающие соответствующие порядки.

### 7'10х. Циклические порядки в конечном множестве

*Циклическим порядком* в конечном множестве называется линейный порядок, рассматриваемый с точностью до циклических перестановок. Линейный порядок позволяет занумеровать элементы конечного множества  $X$  натуральными числами от 1 до числа элементов множества  $X$ , так что  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Циклическая перестановка меняет местами первые  $k$  элементов с последними  $n - k$  элементами, не меняя порядка в пределах каждой из этих групп:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \mapsto (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Рассматривая циклический порядок, не имеет смысла говорить о том что один элемент следует за другим, поскольку подходящей циклической перестановкой всего множества любые два элемента можно поставить в противоположном порядке. Однако, можно говорить о том, что один элемент непосредственно следует за другим. При этом, разумеется, непосредственно за последним элементом следует самый первый: ведь при любой нетождественной циклической перестановке самый первый элемент будет поставлен непосредственно после самого последнего.

В циклически упорядоченном конечном множестве для каждого элемента имеется единственный непосредственно следующий за ним элемент. Этим определяется отображение множества на себя, простейшая циклическая перестановка

$$x_i \mapsto \begin{cases} x_{i+1}, & \text{если } i < n, \\ x_1, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Эта перестановка действует транзитивно (т. е. ее итерациями любой элемент переводится в любой другой).

**7.Ах.** Описанная выше связь обратима: любое отображение  $T : X \rightarrow X$ , транзитивно действующее в  $X$ , определяет в  $X$  циклический порядок, в котором непосредственно за элементом  $a \in X$  следует  $T(a)$ .

**7.Вх.** В множестве, состоящем из  $n$  элементов, имеется ровно  $(n-1)!$  попарно разных циклических порядков.

В частности, в двухэлементном множестве имеется всего один циклический порядок (и потому не интересен настолько, что иногда даже говорят, что он не имеет смысла), а в трехэлементном множестве имеются два циклических порядка.

### 7'11х. Циклические порядки в бесконечных множествах

Циклические порядки бывают и в бесконечных множествах. В них многие естественные циклические порядки невозможно определить заданием непосредственного следования элементов. Например точки окружности можно циклически упорядочить по часовой стрелке (или против часовой стрелки). Однако, относительно этого циклического порядка ни одна точка не обладает непосредственно следующей за ней точкой.

Такие “непрерывные” циклические порядки можно определить почти так же, как мы определили выше циклические порядки в конечном множестве. Разница в том, что не всегда возможно определить достаточное количество *циклических преобразований множества*, и приходится заменить их циклическими преобразованиями отношения порядка. Именно, циклический порядок есть линейный порядок, рассматриваемый с точностью до циклических преобразований, где под *циклическим преобразованием* линейного порядка  $\prec$  в множества  $X$  мы понимаем переход от  $\prec$  к такому линейному порядку  $\prec'$ , что множество  $X$  можно разбить на подмножества  $A$  и  $B$ , на каждом из которых по отдельности порядки  $\prec$  и  $\prec'$  совпадают, тогда как  $a \prec b$  и  $b \prec' a$  для любых  $a \in A$  и  $b \in B$ .

**7.Сх.** *Возможность циклического преобразования одного линейного порядка в другой является отношением эквивалентности на множестве всех линейных порядков в фиксированном множестве. Так что циклический порядок есть соответствующий класс эквивалентности.*

**7.Дх.** Докажите, что в случае конечного множества это определение циклического порядка эквивалентно определению, данному в предыдущем пункте.

**7.Ех.** Докажите, что циклический порядок “против часовой стрелки” на окружности невозможно определить как линейный порядок с точностью до циклических преобразований множества. Объясните, какие линейные порядки на окружности определяют этот циклический порядок с точностью до циклических преобразований порядка.

**7.Фх.** Пусть  $A$  – подмножество множества  $X$ . Если линейные порядки  $\prec'$  и  $\prec$  на  $X$  получаются друг из друга циклическим преобразованием, то и сужения этих линейных порядков на  $A$  получаются друг из друга циклическим преобразованием.

**7.Gx Следствие.** Циклический порядок в множестве определяет циклический порядок в любом его подмножестве.

**7.Hx.** Циклический порядок в множестве можно восстановить по индуцированным им циклическим порядкам во всех трехэлементных подмножествах этого множества.

**7.Hx.1.** Циклический порядок в множестве можно восстановить по индуцированным им циклическим порядкам во всех трехэлементных подмножествах этого множества, содержащих любой наперед заданный фиксированный элемент.

Теорема 7.Hx позволяет описывать циклический порядок как тернарное отношение. Именно, для трехэлементного множества  $\{a, b, c\}$  будем обозначать через  $[a \prec b \prec c]$  циклический порядок, определяемый линейным порядком, в котором справедливы представленные два неравенства (т.е.  $b$  следует за  $a$  и  $c$  следует за  $b$ ).

**7.Ix.** Циклические порядки, индуцированные в трехэлементных множествах циклическим порядком в множестве  $X$ , обладают следующими свойствами:

- (1) ни для каких  $a, b \in X$  не верно, что  $[a \prec a \prec b]$ ;
- (2) для любых попарно различных  $a, b, c \in X$  либо  $[a \prec b \prec c]$ , либо  $[b \prec a \prec c]$ , но оба эти утверждения не могут быть справедливы одновременно;
- (3)  $[a \prec b \prec c]$ , тогда  $[b \prec c \prec a]$ , тогда  $[c \prec a \prec b]$  для любых  $a, b, c \in X$ ;
- (4) если  $[a \prec b \prec c]$  и  $[a \prec c \prec d]$ , то и  $[a \prec b \prec d]$ .

Наоборот, если в множестве  $X$  задано тернарное отношение, обладающее этими четырьмя свойствами, то оно определяется циклическим порядком в  $X$ .

## 7'12x. Топология циклического порядка

**7.Jx.** Пусть  $X$  – циклически упорядоченное множество. Набор множеств, открытых во всякой интервальной топологии для каждого линейного порядка, определяющего данный циклический порядок на  $X$ , является топологической структурой на множестве  $X$ .

Топология, определенная в теореме 7.Jx, называется *топологией циклического порядка*.

**7.Kx.** Топология циклического порядка относительно обхода окружности  $S^1$  против часовой стрелки порождается метрикой  $\rho(x, y) = |x - y|$  на  $S^1 \subset \mathbb{C}$ .

## Доказательства и комментарии

**1.A** Вопрос так прост, что трудно найти более элементарные факты, которые могли бы служить отправной точкой доказательства. Что значит, что  $A$  состоит из  $a$  элементов? Это значит, что мы можем пересчитать элементы множества  $A$ , присваивая им номера 1, 2, 3, и так далее и что последний элемент при этом получит номер  $a$ . Известно, что результат не зависит от порядка, в котором мы расположили элементы множества. (В действительности, можно развить теорию множеств, которая включала бы теорию счёта, где это доказывалось бы как одна из основных теорем. Но поскольку это не вызывает сомнений, мы опускаем доказательство.) Поэтому мы можем начать подсчет элементов множества  $B$  с подсчета элементов множества  $A$ . Пересчитав элементы множества  $A$ , мы продолжим подсчет, если какие-то элементы множества  $B$  к этому моменту останутся не сосчитанными. Поэтому число элементов множества  $A$  не превосходит числа элементов множества  $B$ .

**1.B** Напомним, что, согласно определению, включение  $A \subset B$  означает, что каждый элемент множества  $A$  является и элементом множества  $B$ . Поэтому утверждение, которое подлежит доказательству, можно переформулировать следующим образом: каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $A$ . А это – тавтология.

**1.C** Напомним, что, согласно определению, включение  $A \subset B$  означает, что каждый элемент множества  $A$  является и элементом множества  $B$ . Поэтому нам нужно доказать, что каждый элемент множества  $\emptyset$  принадлежит и множеству  $A$ . Это действительно так, потому что в  $\emptyset$  элементов нет. Если вас это рассуждение не убедило, поставим вопрос иначе: а может ли это включение быть не справедливо? Как это может случиться, что  $\emptyset$  не является подмножеством множества  $A$ ? Это могло бы случиться, только если бы в  $\emptyset$  нашелся элемент, не являющийся элементом множества  $A$ . Но такого элемента в  $\emptyset$  нет, поскольку в  $\emptyset$  нет никаких элементов.

**1.D** Нужно доказать, что каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $C$ . Пусть  $x \in A$ . Так как  $A \subset B$ , то  $x \in B$ . А так как  $B \subset C$ , то это, в свою очередь, влечёт  $x \in C$ . Ну а это-то и нужно было доказать.

**1.E** Мы уже видели, что  $A \subset A$ . Поэтому если  $A = B$ , то  $A \subset B$  и  $B \subset A$ . С другой стороны, включение  $A \subset B$  означает, что каждый элемент множества  $A$  принадлежит и  $B$ , а включение  $B \subset A$  означает, что каждый элемент множества  $B$  принадлежит и  $A$ . Следовательно  $A$  и  $B$  обладают одними и теми же элементами, а значит они равны.

**1.G** Построить множество  $A$ , такое что  $A \notin A$ , легко. Возьмите, например,  $A = \emptyset$ , или  $A = \mathbb{N}$ , или  $A = \{1\}, \dots$

**1.H** Пусть  $A = \{1\}$ ,  $B = \{\{1\}\}$  и  $C = \{\{\{1\}\}\}$ . Ясно, что  $A \in B$  и  $B \in C$ , но  $A \notin C$ . На самом деле, труднее построить такие множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ , что  $A \in B$ ,  $B \in C$ , и  $A \in C$ . Вот один из простейших примеров:  $A = \{1\}$ ,  $B = \{\{1\}\}$ ,  $C = \{\{1\}, \{\{1\}\}\}$ .

**2.A** Что же нужно проверить? Первая аксиома гласит, что объединение произвольного набора подмножеств множества  $X$  является подмножеством того же множества. Конечно, так оно и есть. Если  $A_\alpha \subset X$  для каждого  $\alpha$ , то безусловно  $\bigcup_\alpha A_\alpha \subset X$ . Точно так же благополучно дело обстоит и со второй аксиомой, в которой идет речь о пересечении множеств. И, безусловно,  $\emptyset \subset X$  и  $X \subset X$ .

**2.B** Правда, правда. Если среди объединяемых множеств есть  $X$ , то и объединение равно  $X$ . А если его там нет, то что же есть? Только пустое множество. Но тогда и объединение пусто. С пересечениями дело обстоит так же просто. Если среди пересекаемых множеств есть  $\emptyset$ , то и пересечение равно  $\emptyset$ . А если его там нет, то что же есть? Только все  $X$ . Но тогда и пересечение равно  $X$ .

**2.C** Вначале покажите, что  $\bigcup_\alpha A_\alpha \cap \bigcup_\beta B_\beta = \bigcup_{\alpha, \beta} (A_\alpha \cap B_\beta)$ . Поэтому,

если  $A_\alpha, B_\beta$  – интервалы, то справа – объединение интервалов.

Для тех, кому кажется, что множество, являющееся таким объединением, очень уж просто устроено, предлагаем следующий вопрос (впрочем, формально уже не имеющий никакого отношения к рассматриваемой задаче). Пусть  $\{r_n\}_{n=1}^\infty = \mathbb{Q}$  (т. е. мы занумеровали все рациональные числа). Покажите, что  $\bigcup (r - 2^{-n}; r + 2^{-n}) \neq \mathbb{R}$ , хотя это множество является объединением некоторых интервалов, содержащих все (!) рациональные числа.

**2.D** Объединение любого набора открытых множеств открыто. Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто. Пустое множество и все пространство – открытые множества.

**2.E**

(а)

$$x \in \bigcap_{A \in \Gamma} (X \setminus A) \iff \forall A \in \Gamma : x \in X \setminus A$$

$$\iff \forall A \in \Gamma : x \notin A \iff x \notin \bigcup_{A \in \Gamma} A \iff x \in X \setminus \bigcup_{A \in \Gamma} A.$$



(b) Замените обе части формулы их дополнениями в множестве  $X$  и положите  $B = X \setminus A$ .

**2.F** Поскольку по определению замкнутое множество есть дополнение открытого, то утверждение теоремы следует из свойств открытых множеств (примените формулы де Моргана).

**2.G** В любом пространстве пустое множество и все пространство и открыты, и замкнуты, а в дискретном пространстве всякое множество является таковым. Полуоткрытый интервал ни открыт, ни замкнут. См. также следующую задачу.

**2.H** Да, всякий отрезок замкнут, поскольку его дополнение  $\mathbb{R} \setminus [a; b] = (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$  – открытое множество.

**2.Ax** Пусть  $U$  – открытое подмножество прямой. Для каждой точки  $x \in U$  рассмотрим наибольший (по включению) интервал  $(m_x; M_x)$ , содержащий эту точку (им является объединение всех содержащих  $x$  интервалов). Так как множество  $U$  открыто, такие интервалы существуют. Ясно, что всякие два интервала данного вида либо не пересекаются, либо совпадают.

**2.Cx** Следует из 2.Bx.2.

**2.Dx** То, что выполнены условия (a) и (c) из 2.13 – очевидно. Для проверки условия (b) воспользуемся результатом задачи 2.Ex. Пусть множества  $A$  и  $B$  не содержат арифметических прогрессий длины большей или равной  $n$ . Если бы в множестве  $A \cup B$  содержалась достаточно длинная прогрессия, то в одном из исходных множеств нашлась бы прогрессия длины  $n$ .

**2.Ex** См. книгу А. Я. Хинчина “Три жемчужины теории чисел”.

**3.A**  $\Rightarrow$  Пусть  $\Sigma$  является базой топологии  $\Omega$  и  $U \in \Omega$ . Представим множество  $U$  в виде объединения множеств из базы  $\Sigma$ . Всякая точка  $x \in U$  окажется покрыта каким-нибудь из этих базисных множеств. Такое множество и можно взять в качестве  $V$ . Оно содержится в  $U$ , поскольку участвует в его представлении в виде объединения.

$\Leftarrow$  Наоборот, предположим, что для всякого множества  $U \in \Omega$  и всякой точки  $x \in U$  существует такое множество  $V \in \Sigma$ , что  $x \in V \subset U$ , и покажем, что  $\Sigma$  – база топологии  $\Omega$ . Для этого нужно убедиться в том, что любое множество  $U \in \Omega$  представляется в виде объединения множеств, принадлежащих  $\Sigma$ . Для каждой точки  $x \in U$  выберем, пользуясь предположением, такое множество  $V_x \in \Sigma$ , что  $x \in V_x \subset U$  и рассмотрим  $\bigcup_{x \in U} V_x$ . Заметим, что  $\bigcup_{x \in U} V_x \subset U$ , поскольку  $V_x \subset U$  для каждого  $x \in U$ . С другой стороны, каждая точка  $x \in U$  содержится в своём  $V_x$  и, тем более, в  $\bigcup_{x \in U} V_x$ . Значит,  $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x$ . Таким образом,  $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ .

**3.B**  $\Rightarrow$  Пусть  $\Sigma$  – база некоторой топологии. Тогда  $X$ , будучи открытым множеством, должно представляться как объединение базисных множеств. Пересечение любых двух множеств из  $\Sigma$ , как пересечение двух открытых множеств, открыто, и, значит, представляется как объединение базисных множеств.

$\Leftarrow$  Наоборот, допустим, что  $\Sigma$  – такая совокупность подмножеств множества  $X$ , что  $X$  есть объединение множеств из  $\Sigma$  и пересечение любых двух множеств из  $\Sigma$  представляется в виде объединения множеств из  $\Sigma$ . Докажем, что совокупность всевозможных объединений множеств из  $\Sigma$  удовлетворяет аксиомам топологической структуры. Первая аксиома очевидно выполняется, так как объединение объединений есть объединение. Докажем вторую аксиому (пересечение двух открытых множеств открыто). Пусть  $U = \cup_{\alpha} A_{\alpha}$  и  $V = \cup_{\beta} B_{\beta}$ , где  $A_{\alpha}, B_{\beta} \in \Sigma$ . Тогда  $U \cap V = (\cup_{\alpha} A_{\alpha}) \cap (\cup_{\beta} B_{\beta}) = \cup_{\alpha, \beta} (A_{\alpha} \cap B_{\beta})$ , а поскольку пересечения  $A_{\alpha} \cap B_{\beta}$  представляются, по предположению, как объединения множеств из  $\Sigma$ , то и  $U \cap V$  представляется в таком виде. Осталось проверить третью аксиому. В ней нужно проверить только часть о всём пространстве, но согласно предположению, все пространство  $X$  представляется в виде объединения множеств из  $\Sigma$ .

**3.D, 3.E** Докажите, а затем используйте следующую простую лемму:  $A = \bigcup B_{\alpha}$ , где  $B_{\alpha} \in \mathcal{B}$ , тогда  $\forall x \in A \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subset A$ .

**3.F** Фраза: “ $\mathcal{B}$  есть база некоторой топологической структуры” раскрывается следующим образом: набор всевозможных объединений множеств, принадлежащих набору  $\mathcal{B}$ , является топологической структурой. Утверждение, что  $\Sigma^1$  – база некоторой топологии, следует из результата задачи 3.E (так что нужно доказать еще ее аналоги применительно к наборам  $\Sigma^2, \Sigma^{\infty}$ ). Совпадение структур, определенных, к примеру, базами  $\Sigma^1$  и  $\Sigma^2$ , означает, что множество, являющееся объединением кругов, есть также и объединение квадратов, и наоборот. Достаточно ли доказать, что круг есть объединение квадратов? Как проще всего это сделать (см. указание к задачам 3.D и 3.E)?

**3.G** Пусть  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – базы топологических структур  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в множестве  $X$ . Легко видеть, что  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , когда

$$\forall U \in \Sigma_1 \forall x \in U \exists V \in \Sigma_2 : x \in V \subset U.$$

Остается заметить, что  $\Omega_1 = \Omega_2$ , когда  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  и  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ .

**4.A** Все, что надо проверить, так это справедливость аксиом метрики для *каждого* набора точек  $x, y$  и  $z$ .

**4.B** Неравенство треугольника в данном случае имеет вид  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ . Положив  $a = x - z$ ,  $b = z - y$ , получаем стандартное неравенство  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

**4.C** Как в решении предыдущей задачи, неравенство треугольника переписывается в виде  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ . Двукратное возведение этого неравенства в квадрат и упрощение сводят последнее к неравенству Коши–Буняковского  $(\sum a_i b_i)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2$ .

**4.E** К примеру, если  $y \in B_{r-\rho(x,a)}(x)$ , то  $\rho(y, x) < r - \rho(x, a)$ , откуда, в силу неравенства треугольника, следует, что  $\rho(y, a) < r$ , что и означает, что  $y \in B_r(a)$ .

**4.F** Покажите, что если  $d = \text{diam } A$  и  $a \in A$ , то  $A \subset D_d(a)$ . Обратно:  $\text{diam } D_d(a) \leq 2d$  (ср. 4.11).

**4.G** Сопоставьте утверждения 3.A, 3.B и 4.E.

**4.H** В стандартной метрике прямой  $\mathbb{R}$  шарами являются интервалы.

**4.I**  $\Leftrightarrow$  Если множество вместе с каждой своей точкой содержит шар с центром в этой точке, то оно является объединением таких шаров, следовательно оно открыто.

$\Rightarrow$  Если  $a \in U$ , где  $U$  открыто, то  $a \in B_r(x)$  и  $B_{r-\rho(a,x)}(a) \subset B_r(x) \subset U$ .

**4.J** В нем слишком мало открытых множеств. Если  $x, y \in X$  и  $r = \rho(x, y) > 0$ , то шар  $D_r(x)$  непуст и не совпадает со всем пространством.

**4.K**  $\Rightarrow$  Пусть  $x \in X$ . Положим  $r = \min\{\rho(x, y) | y \in X \setminus x\}$ . Какие точки входят в шар  $D_r(x)$ ?  $\Leftrightarrow$  Очевидно.

**4.L** Условие  $\rho(b, A) = 0$  означает, что всякий шар с центром в точке  $b$  пересекается с  $A$ . А это значит, в силу того, что  $A$  замкнуто и его дополнение открыто, что  $b$  не принадлежит дополнению множества  $A$ , и значит входит в  $A$ .

**4.Ax** Выполнение условия (2) очевидно. Обозначим  $\sup_{z \in A} \rho(a, B)$  через

$r(A, B)$ , так что  $d_\rho(A, B) = \max\{r(A, B), r(B, A)\}$ . Для проверки условия (3) достаточно доказать, что для любых множеств  $A, B, C \subset X$  верно неравенство  $r(A, C) \leq r(A, B) + r(B, C)$ . Легко видеть, что  $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + \rho(b, C)$  при всех  $a \in A, b \in B$ . Отсюда  $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + r(B, C)$ , значит,

$$\rho(a, C) \leq \inf_{b \in B} \rho(a, b) + r(B, C) = \rho(a, B) + r(B, C) \leq r(A, B) + r(B, C),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

**4.Bx** Согласно 4.Ax,  $d_\rho$  удовлетворяет условиям (2) и (3) из определения метрики. Из 4.L следует, что если расстояние Хаусдорфа между двумя замкнутыми множествами  $A$  и  $B$  равно нулю, то  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , т. е.  $A = B$ . Таким образом,  $d_\rho$  удовлетворяет и условию (1).

**4.Сх** Функция  $d_{\Delta}(A, B)$  – это площадь симметрической разности многоугольников  $A$  и  $B$ , т. е. площадь множества  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Ясно, что требует проверки лишь неравенство треугольника. Докажите и используйте включение  $A \setminus B \subset (C \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

**4.Фх** Очевидно, что метрика из 4.А – ультраметрика. То, что остальные метрики таковыми не являются, следует хотя бы из того, что для каждой из них найдутся такие различные точки  $x, y$  и  $z$ , что  $\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)$ .

**4.Гх** Из определения ультраметрики следует, что среди попарных расстояний между точками  $a, b$  и  $c$  не может быть одного, большего двух других.

**4.Нх** В силу 4.Гх, если  $y \in S_r(x)$  и  $r > s > 0$ , то  $B_s(y) \subset S_r(x)$ .

**4.Их** Пусть  $x - z = \frac{r_1}{s_1} p^{\alpha_1}$  и  $z - y = \frac{r_2}{s_2} p^{\alpha_2}$ . Считаем, для определенности, что  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ . Имеем:

$$x - y = p^{\alpha_1} \left( \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} p^{\alpha_2 - \alpha_1} \right) = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1 p^{\alpha_2 - \alpha_1}}{s_1 s_2} \cdot p^{\alpha_1},$$

значит  $\rho(x, y) \leq p^{-\alpha_1} = \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$ .

**5.А** Нужно проверить, что  $\Omega_A$  удовлетворяет аксиомам топологической структуры. Проверим первую аксиому. Пусть  $\Gamma \subset \Omega_A$  – некоторая совокупность множеств, принадлежащих  $\Omega_A$ . Нам следует убедиться в том, что  $\cup_{U \in \Gamma} U \in \Omega_A$ . Для каждого  $U \in \Gamma$  найдём такое множество  $U_X \in \Omega$ , что  $U = A \cap U_X$ . Это возможно согласно определению множества  $\Omega_A$ . Преобразуем интересующее нас множество:  $\cup_{U \in \Gamma} U = \cup_{U \in \Gamma} (A \cap U_X) = A \cap (\cup_{U \in \Gamma} U_X)$ . Множество  $\cup_{U \in \Gamma} U_X$  принадлежит  $\Omega$  (то есть открыто в  $X$ ) как объединение множеств, открытых в  $X$ . (Здесь мы пользуемся тем, что  $\Omega$ , будучи топологической структурой в  $X$ , удовлетворяет первой аксиоме топологической структуры.) Поэтому  $A \cap (\cup_{U \in \Gamma} U_X)$  принадлежит  $\Omega_A$ . Аналогично проверяется вторая аксиома. Третья аксиома следует из того, что  $A = A \cap X$ , а  $\emptyset = A \cap \emptyset$ .

**5.В** Покажем, что подмножество в  $\mathbb{R}$  открыто в относительной топологии, тогда оно открыто в стандартной топологии прямой.  $\Rightarrow$  Поскольку пересечение круга с прямой или пусто, или является интервалом, а всякое открытое подмножество плоскости есть объединение открытых кругов, то пересечение открытого подмножества плоскости с прямой есть объединение интервалов, т. е. оно открыто на прямой.  $\Leftarrow$  Для всякого объединения интервалов на прямой существует объединение кругов, пересечение которого с прямой совпадает с данным объединением интервалов.

**5.C** Если множество  $F$  замкнуто в  $A$ , то его дополнение  $A \setminus F$  в  $A$  открыто в  $A$ , т. е.  $A \setminus F = A \cap U$ , где  $U$  открыто в  $X$ . Каким же замкнутым множеством высекается множество  $F$  на  $A$ ? Оно высекается множеством  $X \setminus U$ . Действительно,  $A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U) = A \setminus (A \setminus F) = F$ . Аналогично доказывается, что пересечение с  $A$  множества, замкнутого в  $X$ , замкнуто в  $A$ .

**5.D** Никакой круг в  $\mathbb{R}^2$  не содержится ни в каком подмножестве прямой  $\mathbb{R}$ .

**5.E** Если  $A \in \Omega$ ,  $B \in \Omega_A$ , то  $B = A \cap U$ , где  $U \in \Omega$ , значит множество  $B$  принадлежит топологии  $\Omega$ , как пересечение двух множеств,  $A$  и  $U$ , принадлежащих топологии  $\Omega$ .

**5.F** Рассуждайте как в предыдущей задаче, только используйте 5.C вместо определения топологии подпространства.

**5.G** В основе доказательства лежит тождество  $(U \cap A) \cap B = U \cap B$ . Оно имеет место, поскольку  $B \subset A$ , и применяется к  $U \in \Omega$ . Когда  $U$  пробегает  $\Omega$ , правая часть равенства  $(U \cap A) \cap B = U \cap B$  пробегает  $\Omega_B$ , тогда как левая часть пробегает  $(\Omega_A)_B$ . Действительно, элементы топологии  $\Omega_B$  получаются как  $U \cap B$  с  $U \in \Omega$ , а элементы топологии  $(\Omega_A)_B$  получаются как  $V \cap B$  с  $V \in \Omega_A$ , но  $V$ , в свою очередь, как элемент топологии  $\Omega_A$ , представляется в виде  $U \cap A$ , где  $U \in \Omega$ .

**6.A** Объединение всех открытых множеств, содержащихся в множестве  $A$ , во-первых, открыто (как объединение открытых множеств), а, во-вторых, содержит любое открытое множество, содержащееся в  $A$ , то есть является наибольшим из этих множеств.

**6.B** Пусть точка  $x$  внутренняя, т. е. существует открытое множество  $U_x$  с  $x \in U_x \subset A$ . Тогда  $U_x \subset \text{Int } A$  (поскольку  $\text{Int } A$  – наибольшее из всех открытых множеств, содержащихся в  $A$ ) а, значит, и  $x \in \text{Int } A$ . Обратно, если  $x \in \text{Int } A$ , то само множество  $\text{Int } A$  и есть содержащаяся в  $A$  окрестность точки  $x$ .

**6.C**  $\Rightarrow$  Если  $U$  – открытое множество, то оно и является наибольшим среди всех своих открытых подмножеств.  $\Leftarrow$  Если множество совпадает со своей внутренностью, то оно открыто, поскольку внутренность любого множества открыта.

**6.D**

- (1) Множество  $[0; 1)$  не открыто на прямой, а  $(0; 1)$  открыто, поэтому  $\text{Int}[0; 1) = (0; 1)$ .
- (2) Поскольку в любом интервале имеются иррациональные точки, то не существует ни одного открытого в обычной топологии множества, лежащего в  $\mathbb{Q}$ . Значит,  $\text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$ .

- (3) Поскольку в любом интервале содержатся рациональные точки, то не существует ни одного открытого в обычной топологии множества, лежащего в  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Значит,  $\text{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ .

**6.E** Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество  $A$ , во-первых, замкнуто (как пересечение замкнутых множеств), а, во-вторых, содержится в любом замкнутом множестве, содержащем  $A$ , то есть является наименьшим из этих множеств. Ср. доказательство теоремы 6.A. Вообще, свойства замыканий можно получить из свойств внутренностей заменой объединений на пересечения, и наоборот.

**6.F** Если  $x \notin \text{Cl } A$ , то найдется замкнутое множество  $F$ , такое, что  $F \supset A$  и  $x \notin F$ , значит  $x \in U = X \setminus F$ , таким образом,  $x$  не есть точка прикосновения множества  $A$ . Докажите обратное утверждение самостоятельно, ср. 6.H.

**6.G** Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.C.

**6.H** Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество  $A$ , совпадает с дополнением объединения всех открытых множеств, содержащихся в множестве  $A$ .

**6.I** (а) Полуоткрытый промежуток  $[0; 1)$  не замкнут, а отрезок  $[0; 1]$  замкнут; (б-с) внешность каждого из множеств  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  пуста, поскольку во всяком интервале есть, как рациональные, так и иррациональные точки.

**6.J**  $\Rightarrow$  Если  $b \in \text{Cl } A$ , то  $b$  – точка прикосновения к  $A$ , следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \cap D_\varepsilon(b)$ , значит,  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \rho(a, b) < \varepsilon$ , таким образом,  $\rho(b, A) = 0$ .  $\Leftarrow$  Простое упражнение.

**6.K** Если  $x \in \text{Fr } A$ , то  $x \in \text{Cl } A$  и  $x \notin \text{Int } A$ , значит, во-первых, всякая окрестность точки  $x$  пересекается с  $A$ , во-вторых, никакая окрестность этой точки не содержится в  $A$ , следовательно, всякая окрестность пересекается с дополнением множества  $A$ . Таким образом, точка  $x$  – граничная. Докажите обратное утверждение самостоятельно.

**6.L** Так как  $\text{Int } A \subset A$ , то  $\text{Cl } A = A$ , тогда  $\text{Fr } A \subset A$ .

**6.M**  $\Rightarrow$  Всякое непустое открытое множество является окрестностью любой своей точки. Так как эта точка должна принадлежать замыканию всюду плотного множества  $A$ , то ее окрестность пересекается с  $A$ .  $\Leftarrow$  Множество, пересекающееся со всяким непустым открытым множеством, содержится в единственном замкнутом множестве – всем пространстве, которое и будет его замыканием.

**6.N** См. 6.17.

**6.О** Сформулированное условие означает, что в любой окрестности любой точки найдется внешняя точка множества  $A$ , таким образом внешность  $A$  всюду плотна.

**6.Q** Воспользуйтесь тем, что всякая точка множества  $\text{Cl } A \setminus A$  является предельной.

**7.F** Требуется проверить, что отношение “ $a \prec b$ , либо  $a = b$ ” удовлетворяет трём условиям из определения нестрогого порядка, причём проверка должна опираться исключительно на то, что  $\prec$  удовлетворяет условиям из определения строгого порядка. Проверим транзитивность. Пусть  $a \preceq b$  и  $b \preceq c$ . Это означает, что либо  $a \prec b$  и  $b \prec c$ , либо  $a = b$  и  $b \prec c$ , либо  $a \prec b$  и  $b = c$ , либо  $a = b$  и  $b = c$ . В первом случае  $a \prec c$ , в силу транзитивности отношения  $\prec$ , и значит  $a \preceq c$ ; во втором случае  $a = b \prec c$ , так что  $a \prec c$  и  $a \preceq c$ ; в третьем случае  $a \prec b = c$ , и значит  $a \prec c$  и  $a \preceq c$ ; наконец, в четвертом случае  $a = b = c$ , так что  $a = c$  и  $a \preceq c$ . Аналогично проверяются два других свойства.

**7.I** Первое утверждение следует из транзитивности порядка. В самом деле, рассмотрим произвольный элемент  $c \in C_X^+(b)$ . По определению конуса,  $b \preceq c$ , а условие  $b \in C_X^+(a)$  означает, что  $a \preceq b$ . В силу транзитивности, отсюда следует, что  $a \preceq c$ , то есть  $c \in C_X^+(a)$ . Тем самым, мы показали, что каждый элемент конуса  $C_X^+(b)$  принадлежит и  $C_X^+(a)$ , так что  $C_X^+(b) \subset C_X^+(a)$ , что и требовалось показать.

Второе утверждение следует из определения конуса и рефлексивности порядка. Действительно, по определению,  $C_X^+(a)$  состоит из таких  $b$ , что  $a \preceq b$ , а в силу рефлексивности порядка  $a \preceq a$ .

Третье утверждение вытекает аналогичным образом из антисимметричности: равенство  $C_X^+(a) = C_X^+(b)$  вместе со вторым утверждением влечёт  $a \preceq b$  и  $b \preceq a$ , а отсюда и из антисимметричности следует, что  $a = b$ .

**7.J** Согласно утверждению предыдущей теоремы 7.I, конуса в частично упорядоченном множестве обладают свойствами, входящими в условие рассматриваемой теоремы. В доказательстве теоремы 7.I мы показали, что эти свойства вытекают из соответствующих условий определения нестрогого порядка. В действительности, они эквивалентны этим условиям. Переставьте слова в доказательстве теоремы 7.I так, чтобы получилось доказательство теоремы 7.J.

**7.O** Согласно теореме 3.B, достаточно показать, что пересечение двух правых лучей представляется в виде объединения правых лучей. Рассмотрим пересечение лучей  $\{x \in X \mid a \prec x\}$  и  $\{x \in X \mid b \prec x\}$ . Порядок линеен, поэтому либо  $a \prec b$ , либо  $b \prec a$ . Пусть  $a \prec b$ . Тогда  $\{x \in X \mid a \prec x\} \cap \{x \in X \mid b \prec x\} = \{x \in X \mid b \prec x\}$ .

**7.R** Согласно теореме 3.C, достаточно показать, что любой элемент пересечения двух конусов вида  $C_X^+(a)$  содержится в этом пересечении вместе с целым конусом того же вида. Пусть  $c \in C_X^+(a) \cap C_X^+(b)$  и  $d \in C_X^+(c)$ . Тогда  $a \preceq c \preceq d$  и  $b \preceq c \preceq d$ , так что  $a \preceq d$  и  $b \preceq d$ . Следовательно,  $d \in C_X^+(a) \cap C_X^+(b)$ . Значит,  $C_X^+(c) \subset C_X^+(a) \cap C_X^+(b)$ .

**7.T** Эквивалентность второго и третьего свойств доказывается посредством формул де Моргана, ср. 2.F. Докажем, что из первого свойства следует второе. Рассмотрим пересечение произвольной совокупности открытых множеств. Для любой его точки каждое из пересекаемых множеств является окрестностью. Поэтому ее наименьшая окрестность содержится в каждом из пересекаемых множеств, а значит и в пересечении. Итак, любая точка пересечения входит в него вместе с целой окрестностью. Все пересечение является объединением этих окрестностей. Поэтому оно открыто.

Теперь докажем, что если пересечение любой совокупности открытых множеств открыто, то любая точка обладает наименьшей окрестностью. Откуда взять, как построить такую окрестность? Возьмем все окрестности одной точки, и рассмотрим их пересечение. В силу предположения это пересечение открыто. Оно содержит эту точку, так что перед нами – ее окрестность. Эта окрестность, как пересечение всех окрестностей, содержится в каждой окрестности, то есть является наименьшей окрестностью.

**7.V** Минимальная база этой топологии состоит из одноточечных вида  $\{2k - 1\}$  с  $k \in \mathbb{Z}$  и трехточечных множеств вида  $\{2k - 1, 2k, 2k + 1\}$ , где снова  $k \in \mathbb{Z}$ .





# Непрерывность

## 8. Теоретико-множественное отступление: отображения

### 8'1. Отображения и их основные типы

*Отображением* множества  $X$  в множество  $Y$  называется тройка, составленная из  $X, Y$  и правила, ставящего в соответствие каждому элементу множества  $X$  некоторый элемент множества  $Y$ .<sup>1</sup>

Чтобы подчеркнуть то, что отображение  $f$  есть отображение множества  $X$  в множество  $Y$ , употребляют обозначения  $f : X \rightarrow Y$  или  $X \xrightarrow{f} Y$ . Элемент  $b$  множества  $Y$ , отвечающий при отображении  $f$  элементу  $a$  множества  $X$ , обозначается  $f(a)$  и называется *образом* элемента  $a$  при отображении  $f$  (пишут  $b = f(a)$  или  $a \xrightarrow{f} b$  или  $f : a \mapsto b$ ).

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *сюръективным*, или *сюръекцией* (или *отображением на*), если каждый элемент множества  $Y$  является образом хотя бы одного элемента множества  $X$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$

<sup>1</sup>Конечно же, правило (как и всё в теории множеств) можно представлять себе как множество. А именно, оно может быть задано множеством упорядоченных пар  $(x, y)$ , где  $x \in X, y \in Y$ , таких что наше правило ставит элемент  $y$  в соответствие элементу  $x$ . Это множество пар называется *графиком* отображения. График является подмножеством множества  $X \times Y$  всех упорядоченных пар  $(x, y)$ .

называется *инъективным* или *взаимно однозначным*, если каждый элемент множества  $Y$  является образом не более чем одного элемента множества  $X$ . Отображение называется *биективным* или *биекцией*, если оно сюръективно и инъективно.

## 8'2. Образы и прообразы

*Образом* множества  $A \subset X$  при отображении  $f : X \rightarrow Y$  называется множество  $f(A)$ , составленное из образов элементов множества  $A$ , т. е.  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ . Образ всего отображаемого множества  $X$ , т. е.  $f(X)$ , называется *образом отображения*  $f$ .

*Прообразом* множества  $B \subset Y$  при отображении  $f : X \rightarrow Y$  называется множество  $f^{-1}(B)$  тех элементов множества  $X$ , образы которых принадлежат  $B$ , т. е.  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ .

Предостерегаем читателя от невнимательного обращения с терминами образ и прообраз. Далеко не всегда образ прообраза множества  $B$  совпадает с  $B$ , а если это и так, то прообраз может быть не единственным множеством, обладающим этим свойством, так что прообраз нельзя определять как множество, образом которого служит данное множество.

**8.A.** Множество  $B$  содержится в образе отображения  $f$ , тогда

$$f(f^{-1}(B)) = B.$$

**8.B.** Для произвольных  $f : X \rightarrow Y$  и  $B \subset Y$  имеет место включение  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

**8.C.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  и  $B \subset Y$  таковы, что  $f(f^{-1}(B)) = B$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1)  $f^{-1}(B)$  является единственным подмножеством множества  $X$ , образ которого равен  $B$ ;
- (2) для любых  $a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$  из равенства  $f(a_1) = f(a_2)$  следует равенство  $a_1 = a_2$ .

**8.D.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  инъективно, тогда для любого  $B \subset Y$  с  $f(f^{-1}(B)) = B$  прообраз  $f^{-1}(B)$  является единственным подмножеством множества  $X$ , образ которого равен  $B$ .

**8.E.**  $f^{-1}(f(A)) \supset A$  для произвольных  $f : X \rightarrow Y$  и  $A \subset X$ .

**8.F.**  $f^{-1}(f(A)) = A$ , тогда  $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$ .

**8.1.** Правда ли, что для любых множеств  $A, B \subset Y$  и любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  справедливы равенства

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad (10)$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \quad (11)$$

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)? \quad (12)$$

**8.2.** Правда ли, что для любых множеств  $A, B \subset X$  и любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  справедливы равенства

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad (13)$$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B), \quad (14)$$

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)? \quad (15)$$

**8.3.** Приведите примеры, в которых два из равенств предыдущей задачи не выполняются.

**8.4.** Можно ли заменить неверные равенства задачи 8.2 верными включениями?

**8.5.** Какое простое условие нужно наложить на  $f : X \rightarrow Y$ , чтобы для любых множеств  $A, B \subset X$  были справедливы все равенства задачи 8.2?

**8.6.** Докажите, что для любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  и любых множеств  $A \subset X$  и  $B \subset Y$  справедливо равенство  $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$ .

### 8'3. Тожественные отображения и включения

*Тожественным отображением* множества  $X$  называется отображение  $X \rightarrow X : x \mapsto x$ . Обозначается оно символом  $\text{id}_X$  или, если из контекста ясно, каково  $X$ , просто символом  $\text{id}$ .

Если  $A$  – подмножество множества  $X$ , то отображение  $A \rightarrow X : x \mapsto x$ , называется *включением*  $A$  в  $X$  и обозначается через  $\text{in}_A : A \rightarrow X$ , а если  $A$  и  $X$  не вызывают сомнения, то просто через  $\text{in}$ .

**8.G.** Прообразом множества  $B$  при включении  $\text{in} : A \rightarrow X$  является множество  $B \cap A$ .

### 8'4. Композиции

*Композицией* отображений  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow Z$  называется отображение  $X \rightarrow Z : x \mapsto g(f(x))$ . Композицию  $f$  и  $g$  обозначают через  $g \circ f$ .

**8.H** Ассоциативность. Для любых отображений  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  и  $h : Z \rightarrow U$  справедливо равенство  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**8.I.** Для любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  справедливо равенство  $f \circ (\text{id}_X) = f = (\text{id}_Y) \circ f$ .

**8.J.** Композиция инъекций есть инъекция.

**8.К.** Если композиция  $g \circ f$  инъективна, то отображение  $f$  инъективно.

**8.Л.** Композиция сюръекций есть сюръекция.

**8.М.** Если композиция  $g \circ f$  сюръективна, то отображение  $g$  сюръективно.

**8.Н.** Композиция биекций есть биекция.

**8.7.** Если композиция  $g \circ f$  биективна, то обязательно ли одно из отображений  $f$  и  $g$  биективно?

### 8'5. Обратные и обратимые

Отображение  $g : Y \rightarrow X$  называется *обратным* отображению  $f : X \rightarrow Y$ , если  $g \circ f = \text{id}_X$  и  $f \circ g = \text{id}_Y$ . Отображение, для которого существует обратное, называется *обратимым*.

**8.О.** Отображение обратимо, тогда оно – биекция.

**8.Р.** Если обратное отображение существует, то оно единственно.

### 8'6. Сужения и подотображения

Если  $A$  – подмножество множества  $X$ , а  $B$  – подмножество множества  $Y$ , то всякому отображению  $f : X \rightarrow Y$ , такому, что  $f(A) \subset B$ , отвечает отображение  $\text{ab}(f) : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ , которое называется *сокращением* отображения  $f$  на  $A, B$  или *подотображением* отображения  $f$ . Если  $B = Y$ , то  $\text{ab}(f) : A \rightarrow Y$  обозначают символом  $f|_A$  и называют *сужением* отображения  $f$  на  $A$ . Если  $B \neq Y$ , то  $\text{ab}(f) : A \rightarrow B$  обозначают символом  $f|_{A,B}$  или даже просто  $f|$ .

**8.Q.** Сужение отображения  $f : X \rightarrow Y$  на  $A \subset X$  есть композиция включения  $\text{in}_A : A \rightarrow X$  и  $f$ . Короче,  $f|_A = f \circ \text{in}_A$ .

**8.Р.** Любое сокращение (в частности, и любое сужение) инъекции есть инъекция.

**8.С.** Если сужение отображения есть сюръекция, то и исходное отображение сюръективно.

## 9. Непрерывные отображения

### 9'1. Определение и основные свойства непрерывных отображений

Пусть  $X, Y$  – топологические пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется **непрерывным**, если прообраз любого открытого подмножества пространства  $Y$  является открытым подмножеством пространства  $X$ .

**9.A.** Отображение непрерывно, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

**9.B.** Тожественное отображение любого топологического пространства непрерывно.

**9.1.** Пусть  $\Omega_1, \Omega_2$  – топологические структуры в множестве  $X$ . Отображение  $\text{id} : (X, \Omega_1) \rightarrow (X, \Omega_2)$  непрерывно, когда  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ .

**9.2.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение. Останется ли оно непрерывным, если:

- (а) утончить топологию в  $X$ ; (b) огрубить топологию в  $X$ ;
- (с) утончить топологию в  $Y$ ; (d) огрубить топологию в  $Y$ ?

**9.3.** Пусть  $X$  – дискретное топологическое пространство, а  $Y$  – произвольное.  
1) Какие отображения  $X \rightarrow Y$  являются непрерывными? 2) А отображения  $Y \rightarrow X$ ?

**9.4.** Пусть  $X$  – пространство с тривиальной топологической структурой, а  $Y$  – произвольное топологическое пространство. 1) Какие отображения  $X \rightarrow Y$  являются непрерывными? 2) А отображения  $Y \rightarrow X$ ?

**9.C.** Пусть  $A$  – подпространство пространства  $X$ . Тогда отображение  $\text{in} : A \rightarrow X$  непрерывно.

**9.D.** Топология  $\Omega_A$ , индуцированная на  $A \subset X$  топологией пространства  $X$ , есть самая грубая из тех топологий в  $A$ , относительно которых отображение  $\text{in} : A \rightarrow X$  непрерывно.

**9.5. Загадка.** Утверждение задачи 9.D имеет естественное обобщение со случая включения  $\text{in}$  на случай произвольного отображения  $f : A \rightarrow X$  произвольного множества  $A$ . Найдите это обобщение.

**9.E.** Композиция непрерывных отображений непрерывна.

**9.F.** Подотображение непрерывного отображения непрерывно.

**9.G.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, когда непрерывно его подотображение  $\text{ab}(f) : X \rightarrow f(X)$ .

**9.H.** Всякое постоянное отображение (т. е. отображение, образ которого состоит из одной точки) непрерывно.

### 9'2. Переформулировки основного определения

**9.6.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, тогда  $\text{Cl } f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A)$  для любого  $A \subset Y$ .

**9.7.** Сформулируйте и докажите аналогичный критерий с участием  $\text{Int}(f^{-1}(A))$  и  $f^{-1}(\text{Int } A)$ . То же самое для  $\text{Cl } f(A)$  и  $f(\text{Cl } A)$ .

**9.8.** Пусть  $\Sigma$  – база топологии пространства  $Y$ . Докажите, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, тогда  $f^{-1}(U)$  – открытое множество для каждого  $U \in \Sigma$ .

### 9'3. Дальнейшие примеры

**9.9.** Непрерывно ли (в топологии, индуцированной топологией прямой) отображение

$$f : [0; 2] \rightarrow [0; 2] : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 3 - x, & \text{если } x \in [1; 2]? \end{cases}$$

**9.10.** Непрерывно ли отображение  $f$  отрезка  $[0; 2]$  (с топологией, индуцированной топологией прямой) в стрелку (см. 2), определяемое формулой

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ x + 1, & \text{если } x \in (1; 2]? \end{cases}$$

**9.11.** Дайте прямое описание непрерывных отображений пространства  $\mathbb{R}_{T_1}$  (см. 2) в  $\mathbb{R}$ .

**9.12.** Какие отображения  $\mathbb{R}_{T_1} \rightarrow \mathbb{R}_{T_1}$  непрерывны?

**9.13.** Дайте прямое описание непрерывных отображений стрелки в стрелку.

**9.14.** Пусть отображение  $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

и пусть  $g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow f(\mathbb{Z}_+)$  – его подотображение. Снабдим  $\mathbb{Z}_+$  и  $f(\mathbb{Z}_+)$  топологией, индуцированной топологией прямой. Непрерывны ли отображения  $g$  и  $g^{-1}$ ?

### 9'4. Поведение плотных множеств при непрерывных отображениях

**9.15.** Докажите, что образ всюду плотного множества при сюръективном непрерывном отображении всюду плотен.

**9.16.** Верно ли, что образ нигде не плотного множества при любом непрерывном отображении нигде не плотен?

**9.17\*.** Существует ли в отрезке  $[0; 1]$  (с топологией, индуцированной топологией прямой) нигде не плотное подмножество  $A$ , допускающее такое непрерывное отображение  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , что  $f(A) = [0; 1]$ ?

### 9'5. Локальная непрерывность

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *непрерывным в точке*  $a \in X$ , если для любой окрестности  $U$  точки  $f(a)$  существует такая окрестность  $V$  точки  $a$ , что  $f(V) \subset U$ .

**9.1.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, когда оно непрерывно в каждой точке пространства  $X$ .

**9.1.** Пусть  $X, Y$  – метрические пространства,  $a \in X$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $a$ , когда для любого шара с центром в точке  $f(a)$  существует шар с центром в точке  $a$ , образ которого содержится в первом шаре.

**9.К.** Пусть  $X, Y$  – метрические пространства,  $a \in X$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $a$ , когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любой точки  $x \in X$  с  $\rho(x, a) < \delta$  имеет место неравенство  $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

Теорема 9.К гарантирует, что в тех случаях, когда применимо определение непрерывности из курса математического анализа, оно равносильно определению, которое формулируется в терминах топологических структур.

### 9'6. Свойства непрерывных функций

**9.18.** Пусть  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывные отображения. Докажите, что следующие формулы определяют непрерывные отображения  $X \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$x \mapsto f(x) + g(x), \quad (16)$$

$$x \mapsto f(x)g(x), \quad (17)$$

$$x \mapsto f(x) - g(x), \quad (18)$$

$$x \mapsto |f(x)|, \quad (19)$$

$$x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}, \quad (20)$$

$$x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}. \quad (21)$$

**9.19.** Докажите, что если отображения  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны и  $0 \notin g(X)$ , то непрерывно и отображение  $X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**9.20.** Постройте такую последовательность непрерывных функций  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , чтобы формула

$$f(x) = \sup\{f_i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

определяла функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которая не была бы непрерывной.

**9.21.** Пусть  $X$  – произвольное топологическое пространство. Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$  непрерывна, когда каждая из функций  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , непрерывна.



Пространство  $Mat(p \times q, \mathbb{R})$  матриц размера  $p \times q$  с вещественными коэффициентами отличается от  $\mathbb{R}^{pq}$  лишь двойной нумерацией естественных координат в нем.

**9.22.** Докажите, что если отображения  $f : X \rightarrow Mat(p \times q, \mathbb{R})$  и  $g : X \rightarrow Mat(q \times r, \mathbb{R})$  непрерывны, то и отображение

$$X \rightarrow Mat(p \times r, \mathbb{R}) : x \mapsto g(x)f(x)$$

непрерывно.

Напомним, что  $GL(n; \mathbb{R})$  – подпространство пространства  $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ , состоящее из всех обратимых матриц.

**9.23.** Докажите, что если отображение  $f : X \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$  непрерывно, то и отображение  $X \rightarrow GL(n; \mathbb{R}) : x \mapsto (f(x))^{-1}$  непрерывно.

## 9'7. Непрерывность расстояний

**9.L.** Для любого подмножества  $A$  метрического пространства  $X$  функция  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой  $x \mapsto \rho(x, A)$  (см. 4), непрерывна.

**9.24.** Топология метрического пространства есть самая грубая топология, относительно которой для любого  $A \subset X$  функция  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая формулой  $x \mapsto \rho(x, A)$ , непрерывна.

## 9'8. Изометрии

Пусть  $(X, \rho_X)$  и  $(Y, \rho_Y)$  – метрические пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *изометрическим вложением*, если  $\rho_Y(f(a), f(b)) = \rho_X(a, b)$  для любых  $a, b \in X$ . Биекция, являющаяся изометрическим вложением, называется *изометрией*.

**9.M.** Всякое изометрическое вложение инъективно.

**9.N.** Всякое изометрическое вложение непрерывно.

## 9'9. Сжимающие отображения

Отображение  $f : X \rightarrow X$  метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если существует такое число  $\alpha \in (0; 1)$ , что  $\rho(f(a), f(b)) \leq \alpha \rho(a, b)$  для любых  $a, b \in X$ .

**9.25.** Докажите, что всякое сжимающее отображение непрерывно.

Пусть  $X$  и  $Y$  – метрические пространства. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *гёльдеровым*, если найдутся такие числа  $C > 0$  и  $\alpha > 0$ , что  $\rho(f(a), f(b)) \leq C \rho(a, b)^\alpha$  для любых  $a, b \in X$ .

**9.26.** Докажите, что всякое гёльдерово отображение непрерывно.

### 9'10. Множества, задаваемые уравнениями и неравенствами

**9.О.** Пусть  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , – непрерывные отображения. Тогда подмножество пространства  $X$ , состоящее из всех решений системы уравнений  $f_1(x) = 0, \dots, f_n(x) = 0$ , является замкнутым.

**9.Р.** Пусть  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , – непрерывные отображения. Тогда подмножество пространства  $X$ , состоящее из всех решений системы неравенств  $f_1(x) \geq 0, \dots, f_n(x) \geq 0$ , является замкнутым, а подмножество, состоящее из всех решений системы неравенств  $f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$ , – открытым.

**9.27.** Где в 9.О и 9.Р конечную систему можно заменить бесконечной?

**9.28.** Докажите, что в пространстве  $\mathbb{R}^n$  с  $n \geq 1$  всякое собственное алгебраическое подмножество (т. е. собственное подмножество, задаваемое полиномиальными уравнениями) нигде не плотно.

### 9'11. Теоретико-множественное отступление: покрытия

Множество  $\Gamma$  подмножеств множества  $X$  называется его **покрытием**, если  $X$  есть объединение множеств из  $\Gamma$ , т. е. если  $X = \bigcup_{A \in \Gamma} A$ . В этом случае говорят также, что множества, входящие в  $\Gamma$ , **покрывают**  $X$ .

Имеется и другое, более широкое понимание этих терминов: множество  $\Gamma$  подмножеств множества  $Y$  называется **покрытием** множества  $X \subset Y$ , если  $X$  содержится в объединении множеств из  $\Gamma$ , т. е. если  $X \subset \bigcup_{A \in \Gamma} A$ . Говорят также, что множества из  $\Gamma$  **покрывают**  $X$ .

### 9'12. Фундаментальные покрытия

Рассмотрим покрытие  $\Gamma$  топологического пространства  $X$ . Каждый элемент покрытия  $\Gamma$  наследует из  $X$  топологическую структуру. В каком случае топологию в  $X$  можно восстановить по этим структурам? В частности, при каких условиях на  $\Gamma$  непрерывность отображения  $f : X \rightarrow Y$  обеспечивается непрерывностью его сужений на все элементы покрытия  $\Gamma$ ? Чтобы получить ответы на эти естественные вопросы, решите задачи 9.29–9. V.

**9.29.** Верно ли, что если сужение отображения  $f : X \rightarrow Y$  на всякий элемент следующего покрытия  $\Gamma$  непрерывно, то и само отображение  $f$  непрерывно:

- (а)  $X = [0; 2]$ ,  $\Gamma = \{[0; 1], (1; 2]\}$ ; (б)  $X = [0; 2]$ ,  $\Gamma = \{[0; 1], [1; 2]\}$ ;  
 (с)  $X = \mathbb{R}$ ,  $\Gamma = \{\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ ; (д)  $X = \mathbb{R}$ ,  $\Gamma$  – множество одноточечных подмножеств?

Покрытие  $\Gamma$  пространства  $X$  называется **фундаментальным**, если множество  $U \subset X$  открыто, тогда его пересечения с каждым множеством  $A \in \Gamma$  открыты в подпространстве  $A$ .

**9.Q.** Покрытие  $\Gamma$  пространства  $X$  фундаментально, тогда для открытости множества  $F \subset X$  достаточно, чтобы его пересечение с каждым множеством  $A \in \Gamma$  было открыто в  $A$ .

**9.R.** Покрытие  $\Gamma$  пространства  $X$  фундаментально, тогда для замкнутости множества  $F \subset X$  достаточно, чтобы его пересечение с каждым множеством  $A \in \Gamma$  было замкнутым в  $A$ .

**9.30.** Покрытие топологического пространства одноточечными множествами фундаментально, тогда пространство дискретно.

Покрытие топологического пространства называется *открытым*, если оно состоит из открытых множеств, и *замкнутым* – если из замкнутых. Покрытие топологического пространства называется *локально конечным*, если каждая точка пространства обладает окрестностью, пересекающей лишь с конечным числом элементов покрытия.

**9.S.** Всякое открытое покрытие фундаментально.

**9.T.** Всякое конечное замкнутое покрытие фундаментально.

**9.U.** Всякое локальное конечное замкнутое покрытие фундаментально.

**9.V.** Пусть  $\Gamma$  – фундаментальное покрытие пространства  $X$ . Если сужение отображения  $f : X \rightarrow Y$  на всякий элемент покрытия  $\Gamma$  непрерывно, то и само отображение  $f$  непрерывно.

Говорят, что покрытие  $\Gamma'$  *вписано* в  $\Gamma$ , если для каждого множества из  $\Gamma'$  существует содержащее его множество из  $\Gamma$ .

**9.31.** Если покрытие  $\Gamma'$  вписано в  $\Gamma$  и фундаментально, то и покрытие  $\Gamma$  фундаментально.

**9.32.** Пусть  $\Delta$  – фундаментальное покрытие пространства  $X$ , а  $\Gamma$  – такое покрытие пространства  $X$ , что  $\Gamma_A = \{U \cap A \mid U \in \Gamma\}$  есть фундаментальное покрытие подпространства  $A \subset X$  для всякого  $A \in \Delta$ . Докажите, что тогда покрытие  $\Gamma$  тоже фундаментальное.

**9.33.** Докажите, что фундаментальность покрытия представляет собой локальное свойство, т. е. что если каждая точка пространства  $X$  обладает такой окрестностью  $U$ , для которой покрытие  $\Gamma_U = \{U \cap V \mid V \in \Gamma\}$  фундаментально, то и исходное покрытие фундаментально.

## 9'13х. Монотонные отображения

Пусть  $(X, <)$  и  $(Y, <)$  – частично упорядоченные множества. Говорят, что отображение  $f : X \rightarrow Y$

- *монотонно возрастает* или просто *монотонно*, если  $f(a) \preceq f(b)$  для любых  $a, b \in X$  с  $a \preceq b$ ;
- *монотонно убывает* или *антимонотонно*, если  $f(b) \preceq f(a)$  для любых  $a, b \in X$  с  $a \preceq b$ ;

- *строго монотонно возрастает* или просто *строго монотонно*, если  $f(a) \prec f(b)$  для любых  $a, b \in X$  с  $a \prec b$ ;
- *строго монотонно убывает* или *строго антимонотонно*, если  $f(b) \prec f(a)$  для любых  $a, b \in X$  с  $a \prec b$ .

**9.Ах.** Пусть  $X$  и  $Y$  – линейно упорядоченные множества. Относительно интервальных топологий в  $X$  и  $Y$  любое сюръективное строго монотонное или строго антимонотонное отображение  $X \rightarrow Y$  непрерывно.

**9.1х.** Покажите, что условие сюръективности в 9.Ах является существенным.

**9.2х.** Покажите, что условие строгой монотонности в 9.Ах является существенным.

**9.3х.** В условиях теоремы 9.Ах непрерывно ли отображение  $f$  относительно топологии правых (или левых) лучей?

**9.Вх.** Отображение одного частично упорядоченного множества в другое монотонно, тогда оно непрерывно относительно топологий порядка.

## 9'14х. Расстояние Громова-Хаусдорфа

**9.Сх.** Для любых метрических пространств  $X$  и  $Y$  существует метрическое пространство  $Z$ , в которое и  $X$  и  $Y$  вкладываются изометрически.

Изометрически вложив два метрических пространства в одно, мы можем рассмотреть расстояние Хаусдорфа между их образами, см. 4'15х. *Расстоянием Громова-Хаусдорфа* между метрическими пространствами  $X$  и  $Y$  называется точная нижняя граница расстояний Хаусдорфа для всевозможных пар изометрических вложений этих пространств во всевозможные метрические пространства.

**9.Дх.** Бывают ли такие метрические пространства, между которыми расстояние Громова-Хаусдорфа равно бесконечности?

**9.Ех.** Докажите, что расстояние Громова-Хаусдорфа симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника.

**9.Фх. Загадка.** В каком смысле расстояние Громова-Хаусдорфа может удовлетворять первой аксиоме расстояния?

## 9'15х. Функции на канторовом множестве и кривые Пеано

Напомним, что канторово множество  $K$  можно определить как множество  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \text{ где } a_k = 0 \text{ или } 2\}$ .

**9.Gx.** Докажите, что отображение

$$\gamma_1 : K \rightarrow I : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}.$$

является непрерывной сюръекцией. Нарисуйте его график.

**9.Hx.** Докажите, что отображение

$$K \rightarrow K : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{3^k}$$

непрерывно.

Обозначим через  $K^2$  множества  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in K, y \in K\}$ .

**9.Ix.** Докажите, что отображение

$$\gamma_2 : K \rightarrow K^2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{3^k} \right)$$

является непрерывной сюръекцией.

**9.Jx.** Докажите, что отображение  $\gamma_3 : K \rightarrow I^2$ , являющееся композицией отображения  $\gamma_2 : K \rightarrow K^2$  и отображения

$$K^2 \rightarrow I^2 : (x, y) \mapsto (\gamma_1(x), \gamma_1(y)),$$

является непрерывной сюръекцией.

**9.Kx.** Докажите, что отображение  $\gamma_3 : K \rightarrow I^2$  является сужением некоторого непрерывного отображения  $I \rightarrow I^2$ . (Ср. 2.Bx.2.)

Отображение, существование которого утверждается в последней задаче, является непрерывной сюръекцией  $I \rightarrow I^2$ , таким образом, кривая может целиком заполнить квадрат. Кривые, обладающие этим свойством, были впервые построены Д. Пеано в 1890 г. С тех пор было найдено множество примеров таких кривых, называемых **кривыми Пеано**. набросок конструкции, предложенной Д. Гильбертом, намечен ниже в задачах 9.Lx–9.Ox.

**9.Lx.** Докажите, что существует такая последовательность непрерывных кусочно линейных отображений  $f_k : I \rightarrow I^2$ , что:

- (1)  $f_k(I)$  содержит центры всех  $4^k$  квадратов, получающихся при разбиении каждой стороны на  $2^k$  равных отрезков;
- (2)  $\text{dist}(f_k(x), f_{k-1}(x)) \leq \sqrt{2}/2^{k+1}$  для любого  $x \in I$  (здесь  $\text{dist}$  – стандартная евклидова метрика в  $\mathbb{R}^2$ ).

**9.Мх.** Докажите, что всякая последовательность функций, которая удовлетворяет требованиям задачи 9.Лх, сходится к функции  $f : I \rightarrow I^2$  (т. е.  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$  для любой точки  $x \in I$ ), эта функция непрерывна и её образ всюду плотен в квадрате  $I^2$ .

**9.Нх.** Докажите, что всякое непрерывное отображение  $f : I \rightarrow I^2$  со всюду плотным образом сюръективно.<sup>2</sup>

**9.Ох.** Обобщите 9.Лх– 9.Кх и 9.Лх– 9.Нх: докажите существование непрерывных сюръекций  $I \rightarrow I^n$  с  $n \geq 3$ .

---

<sup>2</sup>Для решения этой задачи мы рекомендуем привлечь средства извне: либо хорошо известные теоремы анализа, либо результаты, которые будут получены в 16. Ср. задачи 16.О, 16.Т и 16.К.

## 10. Гомеоморфизмы

### 10'1. Определение и основные свойства гомеоморфизмов

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *гомеоморфизмом*, если оно обратимо, непрерывно, и к тому же обратное к нему отображение также является непрерывным.

**10.A.** Постройте непрерывную биекцию, не являющуюся гомеоморфизмом.

**10.B.** Постройте непрерывную биекцию  $[0; 1) \rightarrow S^1$ , не являющуюся гомеоморфизмом.

**10.C.** Тожественное отображение (любого топологического пространства) есть гомеоморфизм.

**10.D.** Композиция гомеоморфизмов есть гомеоморфизм.

**10.E.** Отображение, обратное гомеоморфизму, есть гомеоморфизм.

### 10'2. Гомеоморфные пространства

Говорят, что пространство  $X$  *гомеоморфно* пространству  $Y$ , если существует гомеоморфизм  $X \rightarrow Y$ .

**10.F.** Гомеоморфность является отношением эквивалентности.

**10.1. Загадка.** Как теорема 10.F связана с 10.C–10.E?

### 10'3. Роль гомеоморфизмов

**10.G.** Если  $f: X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм, то множество  $U \subset X$  открыто (в  $X$ ), тогда  $f(U)$  открыто (в  $Y$ ).

**10.H.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  есть гомеоморфизм, тогда оно является биекцией, которая определяет биекцию между топологическими структурами пространств  $X$  и  $Y$ .

**10.I.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм. Тогда для любого  $A \subset X$ :

- (1)  $A$  замкнуто в  $X$ , тогда  $f(A)$  замкнуто в  $Y$ ;
- (2)  $f(\text{Cl } A) = \text{Cl } f(A)$ ;
- (3)  $f(\text{Int } A) = \text{Int } f(A)$ ;
- (4)  $f(\text{Fr } A) = \text{Fr } f(A)$ ;
- (5)  $A$  – окрестность точки  $x \in X$ , тогда  $f(A)$  – окрестность точки  $f(x)$ ;

(6) etc.

Таким образом, с топологической точки зрения гомеоморфные пространства устроены совершенно одинаково – гомеоморфизм  $X \rightarrow Y$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми явлениями в  $X$  и  $Y$ , которые выражаются в терминах топологических структур.<sup>3</sup>

#### 10'4. Дальнейшие примеры гомеоморфизмов

**10.J.** Если  $f : X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм, то для любого  $A \subset X$  подотображение  $\text{ab}(f) : A \rightarrow f(A)$  – тоже гомеоморфизм.

**10.K.** Всякая изометрия (см. 9) есть гомеоморфизм.

**10.L.** Всякое невырожденное аффинное преобразование пространства  $\mathbb{R}^n$  есть гомеоморфизм.

**10.M.** Пусть  $X$  и  $Y$  – линейно упорядоченные множества. Относительно интервальных топологий в  $X$  и  $Y$  любое сюръективное строго монотонное или строго антимонотонное отображение  $X \rightarrow Y$  является гомеоморфизмом.

**10.N** Следствие. Всякая сюръективная строго монотонная функция  $f : [a; b] \rightarrow [c; d]$  является гомеоморфизмом.

**10.2.** Докажите, что инверсия

$$x \mapsto \frac{Rx}{|x|^2} : \mathbb{R}^n \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$$

есть гомеоморфизм.

**10.3.** Пусть  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  верхняя полуплоскость. Докажите, что

отображение  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  заданное формулой  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,

является гомеоморфизмом, если  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ .

**10.4.** Докажите, что биекция  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является гомеоморфизмом, когда она – монотонная функция.

**10.5.** 1) Докажите, что всякая биекция антидискретного пространства на себя является гомеоморфизмом. Докажите, что то же самое верно для: 2) дискретного пространства; 3) прямой с топологией Зариского.

---

<sup>3</sup>На первых этапах развития топологии, когда еще не было выделено понятие топологического пространства, а изучались подпространства евклидовых пространств, их непрерывные отображения и гомеоморфизмы, указанное свойство было положено в основу определения топологии. Ф. Клейн в своей знаменитой Эрлангенской программе, в которой он классифицировал различные геометрии, выделившиеся к тому времени (евклидову, аффинную, геометрию подобия, проективную, геометрию Лобачевского и т. п.), определял топологию как часть геометрии, изучающую свойства фигур, которые сохраняются при гомеоморфизмах.



**10.6.** Найдите все гомеоморфизмы пространства  $\mathbb{N}$  (см. 2) на себя.

**10.7.** Докажите, что всякая непрерывная биекция стрелки на себя является гомеоморфизмом.

**10.8.** Постройте два гомеоморфных пространства  $X$  и  $Y$  и непрерывную биекцию  $X \rightarrow Y$ , не являющуюся гомеоморфизмом.

**10.9.** Является ли отображение  $\gamma_2 : K \rightarrow K^2$ , рассмотренное в задаче 9.1х, гомеоморфизмом? Напомним, что  $K$  — канторово множество,  $K^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in K, y \in K\}$  и  $\gamma_2$  определяется формулой

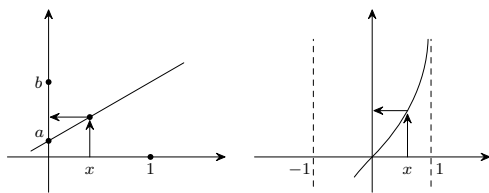
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mapsto \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{3^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{3^k} \right)$$

## 10'5. Примеры гомеоморфных пространств

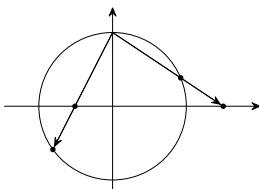
Ниже гомеоморфность обозначается значком  $\cong$ . Это не общепринятое обозначение. В литературе в этом смысле используются практически все символы, близкие к символу  $=$ , но отличные от него, например  $\sim$ ,  $\simeq$ ,  $\approx$ .

**10.О.** Докажите, что

- (1)  $[0; 1] \cong [a; b]$  для любых  $a < b$ ,
- (2)  $[0; 1] \cong [a; b] \cong (0; 1) \cong (a; b)$  для любых  $a < b$ ,
- (3)  $(0; 1) \cong (a; b)$  для любых  $a < b$ ,
- (4)  $(-1; 1) \cong \mathbb{R}$ ,
- (5)  $[0; 1] \cong [0; +\infty)$  и  $(0; 1) \cong (0; +\infty)$ .



**10.Р.** Пусть  $N = (0, 1)$  — Северный полюс на единичной окружности. Тогда  $S^1 \setminus N \cong \mathbb{R}^1$ .



**10.Q.** График непрерывной функции, заданной на некотором промежутке, гомеоморфен этому промежутку.

**10.R.**  $S^n \setminus \text{point} \cong \mathbb{R}^n$ .

**10.10.** Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны. Здесь и далее мы для простоты записи (и чтения) будем использовать немного некорректные обозначения. Именно, при задании подмножеств мы будем опускать первую часть “ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ ” формулы.

- (1) Вся плоскость  $\mathbb{R}^2$ ;
- (2) открытый квадрат  $\text{Int } I^2 = \{x, y \in (0; 1)\}$ ;
- (3) открытая полоса  $\{x \in (0; 1)\}$ ;
- (4) открытая полуплоскость  $\mathcal{H} = \{y > 0\}$ ;
- (5) открытая полуполоса  $\{x > 0, y \in (0; 1)\}$ ;
- (6) открытый круг  $\{x^2 + y^2 < 1\}$ ;
- (7) открытый прямоугольник  $\{a < x < b, c < y < d\}$ ;
- (8) открытый квадрант  $\{x, y > 0\}$ ;
- (9) открытый угол  $\{x > y > 0\}$ ;
- (10)  $\{y^2 + |x| > x\}$  – плоскость с разрезом по лучу  $\{y = 0, x \geq 0\}$ ;
- (11) открытый полукруг  $\{x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ ;
- (12) открытый сектор  $\{x^2 + y^2 < 1, x > y > 0\}$ .

**10.S.** Докажите, что

- (1) замкнутый круг  $D^2$  гомеоморфен квадрату  $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0; 1]\}$ ;
- (2) открытый круг  $\text{Int } D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  гомеоморфен открытому квадрату  $\text{Int } I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in (0; 1)\}$ ;
- (3) окружность  $S^1$  гомеоморфна контуру квадрата  $\partial I^2 = I^2 \setminus \text{Int } I^2$ .

**10.T.** Пусть  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  – плоское выпуклое ограниченное множество, внутренность  $U$  которого непуста. Докажите, что

- (1)  $\Delta$  гомеоморфно замкнутому кругу  $D^2$ ;
- (2)  $U$  гомеоморфно открытому кругу  $B^2$ ;
- (3)  $\text{Fr } \Delta = \text{Fr } U$  гомеоморфно окружности  $S^1$ .

**10.11.** В каком из случаев, рассматриваемых в задаче 10.T, можно отказаться от ограниченности?

**10.12.** Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма замкнутые выпуклые подмножества плоскости. (Составьте полный список без повторений; докажите, что всякое такое подмножество гомеоморфно одному из списка; доказательство попарной негомеоморфности отложите до 11.)

**10.13\*.** Обобщите предыдущие три задачи на случай подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$  с произвольным  $n$ .

Из последних четырех задач можно сделать вывод, что в топологии изломы не существенны, т. е. свойство линии или границы области иметь изломы не сохраняется при гомеоморфизмах. В связи с этим решите ещё две задачи.

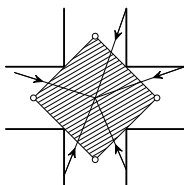
**10.14.** Докажите, что всякая замкнутая несамопересекающаяся ломаная в  $\mathbb{R}^2$  (и в  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 2$ ) гомеоморфна окружности  $S^1$ .

**10.15.** Докажите, что всякая незамкнутая несамопересекающаяся конечно-звенная ломаная в  $\mathbb{R}^2$  (и в  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 2$ ) гомеоморфна отрезку  $[0; 1]$ .

В следующей задаче сформулировано обобщение техники, использованной при решении двух предыдущих задач. Интересно, что она используется чаще, чем это может показаться на первый взгляд.

**10.16.** Пусть  $X$  и  $Y$  – топологические пространства, на которых заданы их некоторые фундаментальные покрытия:  $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$  и  $Y = \bigcup_{\alpha} Y_{\alpha}$ . Рассмотрим отображение  $f : X \rightarrow Y$ , такое что  $f(X_{\alpha}) = Y_{\alpha}$  для каждого  $\alpha$ , причем каждое из подотображений  $\text{ab}(f) : X_{\alpha} \rightarrow Y_{\alpha}$  является гомеоморфизмом. Тогда и отображение  $f$  – гомеоморфизм.

**10.17.** Докажите, что  $\mathbb{R}^2 \setminus \{|x|, |y| > 1\} \cong I^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}$ . (Бесконечный “крест” гомеоморфен квадрату без вершин.)



**10.18\*.** Непустое множество  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  называется “звездой с центром  $c$ ”, если  $\Sigma$  является объединением отрезков и лучей, одним из концов которых является точка  $c$ . Докажите, что если множество  $\Sigma$  открыто, то  $\Sigma \cong B^2$ . (Что можно сказать о замкнутой звезде с непустой границей?)

**10.19.** Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу.

- (1) Полу плоскость  $\{x \geq 0\}$ ;
- (2) квадрант  $\{x, y \geq 0\}$ ;
- (3) угол  $\{x \geq y \geq 0\}$ ;
- (4) полукруглая полоса  $\{y \in [0; 1]\}$ ;
- (5) квадрат без трех сторон  $\{0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$ ;
- (6) квадрат без двух сторон  $\{0 \leq x, y < 1\}$ ;
- (7) квадрат без стороны  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$ ;
- (8) квадрат без вершины  $\{0 \leq x, y \leq 1\} \setminus (1, 1)$ ;
- (9) круг без одной граничной точки  $\{x^2 + y^2 \leq 1, y \neq 1\}$ ;
- (10) полукруг без диаметра  $\{x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$ ;
- (11) круг без радиуса  $\{x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus [0; 1]$ ;
- (12) квадрат без половины диагонали  $\{|x| + |y| \leq 1\} \setminus [0; 1]$ .

**10.20.** Докажите, что следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

- (1) проколота плоскость  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ ;
- (2) проколотый открытый круг  $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ ;
- (3) кольцо  $\{(x, y) \mid a < x^2 + y^2 < b\}$  где  $0 < a < b$ ;
- (4) плоскость без круга  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ;
- (5) плоскость без квадрата  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1]\}$ ;
- (6) плоскость без отрезка  $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]$ ;
- (7)  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ , где  $\Delta$  – замкнутое ограниченное выпуклое множество с непустой внутренней.

**10.21.** Если множество  $X \subset \mathbb{R}^2$  есть объединение нескольких отрезков с общим концом, то дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  гомеоморфно проколотой плоскости.

**10.22.** Если  $X \subset \mathbb{R}^2$  есть простая незамкнутая конечнозвенная ломаная, то дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  гомеоморфно проколотой плоскости.

**10.23.** Докажите, что если  $K$  и  $L$  – конечные множества точек плоскости, состоящие из одинакового числа точек, то их дополнения гомеоморфны.

**10.24.** Пусть  $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^2$  – попарно не пересекающиеся замкнутые круги. Докажите, что дополнение их объединения гомеоморфно плоскости без  $n$  точек.

**10.25.** Пусть  $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^2$  – попарно непересекающиеся замкнутые круги. Дополнение объединения их внутренностей называется плоскостью с  $n$  дырами. Докажите, что любые две плоскости с  $n$  дырами гомеоморфны (т. е. при изменении взаимного расположения кругов  $D_1, \dots, D_n$  топологический тип дополнения объединения их внутренностей не меняется).

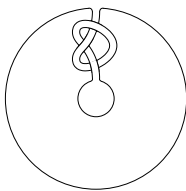
**10.26.** Пусть  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывные функции, причем  $f < g$ . Докажите, что промежуток  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$ , ограниченный их графиками, гомеоморфен замкнутой полосе  $\{(x, y) \mid y \in [0; 1]\}$ .

**10.27.** Докажите, что кофейная чашка (с добротной ручкой) гомеоморфна бублику.

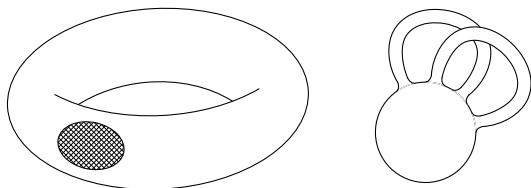
**10.28.** Поделите следующий набор предметов на классы гомеоморфных: кофейная чашка, блюдо, стакан, ложка, вилка, нож, тарелка, монета, гвоздь, винт, болт, гайка, шайба, шуруп, обручальное кольцо, сверло, цветочный горшок (с отверстием в доннышке), ключ.

**10.29.** В шаровом слое (промежутке между двумя концентрическими сферами) просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару  $D^3$ .

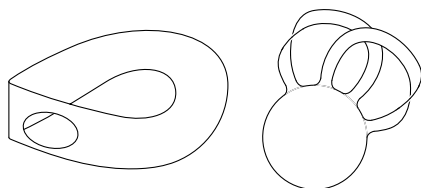
**10.30.** В шаровом слое просверлили отверстие, соединяющее граничные сферы и имеющее форму заузленной трубки (см. рисунок). Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару  $D^3$ .



**10.31.** Докажите, что поверхности, показанные на следующем рисунке, гомеоморфны (и то, и другое – так называемая *ручка*).



**10.32.** Докажите, что поверхности, показанные на следующем рисунке, гомеоморфны.



**10.33\*.** Докажите, что  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup \{(1, 1, 1)\})$ .

**10.34.** Подмножество сферы  $S^n$ , определяемое в стандартных координатах пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  неравенством  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 < x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-k}$ .

## 10'6. Примеры негомеоморфных пространств

**10.U.** Пространства, состоящие из разного числа точек, не гомеоморфны.

**10.V.** Дискретное и антидискретное пространства, имеющие более одной точки, не гомеоморфны.

**10.35.** Докажите, что пространства  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  (с индуцированной из  $\mathbb{R}$  топологией),  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_{T_1}$  и стрелка попарно не гомеоморфны.

**10.36.** Постройте два негомеоморфных пространства  $X$  и  $Y$ , для которых существуют непрерывные биекции  $X \rightarrow Y$  и  $Y \rightarrow X$ .

## 10'7. Проблема гомеоморфизма и топологические свойства

Одной из классических проблем топологии является *проблема гомеоморфизма*: определить, являются ли данные пространства гомеоморфными. В каждом конкретном случае характер решения зависит от ответа. Для доказательства гомеоморфности достаточно построить гомеоморфизм между пространствами, что в той или иной форме обычно и делается. Для доказательства негомеоморфности недостаточно рассмотреть какое-либо определенное отображение, а непосредственно обозреть все отображения обычно невозможно. Поэтому при доказательстве негомеоморфности чаще всего пользуются косвенными средствами: находят какое-нибудь свойство или характеристику, которыми обладает одно пространство, не обладает другое и которые передаются от пространства к пространству при гомеоморфизме. Очевидными примерами таких, как говорят, *топологических свойств* и *инвариантов* являются мощность множества точек и мощность топологической структуры (ср. задачи 10.34 и 10.U). Менее очевидные примеры являются основным предметом следующей главы.

**Информация: негомеоморфности.** Евклидовы пространства разных размерностей не гомеоморфны; шары  $D^p$ ,  $D^q$  с разными  $p$ ,  $q$  не гомеоморфны; сферы  $S^p$ ,  $S^q$  с  $p \neq q$  не гомеоморфны; сфера  $S^2$  не гомеоморфна поверхности бублика; евклидовы пространства не гомеоморфны ни шарам, ни сферам (любых размерностей); буквы **A** и **B** не гомеоморфны (здесь мы считаем, что эти буквы составлены из линий, лишенных толщины); проколота плоскость  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{point}$  не гомеоморфна плоскости с дырой  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 < 1\}$ . Заметим, что эти утверждения – разной степени трудности. Некоторые из них будут доступны уже в следующем параграфе. Некоторые же требуют техники, выходящей за рамки этой книги.

### 10'8. Вложения

Непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется (*топологическим*) *вложением*, если подотображение  $\text{ab}(f) : X \rightarrow f(X)$  есть гомеоморфизм.

**10.W.** Включение подпространства в пространство является вложением.

**10.X.** Композиция вложений есть вложение.

**10.Y.** Приведите пример непрерывного инъективного отображения, не являющегося топологическим вложением. (Найдите такой пример выше и придумайте новый. )

**10.37.** Найдите такие пространства  $X$  и  $Y$ , что  $X$  вкладывается в  $Y$  и  $Y$  вкладывается в  $X$ , но  $X \not\cong Y$ .

**10.38.** Докажите, что  $\mathbb{Q}$  не вкладывается в  $\mathbb{Z}$ .

**10.39.** 1) Можно ли вложить дискретное пространство в антидискретное? 2) А наоборот, антидискретное в дискретное?

**10.40.** Докажите, что пространства  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_{T_1}$  и стрелка не вкладываются друг в друга.

**10.41 Следствие теоремы об обратной функции.** Выведите из теоремы об обратной функции (см., например, любой учебник анализа функций нескольких переменных) следующее утверждение:

Для всякой дифференцируемой функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которой  $\det \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(0) \neq 0$ , существует такая окрестность  $U$  нуля  $0 \in \mathbb{R}^n$ , для которой отображение  $f|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть вложение и образ  $f(U)$  – открытое множество.

### 10'9. Эквивалентность вложений

Вложения  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  называются *эквивалентными*, если существуют такие гомеоморфизмы  $h_X : X \rightarrow X$  и  $h_Y : Y \rightarrow Y$ , что

$f_2 \circ h_X = h_Y \circ f_1$  (последнее равенство часто передают, говоря, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ h_X \downarrow & & \downarrow h_Y \\ X & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array}$$

коммутативна).

Любое вложение окружности  $S^1$  в  $\mathbb{R}^3$  называется *узлом*.

**10.42.** Докажите, что узлы  $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  с  $f_1(S^1) = f_2(S^1)$  эквивалентны.

**10.43.** Докажите, что узлы  эквивалентны.

**Информация:** существуют неэквивалентные узлы. Например,



## Доказательства и комментарии

**8.A**  $\Leftrightarrow$  Если  $f(f^{-1}(B)) = B$ , то  $B$ , конечно, содержится в образе  $f$ .  $\Rightarrow$  Если множество  $B$  содержится в образе отображения  $f$ , то для всякой точки  $y \in B$  найдется точка  $x$ , такая что  $f(x) = y$ . По определению,  $x \in f^{-1}(B)$ , значит,  $y \in f(f^{-1}(B))$ . Следовательно,  $B \subset f(f^{-1}(B))$ . Обратное включение верно для любого множества, см. 8.B.

**8.B** Если  $x \in f^{-1}(B)$ , то  $f(x) \in B$ .

**8.C** (a)  $\Rightarrow$  (b) Предположим, что из равенства  $f(C) = B$  следует, что  $C = f^{-1}(B)$ . Если найдутся различные точки  $a_1, a_2 \in f^{-1}(B)$ , такие что  $f(a_1) = f(a_2)$ , то  $f(f^{-1}(B) \setminus \{a_2\}) = B$ , что противоречит предположению.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Проведем рассуждение от противного. Предположим, что существует такое множество  $C \neq f^{-1}(B)$ , что  $f(C) = B$ . Рассмотрим точку  $a_1 \in f^{-1}(B) \setminus C$ , пусть  $b = f(a_1)$ . Так как  $f(C) = B$ , то найдется точка  $a_2 \in C$ , такая, что  $f(a_2) = b$ .

**8.D** Следствие 8.C.

**8.E** Если  $x \in A$ , то  $f(x) = y \in f(A)$ , значит,  $x \in f^{-1}(f(A))$ .

**8.F** Каждое из равенств равносильно тому, что  $f(x) \notin f(A)$  для всякого элемента  $x \notin A$ .

**8.G**  $\text{in}^{-1}(B) = \{x \in A \mid x \in B\} = A \cap B$ .

**8.H** Пусть  $x \in X$ . Тогда

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

**8.J** Если  $x_1 \neq x_2$ , то  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , так как  $f$  – инъекция, и  $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ , так как  $g$  – инъекция.

**8.K** Если бы  $f$  не являлась инъекцией, то найдутся такие точки  $x_1 \neq x_2$ , что  $f(x_1) = f(x_2)$ , значит,  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ , что противоречит тому, что  $g \circ f$  – инъекция.

**8.L** Если  $f(X) = Y$ , то  $g(f(X)) = g(Y) = Z$ , поскольку и отображение  $g$  является сюръекцией.

**8.O**  $\Rightarrow$  Если отображение является биекцией, то оно обратимо.  $\Leftarrow$  Если отображение обратимо, то оно является биекцией в силу утверждений 8.K и 8.M.

**9.A**  $\Rightarrow$  Если отображение  $f$  непрерывно, то для всякого замкнутого подмножества  $F \subset Y$  множество  $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$  открыто, значит, множество  $f^{-1}(F)$  является замкнутым.  $\Leftarrow$  Если



прообраз любого замкнутого множества замкнут, то аналогичное рассуждение доказывает, что прообраз всякого открытого множества будет открыт.

**9.C** Если множество  $U$  открыто в пространстве  $X$ , то его прообраз  $\text{in}^{-1}(U) = U \cap A$  открыт в подпространстве  $A$  по определению топологической структуры подпространства.

**9.D** Если  $U \in \Omega_A$ , то  $U = V \cap A$ , где  $V \in \Omega$ . Так как отображение  $\text{in} : (A, \Omega') \rightarrow (X, \Omega)$  непрерывно, то прообраз множества  $U = \text{in}^{-1}(V) \in \Omega'$ , таким образом,  $\Omega_A \subset \Omega'$ .

**9.E** Если  $U \in \Omega_Z$ , то  $g^{-1}(U) \in \Omega_Y$ , и потому

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \Omega_X$$

Таким образом, композиция  $g \circ f$  является непрерывным отображением.

**9.F**  $(f|_{A,B})^{-1}(V) = (f|_{A,B})^{-1}(U \cap B) = A \cap f^{-1}(U)$ .

**9.G**  $\Leftrightarrow f = \text{in}_{f(X)} \circ \text{ab } f$ .  $\Leftrightarrow$  См. 9.F.

**9.H** Прообраз всякого множества при постоянном отображении либо пуст, либо совпадает со всем пространством.

**9.I**  $\Leftrightarrow$  Если  $f$  непрерывна, то в качестве окрестности  $V$  точки  $a$  мы просто можем взять прообраз  $V = f^{-1}(U)$  окрестности точки  $f(a)$ .  $\Leftrightarrow$  Если  $f(V) \subset U$ , то  $V \subset f^{-1}(U)$ , откуда следует, что любая точка множества  $f^{-1}(U)$  – внутренняя, значит, это множество – открытое.

**9.J** Воспользуйтесь тем, что в любой окрестности точки метрического пространства существует лежащий в этой окрестности шар с центром в этой точке.

**9.K** Условие: “для любой точки  $x \in X$  с  $\rho(x, a) < \delta$  имеет место неравенство  $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ” означает, что  $f(B_\delta) \subset B_\varepsilon(f(a))$ . Осталось применить 9.J.

**9.L** Непосредственное следствие 4.35.

**9.M** Если  $\rho(f(x), g(x)) = 0$ , то  $\rho(x, y) = 0$ .

**9.N** Поскольку прообраз открытого шара пространства  $Y$  является открытым шаром того же радиуса в пространстве  $X$ .

**9.O** Множество решений системы есть пересечение прообразов точки  $0 \in \mathbb{R}$ . Поскольку отображения непрерывны, а точка замкнута, то замкнуты её прообразы, значит, замкнуто и их пересечение.

**9.P** Множество решений системы нестрогих неравенств есть пересечение прообразов замкнутого луча  $[0; +\infty)$ , множество решений системы строгих неравенств есть пересечение прообразов открытого луча  $(0; +\infty)$

**9.R** Рассмотрите дополнение множества  $F$ .

**9.S** Пусть  $\Gamma = \{U_\alpha\}$ . Если  $V \cap U_\alpha$  открыто в  $U_\alpha$ , то  $V \cap U_\alpha$  открыто в  $X$ , поскольку  $U_\alpha$  является открытым. Осталось заметить, что, так как  $\Gamma$  является покрытием, то  $V = \bigcup_\alpha (V \cap U_\alpha)$ .

**9.T** Доказательство аналогично предыдущему, поскольку объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

**9.U** Докажите, что объединение локально конечного набора замкнутых множеств замкнуто.

**9.V** Если множество  $U$  открыто в  $Y$ , то открыты его прообразы при сужениях на каждый элемент  $V_\alpha$  покрытия  $\Gamma = \{V_\alpha\}$ . Поскольку  $(f|_{V_\alpha})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap V_\alpha$ , то открыты все пересечения  $f^{-1}(U) \cap V_\alpha$ . Так как по условию покрытие  $\Gamma$  фундаментально, то открыт прообраз  $f^{-1}(U)$ , таким образом, отображение  $f$  непрерывно.

**9.Ax** Достаточно проверить открытость прообраза базового множества, что очевидно, так как, к примеру, прообразом множества  $\{x \mid a \prec x \prec b\}$  является множество  $\{x \mid c \prec x \prec d\}$ , где  $f(c) = a$  и  $f(d) = b$ .

**9.Bx**  $\Leftrightarrow$  Предположим, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  монотонно. Для доказательства непрерывности  $f$  достаточно проверить открытость прообразов базовых множеств. Пусть  $U = C_Y^+(b)$ ,  $V = f^{-1}(U)$ . Нетрудно видеть, что  $V = \bigcup_{f(x) \in U} C_X^+(x)$ , значит, это множество открыто как объединение базовых (в топологии пространства  $X$ ).

$\Leftrightarrow$  Проведем рассуждение от противного. Предположим, что  $f$  непрерывно в топологиях правых лучей, однако не является монотонным. Значит, найдутся такие точки  $a \prec b$ , что  $f(b) \prec f(a)$ . Докажем, что прообраз луча  $U = C_Y^+(f(a))$  не является открытым в  $X$  множеством. Действительно, равенство  $f^{-1}(U) = \bigcup C_X^+(z_\alpha)$  противоречит тому, что  $a \in f^{-1}(U)$ , тогда как  $b \notin f^{-1}(U)$ , хотя  $a \prec b$ .

**10.A** Например, тождественное отображение дискретного топологического пространства  $X$  в то же множество, наделенное тривиальной топологией.

**10.B** Рассмотрите отображение  $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

**10.C** Это и два следующих за ним утверждения сразу следуют из определения гомеоморфизма.

**10.F** Смотрите ответ на загадку 10.1.

**10.G** Пусть  $U \subset X$ ,  $V = f(U) \subset Y$ ,  $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Так как гомеоморфизм есть биекция, то  $U = f^{-1}(V)$ . Обозначим через  $g$  отображение, обратное к  $f$ , так что  $V = g^{-1}(U)$ .  $\Leftrightarrow$  Если  $U$  открыто, то

множество  $V$  открыто, поскольку оно есть прообраз открытого множества  $U$  при непрерывном отображении  $g$ .  $\Leftrightarrow$  Если открыто  $V$ , то  $U$  — это его прообраз при непрерывном отображении  $f$ .

**10.H** См. 10.G.

**10.I** Гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между открытыми, значит, и между замкнутыми множествами. Для доказательства следующих утверждений воспользуйтесь определениями замыкания, внутренней, границы множества.

**10.J** Отображение  $\text{ab}(f)$  есть биекция, а непрерывность  $\text{ab}(f)$  и  $(\text{ab } f)^{-1}$  следует из общей теоремы о сокращении.

**10.K** Всякая изометрия непрерывна. Отображение, обратное изометрии, само является изометрией.

**10.L** Если  $y = Ax + b$ , то  $x = A^{-1}y - A^{-1}b$ , т. е. невырожденное аффинное отображение есть биекция. Их непрерывность следует, к примеру, из их липшицевости.

**10.M** Всякое сюръективное строго монотонное отображение обратимо, и обратное к нему также является строго монотонным. Теперь можно применить утверждение 9.Ax.

**10.O** В этих задачах гомеоморфизмами являются стандартные функции. К примеру, гомеоморфизм  $f : [0; 1] \rightarrow [a; b]$  задается формулой  $f(x) = a + (b - a)x$ , а гомеоморфизм  $f : (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}^1$  — формулой  $f(x) = \text{tg } \frac{\pi x}{2}$ . (Во втором случае нетрудно найти гомеоморфизм, который задается рациональной функцией, однако, как это ни странно, достаточно часто появляется именно приведенная формула.)

**10.P** Воспользуйтесь тем, что отображение

$$\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right) \rightarrow S^1 \setminus N : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

является гомеоморфизмом и примените утверждения (с) и (d) предыдущей задачи. Приведем также другое решение, которое можно обобщить на высшие размерности.

Сужение  $f$  центральной проекции  $\mathbb{R}^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^1$  (на ось абсцисс) на  $S^1 \setminus N$  есть гомеоморфизм. Действительно, очевидно, что отображение  $f$  обратимо:  $f^{-1}$  — это сужение центральной проекции  $\mathbb{R}^2 \setminus N \rightarrow S^1 \setminus N$ . Отображение  $S^1 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$  задается формулой  $(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$ , а обратное

ему — формулой  $x \mapsto \left(\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ . (Почему эти отображения непрерывны?)

**10.Q** Убедитесь, что вертикальная проекция на ось абсцисс определяет гомеоморфизм.

**10.R** Как обычно, отождествим  $\mathbb{R}^n$  с подмножеством  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ . Сужение центральной проекции

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

на  $S^n \setminus (0, \dots, 0, 1)$  есть гомеоморфизм, который называется *стереографической проекцией*. При  $n = 2$  он используется в картографии. Это отображение обратимо, обратное к нему является сужением центральной проекции  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0, 1) \rightarrow S^n \setminus (0, \dots, 0, 1)$  на  $\mathbb{R}^n$ . Первое отображение задается формулой

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left( \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

а второе – формулой

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

Проверьте это. Убедитесь, что оба отображения непрерывны.

**10.S** Из доказательства данного утверждения уже будет понятно, что не всегда имеет смысл давать явное описание отображения посредством формул, из которых бывает трудно понять, что они дают именно то, что требуется. Проще давать словесное описание отображения, а доказывать его непрерывность и непрерывность обратного к нему, не опираясь на формулы.

(а) Вместо квадрата  $I^2$  удобнее рассматривать (гомеоморфный ему) квадрат вдвое большего размера с центром в начале координат  $K = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ . Гомеоморфизм  $I^2 \rightarrow K$  линейен:  $(x, y) \mapsto (2x - 1, 2y - 1)$ . Гомеоморфизмом  $K \rightarrow S^1$  является отображение, заданное формулами  $(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ . Гомеоморфизмом  $K \rightarrow D^2$  является отображение

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x \max\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y \max\{|x|, |y|\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

С геометрической точки зрения этот гомеоморфизм линейно отображает отрезок, соединяющий начала координат с точкой на контуре квадрата, на часть этого отрезка, лежащую внутри круга.

(b), (c) Рассмотрите подходящие подотображения построенного выше гомеоморфизма  $K \rightarrow D^2$ . Конечно, утверждение (b) непосредственно следует из доказательства утверждения (a). Интересно, что в случае (c)

искомый гомеоморфизм может задать совсем простой формулой:

$$\partial K \rightarrow S^1 : (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

(Это просто центральная проекция!) Наконец, можно разделить окружность на четыре дуги и отобразить каждую из них на свою сторону квадрата  $K$ .

**10. T** (а) Будем считать для простоты, что  $D^2 \subset \Delta$ . Для всякой точки  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$  найдется единственное положительное число  $a(x)$ , такое что  $a(x) \cdot \frac{x}{|x|} \in \text{Fr } \Delta$ . Рассмотрите отображение

$$\Delta \rightarrow D^2 : x \mapsto \frac{x}{a(x)} \text{ при } x \neq 0, \text{ тогда как } 0 \mapsto 0,$$

которое и является искомым гомеоморфизмом. Обратите внимание, что в случае, когда множество  $\Delta$  есть квадрат  $K$ , мы получим в точности гомеоморфизм, построенный в решении предыдущей задачи.

(b), (c) Рассмотрите подходящие подотображения гомеоморфизма  $\Delta \rightarrow D^2$ .

**10. U** Не существует биекции одного пространства на другое.

**10. V** В этих пространствах различное число открытых множеств. (К примеру, одноточечное подмножество в одном из них открыто, а в другом – нет.)

**10. W** Действительно, если  $\text{in} : A \rightarrow X$  – включение, то подотображение  $\text{ab}(\text{in}) = \text{id}_A$  – это тождественный гомеоморфизм.

**10. X** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow Z$  – вложения. Тогда подотображение  $\text{ab}(g \circ f) = \text{ab}(g) \circ \text{ab}(f) : X \rightarrow g(f(X))$  – гомеоморфизм.

**10. Y** Уже были примеры  $[0; 1) \rightarrow S^1; \mathbb{Z}_+ \rightarrow \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$ . Вот ещё один: Рассмотрим биекцию  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  и включение  $\text{in}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ . Композиция  $\text{in}_{\mathbb{Q}} \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  будет непрерывной инъекцией, но не вложением.

# Топологические свойства

## 11. Связность

### 11'1. Определение связности и первые примеры

Топологическое пространство  $X$  называется **связным**, если любое его подмножество, открытое и замкнутое одновременно, либо пусто, либо совпадает со всем пространством  $X$ .

**Разбиением** множества называется его покрытие попарно непересекающимися множествами; **разбить** множество – значит построить его разбиение.

**11.А.** Топологическое пространство связно, когда его нельзя разбить на два непустых открытых множества, когда его нельзя разбить на два непустых замкнутых множества.

**11.1.** Связно ли 1) антидискретное пространство; 2) стрелка; 3)  $\mathbb{R}_{T_1}$ ?

**11.2.** Опишите явно все связные дискретные пространства.

**11.3.** Опишите явно все несвязные двуточечные пространства.

**11.4.** 1) Связно ли пространство  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел (с топологией, индуцированной из  $\mathbb{R}$ )? 2) Тот же вопрос относительно множества иррациональных чисел.

**11.5.** Пусть в множестве  $X$  заданы топологические структуры  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , причем структура  $\Omega_2$  является более тонкой (т. е.  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ). 1) Если пространство  $(X, \Omega_2)$  связно, то связно ли пространство  $(X, \Omega_1)$ ? 2) Если пространство  $(X, \Omega_1)$  связно, то связно ли пространство  $(X, \Omega_2)$ ?

### 11'2. Связные множества

Когда говорят, что какое-то множество связно, всегда имеют в виду, что множество лежит в топологическом пространстве (в каком именно – должно быть ясно из контекста) и что с индуцированной этим включением топологией оно является связным пространством.

**11.6.** Дайте определение несвязного подмножества, не употребляя термин индуцированная топология.

**11.7.** Связно ли множество  $\{0, 1\}$  в 1)  $\mathbb{R}$ ; 2) стрелке; 3)  $\mathbb{R}_{T_1}$ ?

**11.8.** Опишите явно все связные подмножества 1) стрелки; 2) пространства  $\mathbb{R}_{T_1}$ .

**11.9.** Покажите, что множество  $[0; 1] \cup (2; 3]$  несвязно в  $\mathbb{R}$ .

**11.10.** Докажите, что всякое невыпуклое подмножество прямой несвязно.

**11.11.** Докажите, что подмножество  $A$  топологического пространства  $X$  несвязно, тогда существуют непустые множества  $B$  и  $C$  такие, что  $A = B \cup C$ ,  $B \cap \text{Cl}_X C = \emptyset$  и  $C \cap \text{Cl}_X B = \emptyset$ .

**11.12.** Укажите какое-нибудь топологическое пространство и в нём такое несвязное подмножество  $A$ , что для любых непересекающихся открытых множеств  $U$  и  $V$ , образующих покрытие множества  $A$ , либо  $U \supset A$ , либо  $V \supset A$ .

**11.13.** Докажите, что для любого несвязного множества в  $\mathbb{R}^n$  существуют непересекающиеся открытые множества  $U$  и  $V$ , такие, что  $A \subset U \cup V$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$  и  $V \cap A \neq \emptyset$ .

Сравните 11.11–11.13 с 11.6.

### 11'3. Свойства связных множеств

**11.14.** Пусть  $X$  – топологическое пространство. Если подмножество  $M \subset X$  связно и непустое собственное подмножество  $A \subset X$  открыто и замкнуто, то либо  $M \subset A$ , либо  $M \subset X \setminus A$ .

**11.B.** Замыкание связного множества связно.

**11.15.** Докажите, что если множество  $A$  связно и  $A \subset B \subset \text{Cl } A$ , то множество  $B$  тоже связно.

**11.C.** Объединение любого семейства попарно пересекающихся связных множеств связно. (Другими словами: пусть  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  – семейство связных подмножеств пространства  $X$  и пусть пересечение любых двух множеств этого семейства непусто. Тогда множество  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  связно.)

**11.D** Специальный случай. Пусть множества  $A, B \subset X$  связны и  $A \cap B \neq \emptyset$ . Тогда и их объединение  $A \cup B$  также связно.

**11.Е.** Пусть  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  – семейство связных подмножеств пространства  $X$ . Предположим, что каждое множество семейства пересекается с множеством  $A_{\lambda_0}$  (для некоторого  $\lambda_0 \in \Lambda$ ). Тогда множество  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  связно.

**11.Ф.** Если  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  – такая последовательность связных множеств, что  $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$  при любом  $k \in \mathbb{Z}$ , то множество  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$  связно.

**11.16.** Покажите, что если множества  $A, B$  связны и  $A \cap \text{Cl} B \neq \emptyset$ , то  $A \cup B$  – связное множество.

**11.17.** Пусть  $A$  – связное подмножество связного пространства  $X$  и множество  $B \subset X \setminus A$  открыто и замкнуто в топологии подпространства  $X \setminus A$  пространства  $X$ . Докажите, что множество  $A \cup B$  связно.

**11.18.** Следует ли из связности множеств  $A \cup B$  и  $A \cap B$  связность множеств  $A$  и  $B$ ?

**11.19.** Пусть множества  $A$  и  $B$  таковы, что и их объединение, и их пересечение есть связное множество. Докажите, что множества  $A$  и  $B$  тоже связны, если каждое из них: 1) открыто; 2) замкнуто.



**11.20.** Пусть  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  – бесконечная убывающая последовательность связных множеств. Обязательно ли связно пересечение  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ?

#### 11'4. Компоненты связности

*Компонентной связности* пространства  $X$  называется всякое его связное подмножество, не содержащееся ни в каком другом (строго большем) связном подмножестве пространства  $X$ .

**11.Г.** Каждая точка содержится в некоторой компоненте связности, причем только в одной: ею является объединение всех связных множеств, содержащих эту точку.

**11.Н.** Две компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают.

Компоненты связности пространства называются также его *связными компонентами* или просто *компонентами*. Теоремы 11.Г и 11.Н показывают, что компоненты связности составляют разбиение топологического пространства. Следующая теорема описывает отношение эквивалентности, соответствующее этому разбиению.

**11.И.** Две точки содержатся в одной компоненте тогда и только тогда, когда они содержатся в одном связном подмножестве.

**11.Ж** Следствие. Пространство связно тогда и только тогда, когда любая пара его точек лежит в некотором связном множестве.

**11.К.** Компоненты связности замкнуты.



**11.21.** Если у каждой точки пространства  $X$  имеется связная окрестность, то каждая компонента  $X$  открыта.

**11.22.** Пусть точки  $x$  и  $y$  принадлежат одной компоненте пространства. Если некоторое его подмножество одновременно открыто и замкнуто, то оно либо содержит обе эти точки, либо не содержит ни одной из них (ср. 11.37).

### 11'5. Вполне несвязные пространства

Топологическое пространство называется **вполне несвязным**, если любая его компонента состоит из одной точки.

**11.L Очевидный пример.** Любое дискретное пространство вполне несвязно.

**11.M.** Пространство  $\mathbb{Q}$  (с индуцированной из  $\mathbb{R}$  топологией) вполне несвязно.

Обратите внимание, что  $\mathbb{Q}$  не дискретно.

**11.23.** Приведите пример несчетного замкнутого вполне несвязного подмножества прямой.

**11.24.** Канторovo множество (см. 2.Bx) вполне несвязно.

### 11'6. Связность и граница множества

**11.25.** Докажите, что если  $A$  – собственное непустое подмножество связного топологического пространства, то  $\text{Fr } A \neq \emptyset$ .

**11.26.** Пусть  $F$  – связное подмножество пространства  $X$ . Докажите, что если  $A \subset X$ ,  $F \cap A$ , и  $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ , то  $F \cap \text{Fr } A \neq \emptyset$ .

**11.27.** Пусть  $A$  – подмножество связного топологического пространства. Докажите, что если  $\text{Fr } A$  – связное множество, то  $\text{Cl } A$  – тоже связное множество.

**11.28.** Пусть  $X$  – связное топологическое пространство,  $U$  и  $V$  – его пересекающиеся открытые подмножества, имеющие общие внешние точки, причем ни одно из них не является подмножеством другого. Докажите, что если их границы  $\text{Fr } U$  и  $\text{Fr } V$  связны, то  $\text{Fr } U \cap \text{Fr } V \neq \emptyset$ .

### 11'7. Связность и непрерывные отображения

**Непрерывным образом** пространства называется его образ при непрерывном отображении.

**11.N.** Непрерывный образ связного пространства связан. (Другими словами, если  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение и пространство  $X$  связно, то и множество  $f(X)$  связно.)

**11.O Следствие.** Связность – топологическое свойство.

**11.P Следствие.** Число компонент связности является топологическим инвариантом.

**11.Q.** Пространство  $X$  несвязно, тогда существует непрерывная сюръекция  $X \rightarrow S^0$ .

**11.29.** При помощи 11.Q часто можно получить более короткие доказательства различных утверждений о связных множествах. Примените её для того, чтобы доказать, к примеру, теоремы 11.B–11.F и решить задачи 11.D и 11.16.

**11.30.** Пусть  $X$  – связное пространство и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция. Тогда множество  $f(X)$  является промежутком в  $\mathbb{R}$ .

**11.31.** Если пространство снабжено структурой группы и умножение на любой элемент группы является непрерывным отображением, то связная компонента единицы является нормальной подгруппой.

## 11'8. Связные подмножества числовой прямой

**11.R.** Отрезок  $I = [0; 1]$  *связен*.

Теорему 11.R можно доказать несколькими способами. Один из них подсказывается задачей 11.Q и опирается на известную теорему о промежуточном значении из математического анализа, см. 12.A. Ниже предлагаются две задачи, доставляющие набросок в сущности того же самого доказательства: комбинации теоремы 11.Q с традиционным доказательством теоремы о промежуточном значении. См. также 2.Ax.

**11.R.1.** Пусть  $U, V$  – подмножества отрезка  $I$ , причем  $V = I \setminus U$ . Пусть  $a \in U, b \in V$  и  $a < b$ . Докажите, что существуют неубывающая последовательность  $a_n$  с  $a_1 = a, a_n \in U$  и невозрастающая последовательность  $b_n$  с  $b_1 = b, b_n \in V$ , такие что  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ .

**11.R.2.** Если в предположениях 11.R.1  $U$  и  $V$  замкнуты в  $I$ , то кому из них принадлежит  $c = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$ ?

**11.32.** Выведите 11.R из 2.Ax.

**11.S.** Докажите, что открытое подмножество прямой  $\mathbb{R}$  имеет счётное число компонент связности.

**11.T.** Пространство  $\mathbb{R}^1$  связно.

**11.U.** Всякое выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$  связно. (В частности, таковым является все пространство  $\mathbb{R}^n$ , открытый шар  $B^n$  и замкнутый шар  $D^n$ .)

**11.V** Следствие. Любой промежуток в  $\mathbb{R}^1$  связен.

**11.W.** Всякое звездное подмножество  $\mathbb{R}^n$  связно.

**11.X** Связность на прямой. *Подмножество прямой связно, когда оно есть некоторый промежуток.*

**11.Y.** Докажите, что  $n$ -мерная сфера  $S^n$  связна. В частности, связна окружность  $S^1$ .

**11.33.** Рассмотрим подмножество плоскости, являющееся объединением спирали

$$r = \exp\left(\frac{1}{1 + \varphi^2}\right), \text{ где } \varphi \geq 0$$

(здесь  $r, \varphi$  – полярные координаты), и окружности  $S^1$ . 1) Является ли это множество связным? 2) Изменится ли ответ, если заменить окружность ее частью? (Ср. 11.15.)

**11.34.** Связны ли следующие подмножества плоскости:

- (1) составленное из точек, обе координаты которых рациональны;
- (2) составленное из точек, хотя бы одна из координат которых рациональна;
- (3) составленное из точек, у которых либо обе координаты рациональны, либо обе – иррациональны?

**11.35.** Докажите, что при любом  $\varepsilon > 0$   $\varepsilon$ -окрестность всякого связного подмножества евклидова пространства связна.

**11.36.** Докажите, что во всякой окрестности  $U$  связного подмножества  $A$  евклидова пространства содержится связная окрестности множества  $A$ .



**11.37.** Укажите такое пространство и такие его две точки, лежащие в его различных компонентах связности, что любое одновременно открытое и замкнутое множество либо содержит обе точки, либо не содержит ни одной из них. (Ср. 11.22.)

## 12. Приложения понятия связности

### 12'1. Теорема о промежуточном значении и её обобщения

Следующая теорема обычно входит в курс математического анализа. Вы легко выведете её из результатов этого параграфа. Она в определённом смысле эквивалентна связности отрезка.

**12.A Теорема о промежуточном значении.** *Любая непрерывная функция*

$$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$$

*принимает все значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ .*

Многие задачи, которые можно решить при помощи теоремы о промежуточном значении, можно найти в книжках по анализу. Вот типичная задача этого типа.

**12.1.** Докажите, что любой многочлен нечётной степени с вещественными коэффициентами обладает вещественным корнем.

**12.B Обобщение.** Пусть  $X$  – связное пространство и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция. Тогда множество  $f(X)$  – промежуток.

**12.C Следствие.** Пусть  $J \subset \mathbb{R}$  – промежуток и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция. Тогда множество  $f(J)$  также является промежутком. (Другими словами, непрерывные функции отображают промежутки в промежутки.)

### 12'2. Приложение к проблеме гомеоморфизма

Напомним, что связность – топологическое свойство, а число компонент связности – топологический инвариант (см. 10).

**12.D.** Множества  $[0; 2]$  и  $[0; 1] \cup [2; 3]$  не гомеоморфны.

Простейшие конструкции, которые переводят гомеоморфные пространства в гомеоморфные, например удаление одной или нескольких точек, позволяют применять связность и в доказательствах нехомеоморфности некоторых связных пространств.

**12.E.** Пространства  $I$ ,  $\mathbb{R}^1$ ,  $S^1$  и  $[0; \infty)$  попарно не гомеоморфны.

**12.2.** Окружность не гомеоморфна никакому подмножеству прямой  $\mathbb{R}^1$ .

**12.3.** Дайте топологическую классификацию букв латинского алфавита A, B, C, ..., рассматриваемых как подмножества плоскости (линии, из которых составлены буквы, считайте лишенными толщины).

**12.4.** Докажите, что квадрат и отрезок не гомеоморфны.

Напомним что существуют непрерывные сюръекции отрезка на квадрат (кривые Пеано), см. 9.

**12.F.** Пространства  $\mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^n$  с  $n > 1$  не гомеоморфны.

**Информация.** В действительности,  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$  не гомеоморфны при  $p \neq q$ .

**12.5.** Докажите, что из негомеоморфности  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$  при  $p \neq q$  следует негомеоморфность  $S^p$  и  $S^q$  при  $p \neq q$ .

### 12'3х. Индукция по связности

Говорят, что функция *локально постоянна*, если у каждой точки её области определения имеется окрестность, сужение данной функции на которую постоянно.

**12.1х.** Докажите, что всякая локально постоянная функция непрерывна.

**12.2х.** Локально постоянная функция на связном множестве постоянна.

**12.3х. Загадка.** Как связаны задачи 11.26 и 12.2х?

**12.4х.** Пусть группа  $G$  снабжена такой топологией, что для любого элемента  $g \in G$  отображение  $G \rightarrow G$ , определяемое формулой  $x \mapsto xgx^{-1}$ , непрерывно, и пусть в этой топологии группа  $G$  связна. Если в нормальном делителе  $H$  группы  $G$  индуцированная топология дискретна, то он содержится в центре группы  $G$  (т. е.  $hg = gh$  при любом  $h \in H$  и любом  $g \in G$ ).

**12.5х Индукция по связности.** Пусть  $\mathcal{E}$  – свойство подмножеств топологического пространства, передающееся от множеств любого семейства к непустым попарным пересечениям и к объединению этих множеств. Если каждая точка пространства имеет окрестность, обладающую свойством  $\mathcal{E}$ , и пространство связно, то оно обладает и свойством  $\mathcal{E}$ .

**12.6х.** Докажите 12.2х и решите 12.4х основываясь на 12.5х.

По поводу других применений индукции по связности см. задачи 13.T, 13.4х, 13.6х и 13.8х.

### 12'4х. Разрезание блинов на равные доли

**12.7х.** Любой блин сколь угодно нерегулярной формы можно рассечь на две части равной площади одним взмахом ножа так, чтобы разрез был параллелен заданному направлению. Другими словами, если  $A$  – ограниченное открытое множество на плоскости и  $l$  – прямая на этой плоскости, то существует такая прямая  $L$ , параллельная  $l$ , которая делит  $A$  на два множества равной площади.

**12.8х.** Если в предположениях 12.7х, множество  $A$  связно, то прямая  $L$ , существование которой утверждается в предыдущей задаче, единственна.

**12.9х.** Пусть два блина какой угодно формы лежат на одном блюде. Докажите, что оба их можно рассечь на равные половинки одним взмахом ножа. Другими словами, если  $A$  и  $B$  – два ограниченных открытых множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из них на два множества равной площади.

**12.10х.** Докажите, что плоский блин произвольной формы можно рассечь на четыре куска равной площади двумя прямыми разрезами, перпендикулярными друг другу. Другими словами, если  $A$  – ограниченное связное открытое множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные друг другу прямые, которые делят  $A$  на четыре части равной площади.

**12.11х. Загадка.** А что если нож кривой? Для какой формы лезвия Вы можете сформулировать и решить задачи, подобные задачам 12.7х–12.10х?

**12.12х. Загадка.** Сформулируйте и решите задачи, аналогичные задачам 12.7х–12.11х для областей в трёхмерном пространстве. Можете ли вы при этом увеличить число областей в аналогах задач 12.7х и 12.9х?

**12.13х. Загадка.** А как насчёт блинов в  $\mathbb{R}^n$ ?

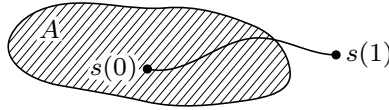
## 13. Линейная связность

### 13'1. Пути

**Путем** в топологическом пространстве  $X$  называется непрерывное отображение отрезка  $I = [0; 1]$  в  $X$ . **Началом** пути  $s : I \rightarrow X$  называется точка  $s(0) \in X$ , **концом** – точка  $s(1)$ . При этом говорят, что путь  $s$  **соединяет**  $s(0)$  с  $s(1)$ .

**13.1.** Докажите, что для всякого пути  $s : I \rightarrow X$  его образ  $s(I) \subset X$  – связное множество.

**13.2.** Пусть  $s : I \rightarrow X$  – путь, соединяющий точку множества  $A \subset X$  с точкой множества  $X \setminus A$ . Докажите, что  $s(I) \cap \text{Fr}(A) \neq \emptyset$ .

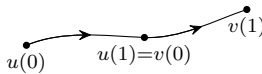


**13.3.** Пусть  $A$  – подмножество пространства  $X$ ,  $\text{in}_A : A \rightarrow X$  – включение. Докажите, что  $u : I \rightarrow A$  – путь в  $A$ , тогда композиция  $\text{in}_A \circ u : I \rightarrow X$  – это путь в  $X$ .

Постоянное отображение  $s : I \rightarrow X$  называется **постоянным путем** и обозначается  $e_a$ , где  $a = s(I)$ . Если  $s$  – путь, то **обратным** ему путем называется путь  $s^{-1} : t \mapsto s(1 - t)$ . Хотя обозначение  $s^{-1}$  уже занято (обратным отображением), к недоразумениям эта двусмысленность не приводит, поскольку когда речь идет о путях, обратные отображения, как правило, не рассматриваются.

Пусть  $u : I \rightarrow X$ ,  $v : I \rightarrow X$  – такие пути, что  $u(1) = v(0)$ . Положим

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } t \in [0; \frac{1}{2}], \\ v(2t - 1), & \text{если } t \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases} \quad (22)$$



**13.A.** Отображение  $uv : I \rightarrow X$ , определяемое этой формулой, непрерывно (т. е. является путем) Ср. 9.T и 9.V.

Путь  $uv$  называется **произведением** путей  $u$  и  $v$ . Напомним, что оно определено только если конец  $u(1)$  первого пути  $u$  совпадает с началом  $v(0)$  второго пути  $v$ .

### 13'2. Линейно связные пространства

Топологическое пространство называется *линейно связным*, если в нём любые две точки можно соединить путем.

**13.B.** Отрезок  $I$  линейно связан.

**13.C.** Евклидово пространство любой размерности линейно связно.

**13.D.** Сфера ненулевой размерности линейно связна.

**13.E.** Нульмерная сфера  $S^0$  не является линейно связной.

**13.4.** Какие из следующих пространств линейно связны:

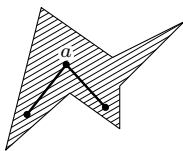
- (a) дискретное пространство;    (b) антидискретное пространство;
- (c) стрелка;    (d)  $\mathbb{R}_{T_1}$ ;
- (e)  $\mathbb{Y}$ ?

### 13'3. Линейно связные множества

*Линейно связным множеством* называют подмножество топологического пространства (какого именно, должно быть ясно из контекста), линейно связное как пространство с топологией, индуцированной из объемлющего пространства.

**13.5.** Докажите, что подмножество  $A$  топологического пространства  $X$  линейно связно, тогда любые две его точки можно соединить в  $X$  путём, целиком лежащим в  $A$  (т. е. путём  $s$ , для которого  $s(I) \subset A$ ).

**13.6.** Всякое выпуклое подмножество евклидова пространства линейно связно.



**13.7.** Всякое звездное подмножество  $\mathbb{R}^n$  линейно связно.

**13.8.** Образ пути является линейно связным множеством.

**13.9.** Докажите, что множество плоских выпуклых многоугольников в метрике Хаусдорфа линейно связно.

**13.10. Загадка.** Что можно сказать об утверждении задачи 13.9 для множества произвольных (не обязательно выпуклых) многоугольников?

### 13'4. Свойства линейно связных множеств

Линейная связность очень похожа на связность и в некоторых важных ситуациях даже равносильна ей. Однако некоторые свойства связности не переносятся на линейную связность (см. 13.Q, 13.R). Те же свойства, которые переносятся, для линейной связности доказываются проще.



**13.F.** Объединение любой совокупности попарно пересекающихся линейно связных множеств линейно связно.

**13.11.** Докажите, что если множества  $A$  и  $B$  оба замкнуты или оба открыты и их объединение и пересечение линейно связны, то  $A$  и  $B$  тоже линейно связны.

**13.12.** 1) Докажите, что внутренность и граница линейно связного множества не обязательно линейно связны. 2) Аналогичное утверждение справедливо для внутренности и границы связного множества.

**13.13.** Если граница множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  линейно связна, то замыкание этого множества тоже линейно связно.

**13.14.** Докажите, что утверждение предыдущей задачи имеет место для подмножества произвольного линейно связного пространства.

### 13'5. Компоненты линейной связности

Компонентой линейной связности топологического пространства  $X$  называется такое его линейно связное подмножество, которое не содержится ни в каком строго большем линейно связном множестве.

**13.G.** Каждая точка содержится в некоторой компоненте линейной связности.

**13.H.** Две компоненты линейной связности либо не пересекаются, либо совпадают.

Теоремы 13.G и 13.H показывают, что компоненты линейной связности образуют разбиение рассматриваемого пространства. Следующая теорема описывает соответствующее отношение эквивалентности.

**13.I.** Две точки принадлежат одной компоненте линейной связности, когда их можно соединить путём.

В противоположность одному из свойств компонент связности, компоненты линейной связности не обязательно замкнуты (см. 13.Q, ср. 13.P, 13.R.)

### 13'6. Линейная связность и непрерывные отображения

**13.J.** Непрерывный образ линейно связного пространства линейно связан.

**13.K Следствие.** Линейная связность является топологическим свойством.

**13.L Следствие.** Число компонент линейной связности – топологический инвариант.

**13'7. Связность и линейная связность**

**13.М.** Всякое линейно связное пространство связно.

Рассмотрим множества

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\} \text{ и } X = A \cup \{(0, 0)\}.$$

**13.15.** Нарисуйте множество  $A$ .

**13.N.** Множество  $A$  линейно связно, а множество  $X$  связно.

**13.O.** Выкалывание любой точки множества  $A$  делает  $A$  и  $X$  несвязными (а значит, и не линейно связными).

**13.P.** Множество  $X$  не является линейно связным.

**13.Q.** Приведите пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

**13.R.** Приведите пример незамкнутой компоненты линейной связности.

**13.S.** В пространстве, каждая точка которого обладает линейно связной окрестностью, компоненты линейной связности открыты.

**13.T.** Предположим, что в пространстве  $X$  каждая точка обладает линейно связной окрестностью. Тогда  $X$  линейно связно, тогда  $X$  связно.

**13.U.** Для открытых подмножеств евклидова пространства связность и линейная связность равносильны.

**13.16.** Для подмножеств прямой связность и линейная связность равносильны.

**13.17.** Если множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  связно, то для всякого  $\varepsilon > 0$  его  $\varepsilon$ -окрестность линейно связна.

**13.18.** Докажите, что во всякой окрестности связного множества в евклидовом пространстве найдется ее линейно связная подокрестность.

**13'8х. Связность посредством ломаных**

Подмножество  $A$  евклидова пространства называется *связным посредством ломаных*, если любые две точки из  $A$  можно в  $A$  соединить конечно-звенной ломаной.

**13.1х.** Всякое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , связное посредством ломаных, является линейно связным, значит, и связным.

**13.2х.** Всякое выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$  связно посредством ломаных.

**13.3х.** Всякое звездное подмножество  $\mathbb{R}^n$  связно посредством ломаных.

**13.4х.** Для открытых подмножеств евклидова пространства связность посредством ломаных равносильна связности.

**13.5х.** Постройте линейно связное неодноточечное подмножество евклидова пространства, никакие две точки которого нельзя соединить в нем ломаной.

**13.6х.** Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}^2$  счетно. Докажите, что его дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  связно посредством ломаных.

**13.7х.** Пусть множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  является объединением счетного числа аффинных подпространств, размерности которых не превосходят  $n - 2$ . Докажите, что его дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  связно посредством ломаных.

**13.8х.** Пусть  $X \subset \mathbb{C}^n$  – объединение счетного числа *алгебраических множеств* (т. е. множеств, задаваемых одним или несколькими алгебраическими уравнениями относительно координат в  $\mathbb{C}^n$ ). Докажите, что его дополнение  $\mathbb{C}^n \setminus X$  связно посредством ломаных.

### 13'9х. Связность некоторых множеств матриц

Вещественные  $n \times n$ -матрицы образуют координатное пространство, которое отличается от  $\mathbb{R}^{n^2}$  лишь двойной нумерацией своих естественных координат. Аналогично соотносятся множества комплексных  $n \times n$ -матриц и пространство  $\mathbb{C}^{n^2}$  (гомеоморфное  $\mathbb{R}^{2n^2}$ ).

**13.9х.** Найдите компоненты связности и компоненты линейной связности следующих подпространств пространства вещественных  $n \times n$ -матриц:

- (1)  $GL(n; \mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$ ;
- (2)  $O(n; \mathbb{R}) = \{A \mid A \cdot ({}^t A) = \mathbb{E}\}$ ;
- (3)  $Symm(n; \mathbb{R}) = \{A \mid {}^t A = A\}$ ;
- (4)  $Symm(n; \mathbb{R}) \cap GL(n; \mathbb{R})$ ;
- (5)  $\{A \mid A^2 = \mathbb{E}\}$ .

**13.10х.** Найдите компоненты связности и компоненты линейной связности следующих подпространств пространства комплексных  $n \times n$ -матриц:

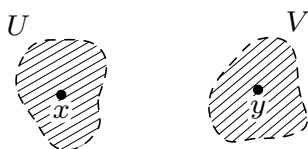
- (1)  $GL(n; \mathbb{C}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$ ;
- (2)  $U(n; \mathbb{C}) = \{A \mid A \cdot ({}^t \bar{A}) = \mathbb{E}\}$ ;
- (3)  $Herm(n; \mathbb{C}) = \{A \mid {}^t A = \bar{A}\}$ ;
- (4)  $Herm(n; \mathbb{C}) \cap GL(n; \mathbb{C})$ .

## 14. Аксиомы отделимости

Предмет этого параграфа – естественные требования на топологическую структуру, приближающие свойства топологического пространства к свойствам метрических пространств. Известно много аксиом отделимости, из которых мы ограничимся пятью наиболее важными. Они имеют номера и обозначаются через  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$ .<sup>1</sup>

### 14'1. Аксиома Хаусдорфа

Мы начнем с наиболее важной – второй аксиомы, называемой еще и *аксиомой Хаусдорфа*. Пространства, удовлетворяющие ей, называются *хаусдорфовыми*. Состоит она в следующем: любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями. Более формальная запись:  $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_x, V_y$ , такие что  $U_x \cap V_y = \emptyset$ .



**14.A.** Всякая метрическое пространство хаусдорфово.

**14.1.** Какие из следующих пространств хаусдорфовы:

- (a) дискретное пространство; (b) антидискретное пространство;  
(c) стрелка; (d)  $\mathbb{R}_{T_1}$ ; (e)  $\mathbb{Y}$ ?

В случае если следующая задача заставит вас хоть на минуту задуматься, мы советуем более тщательно обдумать определение и решать все простые задачи.

**14.B.** Является ли отрезок  $[0; 1]$  с индуцированной из  $\mathbb{R}$  топологией хаусдорфовым? Обладают ли в нем непересекающимися окрестностями точки 0 и 1? Какими?

**14.C.** Пространство  $X$  является хаусдорфовым, тогда для каждой точки  $x \in X$  имеет место равенство  $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} \text{Cl } U$ .

<sup>1</sup>Буква T в этих обозначениях происходит от немецкого слова Trennungsaxiom, которое и означает – аксиома отделимости.

### 14'2. Пределы последовательностей

Пусть  $\{a_n\}$  – последовательность точек топологического пространства  $X$ . Точка  $b \in X$  называется ее *пределом*, если для любой окрестности  $U$  точки  $b$  существует такое число  $N$ , что  $a_n \in U$  при всех  $n > N$ .<sup>2</sup> Говорят также, что последовательность  $a_n$  *стремится* или *сходится* к  $b$  при  $n$ , стремящимся к бесконечности.

**14.2.** Сформулируйте утверждение “ $b$  не есть предел последовательности  $a_n$ ”, употребив частицу “не” как можно позже и не употребляя терминов “предел” и “стремится”.

**14.3.** Предел последовательности не зависит от порядка ее членов. Более точно: пусть  $a_n$  – сходящаяся последовательность:  $a_n \rightarrow b$ . Пусть  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  произвольная биекция. Тогда последовательность  $a_{\phi(n)}$  также является сходящейся и, более того, имеет тот же самый предел:  $a_{\phi(n)} \rightarrow b$ . Например, если все члены последовательности попарно различны, то ее сходимости и предел, к которому она стремится, зависят только от множества, образованного её членами. Таким образом, понятия сходимости и предела последовательности по своему существу являются понятиями геометрии.

**14.D.** В хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность не может иметь более одного предела.

**14.E.** Докажите, что в пространстве  $\mathbb{R}_{T_1}$  каждая точка является пределом последовательности  $a_n = n$ .

### 14'3. Множество совпадения и множество неподвижных точек

Рассмотрим отображения  $f, g : X \rightarrow Y$ . Множество  $C(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  называется *множеством совпадения* отображений  $f$  и  $g$ .

**14.4.** Множество совпадения двух непрерывных отображений произвольного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

**14.5.** Постройте пример, показывающий, что условие хаусдорфовости в задаче 14.4 существенно.

Точка  $x \in X$  называется *неподвижной точкой* отображения  $f : X \rightarrow X$ , если  $f(x) = x$ .

**14.6.** Множество неподвижных точек непрерывного отображения хаусдорфова пространства в себя является замкнутым.

**14.7.** Постройте пример, показывающий, что условие хаусдорфовости в задаче 14.6 существенно.

**14.8.** Если отображения  $f, g : X \rightarrow Y$  непрерывны, пространство  $Y$  хаусдорфово,  $A$  – всюду плотное подмножество пространства  $X$  и  $f|_A = g|_A$ , то  $f = g$ .

**14.9. Загадка.** Как связаны между собой задачи 14.4, 14.6 и 14.8?

---

<sup>2</sup>Можно сказать несколько по-другому: каждая окрестность точки  $b$  содержит все члены последовательности с достаточно большими номерами.

#### 14'4. Наследственные свойства

Топологическое свойство называется *наследственным*, если оно передается от пространства к его подпространствам, т. е. если из того, что пространство  $X$  обладает этим свойством, следует, что любое подпространство пространства  $X$  тоже им обладает.

**14.10.** Какие из следующих топологических свойств наследственны:

- (1) конечность множества точек;
- (2) конечность топологической структуры;
- (3) бесконечность множества точек;
- (4) связность;
- (5) линейная связность?

**14.F.** Хаусдорфовость наследственна.

#### 14'5. Первая аксиома отделимости

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме отделимости*  $T_1$ , если каждая из любых двух различных точек пространства обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.<sup>3</sup> Более формально:  $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_y$ , такая что  $x \notin U_y$ .



**14.G.** Пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме отделимости,

- (1) *тогда все одноточечные подмножества пространства  $X$  замкнуты;*
- (2) *тогда все конечные подмножества пространства  $X$  замкнуты.*

**14.11.** Пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости, тогда любая его точка совпадает с пересечением всех своих окрестностей.

**14.12.** Всякое хаусдорфово пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

**14.H.** В хаусдорфовом пространстве все конечные множества замкнуты.

**14.I.** Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

**14.13.** Приведите пример, показывающий, что из первой аксиомы отделимости вторая не следует.

<sup>3</sup> $T_1$  ещё называют аксиомой Тихонова.

**14. J.** Покажите, что  $\mathbb{R}_{T_1}$  удовлетворяет первой аксиоме отделимости и не хаусдорфово. (Ср. 14.13).

**14. K.** Первая аксиома отделимости наследственна.

**14.14.** Если для любых различных точек  $a$  и  $b$  топологического пространства  $X$  существует такое его непрерывное отображение  $f$  в пространство, удовлетворяющее первой аксиоме отделимости, что  $f(a) \neq f(b)$ , то  $X$  удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

**14.15.** Докажите, что всякое непрерывное отображение пространства с тривиальной топологической структурой в пространство, удовлетворяющее первой аксиоме отделимости, постоянно.

**14.16.** В каждом множестве существует самая грубая топологическая структура, удовлетворяющая первой аксиоме отделимости. Какова она?

#### 14'6. Аксиома Колмогорова

Первая аксиома отделимости получается в результате ослабления аксиомы Хаусдорфа.

**14. L.** *Загадка.* Как ослабить первую аксиому отделимости?

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *аксиоме Колмогорова* или *нулевой аксиоме отделимости*  $T_0$ , если из любых двух различных точек этого пространства *хотя бы одна* обладает окрестностью, не содержащей другую из этих точек.

**14. M.** Антидискретное пространство, содержащее не менее двух точек, не удовлетворяет аксиоме  $T_0$ .

**14. N.** Следующие свойства топологического пространства  $X$  эквивалентны:

- (1)  $X$  удовлетворяет аксиоме Колмогорова;
- (2) замыкания любых двух различных одноточечных подмножеств пространства  $X$  различны;
- (3)  $X$  не содержит неодноточечного антидискретного подпространства;
- (4)  $X$  не содержит двуточечного антидискретного подпространства.

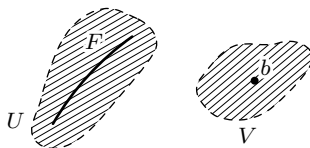
Напомним, что топологией наименьших окрестностей называется топологическая структура, в которой пересечение всех окрестностей, содержащих точку пространства, является окрестностью этой точки.

**14. O.** Топология является топологией некоторого частичного порядка в множестве, тогда это – топология наименьших окрестностей, удовлетворяющая аксиоме Колмогорова.

Таким образом, частично упорядоченные множества не только дают многочисленные примеры топологических пространств, среди которых – наиболее фундаментальные пространства, такие как прямая со стандартной топологией, но и получаются все из топологических пространств специального типа, причём весьма удалённого от класса метрических пространств.

#### 14'7. Третья аксиома отделимости

Говорят, что топологическое пространство  $X$  удовлетворяет *третьей аксиоме отделимости*  $T_3$ , если в нём любое замкнутое множество и любая не содержащаяся в этом множестве точка обладает непересекающимися окрестностями, т. е. если для любого замкнутого множества  $F \subset X$  и любой точки  $b \in X \setminus F$  существуют открытые множества  $U, V \subset X$ , такие что  $U \cap V = \emptyset$ ,  $U \supset F$  и  $b \in V$ .



Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно удовлетворяет аксиомам  $T_1$  и  $T_3$ .

**14.P.** Всякое регулярное пространство хаусдорфово.

**14.Q.** Пространство регулярно, тогда оно удовлетворяет второй и третьей аксиомам отделимости.

**14.17.** Постройте нерегулярное хаусдорфово пространство.

**14.18.** Постройте пространство, удовлетворяющее третьей аксиоме отделимости и не удовлетворяющее второй.

**14.19.** Пространство удовлетворяет третьей аксиоме отделимости, тогда в любой окрестности любой его точки содержится замыкание некоторой окрестности этой точки.

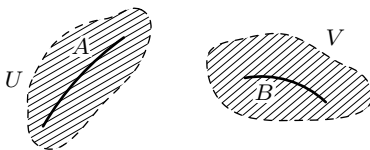
**14.20.** Докажите, что третья аксиома отделимости наследственна.

**14.R.** Всякое метрическое пространство регулярно.

#### 14'8. Четвертая аксиома отделимости

Говорят, что топологическое пространство  $X$  удовлетворяет *четвертой аксиоме отделимости*, если в нём любые два непересекающихся замкнутых множества обладают непересекающимися окрестностями, т. е. если для любых замкнутых  $A, B \subset X$  с  $A \cap B = \emptyset$  существуют открытые  $U, V \subset X$ , такие что  $U \cap V = \emptyset$ ,  $A \subset U$  и  $B \subset V$ .





Топологическое пространство называется *нормальным*, если оно удовлетворяет первой и четвертой аксиомам отделимости.

**14.S.** Всякое нормальное пространство регулярно (и, значит, хаусдорфово).

**14.T.** Пространство нормально, тогда оно удовлетворяет второй и четвертой аксиомам отделимости.

**14.21.** Постройте пространство, удовлетворяющее четвертой аксиоме отделимости и не удовлетворяющее второй.

**14.22.** Докажите, что пространство удовлетворяет четвертой аксиоме отделимости, тогда любая окрестность любого его замкнутого множества содержит замыкание некоторой окрестности этого множества.

**14.23.** Докажите, что всякое замкнутое подпространство нормального пространства нормально.

**14.24.** Постройте два замкнутых непересекающихся подмножества некоторого метрического пространства, расстояние между которыми равно нулю.

**14.25.** Пусть  $X$  – пространство, удовлетворяющее аксиоме  $T_4$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  – его замкнутые подмножества с пустым пересечением,  $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \emptyset$ . Докажите, что найдутся окрестности  $U_i \supset F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , такие что  $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$ .

**14.U.** Всякое метрическое пространство нормально.

**14.26.** Если  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное сюръективное отображение, переводящее каждое замкнутое множество в замкнутое, и пространство  $X$  нормально, то и пространство  $Y$  нормально.

## 14'9х. Пространство Немыцкого

Пусть  $\mathcal{H}$  есть верхняя полуплоскость с обычной евклидовой топологией. Положим  $\mathcal{N} = \mathcal{H} \cup L$ , где  $L$  есть ось абсцисс, и введем топологию на  $\mathcal{N}$  следующим образом. Открытыми в нем, кроме множеств, открытых в  $\mathcal{H}$ , являются еще множества вида  $x \cup D$ , где  $x \in L$ , а  $D$  есть открытый круг в  $\mathcal{H}$ , касающийся оси абсцисс в точке  $x$ . Полученное пространство называется *пространством Немыцкого*.

**14.1х.** Пространство Немыцкого хаусдорфово.

**14.2х.** Пространство Немыцкого регулярно.

**14.3х.** Какая топологическая структура индуцируется из  $\mathcal{N}$  на  $L$ ?

**14.4х.** Пространство Немыцкого не является нормальным.

**14.5х Следствие.** Существует не нормальное регулярное пространство.

**14.6х.** Вложите пространство Немыцкого в нормальное пространство так, чтобы дополнение его образа состояло из одной точки.

**14.7х Следствие.** Теорема 14.23 не распространяется на незамкнутые подпространства, т. е. нормальность не наследственна.

### 14'10х. Лемма Урысона и теорема Титце

**14.8х.** Пусть  $A$  и  $B$  – непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства  $X$ . Тогда существует непрерывная функция  $f : X \rightarrow I$ , такая что  $f^{-1}(0) = A$  и  $f^{-1}(1) = B$ .

**14.9х.** Пусть  $F$  – замкнутое подмножество метрического пространства  $X$ . Тогда всякую непрерывную функцию  $f : F \rightarrow [-1; 1]$  можно продолжить на все пространство  $X$ .

**14.9х.1.** Пусть  $F$  – замкнутое подмножество метрического пространства  $X$ . Для произвольной непрерывной функции  $f : F \rightarrow [-1; 1]$  найдется функция  $g : X \rightarrow [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ , такая что  $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$  при всех  $x \in F$ .

**14.Ах Лемма Урысона.** Для любых непересекающихся замкнутых подмножеств  $A$  и  $B$  нормального пространства  $X$  существует непрерывное отображение  $f : X \rightarrow I$ , такое что  $f(A) = 0$  и  $f(B) = 1$ .

**14.Ах.1.** Пусть  $A$  и  $B$  – замкнутые подмножества нормального пространства  $X$ . Рассмотрим множество  $\Lambda = \{\frac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbb{Z}_+, k \leq 2^n\}$ . Тогда существует набор  $\{U_p\}_{p \in \Lambda}$  открытых подмножеств в  $X$ , такой что для любых  $p, q \in \Lambda$  верно, что: 1)  $A \subset U_0$  и  $B \subset X \setminus U_1$  и 2) если  $p < q$ , то  $\text{Cl } U_p \subset U_q$ .

**14.Вх Теорема Титце.** Пусть  $A$  – замкнутое подмножество нормального пространства  $X$ . Для каждой непрерывной функции  $f : A \rightarrow [-1; 1]$  существует непрерывная функция  $F : X \rightarrow [-1; 1]$ , такая что  $F|_A = f$ .

**14.Сх Следствие.** Пусть  $A$  – замкнутое подмножество нормального пространства  $X$ . Тогда любую непрерывную функцию  $A \rightarrow \mathbb{R}$  можно продолжить до непрерывной функции на всем пространстве.

**14.10х.** Останется ли справедливой теорема Титце, если в ней заменить всюду отрезок  $[-1; 1]$  на  $\mathbb{R}$ ; на  $\mathbb{R}^n$ ; на  $S^1$ ; на  $S^2$ ?

**14.11х.** Выведите лемму Урысона из теоремы Титце.

## 15. Аксиомы счетности

В этом параграфе мы продолжим изучение топологических свойств, которые имеют характер дополнительных требований, налагаемых на топологическую структуру с целью приблизить рассматриваемую абстрактную ситуацию к конкретным и тем самым сделать ее более содержательной. Условия, изучаемые в этом параграфе, ограничивают топологическую структуру сверху: требуется, чтобы нечто было бы счетным.

### 15'1. Теоретико-множественное отступление: счетность

Напомним, что два множества называются *равномощными*, если существует биекция одного из них на другое. Множества, равномощные некоторому подмножеству множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел, называются *счетными*.

**15.1.** Множество  $X$  является счетным, когда существует инъекция  $X \rightarrow \mathbb{N}$  (или, чуть более общо, инъекция  $X$  в некоторое счетное множество).

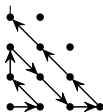
Иногда называют счетными только бесконечные счетные множества, т. е. только множества, равномощные всему  $\mathbb{N}$ , а наши счетные множества называют не более чем счетными. Это менее удобно; в частности, если последовательно придерживаться такой терминологии, то придется называть этот параграф “Аксиомы не более чем счетности” и терпеть другие неудобства. При нашей терминологии счетность обладает следующими удобными свойствами.

**15.A.** Всякое подмножество счетного множества счетно.

**15.B.** Образ счетного множества при любом отображении счетен.

**15.C.** Множество  $\mathbb{Z}$  счетно.

**15.D.** Множество  $\mathbb{N}^2 = \{(k, n) \mid k, n \in \mathbb{N}\}$  счетно.



**15.E.** Объединение счетного числа счетных множеств счетно.

**15.F.** Множество  $\mathbb{Q}$  счетно.

**15.G.** Множество  $\mathbb{R}$  несчетно.

**15.2.** Любой дизъюнктивный набор восьмерок на плоскости счетен.

### 15'2. Вторая аксиома счетности и сепарабельность

В этом параграфе мы будем изучать три ограничения на топологические структуры. Два из них имеет номера (один и два), у третьего номера нет. Как и в предыдущем параграфе, мы начинаем с ограничения номер два.

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет **второй аксиоме счетности**, если оно имеет счетную базу. С аксиомой счетности (без номера) связан термин **сепарабельность**. Говорят, что топологическое пространство **сепарабельно**, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

**15.H.** Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.

**15.I.** Вторая аксиома счетности наследственна.

**15.3.** Удовлетворяют ли второй аксиоме счетности стрелка и  $\mathbb{R}_{T_1}$ ?

**15.4.** Сепарабельны ли стрелка и  $\mathbb{R}_{T_1}$ ?

**15.5.** Постройте пример, показывающий, что сепарабельность не наследственна.

**15.J.** Метрическое сепарабельное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.

**15.K Следствие.** Для метрических пространств вторая аксиома счетности равносильна сепарабельности.

**15.L.** (Ср. 15.5.) В метрических пространствах сепарабельность наследственна.

**15.M.** Евклидовы пространства и любые их подпространства сепарабельны и удовлетворяют второй аксиоме счетности.

**15.6.** Постройте метрическое пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности.

**15.7.** Докажите, что в сепарабельном пространстве всякая совокупность попарно непересекающихся открытых множеств счетна.

**15.8.** Докажите, что число компонент открытого множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  счетно.

**15.N.** Непрерывный образ сепарабельного пространства сепарабелен.

**15.9.** Постройте пример, показывающий, что непрерывный образ пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, может не удовлетворять этой аксиоме.

**15.O Теорема Линделёфа.** Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить счетный набор множеств, также являющийся покрытием.

**15.10.** Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выделить счетный набор множеств, также являющийся базой этого пространства.

**15.11** Теорема Брауэра\*. Пусть  $\mathcal{K} = \{K_\lambda\}$  – семейство замкнутых множеств пространства, обладающего счетной базой, и пусть для любой убывающей последовательности  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$  множеств, принадлежащих семейству, пересечение  $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$  также принадлежит этому семейству. Тогда  $\mathcal{K}$  обладает минимальным множеством, т. е. таким множеством, никакое собственное подмножество которого не принадлежит  $\mathcal{K}$ .

### 15'3. Базы в точке

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $a \in X$ . *Базой* пространства  $X$  в точке  $a$  или *базой окрестностей* точки  $a$  называется такая совокупность окрестностей точки  $a$ , что всякая окрестность точки  $a$  содержит окрестность из этой совокупности.

**15.P.** Если  $\Sigma$  – база пространства  $X$ , то  $\{U \in \Sigma \mid a \in U\}$  есть база в точке  $a$ .

**15.12.** В метрическом пространстве базами в точке  $a$  являются:

- (1) совокупность всех открытых шаров с центром  $a$ ;
- (2) совокупность всех открытых шаров с рациональными радиусами и центром  $a$ ;
- (3) совокупность всех открытых шаров с центром  $a$  и радиусами  $r_n$ , где  $\{r_n\}$  – любая последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

**15.13.** Каковы минимальные базы в точке в дискретном и в антидискретном пространствах?

### 15'4. Первая аксиома счетности

Говорят, что пространство  $X$  удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если оно обладает счетными базами во всех своих точках.

**15.Q.** Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

**15.R.** Из второй аксиомы счетности следует первая.

**15.S.** Постройте пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности и не удовлетворяющее второй. (Ср. 15.6.)

**15.14.** Какие из следующих пространств удовлетворяют первой аксиоме счетности:

- |                              |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|
| (a) дискретное пространство; | (b) антидискретное пространство; |
| (c) стрелка;                 | (d) $\mathbb{R}_{T_1}$ ?         |

**15.15.** Приведите пример сепарабельного пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, в котором не имеет места вторая аксиома счетности.

**15.16.** Докажите, что если пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, то у каждой его точки имеется убывающая база в этой точке:  $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ .

### 15'5. Секвенциальный подход к топологии

Специалисты по математическому анализу очень любят последовательности и их пределы. Более того, они любят говорить обо всех топологических явлениях, опираясь на эти понятия. Эта традиция не имеет почти никаких математических оправданий, но зато она имеет долгую историю, восходящую к работам прошлого века по обоснованию анализа. На самом деле, почти всегда, за очень редкими исключениями (во всех обязательных лекционных курсах матмеха их можно пересчитать по пальцам), удобнее обходиться без последовательностей (если вы занимаетесь топологическими объектами, а не суммированием ряда, где последовательности входят в определения). Отдавая дань традиции, мы объясним здесь, как и в каких случаях топологические понятия можно описывать на языке последовательностей. Последовательность на латинском языке — секвенция. Поэтому соответствующие определения и сам подход называются *секвенциальными*.

Пусть  $A$  — подмножество топологического пространства  $X$ . Совокупность пределов всевозможных последовательностей точек множества  $A$  называются *секвенциальным замыканием* этого множества. Мы будем обозначать его  $\text{Scl } A$ .

**15.T.** Докажите, что  $\text{Scl } A \subset \text{Cl } A$ .

**15.U.** Если пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, то для любого  $A$  верно и обратное включение  $\text{Scl } A \supset \text{Cl } A$ , и, значит,  $\text{Scl } A = \text{Cl } A$ .

Таким образом, в пространствах, удовлетворяющих первой аксиоме счетности (в частности, во всех метрических пространствах), замыкания множеств можно восстановить (а значит, и определить), зная, какие последовательности сходятся и к какому пределу. По замыканиям, в свою очередь, можно определить и замкнутость, а по замкнутости — открытость и все прочие топологические понятия.

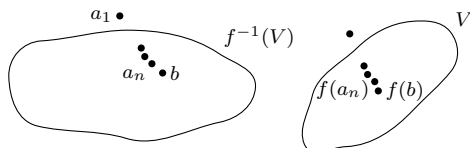
**15.17.** Пусть  $X$  — множество вещественных чисел с топологией, состоящей из  $\emptyset$  и дополнений всевозможных счетных подмножеств. (Проверьте, что это действительно топология.) Как устроены в таком  $X$  сходящиеся последовательности, секвенциальные замыкания, замыкания? Докажите, что в  $X$  имеются множества  $A$ , для которых  $\text{Cl } A \neq \text{Scl } A$ .

### 15'6. Секвенциальная непрерывность

Теперь рассмотрим в том же духе непрерывность отображений. Говорят, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  *секвенциально непрерывно*, если для

любой точки  $b \in X$  и любой последовательности  $a_n \in X$  точек пространства  $X$ , стремящейся к  $b$ , последовательность  $f(a_n)$  стремится к  $f(b)$ .

**15.V.** Всякое непрерывное отображение секвенциально непрерывно.



**15.W.** Прообраз секвенциально замкнутого множества при секвенциально непрерывном отображении секвенциально замкнут.

**15.X.** Если пространство  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, то любое секвенциально непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно.

Таким образом, для отображений пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, непрерывность и секвенциальная непрерывность равносильны.

**15.18.** Постройте секвенциально непрерывное, но не непрерывное отображение. (Ср. 15.17.)

### 15'7х. Теоремы вложимости и метризуемости

**15.Ах.** Пространство  $l_2$  сепарабельно и обладает счетной базой.

**15.Вх.** Регулярное пространство со счетной базой нормально.

**15.Сх.** Докажите, что нормальное пространство со счетной базой вкладывается в  $l_2$ . (Воспользуйтесь леммой Урысона 14.Ах.)

**15.Дх.** Топологическое пространство со счетной базой метризуемо, когда оно регулярно.

## 16. Компактность

### 16'1. Определение компактности

Топологическое свойство, которому посвящен этот параграф, играет особо важную роль и в топологии, и в ее приложениях. Оно представляет собой нечто вроде топологического аналога свойства множества быть конечным. (Эта аналогия, по-видимому, никогда не была формализована.)

Топологическое пространство называется **компактным**, если любое его покрытие открытыми множествами содержит конечную часть, также являющуюся покрытием.

Покрывтия, являющиеся частями данного покрытия, называются его **подпокрывтиями**. Таким образом, топологическое пространство компактно, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**16.A.** Любое конечное пространство и любое антидискретное пространство компактны.

**16.B.** Какие дискретные пространства компактны?

**16.1.** Пусть  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  – топологические структуры в множестве  $X$ . 1) Следует ли из компактности пространства  $(X, \Omega_2)$  компактность пространства  $(X, \Omega_1)$ ? 2) А наоборот?

**16.C.** Прямая  $\mathbb{R}$  некомпактна.

**16.D.** Пространство  $X$  некомпактно, тогда существует его открытое покрытие, не имеющее ни одного конечного подпокрывтия.

**16.2.** Компактна ли стрелка? А  $\mathbb{R}_{T_1}$ ?

### 16'2. Терминологические замечания

Первоначально компактностью называлось следующее более слабое свойство: из всякого счетного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**16.E.** Для пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, первоначальное определение равносильно современному.

Современное понятие компактности ввели, предложив для него термин бикompактность, советские математики П. С. Александров (1896–1982) и П. С. Урысон (1898–1924). Введенное понятие оказалось настолько удачным, что практически вытеснило старое и даже отобрало от него



имя (иногда термин бикомпактность все же употребляется – в основном топологами школы Александрова).

Другое отклонение от терминологии идёт от Бурбаки: мы не включаем хаусдорфовость в определение компактности, а Бурбаки включает. Согласно нашему определению пространство  $\mathbb{R}_{T_1}$  компактно, тогда как по Бурбаки – не компактно.

### 16'3. Компактность на языке замкнутых множеств

Говорят, что совокупность подмножеств некоторого множества *центрирована*, если пересечение любого конечного набора множеств этой совокупности непусто.

**16.F.** Совокупность  $\Sigma$  подмножеств множества  $X$  является центрированным, тогда она не содержит такой конечной части  $\Sigma_1$ , что дополнения множеств, входящих в  $\Sigma_1$ , покрывают  $X$ .

**16.G.** Топологическое пространство компактно, тогда любая центрированная совокупность его замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

### 16'4. Компактные множества

Когда говорят, что какое-то множество *компактно*, всегда имеют в виду, что это множество лежит в топологическом пространстве (в каком именно, должно быть ясно из контекста) и что, будучи наделено индуцированной топологией, оно является компактным пространством.

**16.H.** Подмножество топологического пространства  $X$  компактно, тогда из любого его покрытия множествами, открытыми в  $X$ , можно выделить конечное подпокрытие.

**16.3.** Компактно ли множество  $[1; 2) \subset \mathbb{R}$ ?

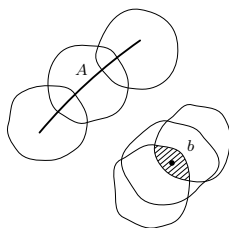
**16.4.** Компактно ли то же самое множество  $[1; 2)$  в стрелке?

**16.5.** Найдите необходимое и достаточное условие компактности множества в стрелке, формулируемое в нетопологических терминах.

**16.6.** Докажите, что любое подмножество пространства  $\mathbb{R}_{T_1}$  является компактным.

**16.7.** Пусть  $A$  и  $B$  – компактные подмножества пространства  $X$ . 1) Верно ли, что множество  $A \cup B$  компактно? 2) Верно ли, что множество  $A \cap B$  компактно?

**16.8.** Докажите, что множество  $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$  в  $\mathbb{R}$  компактно.

**16'5. Компактность и замкнутость****16.1.** Наследственна ли компактность?**16.2.** Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.**16.3.** Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.**16.4. Лемма к 16.3, но не только . . . .** Если  $A$  – компактное подмножество хаусдорфова пространства  $X$  и  $b$  – точка этого пространства, не лежащая в  $A$ , то существуют открытые множества  $U, V \subset X$ , такие что  $b \in V$ ,  $A \subset U$  и  $U \cap V = \emptyset$ .**16.5.** Сконструировать незамкнутое компактное подмножество какого-нибудь пространства. Какое минимальное число точек необходимо для этого?**16'6. Компактность и аксиомы отделимости****16.6.** Компактное хаусдорфово пространство регулярно.**16.7.** Компактное хаусдорфово пространство нормально.**16.8.** Пересечение любого семейства компактных подмножеств хаусдорфова пространства компактно. (Ср. 16.7.)**16.9.** Пусть  $X$  – хаусдорфово пространство,  $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  – семейство его компактных подмножеств,  $U$  – некоторое открытое множество, содержащее  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$ .Тогда  $U \supset \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$  для некоторого конечного  $A \subset \Lambda$ .**16.10.** Если  $\{K_n\}$  – убывающая последовательность компактных непустых связных подмножеств хаусдорфова пространства, то пересечение  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$  непусто и связно.**16'7. Компактность в евклидовом пространстве****16.11.** Отрезок  $I$  компактен.Напомним что  $n$ -мерный куб – это множество

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [0; 1] \text{ для } i = 1, \dots, n\}.$$

**16.12.** Куб  $I^n$  компактен.

**16.Q.** Компактное подмножество метрического пространства ограничено.

Итак, согласно 16.K и 16.Q, компактные подмножества метрического пространства замкнуты и ограничены.

**16.R.** Постройте замкнутое ограниченное подмножество метрического пространства, не являющееся компактным.

**16.13.** Компактны ли метрические пространства из задачи 4.A?

**16.S.** Подмножество евклидова пространства компактно, когда оно замкнуто и ограничено.

**16.14.** Какие из следующих множеств компактны:

- |                                |   |                |
|--------------------------------|---|----------------|
| (a) $[0; 1]$ ;                 | (b) луч $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ; | (c) $S^1$ ;    |
| (d) $S^n$ ;                    | (e) однополостной гиперболоид;                                | (f) эллипсоид; |
| (g) $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$ ? |   |                |

Матрицу  $(a_{ij})_{i,j=1}^n$  с вещественными элементами  $a_{ij}$  можно рассматривать как точку пространства  $\mathbb{R}^{nk}$ , занумеровав ее элементы числами от 1 до  $nk$  каким-либо способом (например, лексикографически). Тем самым множество  $L(n, k)$  всех таких матриц отождествляется с  $\mathbb{R}^{nk}$  и наделяется топологией. (Ср. 13.)

**16.15.** Какие из следующих подмножеств пространства  $L(n, n)$  компактны:

- (1)  $GL(n) = \{A \in L(n, n) \mid \det A \neq 0\}$ ;
- (2)  $SL(n) = \{A \in L(n, n) \mid \det A = 1\}$ ;
- (3)  $O(n) = \{A \in L(n, n) \mid A \text{ ортогональная матрица}\}$ ;
- (4)  $\{A \in L(n, n) \mid A^2 = E\}$ , (здесь  $E$  – это единичная матрица)?

## 16'8. Компактность и непрерывные отображения

**16.T.** Непрерывный образ компактного пространства компактен (Другими словами, если  $X$  – компактное пространство,  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение, то множество  $f(X)$  компактно).

**16.U.** На компактном множестве всякая непрерывная функция ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений (Другими словами, если  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция и  $X$  компактно, то существует  $a, b \in X$ , такие что  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  для любого  $x \in X$ ). (Ср. 16.T и 16.S.)

**16.16.** Если функция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, то  $f(I)$  – замкнутый отрезок.

**16.17.** Пусть  $A$  – подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что  $A$  является компактным, когда всякая непрерывная функция на  $A$  является ограниченной.

**16.18.** Докажите, что если  $F$  – замкнутое, а  $K$  – не пересекающееся с ним компактное подмножество метрического пространства, то  $\rho(F, K) > 0$ .

**16.19.** Любое открытое множество, содержащее компактное подмножество  $A$  метрического пространства  $X$ , содержит  $\varepsilon$ -окрестность множества  $A$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

**16.20.** Если  $A$  – замкнутое связное подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $V$  – его замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность, то множество  $V$  линейно связно.

**16.21.** Докажите, что если в компактном метрическом пространстве замыкание любого открытого шара есть замкнутый шар с тем же центром и того же радиуса, то в этом пространстве любой шар связан.

**16.22.** Пусть  $X$  – компактное метрическое пространство и  $f : X \rightarrow X$  – такое отображение, что  $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$  для любых  $x, y \in X$  с  $x \neq y$ . Тогда отображение  $f$  имеет неподвижную точку и такая точка единственна. (Напомним, что неподвижная точка отображения  $f$  – это такая точка  $x$ , что  $f(x) = x$ .)

**16.23.** Для любого покрытия компактного метрического пространства открытыми множествами существует такое число  $r > 0$ , что любой открытый шар радиусом  $r$  содержится по меньшей мере в одном элементе покрытия.

**16.V Лемма Лебега.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение компактного метрического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  и  $\Gamma$  – открытое покрытие пространства  $Y$ . Тогда существует такое число  $\delta > 0$ , что образ  $f(A)$  любого множества  $A \subset X$  диаметра меньше  $\delta$  содержится в некотором элементе покрытия  $\Gamma$ .

## 16'9. Замкнутые отображения

Непрерывное отображение называется **замкнутым**, если образы замкнутых множеств замкнуты.

**16.24.** Непрерывная биекция есть гомеоморфизм, когда она является замкнутым отображением.

**16.W.** Любое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.

Вот два важных следствия этой теоремы.

**16.X.** Непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.

**16.Y.** Непрерывная инъекция компактного пространства в хаусдорфово является топологическим вложением.

**16.25.** Покажите, что в теореме 16.X ни одно из четырех условий нельзя выбросить, не сделав формулировку неверной.

**16.26.** Существует ли такое некомпактное множество в евклидовом пространстве, что любое его непрерывное отображение в хаусдорфово пространство замкнуто? (См. 16.U и 16.W.)

**16.27.** Сужение замкнутого отображения на замкнутое подмножество является замкнутым отображением.

**16.28.** Пусть отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно,  $K \subset X$  – компактное множество, а пространство  $Y$  хаусдорфово. Предположим, что сужение  $f|_K$  является инъективным отображением и для всякой точки  $a \in K$  найдется окрестность  $U_a$ , такая что сужение  $f|_{U_a}$  инъективно. Докажите, что у множества  $K$  существует окрестность  $U$ , такая что сужение  $f|_U$  является инъективным отображением.

### 16'10х. Нормы в $\mathbb{R}^n$

**16.1х.** Докажите, что любая норма  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  есть непрерывная функция.

**16.2х.** Докажите, что любые две нормы в  $\mathbb{R}^n$  эквивалентны (т. е. задают одну и ту же топологию). См. 4.27, ср. 4.31.

**16.3х.** Верно ли утверждение предыдущей задачи для метрик в  $\mathbb{R}^n$ ?

### 16'11х. Индукция по компактности

Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *локально ограниченной*, если для каждой точки  $a \in X$  существует такая ее окрестность  $U$  и такое число  $M > 0$ , что  $|f(x)| \leq M$  при  $x \in U$  (т. е. если каждая точка пространства  $X$  обладает окрестностью, сужение функции  $f$  на которую ограничено).

**16.4х.** Если пространство  $X$  компактно, а функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  локально ограничена, то она ограничена.

Это утверждение является простейшим применением формулируемого ниже (см. 16.5х) общего принципа, который можно назвать *индукцией по компактности*.

Пусть  $X$  топологическое пространство,  $\mathcal{E}$  – некоторое свойство его подмножеств. Назовем  $\mathcal{E}$  *аддитивным*, если объединение любого конечного набора множеств, обладающих свойством  $\mathcal{E}$ , также обладает свойством  $\mathcal{E}$ . Скажем, что  $X$  *локально обладает свойством  $\mathcal{E}$* , если любая его точка имеет окрестность, обладающую этим свойством.

**16.5х.** Докажите, что компактное пространство, локально обладающее некоторым аддитивным свойством, само обладает этим свойством.

**16.6х.** Выведите при помощи этого принципа утверждения задач 16.Q, 17.M, и 17.N.

## 17. Секвенциальная компактность

### 17'1. Секвенциальная компактность и компактность

Говорят, что топологическое пространство *секвенциально компактно*, если любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

**17.A.** *Компактное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, секвенциально компактно.*

Точка  $b$  называется *точкой накопления* множества  $A$ , если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек этого множества.

**17.A.1.** В пространстве, удовлетворяющем первой аксиоме отделимости, понятия точки накопления и предельной точки совпадают.

**17.A.2.** *В компактном пространстве всякое бесконечное множество обладает точкой накопления.*

**17.A.3.** Выведите теорему 17.A из 17.A.2.

**17.B.** *Секвенциально компактное пространство со счетной базой компактно.*

**17.B.1.** *Всякая убывающая последовательность непустых замкнутых множеств секвенциально компактного пространства обладает непустым пересечением.*

**17.B.2.** Всякая убывающая последовательность замкнутых непустых множеств имеет непустое пересечение, тогда всякая центрированная счетная совокупность замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

**17.B.3.** Выведите теорему 17.B из 17.B.1 и 17.B.2.

**17.C.** *Для пространств со счетной базой компактность и секвенциальная компактность равносильны.*

### 17'2. Секвенциальная компактность в метрических пространствах

Подмножество  $A$  метрического пространства  $X$  называется его  $\varepsilon$ -сетью (где  $\varepsilon$  – положительное вещественное число), если  $\rho(x, A) < \varepsilon$  для любой точки  $x \in X$ .

**17.D.** Всякое компактное метрическое пространство обладает конечной  $\varepsilon$ -сетью для любого  $\varepsilon > 0$ .

**17.E.** Всякое секвенциально компактное метрическое пространство обладает конечной  $\varepsilon$ -сетью для любого  $\varepsilon > 0$ .

**17.F.** Подмножество метрического пространства всюду плотно, тогда оно является  $\varepsilon$ -сетью для любого  $\varepsilon > 0$ .

**17.G.** Всякое секвенциально компактное метрическое пространство сепарабельно.

**17.H.** Всякое секвенциально компактное метрическое пространство обладает счетной базой.

**17.I.** Для метрических пространств компактность и секвенциальная компактность равносильны.

**17.1.** Любое секвенциально компактное метрическое пространство ограничено. (Ср. 17.E и 17.I.)

**17.2.** Во всяком метрическом пространстве для любого  $\varepsilon > 0$  существует:

- (1) дискретная  $\varepsilon$ -сеть и даже
- (2) такая  $\varepsilon$ -сеть, что расстояние между любыми двумя ее точками не меньше  $\varepsilon$ .

### 17'3. Компактность и полнота

Последовательность  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  точек метрического пространства называется *последовательностью Коши* и говорят, что она *сходится в себе*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $N$ , что  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$  для любых  $n, m > N$ .

**17.J.** Всякая сходящаяся в себе последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая его последовательность Коши имеет предел.

**17.K.** Метрическое пространство является полным, тогда любая убывающая последовательность его замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, обладает непустым пересечением.

**17.L.** Компактное метрическое пространство полно.

**17.M.** Полное метрическое пространство компактно, тогда для любого  $\varepsilon > 0$  в нем существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

**17.N.** Полное метрическое пространство компактно, тогда для любого  $\varepsilon > 0$  в нем существует компактная  $\varepsilon$ -сеть.

### 17'4х. Некомпактность бесконечномерных шаров

Обозначим символом  $\ell^\infty$  множество всех ограниченных последовательностей вещественных чисел. Оно является векторным пространством относительно покомпонентных операций. В нем имеется естественная норма  $\|x\| = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**17.1х.** Компактны ли замкнутые шары пространства  $\ell^\infty$ ? А сферы?

**17.2х.** Компактно ли множество  $\{x \in l^\infty \mid |x_n| \leq 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ ?

**17.3х.** Докажите, что множество  $\{x \in l^\infty \mid |x_n| = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$  гомеоморфно канторову множеству  $K$  (введённому в 2).

**17.4х\*.** Существует ли бесконечномерное нормированное пространство, в котором замкнутые шары компактны?

### 17'5х. $p$ -адические числа

Фиксируем простое число  $p$ . Формальный ряд вида  $a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + \dots$  с  $0 \leq a_n < p$ ,  $a_n \in \mathbb{N}$  называется *целым  $p$ -адическим числом*. (Слово *формальный* означает здесь, что плюсы не призывают к немедленному сложению, а рассматриваются как своего рода знаки препинания.) Множество целых  $p$ -адических чисел обозначается через  $\mathbb{Z}_p$ . Введем в него следующую метрику: для  $x \neq y$  положим  $\rho(x, y) = p^{-m}$ , где  $m$  — первый показатель, при котором коэффициенты в рядах  $x$  и  $y$  различны.

**17.5х.** Докажите, что  $\rho$  — действительно метрика в  $\mathbb{Z}_p$ .

Эта метрика называется  *$p$ -адической*, а  $\mathbb{Z}_p$  с нею называется *пространством целых  $p$ -адических чисел*. Имеется инъекция  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ , при которой числу  $a_0 + a_1p + \dots + a_np^n \in \mathbb{Z}$  с  $0 \leq a_k < p$ ,  $a_k \in \mathbb{N}$ , ставится в соответствие ряд  $a_0 + a_1p + \dots + a_np^n + 0 \cdot p^{n+1} + \dots$ , а числу  $-(a_0 + a_1p + \dots + a_np^n) \in \mathbb{Z}$  с  $0 \leq a_k < p$ ,  $a_k \in \mathbb{N}$  — ряд  $b_0 + b_1p + \dots + b_np^n + (p-1)p^{n+1} + (p-1)p^{n+2} + \dots$ , где  $b_0 + b_1p + \dots + b_np^n = p^{n+1} - (a_0 + a_1p + \dots + a_np^n)$ . Ср. 4.Iх.

**17.6х.** Докажите, что образ этой инъекции является всюду плотным множеством в  $\mathbb{Z}_p$ .

**17.7х.** Является ли пространство  $\mathbb{Z}_p$  полным?

**17.8х.** Компактно ли  $\mathbb{Z}_p$ ?

### 17'6х. Пространства выпуклых фигур

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^2$  — замкнутый круг радиуса  $p$ . Рассмотрим множество  $\mathcal{P}_n$  всех выпуклых многоугольников  $P$ , таких что:

- периметр многоугольника  $P$  не превосходит  $p$ ;
- $P$  содержится в круге  $D$ ;
- $P$  имеет не более  $n$  вершин (не исключаются случаи одной и двух вершин, при этом периметр отрезка считаем равным удвоенной длине этого отрезка).

См. 4.Ах, ср. 4.Сх.

**17.9х.** Снабдите это множество естественной структурой топологического пространства. Например, введите естественную метрику.

**17.10х.** Докажите, что это пространство компактно.

**17.11х.** Докажите, что среди многоугольников в  $\mathcal{P}_n$  существует многоугольник наибольшей площади.

**17.12х.** Докажите, что среди многоугольников в  $\mathcal{P}_n$  наибольшую площадь имеет правильный  $n$ -угольник.



Рассмотрим теперь множество  $\mathcal{P}_\infty$  всех выпуклых многоугольников периметра, не превосходящего  $p$ , содержащихся в круге радиуса  $p$ . Таким образом,  $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{P}_n$ .

**17.13х.** Введите в  $\mathcal{P}_\infty$  структуру топологического пространства так, чтобы пространства  $\mathcal{P}_n$  были его подпространствами.

**17.14х.** Докажите, что пространство  $\mathcal{P}(p, \infty)$  построенное в качестве решения задачи 17.13х, не компактно.

Рассмотрим теперь множество  $\mathcal{P}$  всех замкнутых выпуклых подмножеств плоскости с периметром, не превосходящим  $p$ , и содержащихся в круге радиуса  $p$ . (Обратите внимание, что каждое из них компактно.)

**17.15х.** Введите в это множество топологию, которая бы индуцировала рассмотренные выше топологии пространств многоугольников.

**17.16х.** Докажите, что пространство  $\mathcal{P}$  компактно.

**17.17х.** Докажите, что среди всех выпуклых плоских множеств с периметром  $p$  существует множество наибольшей площади.

**17.18х.** Докажите, что таковым является круг радиусом  $\frac{p}{2\pi}$ .

## 18х. Локальная компактность и паракомпактность

### 18'1х. Локальная компактность

Топологическое пространство  $X$  называется *локально компактным*, если у каждой его точки имеется окрестность с компактным замыканием.

**18.1х.** Компактное пространство локально компактно.

**18.2х.** Какие из следующих пространств локально компактны:

(а)  $\mathbb{R}$ ; (б)  $\mathbb{Q}$ ; (с)  $\mathbb{R}^n$ ; (д) дискретное пространство?

**18.3х.** Приведите пример двух локально компактных подмножеств прямой, объединение которых не является локально компактным.

**18.Ах.** Наследственна ли локальная компактность?

**18.Вх.** Замкнутое подмножество локально компактного пространства локально компактно.

**18.Сх.** Верно ли, что открытое подмножество локально компактного пространства локально компактно?

**18.Дх.** Хаусдорфово локально компактное пространство регулярно.

**18.Ех.** Открытое подмножество локально компактного хаусдорфова пространства локально компактно.

**18.Фх.** Локальная компактность является локальным топологическим свойством для хаусдорфовых пространств. Другими словами, хаусдорфово пространство является локально компактно, тогда каждая его точка обладает локально компактной окрестностью.

### 18'2х. Одноточечная компактификация

Пусть  $(X, \Omega)$  – хаусдорфово топологическое пространство и  $X^*$  – множество, получающееся из  $X$  добавлением одной точки  $x_*$  (которая, разумеется, не принадлежит  $X$ ). Пусть  $\Omega^*$  – совокупность подмножеств  $X^*$ , состоящая из

- множеств, открытых в  $X$ , и
- множеств вида  $X^* \setminus C$ , где  $C \subset X$  – компактное множество:

$$\Omega^* = \Omega \cup \{X^* \setminus C \mid C \subset X \text{ – компактное множество}\}.$$

**18.Гх.** Докажите, что набор  $\Omega^*$  – топологическая структура.

**18.Нх.** Докажите, что пространство  $(X^*, \Omega^*)$  компактно.

**18.1х.** Включение  $X \hookrightarrow X^*$  является топологическим вложением (относительно исходной топологии в  $X$  и  $\Omega^*$ ).

**18.2х.** Если пространство  $X$  локально компактно, то пространство  $(X^*, \Omega^*)$  хаусдорфово. (Напомним, что  $X$  в этом пункте предполагается хаусдорфовым.)

Топологическое вложение пространства  $X$  в компактное пространство  $Y$  называется **компактификацией** пространства  $X$ , если его образ плотен в  $Y$ . Так же в этой ситуации называется и пространство  $Y$ . (Для упрощения обозначений мы будем отождествлять  $X$  с его образом в  $Y$ .)

**18.3х.** Если  $X$  – локально компактное хаусдорфово пространство и  $Y$  – его хаусдорфова компактификация с одноточечным  $Y \setminus X$ , то существует гомеоморфизм  $Y \rightarrow X^*$ , тождественный на  $X$ .

Такое пространство  $Y$  называется **одноточечной компактификацией** или **компактификацией Александрова** пространства  $X$ . Из утверждения 18.3х следует, что пространство  $Y$  в понятном смысле единственно.

**18.4х.** Докажите, что одноточечная компактификация плоскости  $\mathbb{R}^2$  гомеоморфна  $S^2$ .

**18.4х.** Одноточечная компактификация пространства  $\mathbb{R}^n$  гомеоморфна сфере  $S^n$ .

**18.5х.** Явно опишите одноточечные компактификации следующих пространств:

- (1) кольца  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ ;
- (2) квадрата без вершин  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-1; 1], |xy| < 1\}$ ;
- (3) полосы  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0; 1]\}$ ;
- (4) компактного пространства.

**18.6х.** Локально компактное хаусдорфово пространство регулярно.

**18.6х.** Пусть  $X$  – локально компактное хаусдорфово пространство,  $K$  – некоторое его компактное подмножество,  $U$  – окрестность множества  $K$ . Тогда существует окрестность  $V$  множества  $K$ , замыкание  $\text{Cl } V$  которой компактно и содержится в  $U$ .

### 18'3х. Собственные отображения

Непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется **собственным**, если оно непрерывно и прообраз любого компактного множества при  $f$  компактен.

Пусть  $X, Y$  – хаусдорфовы пространства. Всякое непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  естественным образом продолжается до отображения

$$f^* : X^* \rightarrow Y^* : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in X, \\ y_* & \text{при } x = x_*. \end{cases}$$

**18.Nх.** Докажите, что отображение  $f^*$  непрерывно, тогда  $f$  является собственным.

**18.Ох.** Всякое собственное отображение хаусдорфова пространства в хаусдорфово локально компактное пространство замкнуто.

Утверждение 18.Ох связано с теоремой 16.W.

**18.Рх.** Продолжите эту аналогию: сформулируйте и докажите утверждения, соответствующие теоремам 16.Y и 16.X.

### 18'4х. Локально конечные семейства

Множество  $\Gamma$  подмножеств пространства  $X$  называется *локально конечным*, если всякая точка пространства  $X$  обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств, принадлежащих  $\Gamma$ .

**18.Qх.** Любое локально конечное покрытие компактного пространства конечно.

**18.7х.** Если множество  $\Gamma$  подмножеств пространства  $X$  локально конечно, то локально конечно и множество  $\{Cl A \mid A \in \Gamma\}$  замыканий множеств из  $\Gamma$ .

**18.8х.** Если семейство  $\Gamma$  подмножеств пространства  $X$  локально конечно, то каждое компактное подмножество  $A \subset X$  пересекается лишь с конечным числом элементов семейства  $\Gamma$ .

**18.9х.** Если совокупность  $\Gamma$  подмножеств пространства  $X$  локально конечна и замыкание  $Cl A$  каждого  $A \in \Gamma$  компактно, то каждое множество  $A \in \Gamma$  пересекается только с конечным числом множеств, принадлежащих  $\Gamma$ .

**18.10х.** Любое локально конечное покрытие секвенциально компактного пространства конечно.

**18.Rх.** Постройте открытое покрытие евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , которое не обладает локально конечным подпокрытием.

Пусть  $\Gamma$  и  $\Delta$  покрытия множества  $X$ . Говорят, что  $\Delta$  *вписано* в  $\Gamma$ , если каждый элемент  $A \in \Delta$  содержится в некотором элементе  $B \in \Gamma$ .

**18.Sх.** Во всякое открытое покрытие евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  можно вписать локально конечное покрытие.

**18.Tх.** Пусть  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  – локально конечное открытое покрытие пространства  $\mathbb{R}^n$ . Существует открытое покрытие  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , такое что  $Cl V_i \subset U_i$  при любом  $i \in \mathbb{N}$ .

### 18'5х. Паракомпактные пространства

Пространство  $X$  называется *паракомпактным*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

**18.Uх.** Любое компактное пространство паракомпактно.

**18.Vx.** Евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  паракомпактно.

**18.Wx.** Пусть  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ , где множества  $X_i$  компактны и таковы, что  $X_i \subset \text{Int } X_{i+1}$ . Тогда пространство  $X$  паракомпактно.

**18.Xx.** Пусть пространство  $X$  локально компактно. Если  $X$  покрывается счетным числом компактных множеств, то  $X$  паракомпактно.

**18.11x.** Докажите, что если локально компактное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно паракомпактно.

**18.12x.** Замкнутое подмножество паракомпактного пространства паракомпактно.

**18.13x.** Несвязное объединение паракомпактных пространств паракомпактно.

### 18'6x. Паракомпактность и аксиомы отделимости

**18.14x.** Пусть  $X$  – паракомпактное пространство,  $F$  и  $M$  – два его непересекающихся подмножества  $X$ , причем  $F$  замкнуто. Предположим, что  $F$  покрыто открытыми множествами  $U_\alpha$ , замыкания которых не пересекаются с множеством  $M$ :  $\text{Cl } U_\alpha \cap M = \emptyset$ . Тогда у множеств  $F$  и  $M$  имеются непересекающиеся окрестности.

**18.15x.** Хаусдорфово паракомпактное пространство регулярно.

**18.16x.** Хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.

**18.17x.** Пусть  $X$  – хаусдорфово локально компактное и паракомпактное пространство,  $\Gamma$  – локально конечное открытое покрытие  $X$ . Тогда у пространства  $X$  имеется локально конечное открытое покрытие  $\Delta$ , такое что замыкания  $\text{Cl } V$ , где  $V \in \Delta$ , компактны и покрытие  $\{\text{Cl } V \mid V \in \Delta\}$  вписано в  $\Gamma$ .

Следующее утверждение является более общим (хотя, с формальной точки зрения, более слабым).

**18.18x.** Пусть  $X$  – нормальное пространство и  $\Gamma = \{U_\alpha\}$  – его локально конечное открытое покрытие. Тогда существует такое локально конечное открытое покрытие  $\{V_\beta\}$ , что покрытие  $\{\text{Cl } V_\beta\}$  вписано в исходное покрытие  $\Gamma$ .

**Информация.** Все метризуемые пространства паракомпактны.

### 18'7x. Разбиения единицы

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  – функция. Множество  $\text{Cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$  называется *носителем* функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  и обозначается через  $\text{supp } f$ .

**18.19x.** Пусть  $X$  – топологическое пространство, а семейство непрерывных функций  $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \Lambda$  таково, что носители  $\text{supp}(f_\alpha)$  составляют локально конечное покрытие пространства  $X$ . Тогда формула

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x)$$

определяет непрерывную функцию  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Семейство неотрицательных функций  $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется *разбиением единицы*, если множества  $\text{supp}(f_\alpha)$  составляют локально конечное покрытие пространства  $X$  и имеет место соотношение  $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1$ .

Говорят, что разбиение единицы  $\{f_\alpha\}$  *подчинено* покрытию  $\{\Gamma\}$ , если всякий носитель  $\text{supp}(f_\alpha)$  содержится в некотором элементе покрытия  $\{\Gamma\}$ .

**18.Ух.** Для всякого нормального пространства и всякого его локально конечного открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы.

**18.20х.** Пусть пространство  $X$  хаусдорфово. Если для каждого его открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы, то пространство  $X$  паракомпактно.

**Информация.** Хаусдорфово пространство паракомпактно, тогда для всякого его открытого покрытия существует подчиненное ему разбиение единицы.

## 18'8х. Приложение: составление вложений из кусков

**18.21х.** Пусть  $X$  – топологическое пространство и  $\{U_i\}_{i=1}^k$  – открытое покрытие  $X$ . Если для каждого  $i$  множество  $U_i$  можно вложить в  $\mathbb{R}^n$ , то пространство  $X$  можно вложить в  $\mathbb{R}^{k(n+1)}$ .

**18.21х.1.** Пусть  $h_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, k$ , – вложения и пусть отображения  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_i\}$ . Положим  $\hat{h}_i(x) = (h_i(x), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Покажите, что отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}^{k(n+1)} : x \mapsto (f_i(x)\hat{h}_i(x))_{i=1}^k$  является вложением.

**18.22х. Загадка.** Каким образом вы можете обобщить утверждение 18.21х?

## Доказательства и комментарии

**11.А** Множество  $A$  открыто и замкнуто, тогда множества  $A$  и  $X \setminus A$  открыты, тогда  $A$  и  $X \setminus A$  замкнуты.

**11.В** Достаточно доказать следующее формально более слабое утверждение: *Пространство, в котором существует связное всюду плотное множество, само является связным.* (См. 6.3.) Пусть  $X$  – пространство и  $A$  – его связное всюду плотное подмножество. Пусть  $X = U \cup V$ , где множества  $U$  и  $V$  открыты и не пересекаются. Докажем, что одно из этих множеств пусто. Множества  $U \cap A$  и  $V \cap A$  не пересекаются и открыты в  $A$ , значит

$$A = X \cap A = (U \cup V) \cap A = (U \cap A) \cup (V \cap A).$$

Так как  $A$  связно, то одно из множеств разбиения, к примеру  $U \cap A$ , пусто. Тогда и множество  $U$  пусто, поскольку  $A$  всюду плотно, см. 6.М.

**11.С** Для упрощения обозначений положим  $X = \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}$ . В силу теоремы 11.А достаточно доказать, что если  $U$  и  $V$  – открытые множества, составляющие разбиение  $X$ , то либо  $U = \emptyset$ , либо  $V = \emptyset$ . Для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , поскольку множество  $A_{\lambda}$  по условию связно, то либо  $A_{\lambda} \subset U$ , либо  $A_{\lambda} \subset V$  (см. 11.14). Зафиксируем некоторое  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Для определенности считаем, что  $A_{\lambda_0} \subset U$ . Так как каждое из множеств  $A_{\lambda}$  пересекается с  $A_{\lambda_0}$ , то все они лежат в  $U$ , так что ни одно из них не пересекается с  $V$ , следовательно

$$V = V \cap X = V \cap \bigcup_{\lambda} A_{\lambda} = \bigcup_{\lambda} (V \cap A_{\lambda}) = \emptyset.$$

**11.Е** Примените теорему 11.С к семейству  $\{A_{\lambda} \cup A_{\lambda_0}\}_{\lambda \in \Lambda}$ , которое состоит из связных множеств (в силу 11.Д). (Или просто повторите доказательство теоремы 11.С.)

**11.Ф** Используйте рассуждение из 11.С, а для доказательства того, что  $A_k \subset U$  при всех  $k \in \mathbb{Z}$ , примените метод математической индукции.

**11.Г** Очевидно, поскольку объединение всех связных множеств, содержащих данную точку, во-первых, связно в силу 11.С, во-вторых, максимально.

**11.Н** Пусть  $A$  и  $B$  – компоненты связности. Предположим, что  $A \cap B \neq \emptyset$ . В силу 11.Д множество  $A \cup B$  связно. Поскольку компонента является наибольшим связным содержащим некоторую точку множеством, то  $A \supset A \cup B \subset B$ , значит  $A = A \cup B = B$ .

**11.1**  $\Rightarrow$  Это очевидно, так как компонента связна.  $\Leftarrow$  Так как в таком случае компоненты точек пересекаются, то они совпадают.

**11.К** Пусть  $A$  – компонента связности. В силу 11.В ее замыкание  $\text{Cl } A$  также является связным. Так как компонента обладает свойством максимальности, то  $\text{Cl } A \subset A$ . Значит,  $A = \text{Cl } A$ , так как обратное включение имеет место вообще для любого множества.

**11.М** См. 11.10.

**11.Н** Рассмотрим подотображение  $\text{ab}(f) : X \rightarrow f(X)$ . Таким образом, достаточно доказать следующую теорему:

*Если пространство  $X$  связно, а отображение  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывная сюръекция, то и пространство  $Y$  связно.*

Рассмотрим разбиение пространства  $Y$  на два открытых множества  $U$  и  $V$  и докажем, что одно из них пусто. В силу непрерывности отображения, прообразы  $f^{-1}(U)$  и  $f^{-1}(V)$  открыты и составляют разбиение пространства  $X$ . Поскольку  $X$  связно, одно из них пусто. Пусть  $f^{-1}(U) = \emptyset$ . Так как  $f$  сюръективно, то и  $U = \emptyset$ .

**11.О**  $\Rightarrow$  Пусть  $X = U \cup V$ , где множества  $U$  и  $V$  открыты, непусты и непересекаются. Положим  $f(x) = -1$  при  $x \in U$  и  $f(x) = 1$  при  $x \in V$ . Отображение  $f : X \rightarrow S^0$  непрерывно и сюръективно, не правда ли?  $\Leftarrow$  Предположим противное, пусть  $X$  связно. Тогда, в силу 11.Н, будет связным и  $S^0$  – противоречие.

**11.Р** Собственно говоря, в силу 11.О это утверждение есть следствие теоремы Больцано–Коши о промежуточном значении. Однако естественнее поступить наоборот: вывести теорему о промежуточном значении из задачи 11.О и связности  $I$ .

Итак, пусть  $[0; 1] = U \cup V$ , где множества  $U$  и  $V$  не пересекаются и открыты в  $[0; 1]$ . Предположим, что  $0 \in U$ , рассмотрим множество  $C = \{x \in [0; 1] \mid [0; x) \subset U\}$  и положим  $c = \sup C$ . Покажите, что каждое из предположений –  $c \in U$  и  $c \in V$  – приводит к противоречию. Другие доказательства теоремы 11.Р намечены ниже в леммах 11.Р.1 и 11.Р.2.

**11.Р.1** Проведите рассуждение по индукции. Для каждого  $n = 1, 2, 3, \dots$ , положите

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) := \begin{cases} (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n) & \text{если } \frac{a_n+b_n}{2} \in U, \\ (a_n, \frac{a_n+b_n}{2}) & \text{если } \frac{a_n+b_n}{2} \in V. \end{cases}$$

**11.Р.2** С одной стороны,  $c \in U$ , так как  $c \in \text{Cl}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $a_n \in U$ , а множество  $U$  замкнуто в  $I$ . С другой стороны, то же рассуждение показывает, что  $c \in V$ . Это противоречие показывает, что  $U$  и  $V$  не могут одновременно быть замкнутыми, таким образом,  $I$  связен.



**11.S** Каждое открытое подмножество прямой есть объединение непересекающихся интервалов, а в каждом интервале есть хотя бы одна рациональная точка. Следовательно, всякое открытое подмножество прямой есть объединение не более чем счетного числа интервалов. Осталось заметить, что каждый из них является связным множеством (см. следующее утверждение).

**11.T** Используйте 11.R и 11.J. (Ср. 11.U и 11.X.)

**11.U** Используйте 11.R и 11.J. (Напомним, что множество  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется выпуклым, если  $[p; q] \subset K$  для любых точек  $p, q \in K$ .)

**11.V** Используйте 11.R и 11.C.

**11.X**  $\Rightarrow$  Это в точности утверждение 11.10.  $\Leftarrow$  Это в точности утверждение 11.V.

**11.Y** Используйте 10.R, 11.U, и, например, теорему 11.B (или 11.I).

**12.A** Поскольку отрезок связан (см. 11.R), то в силу 11.N связан и его образ. Значит (см. 11.30) он является промежутком, следовательно, содержит все точки, лежащие между  $f(a)$  и  $f(b)$ .

**12.B** См. доказательство 12.A.

**12.D** Одно из них связно, а другое – нет.

**12.E** К примеру, если  $f : I \rightarrow S^1$  – гомеоморфизм, то и  $\text{ab } f : I \setminus \frac{1}{2} \rightarrow S^1 \setminus f(\frac{1}{2})$  – гомеоморфизм, что невозможно, поскольку первое множество несвязно, а второе связно, так как гомеоморфно интервалу.

**12.F** Аналогично 12.4.

**12.2x** Потому что для всякой точки  $x_0 \in X$  множество  $\{x \mid f(x) = f(x_0)\}$  и открыто, и замкнуто (докажите это). Или по-другому: прообраз  $f^{-1}(y)$  любой точки  $y$  – открытое множество.

**13.A** Так как покрытие  $\{[0; \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}; 1]\}$  отрезка  $[0; 1]$  является фундаментальным, то из непрерывности сужений отображения на каждый элемент покрытия следует непрерывность самого этого отображения.

**13.B** Если  $x, y \in I$ , то  $I \rightarrow I : t \mapsto (1-t)x + ty$  – путь, соединяющий точку  $x$  с точкой  $y$ .

**13.C** Если  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , то отображение  $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : u(t) = (1-t)x + ty$  – это путь, соединяющий точку  $x$  с точкой  $y$ .

**13.D** Воспользуйтесь 10.R и 13.C.

**13.E** Используйте 11.R и 11.Q.

**13.7** Воспользуйтесь формулой в 13.C, 13.A и 13.5.

**13.F** Пусть  $x$  и  $y$  – точки в рассматриваемом объединении, пусть  $A$  и  $B$  – множества из данной совокупности, содержащие точки  $x$  и  $y$ . Если  $A = B$ , то доказывать нечего. Если  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $z \in A \cap B$ , и  $u$

– путь, соединяющий  $x$  с  $z$ , а  $v$  – путь, соединяющий  $z$  с  $y$ , то путь  $uv$  соединяет  $x$  с  $y$ .

**13.G** Рассмотрите объединение всех линейно связных множеств, содержащих данную точку и используйте 13.F.

**13.H** Аналог 11.H, вместо 11.D используйте 13.F.

**13.I**  $\Rightarrow$  Непосредственно следует из определения.  $\Leftarrow$  Следует из доказательства утверждения 13.G.

**13.J** Если  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ , и  $u$  – путь, соединяющий  $x_1$  с  $x_2$ , то как построить путь, соединяющий  $y_1$  с  $y_2$ ?

**13.M** Сопоставьте 13.8 и 11.J.

**13.N** Множество  $A$  – это образ луча  $(0; \infty)$  при непрерывном отображении  $x \mapsto (x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2$ , значит, оно линейно связно, следовательно связно. Связность множества  $X$  следует из того, что оно содержится в  $\text{Cl } A$ . (Кстати, что из себя представляет множество  $\text{Cl } A$ ?)

**13.O** Это совсем очевидно, так как  $A \cong (0; +\infty)$ .

**13.P** Докажите, что всякий путь в  $X$  с началом в точке  $(0, 0)$  постоянен. Приведем идею доказательства того, что начало координат нельзя соединить путем с точками множества  $A$ . Если такой путь  $u$  существует, то найдется последовательность точек  $\{t_n\}$ , такая, что  $u(t_n) = (\frac{2}{\pi + 4\pi n}, 1)$ . Выберем подпоследовательность  $t_{n_k} \rightarrow t_*$ , тогда точка  $u(t_*)$  по непрерывности должна совпадать с точкой  $(0, 1)$ , таким образом,  $u(t_*) \notin X$ .

**13.Q** Множество  $A \subset X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \neq 0\}$ ; см. задачи 13.N–13.P.

**13.R** См. 13.Q.

**13.S** Если  $U_x$  – линейно связная окрестность точки  $x$ , то  $U_x$  лежит целиком в компоненте линейной связности этой точки.

**13.T**  $\Rightarrow$  Это утверждение 13.M.  $\Leftarrow$  Так как компоненты линейной связности пространства  $X$  открыты (см. 13.S) и пространство  $X$  связно, то в нем имеется всего лишь одна компонента линейной связности.

**13.U** Следует из 13.S и 13.T, поскольку открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  является линейно связным множеством.

**14.A** Если  $r_1 + r_2 \leq \rho(x_1, x_2)$ , то шары  $B_{r_1}(x_1)$  и  $B_{r_2}(x_2)$  не пересекаются.

**14.B** Отрезок является метрическим пространством, а множества  $[0; \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}; 1]$  – это окрестности точек 0 и, соответственно, 1 в  $[0; 1]$ .

**14.C**  $\Rightarrow$  Если  $y \neq x$ , то в пространстве имеются две непесекающиеся окрестности  $U_x$  и  $V_y$ . Следовательно,  $y \notin \text{Cl } U_x$ , значит,

$$y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl} U.$$

$\Leftrightarrow$  Если  $y \neq x$ , то  $y \notin \bigcap_{U \ni x} \text{Cl} U$ , откуда следует, что найдется окрест-

ность  $U_x$ , такая что  $y \notin \text{Cl} U_x$ . Положите  $V_y = X \setminus \text{Cl} U_x$ .

**14.D** Предположим противное: пусть  $x_n \rightarrow a$  и  $x_n \rightarrow b$ , где  $a \neq b$ . Пусть  $U$  и  $V$  – непересекающиеся окрестности точек  $a$  и  $b$ , соответственно. При достаточно больших номерах  $n$  мы получим, что  $x_n \in U \cap V$ , чего быть не может.

**14.E** Окрестность точки в пространстве  $\mathbb{R}_{T_1}$  имеет вид  $U = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ , где, считаем,  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Очевидно, что  $a_n \in U$  при всех  $n > x_N$ .

**14.F** Пусть  $X$  – пространство,  $A \subset X$  – его подпространство, точки  $x, y \in A$  различны. Так как  $X$  хаусдорфово, то у точек  $x, y$  имеются непересекающиеся окрестности  $U$  и  $V$ . Тогда  $U \cap A$  и  $V \cap A$  – это непересекающиеся окрестности точек  $x$  и  $y$  в  $A$ . (Вспомните определение относительной топологии!)

**14.G** (a)  $\Rightarrow$  Пусть  $X$  удовлетворяет аксиоме  $T_1$ ,  $x \in X$ . Значит, у каждой точки  $y \in X \setminus x$  имеется окрестность  $U$ , не содержащая точку  $x$ , т. е.  $U \subset X \setminus x$ . Следовательно, всякая точка множества  $X \setminus x$  – внутренняя, поэтому множество  $X \setminus x$  открыто, а его дополнение  $\{x\}$  – замкнуто.  $\Leftarrow$  Если все одноточечные подмножества в  $X$  замкнуты,  $x, y \in X$  и  $x \neq y$ , то  $X \setminus x$  – окрестность точки  $y$ , не содержащая точку  $x$ . Таким образом, аксиома  $T_1$  выполнена.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Если все одноточечные подмножества замкнуты в  $X$ , то замкнуты и все конечные множества (как конечные объединения одноточечных). (b)  $\Leftarrow$  (a) Очевидно.

**14.H** Сопоставьте 14.12 и 14.G.

**14.I** Сопоставьте 14.A и 14.12.

**14.J** В пространстве  $\mathbb{R}_{T_1}$  всякая точка замкнута, значит  $T_1$  имеет место, однако в нем всякие две окрестности (непустые открытые множества) пересекаются, так что  $T_2$  места не имеет.

**14.K** Модифицируйте доказательство 14.F или же воспользуйтесь теоремой 14.G.

**14.N** (a)  $\Rightarrow$  (b) Так как пространство  $X$  удовлетворяет аксиоме Колмогорова, то для любых двух точек  $x$  и  $y$  хотя бы одна не лежит в замыкании другой.

(b)  $\Rightarrow$  (a) Пусть  $\text{Cl}\{x\} \neq \text{Cl}\{y\}$ . Считаем, для определенности, что  $z \in \text{Cl}\{x\}$  и  $z \notin \text{Cl}\{y\}$ . Тогда найдется окрестность  $U$  точки  $z$ , которая

не содержит точку  $y$ . С другой стороны,  $x \in U$ , таким образом, мы нашли окрестность точки  $x$ , не содержащую точку  $y$ .

Ясно, что пространство удовлетворяет аксиоме Колмогорова, тогда топология, индуцированная на всяком двуточечном подпространстве, не является антидискретной.

**14.О**  $\Leftrightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Если для каждой точки  $x$  пространства существует ее наименьшая окрестность  $C_x$ , то будем говорить, что  $x \preceq y$ , если  $y \in C_x$ . Для доказательства транзитивности предположим, что  $x \preceq y$  и  $y \preceq z$ . Следовательно,  $y \in C_x$ , тем самым  $C_x$  – окрестность  $y$ , значит,  $C_y \subset C_x$ , поэтому  $z \in C_x$ , таким образом,  $x \preceq z$ . Если  $y \in C_x$  и  $x \in C_y$ , то  $C_x = C_y$ , значит, ни одну из этих точек нельзя отделить друг от друга. В силу аксиомы Колмогорова такое возможно лишь если  $x = y$ ; таким образом, доказана антисимметричность введенного отношения. Его рефлексивность очевидна. Докажите, что топология введенного частичного порядка совпадает с заданной топологией.

**14.Р** Пусть  $X$  – регулярное пространство. Рассмотрим в нем две различные точки  $x$  и  $y$ . Так как пространство удовлетворяет аксиоме  $T_1$ , то множество  $\{y\}$  замкнуто. Осталось применить  $T_3$  к точке  $x$  и одноточечному множеству  $\{y\}$ .

**14.Q**  $\Leftrightarrow$  См. 14.Р.  $\Leftarrow$  См. 14.12.

**14.Р** Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $x \in X$  и  $r > 0$ . Докажите, что  $\text{Cl } B_r(x) \subset B_{2r}(x)$ , и воспользуйтесь 14.19.

**14.С** Используйте определение нормальности применительно к точке и замкнутому множеству.

**14.Т**  $\Leftrightarrow$  См. 14.С.  $\Leftarrow$  См. 14.12.

**14.У** Пусть  $A$  и  $B$  – замкнутые подмножества метрического пространства. Тогда  $A \subset U = \{x \in X \mid \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$  и  $B \subset V = \{x \in X \mid \rho(x, A) > \rho(x, B)\}$ . Множества  $U$  и  $V$  открыты (в силу 9.Л) и не пересекаются.

**14.Ах.1** Положим  $U_1 = X \setminus B$ . Так как пространство  $X$  нормально, то найдется окрестность  $U_0 \supset A$ , такая что  $\text{Cl } U_0 \subset U_1$ . Пусть  $U_{1/2}$  – окрестность множества  $\text{Cl } U_0$ , такая что  $\text{Cl } U_{1/2} \subset U_1$ . Продолжая построение, мы получим искомый набор  $\{U_p\}_{p \in \Lambda}$ .

**14.Ах** Положим  $f(x) = \inf\{\lambda \in \Lambda \mid x \in \text{Cl } U_\lambda\}$ . Нетрудно видеть, что функция  $f$  непрерывна.

**14.Вх** Слегка измените доказательство 14.9х, используя лемму Урысона 14.Ах вместо 14.9х.1.

**15.А** Поскольку при биективном соответствии исходного множества с подмножеством  $\mathbb{N}$  подмножество этого множества также переходит в подмножество  $\mathbb{N}$ .

**15.B** Выберем по одной точке в каждом непустом прообразе точки. Получим подмножество исходного множества, которое находится в биективном соответствии с образом исходного множества, являющегося счетным в силу 15.A.

**15.D** Придумайте алгоритм (или даже явную формулу!) для перечисления элементов множества  $\mathbb{N}^2$ .

**15.E** Воспользуйтесь 15.D.

**15.G** Выведите это утверждение из 6.44.

**15.H** Рассмотрите множество, пересечение которого с каждым из множеств счетной базы состоит из одной точки.

**15.I** Как известно, пересечение базовых множеств с некоторым подмножеством образует базу индуцированной на этом подмножестве топологии.

**15.J** Покажите, что если множество  $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  всюду плотно, то набор  $\{B_r(x) \mid x \in A, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$  является счетной базой пространства  $X$ . (Используйте теоремы 4.I и 3.A, чтобы показать, что это база, и 15.E, что она счетна.)

**15.L** В метрических пространствах сепарабельность равносильна второй аксиоме счетности, которая является наследственной (см. 15.K и 15.I).

**15.M** В силу 15.L и 15.J, достаточно указать всюду плотное в  $\mathbb{R}^n$  подмножество, каковым является  $\mathbb{Q}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, n\}$ . Его плотность проще всего проверить, используя метрику  $\rho^{(\infty)}$ . Множество  $\mathbb{Q}^n$  счетно в силу 15.F и 15.E

**15.N** Поскольку непрерывный образ всюду плотного множества плотен в образе данного непрерывного отображения.

**15.O** Набор подмножеств данной счетной базы, состоящий из всех тех ее элементов, которые содержатся хотя бы в одном элементе данного покрытия, образует покрытие пространства. Сопоставив каждому элементу полученного набора один из содержащих его элементов исходного покрытия, мы получим искомое счетное подпокрытие.

**15.P** Следствие признака базы данной топологии (см. 3.A).

**15.Q** См. 15.12

**15.R** См. 15.P.

**15.S** Рассмотрите несчетное дискретное пространство.

**15.T** Если  $x_n \in A$  и  $x_n \rightarrow a$ , то  $a$  – точка прикосновения множества  $A$ .

**15.U** Пусть  $a \in \text{Cl } A$ . Пусть набор  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  является убывающей базой окрестностей в точке  $a$  (см. 15.16). Для каждого  $n$  существует  $x_n \in U_n \cap A$ , и мы легко получаем, что  $x_n \rightarrow a$ .

**15.V** Действительно, пусть отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно,  $b \in X$  и  $a_n \rightarrow b$ . Мы должны доказать, что  $f(a_n) \rightarrow f(b)$ . Рассмотрим окрестность  $V \subset Y$  точки  $f(b)$ . Так как отображение  $f$  непрерывно, то множество  $f^{-1}(V) \subset X$  является окрестностью точки  $b$ . Поскольку  $a_n \rightarrow b$ , то  $a_n \in f^{-1}(V)$  for  $n > N$ . Следовательно,  $f(a_n) \in V$  при всех  $n > N$ , что и требовалось доказать.

**15.W** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – секвенциально непрерывное отображение,  $A$  – секвенциально замкнутое множество,  $x_n \in f^{-1}(A)$  и  $x_n \rightarrow a$ . Так как отображение секвенциально непрерывно, то  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ , а поскольку множество  $A$  секвенциально замкнуто, то  $f(a) \in A$ , значит,  $a \in f^{-1}(A)$ , таким образом, множество  $f^{-1}(A)$  секвенциально замкнуто.

**15.X** Достаточно проверить, что для всякого замкнутого множества  $F \subset Y$  замкнут и его прообраз  $f^{-1}(F) \subset X$ , т. е., что  $\text{Cl}(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(F)$ . Пусть  $a \in \text{Cl}(f^{-1}(F))$ . Так  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, то найдется последовательность  $x_n \in f^{-1}(F)$ , такая что  $x_n \rightarrow a$ , значит,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  в силу секвенциальной непрерывности  $f$ . Так как  $F$  замкнуто, то  $f(a) \in F$ , поэтому  $a \in f^{-1}(F)$ .

**15.Ax** Заметьте, что множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, несчетно! Поэтому первое побуждение – рассмотреть последовательности, состоящие из рациональных чисел, приводит к несчетному множеству. Искомое множество состоит из таких последовательностей  $\bar{x} = \{x_i\}$ ,  $x_i \in \mathbb{Q}$ , для которых  $\exists N$ , такое что  $x_i = 0 \ \forall i > N$  (используйте то, что если ряд  $\sum x_i^2$  сходится, то для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $k$ , что  $\sum_{i=k}^{\infty} x_i^2 < \varepsilon$ ).

**16.A** Компактность этих пространств следует просто из того, что в каждом из них имеется лишь конечное число различных открытых множеств.

**16.B** Только конечные.

**16.C** Рассмотрите покрытие  $\mathbb{R}$  интервалами  $(-n; n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**16.D** Это в точности отрицание компактности.

**16.E** Воспользуйтесь теоремой Линделефа 15.O.

**16.F** Следствие второй из формул де Моргана. Действительно,  $\cap A_i = \emptyset$ , тогда  $X \setminus \cap A_i = X$ , тогда  $\cup(X \setminus A_i) = X$ .

**16.G**  $\Leftrightarrow$  Рассмотрим дополнения  $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$  множеств этой центрированной совокупности. Если  $\cap F_\alpha = \emptyset$ , то  $\cup U_\alpha = X$ , таким образом, множества  $\{U_\alpha\}$  образуют покрытие пространства  $X$ . Если  $X$

компактно, то из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, что противоречит тому, что дополнения элементов этого покрытия имеют непустое пересечение, поскольку рассматриваемая совокупность замкнутых множеств является центрированной.  $\Leftrightarrow$  Докажите это самостоятельно.

**16.H**  $\Leftrightarrow$  Пусть  $\Gamma = \{U_\alpha\}$  – покрытие  $A$  множествами, открытыми в пространстве  $X$ . Так как  $A$  – компактное множество, из его покрытия множествами  $A \cap U_\alpha$  можно выделить конечное подпокрытие  $\{A \cap U_{\alpha_i}\}_{i=1}^n$ , откуда следует, что множества  $\{U_{\alpha_i}\}$  образуют конечное подпокрытие исходного покрытия  $\Gamma$ .  $\Leftrightarrow$  Докажите обратное утверждение самостоятельно.

**16.I** Конечно, компактность не наследственна.

**16.J** Пусть  $\{U_\alpha\}$  – открытое покрытие замкнутого множества, тогда  $\{X \setminus F, U_\alpha\}$  – открытое покрытие пространства  $X$ , из которого можно выбрать конечное подпокрытие  $\{X \setminus F, U_i\}_{i=1}^n$ . Ясно, что  $\{U_i\}_{i=1}^n$  – покрытие множества  $F$ .

**16.K** Следствие 16.L.

**16.L** Так как пространство  $X$  хаусдорфово, то для всякой точки  $x \in A$  найдутся непересекающиеся окрестности  $U_x$  точки  $x$  и  $V_b^{(x)}$  точки  $b$ . Набор  $\{U_x \mid x \in A\}$  является покрытием множества  $A$ . В силу его компактности, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие  $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ . Положим  $U = \bigcup_1^n U_{x_i}$  и  $V = \bigcap_1^n V_b^{(x_i)}$ . Множества  $U$  и  $V$  являются искомыми окрестностями компактного множества  $A$  и точки  $b$ .

**16.M** Следствие 16.K в силу 16.J.

**16.N** Поскольку компактное хаусдорфово пространство регулярно, то для замкнутых непересекающихся множеств найдутся такие наборы открытых окрестностей  $\{U^{(x)}\}$ , где  $U^{(x)} \supset A$ , и  $\{V_x \mid x \in B\}$ , что  $U^{(x)} \cap V_x = \emptyset$ . Далее рассуждайте, как в 16.L.

**16.O** Если  $I$  некомпактен, то существует такое его покрытие  $\Gamma_0$ , никакая конечная часть которого не покрывает отрезок. Разделим  $I$  пополам и обозначим через  $I_1$  ту половину, которая также не покрывается никакой конечной частью покрытия  $\Gamma_0$ . Теперь разделим пополам  $I_1$ , и так далее. В результате получим последовательность вложенных отрезков  $I_n$ , причем длина  $n$ -го из них равна  $2^{-n}$ . В силу аксиомы полноты имеем  $\bigcap I_n = \{x_0\}$ . Рассмотрим элемент  $U_0 \in \Gamma_0$ , являющийся окрестностью точки  $x_0$ . Ясно, что  $I_n \subset U_0$  при достаточно больших  $n$ , что противоречит тому, что по построению отрезок  $I_n$  не покрывается никакой конечной частью данного покрытия.

**16.P** Разбейте куб на  $2^n$  “половинных” кубов и повторите рассуждение, проведенное в доказательстве предыдущей задачи.

**16.Q** Рассмотрите покрытие  $\{B_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ .

**16.R** Пусть  $X = [0; 1) \cup (2; 3]$ . Множество  $[0; 1)$  замкнуто в  $X$ , но не является компактным. Или еще проще – смотрите следующую задачу.

**16.S**  $\Rightarrow$  В силу 16.Q, компактное подмножество  $\mathbb{R}^n$  ограничено, в силу 16.K, оно замкнуто.  $\Leftarrow$  Если подмножество  $F \subset \mathbb{R}^n$  ограничено, то оно лежит в некотором кубе, который компактен (16.P). Поскольку множество  $F$  замкнуто, то оно и компактно, в силу 16.J.

**16.T** Воспользуемся теоремой 16.H. Пусть  $\{U_\alpha\}$  – покрытие  $f(X)$  открытыми в  $Y$  множествами, тогда  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$  – покрытие  $X$  открытыми в нем множествами. Так как  $X$  компактно, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие  $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^n$ . Набор  $\{U_i\}_{i=1}^n$  – конечное подпокрытие множества  $f(X)$ .

**16.U** В силу 16.T и 16.S, множество  $f(X) \subset \mathbb{R}$  компактно, значит ограничено, поэтому существуют  $m = \inf f(X)$  и  $M = \sup f(X)$ . Поскольку  $f(X)$  также и замкнуто, то  $m, M \in f(X)$ , откуда и следует существование таких точек  $a, b \in X$ , что  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  при всех  $x \in X$ .

**16.V** Следует из 16.23: рассмотрите покрытие  $\{f^{-1}(U) \mid U \in \Gamma\}$  пространства  $X$ .

**16.W** Непосредственно следует из 16.J, 16.K и 16.T.

**16.X** Сопоставьте 16.W и 16.24.

**16.Y** См. 16.X.

**17.A.1**  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Предположим противное, пусть существует предельная точка  $x$ , не являющаяся точкой накопления множества  $A$ . Тогда у нее существует окрестность  $U_x$ , такая что множество  $U_x \cap A$  конечно. Следовательно, найдется такая окрестность  $W_x$  точки  $x$ , для которой  $(W_x \setminus x) \cap A = \emptyset$  – противоречие.

**17.A.2** От противного: рассмотрите покрытие пространства такими окрестностями его точек, пересечение которых с данным бесконечным множеством конечно.

**17.A.3** Пусть  $A$  – множество точек данной последовательности. Предположим, что оно бесконечно. По предыдущему утверждению у него имеется точка накопления  $x_0$ . Пусть  $\{U_n\}$  – счетная база окрестностей точки  $x_0$  и  $x_{n_1} \in U_1 \cap A$ . Так как множество  $U_2 \cap A$  бесконечно, то найдется  $n_2 > n_1$ ,  $x_{n_2} \in U_2 \cap A$ . Докажите, что построенная подобным образом подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  исходной последовательности сходится к  $x_0$ . Если множество  $A$  конечно, то все значительно проще.



**17.B.1** Рассмотрите последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n \in F_n$ , и покажите, что если  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , то  $x_n \in F_n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**17.B.2** Если  $\{F_k\}$  – центрированная последовательность замкнутых множеств, то  $H_n = \bigcap_1^n F_k$  – вложенная последовательность замкнутых множеств.

**17.B.3** По теореме Линделёфа 15.О достаточно рассматривать счетные покрытия  $\{U_n\}$ . Если никакой конечный набор множеств из этого покрытия сам покрытием не является, то множества  $F_n = X \setminus U_n$  образуют центрированную систему замкнутых множеств.

**17.C** Следует из 17.B и 17.A.

**17.D** Переформулируем определение  $\varepsilon$ -сети:  $A$  есть  $\varepsilon$ -сеть, если  $\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in A}$  – покрытие  $X$ . Теперь доказательство очевидно.

**17.E** Рассуждаем от противного. Если  $\{x_i\}_{i=1}^{k-1}$  не есть  $\varepsilon$ -сеть, то найдется такая точка  $x_k$ , что  $\rho(x_i, x_k) \geq \varepsilon$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . В результате мы получим последовательность, расстояние между любыми двумя членами которой не меньше  $\varepsilon$ , поэтому у нее нет сходящихся подпоследовательностей.

**17.F**  $\Leftrightarrow$  Очевидно: всякий открытый шар метрического пространства – открытое в нем множество.  $\Leftarrow$  Используйте определение топологии метрического пространства.

**17.G** Счетным всюду плотным множеством является объединение его конечных  $\frac{1}{n}$ -сетей (см. 17.E).

**17.H** Поскольку оно сепарабельно.

**17.I** Если  $X$  компактно, то оно секвенциально компактно в силу 17.A. Если  $X$  секвенциально компактно, то оно сепарабельно, значит, обладает счетной базой. Поэтому из 17.C следует, что оно компактно.

**17.J** Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится в себе, а ее подпоследовательность  $x_{n_k}$  имеет своим пределом точку  $a$ . Найдем такое число  $m$ , что  $\rho(x_l, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$  при  $k, l \geq m$ , и такое  $i$ , что  $n_i > m$  и  $\rho(x_{n_i}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда при всех  $l \geq m$  верно неравенство  $\rho(x_l, a) \leq \rho(x_l, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, a) < \varepsilon$ .

**17.K**  $\Leftarrow$  Очевидно.  $\Rightarrow$  Пусть  $\{x_n\}$  – фундаментальная последовательность. Пусть  $n_1$  таково, что  $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$  при всех  $n, m \geq n_1$ . Значит,  $x_n \in B_{1/2}(x_{n_1})$  для всех  $n \geq n_1$ . Выберем далее  $n_2 > n_1$  так, чтобы  $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{4}$  при всех  $n, m \geq n_2$ , тогда  $B_{1/4}(x_{n_2}) \subset B_{1/2}(x_{n_1})$ . Продолжая построение, получаем такую последовательность вложенных шаров, для единственной общей точки  $x_0$  которых верно, что  $x_n \rightarrow x_0$ .

**17.L** Пусть  $\{x_n\}$  – фундаментальная последовательность точек компактного метрического пространства. Поскольку оно и секвенциально

компактно, то некоторая ее подпоследовательность является сходящейся, а тогда сходится и исходная последовательность.

**17.М**  $\Leftrightarrow$  Во всяком компактном метрическом пространстве имеется конечная  $\varepsilon$ -сеть.

$\Leftrightarrow$  Теперь предположим, что для любого  $\varepsilon > 0$  в пространстве существует конечная  $\varepsilon$ -сеть, и покажем, что это пространство будет секвенциально компактным. Рассмотрим произвольную последовательность  $\{x_n\}$ . Обозначим через  $A_n$  конечную  $\frac{1}{n}$ -сеть пространства  $X$ . Поскольку  $X = \bigcup_{x \in A_1} B_1(x)$ , то найдется такой шар, в котором лежит бесконечно много членов последовательности; пусть  $x_{n_1}$  – первый из них. Из остальных лежащих в первом шаре членов выберем  $x_{n_2}$  – первый из лежащих в шаре  $B_{1/2}(x)$ ,  $x \in A_2$ . Продолжая построение, получаем подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ . Покажите, что она фундаментальна. Поскольку по предположению пространство является полным, то построенная последовательность имеет предел. Таким образом, мы доказали, что пространство секвенциально компактно, следовательно, оно и компактно.

**18.Ах** Конечно, не наследственна. Пример:  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**18.Вх** Пусть  $U$  – окрестность с компактным замыканием. Если  $F$  замкнуто, то множество  $\text{Cl}_F(U \cap F) = \text{Cl}U \cap F$  компактно как замкнутое подмножество компактного множества.

**18.Сх** Нет, не верно. Пусть  $X$  не локально компактно (например,  $X = \mathbb{Q}$ ). Положим  $X^* = X \cup \{x_*\}$ ,  $\Omega^* = \{X^*\} \cup \{U \mid U \in \Omega\}$ . Пространство  $X^*$  компактно, следовательно локально компактно, а  $X$  – его открытое подмножество, не являющееся тем не менее локально компактным пространством.

**18.Дх** Рассмотрим произвольную окрестность  $W$  некоторой точки  $x$  пространства. Пусть  $U_0$  – окрестность точки  $x$ , имеющая компактное замыкание. Поскольку пространство хаусдорфово, то  $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} \text{Cl}U$ , следовательно,  $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} (\text{Cl}U_0 \cap \text{Cl}U)$ . Каждое из множеств  $\text{Cl}U_0 \cap \text{Cl}U$  является компактным, значит, в силу 16.11, найдутся такие окрестности  $U_1, \dots, U_n$ , что  $\text{Cl}U_0 \cap \text{Cl}U_1 \cap \dots \cap \text{Cl}U_n \subset W$ . Пусть  $V = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n$ . Тогда  $\text{Cl}V \subset W$ . Таким образом, во всякой окрестности точки лежит замыкание некоторой её окрестности. В силу 14.19 пространство является регулярным.

**18.Ех** Пусть множество  $V$  открыто в хаусдорфовом локально компактном пространстве  $X$  и  $x \in V$ . Пусть  $U$  – окрестность точки  $x$ , такая что  $\text{Cl}U$  – компактное множество. В силу 18.Дх и 14.19 у точки  $x$  имеется окрестность  $W$ , такая что  $\text{Cl}W \subset U \cap V$ . Таким образом,  $\text{Cl}_V W = \text{Cl}W$  – компактное множество, значит  $V$  – локально компактное пространство.

**18.Fx**  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Используйте идею из 18.Ex.

**18.Gx** Так как  $\emptyset$  и открыто, и компактно в  $X$ , то  $\emptyset, X^* \in \Omega^*$ . Проверим теперь, что объединения конечные пересечения множеств из  $\Omega^*$  принадлежат  $\Omega^*$ . Это очевидно для множеств, принадлежащих  $\Omega$ . Пусть  $X^* \setminus K_\lambda \in \Omega^*$ , где  $K_\lambda \subset X$  – компактные множества,  $\lambda \in \Lambda$ . Тогда  $\bigcup (X^* \setminus K_\lambda) = X^* \setminus \bigcap K_\lambda \in \Omega^*$ , поскольку  $X$  хаусдорфово, так что множество  $\bigcap K_\lambda$  компактно. Аналогичным образом, если  $\Lambda$  конечно, то  $\bigcap (X^* \setminus K_\lambda) = X^* \setminus \bigcup K_\lambda \in \Omega^*$ . Поэтому остается рассмотреть случай, когда объединяются (пересекаются) множества из  $\Omega^*$  и множества из  $\Omega$ . Мы оставляем разбор этого случая читателю в качестве упражнения.

**18.Hx** Рассмотрим тот элемент  $U = X^* \setminus K_0$  покрытия, который содержит добавленную точку. Оставшиеся элементы покрытия образуют открытое покрытие компактного множества  $K_0$ .

**18.Ix** Другими словами, топология, индуцированная из  $X^*$  на  $X$ , совпадает с исходной топологией пространства  $X$ . Так оно и есть, поскольку в хаусдорфовом пространстве  $X$  компактные множества являются замкнутыми.

**18.Jx** Если  $x, y \in X$ , то все очевидно. Если, к примеру,  $y = x_*$ , то рассмотрим окрестность  $U_x$  точки  $x$ , замыкание которой компактно. Тогда  $U_x$  и  $X \setminus \text{Cl} U_x$  – окрестности, разделяющие точки  $x$  и  $x_*$ .

**18.Kx** Пусть  $x_* = X^* \setminus X$  и  $y = Y \setminus X$ . Положим

$$f : Y \rightarrow X^* : x \mapsto \begin{cases} x & \text{при } x \in X, \\ x_* & \text{при } x = y. \end{cases}$$

Если  $U \subset X^*$  и  $U = X^* \setminus K$ , где  $K$  – компактное множество в  $X$ , то множество  $f^{-1}(U) = Y \setminus K$  – открыто в  $Y$ , таким образом, отображение  $f$  непрерывно. Осталось применить 16.X.

**18.Lx** Убедитесь, что если открытое множество  $U \subset S^2$  содержит “северный полюс”, то дополнение образа этого множества при стереографической проекции компактно в  $\mathbb{R}^2$ .

**18.Mx** Поскольку  $X^*$  хаусдорфово и компактно (см. 18.Hx и 18.Jx), то оно регулярно в силу 16.M. Пространство  $X$  является подпространством  $X^*$ , а регулярность наследственна. Попробуйте также доказать утверждение задачи без перехода к одноточечной компактификации.

**18.Nx**  $\Rightarrow$  Если  $f^*$  непрерывно, то таково же и  $f$  (в силу 18.Ix). Пусть  $K \subset Y$  – компактное множество. Положим  $U = Y \setminus K$ . Так как  $f^*$  непрерывно, то множество  $(f^*)^{-1}(U) = X^* \setminus f^{-1}(K)$  открыто в  $X^*$ , так что множество  $f^{-1}(K)$  компактно в  $X$ . Следовательно,  $f$  – собственное отображение.  $\Leftarrow$  Доказательство проводится аналогичным образом.

**18.Ох** Пусть  $f^* : X^* \rightarrow y^*$  – продолжение отображения  $f : X \rightarrow Y$ . Докажите, что если  $F$  замкнуто в  $X$ , то  $F \cup \{*\}$  замкнуто, следовательно компактно в  $X^*$ . Далее используйте утверждения 18.Nх, 16.W и 18.Iх.

**18.Рх** Собственная инъекция хаусдорфова пространства в локально компактное хаусдорфово пространство является топологическим вложением. Собственная биекция хаусдорфова пространства в локально компактное хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

**18.Qх** Пусть  $\Gamma$  – локально конечное покрытие. Рассмотрим также покрытие  $\Delta$  пространства  $X$  окрестностями, каждая из которых пересекается с конечным числом элементов покрытия  $\Gamma$ . В силу компактности  $X$ , из  $\Delta$  можно выделить конечное подпокрытие  $\Delta'$ . Поскольку каждая из окрестностей, входящих в  $\Delta'$ , пересекается лишь с конечным числом множеств из покрытия  $\Gamma$ , то их всего в  $\Gamma$  имеется конечное число.

**18.Rх** Покрытие  $\mathbb{R}^n$  шарами  $B_n(0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**18.Sх** Используйте локально конечное покрытие  $\mathbb{R}^n$  равными открытыми кубами.

**18.Tх** Ср. 18.17х.

**18.Uх** Очевидно.

**18.Vх** Это в точности утверждение 18.Sх.

**18.Wх** Пусть  $\Gamma$  – открытое покрытие  $X$ . Так как каждое из множеств  $K_i = X_i \setminus \text{Int } X_{i-1}$  компактно, то  $\Gamma$  содержит конечное подпокрытие  $\Gamma_i$  множества  $K_i$ . При этом множества  $W_i = \text{Int } X_{i+1} \setminus X_{i-2} \supset K_i$  образуют локально конечное открытое покрытие  $X$ . Рассмотрев (для каждого  $i$ ) пересечения элементов покрытия  $\Gamma_i$  с  $W_i$ , мы получим локально конечное покрытие, вписанное в  $\Gamma$ .

**18.Xх** Используя 18.6х, постройте семейство  $U_i$  открытых множеств, таких что для каждого  $i$  замыкание  $X_i = \text{Cl } U_i$  компактно и содержится в  $U_{i+1} \subset \text{Int } X_{i+1}$ . Осталось воспользоваться утверждением 18.Wх.

**18.Yх** Рассмотрим покрытие  $\Gamma = \{U_\alpha\}$ . В силу 18.18х, существует открытое покрытие  $\Delta = \{V_\alpha\}$ , такое что  $\text{Cl } V_\alpha \subset U_\alpha$  для каждого  $\alpha$ . Пусть  $\varphi_\alpha : X \rightarrow I$  – функция Урысона, такая что  $\text{supp } \varphi_\alpha = X \setminus U_\alpha$  и  $\varphi_\alpha^{-1}(1) = \text{Cl } V_\alpha$  (см. 14.Aх). Положим  $\varphi(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x)$ . Тогда набор функций  $\{\varphi_\alpha(x)/\varphi(x)\}$  является искомым разбиением единицы.



# Топологические конструкции

## 19. Перемножение

### 19'1. Теоретико-множественное отступление: перемножение множеств

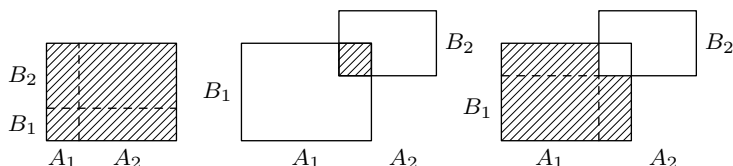
*Прямым произведением (декартовым произведением или просто произведением)* множеств  $X$  и  $Y$  называется множество  $X \times Y$  всех упорядоченных пар  $(x, y)$  с  $x \in X$  и  $y \in Y$ . Если  $A \subset X$  и  $B \subset Y$ , то  $A \times B \subset X \times Y$ . Множества  $X \times b$  с  $b \in Y$  и  $a \times Y$  с  $a \in X$  называются *слоями* произведения  $X \times Y$ .

**19.A.** Для любых  $A_1, A_2 \subset X$  и  $B_1, B_2 \subset Y$  имеют место формулы

$$(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2),$$

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup (A_1 \times (B_1 \setminus B_2)).$$



Естественные отображения

$$\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \mapsto x \text{ и } \text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \mapsto y$$

называются *проекциями*.

**19.B.** Докажите, что  $\text{pr}_X^{-1}(A) = A \times Y$  для любого множества  $A \subset X$ .

**19.1.** Напишите аналогичную формулу для  $B \subset Y$ .

## 19'2. Графики

Каждому отображению  $f : X \rightarrow Y$  можно сопоставить подмножество  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ , называемое *графиком* отображения  $f$ .

**19.C.** Множество  $\Gamma \subset X \times Y$  является графиком некоторого отображения  $f : X \rightarrow Y$ , тогда для любого  $x \in X$  пересечение  $\Gamma$  с  $x \times Y$  состоит ровно из одной точки.

**19.2.** Докажите, что для любого отображения  $f : X \rightarrow Y$  и любых множеств  $A \subset X$  и  $B \subset Y$  имеют место формулы

$$f(A) = \text{pr}_Y(\Gamma_f \cap (A \times Y)) = \text{pr}_Y(\Gamma_f \cap \text{pr}_X^{-1}(A)) \text{ и}$$

$$f^{-1}(B) = \text{pr}_X(\Gamma_f \cap (X \times B)).$$

Множество  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  называется диагональю произведения  $X \times X$ .

**19.3.** Пусть  $A, B \subset X$ . Докажите, что  $(A \times B) \cap \Delta = \emptyset$ , тогда  $A \cap B = \emptyset$ .

**19.4.** Докажите, что отображение  $\text{pr}_X|_{\Gamma_f}$  биективно.

**19.5.** Докажите, что отображение  $f$  инъективно, тогда отображение  $\text{pr}_Y|_{\Gamma_f}$  инъективно.

**19.6.** Рассмотрим отображение  $T : X \times Y \rightarrow Y \times X : (x, y) \mapsto (y, x)$ . Докажите, что  $\Gamma_{f^{-1}} = T(\Gamma_f)$  для любого обратимого отображения  $f : X \rightarrow Y$ .

## 19'3. Перемножение топологий

Пусть  $X$  и  $Y$  – топологические пространства. Множество вида  $U \times V \subset X \times Y$ , где  $U$  открыто в  $X$  и  $V$  открыто в  $Y$ , назовем *элементарным*.

**19.D.** Совокупность элементарных множеств является базой некоторой топологии в  $X \times Y$ .

*Произведением* топологических пространств  $X$  и  $Y$  называется множество  $X \times Y$  с топологией, базой которой служит совокупность элементарных множеств.

**19.7.** Для любых подпространств  $A$  и  $B$  пространств  $X$  и  $Y$  топология произведения  $A \times B$  совпадает с топологией, индуцированной естественным включением  $\text{in} : A \times B \rightarrow X \times Y$ .

**19.E.** Произведение  $X \times Y$  канонически гомеоморфно  $Y \times X$ .

Слова “канонически гомеоморфно” означают, что не только существует какой попало гомеоморфизм, но имеется некоторый замечательный (очевидный?) гомеоморфизм, который имеет дополнительные приятные свойства.

**19.F.** Произведение  $(X \times Y) \times Z$  канонически гомеоморфно  $X \times (Y \times Z)$ .

**19.8.** Если множество  $A$  замкнуто в  $X$ , а  $B$  – в  $Y$ , то  $A \times B$  замкнуто в  $X \times Y$ .

**19.9.** Докажите, что любых  $A \subset X$  и  $B \subset Y$  имеет место равенство  $\text{Cl}(A \times B) = \text{Cl } A \times \text{Cl } B$ .

**19.10.** Верно ли, что  $\text{Int}(A \times B) = \text{Int } A \times \text{Int } B$ ?

**19.11.** Верно ли, что  $\text{Fr}(A \times B) = \text{Fr } A \times \text{Fr } B$ ?

**19.12.** Верно ли, что  $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr } A \times B) \cup (A \times \text{Fr } B)$ ?

**19.13.** Верно ли, что если  $A$  и  $B$  замкнуты, то  $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr } A \times B) \cup (A \times \text{Fr } B)$ ?

**19.14.** Найдите формулу, выражающую  $\text{Fr}(A \times B)$  в терминах  $A$ ,  $B$ ,  $\text{Fr } A$  и  $\text{Fr } B$ .

#### 19'4. Топологические свойства проекций и слоев

**19.G.** Для любых топологических пространств  $X$  и  $Y$  естественные проекции  $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$  и  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  являются непрерывными отображениями.

**19.H.** Топология произведения – самая грубая среди топологий в  $X \times Y$ , относительно которых отображения  $\text{pr}_X$  и  $\text{pr}_Y$  непрерывны.

**19.I.** Слои произведения канонически гомеоморфны соответствующим сомножителям. Каноническими гомеоморфизмами служат сужения проекций.

**19.J.** Докажите, что  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$ ,  $(\mathbb{R}^1)^n = \mathbb{R}^n$ ,  $(I)^n = I^n$ . (Напомним, что  $I^n$  – это  $n$ -мерный куб).

**19.15.** Пусть  $\Sigma_X$  и  $\Sigma_Y$  – базы пространств  $X$  и  $Y$ . Докажите, что множества  $U \times V$  с  $U \in \Sigma_X$  и  $V \in \Sigma_Y$  составляют базу пространства  $X \times Y$ .

**19.16.** Докажите, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, тогда  $\text{pr}_X|_{\Gamma_f}$  – гомеоморфизм.

**19.17.** Докажите, что если  $W$  открыто в  $X \times Y$ , то множество  $\text{pr}_X(W)$  открыто в  $X$ .



Отображение  $X \rightarrow Y$  называется *открытым* (*замкнутым*), если образ любого открытого (замкнутого) множества открыт (соответственно, замкнут). Таким образом, согласно 19.17, проекция является открытым отображением.

**19.18.** Является ли  $\text{pr}_X$  замкнутым отображением?

**19.19.** Докажите, что для любого пространства  $X$  и компактного пространства  $Y$  отображение  $\text{pr}_X$  является замкнутым.

### 19'5. Перемножение отображений

Рассмотрим множества  $X, Y$  и  $Z$ . Отображение  $f : Z \rightarrow X \times Y$ , определяет композиции  $f_1 = \text{pr}_X \circ f : Z \rightarrow X$  и  $f_2 = \text{pr}_Y \circ f : Z \rightarrow Y$ , называемые *координатными*) отображениями для  $f$ . Ясно, что само отображение  $f$  восстанавливается по  $f_1$  и  $f_2$ .

**19.K.** Докажите, что для любых отображений  $f_1 : Z \rightarrow X$  и  $f_2 : Z \rightarrow Y$  существует одно и только одно отображение  $f : Z \rightarrow X \times Y$  с  $\text{pr}_X \circ f = f_1$  и  $\text{pr}_Y \circ f = f_2$ .

**19.20.** Докажите, что  $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B)$  для любых множеств  $A \subset X$  и  $B \subset Y$ .

**19.L.** Пусть  $X, Y$  и  $Z$  – топологические пространства. Докажите, что отображение  $f : Z \rightarrow X \times Y$  непрерывно, тогда непрерывны  $f_1$  и  $f_2$ .

Для любых отображений  $g_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  и  $g_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ , можно определить отображение

$$g_1 \times g_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2 : (x_1, x_2) \mapsto (g_1(x_1), g_2(x_2)),$$

которое называется *произведением* отображений  $g_1$  и  $g_2$ .

**19.21.** Докажите, что  $(g_1 \times g_2)(A_1 \times A_2) = g_1(A_1) \times g_2(A_2)$  для любых  $A_1 \subset X_1$  и  $A_2 \subset X_2$ .

**19.22.** Докажите, что  $(g_1 \times g_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = g_1^{-1}(B_1) \times g_2^{-1}(B_2)$  для любых  $B_1 \subset Y_1$  и  $B_2 \subset Y_2$ .

**19.M.** Докажите, что произведение непрерывных отображений непрерывно.

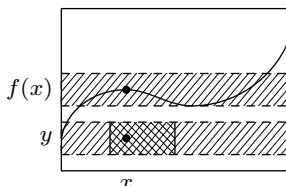
**19.23.** Докажите, что произведение открытых отображений открыто.

**19.24.** Докажите, что всякая метрика  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  есть непрерывная функция (относительно топологии, определяемой этой метрикой).

**19.25.** Рассмотрим отображение  $f : X \rightarrow Y$ . Докажите, что его график  $\Gamma_f$  совпадает с прообразом диагонали  $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\} \subset Y \times Y$  при отображении  $f \times \text{id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$ .

## 19'6. Свойства диагонали и других графиков

**19.26.** Докажите, что пространство  $X$  хаусдорфово, тогда диагональ  $\Delta$  является замкнутым в  $X \times X$  множеством.



**19.27.** Пусть пространство  $Y$  хаусдорфово и отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Докажите, что множество  $\Gamma_f$  замкнуто.

**19.28.** Пусть пространство  $Y$  компактно и множество  $\Gamma_f$  замкнуто. Докажите, что отображение  $f$  непрерывно.

**19.29.** Существенно ли условие компактности в задаче 19.28?

**19.30.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция. Докажите, что её график:

- (1) замкнут в  $\mathbb{R}^2$ ;
- (2) связен;
- (3) линейно связен;
- (4) локально связен;
- (5) локально компактен.

**19.31.** Рассмотрим следующие функции

$$1) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0. \end{cases} \quad 2) \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0. \end{cases} \quad \text{Какими}$$

из перечисленных в 19.30 свойств обладают их графики?

**19.32.** Следует ли из какого-либо одного из свойств, упомянутых в 19.30, непрерывность исходной функции?

**19.33.** Предположим, что график  $\Gamma_f$  – замкнутое множество. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1)  $f$  непрерывна;
- (2)  $f$  локально ограничена;
- (3) график  $\Gamma_f$  связен;
- (4) график  $\Gamma_f$  линейно связен.

**19.34.** Докажите, что если  $\Gamma_f$  – связное и локально связное множество, то функция  $f$  непрерывна.

**19.35.** Докажите, что если график  $\Gamma_f$  связен и локально компактен, то функция  $f$  непрерывна.

**19.36.** Верно ли какое-нибудь из утверждений задач 19.33 – 19.35 для отображений  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?

## 19'7. Топологические свойства произведений

**19.N.** Произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.

**19.37.** Произведение регулярных пространств регулярно.

**19.38.** Произведение нормальных пространств не обязательно является нормальным.

**19.38.1.** Пусть  $\mathcal{R}$  – прямая с топологией, базой которой является множество промежутков вида  $[a; b)$ . Докажите, что  $\mathcal{R}$  является нормальным пространством.

**19.38.2.** Множество  $\nabla = \{(x, -x) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}\}$  замкнуто, а индуцированная на нём топология дискретна.

**19.38.3.** Укажите два непересекающихся подмножества в  $\nabla$ , которые не имеют в  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$  непересекающихся окрестностей.

**19.О.** Произведение сепарабельных пространств сепарабельно.

**19.Р.** Произведение пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, удовлетворяет первой аксиоме счетности.

**19.Q.** Произведение пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности.

**19.Р.** Произведение метризуемых пространств метризуемо.

**19.С.** Произведение связных пространств связно.

**19.39.** Докажите, что если  $X, Y$  – связные пространства, а  $A, B$  – их собственные подмножества, то множество  $X \times Y \setminus A \times B$  связно.

**19.Т.** Произведение линейно связных пространств линейно связно.

**19.У.** Произведение компактных пространств компактно.

**19.40.** Докажите, что произведение локально компактных пространств локально компактно.

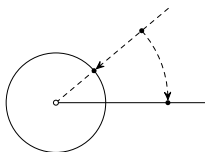
**19.41.** Докажите, что если пространство  $X$  паракомпактно, а пространство  $Y$  компактно, то  $X \times Y$  паракомпактно.

**19.42.** Для каких из топологических свойств, рассмотренных выше, из того, что произведение  $X \times Y$  обладает этим свойством, следует, что и пространство  $X$  им обладает?

**19.43.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  замкнутое (не обязательно непрерывное!) отображение. Предположим, что у всякой точки  $y \in Y$  прообраз  $f^{-1}(y)$  является компактным подмножеством в  $X$ . Докажите, что если пространство  $Y$  компактно, то и  $X$  также является компактным.

**19'8.** Представление пространств в виде произведений

**19.V.** Гомеоморфны ли пространства  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  и  $S^1 \times \mathbb{R}$ ?



**19.44.** Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$  гомеоморфно  $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$ .

**19.45.** Докажите, что пространство  $S^n \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_k^2 \leq x_{k+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2\}$  гомеоморфно  $S^{k-1} \times D^{n-k+1}$ .

**19.46.** Докажите, что пространство  $O(n)$  ортогональных  $n \times n$ -матриц гомеоморфно  $SO(n) \times O(1)$ .

**19.47.** Докажите, что пространство  $GL(n)$  гомеоморфно  $SL(n) \times GL(1)$ .

**19.48.** Докажите, что пространство

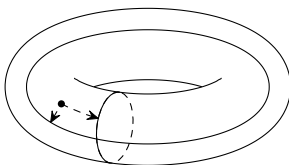
$$GL_+(n) = \{A \in L(n, n) \mid \det A > 0\}$$

гомеоморфно  $SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

**19.49.** Докажите, что пространство  $SO(4)$  гомеоморфно  $S^3 \times SO(3)$ .

Пространство  $S^1 \times S^1$  называется *тором*.

**19.W.** Вложите тор в  $\mathbb{R}^3$ .



Произведение  $k$  сомножителей  $S^1 \times \dots \times S^1$  называется  *$k$ -мерным тором*.

**19.X.** Вложите  $k$ -мерный тор в  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

**19.Y.** Вложите произведения  $S^1 \times D^2$ ,  $S^1 \times S^1 \times I$  и  $S^2 \times I$  в  $\mathbb{R}^3$ .

## 20. Факторизация

### 20'1. Теоретико-множественное отступление: разбиения и отношения эквивалентности

Напомним, что *разбиение* множества — это его покрытие попарно непересекающимися подмножествами.

С каждым разбиением  $S$  множества  $X$  связано *отношение эквивалентности* (т. е. рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение): две точки объявляются эквивалентными, если они принадлежат одному элементу разбиения  $S$ . Обратно, с каждым отношением эквивалентности в множестве  $X$  связано разбиение этого множества на классы эквивалентных элементов. Так что разбиения множества на непустые подмножества и отношения эквивалентности в нем — это по существу одно и то же, точнее, это два способа описания одного явления.

Пусть  $X$  — множество,  $S$  — его разбиение. Множество, элементами которого являются подмножества  $X$ , составляющие разбиение  $S$ , называется *фактормножеством* множества  $X$  по разбиению  $S$  и обозначается через  $X/S$  (это множество называется также *фактормножеством* или *множеством классов эквивалентности* множества  $X$  по соответствующему отношению эквивалентности).<sup>1</sup>

**20.1. Загадка.** Как эта операция связана с делением чисел? Отчего обозначения и названия похожи?

Отображение  $X \rightarrow X/S$ , относящее каждой точке  $x \in X$  содержащий её элемент разбиения  $S$ , называется *проекцией* или *отображением факторизации* и обозначается через  $\text{pr}$ .

Подмножества множества  $X$ , составленные из целых элементов разбиения, называются *насыщенными*. Наименьшее насыщенное множество, содержащее подмножество  $A$  множества  $X$ , называется *насыщением* множества  $A$ .

**20.2.** Докажите, что множество  $A \subset X$  есть элемент разбиения  $S$  множества  $X$ , тогда  $A = \text{pr}^{-1}(\text{point})$ , где  $\text{pr} : X \rightarrow X/S$  — естественная проекция.

---

<sup>1</sup>На первый взгляд определение фактормножества противоречит одному из наиболее фундаментальных принципов теории множеств, согласно которому множество определяется своими элементами. В самом деле, этот принцип не оставляет никакого сомнения в том, что  $X/S = S$ , поскольку  $S$  и  $X/S$  имеют одни и те же элементы. Так что кажется нет необходимости вводить  $X/S$ . Истинное значение перехода от разбиения к фактормножеству не в изменении буквального теоретико-множественного смысла, а в изменении нашего отношения к элементам разбиения. Пока мы помним, что они являются подмножествами исходного множества, и не прочь думать об их внутреннем устройстве (хотя бы об их элементах), мы говорим о разбиении. Как только мы стали думать об элементах разбиения как о неделимых частицах, мы начинаем говорить об элементах фактормножества.

**20.А.** Докажите, что насыщение множества  $A$  равно  $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$ .

**20.В.** Докажите, что множество насыщено, тогда оно совпадает со своим насыщением.

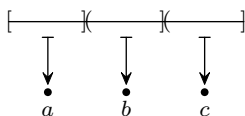
## 20'2. Фактортопология

Фактормножество  $X/S$  топологического пространства  $X$  по любому его разбиению  $S$  на непустые подмножества наделяется естественной топологией: множество  $U \subset X/S$  объявляется открытым в  $X/S$ , если открыт его прообраз  $\text{pr}^{-1}(U)$  при отображении  $\text{pr} : X \rightarrow X/S$ .

**20.С.** Если  $S$  – разбиение множества  $X$ , а  $\Omega$  – топология в  $X$ , то  $\{U \subset X/S \mid \text{pr}^{-1}(U) \in \Omega\}$  действительно является топологической структурой в  $X/S$ .

Эта топологическая структура называется *фактортопологией*, а множество  $X/S$ , наделенное ею, называется *факторпространством* пространства  $X$  по разбиению  $S$ .

**20.3.** Опишите явно факторпространство отрезка по разбиению  $S$ , состоящему из множеств  $[0; \frac{1}{3}]$ ,  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ ,  $(\frac{2}{3}; 1]$ .



**20.4.** Что можно сказать о разбиении  $S$  топологического пространства  $X$ , если факторпространство  $X/S$  дискретно?

**20.Д.** Множество в факторпространстве  $X/S$  открыто, тогда оно – образ насыщенного открытого множества при отображении  $\text{pr}$ .

**20.Е.** Множество в факторпространстве  $X/S$  замкнуто, тогда его прообраз при проекции замкнут в  $X$ , тогда оно является образом насыщенного замкнутого множества.

**20.Ф.** Каноническая проекция  $\text{pr} : X \rightarrow X/S$  является непрерывным отображением.

**20.Г.** Докажите, что фактортопология является самой тонкой топологией в  $X/S$ , по отношению к которой проекция  $\text{pr}$  непрерывна.

## 20'3. Топологические свойства факторпространств

**20.Н.** Факторпространство связного пространства связно.

**20.И.** Факторпространство линейно связного пространства линейно связно.

**20.J.** Факторпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

**20.K.** Факторпространство компактного пространства компактно.

**20.L.** Факторпространство прямой по её разбиению на  $\mathbb{R}_+$  и  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$  не хаусдорфово.

**20.M.** Факторпространство топологического пространства  $X$  по разбиению  $S$  хаусдорфово, тогда любые два элемента этого разбиения обладают непересекающимися насыщенными окрестностями.

**20.5.** Сформулируйте в том же духе условия, необходимые и достаточные для того, чтобы факторпространство удовлетворяло другим аксиомам отделимости и аксиомам счетности.

**20.6.** Постройте пример, показывающий, что существование счетной базы может теряться при переходе к факторпространству.

#### 20'4. Теоретико-множественное отступление: факторотображения

Пусть  $S$  – разбиение множества  $X$  на непустые подмножества и  $f : X \rightarrow Y$  – отображение, постоянное на каждом элементе разбиения  $S$ . Тогда возникает отображение  $X/S \rightarrow Y$ , относящее каждому элементу  $A$  разбиения  $S$  элемент  $f(A)$ . Это отображение обозначается через  $f/S$  и называется **фактором** отображения  $f$  (по разбиению  $S$ ).

**20.N.** 1) Докажите, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  постоянно на каждом элементе разбиения  $S$  множества  $X$ , тогда существует такое отображение  $g : X/S \rightarrow Y$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{pr} \downarrow & \nearrow g & \\ X/S & & \end{array}$$

коммутативна. 2) Докажите, что каждое такое отображение  $g$  совпадает с  $f/S$ .

Более общо, если  $S$  и  $T$  – разбиения множеств  $X$  и  $Y$ , то всякому отображению  $f : X \rightarrow Y$ , отображающему элементы разбиения  $S$  в элементы разбиения  $T$ , отвечает отображение  $X/S \rightarrow Y/T$ , относящее элементу  $A$  разбиения  $S$  элемент разбиения  $T$ , содержащий  $f(A)$ . Это отображение обозначается через  $f/S, T$  и называется **факторотображением** отображения  $f$  (по разбиениям  $S$  и  $T$ ).

**20.O.** Обобщите утверждение задачи 20.N на случай отображений  $f/(S, T)$ .

Произвольное отображение  $f : X \rightarrow Y$  определяет разбиение множества  $X$  на непустые прообразы элементов множества  $Y$ . Это разбиение обозначается через  $S(f)$ .

**20.P.** Отображение  $f/S(f) : X/S(f) \rightarrow Y$  инъективно.

Это отображение называется *инъективным фактором* отображения  $f$ .

### 20'5. Непрерывность факторотображений

**20.Q.** Если  $X, Y$  – топологические пространства,  $S$  – разбиение пространства  $X$  на непустые множества и  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение, постоянное на каждом элементе разбиения  $S$ , то фактор  $f/S$  отображения  $f$  является непрерывным отображением.

**20.7.** Если отображение  $f$  открыто, то и факторотображение  $f/S$  открыто.

**20.8.** Пусть  $X, Y$  – топологические пространства и  $S$  – разбиение пространства  $X$  на непустые множества. Формула  $f \mapsto f/S$  определяет биекцию множества непрерывных отображений  $X \rightarrow Y$ , постоянных на каждом элементе разбиения  $S$ , на множество всех непрерывных отображений  $X/S \rightarrow Y$ .

**20.R.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение, для которого существует отображение  $f/(S, T) : X/S \rightarrow Y/T$ . Тогда это отображение  $f/(S, T)$  непрерывно.

### 20'6х. Замкнутые разбиения

Разбиение  $S$  топологического пространства  $X$  называется *замкнутым*, если насыщение каждого замкнутого множества замкнуто.

**20.1х.** Докажите, что разбиение замкнуто, тогда каноническая проекция  $X \rightarrow X/S$  является замкнутым отображением.

**20.2х.** Докажите, что разбиение, содержащее всего один не одноточечный элемент, замкнуто, если этот элемент – замкнутое множество.

**20.Ах.** Пусть  $X$  – пространство удовлетворяющее первой аксиоме отделимости,  $S$  – его замкнутое разбиение. Тогда факторпространство  $X/S$  удовлетворяет первой аксиоме отделимости.

**20.Вх.** Факторпространство нормального пространства по замкнутому разбиению нормально.

### 20'7х. Открытые разбиения

Разбиение  $S$  топологического пространства  $X$  называется *открытым*, если насыщение каждого открытого множества открыто.



**20.3х.** Докажите, что разбиение открыто, тогда каноническая проекция  $X \rightarrow X/S$  является открытым отображением.

**20.4х.** Докажите, что если множество  $A$  насыщено относительно открытого разбиения, то  $\text{Int } A$  и  $\text{Cl } A$  тоже насыщены.

**20.Сх.** Факторпространство пространства со счётной базой по открытому разбиению обладает счётной базой.

**20.Дх.** Факторпространство пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счётности, по открытому разбиению удовлетворяет первой аксиоме счётности.

**20.Ех.** Пусть  $S$  – открытое разбиение пространства  $X$  и  $T$  – открытое разбиение пространства  $Y$ . Обозначим через  $S \times T$  разбиение пространства  $X \times Y$ , состоящее из множеств вида  $A \times B$ , где  $A \in S$  и  $B \in T$ . Тогда инъективный фактор  $X \times Y / S \times T \rightarrow X/S \times Y/T$  отображения  $\text{pr}_1 \times \text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow X/S \times Y/T$  является гомеоморфизмом.

## 21. Зверинец факторпространств

### 21'1. Инструмент распознавания факторпространств

**21.А.** Инъективный фактор непрерывного отображения компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.

(Иными словами, если  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное сюръективное отображение,  $X$  компактно,  $Y$  хаусдорфово, то  $f/S(f) : X/S(f) \rightarrow Y$  – гомеоморфизм).

**21.В.** Инъективный фактор непрерывного отображения компактного пространства в хаусдорфово пространство является топологическим вложением.

**21.1.** Опишите разбиения отрезка, факторизации по которым дают связанные буквы латинского алфавита.

**21.2.** Докажите, что существует разбиение отрезка  $I$  факторпространство по которому гомеоморфно квадрату  $I \times I$ .

### 21'2. Живописание разбиений

Обычно аккуратное буквальное описание разбиения громоздко, но его можно сократить и сделать понятнее. Конечно, это требует более обширного и гибкого словарного запаса, в котором различия между отдельными словами почти неуловимы. Например, выражения *профакторизуем* и *перейдём к факторпространству* могут заменяться словами *приклеим*, *стянем*, *отождествим* и тому подобные слова из повседневной речи, имеющие в ней чем-то похожие значения.

Некоторые элементы этого языка легко формализуются. Например, факторизация пространства  $X$  по разбиению, состоящему из множества  $A$  и одноточечных подмножеств дополнения  $X \setminus A$ , называется *стягиванием* (множества  $A$  в точку), а соответствующее факторпространство обозначается через  $X/A$ .

**21.3.** Пусть пересекающиеся множества  $A, B \subset X$  составляют фундаментальное покрытие топологического пространства  $X$ . Докажите, что факторотображение  $A/A \cap B \rightarrow X/B$  включения  $A \hookrightarrow X$  является гомеоморфизмом.

Если  $A$  и  $B$  – непересекающиеся подпространства пространства  $X$ , и  $f : A \rightarrow B$  – гомеоморфизм, то факторизация пространства  $X$  по разбиению на одноточечные подмножества множества  $X \setminus (A \cup B)$  и двуточечные множества  $\{x, f(x)\}$ , где  $x \in A$ , называется *склеиванием* или *отождествлением* (множеств  $A$  и  $B$  посредством гомеоморфизма  $f$ ).

Удобный и гибкий подход к описанию разбиений открывается переходом к соответствующим отношениям эквивалентности. Главное достоинство этого подхода в том, что благодаря транзитивности достаточно указать лишь некоторые пары эквивалентных элементов: если сказано, что  $x \sim y$  и  $y \sim z$ , то нет нужды говорить, что  $x \sim z$ , так как это следует из уже сказанного.

Таким образом, разбиение может быть описано списком формул вида  $x \sim y$ , которых достаточно для того, чтобы восстановить эквивалентность. Такой список формул, заключённый в квадратные скобки, будет обозначать ниже соответствующее разбиение. Например, факторпространство пространства  $X$ , полученное в результате отождествления подмножеств  $A$  и  $B$  посредством гомеоморфизма  $f : A \rightarrow B$  обозначается через  $X/[a \sim f(a) \text{ для любого } a \in A]$  или просто через  $X/[a \sim f(a)]$ .

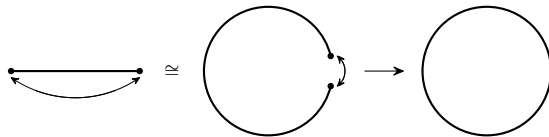
Некоторые разбиения легко описать картинкой, особенно если исходное пространство вкладывается в плоскость. Например, отрезки, которые должны быть склеены посредством линейных гомеоморфизмов, снабжают одинаковыми буквами а также стрелками, показывающими как налагаются эти отрезки друг на друга.

Ниже мы вводим все эти разновидности описаний разбиений и указываем, как ими пользуются, на примерах, приводя также и громоздкие буквальные описания. Последние выглядят безобразно, но к ним приходится прибегать для того, чтобы поддержать у читателя уверенность в правильном понимании новых слов и ощущение их полезности.

### 21'3. Добро пожаловать в зверинец!

**21.C.** Докажите, что факторпространство  $I/[0 \sim 1]$  гомеоморфно  $S^1$ .

Другими словами, факторпространство отрезка  $I$  по разбиению, состоящему из  $\{0, 1\}$  и множеств  $\{a\}$  с  $a \in (0; 1)$ , гомеоморфно окружности.



**21.C.1.** Постройте непрерывное сюръективное отображение  $I \rightarrow S^1$ , у которого разбиение на прообразы точек состоит из одноточечных множеств внутренности отрезка и пары его граничных точек.

**21.D.** Докажите, что факторпространство  $D^n/S^{n-1}$  гомеоморфно сфере  $S^n$ .

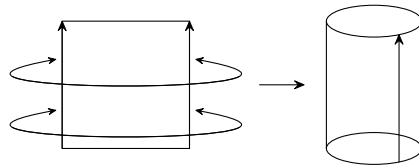
Другими словами, факторпространство шара  $D^n$  по его разбиению на одноточечные подмножества его внутренности и на  $S^{n-1}$  гомеоморфно  $S^n$ . Далее мы будем говорить, что если *стянуть* границу шара в *точку*, то получится сфера.

**21.D.1.** Постройте непрерывное отображение шара  $D^n$  на сферу  $S^n$ , переводящее границу шара в одну точку и биективно отображающее его внутренность на дополнение этой точки.

**21.E.** Докажите, что факторпространство  $I^2/[(0, t) \sim (1, t) \text{ для } t \in I]$  гомеоморфно  $S^1 \times I$ .

Другими словами, факторпространство квадрата  $I^2$  по разбиению на пары точек  $\{(0, t), (1, t)\}$  с  $t \in I$  и на одноточечные подмножества из  $(0; 1) \times I$  гомеоморфно цилиндру  $S^1 \times I$ ,

Далее мы будем говорить, что если *склеить* боковые стороны квадрата так, чтобы отождествлялись точки, лежащие на одной высоте, то в результате получится цилиндр.



**21.F.** Факторпространство  $S^1 \times I/[(z, 0) \sim (z, 1) \text{ для } z \in S^1]$  гомеоморфно тору  $S^1 \times S^1$ .

Другими словами, факторпространство цилиндра  $S^1 \times I$  по разбиению на одноточечные подмножества его внутренности  $S^1 \times (0; 1)$  и пары точек оснований, лежащих на одной образующей, гомеоморфно тору  $S^1 \times S^1$ .

Говорят, что если *склеить* основания цилиндра, отождествляя точки, лежащие на одной образующей, то получится тор.

**21.G.** Факторпространство  $I^2/[(0, t) \sim (1, t), (t, 0) \sim (t, 1)]$  гомеоморфно тору  $S^1 \times S^1$ .

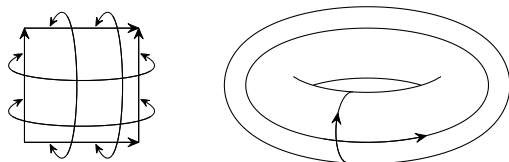
Другими словами, результат факторизации квадрата  $I^2$  по разбиению на

- одноточечные подмножества его внутренности,
- пары точек внутренностей боковых сторон, находящихся на одинаковом расстоянии от нижнего основания,
- пары точек внутренностей оснований, лежащих на одной вертикали,

• и четверку вершин,

гомеоморфен тору  $S^1 \times S^1$ .

Говорят, если *склеить* стороны квадрата, как показано на рисунке, то получится тор.



#### 21'4. Транзитивность факторизации

Решение задачи 21.G естественно свести к решению задач 21.E и 21.F и применению следующей теоремы.

**21.H Транзитивность факторизации.** Если  $S$  – разбиение пространства  $X$  и  $S'$  – разбиение пространства  $X/S$ , то факторпространство  $(X/S)/S'$  канонически гомеоморфно  $X/T$ , где  $T$  – разбиение пространства  $X$  на прообразы элементов разбиения  $S'$  при проекции  $X \rightarrow X/S$ .

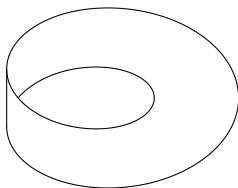
#### 21'5. Лента Мёбиуса

*Лентой Мёбиуса* или *листом Мёбиуса* называется факторпространство  $I^2/[(0, t) \sim (1, 1 - t)]$ . Другими словами, это факторпространство квадрата  $I^2$  по разбиению на пары симметричных относительно центра квадрата точек его боковых сторон и на не лежащие на боковых сторонах одноточечные подмножества.

Как к тому вы, надеемся, уже привыкли, мы будем говорить, что лента Мёбиуса получается при *склеивании* боковых сторон квадрата так, чтобы совместились направления, показанные стрелками:



**21.I.** Докажите, что лента Мёбиуса гомеоморфна поверхности, заметаемой в  $\mathbb{R}^3$  отрезком, который поворачивается в полуплоскости на  $180^\circ$  вокруг своей середины при одновременном вращении этой полуплоскости на  $360^\circ$  вокруг своей граничной прямой.



## 21'6. Стягивание подпространств

**21.4.** Докажите, что факторпространство  $[0; 1]/[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$  гомеоморфно  $[0; 1]$ , а факторпространство  $[0; 1]/\{\frac{1}{3}, 1\}$  гомеоморфно букве  $P$ .

**21.5.** Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

- (a)  $\mathbb{R}^2$ ;                      (b)  $\mathbb{R}^2/I$ ;                      (c)  $\mathbb{R}^2/D^2$ ;                      (d)  $\mathbb{R}^2/I^2$ ;
- (e)  $\mathbb{R}^2/A$ , где  $A$  – объединение нескольких замкнутых отрезков с общим концом;
- (f)  $\mathbb{R}^2/B$ , где  $B$  – простая конечнoзвенная ломаная, т. е. объединение конечной последовательности замкнутых отрезков, в которой начало каждого следующего отрезка совпадает с концом предыдущего.

**21.6.** Докажите, что если  $f : X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм, то факторпространства  $X/A$  и  $Y/f(A)$  гомеоморфны.

**21.7.** Пусть  $A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Верно ли, что факторпространство  $\mathbb{R}^2/A$  гомеоморфно  $\text{Int } D^2 \cup \{(0, 1)\}$ ?

## 21'7. Пространства красивых конфигураций

**21.8.** Докажите, что пространство  $S^1/[z \sim e^{2\pi i/3}z]$  гомеоморфно  $S^1$ .

Другими словами, факторпространство окружности по ее разбиению на тройки точек, являющихся вершинами равносторонних треугольников, гомеоморфно окружности.

**21.9.** Докажите, что следующие факторпространства круга  $D^2$  гомеоморфны самому кругу  $D^2$ :

- (1)  $D^2/[(x, y) \sim (-x, -y)]$ ,
- (2)  $D^2/[(x, y) \sim (x, -y)]$ ,
- (3)  $D^2/[(x, y) \sim (-y, x)]$ .

**21.10.** Придумайте обобщение задачи 21.9 с  $D^n$  вместо  $D^2$ .

**21.11.** Опишите явно факторпространство прямой  $\mathbb{R}^1$  по отношению эквивалентности  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ .

**21.12.** Представьте ленту Мёбиуса как факторпространство цилиндра  $S^1 \times I$ .

## 21'8. Бутылка Клейна

*Бутылкой Клейна* называется факторпространство

$$I^2 / [(t, 0) \sim (t, 1), (0, t) \sim (1, 1 - t)].$$

Другими словами, это факторпространство квадрата  $I^2$  по разбиению на

- одноточечные подмножества его внутренности,
- четверку вершин,
- пары точек оснований, расположенных на одной вертикали,
- и пары точек боковых сторон, симметричных относительно центра квадрата.

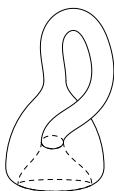
**21.13.** Представьте бутылку Клейна как результат факторизации:

- (1) цилиндра;
- (2) ленты Мёбиуса.

**21.14.** Докажите, что пространство  $S^1 \times S^1 / [(z, w) \sim (-z, \overline{w})]$  гомеоморфно бутылке Клейна. (Здесь через  $\overline{w}$  обозначается комплексное число, сопряжённое числу  $w$ .)

**21.15.** Вложите бутылку Клейна в  $\mathbb{R}^4$  (ср. 21.1 и 19.W).

**21.16.** Вложите бутылку Клейна в  $\mathbb{R}^4$  так, чтобы её образ при ортогональной проекции  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  выглядел следующим образом:



## 21'9. Проективная плоскость

Давайте склеим каждую граничную точку круга  $D^2$  с диаметрально противоположной точкой, т. е. профакторизуем круг по разбиению на пары симметричных относительно центра круга точек граничной окружности и одноточечные множества внутренности круга. Результат называется *проективной плоскостью*. Это пространство, как и бутылка Клейна, не вкладывается в  $\mathbb{R}^3$ , так что его не нарисовать. Вместо этого мы представим его по-другому.

**21.J.** Проективная плоскость есть результат склеивания круга и ленты Мёбиуса при помощи гомеоморфизма между граничной окружностью круга и граничной окружностью ленты Мёбиуса.

**21'10. Понимаете ли Вы, что делаете?**

Вас спровоцировали... Решив предыдущую задачу, вы сделали нечто не предусмотренное предыдущей теорией. В самом деле, операция над двумя пространствами, которая в 21.1 названа *склеиванием*, раньше не появлялась. Она представляет собой композицию двух операций – сначала нужно изготовить из двух пространств одно, состоящее из не пересекающихся друг с другом копий исходных пространств, а затем нужно профакторизовать это пространство, отождествляя точки копии одного пространства с точками копии другого. Займемся более детально первой операцией.

**21'11. Сумма множеств**

*Суммой* семейства множеств  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  называется множество таких пар  $(x_\alpha, \alpha)$ , что  $x_\alpha \in X_\alpha$ . Обозначается это множество символом  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ . Таким образом, мы можем записать, что

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \times \alpha).$$

Для каждого  $\beta \in A$  существует естественная инъекция

$$\text{in}_\beta : X_\beta \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x \mapsto (x, \beta).$$

Если рассматривается сумма только двух множеств, скажем  $X$  и  $Y$ , про которые известно, что общих точек у них нет, то можно обойтись без семейств и без индексов, положив

$$X \sqcup Y = \{(x, X) \mid x \in X\} \cup \{(y, Y) \mid y \in Y\}.$$

**21'12. Сумма пространств**

**21.K.** Если  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  – семейство топологических пространств, то совокупность подмножеств множества  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ , прообразы которых при всех включениях  $\text{in}_\alpha$  с  $\alpha \in A$  являются открытыми, образует топологическую структуру.

Сумма множеств  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  с этой топологией называется (*несвязной*) *суммой* топологических пространств  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ .

**21.L.** Топология, описанная в 21.K, есть самая тонкая топология, относительно которой все включения  $\text{in}_\alpha$  непрерывны.

**21.17.** Отображения  $\text{in}_\beta : X_\beta \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  являются топологическими вложениями и их образы одновременно открыты и замкнуты в  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ .



**21.18.** Какие топологические свойства передаются от слагаемым  $X_\alpha$  к сумме  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ , а какие нет?

### 21'13. Приклеивание пространств

Пусть  $X, Y$  – топологические пространства,  $A$  – подмножество пространства  $X$  и  $f : A \rightarrow Y$  – непрерывное отображение. Факторпространство  $(X \sqcup Y)/[a \sim f(a) \text{ при } a \in A]$  обозначается через  $X \cup_f Y$  и называется результатом *приклеивания* пространства  $X$  к пространству  $Y$  посредством  $f$ . Отображение  $f$  называется *приклеивающим отображением*.

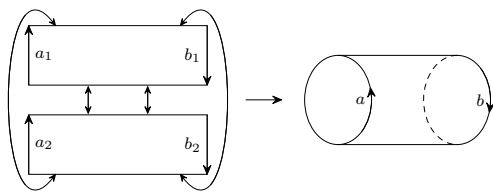
Разбиение  $X \sqcup Y$ , по которому производится факторизация, состоит из одноточечных множеств, лежащих в  $\text{in}_2(Y \setminus A)$  и  $\text{in}_1(X \setminus f(A))$ , и множеств  $\text{in}_1(x) \cup \text{in}_2(f^{-1}(x))$  с  $x \in f(A)$ .

**21.19.** Докажите, что композиция включения  $Y \rightarrow X \sqcup Y$  и проекции  $X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$  является топологическим вложением.

**21.20.** Докажите, что если  $Y$  – точка, то  $X \cup_f Y \cong X/A$ .

**21.М.** В результате приклеивания шара к его копии посредством тождественного отображения граничной сферы  $S^{n-1}$  получается пространство, гомеоморфное  $S^n$ .

**21.21.** Докажите, что бутылку Клейна можно получить, приклеив ленту Мёбиуса к ее копии посредством тождественного отображения граничной окружности.



**21.22.** Докажите, что в результате приклеивания цилиндра  $S^1 \times I$  к его копии посредством тождественного отображения пары граничных окружностей на пару граничных окружностей получается пространство, гомеоморфное  $S^1 \times S^1$ .

**21.23.** Докажите, что в результате приклеивания *полнотория*  $S^1 \times D^2$  к его копии посредством тождественного отображения граничного тора  $S^1 \times S^1$  получается пространство, гомеоморфное  $S^1 \times S^2$ .

**21.24.** Представьте бутылку Клейна как результат приклеивания цилиндра  $S^1 \times I$  к своей копии.

**21.25.** Докажите, что в результате приклеивания полнотория  $S^1 \times D^2$  к его копии посредством отображения граничного тора на себя, определяемого формулой

$$S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (x, y) \mapsto (y, x),$$

получается пространство, гомеоморфное трехмерной сфере  $S^3$ .

**21.N.** Пусть  $X, Y$  – топологические пространства,  $A \subset X$  и  $f, g : A \rightarrow Y$  – непрерывные отображения. Докажите, что если существует такой гомеоморфизм  $h : Y \rightarrow Y$ , что  $h \circ f = g$ , то пространства  $X \cup_f Y$  и  $X \cup_g Y$  гомеоморфны.

**21.O.** Пространство  $D^n \cup_f D^n$  гомеоморфно  $S^n$  для любого гомеоморфизма  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ .

**21.26.** Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма пространства, получающиеся из квадрата при помощи склеивания пары его противоположных сторон посредством некоторых гомеоморфизмов.

**21.27.** Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма пространства, получающиеся из двух копий  $S^1 \times I$  при помощи склеивания двух пар  $S^1 \times \{0, 1\}$  посредством некоторых гомеоморфизмов.

**21.28.** Докажите, что топологический тип результата склеивания двух лент Мёбиуса посредством некоторого гомеоморфизма их граничных окружностей не зависит от выбора гомеоморфизма.

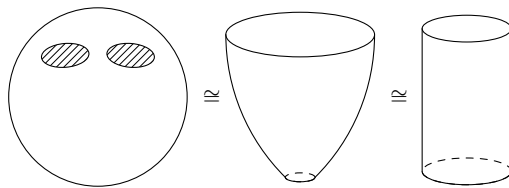
**21.29.** Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма пространства, получающиеся из  $S^1 \times I$  при помощи склеивания  $S^1 \times 0$  с  $S^1 \times 1$  посредством некоторого гомеоморфизма.

## 21'14. Основные поверхности

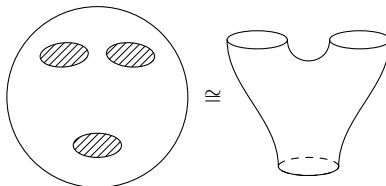
Тор  $S^1 \times S^1$  с удаленным из него подпространством, представляющим собой внутренность вложенного в  $S^1 \times S^1$  круга  $D^2$ , называется *ручкой*. Сфера  $S^2$  с удаленными из нее внутренностями  $n$  вложенных и попарно непересекающихся кругов  $D^2$  называется *сферой с  $n$  дырами*.

**21.P.** Сфера с дырой гомеоморфна кругу  $D^2$ .

**21.Q.** Сфера с двумя дырами гомеоморфна цилиндру  $S^1 \times I$ .



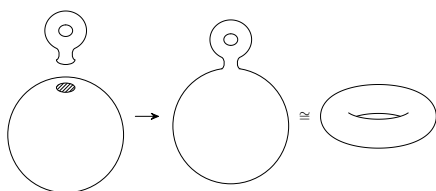
Сфера с тремя дырами не гомеоморфна какому-либо пространству, с которым мы встречались выше. Однако она заслуживает особого упоминания. Она называется *штаны*.



Результат приклеивания к сфере с  $p$  дырами суммы  $p$  экземпляров ручки посредством вложений их граничных окружностей с образами — граничными окружностями сферы с дырами (края дыр), называется *сферой с  $p$  ручками* или, более торжественно (и до поры до времени менее понятно), *ориентируемой замкнутой связной поверхностью рода  $p$* .

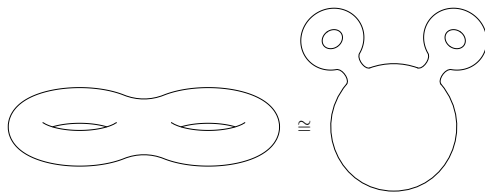
**21.30.** Докажите, что сфера с  $p$  ручками определена с точностью до гомеоморфизма (т. е. топологический тип результата приклеивания не зависит от приклеивающих вложений).

**21.R.** Сфера с одной ручкой гомеоморфна тору  $S^1 \times S^1$ .



**21.S.** Сфера с двумя ручками гомеоморфна результату приклеивания ручки к своей копии посредством тождественного отображения граничной окружности.

Сфера с двумя ручками называется также *кренделем* (иногда так называют и сферу с большим числом ручек).



Пространство, получающееся из сферы с  $q$  дырами в результате приклеивания к ней  $q$  экземпляров ленты Мёбиуса посредством вложений их граничных окружностей с образами — граничными окружностями дыр, называется *сферой с  $q$  пленками* или *неориентируемой замкнутой связной поверхностью рода  $q$* .

**21.31.** Докажите, что топологический тип сферы с пленками определен однозначно, т. е. не зависит от выбора приклеивающих гомеоморфизмов.

**21.T.** Сфера с одной пленкой гомеоморфна проективной плоскости.

**21.U.** Сфера с двумя пленками гомеоморфна бутылке Клейна.

Сфера, сферы с ручками и сферы с пленками называются *основными поверхностями*.

**21.V\*.** Сфера с  $p$  ручками и  $q$  пленками (здесь  $q > 0$ ) гомеоморфна сфере с  $2p + q$  пленками.

**21.32.** Расклассифицируйте с точностью до гомеоморфизма топологические пространства, получающиеся приклеиванием  $p$  копий пространства  $S^1 \times I$  к сфере с  $2p$  дырами.

## 22. Проективные пространства

Этот параграф может рассматриваться как продолжение предыдущего. В нем описываются конкретные факторпространства, но эти факторпространства, пожалуй, играют слишком важную роль для того, чтобы относиться к ним просто как к примерам, иллюстрирующим факторизацию.

### 22'1. Вещественные проективные пространства

Вещественное проективное пространство размерности  $n$  определяется как факторпространство сферы  $S^n$  по разбиению на пары диаметрально противоположных точек и обозначается через  $\mathbb{R}P^n$ .

*22.A. Пространство  $\mathbb{R}P^n$  гомеоморфно факторпространству  $n$ -мерного шара  $D^n$  по разбиению на одноточечные подмножества внутренности шара  $D^n$  и пары антиподальных точек граничной сферы  $S^{n-1}$ .*

*22.B.  $\mathbb{R}P^0$  есть точка.*

Пространство  $\mathbb{R}P^1$  называется *проективной прямой*.

*22.C. Пространство  $\mathbb{R}P^1$  гомеоморфно окружности  $S^1$ .*

*22.D. Пространство  $\mathbb{R}P^2$  гомеоморфно проективной плоскости, которая была определена в предыдущем пункте.*

*22.E. Пространство  $\mathbb{R}P^n$  канонически гомеоморфно факторпространству пространства  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$  по разбиению на одномерные векторные подпространства пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  с удаленным нулем.*

Точка пространства  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$  есть последовательность вещественных чисел, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. В этом контексте их принято нумеровать, начиная нумерацию не с единицы, а с нуля (чтобы закончить  $n$ -ым, а не  $(n+1)$ -ым), и называть *однородными координатами* соответствующей точки пространства  $\mathbb{R}P^n$ . Точка, ими определяемая, обозначается через  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ . Однородные координаты определяют точку пространства  $\mathbb{R}P^n$ , но не определяются ею: одной и той же точке пространства  $\mathbb{R}P^n$  отвечают пропорциональные наборы однородных координат.

*22.F. Пространство  $\mathbb{R}P^n$  канонически гомеоморфно пространству прямых пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ , проходящих через точку  $0 = (0, \dots, 0)$  с метрикой, которая определяется как угол между прямыми (число, не превышающее  $\frac{\pi}{2}$ ). Прежде всего, докажите, что это действительно метрика.*

**22.G.** Покажите, что отображение

$$i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}P^n: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1: x_1: \dots: x_n)$$

является топологическим вложением. Каков образ этого отображения и как устроено обратное отображение образа на  $\mathbb{R}^n$ ?

**22.H.** Постройте топологическое вложение  $\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , образ которого совпадает с  $\mathbb{R}P^n \setminus i(\mathbb{R}^n)$ , где  $i$  – вложение, определённое в задаче 22.G.

Таким образом, проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  можно рассматривать как результат присоединения к евклидову пространству  $\mathbb{R}^n$  “несобственных” или “бесконечно-удалённых” точек, составляющих проективное пространство  $\mathbb{R}P^{n-1}$  на единицу меньшей размерности.

**22.1.** Введите естественным образом топологическую структуру в множестве всех прямых на плоскости и докажите, что полученное пространство гомеоморфно: а)  $\mathbb{R}P^2 \setminus \text{point}$ ; б) открытой ленте Мёбиуса (т. е. ленте Мёбиуса с удалённой граничной окружностью).

**22.2.** Докажите, что множество поворотов трёхмерного пространства  $\mathbb{R}^3$  вокруг всевозможных прямых на всевозможные углы, снабжённое естественной топологической структурой, гомеоморфно  $\mathbb{R}P^3$ .

## 22'2х. Комплексные проективные пространства

Комплексное проективное пространство размерности  $n$  определяется как факторпространство единичной сферы  $S^{2n+1}$  пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$  по ее разбиению на окружности, высекаемые (комплексными) прямыми пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящими через точку начало координат. Обозначается оно через  $\mathbb{C}P^n$ .

**22.Ax.** Пространство  $\mathbb{C}P^n$  гомеоморфно факторпространству единичного замкнутого шара  $D^{2n}$  пространства  $\mathbb{C}^n$  по разбиению, элементами которого служат множества внутренности шара  $D^{2n}$  и окружности, высекаемые на его граничной сфере  $S^{2n-1}$  (комплексными) прямыми пространства  $\mathbb{C}^n$ , проходящими через точку начало координат.

**22.Bx.** Пространство  $\mathbb{C}P^0$  состоит из одной точки.

Пространство  $\mathbb{C}P^1$  называется *комплексной проективной прямой*.

**22.Cx.** Комплексная проективная прямая  $\mathbb{C}P^1$  гомеоморфна  $S^2$ .

**22.Dx.** Пространство  $\mathbb{C}P^n$  канонически гомеоморфно факторпространству пространства  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$  по разбиению на проколотые в точке нуль комплексные прямые пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящие через ноль.

Таким образом,  $\mathbb{C}P^n$  можно представить как пространство классов комплексно пропорциональных ненулевых последовательностей  $(x_0, \dots, x_n)$  комплексных чисел. Обозначение  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  и термин однородные координаты, введенные выше в вещественном случае, переносятся и на комплексную ситуацию.

**22.Ех.** Пространство  $\mathbb{C}P^n$  канонически гомеоморфно множеству (комплексных) прямых пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$ , проходящих через точку ноль, топологизированному угловой метрикой (которая принимает значения в промежутке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ).

### 22'3х. Кватернионные проективные пространства

Напомним, что в  $\mathbb{R}^4$  имеется замечательное умножение, открытое Р. В. Гамильтоном (R. W. Hamilton) в 1843 году, которое можно задать формулой

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) \times (y_1, y_2, y_3, y_4) = \\ (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4, \quad x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3, \\ x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2, \quad x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1). \end{aligned}$$

Оно билинейно, и для его описания достаточно указать произведения базисных векторов. Последние в этом контексте принято обозначать, следуя Гамильтону, так:

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad i = (0, 1, 0, 0), \quad j = (0, 0, 1, 0) \quad \text{и} \quad k = (0, 0, 0, 1).$$

В этих обозначениях 1 действительно является единицей:  $(1, 0, 0, 0) \times x = x$  для любого  $x \in \mathbb{R}^4$ . Остаток таблицы умножения выглядит так:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i \quad \text{и} \quad ik = -j.$$

Вместе с покоординатным сложением это умножение задает в  $\mathbb{R}^4$  структуру алгебры. Её элементы называются **кватернионами**.

**22.Фх.** Убедитесь в том, что умножение кватернионов ассоциативно.

Оно не коммутативно (например,  $ij = k \neq -k = ji$ ). В остальном кватернионы очень похожи на комплексные числа. Как и в множестве комплексных чисел, в множестве кватернионов действует преобразование, которое называется **сопряжением**, обозначается, как и сопряжение комплексных чисел, чертой:  $x \mapsto \bar{x}$ . Оно задаётся формулой  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$  и обладает следующими двумя замечательными свойствами:

**22.Гх.**  $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$  для любых кватернионов  $a$  и  $b$ .

**22.Нх.**  $a\bar{a} = |a|^2$ , то есть произведение любого кватерниона  $a$  на сопряжённый ему кватернион  $\bar{a}$  равно  $(|a|^2, 0, 0, 0)$ .

Последнее свойство позволяет определить для любого  $a \in \mathbb{R}^4$  обратный элемент

$$a^{-1} = |a|^{-2}\bar{a}$$

такой, что  $aa^{-1} = 1$ .

Таким образом, алгебра кватернионов есть *алгебра с делением* или *тело*. Она обозначается через  $\mathbb{H}$  в честь своего открывателя Гамильтона.

В пространстве  $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{4n}$  имеются правые кватернионные прямые, т. е. подмножества вида  $\{(a_1\xi, \dots, a_n\xi) \mid \xi \in \mathbb{H}\}$ , и аналогичные левые кватернионные прямые  $\{(\xi a_1, \dots, \xi a_n) \mid \xi \in \mathbb{H}\}$ . Каждая из них представляет собой вещественное четырёхмерное подпространство пространства  $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{4n}$ .

**22.Их.** Найдите правую кватернионную прямую, не являющуюся левой кватернионной прямой.

**22.Жх.** Покажите, что две правые кватернионные прямые в  $\mathbb{H}^n$  либо пересекаются только в 0, либо совпадают.

Факторпространство единичной сферы  $S^{4n+3}$  пространства  $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^{4n+4}$  по её разбиению на трёхмерные сферы, высекаемые правыми кватернионными прямыми пространства  $\mathbb{H}^{n+1}$ , называется (*правым*) *кватернионным проективным пространством размерности  $n$* . Аналогично, только с разбиением на левые кватернионные прямые, определяется (*левое*) *кватернионное проективное пространство размерности  $n$* .

**22.Кх.** Гомеоморфны ли правое и левое кватернионные проективные пространства одинаковых размерностей?

Левое кватернионное проективное пространство размерности  $n$  обозначается через  $\mathbb{H}P^n$ .

**22.Лх.** Пространство  $\mathbb{H}P^0$  состоит из одной точки.

**22.Мх.** Пространство  $\mathbb{H}P^n$  гомеоморфно факторпространству единичного замкнутого шара  $D^{4n}$  пространства  $\mathbb{H}^n$  по разбиению, элементами которого служат множества внутренности шара  $D^{4n}$  и трёхмерные сферы, высекаемые на его граничной сфере  $S^{4n-1}$  (левыми кватернионными) прямыми пространства  $\mathbb{H}^n$ .

Пространство  $\mathbb{H}P^1$  называется *кватернионной проективной прямой*.

**22.Нх.** Кватернионная проективная прямая  $\mathbb{H}P^1$  гомеоморфна  $S^4$ .



**22.Ох.** Пространство  $\mathbb{H}P^n$  канонически гомеоморфно факторпространству пространства  $\mathbb{H}^{n+1} \setminus 0$  по разбиению на проколотые в точке нуль левые кватернионные прямые пространства  $\mathbb{H}^{n+1}$ , проходящие через начало координат.

Таким образом,  $\mathbb{H}P^n$  можно представить как пространство классов кватернионно пропорциональных слева ненулевых последовательностей  $(x_0, \dots, x_n)$  кватернионов. Обозначение  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  и термин однородные координаты, введенные выше в вещественном случае, переносятся и на кватернионную ситуацию.

**22.Рх.** Пространство  $\mathbb{H}P^n$  канонически гомеоморфно множеству (левых кватернионных) прямых пространства  $\mathbb{H}^{n+1}$ , топологизированному угловой метрикой (которая принимает значения в промежутке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ).

## 23х. Конечные топологические пространства

### 23'1х. Теоретико-множественное отступление: расщепление транзитивного отношения на эквивалентность и порядок

В определениях отношений порядка и эквивалентности условие транзитивности представляется наиболее значимым. В этом пункте мы придадим этому ощущению формальное обоснование, показав, что остальные условия в некотором смысле являются неизбежными естественными спутниками транзитивности, хотя и не следуют из неё.

**23.Ах.** Пусть  $\prec$  – транзитивное отношение на множестве  $X$ . Тогда отношение  $\preceq$ , определяемое следующим образом:

$$a \preceq b, \text{ если } a \prec b \text{ или } a = b,$$

тоже транзитивно (и, кроме того, конечно же рефлексивно, т. е.  $a \preceq a$  для любого  $a \in X$ ).

Бинарное отношение  $\preceq$  в множестве  $X$  называется *предпорядком*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

- **Транзитивность.** Если  $a \preceq b$  и  $b \preceq c$ , то  $a \preceq c$ .
- **Рефлексивность.**  $a \preceq a$  для любого  $a$ .

Множество  $X$ , снабжённое предпорядком  $\preceq$ , называется *предупорядоченным*.

Если предпорядок ещё и антисимметричен, то это – нестрогий порядок.

**23.1х.** Является ли отношение  $a|b$  предпорядком в множестве  $\mathbb{Z}$  целых чисел?

**23.Вх.** Если  $(X, \preceq)$  – предупорядоченное множество, то отношение  $\sim$ , определяемое следующим образом:

$$a \sim b, \text{ если } a \preceq b \text{ и } b \preceq a,$$

является отношением эквивалентности (т.е. симметрично, рефлексивно и транзитивно) в  $X$ .

**23.2х.** Какое отношение эквивалентности определяется на множестве целых чисел предпорядком  $a|b$ ?

**23.Сх.** Пусть  $(X, \preceq)$  – предупорядоченное множество и  $\sim$  – отношение эквивалентности, определённое предпорядком  $\preceq$  на  $X$  согласно 23.Вх. Тогда из  $a' \sim a$ ,  $a \preceq b$  и  $b \sim b'$  следует  $a' \preceq b'$ , и тем самым  $\preceq$

определяет на множестве классов эквивалентности  $X/\sim$  отношение. Это отношение является нестрогим порядком.

Таким образом, всякое транзитивное отношение порождает отношение эквивалентности и порядок в множестве классов эквивалентных элементов.

**23.Dx.** Во что вырождается эта цепочка конструкций, если исходное транзитивное отношение было

- (1) эквивалентностью, или
- (2) нестрогим порядком.

**23.Ex.** Во всяком топологическом пространстве отношение  $\lesssim$ , определяющееся следующим образом:

$$a \lesssim b, \text{ если } a \in \text{Cl}\{b\},$$

является предпорядком.

**23.3x.** Во множестве всех подмножеств произвольного пространства отношение  $\lesssim$ , определяющееся следующим образом:

$$A \lesssim B, \text{ если } A \subset \text{Cl}\{B\},$$

является предпорядком. Этот предпорядок определяет отношение эквивалентности, при котором множества эквивалентны, когда их замыкания совпадают.

**23.Fx.** Отношение эквивалентности, определённое предпорядком теоремы 23.Ex, определяет разбиение пространства на максимальные (по включению) антидискретные подпространства. Факторпространство по этому разбиению удовлетворяет аксиоме Колмогорова  $T_0$ .

Факторпространство теоремы 23.Fx называется **максимальным  $T_0$ -факторпространством пространства  $X$** .

**23.Gx.** Непрерывный образ антидискретного пространства антидискретен.

**23.Hx.** Любое непрерывное отображение  $X \rightarrow Y$  порождает непрерывное отображение максимального  $T_0$ -факторпространства пространства  $X$  в максимальное  $T_0$ -факторпространство пространства  $Y$ .

## 23'2x. Структура конечного топологического пространства

Результаты предыдущего пункта дают ключ к пониманию структуры конечных топологических пространств. Пусть  $X$  – конечное топологическое пространство. Согласно теореме 23.Fx оно оказывается разбито на антидискретные кластеры точек. При непрерывном отображении эти антидискретные кластеры отображаются, согласно 23.Gx, друг в друга.

Таким образом, непрерывные отображения конечных пространств индуцируют непрерывные отображения факторпространств по разбиениям на антидискретные кластеры точек, ср. 23.Нх.

Факторпространство конечного пространства по разбиению на максимальные антидискретные множества удовлетворяет, согласно 23.Фх, аксиоме отделимости Колмогорова. Как и всякое конечное пространство, оно является пространством наименьших окрестностей. В силу теоремы 14.О, топология этого факторпространства является топологией порядка. В силу теоремы 9.Вх, гомеоморфизмы между пространствами с топологией порядка являются монотонными биекциями.

Таким образом, конечное топологическое пространство с точностью до гомеоморфизма характеризуется конечным частично упорядоченным множеством, элементы которого снабжены кратностями, представляющими собой натуральные числа. Два таких пространства гомеоморфны, тогда между соответствующими упорядоченными множествами существует монотонная биекция, сохраняющая кратности. Для восстановления топологического пространства по упорядоченному множеству с кратностями нужно ввести в это множество топологию порядка, а затем заменить в нём каждую точку антидискретным кластером точек, в котором число точек равно кратности исходной точки.

### 23'3х. Симплициальные схемы

Пусть  $V$  – множество и  $\Sigma$  – множество некоторых его конечных подмножеств. Пара  $(V, \Sigma)$  называется *симплициальной схемой* с множеством *вершин*  $V$  и множеством *симплексов*  $\Sigma$ , если

- каждое подмножество любого элемента множества  $\Sigma$  само принадлежит  $\Sigma$ ,
- пересечение любого набора элементов множества  $\Sigma$  само принадлежит  $\Sigma$ ,
- каждое одноэлементное подмножество множества  $V$  принадлежит  $\Sigma$ .

Множество  $\Sigma$  упорядочено по включению. Наделённое топологией этого частичного порядка, оно называется *пространством симплексов* симплициальной схемы  $(X, \Sigma)$ .

По каждой симплициальной схеме естественным образом строится и другое топологическое пространство. А именно, для симплициальной схемы  $(V, \Sigma)$  рассмотрим множество  $S(V, \Sigma)$  всех таких функций  $c : V \rightarrow I$ , таких что

$$\text{Supp}(c) = \{v \in V \mid c(v) \neq 0\}$$

содержится в  $\Sigma$  и  $\sum_{v \in V} c(v) = 1$ . Снабдим множество  $S(V, \Sigma)$  топологией, порождаемой метрикой

$$\rho(c_1, c_2) = \sup_{v \in V} |c_1(v) - c_2(v)|.$$

Пространство  $S(V, \Sigma)$  покрыто множествами  $\{c \in S \mid \text{Supp}(c) = \sigma\}$ , где  $\sigma \in \Sigma$ . Оно называется *симплициальным* или *триангулированным* пространством, а множества вида  $\{c \in S \mid \text{Supp}(c) = \sigma\}$  называются его (*открытыми*) *симплексами*.

**23.4х.** Какие открытые симплексы симплициального пространства являются открытыми множествами, какие – замкнутыми, а какие – ни теми, ни другими?

**23.1х.** Найдите для каждого  $\sigma \in \Sigma$  гомеоморфизм подпространства

$$\{c \in S \mid \text{Supp}(c) = \sigma\} \subset S(V, \Sigma)$$

на открытый симплекс, размерность которого на единицу меньше числа вершин, содержащихся в  $\sigma$  (напомним, что  $n$ -мерным открытым симплексом называется множество  $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j > 0 \text{ для } j = 1, \dots, n+1 \text{ и } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \}$ ).

**23.1х.** Докажите, что для любой симплициальной схемы  $(V, \Sigma)$  факторпространство симплициального пространства  $S(V, \Sigma)$  по его разбиению на открытые симплексы гомеоморфно пространству  $\Sigma$  симплексов симплициальной схемы  $(V, \Sigma)$ .

### 23'4х. Барицентрическое подразделение частично упорядоченного множества

**23.Кх.** Найдите частично упорядоченное множество, не изоморфное упорядоченному по включению множеству симплексов какой бы то ни было симплициальной схемы.

Пусть  $(X, \prec)$  – частично упорядоченное множество. Рассмотрим множество всевозможных непустых конечных строго возрастающих последовательностей  $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n$  элементов множества  $X$ , то есть множество всех непустых конечных подмножеств, в каждом из которых  $\prec$  индуцирует линейный порядок. Обозначим это множество через  $X'$ . Оно естественно упорядочено по включению.

Частично упорядоченное множество  $(X', \subset)$  называется *производным* частично упорядоченного множества  $(X, \prec)$ . Переход от частично упорядоченного множества к его производному можно повторить любое число раз. Так возникают *кратные производные* частично упорядоченного множества.

**23.Лх.** Для любого частично упорядоченного множества  $(X, \prec)$  пара  $(X, X')$  является симплициальной схемой.

Имеется естественное отображение  $X' \rightarrow X$ , относящее элементу множества  $X'$ , т.е. конечному непустому линейно упорядоченному подмножеству множества  $X$ , его наибольший элемент.

**23.Мх.** Монотонно ли это отображение? Строго ли монотонно? Монотонно ли аналогичное отображение, относящее конечному непустому линейно упорядоченному подмножеству множества  $X$ , его наименьший элемент?

Пусть  $(V, \Sigma)$  – симплициальная схема, и  $\Sigma'$  – производное частично упорядоченное множество множества  $\Sigma$  (упорядоченного по включению). Симплициальная схема  $(\Sigma, \Sigma')$  называется *производной симплициальной схемой* или *барицентрическим подразделением* симплициальной схемы  $(V, \Sigma)$

Имеется естественное отображение  $\Sigma \rightarrow S(V, \Sigma)$ , относящее симплексу  $\sigma \in \Sigma$ , т.е. подмножеству  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  множества  $V$  функцию  $b_\sigma : V \rightarrow \mathbb{R}$  с  $b_\sigma(v_i) = \frac{1}{n+1}$  и  $b_\sigma(v) = 0$  для любого  $v \notin \sigma$ .

Определим отображение  $\beta : S(\Sigma, \Sigma') \rightarrow S(V, \Sigma)$ , отнеся функции  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  функцию

$$V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma} \varphi(\sigma) b_\sigma(v).$$

**23.Нх.** Отображение  $\beta : S(\Sigma, \Sigma') \rightarrow S(V, \Sigma)$  является гомеоморфизмом и этот гомеоморфизм составляет вместе с проекциями  $S(V, \Sigma) \rightarrow \Sigma$  и  $S(\Sigma, \Sigma') \rightarrow \Sigma'$  на пространства симплексов и естественным отображением  $\Sigma' \rightarrow \Sigma$  коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S(\Sigma, \Sigma') & \xrightarrow{\beta} & S(V, \Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma' & \longrightarrow & \Sigma \end{array}$$

## 24х. Пространства непрерывных отображений

### 24'1х. Множества непрерывных отображений

Всюду далее через  $\mathcal{C}(X, Y)$  будет обозначаться множество всех непрерывных отображений топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$ .

**24.1х.** Пусть  $X \neq \emptyset$ . Докажите, что множество  $\mathcal{C}(X, Y)$  состоит из одного элемента, тогда пространство  $Y$  одноточечно.

**24.2х.** Пусть  $X \neq \emptyset$ . Докажите, что существует естественная инъекция  $Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ , откуда, в частности, следует, что  $\text{card } \mathcal{C}(X, Y) \geq \text{card } Y$ .

**24.3х. Загадка.** Найдите естественные условия, при выполнении которых  $\mathcal{C}(X, Y) = Y$ .

**24.4х.** Пусть  $Y = \{0, 1\}$ ,  $\Omega_Y = \{\emptyset, \{0\}, Y\}$ . Докажите, что существует биекция между  $\mathcal{C}(X, Y)$  и  $\Omega_X$ .

**24.5х.** Докажите, что если  $X$  – конечное дискретное пространство, то  $\mathcal{C}(X, Y)$  можно естественным образом отождествить с декартовым произведением  $Y \times \dots \times Y$  ( $n$  сомножителей).

**24.6х.** Пусть дискретное топологическое пространство  $Y$  состоит из  $k$  точек. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы множество  $\mathcal{C}(X, Y)$  состояло из  $k^2$  элементов.

### 24'2х. Топологии в множестве непрерывных отображений

Для  $x \in X$ ,  $U \in \Omega_Y$ ,  $K \subset X$  положим

$$W(x, U) = \{f : X \rightarrow Y \mid f(x) \in U\},$$

$$W(K, U) = \{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U\},$$

и рассмотрим семейства  $\Delta^{(pw)} = \{W(x, U) \mid x \in X, U \in \Omega_Y\}$  и

$$\Delta^{(co)} = \{W(K, U) \mid K \subset X \text{ – компактное множество, } U \in \Omega_Y\}.$$

**24.Ах.** Множество  $\Delta^{(pw)}$  является предбазой топологической структуры на множестве  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

Топологическая структура  $\Omega^{(pw)}$  с предбазой  $\Delta^{(pw)}$  называется *топологией поточечной сходимости*, соответствующее топологическое пространство обозначается через  $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$ .

**24.Вх.** Множество  $\Delta^{(co)}$  является предбазой топологической структуры на множестве  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

Топологическая структура  $\Omega^{(co)}$  с предбазой  $\Delta^{(co)}$  называется **компактно-открытой топологией**. Всюду далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что топологическое пространство  $\mathcal{C}(X, Y)$  – это пространство всех непрерывных отображений  $X \rightarrow Y$  с заданной на нем компактно-открытой топологией.

**24.Сх.** Имеет место включение  $\Omega^{(pw)} \subset \Omega^{(co)}$ .

**24.7х.** Пространства  $\mathcal{C}(I, I)$  и  $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$  не гомеоморфны.

Обозначим через  $\text{Const}(X, Y)$  множество всех постоянных отображений  $f : X \rightarrow Y$ .

**24.8х.** Докажите, что топологии  $\Omega^{(pw)}$  и  $\Omega^{(co)}$  индуцируют одну и ту же топологическую структуру на множестве  $\text{Const}(X, Y)$ , причем полученное топологическое пространство гомеоморфно  $Y$ .

**24.9х.** Докажите, что если  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  с дискретной топологией, то пространство  $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$  гомеоморфно  $Y \times \dots \times Y$  ( $n$  сомножителей). Верно ли это для пространства  $\mathcal{C}(X, Y)$ ?

### 24'3х. Топологические свойства пространств непрерывных отображений

**24.Дх.** Докажите, что если  $Y$  хаусдорфово, то и пространство  $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$  хаусдорфово. Верно ли это утверждение для пространства  $\mathcal{C}(X, Y)$ ?

**24.10х.** Докажите, что пространство  $\mathcal{C}(I, X)$  линейно связно, тогда пространство  $X$  линейно связно.

**24.11х.** Докажите, что пространство  $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$  не компактно. Компактно ли пространство  $\mathcal{C}(I, I)$ ?

### 24'4х. Метризуемый случай

**24.Ех.** Если пространство  $X$  компактно, а пространство  $Y$  метризуемо, то пространство  $\mathcal{C}(X, Y)$  метризуемо.

Рассмотрим компактное пространство  $X$  и метрическое пространство  $(Y, \rho)$ . Положим

$$d(f, g) = \max\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

**24.Фх.** Для любого компактного топологического пространства  $X$  и для любого метрического пространства  $Y$  функция  $d$  является метрикой на множестве  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $Y$  – метрическое пространство с метрикой  $\rho$ . Говорят, что последовательность  $f_n$  отображений  $X \rightarrow Y$  **равномерно сходится** к отображению  $f : X \rightarrow Y$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $N$ , такое что  $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$  при всех  $n > N$  и  $x \in X$ .



**24.Gx** Метрика равномерной сходимости. Пусть  $X$  – компактное топологическое пространство, а  $Y$  – метрическое пространство. Последовательность отображений  $f_n : X \rightarrow Y$  сходится к отображению  $f : X \rightarrow Y$  в топологии, определенной метрикой  $d$ , тогда последовательность  $f_n$  равномерно сходится к  $f$ .

**24.Hx** Полнота  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Пусть  $X$  – компактное, а  $(Y, \rho)$  – полное метрическое пространство. Тогда метрическое пространство  $(\mathcal{C}(X, Y), d)$  полно.

**24.Ix.** Метрика  $d$  индуцирует на  $\mathcal{C}(X, Y)$  компактно-открытую топологию.

**24.12x.** Пространство  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, I)$  метризуемо.

**24.13x.** Если  $Y$  – ограниченное метрическое пространство и  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ , где множества  $X_i$  компактны и  $X_i \subset \text{Int } X_{i+1}$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ , то пространство  $\mathcal{C}(X, Y)$  метризуемо.

Обозначим через  $\mathcal{C}_b(X, Y)$  множество всех ограниченных непрерывных отображений топологического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$ . Положим

$$d^{\infty}(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

**24.14x.** Функция  $d^{\infty}$  является метрикой на множестве  $\mathcal{C}_b(X, Y)$ .

**24.15x.** Пусть  $X$  – топологическое, а  $Y$  – метрическое пространство. Последовательность  $f_n$  ограниченных отображений  $X \rightarrow Y$  сходится к  $f : X \rightarrow Y$  в топологии, индуцированной метрикой  $d^{\infty}$ , тогда  $f_n$  равномерно сходится к  $f$ .

**24.16x.** Найдите такие пространства  $X$  и  $Y$ , для которых топология, индуцированная метрикой  $d^{\infty}$ , не совпадает с топологией подпространства  $\mathcal{C}_b(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ .

## 24'5x. Связь с другими конструкциями

**24.Jx.** Для любых непрерывных отображений  $\varphi : X' \rightarrow X$  и  $\psi : Y \rightarrow Y'$  отображение  $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X', Y') : f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi$  непрерывно.

**24.Kx.** Если  $A \subset X$ , то отображение  $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(A, Y) : f \mapsto f|_A$  непрерывно.

**24.Lx.** Если  $B \subset Y$ , то отображение  $\mathcal{C}(X, B) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) : f \mapsto i_B \circ f$  является топологическим вложением.

**24.Mx.** Для любых топологических пространств  $X, Y$  и  $Z$  пространство  $\mathcal{C}(X, Y \times Z)$  канонически гомеоморфно  $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Z)$ .

**24.Nx.** Пусть  $\{X_i\}_{i=1}^n$  – замкнутое покрытие пространства  $X$ . Естественное отображение  $\phi : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathcal{C}(X_i, Y) : f \mapsto (f|_{X_1}, \dots, f|_{X_n})$  является топологическим вложением.

**24.Ox. Загадка.** Можно ли обобщить предыдущее утверждение?

**24.Рх.** Пусть  $Y$  – хаусдорфовое локально компактное топологическое пространство. Тогда естественное отображение  $\phi : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z) : (f, g) \mapsto g \circ f$  непрерывно.

**24.17х.** Является ли требование локальной компактности  $Y$  существенным для справедливости утверждения 24.Рх?

**24.Qх.** Пусть  $X$  – компактное хаусдорфово пространство, а  $S$  – такое его разбиение, что факторпространство  $X/S$  хаусдорфово. (Это верно, например, если  $S$  – замкнутое разбиение, т. е. проекция  $\text{pr} : X \rightarrow X/S$  – замкнутое отображение.) Тогда естественное отображение  $\phi : \mathcal{C}(X/S, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y) : f \mapsto f \circ \text{pr}$  является топологическим вложением. Другими словами, подпространство пространства  $\mathcal{C}(X, Y)$ , состоящее из отображений, постоянных на каждом элементе разбиения  $S$ , можно отождествить с пространством отображений, заданных на факторпространстве  $X/S$ .

**24.Рх Отображение вычисления.** Пусть  $X$  – локально компактное хаусдорфово пространство. Тогда отображение  $\phi : \mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y : (f, x) \mapsto f(x)$  непрерывно.

**24.18х.** Существенны ли наложенные в 24.Рх условия на пространство  $X$ ?

**24'6х. Отображения  $X \times Y \rightarrow Z$  и  $X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$**

**24.5х.** Если отображение  $f : X \times Y \rightarrow Z$  непрерывно, то и отображение  $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ , заданное формулой  $F(x)(y) = f(x, y)$ , непрерывно.

При некоторых дополнительных условиях верно и обратное.

**24.Тх.** Пусть  $Y$  – хаусдорфово локально компактное пространство, и пусть дано непрерывное отображение  $F : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ . Тогда и отображение  $f : X \times Y \rightarrow Z : (x, y) \mapsto F(x)(y)$  непрерывно.

**24.Ух.** Если пространство  $X$  хаусдорфово и набор  $\Sigma_Y = \{U_\alpha\}$  является предбазой топологической структуры пространства  $Y$ , то набор  $\{W(K, U) \mid U \in \Sigma\}$  является предбазой компактно-открытой топологии в  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**24. Vх** Экспоненциальный закон. Введем отображение

$$\Phi : \mathcal{C}(X \times Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \Phi(f)(x) : y \mapsto f(x, y).$$

Тогда:

- 1) если пространство  $X$  хаусдорфово, то  $\Phi$  непрерывно;
- 2) если пространство  $X$  хаусдорфово, а пространство  $Y$  локально компактно и хаусдорфово, то  $\Phi$  – гомеоморфизм.

**24. Wx.** Пусть  $S$  – разбиение топологического пространства  $X$ ,  $\text{pr} : X \rightarrow X/S$  – проекция. На пространстве  $X \times Y$  возникает естественное разбиение  $S' = \{A \times y \mid A \in S, y \in Y\}$ . Если топологическое пространство  $Y$  хаусдорфово и локально компактно, то естественное факторотображение  $f : (X \times Y)/S' \rightarrow X/S \times Y$  проекции  $\text{pr} \times \text{id}_Y$  является гомеоморфизмом.

**24.19x.** Попробуйте доказать утверждение предыдущей теоремы непосредственно.

## Доказательства и комментарии

**19.A** К примеру,

$$\begin{aligned} z = (x, y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) &\iff \\ \iff z \in A_1 \times B_1, z \in A_2 \times B_2 &\iff x \in A_1, x \in A_2, y \in B_1, y \in B_2 \iff \\ \iff x \in A_1 \cap A_2, y \in B_1 \cap B_2 &\iff z \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2). \end{aligned}$$

**19.B** Имеем:

$$\begin{aligned} \text{pr}_X^{-1}(A) &= \{z = (x, y) \in X \times Y \mid \text{pr}_X(z) \in A\} = \\ &= \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A\} = A \times Y. \end{aligned}$$

**19.C**  $\Leftrightarrow$  Действительно,  $\Gamma_f \cap (x \times Y) = (x, f(x))$ .  $\Leftarrow$  Если пересечение  $\Gamma \cap (x \times Y)$  состоит из одной точки  $(x, y)$ , то можно положить  $f(x) = y$ .

**19.D** Следует из 3.A, поскольку пересечение элементарных множеств является элементарным множеством.

**19.E** Убедитесь, что отображение  $T : (x, y) \mapsto (y, x)$  есть гомеоморфизм.

**19.F** Между двумя этими множествами имеется каноническая биекция, поэтому мы просто-напросто запишем, что

$$(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

Однако элементарные множества в пространствах  $(X \times Y) \times Z$  и  $X \times (Y \times Z)$  различны. Докажите, что в обоих этих топологических пространствах набор  $\{U \times V \times W \mid U \in \Omega_X, V \in \Omega_Y, W \in \Omega_Z\}$  является базой их топологических структур.

**19.G** Действительно, для всякого открытого множества  $U \subset X$  его прообраз  $\text{pr}_X^{-1}(U) = U \times Y$  является элементарным, значит, открытым в  $X \times Y$  множеством.

**19.H** Пусть топология  $\Omega'$  в  $X \times Y$  такова, что проекции  $\text{pr}_X$  и  $\text{pr}_Y$  непрерывны. Тогда, если  $U \in \Omega_X$  и  $V \in \Omega_Y$ , то  $\text{pr}_X^{-1}(U) \cap \text{pr}_Y^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V \in \Omega'$ . Таким образом, всякое базовое множество топологии произведения лежит в  $\Omega'$ , откуда и следует, что  $\Omega'$  содержит топологию произведения пространств  $X$  и  $Y$ .

**19.I** Ясно, что  $\text{ab}(\text{pr}_X) = \text{pr}_X|_{X \times y_0} : X \times y_0 \rightarrow X$  — непрерывная биекция. Для того, чтобы проверить непрерывность обратного к ней отображения, достаточно показать, что всякое множество, открытое

в  $X \times y_0$  как в подпространстве произведения  $X \times Y$ , имеет вид  $U \times y_0$ . Действительно,

$$W \cap (X \times y_0) = (\cup U_\alpha \times V_\alpha) \cap (X \times y_0) = \bigcup_{y_0 \in V_\alpha} U_\alpha \times y_0.$$

**19.J** С теоретико-множественной точки зрения  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2$ . Поскольку в качестве базы топологии в  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$  можно взять набор открытых прямоугольников (покажите это), то топологии в  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^2$  имеют одну и ту же базу, значит, они совпадают. Второе утверждение доказывается по индукции, а третье является его следствием в силу 19.7.

**19.L**  $\Rightarrow$  Если  $f$  непрерывно, то  $f_1 = \text{pr}_X \circ f$  и  $f_2 = \text{pr}_Y \circ f$  непрерывны как композиции непрерывных отображений.

$\Leftarrow$  Далее, поскольку в силу 19.20,  $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ , то из непрерывности  $f_1, f_2$  следует непрерывность  $f$ .

**19.M** Вспомните определение произведения топологий и воспользуйтесь 19.22.

**19.N** Пусть  $X$  и  $Y$  – хаусдорфовы пространства и точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$  различны. Предположим для определенности, что  $x_1 \neq x_2$ . Так как пространство  $X$  хаусдорфово, то у них найдутся непересекающиеся окрестности  $U_{x_1}$  и  $U_{x_2}$ . Тогда  $U_{x_1} \times Y$  и  $U_{x_2} \times Y$  – непересекающиеся окрестности точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ .

**19.O** Если  $A$  и  $B$  счетны и всюду плотны в пространствах  $X$  и  $Y$  соответственно, то множество  $A \times B$ , во-первых, счетно, во-вторых, плотно в  $X \times Y$ .

**19.P** См. доказательство следующего утверждения.

**19.Q** Докажите, что если  $\Sigma_X, \Sigma_Y$  – счетные базы топологий пространств  $X$  и  $Y$  соответственно, то  $\Sigma = \{U \times V \mid U \in \Sigma_X, V \in \Sigma_Y\}$  – база топологии пространства  $X \times Y$ .

**19.R** Покажите, что если  $\rho_1, \rho_2$  – метрики в пространствах  $X$  и  $Y$ , то  $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}$  есть метрика в  $X \times Y$ . Какой вид имеют шары в метрике  $\rho$ ?

**19.S** Для любых точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$  множество  $(X \times y_2) \cup (x_1 \times Y)$  связно и содержит эти точки.

**19.T** Если  $u, v$  – пути, соединяющие  $x_1$  с  $x_2$  и, соответственно,  $y_1$  с  $y_2$ , то путь  $u \times v$  соединяет  $(x_1, y_1)$  с  $(x_2, y_2)$ .

**19.U** Достаточно рассмотреть покрытие, состоящее из элементарных множеств. Поскольку  $Y$  компактно, то для любого слоя  $x \times Y$  найдется конечное подпокрытие  $\{U_i^x \times V_i^x\}$ . Положим  $W^x = \cap U_i^x$ . Выделим,

используя компактность  $X$ , конечное подпокрытие  $W^{x_j}$  из покрытия  $\{W^x\}_{x \in X}$ . Набор  $\{U_i^{x_j} \times V_i^{x_j}\}$  – искомое конечное подпокрытие.

**19.V** Да, гомеоморфны. Рассмотрите отображение

$$(x, y) \mapsto \left( \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

**20.A** Прообраз  $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$ , во-первых, является насыщенным, во-вторых, является наименьшим, так как, если  $B \supset A$  – некоторое насыщенное множество, то  $B = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(B)) \supset \text{pr}^{-1}(\text{pr}(A))$ .

**20.C** Положим  $\Omega' = \{U \subset X/S \mid \text{pr}^{-1}(U) \in \Omega\}$ . Пусть  $U_\alpha \in \Omega'$ . Из того, что  $p^{-1}(U_\alpha)$  – открытые множества, следует, что множество  $p^{-1}(\cup U_\alpha) = \cup p^{-1}(U_\alpha)$  также является открытым, таким образом,  $\cup U_\alpha \in \Omega'$ . Проверьте оставшиеся аксиомы топологической структуры самостоятельно.

**20.D**  $\Leftrightarrow$  Если множество  $V \subset X$  открыто и насыщенно, то  $V = \text{pr}^{-1}(p(V))$ , значит, множество  $U = \text{pr}(V)$  открыто в  $X/S$ .  $\Rightarrow$  Если  $U \subset X/S$  открыто, то  $U = \text{pr}(\text{pr}^{-1}(U))$ , где  $V = \text{pr}^{-1}(U)$  открыто и насыщенно.

**20.E** Множество  $F$  замкнуто, тогда множество  $X/S \setminus F$  открыто, тогда множество  $\text{pr}^{-1}(X/S \setminus F) = X \setminus \text{pr}^{-1}(F)$  открыто, тогда множество  $p^{-1}(F)$  замкнуто.

**20.F** Прямое следствие определения фактортопологии.

**20.G** Надо доказать, что если  $\Omega'$  – такая топология в  $X/S$ , что отображение факторизации непрерывно, то  $\Omega' \subset \Omega_{X/S}$ . Действительно, если  $U \in \Omega'$ , то  $p^{-1}(U) \in \Omega_X$ , поэтому по определению фактортопологии  $U \in \Omega_{X/S}$ .

**20.H** Оно связно, как непрерывный образ связного пространства.

**20.I** Оно линейно связно, как непрерывный образ линейно связного пространства.

**20.J** Оно сепарабельно, как непрерывный образ сепарабельного пространства.

**20.K** Оно компактно, как непрерывный образ компактного пространства.

**20.L** Это факторпространство состоит из двух точек, одна из которых не открыта в нем.

**20.M**  $\Leftrightarrow$  Пусть  $a, b \in X/S$  и  $A, B \subset X$  – соответствующие элементы разбиения. Если  $U_a, U_b$  – непересекающиеся окрестности точек

$a$  и  $b$ , то  $p^{-1}(U_a), p^{-1}(U_b)$  – непересекающиеся насыщенные окрестности множеств  $A$  и  $B$ .  $\Leftrightarrow$  Следует из 20.D.

**20.N** 1)  $\Leftrightarrow$  Положите  $g = f/S$ .  $\Leftrightarrow$  Множество  $f^{-1}(y) = p^{-1}(g^{-1}(y))$  насыщено, т. е. состоит из элементов разбиения  $S$ . Значит,  $f$  постоянно на каждом из элементов разбиения. 2) Если  $A$  – некоторый элемент разбиения  $S$ ,  $a$  – соответствующая ему точка фактормножества и  $x \in A$ , то  $f/S(a) = f(A) = g(p(x)) = g(a)$ .

**20.O** Отображение  $f$  переводит элементы разбиения  $S$  в элементы разбиения  $T$ , тогда существует такое отображение  $g : X/S \rightarrow Y/T$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{pr}_X \downarrow & & \text{pr}_Y \downarrow \\ X/S & \xrightarrow{g} & Y/T \end{array}$$

коммутативна. При этом  $f/(S, T) = g$ .

**20.P** Инъективность отображения есть следствие того, что различные элементы разбиения  $S(f)$  являются прообразами различных точек пространства  $Y$ .

**20.Q** Так как  $p^{-1}((f/S)^{-1}(U)) = (f/S \circ p)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ , то по определению фактортопологии для любого  $U \in \Omega_Y$  множество  $(f/S)^{-1}(U)$  открыто, таким образом, отображение  $f/S$  является непрерывным.

**20.R** См. 20.O и 20.8.

**20.Ax** Каждое одноточечное подмножество факторпространства  $X/S$  является образом некоторого одноточечного подмножества в  $X$ . Так как в  $X$  выполнена аксиома  $T_1$ , то каждое его одноточечное подмножество замкнуто, значит, в силу 20.1x, и его образ также замкнут. Следовательно в факторпространстве также выполнена аксиома  $T_1$ .

**20.Bx** Следует из 14.26.

**20.Cx** Пусть  $U_n = p(V_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  – база пространства  $X$ . Рассмотрим произвольное открытое множество  $W$  в факторпространстве. Так как  $\text{pr}^{-1}(W) = \bigcup_{n \in A} V_n$ , то  $W = \text{pr}(\text{pr}^{-1}(W)) = \bigcup_{n \in A} U_n$ , таким образом, набор  $\{U_n\}$  является базой факторпространства.

**20.Dx** Для произвольной точки  $y \in X/S$  рассмотрите образ счетной базы в некоторой точке  $x \in \text{pr}^{-1}(y)$ .

**20.Ex** Поскольку инъективный фактор непрерывной сюръекции является непрерывной биекцией, то остается доказать, что он является открытым отображением, что следует, в силу 20.7, из открытости отображения  $X \times Y \rightarrow X/S \times Y/T$  (см. 19.23).

**21.A** Следует из 20.P, 20.Q, 20.K и 16.X.

**21.B** Аналогично 21.A; используйте 16.Y вместо 16.X.

**21.C.1** Если  $f : t \in [0; 1] \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$ , то разбиение  $S(f)$  совпадает с заданным, а факторотображение  $f/S(f)$  – это гомеоморфизм как непрерывная биекция компактного пространства на хаусдорфово.

**21.D.1** Если  $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (\frac{x}{r} \sin \pi r, -\cos \pi r) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , то разбиение  $S(f)$  совпадает с заданным, а  $f/S(f)$  – гомеоморфизм.

**21.E** Рассмотрите отображение  $g = f \times \text{id} : I^2 = I \times I \rightarrow S^1 \times I$  ( $f$  определено, как в 21.C.1). Разбиение  $S(g)$  совпадает с заданным, так что  $g/S(g)$  – гомеоморфизм.

**21.F** Проверьте, что разбиение  $S(\text{id}_{S^1} \times f)$  совпадает с заданным.

**21.G** Разбиение  $S(f \times f)$  совпадает с заданным.

**21.H** Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & X/S \\ p \downarrow & & p_2 \downarrow \\ X/T & \xrightarrow{q} & X/S/S' \end{array}$$

в которой отображение  $q$ , очевидно, является биекцией. Утверждение задачи следует из того, что множество  $U$  открыто в  $X/S/S'$ , тогда  $p_1^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p^{-1}(q^{-1}(U))$  открыто в  $X$ , тогда  $q^{-1}(U)$  открыто в  $X/T$ .

**21.I** Чтобы упростить формулы, мы заменим квадрат  $I^2$  прямоугольником. Формально: рассмотрим отображение

$$\varphi : [0; 2\pi] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto$$

$$\left((1 + y \sin \frac{x}{2}) \cos x, (1 + y \sin \frac{x}{2}) \sin x, y \sin x\right).$$

Проверьте, что  $\varphi$  действительно отображает указанный прямоугольник на ленту Мебиуса и что  $S(\varphi)$  является указанным разбиением. Конечно, исходным моментом рассуждения является не конкретная формула, вначале следует представить себе, как же должно быть устроено нужное отображение. Горизонтальную среднюю линию прямоугольника отобразим на окружность, являющуюся средней линией ленты Мебиуса, а каждый из его вертикальных отрезков – на отрезок этой ленты, перпендикулярный ее средней линии. Вертикальные стороны прямоугольника при таком отображении переходят в один и тот же отрезок, но при этом друг



с другом будут отождествляться противоположные вершины (проверьте это).

**21.J** См. рисунок и следующие пункты этого параграфа.

**21.K** В действительности, проще доказать более общее утверждение. Пусть заданы топологические пространства  $X_\alpha$  и отображения  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ . Тогда  $\Omega = \{U \subset Y \mid f_\alpha^{-1}(U) \text{ открыто в } X_\alpha\}$  – это самая тонкая топологическая структура в  $Y$  относительно которой все отображения  $f_\alpha$  непрерывны.

**21.L** См. указание к 21.K.

**21.M** Отобразим  $D_1^n \sqcup D_2^n$  в  $S^n$  так, чтобы образ  $D_1^n$  совпадал с верхней полусферой, а образ  $D_2^n$  – с нижней. Разбиение на прообразы совпадает с тем разбиением, фактор по которому есть пространство  $D^n \cup_{\text{id}|_{S^{n-1}}} D^n$ . Следовательно, соответствующее факторотображение – гомеоморфизм.

**21.N** Рассмотрим отображение  $F : X \sqcup Y \rightarrow X \sqcup Y$ , такое что  $F|_X = \text{id}_X$  и  $F|_Y = h$ . Это отображение перемешивает элемент разбиения, отвечающий отношению эквивалентности  $z \sim f(x)$  в элемент разбиения, отвечающий отношению эквивалентности  $x \sim g(x)$ , следовательно, существует непрерывная биекция  $H : X \cup_f Y \rightarrow X \cup_g Y$ . Поскольку  $h^{-1}$  – тоже гомеоморфизм, то и отображение  $H^{-1}$  непрерывно.

**21.O** В силу 21.N, достаточно доказать, что любой гомеоморфизм  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  продолжается до гомеоморфизма  $F : D^n \rightarrow D^n$ , что очевидно.

**21.P** Например, стереографическая проекция из внутренней точки “дыры” гомеоморфно отображает сферу с дырой на круг.

**21.Q** Стереографическая проекция из внутренней точки одной из “дыр” гомеоморфно отображает сферу с двумя дырами на “круг с круглой дырой”. Докажите, что он гомеоморфен цилиндру. (Другой вариант: если выбрать центр проекции в “дыре” надлежащим образом, то сфера с двумя дырами отобразится на круглое кольцо, заведомо гомеоморфное цилиндру.)

**21.R** По определению ручка гомеоморфна тору с дырой, а сфера с дырой – диску, который эту дыру как раз и заклеивает.

**21.S** Разрежьте сферу с двумя ручками на две симметричные части, гомеоморфные ручке.

**21.T** Воспользуйтесь результатами задач 21.P и 21.J.

**21.U** Разрежьте квадрат, факторпространством которого является бутылка Клейна, на 5 горизонтальных полосок одинаковой ширины. Тогда средняя полоска склеится в лист Мебиуса, две крайние полоски –

еще в один лист Мебиуса, а оставшиеся – в кольцо, т.е. как раз в сферу с двумя дырами. (Вот еще одно, возможно, более наглядное описание. Посмотрите на изображение бутылки Клейна: у нее есть горизонтальная плоскость симметрии. Две горизонтальных плоскости, близкие к плоскости симметрии, и разрезают бутылку Клейна на два листа Мебиуса и кольцо.)

**21.V** Нагляднее всего будет сделать так: выделим одну ручку и одну пленку. Заменяем ручку на “трубку”, края которой приклеены к краям двух (достаточно маленьких) дыр на сфере, и начнем двигать одну из дыр. (Топологический тип во время такого движения не меняется.) Подведем дыру к краю пленки, сдвинем ее на пленку, обведем вдоль пленки один полный круг и вернем на прежнее место. В результате исходная ручка (тор с дырой) превратится в бутылку Клейна с дырой, которая, как мы знаем из задачи 21.U, разбивается на два листа Мебиуса – т.е. на две пленки.

**22.A** Рассмотрим композицию  $f$  вложения  $D^n$  в  $S^n$  в качестве полусферы и проекцию  $\text{pr} : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Разбиение  $S(f)$  совпадает с заданным. Следовательно,  $f/S(f)$  – гомеоморфизм.

**22.C** Рассмотрим отображение  $f : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$ . Тогда  $S^1/S(f) \cong \mathbb{R}P^1$ .

**22.D** См. 22.A.

**22.E** Рассмотрим композицию  $f$  вложения сферы  $S^n$  в  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  и проекции на факторпространство по указанному разбиению. Ясно, что разбиение  $S(f)$  совпадает с разбиением, факторизация по которому является проективным пространством. Значит,  $f/S(f)$  – гомеоморфизм.

**22.F** Указанная функция является метрикой в силу неравенства треугольника между плоскими углами трехгранного угла. Сопоставим всякой точке  $x \in S^n$  проходящую через начало координат прямую  $l(x)$ , для которой  $x$  является ее направляющим вектором. Тем самым определено непрерывное (проверьте это) отображение  $S^n$  в указанное пространство прямых, инъективный фактор которого является гомеоморфизмом.

**22.G** Образом этого отображения является множество  $U_0 = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ , а обратное отображение  $j : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  определено формулой

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

Поскольку отображение  $i$  и обратное к нему непрерывны,  $i$  является топологическим вложением.

**22.Н** Рассмотрите вложение  $S^{n-1} = S^n \cap \{x_{n+1} = 0\} \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  и индуцированное им вложение  $\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ .

**23.Ах** Если  $a \lesssim b \lesssim c$ , то, либо  $a \prec b \prec c$ , либо  $a = b = c$ , либо  $a \prec b = c$ , либо  $a = b \prec c$ . Во всех четырех случаях получаем, что  $a \lesssim c$ .

**23.Вх** Очевидно, что отношение  $\sim$  рефлексивно, симметрично, а также и транзитивно.

**23.Сх** Действительно, если  $a' \sim a$ ,  $a \lesssim b$  и  $b \sim b'$ , то  $a' \lesssim a \lesssim b \lesssim b'$ , значит,  $a' \lesssim b'$ . Очевидно, что определенное на классах эквивалентности отношение транзитивно и рефлексивно. Если же для классов эквивалентностей  $[a]$  и  $[b]$  верно, что  $a \lesssim b$  и  $b \lesssim a$ , то  $[a] = [b]$ , таким образом, отношение антисимметрично, значит, является нестрогим порядком.

**23.Дх** (а) В этом случае мы получаем тривиальный нестрогий порядок на одноточечном множестве; (б) получаем тот же самый нестрогий порядок на данном множестве.

**23.Ех** Данное отношение очевидно рефлексивно. Далее, если  $a \lesssim b$ , то во всякой окрестности  $U$  точки  $a$  лежит точка  $b$ , значит,  $U$  является и ее окрестностью, поэтому, если  $b \lesssim c$ , то  $c \in U$ . Значит,  $a \in \text{Cl}\{c\}$ , таким образом,  $a \lesssim c$ , тем самым это отношение и транзитивно.

**23.Фх** Рассмотрим элемент разбиения, который, по его определению состоит из точек, каждая из которых лежит в замыкании любой другой, значит, всякое открытое в  $X$  множество, содержащее одну из этих точек, содержит и любую другую. Таким образом, топология, индуцируемая на каждом элементе разбиения, является антидискретной. Ясно также, что каждый элемент разбиения является максимальным подмножеством, являющимся антидискретным подпространством. Теперь рассмотрим две точки в факторпространстве и две точки  $x, y \in X$ , лежащие в соответствующих элементах разбиения. Поскольку  $x \not\sim y$ , то найдется открытое множество, содержащее одну из этих точек и не содержащее другую. Так как всякое открытое множество пространства  $X$  насыщено относительно рассматриваемого разбиения, то его образ в  $X/S$  и является искомой окрестностью.

**23.Гх** А как же иначе!

**23.Нх** Следствие 23.Фх, 23.Гх и 20.Р.

**24.Ах** Достаточно заметить, что множество данного набора покрывает все множество  $\mathcal{C}(X, Y)$ , следовательно, оно является предбазой некоторой топологии на этом множестве.

**24.Вх** Аналогично 24.Ах.

**24.Дх** Если  $f \neq g$ , то найдется точка  $x \in X$ , такая что  $f(x) \neq g(x)$ . Поскольку  $Y$  хаусдорфово, то у точек  $f(x)$  и  $g(x)$  имеются непересекающиеся окрестности  $U$  и  $V$ , соответственно. Элементы предбазы  $W(x, U)$  и

$W(x, V)$  являются непересекающимися окрестностями отображений  $f$  и  $g$  в пространстве  $\mathcal{C}^{(pw)}(X, Y)$ . Они же будут непересекающимися окрестностями для  $f$  и  $g$  в  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**24.Ех** См. утверждение 24.Их.

**24.Нх** Рассмотрим функции  $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$ , образующие фундаментальную последовательность  $\{f_n\}_1^\infty$ . Для каждой точки  $x \in X$  последовательность  $\{f_n(x)\}$  является фундаментальной в  $Y$ . Поскольку пространство  $Y$  полно, то она сходится; положим  $f(x) = \lim f_n(x)$ . Тем самым определена функция  $f: X \rightarrow Y$ .

В силу фундаментальности  $\{f_n\}$ , для каждого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N$ , такое что  $\rho(f_n(x), f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$  при всех  $n, k \geq N$  и  $x \in X$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , мы получаем, что  $\rho(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3}$  при всех  $n \geq N$  и  $x \in X$ . Таким образом, чтобы доказать, что  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$ , надо проверить, что  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ . Для каждой точки  $a \in X$  существует ее окрестность  $U_a$ , такая что  $\rho(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$  при всех  $x \in U_a$ . Как следствие неравенства треугольника мы получаем, что при всех  $x \in U_a$

$$\rho(f(x), f(a)) \leq \rho(f(x), f_N(x)) + \rho(f_N(x), f_N(a)) + \rho(f_N(a), f(a)) < \varepsilon.$$

Следовательно, функция  $f$  является непрерывным пределом исходной фундаментальной последовательности.

**24.Их** Рассмотрим произвольное множество  $W(K, U)$  из предбазы. Пусть  $f \in W(K, U)$ . Если  $r = \rho(f(K), Y \setminus U)$ , то  $D_r(f) \subset W(K, U)$ . Как следствие получаем, что всякое открытое в компактно-открытой топологии множество открыто в топологии, индуцированной метрикой равномерной сходимости. Для того, чтобы доказать обратное утверждение, достаточно показать, что для всякого отображения  $f: X \rightarrow Y$  и всякого  $r > 0$  найдутся компактные множества  $K_1, K_2, \dots, K_n \subset X$  и открытые множества  $U_1, U_2, \dots, U_n \subset Y$ , такие что

$$f \in \bigcap_{i=1}^n W(K_i, U_i) \subset D_r(f).$$

Рассмотрим покрытие множества  $f(X)$  конечным числом шаров радиуса  $r/4$  с центрами в некоторых точках  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ . Пусть  $K_i$  – прообраз замкнутого шара в  $Y$  радиуса  $r/4$  при отображении  $f$ , а  $U_i$  – открытый шар радиуса  $r/2$ . По построению  $f \in W(K_1, U_1) \cap \dots \cap W(K_n, U_n)$ . Рассмотрим произвольное отображение  $g$  из этого пересечения. Для всякой точки  $x \in K_1$  верно, что  $f(x)$  и  $g(x)$  лежат в одном и том же открытом шаре радиуса  $r/2$ , значит,  $\rho(f(x), g(x)) < r$ . Поскольку, по построению, множества  $K_1, \dots, K_n$  покрывают  $X$ , то  $\rho(f(x), g(x)) < r$  для всех  $x \in X$ , следовательно,  $d(f, g) < r$ , значит,  $g \in D_r(f)$ .

**24.Jx** Утверждение следует из того, что для всякого компактного  $K \subset X'$  и  $U \subset Y'$  прообразом предбазового множества  $W(K, U) \in \Delta^{(co)}(X', Y')$  является предбазовое множество  $W(\varphi(K), \psi^{-1}(U)) \in \Delta^{(co)}(X, Y)$ .

**24.Kx** Немедленно следует из предыдущего.

**24.Lx** Ясно, что указанное отображение является инъекцией. Для простоты обозначений отождествим пространство  $\mathcal{C}(X, B)$  с его образом при этой инъекции. Для всякого компактного множества  $K \subset X$  и  $U \in \Omega_B$  через  $W^B(K, U)$  обозначим соответствующее предбазовое множество в  $\mathcal{C}(X, B)$ . Если  $V \in \Omega_Y$ , а  $U = B \cap V$ , то имеет место равенство  $W^B(K, U) = \mathcal{C}(X, B) \cap W(K, V)$ , откуда и следует, что из  $\mathcal{C}(X, Y)$  на  $\mathcal{C}(X, B)$  индуцируется компактно-открытая топология.

**24.Mx** Проверьте, что естественное отображение  $f \mapsto (\text{pr}_Y \circ f, \text{pr}_Z \circ f)$  является гомеоморфизмом.

**24.Nx** Инъективность отображения  $\phi$  следует из того, что  $\{X_i\}$  – покрытие, а его непрерывность – из утверждения 24.Kx. Опять-таки, для простоты обозначений отождествим  $\mathcal{C}(X, Y)$  с его образом при инъекции  $\phi$ . Пусть  $K \subset X$  – компактное множество,  $U \in \Omega_Y$ . Положим  $K_i = K \cap X_i$  и обозначим через  $W^i(K_i, U)$  соответствующий элемент предбазы  $\Delta^{(co)}(X_i, Y)$ . Поскольку, очевидно,

$$W(K, U) = \mathcal{C}(X, Y) \cap (W^1(K_1, U) \times \dots \times W^n(K_n, U)),$$

то непрерывная инъекция  $\phi$  действительно является топологическим вложением.

**24.Px** Рассмотрим отображения  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , компактное множество  $K \subset X$  и  $V \in \Omega_Z$  такие, что  $g(f(K)) \subset V$ , т. е.  $\phi(f, g) \in W(K, V)$ . Тогда справедливо включение  $f(K) \subset g^{-1}(V) \in \Omega_Y$ . Поскольку  $Y$  хаусдорфово и локально компактно, а множество  $f(K)$  компактно, то у  $f(K)$  найдется окрестность  $U$ , замыкание которой компактно и тоже содержится в  $g^{-1}(V)$  (см. 18.6x). В таком случае  $\phi(W(K, U) \times W(\text{Cl}U, V)) \subset W(K, V)$  и, следовательно, отображение  $\phi$  непрерывно.

**24.Qx** Непрерывность отображения  $\phi$  следует из 24.Jx, его инъективность очевидна. Пусть  $K \subset X/S$  – компактное множество,  $U \in \Omega_Y$ . Образом открытого предбазового множества  $W(K, U) \subset \mathcal{C}(X/S, Y)$  является множество всех отображений  $g : X \rightarrow Y$ , постоянных на всех элементах разбиений и таких, что  $g(\text{pr}^{-1}(K)) \subset U$ . Осталось показать, что множество  $W(\text{pr}^{-1}(K), U)$  открыто в  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Так как факторпространство  $X/S$  хаусдорфово, то множество  $K$  замкнуто, а значит, замкнут, а потому и компактен его прообраз  $\text{pr}^{-1}(K)$ . Следовательно,  $W(\text{pr}^{-1}(K), U)$  – предбазовое множество в  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

**24. R $\times$**  Пусть  $x_0 \in X$ ,  $f_0 \in \mathcal{C}(X, Y)$  и  $V \in \Omega_Y$  таковы, что  $f_0(x_0) \in V$ . В силу непрерывности отображения  $f_0$  у точки  $x_0$  найдется окрестность  $U'$ , такая что  $f_0(U') \subset V$ . Поскольку пространство  $X$  хаусдорфово и локально компактно, то у точки  $x_0$  имеется окрестность  $U$ , замыкание которой компактно и содержится в  $U'$ . Осталось заметить, что  $f(x) \in V$  для всякого отображения  $f \in W = W(\text{Cl}U, V)$  и всякой точки  $x \in U$ , т.е.  $\phi^{-1}(V) \supset W \times U$ .

**24. S $\times$**  Пусть  $x_0 \in X$ ,  $K \subset Y$  – компактное множество и  $V \subset \Omega_Z$ , и пусть  $F(x_0) \in W(K, V)$ , т.е.  $f(\{x_0\} \times K) \subset V$ . Покажем, что отображение  $F$  непрерывно. Для этого найдем в  $X$  окрестность  $U_0$  точки  $x_0$  такую, что  $F(U_0) \subset W(K, V)$ . Последнее включение равносильно тому, что  $f(U_0 \times K) \in V$ . Покроем множество  $x_0 \times K$  конечным набором окрестностей  $U_i \times V_i$ , таких что  $f(U_i \times V_i) \subset V$ . Осталось положить  $U_0 = \bigcap_i U_i$ .

**24. T $\times$**  Пусть  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  и пусть  $G$  – окрестность точки  $z_0 = f(x_0, y_0) = F(x_0)(y_0)$ . Поскольку отображение  $F(x_0) : Y \rightarrow Z$  непрерывно, то у точки  $y_0$  найдется окрестность  $W$ , такая что  $F(W) \subset G$ . Так как  $Y$  хаусдорфово и локально компактно, то у  $y_0$  имеется окрестность  $V$  с компактным замыканием, такая что  $\text{Cl}V \subset W$  и, следовательно,  $F(x_0)(\text{Cl}V) \subset G$ , т.е.  $F(x_0) \in W(\text{Cl}V, G)$ . В силу непрерывности отображения  $F$  у точки  $x_0$  найдется окрестность  $U$  такая, что  $F(U) \subset W(\text{Cl}V, G)$ . Тогда, если  $(x, y) \in U \times V$ , то  $F(x) \in W(\text{Cl}V, G)$ , значит,  $f(x, y) = F(x)(y) \in G$ . Таким образом,  $f(U \times V) \subset G$ , т.е. отображение  $f$  непрерывно.

**24. U $\times$**  Достаточно показать, что для любого компактного множества  $K \subset X$ , любого открытого множества  $U \subset Y$  и любого отображения  $f \in W(K, U)$  найдутся такие компактные множества  $K_1, K_2, \dots, K_m \subset K$  и такие открытые множества  $U_1, U_2, \dots, U_m \in \Sigma_Y$ , что

$$f \in W(K_1, U_1) \cap W(K_2, U_2) \cap \dots \cap W(K_m, U_m) \subset W(K, U).$$

Пусть  $x \in K$ . Так как  $f(x) \in U$ , то найдутся такие множества  $U_1^x, U_2^x, \dots, U_{n_x}^x \in \Sigma_Y$ , что  $f(x) \in U_1^x \cap U_2^x \cap \dots \cap U_{n_x}^x \subset U$ . Из непрерывности  $f$  следует, что существует окрестность  $G_x$  точки  $x$ , такая что  $f(x) \in U_1^x \cap U_2^x \cap \dots \cap U_{n_x}^x$ . Поскольку  $X$  локально компактно и хаусдорфово, то оно регулярно, следовательно, у точки  $x$  найдется ее окрестность  $V_x$ , такая что  $\text{Cl}V_x$  компактное множество и  $\text{Cl}V_x \subset G_x$ . Так как множество  $K$  компактно, то оно покрывается конечным числом окрестностей  $V_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Положим  $K_i = K \cap \text{Cl}V_{x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $U_{ij} = U_j^{x_i}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_{x_i}$ . Тогда множество

$$\bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j=1}^{n_i} W(K_i, U_{ij})$$

является искомым.

**24. Vx** Прежде всего заметим, что из утверждения **24. Sx** следует, что отображение  $\Phi$  определено (т.е. при  $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$  действительно  $\Phi(f) \in \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ ), а из утверждения **24. Tx** следует, что если пространство  $Y$  локально компактно и хаусдорфово, то  $\Phi$  обратимо.

1) Пусть  $K \subset X$  и  $L \subset Y$  – компактные множества,  $V \in \Omega_Z$ . Множества вида  $W(L, V)$  образуют предбазу в  $\mathcal{C}(Y, Z)$ . В силу **24. Ux**, множества вида  $W(K, W(L, V))$  образуют предбазу в  $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ . Осталось заметить, что  $\Phi^{-1}(W(K, W(L, V))) = W(K \times L, V) \in \Delta^{(co)}(X \times Y, Z)$ . Следовательно, отображение  $\Phi$  непрерывно.

2) Пусть  $Q \subset X \times Y$  – компактное множество и  $G \in \Omega_Z$ . Пусть  $\varphi \in \Phi(W(Q, G))$ , таким образом  $\varphi(x) : y \mapsto f(x, y)$  для некоторого отображения  $f \in W(Q, G)$ . Для каждой точки  $q \in Q$  выберем ее окрестность  $U_q \times V_q$  такую, что: множество  $\text{Cl } V_q$  компактно и  $f(U_q \times \text{Cl } V_q) \subset G$ . Поскольку  $Q$  компактно, то  $Q \subset \bigcup_{i=1}^n (U_{q_i} \times V_{q_i})$ . Множества  $W_i = W(\text{Cl } V_{q_i}, G)$  открыты в  $\mathcal{C}(Y, Z)$ , значит, множества  $T_i = W(p_X(Q) \cap \text{Cl } U_{q_i}, W_i)$  открыты в  $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$ . Следовательно,  $T = \bigcap_{i=1}^n T_i$  – окрестность точки  $\varphi$ . Покажем, что  $T \subset \Phi(W(Q, G))$ . Действительно, если  $\psi \in T$ , то  $\psi = \Phi(g)$ , причем  $g(x, y) \in G$  при  $(x, y) \in Q$ , так что  $g \in W(Q, G)$ , откуда следует, что  $\psi \in \Phi(W(Q, G))$ . Следовательно, множество  $\Phi(W(Q, G))$  открыто, таким образом  $\Phi$  – гомеоморфизм.

**24. Wx** Факторотображение  $f$  очевидно является непрерывной биекцией. Рассмотрим отображение факторизации  $p : X \times Y \rightarrow (X \times Y)/S'$ . В силу утверждения **24. Sx** отображение  $\Phi : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, (X \times Y)/S')$ , где  $\Phi(x)(y) = p(x, y)$ , является непрерывным. Заметим, что отображение  $\Phi$  постоянно на элементах разбиения  $S$ , следовательно, его фактор  $\tilde{\Phi} : X/S \rightarrow \mathcal{C}(Y, (X \times Y)/S')$  непрерывен. В силу утверждения **24. Tx** непрерывно и отображение  $g : X/S \times Y \rightarrow (X \times Y)/S'$ , где  $g(z, y) = \tilde{\Phi}(z)(y)$ . Осталось заметить, что отображения  $g$  и  $f$  являются взаимно обратными.

# Элементы топологической алгебры

В этой главе мы будем изучать топологические пространства, тесно связанные с группами: иногда сами пространства являются группами (при этом все отображения, возникающие из групповых соображений, непрерывны), или же группы действуют на топологических пространствах и как бы состоят из гомеоморфизмов этого пространства.

Этот материал связан с различными разделами математики, и хотя он и играет в них существенную роль, не столь уж важен при изучении общей топологии. Чаще всего его изучение можно отложить до той поры, пока он не появится содержательным образом в других математических курсах (в которых речь пойдет о группах Ли, функциональном анализе и т. д.). В контексте нашей книги он интересен тем, что обеспечивает большой набор разнообразных примеров и упражнений.

Понятие группы принадлежит алгебре. В математике, основанной на понятии множества, основными объектами являются множества с дополнительными структурами. До сих пор мы встречались лишь с немногими важнейшими из них, такими как топология, метрика, частичный порядок. Топология и метрика возникают из геометрических соображений. Изначально в алгебре рассматривались операции с числами, и ее вклад в общий контекст изучения структур на множестве состоял во введении различных структур, связанных с операциями на множествах. Одной из



самых простых является групповая структура, появляющаяся в контексте разнообразных математических задач. Достаточно часто она возникает одновременно с некоторой связанной с ней топологической структурой. Предметом топологической алгебры является изучение групповой и топологической структур в их взаимодействии друг с другом.

Во второй части этой книги, посвященной алгебраической топологии, группы будут играть более содержательную роль. Так что уже в следующей главе читатель встретится с группами, снова увидит взаимосвязи между топологией и алгеброй, пространствами и группами, однако их взаимодействие будет носить другой характер. Структуры топологического пространства и группы уже не будут заданы на одном и том же множестве и, так сказать, сосуществовать совместно. Такие алгебраические характеристики, как фундаментальная группа (гомотопические группы) будут нести информацию о топологических свойствах рассматриваемого пространства.

## 25х. Алгебраическое отступление: группы и гомоморфизмы

Этот раздел включен в книгу в основном для того, чтобы напомнить читателю основные определения и утверждения, связанные с понятием группы. Мы не предполагаем дать в нем сколь-нибудь полное изложение теории групп, поскольку надеемся, что читатель знаком с понятием группы, гомоморфизма, подгруппы, факторгруппы, и т. д. Если же это не так, то мы настоятельно рекомендуем прочесть какой-либо учебник, посвященный элементарной теории групп. При наличии математической культуры, безусловно необходимой для того, чтобы можно было разобратся в материале, представленном в нашей книге, такое чтение будет одновременно простым, приятным и полезным. На первых порах будет достаточно прочесть определения и доказать теоремы, сформулированные в данном разделе.

### 25'1х. Понятие группы

Напомним, что *группой* называется множество  $G$ , в котором задана групповая операция. *Групповой операцией* в множестве  $G$  называется отображение  $\omega : G \times G \rightarrow G$ , удовлетворяющее следующим трем условиям (так называемым *аксиомам группы*):

- **Ассоциативность.**  $\omega(a, \omega(b, c)) = \omega(\omega(a, b), c)$  для всех  $a, b, c \in G$ .
- **Существование нейтрального элемента.** Существует элемент  $e \in G$ , такой что  $\omega(e, a) = \omega(a, e) = a$  для всех  $a \in G$ .
- **Существование обратного элемента.** Для любого элемента  $a \in G$  существует элемент  $b \in G$ , такой что  $\omega(a, b) = \omega(b, a) = e$ .

**25.Ах** Единственность нейтрального элемента. *В любой группе существует единственный нейтральный элемент.*

**25.Вх** Единственность обратного элемента. *Для каждого элемента группы существует единственный обратный ему элемент.*

**25.Сх** *Первые примеры групп.* Проверьте, действительно ли в каждом случае мы имеем дело с группой. Каков нейтральный элемент в этой группе? Как найти элемент, обратный данному?

- (1) Множество  $G$  – множество  $\mathbb{Z}$  целых чисел, групповая операция – сложение:  $\omega(a, b) = a + b$ .
- (2) Множество  $G$  – множество  $\mathbb{Q}_{>0}$  положительных рациональных чисел, групповая операция – умножение:  $\omega(a, b) = ab$ .

$$(3) \quad G = \mathbb{R}, \omega(a, b) = a + b.$$

$$(4) \quad G = \mathbb{C}, \omega(a, b) = a + b.$$

$$(5) \quad G = \mathbb{R} \setminus 0, \omega(a, b) = ab.$$

$$(6) \quad G - \text{это множество всех биекций некоторого множества } A \text{ на себя, групповой операцией является композиция биекций: } \omega(a, b) = a \circ b.$$

**25.1х Простейшая группа.** 1) Может ли группа быть пустой? 2) Может ли она состоять из одного элемента?

Группа, состоящая из одного элемента, называется *тривиальной*.

**25.2х Решение уравнений.** Пусть в множестве  $G$  задана ассоциативная операция  $\omega : G \times G \rightarrow G$ . Докажите, что  $G$  с введенной операцией является группой, тогда для любых элементов  $a, b \in G$  существуют единственные элементы  $x, y \in G$ , такие что  $\omega(a, x) = b$  и  $\omega(y, a) = b$ .

## 25'2х. Аддитивные и мультипликативные обозначения

**Обозначения, введенные выше, никогда не используются!** Единственное исключение – определение группы. Вместо этого обычно используются *мультипликативные* или *аддитивные* обозначения.

В мультипликативных обозначениях групповая операция и называется *умножением*, и обозначается как умножение:  $(a, b) \mapsto ab$ . Нейтральный элемент называется *единицей* и для него используется обозначение 1 (или  $1_G$  или  $e$ ). Элемент, обратный  $a$ , обозначается  $a^{-1}$ . Такие обозначения естественны, к примеру, когда мы рассматриваем множество ненулевых рациональных чисел с обычным умножением.

В аддитивных обозначениях групповая операция называется *сложением* и обозначается как сложение:  $(a, b) \mapsto a + b$ . Нейтральный элемент называется *нулем* и для него используется обозначение 0. Элемент, обратный  $a$ , обозначается  $-a$ . Такие обозначения естественны, к примеру, если мы имеем дело с группой целых чисел относительно обычного сложения.

Говорят, что групповая операция  $\omega : G \times G \rightarrow G$  *коммутативна*, если  $\omega(a, b) = \omega(b, a)$  для всех  $a, b \in G$ . Группа с коммутативной групповой операцией называется *коммутативной* или *абелевой*. Традиционно аддитивные обозначения используются для абелевых групп. Мультипликативные обозначения используются как в некоммутативном, так и в коммутативном случае. В дальнейшем мы по большей части будем использовать мультипликативные обозначения.

**25.3х.** Проверьте, является ли группой:

- (1) одноточечное множество  $\{a\}$  с операцией  $aa = a$ ;

- (2) множество  $\mathbb{S}_n$  всех биекций множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , операцией в котором является композиция биекций (*симметрическая группа порядка  $n$* );
- (3) множество  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{C}^n$  с покомпонентным сложением;
- (4) множество  $\text{Homeo}(X)$  всех гомеоморфизмов топологического пространства  $X$  на себя, операцией в котором является композиция гомеоморфизмов;
- (5) множество  $GL(n, \mathbb{R})$  всех обратимых вещественных  $n \times n$ -матриц с операцией матричного умножения;
- (6) множество  $M_n(\mathbb{R})$  всех действительных  $n \times n$ -матриц с операцией матричного сложения;
- (7) множество всех подмножеств множества  $X$ , операцией в котором является симметрическая разность множеств:

$$(A, B) \mapsto (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

- (8) множество  $\mathbb{Z}_n$  классов натуральных чисел, сравнимых по модулю  $n$ , с операцией сложения, индуцированной сложением натуральных чисел;
- (9) множество комплексных корней степени  $n$  из единицы с операцией умножения;
- (10) множество  $\mathbb{R}_{>0}$  положительных вещественных чисел с операцией умножения;
- (11) множество  $S^1 \subset \mathbb{C}$  с операцией умножения;
- (12) множество всех параллельных переносов плоскости, операцией в котором является композиция переносов.

Свойство ассоциативности операции гарантирует, что для всякой конечной последовательности элементов данной группы однозначно определено их произведение, которое может быть вычислено путем последовательного попарного перемножения элементов группы. Последовательность умножений определяется способом расстановки скобок, к примеру,  $(ab)(c(de))$  или  $a(b((cd)e))$ . Свойство ассоциативности умножения как раз и обеспечивает независимость результата перемножения данных элементов от способа, каким были расставлены скобки. Если всего имелось три элемента, то скобки можно было расставить двумя способами, и равенство  $(ab)c = a(bc)$  в точности означает, что умножение ассоциативно.

**25.Dх.** Выведите из свойства ассоциативности операции независимость результата перемножения  $n$  элементов от порядка исполнения умножений, определенного способом расстановки скобок.

Для каждого элемента  $a$  группы  $G$  равенства  $a^{n+1} = a^n a$ ,  $a^0 = 1$  и  $a^{-n} = (a^{-1})^n$  определяют его степень  $a^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**25.Ех.** Докажите, что операция возведения в степень обладает свойствами:  $a^p a^q = a^{p+q}$  и  $(a^p)^q = a^{pq}$ .

### 25'3х. Гомоморфизмы

Отображение  $f : G \rightarrow H$  группы  $G$  в группу  $H$  называется *гомоморфизмом*, если  $f(xy) = f(x)f(y)$  для любых элементов  $x, y \in G$ .

**25.4х.** Данное выше определение гомоморфизма было приведено в мультипликативных обозначениях. Как оно будет выглядеть, если использовать аддитивные обозначения? А в случае, когда для одной группы использованы аддитивные обозначения, тогда как в другой – мультипликативные?

**25.5х.** Пусть  $a$  является элементом некоторой мультипликативной группы  $G$ . Является ли гомоморфизмом отображение  $\mathbb{Z} \rightarrow G$ , определенное формулой  $n \mapsto a^n$ ?

**25.Fх.** Рассмотрим группы  $G$  и  $H$ . Является ли гомоморфизмом постоянное отображение  $G \rightarrow H$ , отображающее всю группу  $G$  в нейтральный элемент группы  $H$ ? Является ли гомоморфизмом какое-либо другое постоянное отображение  $G \rightarrow H$ ?

**25.Gх.** Всякий гомоморфизм переводит нейтральный элемент одной группы в нейтральный элемент, он также переводит любые два взаимно обратных элемента этой группы во взаимно обратные.

**25.Hх.** Тожественное отображение любой группы есть гомоморфизм. Композиция гомоморфизмов есть гомоморфизм.

Гомоморфизм называется *эпиморфизмом*, если он является сюръекцией, *мономорфизмом*, если он – инъекция, *изоморфизмом*, если он есть биекция.

**25.Iх.** Отображение, обратное изоморфизму, есть изоморфизм.

Две группы называются *изоморфными*, если существует изоморфизм одной из них на другую.

**25.Jх.** Отношение изоморфности групп является отношением эквивалентности.

**25.6х.** Покажите, что аддитивная группа  $\mathbb{R}$  изоморфна мультипликативной группе  $\mathbb{R}_+$ .

### 25'4х. Подгруппы

Подмножество  $A$  группы  $G$  называется *подгруппой* группы  $G$ , если оно, во-первых, инвариантно относительно групповой операции в  $G$  (т. е.  $ab \in A$  для любых  $a, b \in A$ ), во-вторых, множество  $A$ , операция в котором определена групповой операцией в  $G$ , само является группой.

Введем следующие обозначения. Для любых подмножеств  $A$  и  $B$  группы  $G$  через  $AB$  будем обозначать множество всех попарных произведений элементов этих групп:  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ , пусть, также,  $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$ .

**25.Кх.** Подмножество  $A$  мультипликативной группы  $G$  является её подгруппой, тогда  $AA \subset G$  и  $A^{-1} \subset A$ .

**25.7х.** Одноэлементное подмножество, состоящее из нейтрального элемента группы, является её подгруппой.

**25.8х.** Докажите, что подмножество  $A$  конечной группы  $G$  является её подгруппой, тогда  $AA \subset A$ .

**25.9х.** Перечислите все подгруппы аддитивной группы  $\mathbb{Z}$ .

**25.10х.** Является ли группа  $GL(n, \mathbb{R})$  подгруппой  $M_n(\mathbb{R})$ ? (См. обозначения в задаче 25.3х.)

**25.Лх.** Образ всякого гомоморфизма  $f : G \rightarrow H$  является подгруппой группы  $H$ .

**25.Мх.** Пусть  $f : G \rightarrow H$  – гомоморфизм,  $K$  – подгруппа  $H$ . Тогда множество  $f^{-1}(K)$  есть подгруппа группы  $G$ . Другими словами, прообраз подгруппы относительно гомоморфизма есть подгруппа.

Пусть  $f : G \rightarrow H$  – гомоморфизм. Прообраз  $f^{-1}(e)$  нейтрального элемента группы  $H$  называется **ядром** гомоморфизма  $f$  и обозначается через  $\text{Ker } f$ .

**25.Нх** Следствие 25.Мх. Ядро гомоморфизма есть подгруппа.

**25.Ох.** Гомоморфизм является мономорфизмом, когда его ядро тривиально.

**25.Рх.** Пересечение любого набора подгрупп данной группы является её подгруппой.

Говорят, что подгруппа  $H$  группы  $G$  **порождается** подмножеством  $S \subset G$ , если она является наименьшей (по включению) подгруппой, содержащей это множество.

**25.Qх.** Подгруппа, порожденная множеством  $S$ , совпадает с пересечением всех, содержащих множество  $S$  подгрупп группы  $G$ . С другой стороны, эта подгруппа есть множество всех элементов, являющихся произведениями элементов множества  $S$  и элементов, обратных к ним.

Элементы множества, порождающего всю группы  $G$ , называются **образующими** этой группы. Группа, порожденная одним элементом, называется **циклической**.

**25.Рх.** Циклическая группа состоит из всех степеней её образующей. (Т. е. если группа  $G$  – циклическая и  $a$  – её образующая, то  $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .) Всякая циклическая группа является абелевой.

**25.11х.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  – циклическая, когда существует эпиморфизм  $f : \mathbb{Z} \rightarrow H$ .

**25. Sx.** Всякая подгруппа циклической группы является циклической.

Число элементов группы  $G$  называется *порядком* этой группы и обозначается через  $|G|$ .

**25. Tx.** Пусть  $G$  – конечная циклическая группа. Для всякого положительного делителя  $d$  порядка  $|G|$  этой группы существует единственная подгруппа  $H$  группы  $G$ , порядок которой равен  $d$ .

Всякий элемент любой группы порождает подгруппу, состоящую из всех его степеней. Порядок подгруппы, порожденной элементом  $a \in G$ , называется *порядком* элемента  $a$ . Если подгруппа, порожденная элементом  $a$ , бесконечна, то говорят, что элемент  $a$  имеет бесконечный порядок.

Для всякой подгруппы  $H$  группы  $G$  ее *правыми смежными классами* называются множества  $Ha = \{xa \mid x \in H\}$ ,  $a \in G$ . Аналогично, множества  $aH$  называются ее *левыми смежными классами*. Количество различных правых (или левых) классов смежности по подгруппе  $H$  называется *индексом* этой подгруппы.

**25. Ux** Теорема Лагранжа. Пусть  $H$  – подгруппа конечной группы  $G$ . Тогда порядок группы  $H$  является делителем порядка группы  $G$ .

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *нормальной*, если  $aha^{-1} \in H$  для всех элементов  $h \in H$  и  $a \in G$ , т. е.  $GHG^{-1} \subset H$ . Нормальные подгруппы также называют её *нормальными делителями* или же *инвариантными подгруппами*.

У всякой нормальной подгруппы ее левые классы смежности совпадают с правыми классами смежности. Множество классов смежности нормальной подгруппы является группой, произведение в которой определено по правилу  $(aH)(bH) = abH$ . Группа классов смежности подгруппы  $H$  в группе  $G$  называется *факторгруппой  $G$  по  $H$*  и обозначается  $G/H$ .

**25. Vx.** Ядро всякого гомоморфизма  $f : G \rightarrow H$  является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**25. Wx.** Образ  $f(G)$  всякого гомоморфизма  $f : G \rightarrow H$  изоморфен факторгруппе  $G/\text{Ker } f$  группы  $G$  по ядру гомоморфизма  $f$ .

**25. Xx.** Факторгруппа  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  канонически изоморфна группе  $S^1$ . Опишите образ группы  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  при этом изоморфизме.

**25. Yx.** Пусть  $A$  – нормальная подгруппа,  $B$  – подгруппа некоторой группы  $G$ . Тогда  $AB$  также является подгруппой  $G$ , а  $A \cap B$  – нормальной подгруппой группы  $B$ , при этом  $AB/A \cong B/A \cap B$ .

## 26х. Топологические группы

### 26'1х. Определение топологической группы

*Топологической группой* называется множество  $G$  на котором заданы как топологическая, так и групповая структура. При этом требуется, чтобы отображения  $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$  и  $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$  были непрерывны.

**26.1х.** Пусть  $G$  – одновременно группа и топологическое пространство. Докажите, что отображения  $\omega : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$  и  $\alpha : G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$  непрерывны, тогда непрерывно отображение  $\beta : G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$ .

**26.2х.** Докажите, что для всякой топологической группы  $G$  отображение  $G \rightarrow G : x \mapsto x^{-1}$  является гомеоморфизмом.

**26.3х.** Пусть  $G$  – топологическая группа,  $X$  – топологическое пространство и  $f, g : X \rightarrow G$  – отображения, непрерывные в точке  $x_0 \in X$ . Докажите, что отображения  $X \rightarrow G : x \mapsto f(x)g(x)$  и  $X \rightarrow G : x \mapsto (f(x))^{-1}$  также будут непрерывны в точке  $x_0$ .

**26.Ах.** Всякая группа, наделенная дискретной топологической структурой, является топологической группой.

**26.4х.** Будет ли топологической группой группа, наделенная антидискретной топологической структурой?

### 26'2х. Примеры топологических групп

**26.Вх.** Группы, перечисленные в задаче 25.Сх и наделенные стандартной топологией, являются топологическими группами.

**26.5х.** Единичная окружность  $S^1 = \{ |z| = 1 \} \subset \mathbb{C}$  с операцией умножения и стандартной топологической структурой является топологической группой.

**26.6х.** Являются ли топологическими группами:

- (1) пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$  и  $\mathbb{H}^n$  с покоординатным сложением;
- (2) множества  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $M_n(\mathbb{C})$  и  $M_n(\mathbb{H})$  всех  $n \times n$ -матриц с вещественными, комплексными и, соответственно, кватернионными коэффициентами, операцией в которых является матричное сложение, а топологией является топология пространства  $\mathbb{R}^k$  (мы отождествляем  $M_n(\mathbb{R})$  с  $\mathbb{R}^{n^2}$ ,  $M_n(\mathbb{C})$  с  $\mathbb{C}^{n^2}$  и  $M_n(\mathbb{H})$  с  $\mathbb{H}^{n^2}$ );
- (3) множество  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$  и  $GL(n, \mathbb{H})$  всех обратимых  $n \times n$ -матриц с вещественными, комплексными и, соответственно, кватернионными коэффициентами, операцией в которых является матричное умножение, а топология индуцирована вложением  $\Lambda(n, K) \subset M_n(K)$  (где  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ );
- (4) множества  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $O(n)$ ,  $O(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $SO(n, \mathbb{C})$ ,  $SU(n)$ , и другие подгруппы групп  $GL(n, K)$  с  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  и  $\mathbb{H}$ .



**26.7х.** Введите на группе  $\mathbb{R}$  с операцией сложения топологическую структуру, отличную от стандартной, дискретной и антидискретной, так, чтобы в результате мы получили топологическую группу.

**26.8х.** Укажите пару топологических групп, которые гомеоморфны как топологические пространства, но не являются изоморфными, как группы.

**26.9х.** Определим в множестве  $G = [0; 1)$  (со стандартной топологической структурой) операцию сложения  $\omega(x, y) = x + y \pmod{1}$ . Является ли  $G$  топологической группой?

### **26'3х. Автогомеоморфизмы, делающие топологическую группу однородной**

Отображения группы  $G$  на себя, определенные формулами  $x \mapsto ax$  и  $x \mapsto xa$ , называются, соответственно, *левым* и *правым* *сдвигом* и обозначаются  $L_a$  и  $R_a$ . Заметим, что  $L_a \circ L_b = L_{ab}$ , тогда как  $R_a \circ R_b = R_{ba}$  (чтобы подправить последнее соотношение некоторые авторы определяют правый сдвиг как отображение  $x \mapsto xa^{-1}$ ).

**26.Сх.** *Левый и правый сдвиги являются автогомеоморфизмами топологической группы.*

*Сопряжением*, порожденным элементом  $a$  группы  $G$ , называется отображение  $G \rightarrow G : x \mapsto axa^{-1}$ .

**26.Дх.** *Всякое сопряжение является автогомеоморфизмом топологической группы.*

Следующее свойство топологической группы показывает определенную “однородность” топологической структуры на группе.

**26.Ех.** Для всякого открытого множества  $U$  в топологической группе  $G$  и для любого ее элемента  $x \in G$  множества  $xU$ ,  $Ux$  and  $U^{-1}$  являются открытыми.

**26.10х.** Справедливо ли аналогичное утверждение для замкнутых множеств?

**26.11х.** Докажите, что если  $U$  and  $V$  – подмножества топологической группы и множество  $U$  открыто, то  $UV$  и  $VU$  – открытые множества.

**26.12х.** Останется ли верным аналог предыдущего утверждения для замкнутого множества?

**26.13х.** Какие из следующих подгрупп аддитивной группы  $\mathbb{R}$  являются замкнутыми множествами:

- (1)  $\mathbb{Z}$ ;
- (2)  $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ ;
- (3)  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ ?

**26.Фх.** Докажите, что если множество  $U$  компактно, а множество  $V$  – замкнуто, то множества  $UV$  and  $VU$  также являются замкнутыми.

**26.Фх.1.** Рассмотрим непересекающиеся подмножества  $F$  и  $C$  топологической группы  $G$ . Если множество  $F$  замкнуто, а  $C$  компактно, то найдется окрестность  $V$  единицы, такая что множество  $CV \cup VC$  не пересекает  $F$ . Если топологическая группа  $G$  локально компактна, то окрестность  $V$  можно выбрать так, чтобы множество  $\text{Cl}(CV \cup VC)$  было компактным.

## 26'4х. Окрестности

**26.Гх.** Если  $\Gamma$  – база окрестностей единицы в топологической группе  $G$ , то  $\Sigma = \{aU \mid a \in G, U \in \Gamma\}$  – база топологии в  $G$ .

Подмножество  $A$  группы  $G$  называется *симметричным*, если  $A^{-1} = A$ .

**26.Нх.** Во всякой окрестности единицы топологической группы содержится симметричная окрестность единицы.

**26.Их.** Для всякой окрестности  $U$  единицы топологической группы существует окрестность  $V$  единицы, такая что  $VV \subset U$ .

**26.14х.** Для всякой окрестности  $U$  единицы топологической группы и всякого натурального числа  $n$  существует симметричная окрестность  $V$  единицы, такая что  $V^n \subset U$ .

**26.15х.** Если  $V$  – симметричная окрестность единицы топологической группы, то множество  $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$  есть подгруппа этой группы, являющаяся одновременно открытым и замкнутым множеством.

**26.16х.** Пусть  $G$  – группа и  $\Sigma$  – некоторый набор подмножеств. Докажите, что для того, чтобы существовала топологическая структура на  $G$ , в которой  $\Sigma$  есть база окрестностей единицы, относительно которой  $G$  является топологической группой, необходимо и достаточно, чтобы набор  $\Sigma$  удовлетворял следующим пяти условиям:

- (1) каждое из множеств  $U \in \Sigma$  содержит единицу группы  $G$ ,
- (2) для каждого элемента  $x \in U \in \Sigma$  существует множество  $V \in \Sigma$ , такое что  $xV \subset U$ ,
- (3) для каждого множества  $U \in \Sigma$  существует множество  $V \in \Sigma$ , такое что  $V^{-1} \subset U$ ,
- (4) для каждого множества  $U \in \Sigma$  существует множество  $V \in \Sigma$ , такое что  $VV \subset U$ ,
- (5) для каждого элемента  $x \in G$  и множества  $U \in \Sigma$  существует множество  $V \in \Sigma$ , такое что  $V \subset x^{-1}Ux$ .

**26.Жх. Загадка.** В каком смысле включение 26.Их напоминает неравенство треугольника?

**26.Кх.** Пусть  $C$  – компактное подмножество топологической группы  $G$ . Докажите, что для всякой окрестности  $U$  единицы группы существует окрестность  $V$  единицы, такая что для каждого элемента  $x \in C$  справедливо включение  $V \subset x^{-1}Ux$ .

**26'5х. Аксиомы отделимости**

**26.Lх.** Топологическая группа является хаусдорфовой, тогда она удовлетворяет первой аксиоме отделимости, тогда одноточечное множество  $\{1\}$  замкнуто.

**26.Mх.** Топологическая группа является хаусдорфовой, тогда пересечение всех окрестностей единицы совпадает с  $\{1\}$ .

**26.Nх.** Если единица топологической группы замкнута, то эта топологическая группа удовлетворяет третьей аксиоме отделимости.

Для доказательства используйте следующее утверждение.

**26.Nх.1.** Для всякой окрестности  $U$  единицы в топологической группе  $G$  существует окрестность  $V$  единицы, такая что  $\text{Cl } V \subset U$ .

**26.Oх** Следствие. *В топологических группах первые три аксиомы отделимости эквивалентны.*

**26.17х.** Докажите, что на конечной группе  $G$  существует ровно столько топологических структур, относительно которых она является топологической группой, сколько в  $G$  имеется нормальных подгрупп. Точнее, для каждой нормальной подгруппы  $N$  конечной группы  $G$  множества  $gN$ ,  $g \in G$ , образуют базу топологической структуры, согласованной с групповой.

**26'6х. Аксиомы счетности**

**26.Pх.** Если  $\Gamma$  – база окрестностей в единице топологической группы  $G$  и множество  $S$  плотно в  $G$ , то набор  $\Sigma = \{aU \mid a \in S, U \in \Gamma\}$  есть база топологии группы  $G$ . (Ср. 26.Gх and 15.J.)

**26.Qх** Следствие. Всякая сепарабельная и удовлетворяющая первой аксиоме счетности топологическая группа удовлетворяет второй аксиоме счетности.

**26.18х\*.** (Ср. 15.Dх) Всякая топологическая группа, удовлетворяющая первой аксиоме отделимости и второй аксиоме счетности, метризуема.

## 27х. Конструкции

### 27'1х. Подгруппы

**27.Ах.** Если  $H$  – подгруппа топологической группы  $G$ , то  $H$  является топологической группой относительно групповой и топологических структур, наследуемых ею из группы  $G$ .

**27.1х.** Пусть  $H$  – подгруппа абелевой группы  $G$ . Докажите, что для всякой структуры топологической группы на  $H$  и базы топологии в единице существует структура топологической группы на  $G$  с той же самой базой окрестностей в единице.

**27.2х.** Докажите, что подгруппа топологической группы открыта, когда ее внутренность непуста.

**27.3х.** Докажите, что всякая открытая подгруппа топологической группы является одновременно и замкнутой.

**27.4х.** Докажите, что всякая замкнутая подгруппа конечного индекса является открытой.

**27.5х.** Приведите пример подгруппы топологической группы, которая:

- (1) замкнута, но не открыта;
- (2) не открыта и не замкнута.

**27.6х.** Докажите, что топология, индуцированная на подгруппе топологической группы, является дискретной, когда в этой подгруппе имеется изолированная точка.

**27.7х.** Докажите, что подгруппа  $H$  топологической группы  $G$  замкнута, когда существует открытое множество  $U$ , такое что  $U \cap H = U \cap \text{Cl } H \neq \emptyset$ , т. е. когда  $H$  локально замкнута хотя бы в одной из своих точек.

**27.8х.** Докажите, что если  $H$  не является замкнутой подгруппой топологической группы  $G$ , то множество  $\text{Cl } H \setminus H$  плотно в  $\text{Cl } H$ .

**27.9х.** Замыкание подгруппы топологической группы является подгруппой этой группы.

**27.10х.** Верно ли, что внутренность подгруппы топологической группы является подгруппой этой группы?

**27.Вх.** Связная топологическая группа порождается всякой окрестностью единицы этой группы.

**27.Сх.** Пусть  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Введем отношение:  $a \sim b$ , если  $ab^{-1} \in H$ . Докажите, что это отношение является отношением эквивалентности, классы эквивалентности по которому совпадают с правыми классами смежности подгруппы  $H$ .

**27.11х.** Каков аналог утверждения 27.Сх для левых классах смежности?

Множество левых классов смежности подгруппы  $H$  в  $G$  обозначается через  $G/H$ , множество правых классов – через  $H \backslash G$ . В случае, если  $G$  является топологической группой, множества  $G/H$  и  $H \backslash G$  наделяются топологической структурой фактопространства и называются *пространствами классов смежности*.

**27.Dx.** Для всякой топологической группы  $G$  и её подгруппы  $H$ , естественные проекции  $G \rightarrow G/H$  и  $G \rightarrow H \backslash G$  являются открытыми отображениями.

**27.Ex.** Пространство левых (и правых) классов смежности замкнутой подгруппы топологической группы является регулярным.

**27.Fx.** Если подгруппа  $H$  группы  $G$ , а также пространство  $G/H$  компактны, то и сама группа  $G$  компактна; если подгруппа  $H$  группы  $G$ , а также пространство  $G/H$  связны, то и сама группа  $G$  связна.

**27.Gx.** Если подгруппа  $H$  группы  $G$  связна, то прообраз всякой компоненты пространства  $G/H$  является компонентой группы  $G$ .

**27.12x.** Рассмотрим группу  $SO(n-1)$  как подгруппу  $SO(n)$ . Если  $n \geq 2$ , то пространство  $SO(n)/SO(n-1)$  гомеоморфно  $S^{n-1}$ .

**27.13x.** Для всякого  $n \geq 1$  группы  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(n)$  компактны и связны. Сколько компонент связности имеют группы  $O(n)$ ,  $O(p, q)$  ( $O(p, q)$  – это группа всех линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^{p+q}$  сохраняющих квадратичную форму  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - y_1^2 - \dots - y_q^2$ )?

## 27'2x. Нормальные подгруппы

**27.Hx.** Докажите, что замыкание нормальной подгруппы топологической группы  $G$  является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**27.Ix.** Компонента связности единицы в топологической группе есть замкнутая нормальная подгруппа этой группы.

**27.14x.** Компонента линейной связности единицы в топологической группе есть нормальная подгруппа этой группы.

**27.Jx.** Факторгруппа топологической группы является топологической группой.

**27.Kx.** Естественная проекция топологической группы на её факторгруппу является открытым отображением.

**27.Lx.** Факторгруппа группы, удовлетворяющей первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворяет первой (соответственно, второй) аксиоме счетности.

**27.Mx.** Факторгруппа  $G/H$  топологической группы  $G$  регулярна, когда подгруппа  $H$  замкнута.

**27.Nx.** Докажите, что нормальная подгруппа  $H$  открыта в топологической группе  $G$ , тогда факторгруппа  $G/H$  дискретна.

Центром группы  $G$  называется множество

$$C(G) = \{x \in G \mid xg = gx \text{ при всех } g \in G\}.$$

**27.15x.** Всякая дискретная нормальная подгруппа связной топологической группы  $G$  содержится в центре  $C(G)$  этой группы.

### 27'3x. Гомоморфизмы

Если  $G$  и  $H$  – топологические группы, то отображение  $f : G \rightarrow H$  называется гомоморфизмом, если оно непрерывно и является гомоморфизмом с алгебраической точки зрения.

**27.Ox.** Групповой гомоморфизм одной топологической группы в другую является гомоморфизмом в смысле топологических групп, когда он непрерывен в единице.

Все теоретико-групповые понятия переносятся на топологические группы без изменений. Единственное, что включается дополнительно в определения, связано с существованием на группах топологической структуры. В частности, в теории групп **изоморфизмом** называется обратимый гомоморфизм. Отображение, обратное к нему, автоматически является гомоморфизмом. В теории топологических групп в само определение изоморфизма следует вставить дополнительное условие. Именно, **изоморфизмом** одной топологической группы на другую называется обратимый гомоморфизм, обратный к которому также является гомоморфизмом. Другими словами, в теории топологических групп под изоморфизмом мы понимаем отображение, которое является изоморфизмом в алгебраическом смысле и гомеоморфизмом топологических пространств.

**27.16x.** Докажите, что отображение  $f : [0; 1) \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$  – гомоморфизм (топологических групп).

**27.Px.** Эпиморфизм  $f : G \rightarrow H$  является открытым отображением, тогда его инъективный фактор  $\hat{f} = f/S(f) : G/\text{Ker } f \rightarrow H$  является изоморфизмом.

**27.Qx.** Эпиморфизм компактной топологической группы на топологическую группу с замкнутой единицей является открытым отображением.

**27.Rx.** Докажите, что факторгруппа  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  изоморфна мультипликативной группе  $S^1 \subset \mathbb{C}$ .

### 27'4х. Локальные изоморфизмы

Пусть  $G$  и  $H$  – топологические группы. *Локальным изоморфизмом* группы  $G$  в группу  $H$  называется гомеоморфизм  $f$  некоторой окрестности  $U$  единицы в группе  $G$  на окрестность  $V$  единицы в группе  $H$ , такой что

- $f(xy) = f(x)f(y)$  для всех  $x, y \in U$ , таких что  $xy \in U$ ,
- $f^{-1}(zt) = f^{-1}(z)f^{-1}(t)$  для всех  $z, t \in V$ , таких что  $zt \in V$ .

Топологические группы называются *локально изоморфными*, если существует локальный изоморфизм одной из них в другую.

**27.5х.** Изоморфные топологические группы локально изоморфны.

**27.Тх.** Аддитивная группа  $\mathbb{R}$  вещественных чисел и мультипликативная группа  $S^1$  комплексных чисел, по модулю равных единице, локально изоморфны, но не изоморфны.

**27.17х.** Докажите, что отношение локальной изоморфности является отношением эквивалентности на классе всех топологических групп.

**27.18х.** Укажите окрестности единиц в  $\mathbb{R}$  и  $S^1$  и гомеоморфизм между ними, удовлетворяющие первому условию из определения локального изоморфизма, но не удовлетворяющие второму.

**27.19х.** Докажите, что для любого гомеоморфизма окрестности единицы одной топологической группы на окрестность единицы другой, удовлетворяющего первому условию из определения локального гомеоморфизма, найдется локальный изоморфизм, являющийся его подотображением.

### 27'5х. Прямые произведения

Пусть  $G$  и  $H$  – топологические группы. В теории групп произведение  $G \times H$  наделяется групповой структурой:  $(x, u)(y, v) = (xy, uv)$ . В топологии было определено произведение топологических пространств (см. 19).

**27.Ух.** Произведение топологических групп является топологической группой.

Тем самым,  $G \times H$  – топологическая группа, которая называется *прямым произведением* групп  $G$  и  $H$ . С этим произведением связаны четыре канонических гомоморфизма: два гомоморфизма включения  $i_G : G \rightarrow G \times H : x \mapsto (x, 1)$  и  $i_H : H \rightarrow G \times H : x \mapsto (1, x)$ , каждый из которых является мономорфизмом, и две проекции  $p_G : G \times H \rightarrow G : (x, y) \mapsto x$  и  $p_H : G \times H \rightarrow H : (x, y) \mapsto y$ , каждая из которых – эпиморфизм.

**27.20х.** Докажите, что топологические группы  $G \times H / i_H(H)$  и  $G$  изоморфны.

**27.21х.** Перемножение топологических групп коммутативно и ассоциативно:  $G \times H$  канонически изоморфно  $H \times G$ , а  $G \times (H \times K)$  канонически изоморфно  $(G \times H) \times K$ .

Говорят, что топологическая группа  $G$  *раскладывается в прямое произведение своих подгрупп  $A$  и  $B$* , если отображение  $A \times B \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$  является изоморфизмом. В этом случае группу  $G$  обычно отождествляют с произведением  $A \times B$ .

Предположим, что группа  $G$  раскладывается в прямое произведение своих подгрупп  $A$  и  $B$  в алгебраическом смысле. Напомним, что это имеет место, когда  $A$  и  $B$  порождают группу  $G$ , являются ее нормальными подгруппами и  $A \cap B = \{1\}$ . Поэтому, если эти условия выполнены, то отображение  $(x, y) \mapsto xy : A \times B \rightarrow G$  — изоморфизм.

**27.22х\*.** Докажите, что в описанной ситуации отображение  $(x, y) \mapsto xy : A \times B \rightarrow G$  непрерывно. Приведите пример, в котором обратный гомоморфизм не является непрерывным.

**27.Vх.** Докажите, что если компактная хаусдорфова топологическая группа  $G$  раскладывается в прямое произведение своих замкнутых подгрупп в алгебраическом смысле, то  $G$  является их прямым произведением (и в топологическом смысле).

**27.23х.** Докажите, что мультипликативная группа  $\mathbb{R} \setminus 0$  вещественных чисел изоморфна (как топологическая группа) прямому произведению мультипликативной группы  $S^0 = \{1, -1\}$  и мультипликативной группы  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

**27.24х.** Докажите, что мультипликативная группа  $\mathbb{C} \setminus 0$  комплексных чисел изоморфна (как топологическая группа) прямому произведению мультипликативной группы  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  и мультипликативной группы  $\mathbb{R}_+^*$ .

**27.25х.** Докажите, что мультипликативная группа  $\mathbb{H} \setminus 0$  кватернионов изоморфна (как топологическая группа) прямому произведению мультипликативной группы  $S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$  и мультипликативной группы  $\mathbb{R}_+^*$ .

**27.26х.** Докажите, что подгруппа  $S^0 = \{1, -1\}$  группы  $S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$  не является ее прямым фактором.

**27.27х.** Найдите топологическую группу, гомеоморфную  $\mathbb{R}P^3$ .

Пусть группа  $G$  содержит нормальную подгруппу  $A$  и подгруппу  $B$ , такие что  $AB = G$  и  $A \cap B = \{1_G\}$ . Если подгруппа  $B$  также является нормальной, то  $G$  является прямым произведением  $A \times B$ . В противном случае говорят о *полупрямом произведении*.

**27.Wх.** Пусть топологическая группа  $G$  является полупрямым произведением своих подгрупп  $A$  и  $B$ . Если для любых окрестностей единицы  $U \subset A$  и  $V \subset B$  их произведение  $UV$  также содержит окрестность единицы, то пространство  $G$  гомеоморфно произведению  $A \times B$ .



## 27'6х. Группы гомеоморфизмов

Обозначим через  $\text{Тор } X$  группу гомеоморфизмов топологического пространства  $X$ . Напомним, что групповой операцией в этой группе является композиция гомеоморфизмов. Для того, чтобы сделать её топологической, мы изменим топологическую структуру на пространстве гомеоморфизмов по сравнению с компактно-открытой топологией на пространстве  $\mathcal{C}(X, X)$ .

**27.Хх.** Набор множеств вида  $W(C, U)$  и  $(W(C, U))^{-1}$  взятых для всех компактных подмножеств  $C \subset X$  и всех открытых подмножеств  $U \subset X$  является предбазой некоторой топологической структуры на группе  $\text{Тор } X$ .

Всюду в дальнейшем мы считаем, что на пространстве  $\text{Тор } X$  задана топологическая структура с предбазой, описанной в 27.Хх.

**27.Ух.** Если пространство  $X$  является хаусдорфовым и локально компактным, то  $\text{Тор } X$  – топологическая группа.

**27.Ух.1.** Если  $X$  хаусдорфово и локально компактно, то отображение  $\phi : \text{Тор } X \times \text{Тор } X \rightarrow \text{Тор } X : (g, h) \mapsto g \circ h$  непрерывно.

## 28х. Действия топологических групп

### 28'1х. Действие группы на множестве

*Левым действием* группы  $G$  на множестве  $X$  называется отображение  $G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto gx$ , такое что  $1x = x$  для любого  $x \in X$  и  $(gh)x = g(hx)$  для любого  $x \in X$  и любых  $g, h \in G$ . Множество  $X$ , на котором задано такое действие, называется *левым  $G$ -множеством*. Правые  $G$ -множества определяются аналогичным образом.

**28.Ах.** На всяком левом  $G$ -множестве  $X$  формула  $(x, g) \mapsto g^{-1}x$  определяет правое действие группы  $G$ .

**28.Вх.** Пусть  $X$  – левое  $G$ -множество. Тогда для любого  $g \in G$  отображение  $X \rightarrow X : x \mapsto gx$  является биекцией.

Левое действие группы  $G$  на  $X$  называется *эффетивным*, если для любого отличного от единицы элемента  $g$  группы  $G$  отображение  $x \mapsto gx$  не является тождественным. Отображение  $f : X_1 \rightarrow X_2$  одного левого  $G$ -множества в другое называется  *$G$ -эквивариантным*, если  $f(gx) = gf(x)$  для всех  $x \in X, g \in G$ .

Говорят, что  $X$  является *однородным левым  $G$ -множеством* (или что  $G$  действует *транзитивно* на  $X$ ), если для любых  $x, y \in X$  существует элемент  $g \in G$ , такой что  $y = gx$ .

С очевидными изменениями та же самая терминология применима и для правых действий.

**28.Сх.** Естественные действия группы  $G$  на множествах  $G/H$  и  $H \backslash G$  превращает их в однородные левое и, соответственно, правое  $G$ -множество.

Пусть  $X$  – однородное левое  $G$ -множество. Рассмотрим точку  $x \in X$  и множество  $G^x = \{g \in G \mid gx = x\}$ . Очевидно, что  $G^x$  есть подгруппа группы  $G$ . Подгруппа  $G^x$  называется *изотропной подгруппой*, соответствующей точке  $x$ .

**28.Дх.** Всякое однородное левое (правое)  $G$ -множество  $X$  изоморфно  $G/H$  (соответственно,  $H \backslash G$ ), где через  $H$  обозначена изотропная подгруппа, соответствующая некоторой точке множества  $X$ .

**28.Дх.1.** Все изотропные подгруппы  $G^x, x \in G$ , являются попарно сопряженными.

*Нормализатор*  $Nr(H)$  подгруппы  $H$  группы  $G$  называется множество  $\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ . Другими словами, нормализатор есть наибольшая подгруппа в  $G$ , содержащая  $H$  в качестве своей нормальной подгруппы.

**28.Ех.** Группа всех автоморфизмов однородного  $G$ -множества  $X$  изоморфна группе  $N(H)/H$ , где  $H$  – изотропная подгруппа, соответствующая некоторой точке множества  $X$ .

**28.Ех.1.** Если изотропные подгруппы, соответствующие точкам  $x, y \in X$ , совпадают друг с другом, то найдется автоизоморфизм  $G$ -множества  $X$ , переводящий  $x$  в  $y$ .

## 28'2х. Непрерывные действия

Левым  $G$ -пространством называется топологическое пространство  $X$ , на котором задано левое действие топологической группы  $G$ , такое что отображение  $G \times X \rightarrow X$  является непрерывным. Все определения, связанные с понятием  $G$ -множеств естественным образом переносятся на  $G$ -пространства.

Отметим, что если группа  $G$  дискретна, то любое ее действие задается непрерывным отображением, тем самым всякое её действие определяет  $G$ -пространство.

**28.Фх.** Пусть  $X$  – левое  $G$ -пространство. Естественное отображение  $\phi: G \rightarrow \text{Тор } X$ , индуцированное действием  $G$  на  $X$ , является групповым гомоморфизмом.

**28.Гх.** В предположениях предыдущего утверждения, если к тому же пространство  $X$  хаусдорфово и локально компактно, то гомоморфизм  $G \rightarrow \text{Тор } X$  непрерывен.

**28.1х.** Проверьте, является ли непрерывным действие данной топологической группы на данном топологическом пространстве и будет ли непрерывным гомоморфизм  $G \rightarrow \text{Тор } X$ ?

- (1)  $G$  – топологическая группа,  $X = G$  и  $G$  действует на  $X$  посредством левых (или правых) сдвигов, или же посредством сопряжения;
- (2)  $G$  – топологическая группа,  $H$  – ее подгруппа,  $X = G/H$  и  $G$  действует на  $X$  по формуле  $g(aH) = (ga)H$ ;
- (3)  $G = GL(n, K)$  (где  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ ) и  $G$  действует в  $K^n$  стандартным образом (как умножение матрицы на вектор);
- (4)  $G = GL(n, K)$  (где  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  или  $\mathbb{H}$ ) и  $G$  действует в  $KP^{n-1}$  посредством матричного умножения;
- (5)  $G = O(n, \mathbb{R})$  и  $G$  действует в  $S^{n-1}$  посредством матричного умножения;
- (6) аддитивная группа  $\mathbb{R}^1$  действует на торе  $S^1 \times \dots \times S^1$  по правилу  $(w_1, \dots, w_r) \mapsto (e^{2\pi i a_1 t} w_1, \dots, e^{2\pi i a_r t} w_r)$ ; такое действие называется *иррациональным потоком*, если числа  $a_1, \dots, a_r$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ .

Заметим, что если действие  $G$  на  $X$  не является эффективным, то мы можем рассмотреть его ядро  $G^{Ker} = \{g \in G \mid gx = x \text{ для всех } x \in X\}$ ,

которое является замкнутой нормальной подгруппой в  $G$ . Топологическая группа  $G/G^{Ker}$  будет естественным образом, и притом эффективно, действовать на  $X$ .

**28.Нх.** Формула  $gG^{Ker}(x) = gx$  определяет эффективное непрерывное действие группы  $G/G^{Ker}$  на пространстве  $X$ .

Говорят, что группа  $G$  действует *вполне разрывно* на пространстве  $X$ , если для всякого компактного множества  $C \subset X$  множество  $\{g \in G \mid gC \cap C \neq \emptyset\}$  является конечным.

**28.Их.** Если группа  $G$  действует вполне разрывно и эффективно на хаусдорфовом локально компактном пространстве  $X$ , то  $\phi(G)$  является дискретным подмножеством  $\text{Тор } X$ . (Здесь, как и ранее  $\phi : G \rightarrow \text{Тор } X$  – мономорфизм, индуцированный  $G$ -действием.) В частности,  $G$  – дискретная топологическая группа.

**28.2х.** Перечислите (с точностью до подобия) все треугольники на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , для которых группа, порожденная симметриями относительно их сторон, действует в  $\mathbb{R}^2$  вполне разрывно.

### 28'3х. Пространства орбит

Пусть  $X$  –  $G$ -пространство. Для  $x \in X$  множество  $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$  называется *орбитой* точки  $x$ . Транзитивность действия  $G$  на  $X$  означает, что в пространстве  $X$  есть всего одна орбита – все пространство. Для подмножеств  $A \subset X$  и  $E \subset G$  положим  $E(A) = \{ga \mid g \in E, a \in A\}$ .

**28.Жх.** Если компактная топологическая группа  $G$  действует на хаусдорфовом топологическом пространстве  $X$ , то для всякой точки  $x \in X$  каноническое отображение  $G/G^x \rightarrow G(x)$  является гомеоморфизмом.

**28.3х.** Приведите пример хаусдорфова  $G$ -пространства  $X$ , для которого тем не менее факторпространство  $G/G_x$  не гомеоморфно  $G(x)$ .

**28.Кх.** Если компактная топологическая группа  $G$  действует на компактном хаусдорфовом пространстве  $X$ , то  $X/G$  – компактное хаусдорфово пространство.

**28.4х.** Если группа  $G$  компактна, то для всякого  $G$ -пространства  $X$  множество  $G(A)$  будет замкнутым (компактным), если замкнуто (соответственно, компактно) множество  $A \subset X$ .

**28.5х.** Рассмотрим каноническое действие мультипликативной группы  $G = \mathbb{R}^*$  на  $X = \mathbb{R} : (s, t) \mapsto st$ . Найдите все его орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит  $X/G$ .

**28.6х.** Пусть  $G$  – группа, порожденная симметриями относительно сторон некоторого треугольника в  $\mathbb{R}^2$ . Опишите эту группу и пространство орбит  $\mathbb{R}^2/G$ .

**28.7х.** Пусть  $G$  – группа из задачи 28.6х, а  $H$  – её подгруппа индекса 2, состоящая из сохраняющих ориентацию преобразований плоскости. Опишите эту группу и пространство орбит  $\mathbb{R}^2/G$ .

**28.8х.** Рассмотрим диагональное действие тора  $G = (S^1)^{n+1}$  на  $X = \mathbb{C}P^n$ , заданного правилом

$$(z_0, z_1, \dots, z_n) \mapsto (\theta_0 z_0, \theta_1 z_1, \dots, \theta_n z_n).$$

Найдите все его орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит  $X/G$ .

**28.9х.** Рассмотрим каноническое действие (порожденное перестановкой координат) симметрической группы  $G = \text{Symm}(n)$  в  $X = \mathbb{R}^n$ ;  $X = \mathbb{C}^n$ . Найдите все орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит  $X/G$ .

**28.10х.** Рассмотрим действие группы  $G = S(3)$  на пространстве  $X$  всех симметричных вещественных  $3 \times 3$ -матриц с нулевым следом посредством сопряжения  $x \mapsto gxg^{-1}$ . Найдите все орбиты и изотропные подгруппы. Опишите пространство орбит  $X/G$ .

## 28'4х. Однородные пространства

$G$ -пространство называется *однородным*, если группа  $G$  действует на нем транзитивно.

**28.Lх.** Всякая топологическая группа  $G$  является однородным  $H$ -пространством относительно действия всякой своей подгруппы посредством сдвигов. Факторпространство  $G/H$  является однородным  $G$ -пространством относительно действия группы  $G$ .

**28.Mх.** Пусть  $X$  –  $G$ -пространство. Если  $X$  и  $G$  локально компактны и  $G$  имеет счетную базу топологии, то для всякой точки  $x \in X$  пространство  $X$  гомеоморфно факторпространству  $G/G^x$ .

**28.Nх.** Пусть  $X$  – однородное  $G$ -пространство. Каноническое отображение  $G/G^x \rightarrow X$  является гомеоморфизмом, тогда оно открыто.

**28.11х.** Покажите, что  $O(n)/O(n-1) = S^n$  и  $U(n)/U(n-1) = S^{2n-1}$ .

**28.12х.** Покажите, что  $O(n+1)/O(n) \times O(1) = \mathbb{R}P^n$  и  $U(n+1)/U(n) \times U(1) = \mathbb{C}P^n$ .

**28.13х.** Покажите, что  $Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$ , где  $Sp(n) = \{A \in GL(\mathbb{H}) \mid AA^* = \mathbb{E}\}$ .

**28.14х.** Представьте тор  $S^1 \times S^1$  и бутылку Клейна как однородные пространства.

**28.15х.** Опишите в геометрических терминах однородные пространства: 1)  $O(n)/O(1)^n$ ; 2)  $O(n)/O(k) \times O(n-k)$ ; 3)  $O(n)/SO(k) \times O(n-k)$ ; 4)  $O(n)/O(k)$ .

**28.16х\*.** Представьте  $S^2 \times S^2$  как однородное пространство.

**28.17х.** Опишите пространство орбит  $SO(n, 1)/SO(n)$ .

## Доказательства и комментарии

**26.Ах** Это так, поскольку всякое отображение из дискретного топологического пространства является непрерывным.

**26.Вх** В тех случаях, когда группа конечна, наделите ее дискретной топологической структурой; в силу 26.Ах, она станет топологической. Более содержательные примеры рассматриваются далее (см. 26.5х–26.6х).

**26.8х** Любые две неизоморфные (в алгебраическом смысле) и состоящие из одинакового числа элементов конечные группы, наделенные дискретной топологией. Более интересный пример: топологическая группа  $GL_+(2, R)$  обратимых  $(2 \times 2)$ -матриц с положительным определителем гомеоморфна  $S^1 \times R^3$ . Однако первая из них неабелева, тогда как вторая – абелева.

**26.Сх** Любой сдвиг непрерывен, а сдвиги, заданные элементами  $a$  и  $a^{-1}$  взаимно обратны друг другу.

**26.Сх** Аналогично доказательству утверждения 26.Сх.

**26.Ех** Для всякого открытого множества  $U$  указанные множества являются его образами при гомеоморфизмах, соответственно: левого сдвига на элемент  $x$ , правого сдвига на этот элемент, взятия обратного элемента.

**26.Фх** Пусть  $x \notin UV$ . Так как множества  $U$  и  $xV^{-1}$  не пересекаются, то в силу 26.Фх.1 найдется окрестность  $W$  единицы, такая что множества  $WU$  и  $xV^{-1}$  дизъюнкты. Значит, множество  $W^{-1}x$  не пересекается с  $UV$ , следовательно, дополнение  $UV$  – открытое множество.

**26.Фх.1** Для каждой точки  $x \in C$  выберем окрестность  $V_x$  единицы так, чтобы окрестность  $xV_x$  не пересекалась с множеством  $F$ . В силу 26.Их существует окрестность единицы  $W_x$ , такая что  $W_x^2 \subset V_x$ . Так как множество  $C$  компактно, то у него существует конечное покрытие множествами  $W_1 = x_1W_{x_1}, \dots, W_n = x_nW_{x_n}$ . Положим  $V_1 = \bigcap_1^n W_{x_n}$ . Тогда  $CV_1 \subset \bigcup W_iV \subset \bigcup x_iW_{x_i}^2 \subset \bigcup x_iV_{x_i}$ , таким образом множество  $CV_1$  не пересекается с  $F$ . Аналогично строится окрестность  $V_2$ , такая что множество  $V_2C$  не пересекается с  $F$ . Окрестность  $V = V_1 \cap V_2$  обладает требуемым свойством. Если  $G$  – локально компактная группа, то следует взять окрестность  $V_x$  с компактным замыканием.

**26.Гх** Пусть множество  $V$  открыто в  $G$ ,  $a \in V$ . Если окрестность  $U \in \Gamma$  такова, что  $U \subset a^{-1}V$ , то  $aU \subset V$ . В силу признака базы данной топологии,  $\Sigma$  – база топологии группы  $G$ .

**26.Нх** Если  $U$  – некоторая окрестность единицы, то  $U \cap U^{-1}$  – симметричная окрестность единицы.

**26.Их** Из непрерывности умножения следует, что найдутся такие окрестности единицы  $V_1$  и  $V_2$ , что  $V_1 V_2 \subset U$ . Если  $V = V_1 \cap V_2$ , то  $VV \subset U$ .

**26.Кх** Пусть  $W$  – симметричная окрестность единицы, такая что  $W^3 \subset U$ . Выберем конечное покрытие  $C$  множествами вида  $W_1 = x_1 W, \dots, W_n = x_n W$ , где  $x_1, \dots, x_n \in C$ . Положим  $V = \bigcap (x_i W x_i^{-1})$ . Ясно, что  $V$  – окрестность единицы. Если  $x \in C$ , то найдется элемент  $w_i \in W$ , такой что  $x = x_i w_i$ . Следовательно,

$$x^{-1} V x = w_i^{-1} x_i^{-1} V x_i w_i \subset w_i^{-1} W w_i \subset W^3 \subset U.$$

**26.Лх** Если множество  $\{1\}$  является замкнутым, то все одноточечные подмножества этой топологической группы являются замкнутыми, таким образом,  $G$  удовлетворяет первой аксиоме отделимости, тогда  $\{1\}$  – замкнутое множество. Докажем, что в этом случае  $G$  хаусдорфова. Пусть  $g \neq 1$  и  $U$  – окрестность единицы, не содержащая элемент  $g$ . В силу 26.14х найдется симметричная окрестность  $V$  единицы, такая что  $V^2 \subset U$ . Докажите, что множества  $gV$  и  $V$  не пересекаются и выведите отсюда хаусдорфовость данной топологической группы.

**26.Мх**  $\Leftrightarrow$  См. 14.С.  $\Leftrightarrow$  Если единица совпадает с пересечением всех своих окрестностей, то всякий элемент группы есть пересечение своих окрестностей, следовательно, топологическая группа удовлетворяет первой аксиоме отделимости. В силу 26.Лх, она хаусдорфова.

**26.Рх** Рассмотрим открытое множество  $W$  и элемент  $g \in W$ . Выберем симметричную окрестность  $V$  единицы, такую что  $V^2 \subset W$ . Существует окрестность  $U \in \Gamma$  единицы, такая что  $U \subset V$ . Найдется точка  $a \in S$ , такая что  $a \in gU^{-1}$ . Тогда  $g \in aU$  и  $a \in gU^{-1} \subset gV^{-1} = gV$ . Значит,  $aU \subset aV \subset gV^2 \subset W$ .

**27.Вх** Следует из 26.15х.

**27.Дх** Это так, поскольку для всякого открытого в  $G$  множества  $U$ , множество  $UH$  (соответственно,  $HU$ ) также открыто в  $G$ .

**27.Ех** Пространство  $G/H$  удовлетворяют первой аксиоме отделимости, так как для всякого элемента  $g \in G$  множество  $gH$  замкнуто в  $G$ . Поскольку каждое открытое в  $G/H$  множество имеет вид  $\{gH \mid g \in U\}$  (для некоторого открытого в  $G$  множества  $U$ ), то достаточно проверить, что для всякой окрестности  $U$  единицы в группе  $G$  найдется окрестность  $V$  единицы, такая что  $\text{Cl}(VH) \subset UH$ . Пусть  $V$  – симметричная окрестность единицы, такая что  $V^2 \subset U$ , см. 26.14х. Если  $x \in \text{Cl} V H$ ,

то в окрестности  $Vx$  имеется элемент  $vh$ , где  $v \in V$  и  $h \in H$ . Значит существует элемент  $v' \in V$ , такой что  $v'x = vh$ . Следовательно  $x \in V^{-1}VH = V^2H \subset UH$ .

**27.Fx** Докажем, что если подгруппа  $H$  компактна, то проекция  $p: G \rightarrow G/H$  замкнута. Пусть множество  $F \subset G$  замкнуто и  $x \notin FH$ . В силу 26.Fx множество  $FH$  замкнуто, значит у точки  $x$  имеется окрестность  $U$ , не пересекающаяся с  $FH$ , следовательно, множества  $UH$  и  $FH$  не пересекаются. Тем самым мы нашли насыщенное открытое в  $G$  множество, не пересекающееся с насыщением замкнутого множества  $F$ , откуда и следует замкнутость проекции. Рассмотрим произвольное центрированное семейство замкнутых в  $G$  множеств. По доказанному их образы при проекции  $p$  образуют центрированное семейство замкнутых множеств, которое, в силу компактности  $G/H$  имеет непустое пересечение. Следовательно, найдется точка  $g \in G$ , такая что пересечения всех множеств исходного семейства с множеством  $gH$  образуют центрированную систему замкнутых множеств. В силу компактности  $gH$ , пересечение всех множеств этой системы непусто, значит, группа  $G$  компактна. Теперь докажем связность  $G$ . Пусть  $G = UV$ , где  $U$  и  $V$  – открыты в  $G$ , непусты и не пересекаются друг с другом. Из связности любого класса смежности  $gH$ ,  $g \in G$ , следует, что каждый из них содержится целиком в одном из открытых множеств,  $U$  либо  $V$ . Таким образом, группа  $G$  распадается в объединение двух открытых и насыщенных множеств, что противоречит связности пространства  $G/H$ .

**27.Gx** Рассуждение аналогично доказательству связности группы в утверждении 27.Fx.

**27.Hx** Это так, поскольку, если  $aHa^{-1} \subset H$ , то  $a\text{Cl}(H)a^{-1} = \text{Cl}(aHa^{-1}) \subset \text{Cl}(H)$ .

**27.Ix** Пусть  $C$  – компонента связности единицы. Как всякая компонента связности, множество  $C$  замкнуто. Так как множество  $C^{-1}$  связно и содержит единицу, то  $C^{-1} \subset C$ . Для всякого элемента  $g \in C$  множество  $gC$  связно и пересекается с  $C$ , поэтому  $gC \subset C$ . Следовательно  $C$  – подгруппа. Наконец, для любого  $g \in G$  множество  $gCg^{-1}$  связно и содержит единицу, значит  $gCg^{-1} \subset C$ , таким образом  $C$  – нормальная подгруппа.

**27.Jx** Пусть  $G$  – топологическая группа,  $H$  – ее нормальная подгруппа,  $a, b \in G$ . Рассмотрим в  $G/H$  произвольную окрестность класса смежности  $abH$ ; ее прообразом в группе  $G$  является открытое множество  $W$  состоящее из классов смежности подгруппы  $H$  и содержащее элемент



$ab$ , в частности,  $W$  – окрестность точки  $ab$ . Поскольку  $G$  является топологической группой, найдутся окрестности  $U$  и  $V$  точек  $a$  и  $b$ , соответственно, такие что  $UV \subset W$ . Тогда  $(UH)(VH) = (UV)H \subset WH$ , следовательно, произведение элементов факторгруппы определяет непрерывное отображение  $G/H \times G/H \rightarrow G/H$ . Докажите самостоятельно, что непрерывно и отображение  $G/H \times G/H : aH \rightarrow a^{-1}H$ .

**27.Kx** Это утверждение является частным случаем 27.Dx.

**27.Lx** Если набор  $\{U_\alpha\}$  является базой топологии группы  $G$  (или базой топологии в некоторой точке), то набор  $\{U_\alpha H\}$  есть база топологии в  $G/H$  (соответственно, база топологии в соответствующей точке факторпространства).

**27.Mx** Это утверждение является частным случаем 27.Ex.

**27.Nx**  $\Leftrightarrow$  Если  $H$  – открытая нормальная подгруппа, то все классы смежности также открыты, значит, каждое одноточечное подмножество  $G/H$  открыто.  $\Leftrightarrow$  Если единица в факторгруппе открыта, то по определению фактортопологии множество  $H$  открыто в  $G$ .

**27.Ox**  $\Leftrightarrow$  Очевидно.  $\Leftrightarrow$  Пусть  $f : G \rightarrow H$  – групповой гомоморфизм, непрерывный в единице,  $a \in G$  и  $b = f(a) \in H$ . Для произвольной окрестности  $U$  элемента  $b$  множество  $b^{-1}U$  является окрестностью единицы группы  $H$ . Значит, найдется окрестность  $V$  единицы группы  $G$ , такая что  $f(V) \subset b^{-1}U$ . Тогда множество  $aV$  – окрестность элемента  $a$  и  $f(aV) = f(a)f(V) = bf(V) \subset bb^{-1}U = U$ . Таким образом,  $f$  непрерывен в любой точке  $a \in G$ , т. е.  $f$  – гомоморфизм в смысле топологических групп.

**27.Px**  $\Leftrightarrow$  Пусть  $f : G \rightarrow H$  – открытый эпиморфизм. Для всякого открытого в  $G/\text{Ker } f$  множества  $U$  его образ  $\hat{f}(U) = f(p^{-1}(U))$  открыт (здесь  $p : G \rightarrow G/\text{Ker } f$  – проекция).  $\Leftrightarrow$  Если отображение  $\hat{f}$  открыто, то в силу 27.Dx,  $f$  открыто как композиция открытых отображений.

**27.Qx** Следует из 27.Px, 26.Lx и 16.X.

**27.Rx** Следует из 27.Px, поскольку, как нетрудно видеть, проекция  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi xi}$  – открытое отображение.

**27.Vx** В данном случае отображение  $A \times B \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$  является непрерывной биекцией из компактного пространства в хаусдорфово, следовательно, в силу 16.X, оно – гомеоморфизм.

**27.Wx** Отображение  $A \times B \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab$  является непрерывной биекцией. Докажем, что оно также и открыто. Пусть  $U \subset A$  и  $V \subset B$  – окрестности единиц,  $a \in A$  и  $b \in B$ . Множество  $UaVb = abU'V'$ , where  $U' = b^{-1}a^{-1}Uab$  and  $V' = b^{-1}Vb$ , содержит  $abW'$ , где  $W'$  – это содержащаяся в  $U'V'$  окрестность единицы.

**27.Xx** См. 24.Bx.

**27.Yx** Отображение  $\text{Тор } X \rightarrow \text{Тор } X : g \mapsto g^{-1}$  непрерывно, так как оно переводит предбазовые множества топологии в  $\text{Тор } X$  в предбазовые. Следовательно, утверждение будет следовать из 27.Yx.1.

**27.Yx.1** Достаточно проверить открытость прообраза любого элемента из предбазы топологии. Для предбазовых множеств вида  $W(C, U)$  это следует из утверждения 24.Px, в доказательстве которого было показано, что для любых элементов  $gh \in W(C, U)$  существует открытое множество  $U'$  с компактным замыканием, такое что  $h(C) \subset U'$  и  $g(\text{Cl } U') \subset U$ . В таком случае  $h \in W(C, U')$ ,  $g \in W(\text{Cl } U', U)$ , and  $gh \in \phi(W(\text{Cl } U', U) \times W(C, U')) \subset W(C, U)$ . Теперь рассмотрим предбазовое множество  $(W(C, U))^{-1}$  и сведем проверку открытости его прообраза к рассмотренному случаю. Действительно,  $gh \in (W(C, U))^{-1}$ , тогда  $h^{-1}g^{-1} \in W(C, U)$ . Выберем открытое множество  $U'$  с компактным замыканием так, чтобы  $g^{-1}(C) \subset U'$  и  $h^{-1}(\text{Cl } U') \subset U$ . Тогда  $g^{-1} \in W(C, U')$ ,  $h^{-1} \in W(\text{Cl } U', U)$ , следовательно  $h^{-1}g^{-1} \in \phi(W(\text{Cl } U', U) \times W(C, U')) \subset W(C, U)$ .

Заметим, что утверждение леммы справедливо также для обычной компактно-открытой топологии на множестве  $\text{Тор } X$ .

**28.Gx** Достаточно проверить открытость прообраза каждого элемента из предбазы топологии. Для предбазовых множеств вида это следует из утверждения 24.Px. Теперь пусть  $\phi(g) \in (W(C, U))^{-1}$ . Тогда  $\phi(g^{-1}) \in W(C, U)$ , следовательно найдется открытая окрестность  $V$  элемента  $g^{-1} \in G$ , такая что  $\phi(V) \subset W(C, U)$ . Значит  $V^{-1}$  – окрестность  $g$  в  $G$ , такая что  $\phi(V^{-1}) \subset (W(C, U))^{-1}$ . (Обратите внимание, что условия, наложенные на пространство  $X$  требовались исключительно для того, чтобы группа  $\text{Тор } X$  была топологической.)

**28.Ix** Проверим, что элемент  $1 \in G$  является изолированной точкой. Пусть  $V$  – окрестность единицы с компактным замыканием. Так как хаусдорфово локально компактное пространство регулярно, то найдется окрестность  $U$  единицы, такая что  $\text{Cl } U \subset V$ , в частности,  $\text{Cl } U$  – компактное множество. Для каждого из конечного набора элементов  $g_k \in G$ , таких что  $(g_k U) \cap V \neq \emptyset$  выберем точку  $x_k \in X$  таким образом, что  $g_k(x_k) \neq x_k$  и ее окрестность  $U_k$ , не содержащую точку  $g_k(x_k)$ . Убедитесь, что пересечение  $G \cap W(\text{Cl } U, V) \cap \bigcap W(x_k, U_k)$  является однотоочечным множеством, содержащим только единицу.

**28.Jx** Следует из 16.X.

**28.Kx** Пространство  $X/G$  компактно как непрерывный образ компактного пространства  $X$ . Чтобы доказать хаусдорфовость  $X/G$ , рассмотрим две различные орбиты  $G(x)$  и  $G(y)$ . В силу компактности орбиты  $G(y)$  найдутся непересекающиеся окрестности  $x \in U$  и  $V \supset G(y)$ .

В силу компактности орбиты  $G(x)$  существует конечный набор элементов  $g_k \in G$ , такой что множества  $\cup g_k U$  покрывают  $G(x)$ . Тогда множество  $\text{Cl}(\cup g_k U) = \cup \text{Cl} g_k U = \cup g_k \text{Cl} U$  не пересекается с  $G(y)$ , так как  $\text{Cl} U \cap G(y) = \emptyset$ . Следовательно  $X/G$  – хаусдорфово пространство.

**28.Мх** В силу 28.Nx достаточно доказать, что каноническое отображение  $f : G/G^x \rightarrow X$  является открытым. Пусть  $V$  – окрестность единицы с компактным замыканием, а окрестность  $U$  единицы такова, что  $\text{Cl} U \cdot \text{Cl} U \subset V$ . Поскольку в группе  $G$  имеется счетное всюду плотное множество, то существует последовательность элементов  $g_n \in G$ , такая что множества  $g_n U$  образуют открытое покрытие группы  $G$ . Осталось доказать, что по крайней мере одно из множеств  $f(g_n U) = g_n f(U) = g_n U(x)$  имеет внутреннюю точку. Предположим противное. Поскольку пространство  $X$  хаусдорфово и локально компактно, и каждое из множеств  $f(g_n \text{Cl} U)$  также является компактным, построим по индукции вложенную последовательность открытых множеств  $W_n \subset X$  с компактным замыканием, такую что множество  $W_n$  не пересекается с множествами  $g_k U x$  при всех  $k < n$ , а пересечение  $g_n U x \cap W_n$  замкнуто в  $W_n$ . В результате мы получим непустое множество  $\cap W_n$ , не пересекающееся с  $G(x)$ , что противоречит условию.

**28.Nx** Это так, поскольку каноническое отображение  $G/G^x \rightarrow X$  является непрерывной биекцией. Поэтому оно – гомеоморфизм, тогда оно открыто.

---

Часть 2

Элементы  
алгебраической  
топологии

Эту часть книги можно рассматривать в качестве введения в алгебраическую топологию – раздела топологии, в котором топологические задачи связываются с алгебраическими. Эти связи используются в обоих направлениях, однако сведение топологических задач к алгебре на первых порах оказывается полезнее, поскольку алгебра обычно легче.

Связи обычно устанавливаются согласно следующей схеме. Изобретается конструкция, которая по всякому топологическому пространству  $X$  сооружает некоторый алгебраический объект  $A(X)$ . Это может быть группа, кольцо, пространство с квадратичной формой и т. п. Сопутствующая конструкция по всякому непрерывному отображению  $f : X \rightarrow Y$  создаёт гомоморфизм  $A(f) : A(X) \rightarrow A(Y)$ . Эти конструкции должны удовлетворять некоторым естественным условиям, которые позволили бы связывать топологические явления с их алгебраическими образами.

Существует бесчисленное множество конструкций подобного рода. В этой части мы будем заниматься почти исключительно одной из них – самой первой с точки зрения хронологии математики. Изобрёл её Анри Пуанкаре в конце XIX века.

# Гомотопии и фундаментальная группа

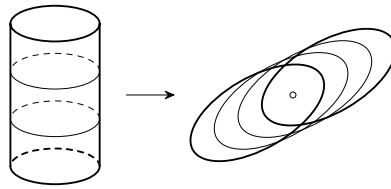
## 29. Гомотопии

### 29'1. Непрерывные деформации отображений

**29.A.** Возможно ли непрерывной деформацией превратить:

- (1) тождественное отображение  $\text{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  в постоянное отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto 0$ ;
- (2) тождественное отображение  $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$  в симметрию  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto -z$  (здесь  $z$  – комплексное число);
- (3) тождественное отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  в постоянное отображение  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto 1$ ;
- (4) тождественное отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  в двукратное обёртывание  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2$  (здесь окружность  $S^1$  отождествляется с множеством  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ );
- (5) включение  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  в постоянное отображение;
- (6) включение  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$  в постоянное отображение?

**29.B. Загадка.** Какой смысл вы вкладывали в слова “непрерывная деформация”, решая предыдущую задачу?



Этот параграф посвящен понятию *гомотопии*, которое как раз и формализует наши интуитивные представления о непрерывной деформации отображения.

### 29'2. Гомотопия как отображение и как семейство отображений

Пусть  $f, g$  – два непрерывных отображения топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$  и пусть  $H : X \times I \rightarrow Y$  – непрерывное отображение, такое что  $H(x, 0) = f(x)$  и  $H(x, 1) = g(x)$  для всех  $x \in X$ . Тогда отображения  $f$  и  $g$  называются *гомотопными*, а  $H$  называется *гомотопией* между  $f$  и  $g$ .

Для  $x \in X$  и  $t \in I$  обозначим  $H(x, t)$  через  $h_t(x)$ . За подобным изменением обозначений стоит изменение точки зрения на  $H$ . Действительно, для фиксированного  $t$  формула  $x \mapsto h_t(x)$  определяет отображение  $h_t : X \rightarrow Y$ , и  $H$  теперь предстаёт как семейство отображений  $h_t$ , занумерованных числами  $t \in I$ .

**29.C.** Каждое из отображений  $h_t$  непрерывно.

**29.D.** Следует ли из непрерывности отображений  $h_t$  непрерывность отображения  $H$ ?

Условия  $H(x, 0) = f(x)$  и  $H(x, 1) = g(x)$  в исходном определении гомотопии могут быть записаны как  $h_0 = f$  и  $h_1 = g$ . Тем самым гомотопию между  $f$  и  $g$  можно рассматривать и как *непрерывное семейство непрерывных отображений*, соединяющее  $f$  и  $g$ . Подробнее мы поговорим об этом в 29'10.

### 29'3. Гомотопность как отношение

**29.E.** Гомотопность является отношением эквивалентности.

**29.E.1.** Для любого непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  отображение  $H : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto x$  является гомотопией между  $f$  и  $f$ .

**29.E.2.** Если  $H$  – гомотопия между  $f$  и  $g$ , то отображение  $H' : X \times I \rightarrow Y : (x, t) \mapsto H(x, 1 - t)$  является гомотопией между  $g$  и  $f$ .

**29.E.3.** Пусть  $H$  – гомотопия между  $f$  и  $f'$ , а  $H'$  – гомотопия между  $f'$  и  $f''$ . Тогда отображение  $H''$ , определенное формулой

$$H''(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{при } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H'(x, 2t - 1) & \text{при } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

является гомотопией между  $f$  и  $f''$ .

Гомотопность, будучи отношением эквивалентности, определяет разбиение множества  $\mathcal{C}(X, Y)$  всевозможных непрерывных отображений пространства  $X$  в пространство  $Y$  на классы эквивалентности. Они называются *гомотопическими классами* или *классами гомотопных отображений*. Множество гомотопических классов отображений  $X \rightarrow Y$  обозначается через  $\pi(X, Y)$  (встречаются и другие обозначения, например –  $[X, Y]$ ). Если отображение гомотопно постоянному, то будем говорить, что оно *гомотопно нулю*.

**29.1.** Докажите, что для любого  $X$  множество  $\pi(X, I)$  состоит из одного элемента.

**29.2.** Докажите, что два постоянных отображения  $Z \rightarrow X$  гомотопны, тогда их образы лежат в одной компоненте линейной связности пространства  $X$ .

**29.3.** Докажите, что число элементов множества  $\pi(I, Y)$  совпадает с числом компонент линейной связности пространства  $Y$ .

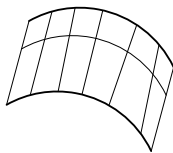
#### 29'4. Прямолинейная гомотопия

**29.F.** Любые два непрерывных отображения  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  гомотопны.

**29.G.** Решите предыдущую задачу, показав, что формула

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

задает гомотопию между отображениями  $f$  и  $g$ .



Гомотопия, построенная в 29.G, называется *прямолинейной гомотопией*.

**29.H.** Два любых непрерывных отображения произвольного пространства в выпуклое подмножество евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  гомотопны.

#### 29'5. Отображения в звёздные множества

Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  называется *звёздным*, если существует такая точка  $a \in A$ , что для любой точки  $x \in A$  отрезок  $[a; x]$  между  $a$  и  $x$  содержится в  $A$ . Будем называть точку  $a$  центром звезды (конечно, центр звезды определен неоднозначно).

**29.4.** Докажите, что любые два непрерывных отображения в звёздное множество гомотопны.



**29'6. Отображения из звездных множеств**

**29.5.** Докажите, что всякое непрерывное отображение звездного множества  $C \subset \mathbb{R}^n$  в произвольное пространство гомотопно постоянному отображению.

**29.6.** Найдите условие (формулируемое в терминах известных топологических свойств пространства  $X$ ), при выполнении которого любые два непрерывных отображения звездного множества в пространство  $X$  гомотопны.

**29'7. Простенькие гомотопии**

**29.7.** Докажите, что всякое несюръективное непрерывное отображение произвольного топологического пространства в  $S^n$  гомотопно нулю.

**29.8.** Докажите, что два любых отображения одноточечного пространства в  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  при  $n > 1$  гомотопны.

**29.9.** Найдите два негомотопных отображения одноточечного пространства в  $\mathbb{R} \setminus 0$ .

**29.10.** Вычислите, при различных значениях  $m$ ,  $n$  и  $k$ , число гомотопических классов отображений

$$\{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$

предполагая, что топология в множестве  $\{1, 2, \dots, m\}$  дискретна.

**29.11.** Пусть  $X$  – произвольное топологическое пространство,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  – непрерывные отображения. Докажите, что если  $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$  для любого  $x \in X$ , то отображения  $f$  и  $g$  гомотопны.

**29.12.** Докажите, что для любых двух многочленов  $p$  и  $q$  над  $\mathbb{C}$  одной и той же степени существует такое число  $r > 0$ , что для всякого  $R > r$  формулы  $z \mapsto p(z)$  и  $z \mapsto q(z)$  определяют гомотопные отображения  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$ .

**29.13.** Пусть  $X$  – произвольное топологическое пространство. Если непрерывные отображения  $f, g : X \rightarrow S^n$  таковы, что  $|f(x) - g(x)| < 2$  для всякого  $x \in X$ , то  $f$  гомотопно  $g$ .

**29.14.** Пусть  $f : S^n \rightarrow S^n$  – непрерывное отображение. Докажите, что если оно не имеет неподвижных точек, т. е. если  $f(x) \neq x$  для любой точки  $x \in S^n$ , то  $f$  гомотопна центральной симметрии  $x \mapsto -x$ .

**29'8. Два естественных свойства гомотопий**

**29.I.** Если  $h : A \rightarrow X$ ,  $f, f' : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow B$  – непрерывные отображения и  $F : X \times I \rightarrow Y$  – гомотопия между  $f$  и  $f'$ , то  $g \circ F \circ (h \times \text{id}_I)$  – гомотопия между  $g \circ f \circ h$  и  $g \circ f' \circ h : A \rightarrow B$ .

**29.J. Загадка.** В условиях предыдущей задачи **29.I** определите естественным образом отображение  $\pi(X, Y) \rightarrow \pi(A, B)$  и выпишите естественные свойства этой конструкции.

**29.K.** Непрерывные отображения  $f, g : X \rightarrow Y \times Z$  гомотопны, тогда  $\text{pr}_Y \circ f$  гомотопно  $\text{pr}_Y \circ g$  и  $\text{pr}_Z \circ f$  гомотопно  $\text{pr}_Z \circ g$ . (Здесь  $\text{pr}_Y : Y \times Z \rightarrow Y$  и  $\text{pr}_Z : Y \times Z \rightarrow Z$  – проекции.)

### 29'9. Связанные гомотопии

Пусть  $A \subset X$ . Говорят, что гомотопия  $H : X \times I \rightarrow Y$  *связана на  $A$*  или, короче, что это  *$A$ -гомотопия*, если  $H(x, t) = H(x, 0)$  для всех  $x \in A$ ,  $t \in I$ . Образования, которые можно соединить  $A$ -гомотопией, называются  *$A$ -гомотопными*.

Конечно,  $A$ -гомотопные отображения обязаны совпадать на множестве  $A$ . Если хотят подчеркнуть, что никакого условия связанности не предполагается, то говорят, что рассматриваемая гомотопия является *свободной*. Если же мы, наоборот, хотим подчеркнуть, что рассматривается связанная гомотопия, то говорим, что она является *относительной*.<sup>1</sup>

**29.L.** Так же как и для обычной (свободной) гомотопии, отношение  $A$ -гомотопности отображений есть отношение эквивалентности.

Классы, на которые отношение  $A$ -гомотопности разбивает множество непрерывных отображений  $X \rightarrow Y$ , совпадающих на  $A$  с отображением  $f : A \rightarrow Y$ , называются  *$A$ -гомотопическими* или *относительными* классами непрерывных продолжений отображения  $f$  на  $X$ .

**29.M.** Для каких  $A \subset X$  прямолинейная гомотопия между непрерывными отображениями  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  связана на  $A$ ?

### 29'10. Гомотопии и пути

Напомним, что *путём* в пространстве  $X$  называется любое непрерывное отображение  $I \rightarrow X$ . (См. 13.)

**29.N. Загадка.** В каком смысле всякий путь является гомотопией?

**29.O. Загадка.** В каком смысле всякая гомотопия состоит из путей?

**29.P. Загадка.** В каком смысле всякая гомотопия является путем?

Напомним, что *компактно-открытой топологией* в множестве  $\mathcal{C}(X, Y)$  называется топология, предбазой которой являются всевозможные множества вида  $\{\varphi \in \mathcal{C}(X, Y) \mid \varphi(K) \subset U\}$  для компактных множеств  $K \subset X$  и открытых множеств  $U \subset Y$  (см. 24х).

**29.Ax.** Всякая гомотопия  $h_t : X \rightarrow Y$  определяет путь  $u : t \mapsto h_t$  в пространстве  $\mathcal{C}(X, Y)$ , снабженном компактно-открытой топологией.

**29.Bx.** Если пространство  $X$  локально компактно и хаусдорфово, то всякий путь в  $\mathcal{C}(X, Y)$  (с компактно-открытой топологией) определяет некоторую гомотопию.

---

<sup>1</sup>Предостережение: существует похожее понятие с тем же названием – относительная гомотопия, однако отличающееся от введенного выше.

### 29'11. Гомотопии путей

**29.Q.** Два пути в пространстве  $X$  свободно гомотопны, когда их образы лежат в одной и той же компоненте линейной связности этого пространства.

Результат этой задачи показывает, что понятие свободной гомотопии путей не представляет интереса. С другой стороны, одна из разновидностей относительной гомотопии путей играет очень важную роль. Это  $\{0, 1\}$ -гомотопия. В связи с этим традиционно под *гомотопией путей* всегда понимают гомотопию, связанную на концах отрезка  $I$  (т. е. на множестве  $\{0, 1\}$ ).

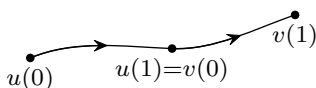
**Обозначение:**  $\{0, 1\}$ -гомотопический класс пути  $s$  (в дальнейшем просто – гомотопический класс) обозначается через  $[s]$ .

## 30. Гомотопические свойства умножения путей

### 30'1. Умножение гомотопических классов путей

Напомним (см. 13), что пути  $u$  и  $v$  в пространстве  $X$  можно перемножить, если начало  $v(0)$  пути  $v$  совпадает с концом  $u(1)$  пути  $u$ . Произведение  $uv$  определено формулой

$$uv(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{при } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ v(2t - 1) & \text{при } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



**30.A.** Если путь  $u$  гомотопен пути  $u'$ , путь  $v$  гомотопен пути  $v'$  и существует произведение  $uv$ , то существует произведение  $u'v'$ , и оно гомотопно произведению  $uv$ .

Определим произведение гомотопических классов путей  $u$  и  $v$  как гомотопический класс пути  $uv$ . Таким образом, произведение  $[u][v]$  определено тогда же, когда определено и произведение  $uv$ , и  $[u][v] = [uv]$ . Это определение – из тех, что требуют доказательства.

**30.B.** Произведение гомотопических классов путей определено корректно, т. е. если  $[u] = [u']$  и  $[v] = [v']$ , то  $[uv] = [u'v']$ .<sup>2</sup>

### 30'2. Ассоциативность

**30.C.** Ассоциативно ли умножение путей?

Конечно, этот вопрос стоит сформулировать более точно.

**30.D.** Пусть  $u$ ,  $v$  и  $w$  – пути в некотором пространстве, для которых определены произведения  $uv$  и  $vw$  (т. е.  $u(1) = v(0)$  и  $v(1) = w(0)$ ). Всегда ли верно, что  $(uv)w = u(vw)$ ?

**30.1.** Докажите, что для путей в хаусдорфовом пространстве равенство  $(uv)w = u(vw)$  имеет место, когда каждый из этих путей является постоянным отображением.

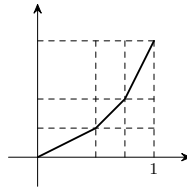
**30.2. Загадка.** Найдите непостоянные пути  $u$ ,  $v$  и  $w$  в антидискретном пространстве, такие что  $(uv)w = u(vw)$ .

**30.E.** Умножение гомотопических классов путей ассоциативно.

<sup>2</sup>Конечно, в том случае, когда конечная точка первого пути совпадает с начальной точкой второго.

**30.E.1.** Переформулируйте теорему 30.E в терминах путей и их гомотопий.

**30.E.2.** Найдите такое отображение  $\varphi : I \rightarrow I$ , что если  $u, v$  и  $w$  — это пути, причем  $u(1) = v(0)$  и  $v(1) = w(0)$ , то  $((uv)w) \circ \varphi = u(vw)$ .



**30.E.3.** Всякий путь в  $I$ , начинающийся в нуле и заканчивающийся в единице, гомотопен пути  $\text{id} : I \rightarrow I$ .

**30.E.4.** Пусть  $u, v$  и  $w$  — такие пути в некотором пространстве, что произведения  $uv$  и  $vw$  определены (т. е.  $u(1) = v(0)$  и  $v(1) = w(0)$ ). Тогда путь  $(uv)w$  гомотопен пути  $u(vw)$ .

Если вы хотите понять смысл теоремы 30.E, то нужно прежде всего осознать, что пути  $(uv)w$  и  $u(vw)$  имеют одну и ту же траекторию, а различаются лишь “расписанием движения” по ней. Поэтому для того, чтобы найти гомотопию между ними, нужно лишь найти непрерывный способ перехода от расписания одного из них на расписание другого. Предложенные выше леммы дают формальный способ такого перехода, но того же эффекта можно добиться и многими другими способами.

**30.3.** Выпишите явные формулы для гомотопии  $H$  между путями  $(uv)w$  и  $u(vw)$ .

### 30'3. Единица

Для произвольной точки  $a \in X$  обозначим через  $e_a$  путь  $I \rightarrow X : t \mapsto a$ .

**30.F.** Является ли путь  $e_a$  единицей (с точки зрения произведения путей)?

Раскроем смысл этого вопроса:

**30.G.** Пусть  $u$  — путь, начинающийся в точке  $a$ , т. е.  $u(0) = a$ . Верно ли, что  $e_a u = u$ ? Аналогично, верно ли, что если  $v(1) = a$ , то  $v e_a = v$ ?

**30.4.** Докажите, что если  $e_a u = u$  и пространство удовлетворяет первой аксиоме отделимости, то  $u = e_a$ .

**30.H.** Гомотопический класс  $[e_a]$  пути  $e_a$  является единицей относительно умножения гомотопических классов путей.

**30'4. Обратные элементы**

Напомним, что для всякого пути  $u$  обратным к нему называется путь  $u^{-1}$ , определенный формулой  $u^{-1}(t) = u(1 - t)$  (см. 13).

**30.I.** Является ли обратный путь обратным в смысле умножения путей?

Другими словами:

**30.J.** Верно ли, что если путь  $u$  начинается в точке  $a$  и заканчивается в точке  $b$ , то  $uu^{-1} = e_a$  и  $u^{-1}u = e_b$ ?

**30.5.** Докажите, что если  $uu^{-1} = e_a$ , то  $u = e_a$ .

**30.K.** Для всякого пути  $v$  гомотопический класс обратного пути  $v^{-1}$  является обратным к гомотопическому классу пути  $v$ :  $[v]^{-1} = [v^{-1}]$ .

**30.K.1.** Найдите такое отображение  $\varphi : I \rightarrow I$ , что  $vv^{-1} = v \circ \varphi$  для всякого пути  $v$ .

**30.K.2.** Всякий путь в  $I$ , начинающийся и заканчивающийся в нуле, гомотопен постоянному пути  $e_0 : I \rightarrow I$ .

Мы видим, что хотя с алгебраической точки зрения операция умножения путей не обладает обычными свойствами, такими как ассоциативность и т. п., она определяет в множестве гомотопических классов путей операцию, которая обладает привычными алгебраическими свойствами. Единственный недостаток этой операции в том, что она определена не для любых двух классов путей.

**30.L. Загадка.** Какие подмножества множества гомотопических классов путей являются группами относительно перемножения, изученного выше?

## 31. Фундаментальная группа

### 31'1. Определение фундаментальной группы

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $x_0 \in X$ . Путь в  $X$ , который начинается и заканчивается в точке  $x_0$ , назовем *петлей* пространства  $X$  в  $x_0$ . Обозначим через  $\Omega_1(X, x_0)$  множество петель  $X$  в точке  $x_0$ , а через  $\pi_1(X, x_0)$  – множество гомотопических классов таких петель. В обоих множествах  $\Omega_1(X, x_0)$  и  $\pi_1(X, x_0)$  имеется операция умножения.

**31.A.** Для любого топологического пространства  $X$  и любой его точки  $x_0$  множество  $\pi_1(X, x_0)$  гомотопических классов петель пространства  $X$  в точке  $x_0$  с введенной в 30 операции умножения гомотопических классов является группой.

Группа  $\pi_1(X, x_0)$  называется *фундаментальной группой* пространства  $X$  в точке  $x_0$ . Она была введена Анри Пуанкаре, поэтому иногда ее называют *группой Пуанкаре*. Буква  $\pi$  в обозначении – тоже в честь Пуанкаре.

### 31'2. Откуда индекс 1?

Нижний индекс 1 в обозначении  $\pi_1(X, x_0)$  появился много позже чем буква  $\pi$ . Он связан с еще одним названием фундаментальной группы: *первая* (или *одномерная*) *гомотопическая группа*. Имеется бесконечная последовательность групп  $\pi_r(X, x_0)$  с  $r = 1, 2, \dots$ , и фундаментальная группа – первая из них. Многомерные гомотопические группы были введены Витольдом Гуревичем в 1935 г., более чем через 30 лет после определения фундаментальной группы. Грубо говоря, общее определение  $\pi_r(X, x_0)$  получается из определения  $\pi_1(X, x_0)$  посредством повсеместной замены отрезка  $I$  на куб  $I^r$ .

**31.B. Загадка.** Как можно обобщить все задачи этого параграфа так, чтобы в них повсюду отрезок  $I$  был бы заменён кубом  $I^r$ ?

Имеется ещё и так называемая “нульмерная гомотопическая группа”  $\pi_0(X, x_0)$ , которая, как правило, группой не является. Это – множество компонент линейной связности пространства  $X$ . Хотя в множестве  $\pi_0(X, x_0)$  нет никакой естественной операции умножения (если только пространство  $X$  не снабжено дополнительной алгебраической структурой), однако в нём имеется единица: так называют естественный выделенный элемент – компоненту линейной связности пространства  $X$ , содержащую точку  $x_0$ .

### 31'3. Круговые петли

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $x_0 \in X$ . Непрерывное отображение  $l: S^1 \rightarrow X$ , такое что  $l(1) = x_0$ , называется *круговой петлей* в  $x_0$ . Свяжем с каждой такой круговой петлей  $l$  определенную выше петлю пространства  $X$  в той же точке, взяв композицию  $l$  с экспоненциальным отображением  $I \rightarrow S^1: t \mapsto e^{2\pi it}$ .<sup>3</sup>

**31.C.** Всякая петля может быть получена таким образом из некоторой круговой петли.

Круговые петли называются *гомотопными*, если они 1-гомотопны (т. е. если гомотопия между ними является связанной в точке  $1 \in S^1$ ). Гомотопия круговых петель, не связанная в точке 1, называется *свободной*.

**31.D.** Круговые петли гомотопны, тогда гомотопны соответствующие им обычные петли.

**31.1.** Какие свободные гомотопии путей соответствуют свободным гомотопиям круговых петель?

**31.2.** Опишите операцию над круговыми петлями, соответствующую умножению путей.

**31.3.** Пусть  $U$  и  $V$  – круговые петли с общей начальной точкой  $U(1) = V(1)$ , отвечающие петлям  $u$  и  $v$ . Докажите, что круговая петля, определяемая формулой

$$z \mapsto \begin{cases} U(z^2) & \text{при } \operatorname{Im} z \geq 0 \\ V(z^2) & \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0, \end{cases}$$

отвечает произведению петель  $u$  и  $v$ .

**31.4.** Как построить фундаментальную группу, отправляясь от круговых петель?

### 31'4. Самые первые вычисления

**31.E.** Группа  $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$  тривиальна (т. е. состоит из одного элемента.)

**31.F.** Обобщите задачу 31.E на случаи, описанные в задачах 29.H и 29.4.

**31.5.** Вычислите фундаментальную группу антидискретного пространства.

**31.6.** Вычислите фундаментальную группу факторпространства круга  $D^2$ , полученного в результате отождествления каждой точки  $x \in D^2$  с точкой  $-x$ .

**31.7.** Докажите, что линейно связное двуточечное пространство односвязно.

**31.G.** При  $n \geq 2$  группа  $\pi_1(S^n, (1, 0, \dots, 0))$  тривиальна.

---

<sup>3</sup>Напомним, что  $S^1$  рассматривается как подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , которая, в свою очередь, канонически отождествляется с множеством  $\mathbb{C}$  комплексных чисел. Так что  $1 \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .



Независимо от того, решили Вы задачу 31.G или нет, мы советуем решить задачи 31.G.1 и 31.G.3, которые намечают подход к решению задачи 31.G, предупреждают о естественной ошибке и подготавливают важный инструмент для дальнейших вычислений фундаментальных групп.

**31.G.1.** Пусть  $n \geq 2$ . Докажите, что всякая петля  $u : I \rightarrow S^n$ , образ которой не заполняет сферу  $S^n$  целиком (т. е.  $s(I) \neq S^n$ ), гомотопна постоянной петле. (Ср. 29.7.)

Предостережение: для любого  $n$  существуют петли, заполняющие  $S^n$ . См. 9.Ох.

**31.G.2.** Может ли петля, заполняющая всю сферу  $S^2$ , быть гомотопной нулю?

**31.G.3 Следствие леммы Лебега (см. 16.V).** Пусть  $u : I \rightarrow X$  — путь и  $\Gamma$  — открытое покрытие пространства  $X$ . Существует последовательность точек  $a_1, \dots, a_N \in I$ , где  $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$ , такая что для всякого  $i$  образ  $u([a_i, a_{i+1}])$  содержится в некотором элементе покрытия  $\Gamma$ .

**31.G.4.** Пусть  $n \geq 2$ . Докажите, что для любого пути  $u : I \rightarrow S^n$  существует такое разбиение отрезка  $I$  на конечное число отрезков, что сужение пути  $u$  на каждый из них связано гомотопно (относительно множества концевых точек этих отрезков) пути, образ которого нигде не плотен на сфере.

**31.G.5.** Пусть  $n \geq 2$ . Докажите, что всякая петля в  $S^n$  гомотопна петле, не заполняющей эту сферу целиком.

**31.G.6.** 1) Выведите 31.G из 31.G.1 и 31.G.5. 2) Укажите все моменты полученного таким образом решения задачи 31.G, в которых использовалось условие  $n \geq 2$ .

### 31'5. Фундаментальная группа произведения

**31.H.** Фундаментальная группа произведения топологических пространств канонически изоморфна произведению фундаментальных групп сомножителей:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**31.8.** Рассмотрим петлю  $u : I \rightarrow X$  в точке  $x_0$ , петлю  $v : I \rightarrow Y$  в точке  $y_0$  и петлю  $w = u \times v : I \rightarrow X \times Y$ . Введем петли  $u' : I \rightarrow X \times Y : t \mapsto (u(t), y_0)$  и  $v' : I \rightarrow X \times Y : t \mapsto (x_0, v(t))$ . Докажите, что  $u'v' \sim w \sim v'u'$ .

**31.9.** Докажите, что при  $n \geq 3$  группа  $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus 0, (1, 0, \dots, 0))$  тривиальна.

### 31'6. Односвязность

Непустое топологическое пространство  $X$  называется *односвязным*, если оно линейно связно и всякая петля в нем гомотопна нулю. Таким образом, линейно связное пространство  $X$  называется односвязным, если для всякой его точки  $x \in X$  фундаментальная группа  $\pi_1(X, x)$  тривиальна.

**31.1.** Пусть  $X$  – линейно связное топологическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) пространство  $X$  односвязно;
- (2) всякое непрерывное отображение  $f : S^1 \rightarrow X$  (свободно) гомотопно нулю;
- (3) всякое непрерывное отображение  $f : S^1 \rightarrow X$  может быть продолжено до непрерывного отображения  $D^2 \rightarrow X$ ;
- (4) всякие два пути  $u_1, u_2 : I \rightarrow X$ , соединяющие одни и те же точки  $x_0$  и  $x_1$ , гомотопны друг другу.

Теорема 31.1 тесно связана со следующей теоремой 31.J. При этом, поскольку в теореме 31.J речь идёт не обо всех петлях, а об индивидуальной петле, она применима в большем круге ситуаций.

**31.J.** Пусть  $s : I \rightarrow X$  – петля в топологическом пространстве  $X$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) петля  $s$  гомотопна нулю;
- (2) отображение  $f : S^1 \rightarrow X : e^{2\pi it} \mapsto s(t)$ , свободно гомотопно нулю;
- (3) отображение  $f : S^1 \rightarrow X : e^{2\pi it} \mapsto s(t)$ , может быть продолжено до непрерывного отображения  $D^2 \rightarrow X$ ;
- (4) пути  $s_{\pm} : I \rightarrow X : t \mapsto f(e^{\pm \pi it})$  гомотопны друг другу.

**31.J.1. Загадка.** Доказательство эквивалентности утверждений (a)–(d) требует доказательства по меньшей мере 4 импликаций. Какие импликации вы выберете для наиболее экономного доказательства теоремы 31.J?

**31.J.2.** Следует ли из гомотопности круговых петель их свободная гомотопность?

**31.J.3.** Существует факторотображение гомотопии между некоторым отображением окружности и постоянным отображением окружности, у которого отображаемое пространство гомеоморфно кругу.

**31.J.4.** Переформулируйте задачу построения гомотопии между путями  $s_+$  и  $s_-$ , как задачу продолжения некоторого непрерывного отображения контура квадрата на его внутренность.

**31.J.5.** Помогает ли решению задачи продолжения, сформулированной в результате решения задачи 31.J.4, продолжимость круговой петли  $f : S^1 \rightarrow X$ , где  $f(e^{2\pi it}) = s(t)$ , до непрерывного отображения круга?

**31.10.** Какие из следующих пространств являются односвязными:

- |                                  |                                  |                      |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------|
| (a) дискретное пространство;     | (b) антидискретное пространство; | (c) $\mathbb{R}^n$ ; |
| (d) выпуклое множество;          | (e) звездное множество;          | (f) $S^n$ ;          |
| (g) $\mathbb{R}^n \setminus 0$ ? |                                  |                      |

**31.11.** Докажите, что топологическое пространство, представимое в виде объединения двух открытых односвязных множеств, пересечение которых линейно связно, само является односвязным.

**31.12.** Покажите, что требования открытости множеств в предыдущей задаче 31.11 существенны.

**31.13\*.** Пусть множества  $U$  и  $V$  открыты в пространстве  $X$ . Докажите, что если множества  $U \cup V$  и  $U \cap V$  односвязны, то и сами  $U$  и  $V$  односвязны.

### 31'7х. Фундаментальная группа группы топологической

Пусть  $G$  – топологическая группа. Определим для любых петель  $u, v : I \rightarrow G$  начинающихся в единице  $1 \in G$  петлю  $u \odot v : I \rightarrow G$  формулой  $(u \odot v)(s) = u(s) \cdot v(s)$ , где  $\cdot$  обозначает групповую операцию в  $G$ .

**31.Ах.** Докажите, что множество  $\Omega(G, 1)$  всех петель в  $G$ , начинающихся в 1, с операцией  $\odot$  является группой.

**31.Вх.** Докажите, что операция  $\odot$  в  $\Omega(G, 1)$  определяет групповую операцию в  $\pi_1(G, 1)$  и что эта операция совпадает со стандартной групповой операцией (определённой перемножением путей; ср 31.8).

**31.Вх.1.** Для петель  $u, v : I \rightarrow G$  начинающихся в 1, найдите  $(ue_1) \odot (e_1v)$ .

**31.Сх.** Фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

### 31'8х. Высшие гомотопические группы

Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $x_0 \in X$ . Непрерывное отображение  $I^r \rightarrow X$ , отображающее границу  $\partial I^r$  куба  $I^r$  в  $x_0$ , называется  $r$ -мерным сфероидом пространства  $X$  в точке  $x_0$ . Два  $r$ -мерных сфероидов называются *гомотопными*, если они  $\partial I^r$ -гомотопны. Произведение  $uv$  сфероидов  $u$  и  $v$  размерности  $r \geq 1$  определяется формулой

$$uv(t_1, t_2, \dots, t_r) = \begin{cases} u(2t_1, t_2, \dots, t_r) & \text{if } t_1 \in [0; \frac{1}{2}], \\ v(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_r) & \text{if } t_1 \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Обозначим через  $\Omega_r(X, x_0)$  множество  $r$ -мерных сфероидов пространства  $X$  в точке  $x_0$ . Множество гомотопических классов  $r$ -мерных сфероидов пространства  $X$  в точке  $x_0$  называется  $r$ -й (или  $r$ -мерной) *группой гомотопий* или *гомотопической группой*  $\pi_r(X, x_0)$  этого пространства в  $x_0$ . Произведение сфероидов индуцирует произведение в множестве  $\pi_r(X, x_0)$  их гомотопических классов, превращая  $\pi_r(X, x_0)$  в группу.

**31.Дх.** Найдите  $\pi_r(\mathbb{R}^n, 0)$ .

**31.Ех.** При  $r \geq 2$  группа  $\pi_r(X, x_0)$  абелева для любых  $X$  и  $x_0$ .

**31.Фх. Загадка.** Для всякой пары  $X, x_0$  и любого числа  $r \geq 2$  группа  $\pi_r(X, x_0)$  является фундаментальной группой некоторого вспомогательного пространства. Какого?

Аналогично тому, как это было описано в 31'3, высшие гомотопические группы можно построить не из гомотопических классов отображений  $(I^r, \partial I^r) \rightarrow (X, x_0)$ , но как

$$\pi(S^r, (1, 0, \dots, 0); X, x_0).$$

Еще один стандартный путь их построения заключается в определении  $\pi_r(X, x_0)$  как  $\pi(D^r, \partial D^r; X, x_0)$ .

**31.Гх.** Постройте естественные биекции  $\pi(I^r, \partial I^r; X, x_0) \rightarrow \pi(D^r, \partial D^r; X, x_0) \rightarrow \pi(S^r, (1, 0, \dots, 0); X, x_0)$ .

**31.Нх.** Докажите следующее обобщение теоремы 31.Н:

$$\pi_r(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_r(X, x_0) \times \pi_r(Y, y_0).$$

**31.Их.** Сформулируйте и решите аналоги задач 31.Ах и 31.Вх для высших гомотопических групп и  $\pi_0(G, 1)$ .

## 32. Роль отмеченной точки

### 32'1. Предварительное описание роли отмеченной точки

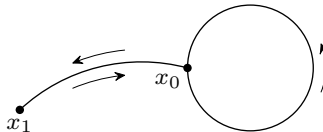
В одних ситуациях выбор отмеченной точки ни на что не влияет, в других – его роль очевидна, в третьих – это очень деликатная тема. В этом параграфе нам предстоит разобраться во всех нюансах, связанных с отмеченной точкой, и мы начнём с предварительных формулировок, описывающих предмет в целом, но без технически лишних деталей. Грубо говоря, выбор отмеченной точки влияет на фундаментальную группу следующим образом.

- Если мы изменяем отмеченную точку, оставаясь в пределах одной компоненты линейной связности, то фундаментальная группа остается в одном и том же классе изоморфных групп.
- Однако, если фундаментальная группа не коммутативна, невозможно найти естественного изоморфизма между фундаментальными группами с разными отмеченными точками, даже если они лежат в одной и той же компоненте линейной связности.
- Если же отмеченные точки лежат в разных компонентах линейной связности, то соответствующие фундаментальные группы вообще никак не связаны друг с другом.

В этом параграфе всё это будет доказано. Доказательство содержит полезные конструкции, значение которых выходит далеко за рамки исходного вопроса о роли отмеченной точки.

### 32'2. Перенос вдоль пути

Пусть  $x_0$  и  $x_1$  – точки топологического пространства  $X$ , а  $s$  – путь, соединяющий  $x_0$  с  $x_1$ . Обозначим гомотопический класс пути  $s$  через  $\sigma$ . Определим отображение  $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  формулой  $T_s(\alpha) = \sigma^{-1}\alpha\sigma$  (см. 30.K).



**32.1.** Для любой петли  $a : I \rightarrow X$ , представляющей элемент  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ , и всякого пути  $s : I \rightarrow X$  с  $s(0) = x_0$  существует свободная гомотопия  $H : I \times I \rightarrow X$  между  $a$  и петлей, представляющей элемент  $T_s(\alpha)$ , такая что  $H(0, t) = H(1, t) = s(t)$ ,  $t \in I$ .

**32.2.** Пусть петли  $a, b : I \rightarrow X$  гомотопны посредством такой гомотопии  $H : I \times I \rightarrow X$ , что  $H(0, t) = H(1, t)$  (т. е.  $H$  является свободной гомотопией

петель: в каждый момент  $t \in I$  начальная точка совпадает с конечной). Положим  $s(t) = H(0, t)$  (таким образом,  $s$  есть путь, определяемый движением начальной точки рассматриваемой петли при рассматриваемой гомотопии). Тогда гомотопический класс петли  $b$  является образом гомотопического класса петли  $a$  при отображении  $T_s : \pi_1(X, s(0)) \rightarrow \pi_1(X, s(1))$ .

### 32'3. Свойства отображения $T_s$

**32.A.** Отображение  $T_s$  является групповым гомоморфизмом.<sup>4</sup>

**32.B.** Если путь  $u$  соединяет  $x_0$  с  $x_1$ , а путь  $v$  соединяет  $x_1$  с  $x_2$ , то  $T_{uv} = T_v \circ T_u$ . Другими словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{T_u} & \pi_1(X, x_1) \\ & T_{uv} \searrow & \downarrow T_v \\ & & \pi_1(X, x_2) . \end{array}$$

**32.C.** Если пути  $u$  и  $v$  гомотопны, то  $T_u = T_v$ .

**32.D.**  $T_{e_a} = \text{id}_{\pi_1(X, a)} : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ .

**32.E.**  $T_{s^{-1}} = T_s^{-1}$ .

**32.F.** Для всякого пути  $s$  гомоморфизм  $T_s$  является изоморфизмом.

**32.G** Теорема. Если точки  $x_0$  и  $x_1$  лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства  $X$ , то группы  $\pi_1(X, x_0)$  и  $\pi_1(X, x_1)$  изоморфны.

Несмотря на результат теоремы 32.G, мы не можем писать  $\pi_1(X)$  даже если топологическое пространство  $X$  линейно связно. Дело в том, что хотя группы  $\pi_1(X, x_0)$  и  $\pi_1(X, x_1)$  изоморфны, но между ними нет никакого канонического изоморфизма (см. далее 32.J).

**32.H.** Пространство  $X$  односвязно, тогда оно линейно связно и для некоторой точки  $x_0 \in X$  группа  $\pi_1(X, x_0)$  тривиальна.

### 32'4. Роль пути

**32.I.** Если петля  $s$  является представителем элемента  $\sigma$  фундаментальной группы  $\pi_1(X, x_0)$ , то  $T_s$  является внутренним автоморфизмом этой группы, определённым формулой  $\alpha \mapsto \sigma^{-1}\alpha\sigma$ .

**32.J.** Пусть  $X$  – топологическое пространство, точки  $x_0, x_1 \in X$ . Изоморфизм  $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  не зависит от пути  $s$ , тогда фундаментальная группа  $\pi_1(X, x_0)$  абелева.

<sup>4</sup>Напомним – это означает, что  $T_s(\alpha\beta) = T_s(\alpha)T_s(\beta)$ .

Из теоремы 32. J следует, что если фундаментальная группа топологического пространства  $X$  является абелевой, мы вправе писать просто  $\pi_1(X)$ .

### 32'5х. Перенос вдоль пути в топологической группе

В случае, если  $G$  – топологическая группа, группы  $\pi_1(G, x_0)$  и  $\pi_1(G, x_1)$  можно связать и по-другому: имеются гомеоморфизмы  $L_g : G \rightarrow G : x \mapsto xg$  и  $R_g : G \rightarrow G : x \mapsto gx$ , и они определяют изоморфизмы  $(L_{x_0^{-1}x_1})_* : \pi_1(G, x_0) \rightarrow \pi_1(G, x_1)$  и  $(R_{x_1x_0^{-1}})_* : \pi_1(G, x_0) \rightarrow \pi_1(G, x_1)$ .

**32.Ах.** Пусть  $G$  – топологическая группа,  $s : I \rightarrow G$  – путь. Докажите, что

$$T_s = (L_{s(0)^{-1}s(1)})_* = (R_{s(1)s(0)^{-1}})_* : \pi_1(G, s(0)) \rightarrow \pi_1(G, s(1)).$$

**32.Вх.** Выведите из 32.Ах что фундаментальная группа любой топологической группы абелева (ср. 31.Сх).

**32.1х.** Докажите, что фундаментальные группы следующих пространств коммутативны:

- (1) пространства невырожденных вещественных  $n \times n$  матриц  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$ ;
- (2) пространства ортогональных вещественных  $n \times n$  матриц  $O(n, \mathbb{R}) = \{A \mid A \cdot ({}^t A) = E\}$ ;
- (3) пространства специальных унитарных комплексных  $n \times n$  матриц  $SU(n) = \{A \mid A \cdot ({}^t \bar{A}) = E, \det A = 1\}$ .

### 32'6х. В высших гомотопических группах

**32.Сх. Загадка.** Догадайтесь, как обобщить  $T_s$  на высшие гомотопические группы.

Вот другой вариант той же загадки; в нем больше подсказки.

**32.Дх. Загадка.** Как по пути  $s : I \rightarrow X$  с  $s(0) = x_0$  и сфероиду  $f : I^r \rightarrow X$  в точке  $x_0$  соорудить сфероид того же пространства в точке  $x_1 = s(1)$ ?

**32.Ех.** Докажите, что для любого пути  $s : I \rightarrow X$  и любого сфероиды  $f : I^r \rightarrow X$ , где  $f(\text{Fr } I^r) = s(0)$ , существует его гомотопия  $H : I^r \times I \rightarrow X$  такая, что  $H(\text{Fr } I^r \times t) = s(t)$  для всякого  $t \in I$ , причем сфероид, полученный в результате этой гомотопии, единственен с точностью до гомотопии и тем самым определяет элемент  $\pi_r(X, s(1))$ , зависящий лишь от гомотопического класса пути  $s$  и элемента группы  $\pi_r(X, s(0))$ , представленного сфероидом  $f$ .

Конечно, решение задачи 32.Ех дает ответ на вопрос предшествующих ей загадок 32.Дх и 32.Сх. Отображение  $\pi_r(X, s(0)) \rightarrow \pi_r(X, s(1))$ , которое определено в 32.Ех, обозначается через  $T_s$ . В силу 32.2, оно обобщает отображение  $T_s$ , определённое в 32'2 в случае  $r = 1$ .

**32.Фх.** Докажите, что свойства отображения  $T_s$ , сформулированные в задачах 32.А–32.Г, имеют место во всех размерностях.

**32.Гх. Загадка.** Каковы аналоги теорем 32.Ах и 32.Вх для высших гомотопических групп?



## Доказательства и комментарии

**29.A** (a), (b), (e) – да; (c), (d), (f) – нет. См. 29.B.

**29.B** См. 29'2.

**29.C** Отображение  $h_t$  непрерывно как сужение гомотопии  $H$  на слой  $X \times t \subset X \times I$ .

**29.D** Разумеется, не следует.

**29.E.1** Отображение  $H$  непрерывно как композиция проекции  $\text{pr}_X : X \times I \rightarrow X$  и отображения  $f$ , при этом  $H(x, 0) = f(x) = H(x, 1)$ . Следовательно,  $H$  является гомотопией.

**29.E.2** Отображение  $H'$  непрерывно как композиция гомеоморфизма  $X \times I \rightarrow X \times I : (x, t) \mapsto (x, 1 - t)$  и гомотопии  $H$ , при этом  $H'(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$  и  $H'(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ . Значит,  $H'$  – гомотопия.

**29.E.3** Действительно,  $H''(x, 0) = f(x)$ ,  $H''(x, 1) = H'(x, 1) = f''(x)$ . Непрерывность  $H''$  следует из того, что сужение отображения  $H''$  на каждое из множеств  $X \times [0; \frac{1}{2}]$  и  $X \times [\frac{1}{2}; 1]$  непрерывно и эти множества образуют фундаментальное покрытие произведения  $X \times I$ .

В дальнейшем мы не будем доказывать непрерывность гомотопий, поскольку это всегда будет следовать из явных формул.

**29.F** Каждое из них гомотопно постоянному отображению, переводящему все пространство в начало координат, к примеру, если  $H(x, t) = (1 - t)f(x)$ , то  $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  – гомотопия между  $f$  и постоянным отображением  $x \mapsto 0$ . (Существует более удобная гомотопия между произвольными отображениями в  $\mathbb{R}^n$  – см. 29.G.)

**29.G** Действительно,  $H(x, 0) = f(x)$  и  $H(x, 1) = g(x)$ . Непрерывность отображения  $H$  очевидна. Она, к примеру, следует из неравенства

$$|H(x, t) - H(x', t')| \leq |f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| + (|f(x)| + |g(x)|)|t - t'|.$$

**29.H** Пусть  $K$  – выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $f, g : X \rightarrow K$  – непрерывные отображения и  $H$  – прямолинейная гомотопия между  $f$  и  $g$ . Тогда  $H(x, t) \in K$  при всех  $(x, t) \in X \times I$  и мы получаем гомотопию  $H : X \times I \rightarrow K$ .

**29.I** Отображение  $H = g \circ F \circ (h \times \text{id}_I) : A \times I \rightarrow B$  непрерывно,  $H(a, 0) = g(F(h(a), 0)) = g(f(h(a)))$  и  $H(a, 1) = g(F(h(a), 1)) = g(f'(h(a)))$ . Следовательно,  $H$  – гомотопия.

**29.J** Сопоставим отображению  $f : X \rightarrow Y$  композицию  $g \circ f \circ h : A \rightarrow B$ . Предыдущее утверждение показывает, что данное соответствие

сохраняет отношение гомотопности, и значит, оно переносится на гомотопические классы отображений. Тем самым определено отображение  $\pi(X, Y) \rightarrow \pi(A, B)$ .

**29.K** Всякое отображение  $f : X \rightarrow Y \times Z$  однозначно определяется своими координатными отображениями  $\text{pr}_X \circ f$  и  $\text{pr}_Y \circ f$ .  $\Leftrightarrow$  Если  $H$  – гомотопия между  $f$  и  $g$ , то  $\text{pr}_Y \circ H$  – гомотопия между  $\text{pr}_Y \circ f$  и  $\text{pr}_Y \circ g$ , а  $\text{pr}_Z \circ H$  – между  $\text{pr}_Z \circ f$  и  $\text{pr}_Z \circ g$ .  $\Leftarrow$  Если  $H_Y$  – гомотопия между  $\text{pr}_Y \circ f$  и  $\text{pr}_Y \circ g$ ,  $H_Z$  – гомотопия между  $\text{pr}_Z \circ f$  и  $\text{pr}_Z \circ g$ , то формула  $H(x, t) = (H_Y(x, t), H_Z(x, t))$  задает гомотопию между  $f$  и  $g$ .

**29.L** Доказательство ничем не отличается от доказательства утверждения 29.E.

**29.M** Для тех множеств  $A$ , на которых  $f|_A = g|_A$  (т. е. множеств, содержащихся в множестве совпадения этих отображений).

**29.N** Путь – это гомотопия отображения точки, ср. 29.8.

**29.O** Для всякой точки  $x \in X$  отображение  $u_x : I \rightarrow X : t \mapsto h(x, t)$  является путем.

**29.P** Если  $H$  – это гомотопия, то для всякого  $t \in I$  формула  $h_t = H(x, t)$  определяет непрерывное отображение  $X \rightarrow Y$ . Таким образом, мы получаем отображение  $\mathcal{H} : I \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$  отрезка в множество всех непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$ . Далее см. 29.Ax и 29.Bx.

**29.Ax** Следует из 24.Sx.

**29.Bx** Следует из 24.Tx.

**29.Q** Следует из решения задачи 29.3.

**30.A** 1) Начнем с наглядного описания искомой гомотопии. Пусть  $u_t : I \rightarrow X$  – гомотопия, соединяющая  $u$  и  $u'$ , а  $v_t : I \rightarrow X$  – гомотопия, соединяющая  $v$  и  $v'$ . Тогда пути  $u_t v_t$  с  $t \in [0; 1]$  составляют гомотопию между  $uv$  и  $u'v'$ .

2) Теперь приведем более формальное рассуждение. Так как произведение  $uv$  определено, то  $u(1) = v(0)$ . Так как  $u \sim u'$ , то  $u(1) = u'(1)$ , аналогичным образом и  $v(0) = v'(0)$ . Значит, определено произведение  $u'v'$ . Гомотопией между  $uv$  и  $u'v'$  является отображение

$$H : I \times I \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H'(2s, t) & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ H''(2s - 1, t) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

(Оно непрерывно, поскольку множества  $[0; \frac{1}{2}] \times I$  и  $[\frac{1}{2}; 1] \times I$  составляют фундаментальное покрытие квадрата  $I \times I$ , а сужение  $H$  на каждое из этих множеств является непрерывным.)

**30.B** Непосредственно следует из 30.A.

**30.C** Нет; см. 30.D, ср. 30.1.

**30.D** Нет, почти никогда не верно (см. 30.1 и 30.2). Вот простейший пример. Пусть  $u(s) = 0$  и  $w(s) = 1$  при всех  $s \in [0; 1]$  и  $v(s) = s$ . Тогда  $((uv)w)(s) = 0$  только при  $s \in [0; \frac{1}{4}]$ , а  $(u(vw))(s) = 0$  при  $s \in [0; \frac{1}{2}]$ .

**30.E.1** Переформулировка: для всяких путей  $u$ ,  $v$  и  $w$ , для которых определены произведения  $uv$  и  $vw$ , пути  $(uv)w$  и  $u(vw)$  гомотопны.

**30.E.2** Пусть

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{s}{2} & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ s - \frac{1}{4} & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}], \\ 2s - 1 & \text{при } s \in [\frac{3}{4}; 1]. \end{cases}$$

Убедитесь в том, что  $\varphi$  – искомая функция, т. е. что  $((uv)w)(\varphi(s)) = (u(vw))(s)$ .

**30.E.3** Рассмотрите прямолинейную гомотопию, которая, к тому же, будет связана на  $\{0, 1\}$ .

**30.E.4** Следует из 29.I, 30.E.2 и 30.E.3.

**30.F** См. 30.G.

**30.G** Вообще говоря, нет; см. 30.4.

**30.H** Пусть

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2s - 1, & \text{если } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Убедитесь, что  $e_a u = u \circ \varphi$ . Так как  $\varphi \sim \text{id}_I$ , то  $u \circ \varphi \sim u$ , следовательно

$$[e_a][u] = [e_a u] = [u \circ \varphi] = [u].$$

**30.I** См. 30.J.

**30.J** Конечно, нет.

**30.K.1** Рассмотрите отображение

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s, & \text{если } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ 2 - 2s, & \text{если } s \in [\frac{1}{2}; 1], \end{cases}$$

**30.K.2** Рассмотрите прямолинейную гомотопию.

**30.L** Группами являются множества классов таких путей  $u$ , для которых  $u(0) = u(1) = x_0$ , где  $x_0$  – некоторая фиксированная точка пространства  $X$ , а также любые их подгруппы.

**31.A** Непосредственно следует из утверждений 30.B, 30.E, 30.H и 30.K.

**31.C** Если  $u : I \rightarrow X$  – петля, то существует факторотображение  $\tilde{u} : I/\{0, 1\} \rightarrow X$ . Осталось заметить, что  $I/\{0, 1\} \cong S^1$ .

**31.D**  $\Rightarrow$  Если  $H : S^1 \times I \rightarrow X$  – гомотопия круговых петель, то гомотопия  $H'$  обычных петель задается формулой  $H'(s, t) = H(e^{2\pi is}, t)$ .

$\Leftarrow$  Гомотопии круговых петель является факторами гомотопий обычных петель по разбиению квадрата, порожденному отношением  $(0, t) \sim (1, t)$ .

**31.E** Это так, поскольку имеется линейная гомотопия между всякой петлей в  $\mathbb{R}^n$  в начале координат и постоянной петлей.

**31.F** Вот возможный вариант обобщения: для всякого выпуклого (и даже звёздного) множества  $V \subset \mathbb{R}^n$  и всякой точки  $x_0 \in V$  фундаментальная группа  $\pi_1(V, x_0)$  тривиальна.

**31.G.1** Пусть  $p \in S^n \setminus u(I)$ . Рассмотрим стереографическую проекцию  $\tau : S^n \setminus p \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Петля  $v = \tau \circ u$  гомотопна нулю, пусть  $h$  – соответствующая гомотопия. Тогда  $H = \tau^{-1} \circ h$  является гомотопией, соединяющей данную петлю  $u$  и постоянную петлю на сфере.

**31.G.2** Такие петли заведомо существуют. Действительно, если петля  $u$  заполняет всю сферу, то петля  $uu^{-1}$  также ее заполняет, но она, тем не менее, гомотопна нулю.

**31.G.4** Пусть  $x$  – произвольная точка сферы. Покроем сферу двумя открытыми множествами  $U = S^n \setminus \{x\}$  и  $V = S^n \setminus \{-x\}$ . В силу леммы 31.G.3 найдется такая последовательность точек  $a_1, \dots, a_N \in I$ , где  $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$ , что для всякого  $i$  образ  $u([a_i, a_{i+1}])$  целиком содержится в  $U$  или в  $V$ . Поскольку каждое из этих множеств гомеоморфно  $\mathbb{R}^n$ , где любые два пути с одинаковым началом и концом гомотопны, то каждое из сужений  $u|_{[a_i, a_{i+1}]}$  гомотопно пути, образом которого является, к примеру, “дуга большой окружности” сферы  $S^n$ . Таким образом, путь  $u$  гомотопен пути, образ которого не то что не заполняет сферу, а даже нигде не плотен в ней.

**31.G.5** Прямое следствие предыдущей леммы.

**31.G.6** 1) Прямое следствие лемм 31.G.5 и 31.G.1. 2) Условие  $n \geq 2$  использовалось только в лемме 31.G.4.

**31.H** Сопоставим петле  $u : I \rightarrow X \times Y$  в точке  $(x_0, y_0)$  петли в  $X$  и  $Y$ , являющиеся координатными отображениями  $u$ ,  $u_1 = \text{pr}_X \circ u$  и  $u_2 = \text{pr}_Y \circ u$ . В силу утверждения 29.I, петли  $u$  и  $v$  гомотопны, тогда  $u_1 \sim v_1$  и  $u_2 \sim v_2$ . Следовательно, сопоставив классу петли  $u$  пару  $([u_1], [u_2])$ , мы получим биекцию между фундаментальной группой  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$

произведения пространств и произведением  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  фундаментальных групп его сомножителей. Осталось проверить, что построенная биекция является гомоморфизмом, что также очевидно, поскольку  $\text{pr}_X \circ (uv) = (\text{pr}_X \circ u)(\text{pr}_X \circ v)$ .

**31.1** (a)  $\implies$  (b): Пространство  $X$  односвязно  $\implies$  всякая петля в  $X$  гомотопна постоянной  $\implies$  всякая круговая петля в  $X$  связано гомотопна нулю  $\implies$  всякая круговая петля свободно гомотопна нулю.

(b)  $\implies$  (c): По предположению, для произвольного отображения  $f : S^1 \rightarrow X$  существует гомотопия  $h : S^1 \times I \rightarrow X$ , такая что  $h(p, 0) = f(p)$  и  $h(p, 1) = x_0$ . Следовательно, существует непрерывное отображение  $h' : S^1 \times I / (S^1 \times 1) \rightarrow X$ , такое что  $h = h' \circ \text{pr}$ . Осталось заметить, что  $S^1 \times I / (S^1 \times 1) \cong D^2$ .

(c)  $\implies$  (d): Положим  $g(t, 0) = u_1(t)$ ,  $g(t, 1) = u_2(t)$ ,  $g(0, t) = x_0$  и  $g(1, t) = x_1$  при  $t \in I$ . Таким образом, определено отображение границы квадрата  $I \times I$  в  $X$ . Поскольку квадрат гомеоморфен кругу, а его граница – окружности, то можно продолжить отображение с границы на весь квадрат. Полученное продолжение и является гомотопией между  $u_1$  и  $u_2$ .

(d)  $\implies$  (a): Очевидно.

**31.J.1** Разумно рассмотреть импликации (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (d)  $\implies$  (a).

**31.J.2** Конечно, следует. При этом, раз петля  $s$  гомотопна нулю, то круговая петля  $f$  также гомотопна нулю, причем гомотопия даже является связанной в точке  $1 \in S^1$ . Таким образом, (a)  $\implies$  (b).

**31.J.3** Данное утверждение подсказывает основную идею доказательства импликации (b)  $\implies$  (c). Гомотопия между некоторой круговой петлей  $f$  и постоянной петлей есть отображение  $H : S^1 \times I \rightarrow X$ , постоянное на верхнем основании цилиндра. Следовательно, существует факторотображение  $S^1 \times I / S^1 \times 1 \rightarrow X$ . Осталось заметить, что факторпространство цилиндра по его верхнему основанию гомеоморфно кругу.

**31.J.4** По определению гомотопии  $H : I \times I \rightarrow X$  между двумя путями, задано сужение отображения  $H$  на контур квадрата. Следовательно, задача построения гомотопии между двумя путями есть задача продолжения отображения с контура квадрата на сам этот квадрат.

**31.J.5** Все, что осталось заметить для доказательства импликации (c)  $\implies$  (d), так это то, что если  $F : D^2 \rightarrow X$  – это продолжение круговой петли  $f$ , то формула  $H(t, \tau) = F(\cos \pi t, (2\tau - 1) \sin \pi t)$  определяет гомотопия между  $s_+$  и  $s_-$ .

**31.J** Для доказательства теоремы осталось установить справедливость импликации (d)  $\implies$  (a). Сформулируем утверждение, не используя понятия круговых петель. Пусть дана петля  $s : I \rightarrow X$ . Положим  $s_+(t) = s(2t)$  и  $s_-(t) = s(1 - 2t)$ . Таким образом, надо доказать, что если пути  $s_+$  и  $s_-$  гомотопны, то петля  $s$  гомотопна нулю. Постарайтесь доказать это самостоятельно.

**31.Ax** Ассоциативность операции  $\odot$  следует из ассоциативности умножения в группе  $G$ ; единицей в множестве  $\Omega(G, 1)$  всех петель является постоянная петля в единице группы; обратным к петле  $u$  элементом является путь  $v$ , где  $v(s) = (u(s))^{-1}$ .

**31.Bx.1** Убедитесь, что  $(ue_1) \odot (e_1v) = uv$ .

**31.Bx** Докажем, что если  $u \sim u_1$ , то  $u \odot v \sim u_1 \odot v$ , для чего достаточно убедиться в том, что если  $h$  – это гомотопия между  $u$  и  $u_1$ , то формула  $H(s, t) = h(s, t)v(s)$  определяет гомотопию между  $u \odot v$  и  $u_1 \odot v$ . Далее, так как  $ue_1 \sim u$  и  $e_1v \sim v$ , то  $uv = (ue_1) \odot (e_1v) \sim u \odot v$ , значит, пути  $uv$  и  $u \odot v$  лежат в одном гомотопическом классе. Следовательно, операция  $\odot$  порождает в множестве гомотопических классов путей стандартную групповую операцию.

**31.Cx** Достаточно доказать, что  $uv \sim vu$ , а это следует из цепочки

$$uv = (ue_1) \odot (e_1v) \sim u \odot v \sim (e_1u) \odot (ve_1) = vu.$$

**31.Dx** Эта группа тривиальна. Доказательство аналогично доказательству утверждения 31.E.

**32.A** Действительно, если  $\alpha = [u]$  и  $\beta = [v]$ , то

$$T_s(\alpha\beta) = \sigma^{-1}\alpha\beta\sigma = \sigma^{-1}\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta\sigma = T_s(\alpha)T_s(\beta).$$

**32.B** Действительно,

$$T_{uv}(\alpha) = [uv]^{-1}\alpha[uv] = [v]^{-1}[u]^{-1}\alpha[u][v] = T_v(T_u(\alpha)).$$

**32.C** По самому определению переноса вдоль пути гомоморфизм  $T_s$  зависит только от гомотопического класса пути  $s$ .

**32.D** Это так, поскольку  $T_{e_a}([u]) = [e_aue_a] = [u]$ .

**32.E** Так как  $s^{-1}s \sim e_{x_1}$ , то из 32.B–32.D следует, что

$$T_{s^{-1}} \circ T_s = T_{s^{-1}s} = T_{e_{x_1}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}.$$

Аналогичным образом,  $T_s \circ T_{s^{-1}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ . Значит,  $T_{s^{-1}} = T_s^{-1}$ .

**32.F** В силу 32.E у гомоморфизма  $T_s$  имеется обратный, следовательно,  $T_s$  – изоморфизм.

**32.G** Если точки  $x_0$  и  $x_1$  лежат в одной компоненте линейной связности, то их можно соединить путем  $s$ . В силу 32.F,  $T_s : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  – изоморфизм.

**32.H** Прямое следствие теоремы 32.G.

**32.I** Прямое следствие определения гомоморфизма  $T_s$ .

**32.J**  $\Leftrightarrow$  Предположим, что изоморфизм переноса не зависит от пути, в частности, изоморфизм переноса вдоль петли в точке  $x_0$  тривиален (т. е. является тождественным). Рассмотрим произвольный элемент  $\beta \in \pi_1(X, x_0)$  и петлю  $s$  из гомотопического класса  $\beta$ . По условию  $\beta^{-1}\alpha\beta = T_s(\alpha) = \alpha$  для любого  $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ . Значит,  $\alpha\beta = \beta\alpha$  для любых элементов  $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ , что и означает, что группа  $\pi_1(X, x_0)$  – абелева.

$\Leftarrow$  Рассмотрим пути  $s_1, s_2$ , соединяющие точку  $x_0$  с точкой  $x_1$ . Так как  $T_{s_1 s_2^{-1}} = T_{s_2}^{-1} \circ T_{s_1}$ , то  $T_{s_1} = T_{s_2}$ , тогда  $T_{s_1 s_2^{-1}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ . Пусть  $\beta \in \pi_1(X, x_0)$  – это класс петли  $s_1 s_2^{-1}$ . Если группа  $\pi_1(X, x_0)$  абелева, то  $T_{s_1 s_2^{-1}}(\alpha) = \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha$ , таким образом,  $T_{s_1 s_2^{-1}} = \text{id}$ , значит,  $T_{s_1} = T_{s_2}$ .

**32.Ax** Пусть  $u$  – петля в точке  $s(0)$ . Формула  $H(\tau, t) = u(\tau)s(0)^{-1}s(1)$  определяет свободную гомотопию между  $u$  и петлей  $L_{s(0)^{-1}s(1)}(u)$ , при этом  $H(0, t) = H(1, t) = s(t)$ . Поэтому, в силу 32.2, петли  $L_{s(0)^{-1}s(1)}(u)$  и  $s^{-1}us$  являются гомотопными, откуда и следует равенство  $T_s = (L_{s(0)^{-1}s(1)})_*$ . Равенство для  $R_{s(0)^{-1}s(1)}$  доказывается аналогично.

**32.Bx** В силу 32.Ax,  $T_s = (L_e)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$  для всякой петли  $s$  в точке  $x_0$ , таким образом, если  $\beta$  – это класс петли  $s$ , то  $T_s(\alpha) = \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha$ , откуда и следует, что  $\alpha\beta = \beta\alpha$ .

# Накрытия и вычисление фундаментальной группы

## 33. Накрытия

### 33'1. Определение накрытия

Пусть  $X$  и  $B$  – топологические пространства,  $p : X \rightarrow B$  – непрерывное отображение. Предположим, что  $p$  сюръективно и что у каждой точки пространства  $B$  существует такая окрестность  $U$ , что её прообраз  $p^{-1}(U)$  при отображении  $p$  представляется в виде объединения непересекающихся открытых множеств  $V_\alpha$ , каждое из которых посредством  $p$  отображается гомеоморфно на  $U$ . В этом случае  $p : X \rightarrow B$  называется *накрытием* (пространства  $B$ ),  $B$  называется *базой* этого накрытия,  $X$  – *накрывающим пространством* для  $B$  и *тотальным пространством* этого накрытия. Говорят, что окрестность  $U$  является *правильно накрытой* или *правильно накрываемой*. Отображение  $p$  также называется *накрывающим отображением* или *проекцией* этого накрытия.

**33.А.** Для любого топологического пространства  $B$  и любого дискретного пространства  $F$  проекция  $\text{rg}_B : B \times F \rightarrow B$  является накрытием.



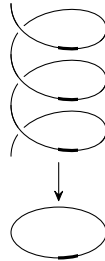
**33.1.** Если  $U' \subset U \subset B$  и окрестность  $U$  является правильно накрытой, то и окрестность  $U'$  правильно накрыта.

Следующее утверждение показывает, что в некотором смысле всякое накрытие локально устроено так же, как накрытие в 33.А.

**33.В.** Непрерывная сюръекция  $p : X \rightarrow B$  есть накрытие, тогда у каждой точки  $a \in B$  прообраз  $p^{-1}(a)$  является дискретным подпространством пространства  $X$  и существует такая её окрестность  $U$  в  $B$  и такой гомеоморфизм  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(a)$ , что  $p|_{p^{-1}(U)} = \text{pr}_U \circ h$ .

Однако накрытие, представленное в 33.А, само по себе не очень интересно. Такие накрытия называются **тривиальными**. А вот первый действительно интересный пример накрытия.

**33.С.** Отображение  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$  является накрытием.



Для того, чтобы выделить наиболее содержательные примеры, будем называть накрытия с линейно связным тотальным пространством **накрытиями в узком смысле**. Конечно, накрытие из 33.С – это накрытие в узком смысле.

### 33'2. Примеры накрытий

**33.Д.** Отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, y)$  является накрытием.

**33.Е.** Докажите, что если  $p : X \rightarrow B$  и  $p' : X' \rightarrow B'$  – накрытия, то и  $p \times p' : X \times X' \rightarrow B \times B'$  – накрытие.

Если  $p : X \rightarrow B$  и  $p' : X' \rightarrow B'$  – накрытия, то  $p \times p' : X \times X' \rightarrow B \times B'$  будем называть **произведением накрытий**  $p$  и  $p'$ . Первый пример произведения накрытий приведен в 33.Д.

**33.Ф.** Отображение  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto e^z$  является накрытием.

**33.2. Загадка.** В каком смысле накрытия из 33.Д и 33.Ф одинаковы? Введите подходящее отношение эквивалентности накрытий.

**33.Г.** Отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1 : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$  является накрытием.

**33.Н.** Для каждого натурального числа  $n$  отображение  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^n$  является накрытием.

**33.3.** Докажите, что для каждого натурального числа  $n$  отображение  $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z^n$  является накрытием.

**33.И.** Для любых натуральных чисел  $p$  и  $q$  отображение  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^p, w^q)$  является накрытием.

**33.Ж.** Естественная проекция  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  есть накрытие.

**33.К.** Является ли накрытием отображение  $(0; 3) \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ ? (Ср. 33.14.)

**33.Л.** Является ли накрытием проекция  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ ? Действительно, почему бы не взять в качестве правильно накрытой окрестности открытый интервал  $(a; b) \subset \mathbb{R}$ : его прообраз  $(a; b) \times \mathbb{R}$  есть объединение открытых интервалов  $(a; b) \times y$ , каждый из которых гомеоморфно проектируется (при стандартной проекции  $(x, y) \mapsto x$ ) на  $(a; b)$ ?

**33.4.** Постройте накрытие ленты Мёбиуса цилиндром.

**33.5.** Постройте нетривиальные накрытия ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса.

**33.6.** Постройте накрытие бутылки Клейна тором. Ср. с задачей 21.14.

**33.7.** Постройте накрытия бутылки Клейна: плоскостью  $\mathbb{R}^2$ ; цилиндром  $S^1 \times \mathbb{R}$ ; нетривиальное накрытие самой бутылкой Клейна.

**33.8.** Дайте прямое описание разбиения плоскости на прообразы точек при накрытии бутылки Клейна плоскостью.

**33.9\*.** Постройте накрытие сферы с данным числом плёнок сферой с некоторым числом ручек. Для каких чисел плёнок это удалось сделать?

### 33/3. Локальные гомеоморфизмы и накрытия

**33.10.** Любое накрытие является открытым отображением.<sup>1</sup>

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *локальным гомеоморфизмом*, если у всякой точки пространства  $X$  имеется окрестность  $U$ , образ которой  $f(U)$  открыт в  $Y$ , а приведение  $U \rightarrow f(U)$  отображения  $f$  есть гомеоморфизм.

**33.11.** Докажите, что всякое накрытие есть локальный гомеоморфизм.

**33.12.** Существуют ли локальные гомеоморфизмы, не являющиеся накрытиями?

**33.13.** Докажите, что сужение локального гомеоморфизма на всякое открытое подмножество есть локальный гомеоморфизм.

**33.14.** Для каких подмножеств прямой  $\mathbb{R}$  сужение отображения  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$  является накрытием?

---

<sup>1</sup>Напомним, что отображение называется открытым, если образ любого открытого множества открыт.

**33.15.** Найдите нетривиальное накрытие  $X \rightarrow B$ , у которого тотальное пространство  $X$  гомеоморфно базе  $B$ , и убедитесь в том, что оно действительно удовлетворяет определению накрытия (хотя  $B$  и не является правильно накрываемой окрестностью).

#### 33'4. Число листов накрытия

Пусть  $p : X \rightarrow B$  есть накрытие. Мощность (т. е. число точек) прообраза  $p^{-1}(a)$  точки  $a \in B$  называется *кратностью* накрытия в  $a$  или *числом листов над  $a$* .

**33.М.** Если база накрытия связна, то кратность накрытия в точке базы не зависит от выбора этой точки.

Тем самым в случае накрытия со связной базой имеет смысл говорить о *числе листов* данного накрытия, понимая под этим число листов над произвольной точкой его базы. Если число листов конечно и равно  $n$ , то накрытие называется  *$n$ -листным*. В противном случае говорят, что накрытие *бесконечнолистно*. Ясно, что хотя мы и говорим о числе листов накрытия, сами листы выделить невозможно, если только накрытие не является тривиальным. С другой стороны, мы введем следующее соглашение. По определению, прообраз  $p^{-1}(U)$  всякой правильно накрытой окрестности  $U \subset B$  разбивается на открытые подмножества,  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ , такие что сужение  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$  – гомеоморфизм. Будем называть каждое из подмножеств  $V_\alpha$  *листом* над  $U$ .

**33.16.** Чему равны числа листов у накрытий пункта 33'2?

Мы не предполагаем, что читатель сможет строго обосновать решения задач 33.17–33.19. Это будет сделано далее в задачах 39.3–39.6.

**33.17.** Какие числа могут быть реализованы как числа листов накрытия цилиндром  $S^1 \times I$  ленты Мёбиуса?

**33.18\*.** Какие числа вы можете реализовать как числа листов накрытия ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?

**33.19\*.** Какие числа вы можете реализовать как числа листов накрытия бутылки Клейна тором?

**33.20\*.** Какие числа могут быть реализованы как числа листов накрытия бутылки Клейна бутылкой Клейна?

**33.21\*.** Постройте  $d$ -листное накрытие сферы с  $p$  ручками сферой с  $d(p-1)+1$  ручками.

**33.22.** Пусть  $p : X \rightarrow Y$  и  $q : Y \rightarrow Z$  – накрытия. Докажите, что если  $q$  конечнолистно, то и  $q \circ p : X \rightarrow Z$  – накрытие.

**33.23\*.** Покажите, что предположение о конечности числа листов в задаче 33.22 является существенным.

**33.24.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие с компактной базой  $B$ . Докажите, что: 1) если пространство  $X$  компактно, то накрытие конечнолистно; 2) если  $B$  хаусдорфово и накрытие конечнолистно, то  $X$  компактно.

**33.25.** Пусть  $X$  – топологическое пространство, представимое в виде объединения открытых связных множеств  $U$  и  $V$ . Докажите, что если пересечение  $U \cap V$  не связно, то  $X$  обладает связным бесконечнолистным накрытием.

### 33'5. Универсальные накрытия

Накрытие  $p : X \rightarrow B$  называется *универсальным*, если пространство  $X$  односвязно. Появление в этом контексте слова *универсальное* будет объяснено в 39.

**33.N.** Какие из накрытий, обсуждавшихся выше, являются универсальными?

## 34. Теоремы о накрывающих путях

### 34'1. Поднятие отображений

Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $f : A \rightarrow B$  – произвольные отображения. Говорят, что отображение  $g : A \rightarrow X$  **накрывает** отображение  $f$  или является его **поднятием** (по отношению к  $p$ ), если  $p \circ g = f$ . Множество топологических задач могут быть сформулированы как задачи поиска непрерывного накрывающего для данного непрерывного отображения. Задачи этого типа называются **задачами поднятия**. Их формулировки могут включать дополнительные требования на поднятия, например, в некоторых из них требуется, чтобы поднятие было фиксировано на некотором подпространстве.

**34.А.** Докажите, что тождественное отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  не может быть поднято по отношению к накрытию  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ . (Другими словами, не существует такого непрерывного отображения  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $e^{2\pi i g(x)} = x$  для всех  $x \in S^1$ .)

### 34'2. Поднятие пути

**34.В Теорема о накрывающем пути.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие,  $x_0 \in X$ ,  $b_0 \in B$  – такие точки, что  $p(x_0) = b_0$ . Для любого пути  $s : I \rightarrow B$ , начинающегося в  $b_0$ , существует единственный путь  $\tilde{s} : I \rightarrow X$ , начинающийся в точке  $x_0$  и накрывающий путь  $s$ . (Другими словами, существует единственный путь  $\tilde{s} : I \rightarrow X$ , такой, что  $\tilde{s}(0) = x_0$  и  $p \circ \tilde{s} = s$ .)

Можно доказать и более общее утверждение, чем теорема 34.В – см. задачи 34.1–34.3.

**34.1.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – тривиальное накрытие,  $x_0 \in X$  и  $b_0 \in B$  – такие точки, что  $p(x_0) = b_0$ . Для всякого непрерывного отображения  $f : A \rightarrow B$ , переводящего некоторую точку  $a_0 \in A$  в  $b_0$ , существует его непрерывное поднятие  $\tilde{f} : A \rightarrow X$ , для которого  $\tilde{f}(a_0) = x_0$ .

**34.2.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – тривиальное накрытие,  $x_0 \in X$  и  $b_0 \in B$  – такие точки, что  $p(x_0) = b_0$ . Если множество  $A$  связно, то для всякого непрерывного отображения  $f : A \rightarrow B$ , переводящего некоторую точку  $a_0 \in A$  в  $b_0$ , непрерывное поднятие  $\tilde{f} : A \rightarrow X$  с  $\tilde{f}(a_0) = x_0$  единственно.

**34.3.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие, а  $A$  – некоторое связное и локально связное пространство. Если непрерывные отображения  $f, g : A \rightarrow B$  совпадают в некоторой точке и  $p \circ f = p \circ g$ , то  $f = g$ .

**34.4.** Если в задаче 34.2 заменить точки  $x_0$ ,  $b_0$  и  $a_0$  парами точек, то может стать, что задача поднятия не допускает решения  $\tilde{f}$  с  $\tilde{f}(a_0) = x_0$ . Сформулируйте условие, необходимое и достаточное для существования такого решения.

**34.5.** Покажите, что теорема о накрывающем пути 34.B не обобщается на локальные гомеоморфизмы, такие как локальный гомеоморфизм  $(0, 3) \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$  задачи 34.4.

**34.6.** Рассмотрим накрытие  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto e^z$ . Найдите пути, накрывающие пути  $u(t) = 2 - t$ ,  $v(t) = (1 + t)e^{2\pi i t}$ , и их произведения  $uv$  и  $vu$ .

### 34'3. Поднятие гомотопии

**34.C Теорема о накрывающей гомотопии.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие,  $x_0 \in X$  и  $b_0 \in B$  – такие точки, что  $p(x_0) = b_0$ . Пусть пути  $u, v : I \rightarrow B$  начинаются в точке  $b_0$  и  $\tilde{u}, \tilde{v} : I \rightarrow X$  – накрывающие их пути с началом в точке  $x_0$ . Тогда, если пути  $u, v$  гомотопны, то пути  $\tilde{u}, \tilde{v}$  также гомотопны.

**34.D Следствие.** В предположениях теоремы 34.C накрывающие пути  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$  кончатся в одной и той же точке (т. е.  $\tilde{u}(1) = \tilde{v}(1)$ ).

Подчеркнём, что в 34.C и 34.D предполагается, что у накрывающих путей общее начало  $x_0$ , а тогда, согласно 34.D, совпадают и их концы.

**34.E Следствие следствия 34.D.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие. Если петля  $s : I \rightarrow B$  накрывается незамнутым путём (так сказать, размыкается при поднятии), то она не гомотопна постоянной.

**34.7.** Линейно связное пространство  $B$ , обладающее нетривиальным линейно связным накрытием, неодносвязно.

**34.8.** Докажите, что любое накрытие  $p : X \rightarrow B$  с односвязным  $B$  и линейно связным  $X$  является гомеоморфизмом.

**34.9.** Какие следствия можно извлечь из 34.7 относительно приведенных в 33 примеров накрытий?

**34.10. Загадка.** Так ли уж важно условие теоремы 34'3, согласно которому отображения  $u$  и  $v$  являются путями? На какой класс отображений и пространств вы можете обобщить эту теорему?

## 35. Вычисление фундаментальных групп при помощи универсальных накрытий

### 35'1. Фундаментальная группа окружности

Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $s_n$  петлю  $I \rightarrow S^1 : t \mapsto e^{2\pi i n t}$ . Начальной точкой петли является точка  $1 \in \mathbb{C}$ . Гомотопический класс петли  $s_1$  обозначим через  $\alpha$ . Таким образом,  $\alpha \in \pi_1(S^1, 1)$ .

**35.A.** Петля  $s_n$  является представителем класса  $\alpha^n$ .

**35.B.** Укажите путь в  $\mathbb{R}$ , начинающийся в точке  $0 \in \mathbb{R}$  и накрывающий петлю  $s_n$  относительно универсального накрытия  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ .

**35.C.** Гомоморфизм  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1) : n \mapsto \alpha^n$ , является изоморфизмом.

**35.C.1.** Формула  $n \mapsto \alpha^n$  определяет гомоморфизм  $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ .

**35.C.2.** Если путь  $\tilde{s} : I \rightarrow \mathbb{R}$  с началом в  $0 \in \mathbb{R}$ , накрывающий петлю  $s : I \rightarrow S^1$  (с началом в 1), кончается в точке  $n$  (т. е.  $\tilde{s}(1) = n$ ), то петля  $s$  гомотопна петле  $s_n$ .

**35.C.3.** Если петля  $s_n$  гомотопна постоянной, то  $n = 0$ . Следовательно, гомоморфизм  $\varphi$  — мономорфизм.

**35.1.** Найдите прообраз гомотопического класса петли  $t \mapsto e^{2\pi i t^2}$  при изоморфизме теоремы 35.C.

Обозначим через  $\deg$  изоморфизм, являющийся обратным к изоморфизму 35.C.

**35.2.** Для любой петли  $s : I \rightarrow S^1$ , начинающейся в единице,  $\deg([s])$  есть целое число, совпадающее с конечной точкой пути, начинающегося в  $0 \in \mathbb{R}$  и накрывающего петлю  $s$ .

**35.D** Следствие теоремы 35.C. *Фундаментальная группа  $n$ -мерного тора  $(S^1)^n$  — свободная абелева группа ранга  $n$  (т. е. это есть группа, изоморфная  $\mathbb{Z}^n$ ).*

**35.E.** Укажите петли, гомотопические классы которых являются образующими фундаментальной группы тора  $S^1 \times S^1$ .

**35.F** Следствие теоремы 35.C. *Фундаментальная группа проколотой плоскости  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  есть бесконечная циклическая группа.*

**35.3.** Решите задачи 35.D–35.F, не ссылаясь на теоремы 35.C и 31.H, а опираясь на явное построение соответствующего универсального накрытия.

### 35'2. Фундаментальные группы проективных пространств

Фундаментальной группой проективной прямой является бесконечная циклическая группа, поскольку проективная прямая гомеоморфна окружности. Нульмерное проективное пространство состоит из одной точки, так что его фундаментальная группа тривиальна. Вычислим теперь фундаментальные группы всех прочих проективных пространств.

Пусть  $n \geq 2$  и  $l : I \rightarrow \mathbb{R}P^n$  – петля, которую накрывает путь  $\tilde{l} : I \rightarrow S^n$ , соединяющий две диаметрально противоположные точки сферы, скажем, полюсы  $P_+ = (1, 0, \dots, 0)$  и  $P_- = (-1, 0, \dots, 0)$ . Обозначим через  $\lambda$  гомотопический класс петли  $l$  в фундаментальной группе  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, (1 : 0 : \dots : 0))$ .

**35.G.** Для каждого  $n \geq 2$  группа  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, (1 : 0 : \dots : 0))$  является циклической группой порядка 2. Она состоит из  $\lambda$  и 1.

**35.G.1** Лемма. Произвольная петля в  $\mathbb{R}P^n$  с началом в точке  $(1 : 0 : \dots : 0)$  гомотопна или петле  $l$  или постоянной петле. Это зависит от того, соединяет ли путь, накрывающий эту петлю, полюсы  $P_+$  и  $P_-$ , или же он сам является петлей.

**35.4.** Где в доказательствах теоремы 35.G и леммы 35.G.1 использовано предположение  $n \geq 2$ ?

### 35'3. Фундаментальная группа букета окружностей

Рассмотрим семейство топологических пространств  $\{X_\alpha\}$ , в каждом из которых отмечено по одной точке  $x_\alpha$ . Рассмотрим несвязную сумму  $\bigsqcup_\alpha X_\alpha$  этих пространств и отождествим в нём все отмеченные точки. Полученное факторпространство называется *букетом* пространств  $\{X_\alpha\}$  и обозначается через  $\bigvee_\alpha X_\alpha$ . В частности, *букет  $q$  окружностей* – это пространство, являющееся объединением  $q$  экземпляров окружностей, имеющих одну общую точку, называющуюся *центром* этого букета.

Обозначим букет  $q$  окружностей через  $B_q$ , а его центр – через  $c$ . Пусть  $u_1, \dots, u_q$  – петли в  $B_q$ , каждая из которых начинается в  $c$  и параметризует соответствующую окружность букета  $B_q$ . Обозначим через  $\alpha_i$  гомотопический класс петли  $u_i$ .

**35.H** Теорема. Группа  $\pi_1(B_q, c)$  является свободной группой, свободно порожденной элементами  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ .

### 35'4. Алгебраическое отступление: свободные группы

Напомним, что группа  $G$  есть свободная группа со свободными образующими  $a_1, \dots, a_q$ , если:



- каждый ее элемент  $x \in G$  представляется как произведение степеней (с целыми, но не обязательно положительными показателями) элементов  $a_1, \dots, a_q$ , т. е.  $x = a_{i_1}^{e_1} a_{i_2}^{e_2} \dots a_{i_n}^{e_n}$ ;
- это представление однозначно с точностью до следующих тривиальных операций: можно вставлять и удалять произведения вида  $a_i a_i^{-1}$  и  $a_i^{-1} a_i$  или заменять  $a_i^m$  на  $a_i^p a_i^q$  с  $p + q = m$  и обратно.

**35.1.** Свободная группа определена с точностью до изоморфизма числом своих свободных образующих.

Число свободных образующих свободной группы называется её **рангом**. Стандартным представителем в классе изоморфных свободных групп ранга  $q$  является группа слов алфавита, состоящего из  $q$  букв  $a_1, \dots, a_q$  и обратных к ним  $a_1^{-1}, \dots, a_q^{-1}$ . Два слова представляют один и тот же элемент этой группы тогда и только тогда, когда одно из них может быть получено из другого посредством вставок и удалений фрагментов  $a_i a_i^{-1}$  и  $a_i^{-1} a_i$ . Для этой группы мы будем использовать обозначение  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_q)$  или просто  $\mathbb{F}_q$ , если нас не интересуют конкретные образующие.

**35.2.** Всякий элемент группы  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_q)$  обладает единственным кратчайшим представителем. Им является слово, в котором нельзя произвести никаких сокращений.

Число букв, входящих в кратчайшее представление элемента  $x \in \mathbb{F}(a_1, \dots, a_q)$ , называется **длиной** элемента  $x$  и обозначается через  $l(x)$ . Конечно, для того чтобы длина была определена, необходимо, чтобы были фиксированы образующие этой группы.

**35.3.** Покажите, что автоморфизм группы  $\mathbb{F}_q$  может переводить элемент  $x \in \mathbb{F}_q$  в элемент, имеющий другую длину. При каких значениях  $q$  это невозможно? Можно ли таким образом получить слово произвольной длины?

**35.4.** Группа  $G$  является свободной группой, свободно порожденной своими элементами  $a_1, \dots, a_q$ , тогда любое отображение множества  $\{a_1, \dots, a_q\}$  в произвольную группу  $X$  продолжается до единственного гомоморфизма  $G \rightarrow X$ .

Иногда утверждение теоремы 35.4 принимается за определение свободной группы. Определения такого сорта в большей степени подчеркивают взаимосвязи между различными группами, нежели внутреннюю структуру каждой группы. Конечно, такие взаимосвязи позволяют в конечном итоге восстановить и внутреннюю структуру групп.

Теперь мы можем переформулировать теорему 35.5 так:

**35.L.** Гомоморфизм  $\mathbb{F}(a_1, \dots, a_q) \rightarrow \pi_1(B_q, c)$ , отображающий  $a_i$  в элемент  $\alpha_i$  фундаментальной группы букета окружностей, является изоморфизмом.

Прежде всего, для простоты ограничимся случаем  $q = 2$ , чтобы избежать ненужных сложностей в обозначениях и рисунках. Это простейший случай, который действительно полностью представляет общую ситуацию, в то время как в случае  $q = 1$  слишком много специфики (хотя бы потому, что в этом случае группа коммутативна).

Чтобы воспользоваться преимуществами букета двух окружностей, изгоним индексы из обозначений. Положим  $B = B_2$ ,  $u = u_1$ ,  $v = u_2$ ,  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\beta = \alpha_2$ .

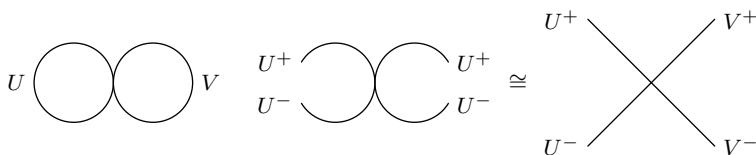
Теперь утверждение 35.L выглядит следующим образом:

Гомоморфизм  $\mathbb{F}(a, b) \rightarrow \pi(B, c)$ , при котором  $a \mapsto \alpha$  и  $b \mapsto \beta$ , является изоморфизмом.

Эту теорему можно бы доказать так же как теоремы 35.C и 35.G, если б только знать, как устроено универсальное накрытие букета  $B$ . Таким образом, для доказательства теоремы нам придется построить универсальное накрывающее пространство букета двух окружностей.

### 35'5. Универсальное накрытие букета двух окружностей

Обозначим через  $U$  и  $V$  точки, антиподальные точке  $c$  на окружностях букета  $B$ . Разрежем  $B$  в этих точках, удалив их из  $B$  и затем добавив вместо каждой из них две новые точки. Какова бы ни была эта операция разрезания, её результатом является **крест**  $K$ , представляющий собой объединение четырех отрезков с общим концом  $c$ . Отрезки мы будем называть **лучами креста**. Имеется естественное отображение  $P: K \rightarrow B$ , переводящее центр  $c$  креста  $K$  в центр  $c$  букета  $B$ , сужение которого на каждый из лучей креста является гомеоморфизмом этого луча на соответствующую полуокружность букета. Поскольку окружности букета  $B$  параметризованы петлями  $u$  и  $v$ , то половинки каждой из окружностей можно упорядочить. Обозначим через  $U^+$  ту точку прообраза  $P^{-1}(U)$ , которая принадлежит лучу, отображающемуся в первую из половин окружности, содержащей точку  $U$ , и через  $U^-$  – вторую точку из составляющих этот прообраз. Аналогично обозначим через  $V^+$  и  $V^-$  точки прообраза  $P^{-1}(V)$ .



Сужение отображения  $P$  на  $K \setminus \{U^+, U^-, V^+, V^-\}$  является гомеоморфизмом на  $B \setminus \{U, V\}$ . Поэтому  $P$  является накрытием пространства  $B \setminus \{U, V\}$ . Однако точки  $U$  и  $V$  не имеют правильно накрытых окрестностей. Более того, прообраз каждой из них состоит из двух точек (соответствующих концевых точек креста), в окрестности которых  $P$  даже не является локальным гомеоморфизмом. Чтобы справиться с этой неприятностью, приклеим в каждой из четырех концевых точек креста  $K$  еще один экземпляр креста  $K$  и продолжим естественным образом отображение  $P$  на полученное в результате топологическое пространство. Но теперь появились новые 12 концевых точек, в которых наше отображение не является локальным гомеоморфизмом. Что же, повторим ту же операцию, приклеив 12 новых копий креста  $K$ . И вот уже у каждой из этих 12 точек есть окрестность, гомеоморфно отображающаяся на свой образ в  $B$ . Но зато возникли 36 новых концевых точек. И так далее. . . Эта деятельность кажется вполне безумной: исправляя дефекты, мы создаём на каждом шаге в три раза больше новых. Однако если повторить это бесконечно много раз, то все плохие точки исправятся и полученное топологическое пространство с заданным на нем продолжением отображения  $P$  окажется накрывающим пространством.<sup>2</sup>

**35.М.** Формализуйте описанную выше конструкцию накрытия букета  $B$ .

Рассмотрим группу  $\mathbb{F}(a, b)$  как топологическое пространство с дискретной топологией и построим его произведение на крест  $K$ . Результат – пространство  $K \times \mathbb{F}(a, b)$  – можно рассматривать как набор экземпляров креста  $K$ , занумерованных элементами группы  $\mathbb{F}(a, b)$ . Топологически это несвязная сумма этих экземпляров. Отождествим в  $K \times \mathbb{F}(a, b)$  точку  $(U^-, g)$  с  $(U^+, ga)$  и точку  $(V^-, g)$  с  $(V^+, gb)$  для каждого элемента  $g \in \mathbb{F}(a, b)$ . Обозначим полученное факторпространство через  $X$ .

**35.Н.** Композиция естественной проекции  $K \times \mathbb{F}(a, b) \rightarrow K$  и отображения  $P : K \rightarrow B$  определяет непрерывное факторотображение  $p : X \rightarrow B$ .

<sup>2</sup>Это напоминает сказочную историю о битве со Змеем Горынычем, но неожиданная счастливая развязка показывает, что математика обладает магической мощью, о какой герои сказок не могли и помыслить. И в самом деле, мы встретили Змея Горыныча  $K$  о четырёх головах, доблестно отсеки ему все головы, но, в соответствии с традицией жанра, на месте каждой старой головы выросли 3 новые. Мы отсеки и их, и история повторилась. А мы и не думаем, как бы избежать этого размножения голов. Знай рубим! В отличие от героев сказок, мы действуем вне Времени, и нам некуда спешить. Повторив бесконечное количество раз упражнение в отсекании экспоненциально растущего числа голов, мы победили! У нашего Горыныча голов-то и не осталось!

Такова типичная картина успешной бесконечной конструкции в математике. Иногда, как в нашем случае, такую бесконечную конструкцию можно заменить конечной, но имеющей дело с бесконечными объектами. Однако, случается, что важная конструкция включает бесконечное повторение, которого никак невозможно избежать.

**35.О.** Отображение  $p : X \rightarrow B$  является накрытием.

**35.Р.** Пространство  $X$  линейно связно. Для каждого элемента  $g \in \mathbb{F}(a, b)$  существует путь, соединяющий точку  $(c, 1)$  с точкой  $(c, g)$ , накрывающий петлю в  $B$ , полученную в результате замены в слове  $g$  буквы  $a$  петлей  $u$ , а буквы  $b$  – петлей  $v$ .

**35.Q.** Пространство  $X$  односвязно.

### 35'6. Фундаментальные группы некоторых конечных пространств

**35.6.** Докажите, что всякое линейно связное трехточечное пространство односвязно (ср. 31.7).

**35.7.** Рассмотрим топологическое пространство  $X$ , состоящее из точек  $a, b, c$  и  $d$ , в котором топология задана базой, составленной из множеств  $\{a\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{a, b, c\}$  и  $\{c, d, a\}$ . Докажите, что пространство  $X$  неодносвязно.

**35.8.** Вычислите  $\pi_1(X)$ .

**35.9.** Пусть  $X$  – конечное топологическое пространство с нетривиальной фундаментальной группой. Пусть  $n_0$  – наименьшее число точек такого пространства. 1) Найдите  $n_0$ . 2) Каковы нетривиальные фундаментальные группы пространства, число точек в котором равно  $n_0$ ?

**35.10.** 1) Постройте конечное топологическое пространство с неабелевой фундаментальной группой. 2) Каково наименьшее число точек, необходимое для такого пространства?

**35.11\*.** Пусть пространство  $X$  является объединением открытых множеств  $U$  и  $V$ , пересечение которых имеет не менее трёх компонент связности. Докажите, что фундаментальная группа пространства  $X$  неабелева, и, более того, может быть отображена эпиморфно на свободную группу ранга 2.

**35.12\*.** Постройте конечное топологическое пространство с фундаментальной группой  $\mathbb{Z}_2$ .

## Доказательства и комментарии

**33.A** Покажем, что само множество  $B$  является правильно накрытым.

Действительно,  $(\text{pr}_B)^{-1}(B) = X = \bigcup_{y \in F} (B \times y)$ , а поскольку топология в пространстве  $F$  дискретна, то каждое из множеств  $B \times y$  открыто в тотальном пространстве накрытия, а сужение  $\text{pr}_B$  на каждое из них есть гомеоморфизм.

**33.B**  $\Rightarrow$  Построим гомеоморфизм  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(a)$  для произвольной правильно накрытой окрестности  $U \subset B$  точки  $a$ . По определению правильно накрытой окрестности,  $p^{-1}(U) = \bigcup U_\alpha$ . Пусть  $x \in p^{-1}(U)$ , Рассмотрим то из открытых множеств  $U_\alpha$ , которое содержит точку  $x$ , и сопоставим ей пару  $(p(x), c)$ , где  $\{c\} = p^{-1}(a) \cap U_\alpha$ . Ясно, что соответствие  $x \mapsto (p(x), c)$  определяет гомеоморфизм  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(a)$ .

$\Leftarrow$  В силу 33.1,  $U$  является правильно накрытой окрестностью, значит,  $p : X \rightarrow B$  есть накрытие.

**33.C** Для всякой точки  $z \in S^1$  множество  $U_z = S^1 \setminus \{-z\}$  является ее правильно накрытой окрестностью. Действительно, пусть  $z = e^{2\pi i x}$ . Тогда прообраз окрестности  $U_z$  — это объединение  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (x + k - \frac{1}{2}, x + k + \frac{1}{2})$ , а сужение накрытия на каждый из указанных интервалов является гомеоморфизмом.

**33.D** Правильно накрытой окрестностью точки  $(z, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$  является произведение  $(S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{R}$ ; ср. 33.E.

**33.F** Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ S^1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \setminus 0, \end{array}$$

в которой  $g(z, x) = ze^x$ ,  $h(x, y) = y + 2\pi i x$ , а  $q(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$ . Из равенства  $g(q(x, y)) = e^{2\pi i x} \cdot e^y = e^{y+2\pi i x} = p(h(x, y))$  следует, что она коммутативна. Ясно, что отображения  $g$  и  $h$  являются гомеоморфизмами. Поскольку, в силу 33.D, отображение  $q$  является накрытием, то и  $p$  — накрытие.

**33.G** В силу 33.E, данное утверждение следует из 33.C. Конечно, его нетрудно доказать и непосредственно. Правильно накрытой окрестностью точки  $(z, z') \in S^1 \times S^1$  будет произведение  $(S^1 \setminus \{-z\}) \times (S^1 \setminus \{-z'\})$ .

**33.Н** Пусть  $z \in S^1$ . Прообраз точки  $-z$  при проекции состоит из  $n$  точек, которые разбивают тотальное пространство накрытия на  $n$  дуг, при этом сужение проекции на каждую из них определяет гомеоморфизм этой дуги на окрестность  $S^1 \setminus \{-z\}$  точки  $z$ .

**33.И** В силу 33.Е, это утверждение следует из 33.Н.

**33.Ж** Прообраз точки  $y \in \mathbb{R}P^n$  – это пара  $\{x, -x\} \subset S^n$  антиподальных точек. Проходящая через центр сферы плоскость, ортогональная вектору  $x$ , разбивает сферу на две открытых полусферы, каждая из которых гомеоморфно проектируется на (гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$ ) окрестность точки  $y \in \mathbb{R}P^n$ .

**33.К** Нет, не является, поскольку у точки  $1 \in S^1$  не существует правильно накрытой окрестности.

**33.Л** Указанные в формулировке открытые интервалы не являются открытыми подмножествами плоскости. Более того, поскольку прообраз всякого интервала есть связное множество, его вообще нельзя разбить на открытые непересекающиеся подмножества.

**33.М** Докажите, что из определения накрытия следует, что множество точек базы, у которых прообраз имеет заданную мощность, является открытым, и воспользуйтесь связностью базы накрытия.

**33.Н** Те, в которых накрывающим пространством является  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n \setminus 0$  с  $n \geq 3$ ,  $S^n$  с  $n \geq 2$ , т. е. односвязное пространство.

**34.А** Предположим, что поднятие  $g$  тождественного отображения окружности в себя существует; оно является непрерывной инъекцией  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Покажем, что таких инъекций не существует. Пусть  $g(S^1) = [a; b]$ . Из теоремы о промежуточном значении следует, что всякая точка  $x \in (a; b)$  является образом по крайней мере двух точек окружности. Следовательно,  $g$  – не инъекция.

**34.В** Рассмотрим покрытие базы набором правильно накрытых окрестностей его точек и такое разбиение отрезка  $[0; 1]$  точками  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$ , что образ  $s([a_i; a_{i+1}])$  содержится целиком в одной из правильно накрытых окрестностей;  $s([a_i; a_{i+1}]) \subset U_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ . Поскольку сужение накрытия на прообраз  $p^{-1}(U_0)$  является тривиальным накрытием и  $f([a_0; a_1]) \subset U_0$ , то существует поднятие отображения  $s|_{[a_0; a_1]}$ , такое что  $\tilde{s}(a_0) = x_0$ , пусть  $x_1 = \tilde{s}(a_1)$ . Аналогичным образом, существует единственное поднятие  $\tilde{s}|_{[a_1; a_2]}$ , такое что  $\tilde{s}(a_1) = x_1$ ; пусть  $x_2 = \tilde{s}(a_2)$ , и так далее. Таким образом, поднятие  $\tilde{s} : I \rightarrow X$  существует. Его единственность очевидна. Тем, кто с этим не согласен, мы предлагаем провести, к примеру, рассуждение по индукции.

**34.С** Пусть  $h : I \times I \rightarrow B$  – гомотопия между путями  $u$  и  $v$ , таким образом,  $h(\tau, 0) = u(\tau)$ ,  $h(\tau, 1) = v(\tau)$ ,  $h(0, t) = b_0$  и  $h(1, t) = b_1 \in B$ .

Покажем, что существует отображение  $\tilde{h} : I \times I \rightarrow X$ , накрывающее  $h$  и такое, что  $h(0,0) = x_0$ . Доказательство существования накрывающей гомотопии аналогично доказательству теоремы о накрывающем пути. Разобьем квадрат  $I \times I$  на квадраты меньшего размера, образ каждого которых при отображении  $h$  содержится в некоторой правильно накрытой окрестности в пространстве  $B$ . Сужение  $h_{k,l}$  гомотопии  $h$  на каждый из “маленьких” квадратов  $I_{k,l}$  будет накрываться соответствующим отображением  $\tilde{h}_{k,l}$ . Для того, чтобы получить накрывающую  $h$  гомотопию, необходимо только добиться, чтобы эти отображения совпали на пересечениях этих квадратов. В силу 34.3, для этого достаточно потребовать, чтобы эти отображения совпали хотя бы в одной точке. Сделаем первый шаг: пусть  $h(I_{0,0}) \subset U_{b_0}$  и  $\tilde{h}_{0,0} : I_{0,0} \rightarrow X$  – это такое накрывающее отображение, что  $\tilde{h}_{0,0}(a_0, c_0) = x_0$ . Теперь положим  $b_1 = h(a_1, c_0)$  и  $x_1 = \tilde{h}(a_1, c_0)$ . Существует отображение  $\tilde{h}_{1,0} : I_{1,0} \rightarrow X$ , накрывающее  $h|_{I_{1,0}}$ , такое что  $\tilde{h}_{1,0}(a_1, c_0) = x_1$ . Продолжая построение, мы и получим отображение  $\tilde{h}$ , заданную на всем квадрате. Осталось проверить, что  $\tilde{h}$  – это гомотопия путей. Рассмотрим накрывающий путь  $\tilde{u} : t \mapsto \tilde{h}(0, t)$ . Поскольку  $pro\tilde{u}$  – постоянный путь, то и путь  $\tilde{u}$  обязан быть постоянным, значит,  $\tilde{h}(0, t) = x_0$ . Аналогичным образом,  $\tilde{h}(1, t) = x_1$  – фиксированная точка накрывающего пространства. Значит,  $\tilde{h}$  – это гомотопия путей. В заключение заметим, что её единственность следует, опять-таки, из леммы 34.3.

**34.D** Формально это действительно следствие, но, собственно говоря, это уже было показано при доказательстве теоремы 34.C.

**34.E** Постоянный путь накрывается постоянным путем. В силу 34.D, всякая петля, гомотопная постоянной петле, накрывается петлей.

**34.10** К примеру, обобщите теорему 34.B на отображения  $f : S^n \rightarrow B$  при  $n > 1$  (ср. 39.Wx and 39.Xx).

**35.A** Рассмотрим пути  $\tilde{s}_n : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto nt$ ,  $\tilde{s}_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto (n-1)t$  и  $\tilde{s}_1 : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto n-1+t$ , накрывающие пути  $s_n$ ,  $s_{n-1}$  и  $s_1$ , соответственно. Поскольку произведение  $\tilde{s}_{n-1}\tilde{s}_1$  определено и имеет те же начало и конец, что и путь  $\tilde{s}_n$ , то  $\tilde{s}_n \sim \tilde{s}_{n-1}\tilde{s}_1$ , поэтому  $s_n \sim s_{n-1}s_1$ . Значит,  $[s_n] = [s_{n-1}]\alpha$ , откуда по индукции и следует равенство  $[s_n] = \alpha^n$ .

**35.B** См. доказательство предыдущего утверждения: это путь, заданный формулой  $\tilde{s}_n(t) = nt$ .

**35.C** В силу 35.C.1, рассматриваемое отображение определено корректно и является гомоморфизмом. В силу 35.C.2, оно – эпиморфизм, а в силу 35.C.3 – мономорфизм. Значит, оно является изоморфизмом.

**35.C.1** Если  $n \mapsto \alpha^n$  и  $k \mapsto \alpha^k$ , то  $n + k \mapsto \alpha^{n+k} = \alpha^n \cdot \alpha^k$ .

**35.C.2** Из односвязности прямой  $\mathbb{R}$  следует, что пути  $\tilde{s}$  и  $\tilde{s}_n$  гомотопны, значит, гомотопны и пути  $s, s_n$ , следовательно,  $[s] = [s_n] = \alpha^n$ .

**35.C.3** Если  $n \neq 0$ , то путь  $\tilde{s}_n$  заканчивается в точке  $n$ , значит не является петлей. Следовательно, петля  $s_n$  не гомотопна нулю.

**35.D** Это следует из проведенного вычисления фундаментальной группы окружности и утверждения 31.H:

$$\pi_1(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n \text{ сомножителей}, (1, 1, \dots, 1)) \cong \underbrace{\pi_1(S^1, 1) \times \dots \times \pi_1(S^1, 1)}_n \text{ сомножителей} \cong \mathbb{Z}^n.$$

**35.E** Пусть  $S^1 \times S^1 = \{(z, w) : |z| = 1, |w| = 1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Образующими фундаментальной группы  $\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1))$  являются петли  $s_1 : t \mapsto (e^{2\pi it}, 1)$  и  $s_2 : t \mapsto (1, e^{2\pi it})$ .

**35.F** Поскольку  $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ , то  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0, (1, 0)) \cong \pi_1(S^1, 1) \times \pi_1(\mathbb{R}, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

**35.G.1** Пусть  $u$  – петля в  $\mathbb{R}P^n$ , а  $\tilde{u}$  – накрывающий её путь в  $S^n$ . При  $n \geq 2$  сфера  $S^n$  односвязна и, если  $\tilde{u}$  является петлей, то  $\tilde{u}$ , значит, и  $u$  гомотопны нулю. Если же  $\tilde{u}$  петлей не является, то, опять-таки в силу односвязности  $S^n$ ,  $\tilde{u} \sim \tilde{l}$ , следовательно,  $u \sim l$ .

**35.G** В силу 35.G.1 фундаментальная группа состоит из двух элементов, значит, она является циклической группой порядка два.

**35.H** См. 35'5.

**35.M** См. абзац, следующий за формулировкой данного утверждения.

**35.N** Очевидное следствие определения отображения  $P$ .

**35.O** Очевидное следствие определения отображения  $p$ .

**35.P** Проведите доказательство по индукции.

**35.Q** Воспользуйтесь тем, что образ всякой петли, будучи компактным множеством, пересекается только с конечным числом отрезков, из которых состоит тотальное пространство  $X$  накрытия, и воспользуйтесь индукцией по числу таких отрезков.





# Фундаментальная группа и отображения

## 36. Индуцированные гомоморфизмы и их первые применения

### 36'1. Индуцированный гомоморфизм

Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – непрерывное отображение топологического пространства  $X$  в топологическое пространство  $Y$ . Пусть  $x_0 \in X$  и  $y_0 = f(x_0) \in Y$ . В таком случае говорят, что  $f$  *отображает пространство с отмеченной точкой  $(X, x_0)$  в пространство с отмеченной точкой  $(Y, y_0)$*  и пишут  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .

Обозначим через  $f_{\#}$  отображение  $\Omega_1(X, x_0) \rightarrow \Omega_1(Y, y_0) : s \mapsto f \circ s$ .

**36.A.** Отображение  $f_{\#}$  переводит гомотопные петли в гомотопные.

Поэтому  $f_{\#}$  определяет отображение  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

**36.B.** Для любого непрерывного отображения  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  отображение  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  является гомоморфизмом.

Гомоморфизм  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  называется гомоморфизмом, *индуцированным* непрерывным отображением  $f$ .

**36.C.** Пусть  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  и  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  – непрерывные отображения. Тогда

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0).$$

**36.D.** Если отображения  $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$   $x_0$ -гомотопны, то  $f_* = g_*$ .

**36.E. Загадка.** Как обобщить теорему 36.D на случай свободно гомотопных отображений?

**36.F.** Пусть отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно, а точки  $x_0$  и  $x_1$  пространства  $X$  соединены путем  $s : I \rightarrow X$ . Положим  $y_0 = f(x_0)$  и  $y_1 = f(x_1)$ . Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ T_s \downarrow & & \downarrow T_{f \circ s} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

т. е.  $T_{f \circ s} \circ f_* = f_* \circ T_s$ .

**36.1.** Докажите, что отображение  $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z^3$  не гомотопно тождественному отображению  $\mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto z$ .

**36.2.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Докажите, что если непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  продолжается до непрерывного отображения  $\mathbb{R}^n \rightarrow Y$ , то гомоморфизм  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  тривиален (т. е. отображает всю группу в единицу) для любой точки  $x_0 \in X$ .

**36.3.** Докажите, что фундаментальная группа всякого линейно связного хаусдорфова пространства, содержащего открытое множество, гомеоморфное пространству  $S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$ , бесконечна и не является циклической.

**36.3.1.** Докажите, что если пространство  $X$ , удовлетворяющее условиям задачи 36.3, может быть так отображено посредством непрерывного отображения в пространство  $Y$  с бесконечной нециклической фундаментальной группой, чтобы это отображение индуцировало бы эпиморфизм группы  $\pi_1(X)$  на  $\pi_1(Y)$ .

**36.4.** Докажите, что фундаментальная группа пространства  $GL(n, \mathbb{C})$  комплексных неособых  $(n \times n)$ -матриц бесконечна.

## 36'/2. Основная теорема высшей алгебры

Здесь мы докажем теорему, которая, на первый взгляд, никакого отношения к фундаментальной группе не имеет.

**36.G** Основная теорема высшей алгебры. *Всякий многочлен положительной степени от одной переменной с комплексными коэффициентами обладает комплексным корнем.*

Эквивалентная формулировка:

Пусть  $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  — многочлен степени  $n > 0$  с комплексными коэффициентами. Тогда существует такое комплексное число  $w$ , что  $p(w) = 0$ .

Хотя эта теорема формулируется чисто алгебраически и называется основной теоремой *высшей алгебры*, у неё нет ни одного чисто алгебраического доказательства. Её доказательства основаны или на топологических рассуждениях или апеллируют к комплексному анализу. Это не случайно, так как поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел, так же, как и поле  $\mathbb{R}$ , нельзя описать в чисто алгебраических терминах. Все его построения включают какую-либо конструкцию пополнения, ср. 17.

**36.G.1 Редукция к задаче об отображении.** Выведите теорему 36.G из следующего утверждения:

*Каков бы ни был комплексный многочлен  $p(z)$  положительной степени, образ отображения  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto p(z)$  содержит точку  $0 \in \mathbb{C}$ . Другими словами, формула  $z \mapsto p(z)$  не определяет отображения  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$ .*

**36.G.2** Оценка младших членов. Пусть  $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  — комплексный многочлен,  $q(z) = z^n$  и  $r(z) = p(z) - q(z)$ . Тогда существует такое положительное число  $R$ , что  $|r(z)| < |q(z)| = R^n$  для каждого  $z \in \mathbb{C}$  с  $|z| = R$ .

**36.G.3** Лемма о даме с собачкой. (Ср. 29.11.) “Дама”  $q(z)$  и её “собачка”  $p(z)$  гуляют на проколотой плоскости  $\mathbb{C} \setminus 0$  по замкнутому маршруту (т. е. считаем, что  $z \in S^1$ ). Докажите, что если во всякий момент времени “дама”  $q(z)$  отпускает от себя “собачку”  $p(z)$  меньше, чем на  $|q(z)|$ , то путь “собачки”  $S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto p(z)$  будет гомотопен пути “дамы”  $S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0 : z \mapsto q(z)$ .

**36.G.4** Очевидная лемма. (Ср. 29.12.) Если  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение и  $s : S^1 \rightarrow X$  — стягиваемая петля, то и петля  $f \circ s : S^1 \rightarrow Y$  тоже стягиваема.

### 36/3х. Обобщение теоремы о промежуточном значении

**36.Ах. Загадка.** Что может быть аналогом теоремы о промежуточном значении 12.А для отображений  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ?

**36.Вх.** Выясните, эквивалентна ли теорема о промежуточном значении 12.А следующему утверждению:

*Пусть  $f : D^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  — непрерывное отображение. Если  $0 \notin f(S^0)$  и подотображение  $f_0 : S^0 \rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus 0$  отображения  $f$  индуцирует непостоянное отображение  $\pi_0(S^0) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}^1 \setminus 0)$ , то существует такая точка  $x \in D^1$ , что  $f(x) = 0$ .*

**36.Сх. Загадка.** Придумайте обобщение теоремы о промежуточном значении на случай отображений  $D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое обобщало бы переформулировку этой теоремы, предложенную в задаче 36.Вх. Для этого вам придется дать определение индуцированного гомоморфизма для гомотопических групп.

**36.Dx.** Пусть  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывное отображение. Если  $f(S^{n-1})$  не содержит  $0 \in \mathbb{R}^n$  и подотображение  $f_0 : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  отображения  $f$  индуцирует ненулевой гомоморфизм

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0),$$

то существует такая точка  $x \in D^n$ , что  $f(x) = 0$ .

Применение теоремы 36.Dx осложнено условием, труднопроверяемым при  $n > 0$ . При  $n = 2$  это всё же не выходит за рамки теории, развитой выше.

**36.1x.** Пусть  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – непрерывное отображение. Если  $f(S^1)$  не содержит точки  $a \in \mathbb{R}^2$  и круговая петля  $f|_{S^1} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus a$  определяет нетривиальный элемент группы  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus a)$ , то существует такая точка  $x \in D^2$ , что  $f(x) = a$ .

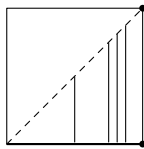
**36.2x.** Пусть  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – непрерывное отображение, сужение которого на граничную окружность  $S^1$  круга совпадает со включением  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Тогда  $f(D^2) \supset D^2$ .

**36.3x.** Пусть отображение  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывно и существует такое вещественное число  $m$ , что  $|f(x) - x| \leq m$  при любом  $x \in \mathbb{R}^2$ . Докажите, что тогда  $f$  сюръективно.

**36.4x.** Пусть  $u, v : I \rightarrow I \times I$  – такие пути, что  $u(0) = (0, 0)$ ,  $u(1) = (1, 1)$ ,  $v(0) = (0, 1)$  и  $v(1) = (1, 0)$ . Докажите, что тогда  $u(I) \cap v(I) \neq \emptyset$ .

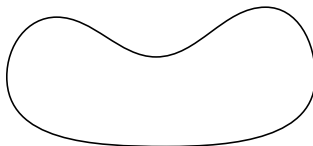
**36.4x.1.** Пусть  $u, v$  – такие как в 36.4x. Докажите, что  $0 \in \mathbb{R}^2$  принадлежит образу отображения  $w : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , определённого формулой  $w(x, y) = u(x) - v(y)$ .

**36.5x.** Докажите, что существуют такие связные дизъюнктные множества  $F, G \subset I^2$ , что  $(0, 0), (1, 1) \in F$  и  $(0, 1), (1, 0) \in G$ .



**36.6x.** Можно ли дополнительно потребовать, чтобы множества  $F$  и  $G$ , удовлетворяющие условиям предыдущей задачи, были замкнутыми?

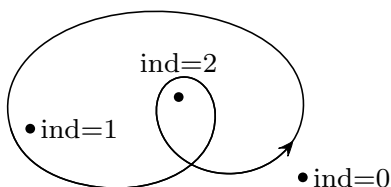
**36.7x\*.** Пусть  $C$  – гладкая простая замкнутая кривая на плоскости, имеющая две точки перегиба. Докажите, что существует прямая, пересекающая  $C$  в таких четырёх точках  $a, b, c, d$ , что отрезки  $[a; b]$ ,  $[b; c]$  и  $[c; d]$  имеют одинаковую длину.



**36'4х. Степень точки относительно петли**

Как мы знаем (см. 35.F), фундаментальная группа проколотой плоскости  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \cong \mathbb{Z}$ . Имеются два изоморфизма, получающихся друг из друга посредством умножения на  $-1$ . Выберем один из них, скажем, тот, который сопоставляет классу петли  $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  элемент  $1 \in \mathbb{Z}$ . В терминах круговых петель этот изоморфизм можно представлять себе как функцию, ставящую в соответствие каждой петле  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$  целое число. Это число есть не что иное как то число раз, которое эта петля обходит вокруг 0 (с учетом направления движения).

Поменяем теперь точку зрения: фиксируем петлю, но будем варьировать точку. Пусть  $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — круговая петля на плоскости и  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \varphi(S^1)$ . Будем называть *степенью* точки  $x$  относительно петли  $u$ , а также *индексом* петли  $u$  относительно точки  $x$  и обозначать через  $\text{ind}(u, x)$  целое число, соответствующее гомотопическому классу  $[u] \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x)$  этой круговой петли при естественном изоморфизме  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x) = \mathbb{Z}$  (мы используем по существу то же самое отождествление группы  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x)$  с  $\mathbb{Z}$ , переводящее в 1 гомотопический класс петли  $t \mapsto x + (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ).



Число  $\text{ind}(u, x)$  удобно охарактеризовать также следующим образом. Одновременно с круговой петлей  $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus x$  рассмотрим отображение  $\varphi_{u,x} : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto \frac{u(z)-x}{|u(z)-x|}$ . Гомоморфизм  $(\varphi_{u,x})_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$  переводит образующую  $\alpha$  фундаментальной группы окружности в элемент  $k\alpha$ , где  $k = \text{ind}(u, x)$ .

**36.Ех.** Соответствие  $x \mapsto \text{ind}(u, x)$  определяет локально постоянную функцию на  $\mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)$ .

**36.8х.** Пусть  $u : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — круговая петля и  $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)$ . Докажите, что если  $\text{ind}(u, x) \neq \text{ind}(u, y)$ , то любой путь в  $\mathbb{R}^2$ , соединяющий  $x$  с  $y$ , пересекает  $u(S^1)$ .

**36.9х.** Если  $u(S^1)$  содержится в некотором круге, а точка  $x$  не принадлежит этому кругу, то  $\text{ind}(u, x) = 0$ .

**36.10х.** Найдите множество значений функции  $\text{ind} : \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  для следующих круговых петель:

(а)  $u(z) = z$ ; (б)  $u(z) = \bar{z}$ ; (в)  $u(z) = z + z^{-1} + z^2 - z^{-2}$  (здесь, как обычно,  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ ).

**36.11х.** Вычислите индексы всевозможных петель, образом которых является лемниската (стандартно вложенный букет двух окружностей), относительно различных точек плоскости.

**36.12х.** Найдите такую круговую петлю  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , для которой существуют точки  $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$  с  $\text{ind}(f, x) = \text{ind}(f, y)$ , принадлежащие разным компонентам связности множества  $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ .

**36.13х.** Докажите, что для любого луча  $R \subset \mathbb{R}^2$ , исходящего из точки  $x$ , количество точек в  $f^{-1}(R)$  не меньше  $|\text{ind}(f, x)|$ .

**36.Fх.** Если отображение  $u: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  является сужением отображения  $F: D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  и  $\text{ind}(u, x) \neq 0$ , то  $x \in F(D^2)$ .

**36.Gх.** Если  $u$  и  $v$  – круговые петли в  $\mathbb{R}^2$  с общей начальной точкой (т. е.  $u(1) = v(1)$ ), и  $uv$  – их произведение, то  $\text{ind}(uv, x) = \text{ind}(u, x) + \text{ind}(v, x)$  для любой точки  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus uv(S^1)$ .

**36.Hх.** Пусть  $u, v: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  круговые петли, а  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (u(S^1) \cup v(S^1))$ . Если существует (свободная) гомотопия  $u_t$ ,  $t \in I$ , переводящая  $u$  в  $v$  и не задевающая точку  $x$  (т. е. такая, что  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus u_t(S^1)$  для каждого  $t \in I$ ), то  $\text{ind}(u, x) = \text{ind}(v, x)$ .

**36.Iх.** Пусть  $u: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  круговая петля и  $a \in \mathbb{C} \setminus u(S^1)$ . Тогда

$$\text{ind}(u, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{|u(z) - a|}{u(z) - a} dz.$$

**36.Jх.** Пусть  $p(z)$  – многочлен с комплексными коэффициентами,  $R > 0$  и пусть  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Рассмотрим круговую петлю  $u: S^1 \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto p(Rz)$ . Если  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus u(S^1)$ , то у многочлена  $p(z) - z_0$  в открытом круге  $B_R^2$  имеется (с учетом кратностей) ровно  $\text{ind}(u, z_0)$  корней.

**36.Kх. Загадка.** На что можно заменить круговую петлю  $u$ , область  $B_R$  и многочлен  $p(z)$ , чтобы сформулированное утверждение сохранило силу?

### 36'5х. Теорема Борсука–Улама

**36.Lх Одномерная теорема Борсука–Улама.** Для любого непрерывного отображения  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  существует такая точка  $x \in S^1$ , что  $f(x) = f(-x)$ .

**36.Mх Двумерная теорема Борсука–Улама.** Для любого непрерывного отображения  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  существует такая точка  $x \in S^2$ , что  $f(x) = f(-x)$ .

**36.Mх.1 Лемма.** Если существует непрерывное отображение  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  с  $f(x) \neq f(-x)$ , такое что для любой точки  $x \in S^2$ , то существует непрерывное отображение  $\varphi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ , индуцирующее нетривиальный гомоморфизм  $\varphi_*: \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1)$ .

**36.14х.** Докажите, что в каждый момент времени существует пара антиподальных точек на поверхности земного шара, в которых величины атмосферного давления и температуры воздуха равны.

Теоремы 36.Lх и 36.Mх – частные случаи следующей общей теоремы. Мы не считаем читателя готовым доказать теорему 36.Nх в полной общности, но нет ли ещё одного доступного частного случая?

**36.Nх Теорема Борсука–Улама.** Для любого непрерывного отображения  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  существует такая точка  $x \in S^n$ , что  $f(x) = f(-x)$ .



## 37. Ретракции и неподвижные точки

### 37'1. Ретракции и ретракты

Непрерывное отображение топологического пространства на своё подпространство называется *ретракцией*, если его сужение на это подпространство есть тождественное отображение. Другими словами, если  $X$  – топологическое пространство,  $A \subset X$ , то отображение  $\rho : X \rightarrow A$  называется ретракцией, если  $\rho|_A = \text{id}_A$ .

**37.A.** Пусть  $\rho$  – непрерывное отображение топологического пространства  $X$  на свое подпространство  $A$ . Следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $\rho$  – ретракция;
- (2)  $\rho(a) = a$  для любой точки  $a \in A$ ;
- (3)  $\rho \circ \text{in} = \text{id}_A$ ;
- (4)  $\rho : X \rightarrow A$  есть продолжение тождественного отображения  $A \rightarrow A$ .

Подпространство  $A$  топологического пространства  $X$  называется *ретрактом*  $X$ , если существует ретракция  $X \rightarrow A$ .

**37.B.** Всякое одноточечное подмножество является ретрактом.

Множество из двух точек может не быть ретрактом.

**37.C.** Никакое двуточечное подмножество прямой  $\mathbb{R}$  не является ее ретрактом.

**37.1.** Если  $A$  – ретракт пространства  $X$  и  $B$  – ретракт пространства  $A$ , то  $B$  – ретракт пространства  $X$ .

**37.2.** Если  $A$  – ретракт пространства  $X$  и  $B$  – ретракт пространства  $Y$ , то  $A \times B$  – ретракт пространства  $X \times Y$ .

**37.3.** Отрезок  $[a; b]$  является ретрактом прямой  $\mathbb{R}$ .

**37.4.** Интервал  $(a; b)$  не является ретрактом прямой  $\mathbb{R}$ .

**37.5.** Какие топологические свойства передаются от объемлющего пространства к его ретрактам?

**37.6.** Докажите, что ретракт хаусдорфова пространства замкнут (в этом пространстве).

**37.7.** Докажите, что объединение оси ординат и множества  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\}$  не является ретрактом плоскости  $\mathbb{R}^2$  и, более того, не является ретрактом никакой своей окрестности.

**37.D.** Двоеточие  $S^0$  не является ретрактом отрезка  $D^1$ .

Роль понятия ретракта проясняется следующей теоремой.

**37.Е.** Подмножество  $A$  топологического пространства  $X$  является его ретрактом, тогда всякое непрерывное отображение  $A \rightarrow Y$  в произвольное пространство  $Y$  можно продолжить до непрерывного отображения  $X \rightarrow Y$ .

### 37'2. Фундаментальная группа и ретракции

**37.Ф.** Если  $\rho : X \rightarrow A$  – ретракция,  $i : A \rightarrow X$  – включение и  $x_0 \in A$ , то  $\rho_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$  есть эпиморфизм, а  $i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  – мономорфизм.

**37.Г. Загадка.** Какое из двух утверждений предыдущей теоремы (о  $\rho_*$  или об  $i_*$ ) легче использовать для доказательства того, что множество  $A \subset X$  не есть ретракт пространства  $X$ ?

**37.Н** Теорема Борсука в размерности два. Окружность  $S^1$  не является ретрактом круга  $D^2$ .

**37.8.** Является ли проективная прямая ретрактом проективной плоскости?

Следующие задачи труднее теоремы **37.Н** в том смысле, что их решение не сводится к прямой ссылке на теорему **37.Ф**, а требует обращения к главной идее ее доказательства: тождеству  $\rho_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)}$ .

**37.9.** Докажите, что граничная окружность ленты Мёбиуса не является ретрактом самой ленты Мёбиуса.

**37.10.** Докажите, что граничная окружность ручки не является ретрактом самой ручки.

Теорема Борсука в полной общности (т. е. обобщение теоремы **37.Н** на старшие размерности) не может быть получена из теоремы **37.Ф** подобно тому, как был выведен ее частный случай. Однако её можно доказать, используя обобщение теоремы **37.Ф** на старшие гомотопические группы.

**37.И** Теорема Борсука. Сфера  $S^{n-1}$  не является ретрактом шара  $D^n$ .

На первый взгляд эта теорема может показаться бесполезной. Зачем нам знать, что в какой-то ситуации не существует отображений крайне специального типа – ретракций? Однако в математике теоремы, утверждающий несуществование чего-то, могут быть тесно связаны с другими, более привлекательными результатами. К примеру, из теоремы Борсука следует теорема Брауэра, имеющая широкую область применения. Однако прежде всего мы введем одно важное понятие, связанное с теоремой Брауэра.

**37'3. Неподвижные точки**

Точка  $a \in X$  называется *неподвижной точкой* отображения  $f : X \rightarrow X$ , если  $f(a) = a$ . Говорят, что пространство  $X$  *обладает свойством неподвижной точки*, если всякое непрерывное отображение  $X \rightarrow X$  имеет неподвижную точку. Свойство неподвижной точки означает разрешимость широкого класса уравнений.

**37.11.** Докажите, что свойство неподвижной точки является топологическим.

**37.12.** Докажите, что отрезок  $[a; b]$  обладает свойством неподвижной точки.

**37.13.** Докажите, что если топологическое пространство обладает свойством неподвижной точки, то этим свойством обладает и всякий его ретракт.

**37.14.** Пусть  $X$  и  $Y$  – топологические пространства,  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$ . Докажите, что  $X$  и  $Y$  обладают свойством неподвижной точки, тогда их букет  $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / [x_0 \sim y_0]$  также обладает свойством неподвижной точки.

**37.15.** Докажите, что всякое конечное дерево (см. 42'4х) обладает свойством неподвижной точки. (Верно ли это утверждение для бесконечных деревьев?)

**37.16.** Обладает ли пространство  $\mathbb{R}^n$  при  $n > 0$  свойством неподвижной точки?

**37.17.** Обладает ли сфера  $S^n$  свойством неподвижной точки?

**37.18.** Докажите, что при нечетных  $n$  вещественное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$  не обладает свойством неподвижной точки. (Подсказка:  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^{(n+1)/2}$ .)

**37.19\*.** Докажите, что при нечетных  $n$  комплексное проективное пространство  $\mathbb{C}P^n$  не обладает свойством неподвижной точки.

**Информация.** При четных  $n$  проективные пространства  $\mathbb{R}P^n$  и  $\mathbb{C}P^n$  обладают свойством неподвижной точки.

**37.J Теорема Брауэра.** *Шар  $D^n$  обладает свойством неподвижной точки.*

**37.J.1.** Выведите теорему Брауэра в размерности  $n$  (т. е. утверждение, что шар  $D^n$  обладает свойством неподвижной точки) из теоремы Борсука в той же размерности (т. е. утверждения, что сфера  $S^{n-1}$  не является ретрактом шара  $D^n$ ).

**37.K.** Выведите теорему Борсука из теоремы Брауэра.

Существование неподвижных точек можно доказывать не только из топологических соображений.

**37.20.** Докажите, что если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – периодическое аффинное преобразование (т. е.  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ раз}} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  при некотором  $p$ ), то у  $f$  есть неподвижная точка.

## 38. Гомотопические эквивалентности

### 38'1. Гомотопическая эквивалентность как отображение

Пусть  $X$  и  $Y$  – топологические пространства,  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$  – непрерывные отображения. Рассмотрим композиции  $f \circ g : Y \rightarrow Y$  и  $g \circ f : X \rightarrow X$ . Если эти композиции являются тождественными отображениями, то  $f$  и  $g$  являются взаимно обратными гомеоморфизмами. Если же композиции  $f \circ g$  и  $g \circ f$  гомотопны тождественным отображениям  $\text{id}_Y$  и  $\text{id}_X$ , то отображения  $f$  и  $g$  называются *гомотопически обратными* друг другу. Если непрерывное отображение  $f$  имеет гомотопически обратное, то говорят, что  $f$  *гомотопически обратимо*, или что  $f$  – *гомотопическая эквивалентность*.

**38.А.** Докажите, что

- (1) Всякий гомеоморфизм есть гомотопическая эквивалентность.
- (2) Всякое отображение, гомотопически обратное гомотопической эквивалентности, само есть гомотопическая эквивалентность.
- (3) Композиция гомотопических эквивалентностей есть гомотопическая эквивалентность.

**38.1.** Приведите пример гомотопической эквивалентности, не являющейся гомеоморфизмом.

### 38'2. Гомотопическая эквивалентность как отношение

Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называются *гомотопически эквивалентными*, если существует гомотопическая эквивалентность  $X \rightarrow Y$ .

**38.В.** *Отношение гомотопической эквивалентности топологических пространств является эквивалентностью.*

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом*. Таким образом, о гомотопически эквивалентных пространствах говорят, что они принадлежат одному и тому же гомотопическому типу или имеют один и тот же гомотопический тип.

**38.2.** Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств – одинаковое число компонент линейной связности.

**38.3.** Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств – одинаковое число компонент связности.

**38.4.** Найдите бесконечное число пространств, принадлежащих одному и тому же гомотопическому типу, но попарно не гомеоморфных друг другу.

### 38'3. Деформационные ретракции

Ретракция  $\rho : X \rightarrow A$  называется *деформационной ретракцией*, если её композиция  $\text{in} \circ \rho$  с включением  $\text{in} : A \rightarrow X$  гомотопна тождественному отображению  $\text{id}_X$ . Если композиция  $\text{in} \circ \rho$  связанно на  $A$  гомотопна  $\text{id}_X$ , то  $\rho$  называется *строгой деформационной ретракцией*. Если существует (строгая) деформационная ретракция  $X$  на  $A$ , то  $A$  называется (*строгим*) *деформационным ретрактом* пространства  $X$ .

**38.C.** Всякая деформационная ретракция является гомотопической эквивалентностью.

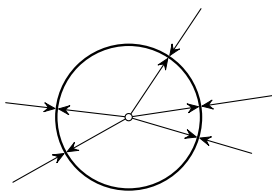
**38.D.** Если  $A$  – деформационный ретракт  $X$ , то пространства  $X$  и  $A$  гомотопически эквивалентны.

**38.E.** Любые два деформационных ретракта одного и того же пространства гомотопически эквивалентны.

**38.F.** Если  $A$  есть деформационный ретракт пространства  $X$ , а  $B$  есть деформационный ретракт пространства  $Y$ , то  $A \times B$  – деформационный ретракт пространства  $X \times Y$ .

### 38'4. Примеры гомотопических эквивалентностей

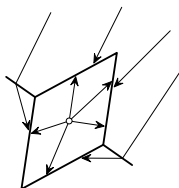
**38.G.** Окружность  $S^1$  является деформационным ретрактом проколотой плоскости  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ .



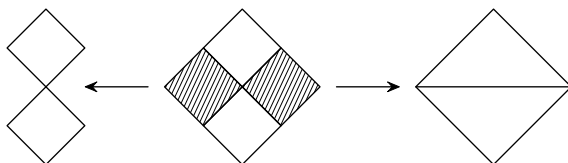
**38.5.** Докажите, что лента Мёбиуса гомотопически эквивалентна окружности.

**38.6.** Расклассифицируйте буквы латинского алфавита с точностью до гомотопической эквивалентности.

**38.H.** Докажите, что плоскость, из которой удалены  $s$  точек, имеет тот же гомотопический тип, что и букет  $s$  окружностей.



**38.1.** Докажите, что объединение контура квадрата с одной из его диагоналей гомотопически эквивалентно букету двух окружностей.



**38.7.** Докажите, что ручка гомотопически эквивалентна букету двух окружностей.

**38.8.** Докажите, что ручка гомотопически эквивалентна объединению трех дуг, имеющих общие концы (т. е. греческой букве  $\theta$ ).

**38.9.** Докажите, что пространство, полученное из сферы  $S^2$  в результате отождествления каких-либо двух её точек, гомотопически эквивалентно букету окружности и сферы.

**38.10.** Докажите, что пространство комплексных квадратных многочленов со старшим коэффициентом 1 и с различными корнями, т. е. пространство

$$\{(p, q) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + pz + q = 0 \text{ имеет два различных корня}\},$$

гомотопически эквивалентно окружности.

**38.11.** Докажите, что пространство обратимых вещественных  $(n \times n)$ -матриц  $GL(n, \mathbb{R})$  гомотопически эквивалентно пространству ортогональных матриц  $O(n)$ .

**38.12. Загадка.** Какое отношение имеет решение предыдущей задачи к ортогонализации Грама–Шмидта, а ортогонализация Грама–Шмидта – к деформационной ретракции?

**38.13.** Постройте деформационные ретракции: (a)  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ ; (b)  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^m \rightarrow S^{n-m-1}$ ; (c)  $S^3 \setminus S^1 \rightarrow S^1$ ; (d)  $S^n \setminus S^m \rightarrow S^{n-m-1}$  (e)  $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^m \rightarrow \mathbb{R}P^{n-m-1}$ .

### 38'5. Деформационные ретракции и гомотопические эквивалентности

**38.J.** 1) Можно ли одно из пространств задачи 38.1 вложить в другое?  
2) Можно ли вложить каждое из них в плоскость с двумя выколотыми точками в качестве деформационного ретракта?

Деформационные ретракции составляют особую разновидность гомотопических эквивалентностей. Они более доступны наглядному представлению, но, как это видно из 38.J, бывают такие гомотопически эквивалентные пространства, что ни одно из них не вкладывается в другое. Создаётся впечатление, что деформационных ретракций не хватает для установления гомотопической эквивалентностей.

Однако, это не так.

**38.14\*.** Докажите, что любые два гомотопически эквивалентных пространства могут быть вложены в качестве деформационных ретрактов в одно и то же топологическое пространство.

### 38'6. Стягиваемые пространства

Топологическое пространство называется  $X$  *стягиваемым*, если тождественное отображение  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  гомотопно нулю.

**38.15.** Покажите, что отрезок  $I$  и прямая  $\mathbb{R}$  стягиваемы.

**38.16.** Докажите, что всякое стягиваемое пространство линейно связно.

**38.17.** Эквивалентны ли следующие свойства пространства  $X$ ?

- (1) Пространство  $X$  стягиваемо.
- (2) Пространство  $X$  гомотопически эквивалентно точке.
- (3) Существует деформационная ретракция  $X$  на точку.
- (4) Некоторая точка  $x \in X$  является деформационным ретрактом пространства  $X$ .
- (5) Всякое непрерывное отображение произвольного пространства  $Y$  в  $X$  гомотопно нулю.
- (6) Всякое непрерывное отображение из  $X$  в произвольное пространство  $Y$  гомотопно нулю.

**38.18.** Верно ли, что если пространство  $X$  стягиваемо, то для любого пространства  $Y$ :

- (1) любые два непрерывных отображения  $X \rightarrow Y$  гомотопны;
- (2) любые два непрерывных отображения  $Y \rightarrow X$  гомотопны?

**38.19.** Какие из нижеследующих пространств стягиваемы?

- (1)  $\mathbb{R}^n$ ,
- (2) выпуклое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,
- (3)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\}$ ,
- (4) звёздное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,
- (5) конечное дерево (см. 42'4х).

**38.20.** Докажите, что произведение  $X \times Y$  пространств стягиваемо, когда каждый сомножитель  $X$  и  $Y$  стягиваем.

### 38'7. Фундаментальная группа и гомотопический тип

**38.К.** Пусть отображения  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$  гомотопически взаимно обратны,  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  — такие точки, что  $f(x_0) = y_0$  и  $g(y_0) = x_0$ , и, более того, гомотопии, соединяющие  $f \circ g$  с  $\text{id}_Y$  и  $g \circ f$  с  $\text{id}_X$ , неподвижны на  $y_0$  и  $x_0$ , соответственно. Тогда  $f_*$  и  $g_*$  являются взаимно обратными изоморфизмами между группами  $\pi_1(X, x_0)$  и  $\pi_1(Y, y_0)$ .

**38.Л** Следствие. Если  $\rho : X \rightarrow A$  — строгая деформационная ретракция,  $x_0 \in A$ , то  $\rho_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$  и  $\text{in}_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  — взаимно обратные изоморфизмы.

**38.21.** Вычислите фундаментальные группы следующих пространств:

- (a)  $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$ , (b)  $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^n$ , (c)  $S^3 \setminus S^1$ , (d)  $\mathbb{R}^N \setminus S^n$ ,  
 (e)  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ , (f)  $S^N \setminus S^n$ , (g)  $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1$ , (h) ручка,  
 (i) лента Мёбиуса, (j) сфера с  $s$  дырами,  
 (k) бутылка Клейна с одной удаленной точкой, (l) лента Мёбиуса с  $s$  дырами.

**38.22.** Докажите, что граничная окружность ленты Мёбиуса, стандартно вложенной в  $\mathbb{R}^3$  (см. 21.18), не ограничивает вложенного в  $\mathbb{R}^3$  диска, внутренность которого не пересекала бы ленту Мёбиуса.

**38.23.** 1) Вычислите фундаментальную группу пространства  $Q$  всех квадратичных комплексных многочленов  $ax^2 + bx + c$ , имеющих различные корни.  
 2) Вычислите фундаментальную группу его подпространства  $Q_1$ , состоящего из многочленов с  $a = 1$ .

**38.24. Загадка.** Можно ли решить задачу 38.23 посредством выкладок, дающих традиционный вывод формулы для корней квадратного трехчлена?

**38.М.** Ослабим предположения теоремы 38.К следующим образом. Будем считать, что  $g(y_0) \neq x_0$  и (или) гомотопии, соединяющие  $f \circ g$  с  $\text{id}_Y$  и  $g \circ f$  с  $\text{id}_X$ , не связаны в точках  $y_0$  и  $x_0$ , соответственно? Как тогда связаны между собой  $f_*$  и  $g_*$ ? Изоморфны ли группы  $\pi_1(X, x_0)$  и  $\pi_1(Y, y_0)$ ?



## 39. Накрытия и фундаментальная группа

### 39'1. Гомоморфизм, индуцированный проекцией

**39.A.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие,  $x_0 \in X$  и  $b_0 = p(x_0)$ . Тогда  $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  – мономорфизм.

Назовем *группой накрытия*  $p : X \rightarrow B$  в точке  $x_0$  подгруппу  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  группы  $\pi_1(B, b_0)$ .

**39.B. Загадка.** Определяется ли группа накрытия накрытием?

**39.C Группа накрытия и подвѣм петель.** Опишите на языке теоремы о накрывающем пути 33.J те петли в базе накрытия, гомотопические классы которых принадлежат группе накрытия.

**39.D.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие, точки  $x_0, x_1 \in X$  находятся в одной и той же компоненте линейной связности пространства  $X$  и  $b_0 = p(x_0) = p(x_1)$ . Тогда подгруппы  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  и  $p_*(\pi_1(X, x_1))$  сопряжены в  $\pi_1(B, b_0)$  (т. е. существует такой элемент  $\alpha$  группы  $\pi_1(B, b_0)$ , что  $p_*(\pi_1(X, x_1)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha$ ).

**39.E.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие,  $x_0 \in X$  и  $b_0 = p(x_0)$ . Для любого гомотопического класса  $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$  существует точка  $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ , такая что  $p_*(\pi_1(X, x_1)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha$ .

**39.F.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие в узком смысле и  $G \subset \pi_1(B, b_0)$  – группа этого накрытия, отвечающая отмеченной точке  $x_0$ . Подгруппа  $H \subset \pi_1(B, b_0)$  является группой того же накрытия, тогда она сопряжена подгруппе  $G$ .

### 39'2. Еще раз о числе листов накрытия

**39.G Число листов и индекс группы накрытия.** У конечнолистного накрытия в узком смысле число листов равно индексу его группы.

**39.H Листы и правые смежные классы.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие в узком смысле,  $b_0 \in B$ ,  $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ . Постройте естественную биекцию множества  $p^{-1}(b_0)$  на множество  $p_*(\pi_1(X, x_0)) \backslash \pi_1(B, b_0)$  правых смежных классов фундаментальной группы базы этого накрытия по группе накрытия.

**39.1 Число листов универсального накрытия.** Число листов универсального накрытия равно порядку фундаментальной группы его базы.

**39.2 Нетривиальность накрытия влечет нетривиальность фундаментальной группы.** Фундаментальная группа любого топологического пространства, обладающего нетривиальным линейно связным накрывающим пространством, не тривиальна.

**39.3.** Какие числа возникают как число листов накрытия ленты Мёбиуса цилиндром  $S^1 \times I$ ?

**39.4.** Чему могут равняться числа листов накрытия ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса?

**39.5.** Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна тором?

**39.6.** Чему могут равняться числа число листов накрытия бутылки Клейна бутылкой Клейна?

**39.7.** Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна плоскостью  $\mathbb{R}^2$ ?

**39.8.** Чему могут равняться числа листов накрытия бутылки Клейна цилиндром  $S^1 \times \mathbb{R}$ ?

### 39'3. Иерархия накрытий (в узком смысле)

Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow B$  – накрытия в узком смысле,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  и  $p(x_0) = q(y_0) = b_0$ . Говорят, что накрытие  $q$  с отмеченной точкой  $y_0$  *подчинено* накрытию  $p$  с отмеченной точкой  $x_0$ , если существует такое отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$ , что  $q \circ \varphi = p$  и  $\varphi(x_0) = y_0$ . Отображение  $\varphi$  в этом случае называется *подчинением*.

**39.I.** Подчинение является накрытием.

**39.J.** Если подчинение существует, то оно единственно. Ср. 34.B.

Говорят, что накрытия  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow B$  *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм  $h : X \rightarrow Y$ , такой что  $p = q \circ h$ . Гомеоморфизмы  $h$  и  $h^{-1}$  называются в этом случае *эквивалентностями*.

**39.K.** Если два накрытия с отмеченной точкой подчинены друг другу, то соответствующие подчинения являются эквивалентностями.

**39.L.** Эквивалентность накрытий с отмеченной точкой действительно является отношением эквивалентности на множестве накрытий с данной базой.

**39.M.** Подчинение определяет отношение частичного порядка на множестве классов эквивалентных накрытий с отмеченной точкой и данной базой.

**39.9.** Какой класс эквивалентных накрытий минимален (т.е. подчинён всем)?

**39.N.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow B$  – накрытия,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  и  $p(x_0) = q(y_0) = b_0$ . Если накрытие  $q$  с отмеченной точкой  $y_0$  подчинено накрытию  $p$  с отмеченной точкой  $x_0$ , то группа накрытия  $p$  содержится в группе накрытия  $q$ , т. е.  $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$ .

**39'4х. Существование подчинений**

Топологическое пространство называется *локально линейно связным*, если в каждой окрестности  $U$  любой его точки существует линейно связная окрестность  $V \subset U$  этой точки.

**39.1х.** Постройте линейно связное, но не локально линейно связное пространство.

**39.Ах.** Пусть  $B$  – локально линейно связное пространство,  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow B$  – его накрытия в узком смысле,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  и  $p(x_0) = q(y_0) = b_0$ . Накрытие  $q$  подчинено накрытию  $p$ , тогда  $p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$ .

**39.Ах.1.** В условиях утверждения 39.Ах, если пути  $u, v : I \rightarrow X$  имеют общую начальную точку  $x_0$  и общую конечную точку, то пути, накрывающие пути  $p \circ u$  и  $p \circ v$  и имеющие общую начальную точку  $y_0$ , оканчиваются также в одной и той же точке.

**39.Ах.2.** В условиях утверждения 39.Ах отображение  $X \rightarrow Y$ , определённое посредством 39.Ах.1 (угадайте, что это за отображение!), непрерывно.

**39.2х.** Постройте пример, показывающий, что условие локальной линейной связности в 39.Ах.2 и в 39.Ах необходимо.

**39.Вх.** Два накрытия,  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow B$ , с общей локально линейно связной базой эквивалентны, тогда для некоторых  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  с  $p(x_0) = q(y_0) = b_0$  группы  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  и  $q_*(\pi_1(Y, y_0))$  сопряжены в  $\pi_1(B, b_0)$ .

**39.3х.** Постройте пример, показывающий, что условие локальной линейной связности базы в 39.Вх необходимо.

**39'5х. Микроодносвязность**

Топологическое пространство  $X$  называется *микроодносвязным*, если у каждой точки  $a \in X$  есть такая окрестность  $U$ , что гомоморфизм включения  $\pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  тривиален.

**39.4х.** Всякое односвязное пространство микроодносвязно.

**39.5х.** Укажите микроодносвязное, но не односвязное пространство.

Топологическое пространство называется *локально стягиваемым в точке*  $a$ , если всякая окрестность  $U$  точки  $a$  содержит такую её окрестность  $V$ , что включение  $V \rightarrow U$  гомотопно нулю (так будет, например, в случае, когда в окрестности  $U$  содержится стягиваемая окрестность точки  $a$ ). Топологическое пространство называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

**39.6х.** Любое конечное топологическое пространство локально стягиваемо.

**39.7х.** Покажите, что всякое локально стягиваемое пространство микроодно-связно.

**39.8х.** Постройте не микроодносвязное пространство.

В литературе микроодносвязность называется также *локальной односвязностью в слабом смысле*, а локальной односвязностью в сильном смысле называется следующее свойство: всякая окрестность  $U$  любой точки содержит такую её окрестность  $V$ , что любая петля, лежащая в  $V$ , гомотопна постоянной петле в  $U$ .

**39.9х.** Постройте микроодносвязное пространство, которое не является локально односвязным в сильном смысле.

### 39'6х. Существование накрытий

**39.Сх.** Всякое пространство, обладающее универсальным накрывающим, микроодносвязно.

**39.Дх** Существование накрытия с данной группой. Если пространство  $B$  линейно связно, локально линейно связно и микроодносвязно, то для всякой его точки  $b_0$  и всякой подгруппы  $\pi$  группы  $\pi_1(B, b_0)$  существует такое накрытие  $p : X \rightarrow B$  и такая точка  $x_0 \in X$ , что  $p(x_0) = b_0$  и  $p_*(\pi_1(X, x_0)) = \pi$ .

**39.Дх.1.** Пусть в условиях теоремы 39.Дх накрытие  $p : X \rightarrow B$ , удовлетворяющее требованиям этой теоремы, существует. Опишите для каждого  $x \in X$  класс всех путей в  $B$ , представимых как образы при  $p$  путей, соединяющих в  $X$  точку  $x_0$  с  $x$ .

**39.Дх.2.** Определяет ли решение задачи 39.Дх.1 такое отношение эквивалентности в множестве всех путей в  $B$ , начинающихся в точке  $b_0$ , которое определяет биекцию между множеством  $X$  и множеством классов эквивалентных путей?

**39.Дх.3.** Опишите такую топологию в множестве классов эквивалентных путей из 39.Дх.2, чтобы естественная биекция между  $X$  и этим множеством оказалась гомеоморфизмом.

**39.Дх.4.** Докажите, что построение пространства  $X$  и отображения  $p : X \rightarrow B$ , содержащееся в задачах 39.Дх.1– 39.Дх.4, в предположениях теоремы 39.Дх определяет искомое накрытие.

По существу, из утверждений 39.Дх.1– 39.Дх.3 следует единственность накрытия с данной группой. Точнее, верно следующее утверждение.

**39.Ех** Единственность накрытия с данной группой. Предположим, что пространство  $B$  линейно связно, локально линейно связно и микроодносвязно. Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow B$  накрытия, причем

$p_*(\pi_1(X, x_0)) = q_*(\pi_1(Y, y_0))$ . Тогда накрытия  $p$  и  $q$  эквивалентны, т. е. существует такой гомеоморфизм  $f : X \rightarrow Y$ , что  $f(x_0) = y_0$  и  $p \circ f = q$ .

**39.Fx** Классификация накрытий с “хорошей” базой. Имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных накрытий (в узком смысле) над линейно связным локально линейно связным и микроодносвязным пространством  $B$  с отмеченной точкой  $b_0$  и классами сопряженных подгрупп группы  $\pi_1(B, b_0)$ . Это соответствие переводит иерархию накрытий (с порядком – подчинением) в иерархию подгрупп (с порядком – теоретико-множественным включением).

Тривиальной подгруппе при соответствии теоремы 39.Fx отвечает накрытие с односвязным накрывающим. Поскольку этому накрытию подчинены все остальные накрытия с той же базой, его и называют **универсальным**.

**39.10x.** Опишите все накрытия следующих пространств с точностью до эквивалентности и укажите, какие из них подчинены друг другу:

- (1) окружность  $S^1$ ;
- (2) проколота плоскость  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ ;
- (3) лента Мёбиуса;
- (4) четырёхточечная цифровая окружность (пространство, составленное из четырёх точек, скажем,  $a, b, c, d$  с топологией, порождённой базой, состоящей из множеств  $\{a\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{a, b, c\}$  и  $\{c, d, a\}$ );
- (5) тор  $S^1 \times S^1$ ;

### 39'7x. Действие фундаментальной группы на слое

**39.Gx Действие группы  $\pi_1$  в слое накрытия.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие,  $b_0 \in B$ . Постройте естественное правое действие группы  $\pi_1(B, b_0)$  в  $p^{-1}(b_0)$ .

**39.Hx. Загадка.** При каких условиях действие из 39.Gx транзитивно?

### 39'8x. Автоморфизмы накрытия

Гомеоморфизм  $\varphi : X \rightarrow X$  называется **автоморфизмом** накрытия  $p : X \rightarrow B$ , если  $p \circ \varphi = p$ .

**39.Ix.** Автоморфизмы накрытия составляют группу.

Обозначим группу автоморфизмов накрытия  $p : X \rightarrow B$  через  $\text{Aut}(p)$ .

**39.Jx.** Автоморфизм  $\varphi : X \rightarrow X$  накрытия  $p : X \rightarrow B$  в узком смысле определяется образом любой точки  $x_0 \in X$ .

**39.Kx.** Любое двулистное накрытие обладает нетривиальным автоморфизмом.

**39.11х.** Найдите трёхлистное накрытие, не имеющее нетождественных автоморфизмов.

Пусть  $G$  – группа и  $H$  – её подгруппа. Напомним, что **нормализатором**  $\text{Nr}(H)$  подгруппы  $H$  называется часть группы  $G$ , составленная из таких  $g \in G$ , для которых  $g^{-1}Hg = H$ . Это – наибольшая подгруппа группы  $G$ , содержащая  $H$  в качестве своей нормальной подгруппы, так что  $\text{Nr}(H)/H$  есть группа.

**39.Lх.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие,  $x_0 \in X$  и  $b_0 = p(x_0)$ . Постройте отображение  $\pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ , которое индуцировало бы биекцию множества правых смежных классов  $p_*(\pi_1(X, x_0)) \backslash \pi_1(B, b_0)$  на  $p^{-1}(b_0)$ .

**39.Mх.** Покажите, что множество образов точки  $x_0$  при всевозможных автоморфизмах накрытия  $p : X \rightarrow B$  соответствует при биекции  $p_*(\pi_1(X, x_0)) \backslash \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ , построенной в 39.H, группе  $\text{Nr}(p_*(\pi_1(X, x_0)))/p_*$

**39.Nх.** Для всякого накрытия  $p : X \rightarrow B$  в узком смысле имеется естественный антигомоморфизм<sup>1</sup> группы  $\text{Aut}(p)$  в группу  $\text{Nr}(p_*(\pi_1(X, x_0)))/p_*$

**39.Oх.** Если база  $B$  локально линейно связна, то в предположениях теоремы 39.Nх антигомоморфизм  $\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Nr}(p_*(\pi_1(X, x_0)))/p_*(\pi_1(X, x_0))$  биективен.

### 39'9х. Регулярные накрытия

**39.Pх** Регулярность накрытия. Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие в узком смысле,  $b_0 \in B$ ,  $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  есть нормальный делитель группы  $\pi_1(B, b_0)$ ;
- (2)  $p_*(\pi_1(X, x))$  – нормальный делитель группы  $\pi_1(B, p(x))$  для всякого  $x \in X$ ;
- (3) все группы  $p_*(\pi_1(X, x))$  с  $x \in p^{-1}(b)$  совпадают;
- (4) для любой петли  $s : I \rightarrow B$  либо каждый путь в  $X$ , накрывающий петлю  $s$ , является петлёй (независимо от его начальной точки), либо ни один из этих путей не есть петля;
- (5) группа автоморфизмов накрытия действует в слое  $p^{-1}(b_0)$  транзитивно.

Накрытие, удовлетворяющее любому из эквивалентных условий теоремы 39.Pх, называется **регулярным**.

<sup>1</sup>Напомним, что отображение  $\varphi : G \rightarrow H$  группы  $G$  в группу  $H$  называется **антигомоморфизмом**, если  $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$  для любых  $a, b \in G$ .

**39.12х.** Накрытия  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$  и  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^n$  с целыми  $n > 0$  регулярны.

**39.Qх.** Для любой точки  $x_0 \in p^{-1}(b_0)$  группа автоморфизмов регулярного накрытия  $p : X \rightarrow B$  естественно анти-изоморфна факторгруппе  $\pi_1(B, b_0)/p_*\pi_1(X, x_0)$  группы  $\pi_1(B, b_0)$  по группе этого накрытия.

**39.13х.** Любое двулистное накрытие регулярно.

**39.14х.** Какие накрытия, рассмотренные в задачах параграфа 33, регулярны? Вообще, имеются ли среди них нерегулярные накрытия?

**39.15х.** Постройте трёхлистное нерегулярное накрытие букета двух окружностей.

**39.16х.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – регулярное накрытие,  $Y \subset X$ ,  $C \subset B$  и  $q : Y \rightarrow C$  – подотображение проекции  $p$ . Докажите, что если  $q$  является накрытием, то это накрытие регулярно.

### 39'10х. Подъём и накрытие отображения

**39.Rх. Загадка.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $f : Y \rightarrow B$  – непрерывные отображения. Пусть  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  – такие точки, что  $p(x_0) = f(y_0)$ . Сформулируйте в терминах гомоморфизмов  $p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(B, p(x_0))$  и  $f_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(B, f(y_0))$  необходимое условие существования такого поднятия  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  отображения  $f$ , что  $\tilde{f}(y_0) = x_0$ . Постройте пример, в котором это условие не было бы достаточным. При каких дополнительных предположениях оно является достаточным?

**39.Sх** Теорема о поднятии отображения. Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие в узком смысле и  $f : Y \rightarrow B$  – непрерывное отображение. Пусть  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  – такие точки, что  $p(x_0) = f(y_0)$ . Если  $Y$  – локально линейно связное пространство и  $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$ , то существует единственное непрерывное отображение  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ , такое что  $p \circ \tilde{f} = f$  и  $\tilde{f}(y_0) = x_0$ .

**39.Tх.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow C$  – накрытия в узком смысле и  $f : B \rightarrow C$  – непрерывное отображение. Пусть  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  – такие точки, что  $f(p(x_0)) = q(y_0)$ . Если существует такое непрерывное отображение  $F : X \rightarrow Y$ , что  $f \circ p = q \circ F$  и  $F(x_0) = y_0$ , то  $f_*(p_*(\pi_1(X, x_0))) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$ .

**39.Uх** Теорема о накрытии отображения. Пусть  $p : X \rightarrow B$  и  $q : Y \rightarrow C$  – накрытия в узком смысле, пусть  $f : B \rightarrow C$  – непрерывное отображение и пусть  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  – такие точки, что  $f(p(x_0)) = q(y_0)$ . Если пространство  $Y$  локально линейно связно и  $f_*(p_*(\pi_1(X, x_0))) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$ , то существует единственное непрерывное отображение  $F : X \rightarrow Y$ , такое что  $f \circ p = q \circ F$  и  $F(x_0) = y_0$ .

**39'11х. Индуцированные накрытия**

**39.Vх.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие, а  $f : A \rightarrow B$  произвольное непрерывное отображение. Через  $W$  обозначим подпространство произведения  $A \times X$ , состоящее из всех точек  $(a, x)$ , таких что  $f(a) = p(x)$ . Пусть  $q : W \rightarrow A$  – сужение проекции  $A \times X \rightarrow A$ . Тогда  $q : W \rightarrow A$  является накрытием с таким же числом листов, что и накрытие  $p$ .

Накрытие  $q : W \rightarrow A$ , существование которого утверждается в теореме 39.Vх, называется *накрытием, индуцированным из  $p : X \rightarrow B$  посредством  $f : A \rightarrow B$* .

**39.17х.** Представьте накрытия, описанные в задачах 33.D и 33.F в виде накрытий, индуцированных из накрытия  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$ .

**39.18х.** Какие из рассмотренных ранее накрытий индуцируются из накрытия задачи 35.7?

**39'12х. Высшие гомотопические группы  
накрывающих пространств**

**39.Wх.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие. Для всякого непрерывного отображения  $s : I^n \rightarrow B$  и всякого непрерывного отображения  $u : I^{n-1} \rightarrow X$ , накрывающего его сужение  $s|_{I^{n-1}}$ , существует единственное накрывающее непрерывное отображение для  $s$ , которое является продолжением отображения  $u$ .

**39.Xх.** Пусть  $p : X \rightarrow B$  – накрытие, а точки  $x_0 \in X$  и  $b_0 \in B$  таковы, что  $p(x_0) = b_0$ . Тогда для любого натурального числа  $r > 1$  гомотопические группы  $\pi_r(X, x_0)$  и  $\pi_r(B, b_0)$  канонически изоморфны.

**39.Yх.** Докажите, что высшие гомотопические группы окружности, тора, ленты Мёбиуса и бутылки Клейна тривиальны.



## Доказательства и комментарии

**36.A** Следует из 29.I.

**36.B** Пусть  $[u], [v] \in \pi_1(X, x_0)$ . Так как  $f \circ (uv) = (f \circ u)(f \circ v)$ , то  $f_{\#}(uv) = f_{\#}(u)f_{\#}(v)$  и

$$\begin{aligned} f_*([u][v]) &= f_*([uv]) = [f_{\#}(uv)] = [f_{\#}(u)f_{\#}(v)] = \\ &= [f_{\#}(u)][f_{\#}(v)] = f_*([u])f_*([v]). \end{aligned}$$

**36.C** Пусть  $[u] \in \pi_1(X, x_0)$ . Поскольку  $(g \circ f)_{\#}(u) = g \circ f \circ u = g_{\#}(f_{\#}(u))$ , то, следовательно

$$(g \circ f)_*([u]) = [(g \circ f)_{\#}(u)] = [g_{\#}(f_{\#}(u))] = g_*([f_{\#}(u)]) = g_*(f_*([u])),$$

таким образом,  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

**36.D** Пусть  $H : X \times I \rightarrow Y$  – гомотопия между  $f$  и  $g$ , причем  $H(x_0, t) = y_0$  при всех  $t \in I$ ;  $u$  – некоторая петля в  $X$ . Рассмотрим отображение  $h = H \circ (u \times \text{id}_I)$ , таким образом,  $h : (\tau, t) \mapsto H(u(\tau), t)$ . Тогда  $h(\tau, 0) = H(u(\tau), 0) = f(u(\tau))$ , а  $h(\tau, 1) = H(u(\tau), 1) = g(u(\tau))$ , таким образом,  $h$  является гомотопией между петлями  $f \circ u$  и  $g \circ u$ . Более того,  $h(0, t) = H(u(0), t) = H(x_0, t) = y_0$ , аналогичным образом,  $h(1, t) = y_0$ , значит,  $h$  является гомотопией между петлями  $f_{\#}(u)$  и  $g_{\#}(u)$ , следовательно,

$$f_*([u]) = [f_{\#}(u)] = [g_{\#}(u)] = g_*([u]).$$

**36.E** Пусть  $H$  – это гомотопия между отображениями  $f$  и  $g$  и петля  $s$  задана формулой  $s(t) = H(x_0, t)$ . В силу утверждения 32.2,  $g_* = T_s \circ f_*$ .

**36.F** Данное утверждение является очевидным следствием равенства  $f_{\#}(s^{-1}us) = (f \circ s)^{-1}f_{\#}(u)(f \circ s)$ .

**36.G.1** Это в точности утверждение теоремы 36.G.

**36.G.2** К примеру, достаточно взять число  $R$ , удовлетворяющее неравенству

$$R > \max\{1, |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\}.$$

**36.G.3** Воспользуемся прямолинейной гомотопией  $h(z, t) = tp(z) + (1-t)q(z)$ . Все, что осталось проверить – это то, что  $h(z, t) \neq 0$  при всех  $z$  и  $t$ . Действительно, так как по условию  $|p(z) - q(z)| < q(z)$ , то

$$|h(z, t)| \geq |q(z)| - t|p(z) - q(z)| \geq |q(z)| - |p(z) - q(z)| > 0.$$

**36.G.4** Действительно, совсем очевидная лемма; см. 36.A.

**36.G** Выберем число  $R$ , удовлетворяющее условию утверждения 36.G.2 и рассмотрим петлю  $u : u(t) = Re^{2\pi it}$ . Петля  $u$ , конечно, гомотопна в  $\mathbb{C}$  постоянной петле. Теперь предположим, что  $p(z) \neq 0$  ни при каком  $z$ , для которого  $|z| \leq R$ . Тогда петля  $p \circ u$  гомотопна постоянной петле в  $\mathbb{C} \setminus 0$ , в силу 36.G.3, и петля  $q \circ u$  гомотопна постоянной петле в  $\mathbb{C} \setminus 0$ . Однако  $(q \circ u)(t) = R^n e^{2\pi i n t}$ , значит, эта петля не гомотопна постоянной. Полученное противоречие доказывает теорему.

**36.Ax** См. 36.Dx.

**36.Bx** Да, эквивалентна.

**36.Cx** См. 36.Dx.

**36.Dx** Пусть  $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$  – включение. Предположим, что  $f(x) \neq 0$  при всех  $x \in D^n$ . Сохраним обозначение  $f$  за подотображением  $D^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  и рассмотрим гомоморфизмы включения  $i_* : \pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(D^n)$  и  $f_* : \pi_{n-1}(D^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ . Поскольку все гомотопические группы шара  $D^n$  тривиальны, то композиция  $(f \circ i)_* = f_* \circ i_*$  – нулевой гомоморфизм. Однако композиция  $f \circ i$  совпадает с отображением  $f_0$ , которое, по условию, индуцирует ненулевой гомоморфизм  $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ .

**36.Ex** Рассмотрим круговую окрестность  $U$  точки  $x$ , не пересекающуюся с образом  $u(S^1)$  рассматриваемой круговой петли и пусть  $y \in U$ . Соединим  $x$  и  $y$  линейным путем  $s : t \mapsto ty + (1-t)x$ .

$$h(z, t) = \varphi_{u, s(t)}(z) = \frac{u(z) - s(t)}{|u(z) - s(t)|}$$

определяет гомотопию между отображениями  $\varphi_{u, x}$  и  $\varphi_{u, y}$ , значит,  $(\varphi_{u, x})_* = (\varphi_{u, y})_*$ , откуда и следует, что  $\text{ind}(u, y) = \text{ind}(u, x)$  для любой точки  $y \in U$ . Следовательно, функция  $\text{ind} : x \mapsto \text{ind}(u, x)$  постоянна на данной окрестности.

**36.Fx** Если  $x \notin F(D^2)$ , то круговая петля  $u$  будет гомотопной нулю в  $\mathbb{R}^2 \setminus x$ , так как  $u = F \circ i$ , где  $i$  – стандартное вложение  $S^1 \rightarrow D^2$ , а  $i$  гомотопна нулю в  $D^2$ .

**36.Gx** Это так, поскольку  $[uv] = [u][v]$ , а  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus x) \rightarrow \mathbb{Z}$  – гомоморфизм.

**36.Hx** Формула

$$h(z, t) = \varphi_{u_t, x}(z) = \frac{u_t(z) - x}{|u_t(z) - x|}$$

определяет гомотопию между отображениями  $\varphi_{u, x}$  и  $\varphi_{v, x}$ , откуда и следует, что  $\text{ind}(u, x) = \text{ind}(v, x)$ ; ср. 36.Ex.

**36.Lx** Определим отображение  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  формулой  $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$ . Тогда

$$\varphi(-x) = f(-x) - f(x) = -(f(x) - f(-x)) = -\varphi(x),$$

таким образом  $\varphi$  – нечетное отображение. Следовательно, если, например,  $\varphi(1) \neq 0$ , то образ  $\varphi(S^1)$  содержит значения разных знаков. Поскольку окружность связна, то найдется точка  $x \in S^1$ , такая что  $f(x) - f(-x) = \varphi(x) = 0$ .

**36.Mx.1** Предположим, что  $f(x) \neq f(-x)$  при всех  $x \in S^2$ . В таком случае формула  $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$  определяет отображение  $g : S^2 \rightarrow S^1$ .

Поскольку  $g(-x) = -g(x)$ , то отображение  $g$  переводит антиподальные точки сферы  $S^2$  в антиподальные точки окружности  $S^1$ . Фактор отображения  $g$  является непрерывным отображением  $\varphi : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ . Покажем, что индуцируемый им гомоморфизм  $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1)$  нетривиален. Образующей  $\lambda$  группы  $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$  является класс петли  $l$ , накрываемой путем  $\tilde{l}$ , который соединяет две противоположные точки сферы  $S^2$ . Путь  $g \circ \tilde{l}$  также соединяет две противоположные точки, лежащие на окружности, следовательно, накрываемая им петля  $\varphi \circ l$  не гомотопна нулю. Таким образом,  $\varphi_*(\lambda)$  – это нетривиальный элемент фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{R}P^1)$ .

**36.Mx** Все, что осталось заметить для доказательства теоремы Борсука–Улама, так это то, что нетривиальных гомоморфизмов  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1)$  не существует, так как первая из этих групп изоморфна  $\mathbb{Z}_2$ , а вторая изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

**37.A** Докажите это утверждение самостоятельно.

**37.B** Поскольку всякое отображение в одноточечное пространство является непрерывным, то отображение  $\rho : X \rightarrow \{x_0\}$  – ретракция.

**37.C** Прямая связна, поэтому её ретракт (как её непрерывный образ) тоже должен быть связан. Однако, двоеточие на прямой не связно.

**37.D** См. доказательство утверждения 37.C

**37.E**  $\Rightarrow$  Пусть  $\rho : X \rightarrow A$  – ретракция. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение  $f : A \rightarrow Y$ . Композиция  $F = f \circ \rho : X \rightarrow Y$  является продолжением отображения  $f$ .  $\Leftarrow$  Рассмотрим тождественное отображение  $\text{id} : A \rightarrow A$ . Его непрерывное продолжение на  $X$  как раз и является ретракцией  $\rho : X \rightarrow A$ .

**37.F** Поскольку

$$\rho_* \circ i_* = (\rho \circ i)_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)},$$

то гомоморфизм  $\rho_*$  является эпиморфизмом, а гомоморфизм  $i_*$  – мономорфизмом.

**37.G** Утверждение об  $i_*$ ; к примеру, смотрите доказательство следующего утверждения.

**37.H** Так как группа  $\pi_1(D^2)$  тривиальна, а группа  $\pi_1(S^1)$  – нетривиальна, то  $i_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(D^2, 1)$  не может быть мономорфизмом. Следовательно, в силу утверждения **37.F** круг  $D^2$  нельзя ретрагировать на его границу  $S^1$ .

**37.I** Доказательство дословно повторяет рассуждение, использованное при доказательстве теоремы **37.H**. Необходимо только вместо фундаментальных групп использовать  $(n-1)$ -мерные гомотопические группы. Дело в том, что группа  $\pi_{n-1}(D^n)$  тривиальна, а группа  $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  (т. е. нетривиальна).

**37.J** Будем рассуждать от противного. Предположим, что отображение  $f : D^n \rightarrow D^n$  не имеет неподвижных точек. Рассмотрим луч, исходящий из точки  $f(x) \in D^n$  и проходящий через точку  $x \in D^n$ , и обозначим через  $\rho(x)$  точку его пересечения с граничной сферой  $S^{n-1}$ . Ясно, что  $\rho(x) = x$  при  $x \in S^{n-1}$ . Докажите, что отображение  $\rho$  непрерывно, тогда  $\rho : D^n \rightarrow S^{n-1}$  – это ретракция. Однако в силу теоремы Борсука такой ретракции не существует.

**38.A** Докажите это утверждение самостоятельно.

**38.B** Прямое следствие утверждения **38.A**.

**38.C** Так как  $\rho$  – ретракция, то одно из условий, содержащихся в определении гомотопически обратных отображений, выполнено автоматически:  $\rho \circ \text{id} = \text{id}_A$ . Второе требование:  $\text{id} \circ \rho$  гомотопно  $\text{id}_X$ , выполнено по условию.

**38.D** Следует из **38.C**.

**38.E** Следует из **38.D** и **38.B**.

**38.F** Пусть  $\rho_1 : X \rightarrow A$  и  $\rho_2 : Y \rightarrow B$  – деформационные ретракции. Докажите, что  $\rho_1 \times \rho_2$  – деформационная ретракция.

**38.G** Рассмотрим отображение  $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow S^1 : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ . Формула  $h(x, t) = (1-t)x + t \frac{x}{|x|}$  определяет прямолинейную гомотопию между тождественным отображением пространства  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  и композицией  $\rho \circ i$ , где  $i$  – стандартное включение  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ .

**38.H** Топологический тип  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  не зависит от расположения точек  $x_1, x_2, \dots, x_s$  на плоскости. Расположим их на единичной окружности, к примеру, взяв их равными корням  $s$ -й степени из 1.

Рассмотрим на плоскости  $s$  простых замкнутых кривых, каждая из которых охватывает ровно одну из данных точек, проходит через начало координат, и которые не имеют других общих точек, кроме начала координат. Возможно, что будет проще вместо кривых взять, к примеру, ромбы с центрами в данных точках. Остается доказать, что объединение этих кривых (или ромбов) является деформационным ретрактом проколотов в  $s$  точках плоскости. Ясно, что не имеет смысла выписывать явные формулы, хотя это и возможно. Рассмотрим отдельный ромб и его центр. Центральная проекция отображает дополнение центра ромба на его границу и имеется прямолинейная гомотопия между центральной проекцией и тождественным отображением проколотого ромба. Осталось показать, что ту часть плоскости, которая лежит вне объединения ромбов, также можно деформационно ретрагировать на объединение их контуров. Как можно поступить, чтобы рассуждение стало похоже на доказательство? Рассмотрим вначале многоугольник, вершинами которого являются вершины ромбов, противоположные началу координат. Нетрудно видеть, что этот многоугольник является строгим деформационным ретрактом плоскости (так же как круг является ее деформационным ретрактом). Осталось показать, что объединение ромбов будет являться деформационным ретрактом рассматриваемого многоугольника, что очевидно, не правда ли?

**38.I** Разделим квадрат на четыре части при помощи двух его средних линий и рассмотрим множество  $K$ , являющееся объединением его контура, средних линий и двух его “четвертинок”, содержащих одну из его диагоналей. Покажите, что каждое из двух следующих множеств является деформационным ретрактом пространства  $K$ : объединение контура квадрата и его диагонали; объединение контуров “пустых” четвертинок этого квадрата.

**38.J** 1) Ни одно из этих пространств не вкладывается в другое. Докажите это самостоятельно, предварительно доказав следующую лемму. Пусть  $J_n$  – это объединение  $n$  отрезков с общим концом. Тогда ни при каких  $n > k \geq 2$  пространство  $J_n$  не вкладывается в  $J_k$ . 2) Ответ на второй вопрос положителен; см. доказательство утверждения 38.I.

**38.K** Так как композиция  $g \circ f$   $x_0$ -гомотопна нулю, то  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ . Аналогичным образом,  $f_* \circ g_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$ . Таким образом,  $f_*$  и  $g_*$  – взаимно обратные гомоморфизмы.

**38.L** Действительно, это – прямое следствие теоремы 38.K.

**38.M** Пусть  $x_1 = g(x_0)$ . Для всякой гомотопии  $h$  между  $\text{id}_X$  и  $g \circ f$  формула  $s(t) = h(x_0, t)$  определяет путь в точке  $x_0$ . В силу ответа на загадку 36.E, композиция  $g_* \circ f_* = T_s$  – изоморфизм. Аналогичным

образом, композиция  $f_* \circ g_*$  является изоморфизмом. Значит,  $f_*$  и  $g_*$  – изоморфизмы.

**39.A** Если  $u$  – петля в  $X$ , такая что петля  $p \circ u$  в  $B$  гомотопна нулю, то в силу теоремы о накрывающей гомотопии 34.C петля  $u$  также гомотопна нулю. Таким образом, если  $p_*([u]) = [p \circ u] = 0$ , то  $[u] = 0$ , что и означает, что  $p_*$  – мономорфизм.

**39.B** Нет, не определяется. Если  $p(x_0) = p(x_1) = b_0$ ,  $x_0 \neq x_1$  и группа  $\pi_1(B, b_0)$  не абелева, то подгруппы  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  и  $p_*(\pi_1(X, x_1))$  вполне могут быть различны (см. 39.D).

**39.C** Группа  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  накрытия состоит из гомотопических классов тех петель в точке  $b_0$ , для которых накрывающий их путь с началом в точке  $x_0$  является петлей.

**39.D** Пусть  $s$  – путь в  $X$ , соединяющий точку  $x_0$  с точкой  $x_1$ . Обозначим через  $\alpha$  класс петли  $p \circ s$  и рассмотрим внутренний автоморфизм  $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0) : \beta \mapsto \alpha^{-1}\beta\alpha$ . Докажем коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{T_s} & \pi_1(X, x_1) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(B, b_0) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(B, b_0). \end{array}$$

Действительно, поскольку  $T_s([u]) = [s^{-1}us]$ , то

$$p_*(T_s([u])) = [p \circ (s^{-1}us)] = [(p \circ s^{-1})(p \circ u)(p \circ s)] = \alpha^{-1}p_*([u])\alpha.$$

Поскольку диаграмма коммутативна и  $T_s$  – изоморфизм, то

$$p_*(\pi_1(X, x_1)) = \varphi(p_*(\pi_1(X, x_0))) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha,$$

таким образом, группы  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  и  $p_*(\pi_1(X, x_1))$  сопряжены.

**39.E** Пусть  $s$  – петля в  $X$ , являющаяся представителем класса  $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ . Пусть путь  $\tilde{s}$  накрывает  $s$  и начинается в точке  $x_0$ . Если положить  $x_1 = \tilde{s}(1)$ , то, как следует из доказательства утверждения 39.D,  $p_*(\pi_1(X, x_1)) = \alpha^{-1}p_*(\pi_1(X, x_0))\alpha$ .

**39.F** Следствие 39.D и 39.E.

**39.G** См. 39.H.

**39.H** Обозначим для краткости  $H = p_*(\pi_1(X, x_0))$ . Рассмотрим произвольную точку  $x_1 \in p^{-1}(b_0)$ ; пусть  $s$  – путь с началом в  $x_0$  и концом в  $x_1$ , а  $\alpha = [p \circ s]$ . Сопоставим точке  $x_1$  правый класс смежности  $H\alpha \subset \pi_1(B, b_0)$ . Проверим корректность данного определения. Пусть  $s_1$  – другой путь из  $x_0$  в  $x_1$ ,  $\alpha_1 = [p \circ s_1]$ . Путь  $ss_1^{-1}$  является петлей, значит,

$\alpha\alpha_1^{-1} \in H$ , поэтому  $H\alpha = H\alpha_1$ . Теперь докажем, что указанное соответствие является сюръекцией. Пусть  $H\alpha$  – некоторый класс смежности. Рассмотрим петлю  $u$ , являющуюся представителем класса  $\alpha$ , пусть  $\tilde{u}$  – это накрывающий ее путь с началом в точке  $x_0$ , а  $x_1 = \tilde{u}(1) \in p^{-1}(b_0)$ . По построению, точке  $x_1$  сопоставляется класс смежности  $H\alpha$ , значит, данное соответствие сюръективно. Наконец, проверим его инъективность. Пусть  $x_1, x_2 \in p^{-1}(b_0)$ ,  $s_1$  и  $s_2$  – пути, соединяющие  $x_0$  с  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно,  $\alpha_i = [p \circ s_i]$ ,  $i = 1, 2$ . Предположим, что  $H\alpha_1 = H\alpha_2$  и покажем, что тогда  $x_1 = x_2$ . Рассмотрим петлю  $u = (p \circ s_1)(p \circ s_2^{-1})$  и накрывающий ее путь  $\tilde{u}$ , который является петлей в силу того, что  $\alpha_1\alpha_2^{-1} \in H$ . Осталось заметить, что пути  $s'_1$  и  $s'_2$ , где  $s'_1(t) = u(\frac{t}{2})$  и  $s'_2(t) = u(1 - \frac{t}{2})$  начинаются в точке  $x_0$  и накрывают пути  $p \circ s_1$  и  $p \circ s_2$ , соответственно. Значит,  $s_1 = s'_1$  и  $s_2 = s'_2$ , таким образом,

$$x_1 = s_1(1) = s'_1(1) = \tilde{u}(\frac{1}{2}) = s'_2(1) = s_2(1) = x_2.$$

**39.I** Рассмотрим произвольную точку  $y \in Y$ , пусть  $b = q(y)$  и  $U_b$  – окрестность точки  $b$ , которая является правильно накрытой для каждого из накрытий  $p$  и  $q$ . Пусть, далее,  $V$  – это лист над  $U_b$ , содержащий точку  $y$ , а  $\{W_\alpha\}$  – набор листов над  $U_b$ , объединение которых есть  $\varphi^{-1}(V)$ . Ясно, что отображение  $\varphi|_{W_\alpha} = (q|_V)^{-1} \circ p|_{W_\alpha}$  – гомеоморфизм.

**39.J** Пусть  $p$  и  $q$  – накрытия. Рассмотрим произвольную точку  $x \in X$  и путь  $s$ , соединяющий заданную точку  $x_0$  с  $x$ . Пусть  $u = p \circ s$ . В силу утверждения 34.B существует единственный путь  $\tilde{u} : I \rightarrow Y$ , накрывающий  $u$  и начинающийся в точке  $y_0$ . Значит,  $\tilde{u} = \varphi \circ s$ , следовательно, точка  $\varphi(x) = \varphi(s(1)) = \tilde{u}(1)$  определена однозначно.

**39.K** Пусть  $\varphi : X \rightarrow Y$  и  $\psi : Y \rightarrow X$  – подчинения, причем  $\varphi(x_0) = y_0$  и  $\psi(y_0) = x_0$ . Ясно, что композиция  $\psi \circ \varphi$  является подчинением накрытия  $p : X \rightarrow B$  самого над собой. Следовательно, в силу единственности подчинения (см. 39.J),  $\psi \circ \varphi = \text{id}_X$ . Аналогичным образом,  $\varphi \circ \psi = \text{id}_Y$ , что и означает, что подчинения  $\varphi$  и  $\psi$  являются взаимно обратными эквивалентностями.

**39.L** Очевидно, что это отношение является симметричным, рефлексивным и транзитивным.

**39.M** Ясно, что если накрытия  $p$  и  $p'$  эквивалентны и  $q$  подчинено  $p$ , то  $q$  подчинено и  $p'$ , поэтому отношение подчинения переносится с накрытий на их классы эквивалентности. При этом оно очевидно является транзитивным. Как доказано в 39.K, если накрытия подчинены друг другу, то они эквивалентны, следовательно, это отношение антисимметрично.

**39.N** Так как  $p_* = (q \circ \varphi)_* = q_* \circ \varphi_*$ , то

$$p_*(\pi_1(X, x_0)) = q_*(\varphi_*(\pi_1(X, x_0))) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0)).$$

**39.Ах.1** Обозначим через  $\tilde{u}, \tilde{v} : I \rightarrow Y$  пути, начинающиеся в точке  $y_0$  и накрывающие пути  $p \circ u$  и  $p \circ v$ , соответственно. Рассмотрим путь  $uv^{-1}$ , который по условию является петлей в точке  $x_0$ , петлю  $(p \circ u)(p \circ v)^{-1} = p \circ (uv^{-1})$  и ее класс  $\alpha \in p_*(\pi_1(X, x_0)) \subset q_*(\pi_1(Y, y_0))$ . Тем самым  $\alpha \in q_*(\pi_1(Y, y_0))$ , значит, путь с началом в точке  $y_0$ , накрывающий петлю  $(p \circ u)(p \circ v)^{-1}$ , также является петлей. Следовательно, пути, накрывающие  $p \circ u$  и  $p \circ v$  и начинающиеся в точке  $y_0$ , оканчиваются в одной и той же точке. Осталось заметить, что ими и являются пути  $\tilde{u}$  и  $\tilde{v}$ .

**39.Ах.2** Определим отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$  следующим образом. Пусть  $x \in X$ ,  $u$  – путь, соединяющий точку  $x_0$  точкой  $x$ , то  $\varphi(x) = y$ , где  $y$  – это конечная точка пути  $\tilde{u} : I \rightarrow Y$ , накрывающего путь  $p \circ u$ . В силу предыдущего утверждения, отображение  $\varphi$  определено корректно. Докажем, что отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$  непрерывно. Пусть  $x_1 \in X$ ,  $b_1 = p(x_1)$  и  $y_1 = \varphi(x_1)$ , по построению,  $q(y_1) = b_1$ . Рассмотрим произвольную окрестность  $V$  точки  $y_1$ . Мы вправе считать, что  $V$  является листом над правильно накрытой линейно связной окрестности  $U$  точки  $b_1$ . Пусть  $W$  – это содержащий точку  $x_1$  лист над  $U$ , таким образом, окрестность  $W$  также линейно связна. Рассмотрим произвольную точку  $x \in W$ . Пусть путь  $v : I \rightarrow W$  соединяет  $x_1$  с  $x$ . Ясно, что образ пути  $\tilde{v}$ , начинающегося в  $y_1$  и накрывающего путь  $p \circ v$ , содержится в окрестности  $V$ , значит,  $\varphi(x) \in V$ . Таким образом,  $\varphi(W) \subset V$ , следовательно, отображение  $\varphi$  непрерывно в точке  $x$ .

**39.Вх** Следует из 39.E, 39.Ах и 39.K.

**39.Сх** Пусть  $X \rightarrow B$  – универсальное накрытие,  $U$  – правильно накрытая окрестность точки  $a \in B$ ,  $V$  – один из листов над  $U$ . Представим включение  $i : U \rightarrow B$  как композицию  $p \circ j \circ (p|_V)^{-1}$ , где  $j$  – это включение  $V \rightarrow X$ . Поскольку группа  $\pi_1(X)$  тривиальна, то и гомоморфизм включения  $i_* : \pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(B, a)$  тривиален.

**39.Dх.1** Пусть пути  $u_1, u_2$  соединяют точку  $b_0$  с  $b$ . Накрывающие их пути, начинающиеся в  $x_0$ , заканчиваются в одной и той же точке  $x$ , тогда класс петли  $u_1 u_2^{-1}$  лежит в подгруппе  $\pi$ .

**39.Dх.2** Да, определяет. Рассмотрим множество всех путей в  $B$ , начинающихся в точке  $b_0$  и введем в нем отношение эквивалентности:  $u_1 \sim u_2$ , если  $[u_1 u_2^{-1}] \in \pi$ . Обозначим через  $\tilde{X}$  фактормножество по введенному отношению. Естественная биекция между  $X$  и  $\tilde{X}$  строится



следующим образом. Для всякой точки  $x \in X$  рассмотрим путь  $u$ , соединяющий отмеченную точку  $x_0$  с точкой  $x$ . Класс пути  $rou$  в  $\tilde{X}$  и является образом точки  $x$ . Описанное соответствие, очевидно, является биекцией  $f : X \rightarrow \tilde{X}$ . Обратное  $f$  отображение  $g : \tilde{X} \rightarrow X$  устроено так. Пусть  $u : I \rightarrow B$  представитель класса  $y \in \tilde{X}$ . Рассмотрим путь  $v : I \rightarrow X$ , накрывающий  $u$  и начинающийся в точке  $x_0$ . Тогда  $g(y) = v(1)$ .

**39.Dx.3** Определим базу топологии в  $\tilde{X}$ . Для всякой пары  $(U, x)$ , где  $U$  – открытое в  $B$  множество, а  $x \in \tilde{X}$ , множество  $U_x$  состоит из классов всевозможных путей  $uv$ , где  $u$  – путь из класса  $x$ , а  $v$  – это путь в  $U$ , начинающийся в точке  $u(1)$ . Нетрудно доказать, что для всякой точки  $y \in U_x$  справедливо тождество  $U_y = U_x$ , откуда следует, что совокупность множеств вида  $U_x$  образует базу некоторой топологии в  $\tilde{X}$ . Чтобы доказать, что  $f$  и  $g$  – гомеоморфизмы, достаточно проверить, что каждый из них переводит множество из базы топологии в открытое множество. Для выбора базы рассмотрите набор правильно накрытых окрестностей  $U \subset B$ , каждая из которых, во-первых, линейно связна, во-вторых, любая петля в которых гомотопна нулю в  $B$ .

**39.Dx.4** Пространство  $\tilde{X}$  определено в 39.Dx.2. Проекция  $p : \tilde{X} \rightarrow B$  определяется следующим образом:  $p(y) = u(1)$ , где  $u$  – путь, входящий в класс  $y \in \tilde{X}$ . Непрерывность  $p$  имеет место безо всяких предположений о свойствах пространства  $B$ . Докажите, что если множество  $U$  в  $B$  открыто, линейно связно, и каждая петля в нем гомотопна нулю в  $B$ , то  $U$  будет правильно накрытой окрестностью.

**39.Fx** Рассмотрим подгруппы  $\pi \subset \pi_0 \subset \pi_1(B, b_0)$ . Пусть  $p : \tilde{Y} \rightarrow B$  – накрытие, построенное по подгруппе  $\pi$ ,  $q : \tilde{Y} \rightarrow B$  – накрытие, построенное по  $\pi_0$ . Из конструкции этих накрытий следует, что существует отображение  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ . Покажите, что оно и является подчинением.

**39.Gx** Говорят, что группа  $G$  действует справа в множестве  $F$ , если каждому элементу  $\alpha \in G$  сопоставлено отображение  $\varphi_\alpha : F \rightarrow F$ , причем при этом: 1)  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ ; 2) если  $e$  – единица группы  $G$ , то  $\varphi_e = \text{id}_F$ . Положим  $F = p^{-1}(b_0)$ . Для любого элемента  $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$  определим отображение  $\varphi_\alpha : F \rightarrow F$  следующим образом. Пусть  $x \in F$ . Рассмотрим петлю  $u$  в точке  $b_0$ , такую что  $[u] = \alpha$ . Пусть путь  $\tilde{u}$  накрывает петлю  $u$  и начинается в точке  $x$ . Положим  $\varphi_\alpha(x) = \tilde{u}(1)$ .

Из теоремы о накрывающей гомотопии следует, что отображение  $\varphi_\alpha$  зависит только от гомотопического класса петли  $u$ , значит, определение

корректно. Если  $[u] = e$ , т. е. петля  $u$  гомотопна нулю, то путь  $\tilde{u}$  также является петлей, следовательно,  $\tilde{u}(1) = x$ , таким образом,  $\varphi_e = \text{id}_F$ . Проверьте, что выполнено и первое свойство из определения действия группы на множестве.

**39.Hx** См. 39.Px

**39.Ix** Групповой операцией в множестве всех автоморфизмов является их композиция.

**39.Jx** Следует из 39.J.

**39.Kx** Покажите, что отображение, меняющее местами две точки из прообраза любой точки базы, есть гомеоморфизм.

**39.Lx** Это в точности утверждение 39.H.

**39.Qx** Следует из 39.Nx и 39.Px.



# Клеточная техника

## 40. Клеточные пространства

### 40'1. Определение клеточного пространства

В этом параграфе мы познакомимся с классом топологических пространств, который играет в алгебраической топологии особую важную роль. В контексте этой книги его роль значительно уже: для пространств этого класса мы научимся вычислять фундаментальную группу.<sup>1</sup>

*Нульмерным клеточным пространством* называется дискретное топологическое пространство. Его точки называются также *нульмерными клетками*, просто *0-клетками* или *вершинами*.

*Одномерное клеточное пространство* – это пространство, полученное при помощи следующей конструкции. Рассмотрим 0-мерное клеточное пространство  $X_0$  и семейство отображений  $\varphi_\alpha : S^0 \rightarrow X_0$ ,  $\alpha \in J$ . Приклеим к  $X_0$  при помощи отображений  $\varphi_\alpha$  дизъюнктную сумму экземпляров отрезка  $D^1$  (занумерованных тем же семейством индексов, что и отображения  $\varphi_\alpha$ ):  $X_0 \cup_{\sqcup \varphi_\alpha} (\sqcup_\alpha D^1_\alpha)$ . Образы внутренних частей экземпляров отрезка  $D^1$  называются *открытыми одномерными клетками*, просто *1-клетками* или *рёбрами*. Если отрезок приклеен к данной вершине

<sup>1</sup>Клеточные пространства были введены Дж. Г. К. Уайтхедом, который назвал их *CW-комплексами*. Это имя сохранилось за ними и до настоящего времени, хотя оно не удобно по многим естественным причинам. За очень редкими исключениями (одно из них – это CW-комплекс, другое – симплициальный комплекс), слово *комплекс* в математике обозначает в наше время различные алгебраические, а не топологические объекты. Следуя В. А. Рохлину и Д. Б. Фуку [5], мы будем использовать термин *клеточные пространства*.

хотя бы одним из своих концов, то говорят, что соответствующее ребро и вершина *инцидентны* друг другу. Множества, полученные из каждого отрезка  $D^1$ , называются *замкнутыми клетками*. Открытые одномерные и нульмерные клетки составляют разбиение одномерного клеточного пространства. Подчеркнем, что это разбиение входит в структуру клеточного пространства, т. е. одномерное клеточное пространство – это топологическое пространство, снабжённое разбиением специального типа.<sup>2</sup>

*Двумерное клеточное пространство* определяется аналогичным образом. Именно, к клеточному пространству  $X_1$  размерности, не превосходящей единицы, посредством семейства непрерывных<sup>3</sup> отображений  $\varphi_\alpha : S^1 \rightarrow X_1$  приклеивается дизъюнктивная сумма экземпляров круга  $D^2$ :  $X_2 = X_1 \cup_{\sqcup \varphi_\alpha} (\sqcup_\alpha D_\alpha^2)$ .

Образы внутренностей экземпляров круга  $D^2$  называются *открытыми двумерными клетками* или *2-клетками*. Клетки пространства  $X_1$  рассматриваются также и как клетки пространства  $X_2$ . Открытые клетки обоих типов образуют разбиение двумерного клеточного пространства. Это разбиение включается в определение клеточного пространства. Таким образом, двумерное клеточное пространство – это топологическое пространство, на котором задано разбиение на открытые нульмерные, одномерные и двумерные клетки. Образы экземпляров круга  $D^2$  называются *замкнутыми 2-клетками*.

В общем случае *n-мерное клеточное пространство* – это топологическое пространство, на котором фиксировано разбиение на открытые клетки, определяемое по индукции следующим образом. Возьмём клеточное пространство  $X_{n-1}$  размерности, не превосходящей  $n - 1$ , и приклеим к нему дизъюнктивную сумму экземпляров шара  $D^n$  посредством семейства непрерывных отображений граничной сферы:  $X_n = X_{n-1} \cup_{\sqcup \varphi_\alpha} (\sqcup_\alpha D_\alpha^n)$ .

---

<sup>2</sup>Одномерные клеточные пространства часто называют *графами*. Впрочем, говоря о графах, нередко подразумевают другой класс объектов. Например, так называют одномерные клеточные пространства, в которых приклеивающим отображениям разных одномерных клеток запрещается совпадать, т. е. двум одномерным клеткам запрещается иметь одну и ту же границу. Или границе одномерной клетки запрещается состоять из одной точки. Когда же запрещённые одномерные клеточные пространства всё же приходится рассматривать, их называют мультиграфами или псевдографами. Более того, иногда в понятие графа включается какая-нибудь дополнительная структура. Скажем, выбор ориентации на каждом ребре. Конечно, всё это противоречит общематематической тенденции наиболее просто называть достойные внимания объекты наиболее общей природы, усложняя название по мере добавления условий и структур. Однако, в этой конкретной ситуации навести какой бы то ни было порядок в терминологии уже не представляется возможным, и мы будем просто избегать термина “граф” в важных формулировках, используя его (так же как и другие перегруженные слова, такие как *кривая* и *поверхность*) в качестве короткого неформального синонима более формального термина *одномерное клеточное пространство*.

<sup>3</sup>Выше, в определении одномерного клеточного пространства, непрерывность приклеивающих отображений  $\varphi_\alpha$  тоже имеет место, но не включается в формулировку, поскольку любое отображение нульмерной сферы  $S^0$  в любое пространство непрерывно.

Как и выше, образы внутренностей шаров называются *открытыми  $n$ -мерными клетками  $e$  ( $n$ -клетками)*, а образы самих этих  $n$ -мерных шаров – *замкнутыми  $n$ -клетками  $\bar{e}$* . Клетки пространства  $X_{n-1}$  также считаются клетками полученного  $n$ -мерного клеточного пространства. Отображения  $\varphi_\alpha$  называются *приклеивающими отображениями*, а сужения отображения факторизации на шары  $D^n$  называются *характеристическими отображениями*.

*Клеточное пространство* – это пространство, получаемое в результате объединения последовательности вложенных друг в друга клеточных пространств  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ , каждое из которых получено из предыдущего при помощи описанной выше конструкции. Эта последовательность может быть конечной или бесконечной. В последнем случае необходимо ввести на  $X$  топологическую структуру, для чего достаточно потребовать, чтобы его покрытие множествами  $X_n$  было фундаментальным, т. е. чтобы множество  $U \subset X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$  являлось открытым, тогда для каждого  $n$  пересечение  $U \cap X_n$  открыто в  $X_n$ .

Разбиение клеточного пространства на открытые клетки называют его *клеточным разбиением*. Объединение всех клеток клеточного пространства  $X$ , размерность которых не превосходит  $n$ , т. е. клеточное пространство  $X_n$ , называется его  *$n$ -мерным остовом*. Следует иметь в виду, что в  $n$ -мерном остове  $X_n$  не обязаны присутствовать  $n$ -мерные клетки, поскольку он может совпадать с  $(n-1)$ -мерным остовом того же пространства. Поэтому лучше (и короче) говорить об  *$n$ -м остове* или  *$n$ -остове*.

#### 40.1. В клеточном пространстве остовы замкнуты.

Клеточное пространство называется: *конечным*, если оно содержит конечное число клеток; *счетным*, если число клеток счетно. Оно называется *локально конечным*, если любая его точка обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом клеток.

Подмножество  $A$  клеточного пространства  $X$  называется его *клеточным подпространством*, если оно есть объединение открытых клеток, которое вместе с каждой своей клеткой содержит соответствующую замкнутую клетку. Возможны переформулировки этого определения. К примеру, можно сказать, что клеточное подпространство – это подмножество, представимое в виде объединения как замкнутых, так и открытых клеток клеточного пространства, или же, что это множество вместе с каждой своей точкой  $x \in e$  содержит замкнутую клетку  $\bar{e}$ . Конечно,  $A$  наделено разбиением, индуцированным имеющимся в  $X$  разбиением на открытые клетки. Ясно, что  $k$ -остов клеточного пространства является его клеточным подпространством.

**40.2.** Докажите, что объединение и пересечение любой совокупности клеточных подпространств являются клеточными подпространствами.

**40.A.** Клеточное подпространство клеточного пространства само является клеточным пространством. (Скорее всего для доказательства этого факта вам потребуется утверждение 40.Gx.)

**40.A.1.** Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$  – возрастающая последовательность его подмножеств, образующих его фундаментальное покрытие. Пусть  $A \subset X$  – подпространство, положим  $A_i = A \cap X_i$ . Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $X_i$  открыты в  $X$ ;
- 2)  $A_i$  открыты в  $X$ ;
- 3)  $A_i$  замкнуты в  $X$ .

Тогда набор  $\{A_i\}$  – фундаментальное покрытие пространства  $A$ .

## 40'2. Первые примеры

**40.B.** Клеточное пространство, состоящее из одной нульмерной клетки и одной  $n$ -мерной, гомеоморфно  $S^n$ .

**40.C.** Представьте  $D^n$  с  $n > 0$  как клеточное пространство, состоящее из трех клеток.

**40.D.** Клеточное пространство, состоящее из одной нульмерной клетки и  $q$  одномерных клеток, есть букет  $q$  окружностей.

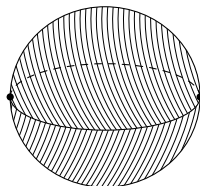
**40.E.** Представьте тор как клеточное пространство, состоящее из четырех клеток: одной нульмерной, двух одномерных и одной двумерной.

**40.F.** Как можно получить клеточное разбиение тора  $S^1 \times S^1$ , состоящее из четырех клеток, из клеточного разбиения окружности  $S^1$ , состоящего из двух клеток?

**40.3.** Если  $X$  и  $Y$  – локально конечные клеточные пространства, то топологическое пространство  $Z = X \times Y$  может быть естественным образом наделено структурой клеточного пространства.

**40.4\*.** Останется ли верным утверждение предыдущей задачи, если не требовать конечности клеточных пространств  $X$  и  $Y$ ?

**40.G.** Представьте сферу  $S^n$  как клеточное пространство таким образом, чтобы для всякого целого неотрицательного  $k$  его  $k$ -остовом была стандартная сфера  $S^k \subset S^n$ .



**40.Н.** Представьте  $\mathbb{R}P^n$  как клеточное пространство, состоящее из  $n+1$  клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

**40.5.** Представьте  $CP^n$  как клеточное пространство из  $n+1$  клеток. Опишите приклеивающие отображения этих клеток.

**40.6.** Представьте следующие топологические пространства в виде клеточных пространств:

- |                          |                           |                      |
|--------------------------|---------------------------|----------------------|
| (a) ручка;               | (b) лента Мёбиуса;        | (c) $S^1 \times I$ , |
| (d) сфера с $p$ ручками; | (e) сфера с $p$ пленками. |                      |

**40.7.** Какое наименьшее число клеток необходимо для представления в виде клеточного пространства следующих пространств:

- |                    |                          |                           |
|--------------------|--------------------------|---------------------------|
| (a) ленты Мёбиуса; | (b) сферы с $p$ ручками; | (c) сферы с $q$ пленками? |
|--------------------|--------------------------|---------------------------|

**40.8.** Приведите пример клеточного пространства, в котором замыкание некоторой клетки не есть объединение открытых клеток. Какое наименьшее число клеток нужно для построения такого пространства?

**40.9.** Рассмотрим счетный набор дизъюнктивных экземпляров отрезка  $I$  и склеим всех их по точке  $0$ . Покажите, что полученное пространство является клеточным, но не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

**40.И.** Представьте  $\mathbb{R}^1$  как клеточное пространство.

**40.10.** Для любых двух клеточных пространств, гомеоморфных  $\mathbb{R}^1$ , существует гомеоморфизм между ними, отображающий каждую клетку одного из них гомеоморфно на некоторую клетку другого.

**40.Ж.** Представьте  $\mathbb{R}^n$  как клеточное пространство.

Обозначим через  $\mathbb{R}^\infty$  объединение последовательности евклидовых пространств  $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \dots$ , канонически вложенных друг в друга:  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0)\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Топологию в  $\mathbb{R}^\infty$  определим посредством требования, состоящего в том, что множества  $\mathbb{R}^n$  составляют его фундаментальное покрытие.

**40.К.** Представьте  $\mathbb{R}^\infty$  как клеточное пространство.

**40.11.** Докажите, что пространство  $\mathbb{R}^\infty$  не метризуемо.

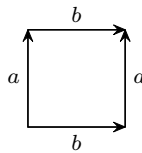
### 40'3. Дальнейшие примеры в размерности два

Рассмотрим класс двумерных клеточных пространств, допускающих простое комбинаторное описание. Каждое такое пространство является факторпространством конечного семейства выпуклых многоугольников по склеиванию пар их сторон при помощи аффинных гомеоморфизмов. При этом склеивание вершин обусловлено склеиванием сторон. Соответствующее факторпространство имеет естественное разбиение: на нульмерные клетки – образы вершин многоугольников, одномерные клетки



– образы их сторон и двумерные клетки – образы внутренностей этих многоугольников.

Для того, чтобы описать такое пространство, вначале надо указать, какие стороны отождествляются друг с другом. Обычно это делают, отмечая стороны буквами, причем отождествляемые стороны обозначаются одной и той же буквой. Поскольку между двумя отрезками существуют только два различных аффинных гомеоморфизма, то достаточно указать ориентации отрезков, которые отождествляются гомеоморфизмом, для чего на сторонах рисуют стрелки. На следующем рисунке дано представление тора как факторпространства квадрата.



При желании можно обойтись и без рисунка. Для этого надо поместить буквами все стороны многоугольника, обойти вдоль него (обычно – против часовой стрелки) и выписать буквы, отмеченные на его сторонах. При этом, если ориентация стороны (используемая для описания отождествления сторон) противоположна направлению обхода, то соответствующая буква выписывается со степенью  $-1$ . Получившийся в результате набор слов однозначно определяет факторпространство семейства многоугольников. К примеру, слово  $ab^{-1}a^{-1}b$  описывает факторпространство полученное в результате склеивания квадрата так, как это изображено выше.

**40.L.** Докажите, что клеточное пространство, заданное словом

- (1)  $a^{-1}a$  гомеоморфно  $S^2$ ;
- (2)  $aa$  и  $abab$  гомеоморфно  $\mathbb{R}P^2$ ;
- (3)  $aba^{-1}b^{-1}c$  гомеоморфно ручке;
- (4)  $abcb^{-1}$  гомеоморфно цилиндру  $S^1 \times I$ ;
- (5)  $aab$  и  $abac$  гомеоморфно ленте Мебиуса;
- (6)  $aabb$  и  $ab^{-1}ab$  гомеоморфно бутылке Клейна,
- (7)  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$  гомеоморфно сфере с  $p$  ручками,
- (8)  $a_1a_1a_2a_2 \dots a_qa_q$  гомеоморфно сфере с  $q$  пленками.

#### 40'4. Вложения в евклидовы пространства

**40.M.** Всякое счетное нульмерное клеточное пространство вкладывается в прямую.

**40.N.** Всякое счетное локально конечное одномерное клеточное пространство  $X$  вкладывается в  $\mathbb{R}^3$ .

**40.12.** Приведите пример конечного одномерного клеточного пространства, не вложимого в  $\mathbb{R}^2$ . (Мы не настаиваем на немедленном строгом доказательстве невложимости.)

**40.O.** Любое счетное локально конечное конечномерное клеточное пространство вложимо в евклидово пространство достаточно большой размерности.

**40.O.1.** Пусть топологическое пространство  $X$  вложено в  $\mathbb{R}^p$ , а пространство  $Y$  — в  $\mathbb{R}^q$ , причем оба вложения являются собственными отображениями (см. 18'3х; в частности, их образы замкнуты, соответственно, в  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$ ). Пусть  $A$  — замкнутое подмножество в  $Y$ . Предположим, что у  $A$  имеется в пространстве  $Y$  такая окрестность  $U$ , для которой существует гомеоморфизм  $h : \text{Cl}U \rightarrow A \times I$ , отображающий  $A$  на  $A \times 0$ . Тогда для произвольного собственного отображения  $\varphi : A \rightarrow X$  существует вложение  $X \cup_{\varphi} Y$  в  $\mathbb{R}^{p+q+1}$ , продолжающее исходное вложение  $X \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

**40.O.2.** Пусть  $X$  — счетное локально конечное  $k$ -мерное клеточное пространство и  $A$  — его  $(k-1)$ -остов. Если  $A$  может быть вложено в  $\mathbb{R}^p$ , то существует вложение пространства  $X$  в  $\mathbb{R}^{p+k+1}$ , продолжающее исходное вложение  $X \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

**40.P.** Всякое счетное локально конечное клеточное пространство вложимо в  $\mathbb{R}^{\infty}$ .

**40.Q.** Всякое конечное клеточное пространство метризуемо.

**40.R.** Всякое конечное клеточное пространство нормально.

**40.S.** Всякое счетное клеточное пространство вложимо в  $\mathbb{R}^{\infty}$ .

**40.T.** Всякое клеточное пространство нормально.

**40.U.** Всякое локально конечное клеточное пространство метризуемо.

#### 40'5х. Симплициальные пространства

Напомним, что в 23'3х был определён класс топологических пространств — симплициальные пространства. Каждое такое пространство снабжено разбиением на подмножества, называемые открытыми симплексами и которые, действительно, гомеоморфны открытым симплексам евклидова пространства.

**40.Aх.** Докажите, что всякое конечное симплициальное пространство обладает клеточной структурой, в которой разбиение на открытые клетки совпадает с исходным разбиением на открытые симплексы.

#### 40'6х. Топологические свойства клеточных пространств

В данном разделе представлены утверждения различного характера. Например, изучаются критерии, при выполнении которых клеточное пространство является компактным ( 40.Кх) или сепарабельным ( 40.Ох). Доказывается, что клеточное пространство связно, тогда оно линейно связно ( 40.Сх), тогда линейно связан его 1-остов ( 40.Вх). С другой стороны, изучается собственно клеточная топологическая структура. К примеру, любое клеточное пространство хаусдорфово ( 40.Вх). Далее, из определения клеточного пространства совсем не очевидно, что замкнутая клетка является замыканием соответствующей открытой клетки (или что она вообще замкнута). В связи с этим в этот раздел включены утверждения технического характера. Мы не формулируем их в виде лемм, так как зачастую они являются леммами для нескольких утверждений. Например, такой факт, как фундаментальность покрытия клеточного пространства его замкнутыми клетками ( 40.Дх).

Заметим, что в книге [5] клеточным пространством называлось хаусдорфово топологическое пространство, наделенное клеточным разбиением с двумя свойствами: (С) замкнутые клетки пересекаются лишь с конечным числом (открытых) клеток; (W) замкнутые клетки составляют фундаментальное покрытие этого пространства. Из результатов утверждений 40.Вх, 40.Сх и 40.Фх следует, что клеточные пространства (в смысле данного выше определения) являются клеточными пространствами в смысле Рохлина–Фукса, для которых в [5] доказана возможность их индуктивного построения. Таким образом, оба определения клеточного пространства являются равносильными.

Совет читателю: попробуйте сначала доказывать сформулированные утверждения для конечных клеточных пространств.

**40.Вх.** Любое клеточное пространство является хаусдорфовым топологическим пространством.

**40.Сх.** В клеточном пространстве замыкание каждой клетки  $e$  совпадает с замкнутой клеткой  $\bar{e}$ .

**40.Дх.** Покрытие клеточного пространства его замкнутыми клетками является фундаментальным.

**40.Ех.** Любое покрытие клеточного пространства его клеточными подпространствами фундаментально.

**40.Фх.** В клеточном пространстве любая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

**40.Гх.** Клеточное подпространство  $A$  клеточного пространства  $X$  замкнуто в  $X$ .

**40.Нх.** Пространство, полученное в результате склеивания двух клеточных подпространств по их общему подпространству, является клеточным.

**40.Их.** Если подмножество  $A$  клеточного пространства  $X$  пересекается с каждой открытой клеткой по конечному множеству, то оно замкнуто. Кроме того, индуцированная топология на нем – дискретная.

**40.Жх.** Любое компактное множество в клеточном пространстве пересекается лишь с конечным числом (открытых) клеток.

**40.Кх.** Клеточное пространство компактно, когда оно конечно.

**40.Лх.** Всякая клетка клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве этого пространства.

**40.Мх.** Всякое компактное подмножество клеточного пространства содержится в некотором конечном клеточном подпространстве этого пространства.

**40.Нх.** Подмножество клеточного пространства является компактным, когда оно замкнуто и пересекается лишь с конечным числом его открытых клеток.

**40.Ох.** Клеточное пространство сепарабельно, когда оно состоит из счетного числа клеток.

**40.Рх.** Компонента линейной связности клеточного пространства является его клеточным подпространством.

**40.Qх.** Клеточное пространство локально линейно связно.

**40.Рх.** Компоненты линейной связности клеточного пространства открыты и замкнуты в этом пространстве и, следовательно, совпадают с его компонентами связности.

**40.Сх.** Клеточное пространство связно, когда оно линейно связно.

**40.Тх.** Локально-конечное клеточное пространство счётно, когда счётен его 0-остов.

**40.Ух.** Локально конечное связное клеточное пространство  $X$  счётно.

**40.Vх.** Клеточное пространство линейно связно, когда линейно связан его 1-остов.

## 41. Клеточные конструкции

### 41'1. Эйлерова характеристика

Пусть  $X$  – конечное клеточное пространство. Через  $c_i(X)$  обозначим число его  $i$ -мерных клеток. *Эйлеровой характеристикой* пространства  $X$  называется альтернированная сумма чисел  $c_i(X)$ :

$$\chi(X) = c_0(X) - c_1(X) + c_2(X) - \cdots + (-1)^i c_i(X) + \cdots$$

**41.A.** Эйлерова характеристика аддитивна в следующем смысле. Если  $A$  и  $B$  – это клеточные подпространства клеточного пространства  $X$ , то

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

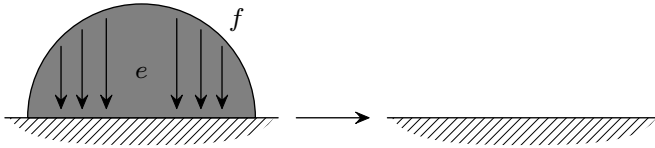
**41.B.** Эйлерова характеристика мультипликативна в следующем смысле. Если  $X$  и  $Y$  – конечные клеточные пространства, то

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

### 41'2. Комбинаторное стягивание и его обобщение

Пусть  $X$  – конечное клеточное пространство,  $e$  и  $f$  – его открытые клетки размерностей  $n$  и  $n-1$ , соответственно. Пусть:

- приклеивающее отображение  $\varphi_e : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$  клетки  $e$  определяет гомеоморфизм открытой верхней полусферы  $S_+^{n-1}$  на  $f$ ,
- клетка  $f$  не пересекается с образами приклеивающих отображений клеток, отличных от  $e$ ,
- клетка  $e$  не пересекается с образами приклеивающих отображений никаких клеток.



**41.C.**  $X \setminus (e \cup f)$  является клеточным подпространством пространства  $X$ .

**41.D.**  $X \setminus (e \cup f)$  является деформационным ретрактом пространства  $X$ .

Говорят, что  $X' = X \setminus (e \cup f)$  получается из  $X$  в результате *элементарного комбинаторного стягивания* и пишут  $X \searrow X'$ .

Если клеточное подпространство  $A$  клеточного пространства  $X$  получается из  $X$  в результате выполнения последовательности элементарных комбинаторных стягиваний, то говорят, что  $X$  **комбинаторно стягивается** на  $A$  и тоже пишут  $X \searrow A$ .

**41.Е.** При комбинаторном стягивании эйлерова характеристика сохраняется: если  $X$  – конечное клеточное пространство и  $X \searrow A$ , то  $\chi(X) = \chi(A)$ .

Пусть, как и выше,  $X$  – клеточное пространство,  $e$  и  $f$  – его открытые клетки размерностей  $n$  и  $n - 1$ , соответственно, и приклеивающее отображение  $\varphi_e : S^n \rightarrow X_{n-1}$  клетки  $e$  определяет гомеоморфизм  $S_+^{n-1}$  на  $f$ . Сейчас мы не предполагаем ни того, что  $f$  не пересекается с образами приклеивающих отображений клеток, отличных от  $e$ , ни того, что  $e$  не пересекается с образами приклеивающих отображений каких бы то ни было клеток. Пусть  $\chi_e : D^n \rightarrow X$  – характеристическое клетки  $e$ . Рассмотрим также деформационную ретракцию  $\psi : D^n \rightarrow S^{n-1} \setminus \varphi_e^{-1}(f) = S^{n-1} \setminus S_+^{n-1}$ .

**41.Ф.** При этих условиях факторпространство  $X' = X/[\chi_e(x) \sim \varphi_e(\psi(x))]$  пространства  $X$  является клеточным пространством, клетками которого служат образы при естественной проекции всех клеток пространства  $X$ , кроме клеток  $e$  и  $f$ .

Говорят, что клеточное пространство  $X' = X/[\chi_e(x) \sim \varphi_e(\psi(x))]$  получается из клеточного пространства  $X$  в результате **взаимного сокращения клеток  $e$  и  $f$** .

**41.Г.** Естественная проекция  $X \rightarrow X'$  является гомотопической эквивалентностью.

**41.Г.1.** Найдите клеточное подпространство  $Y$  пространства  $X$ , для которого проекция  $Y \rightarrow Y/[\chi_e(x) \sim \varphi_e(\psi(x))] = Y'$  была бы гомотопической эквивалентностью (в силу теоремы 41.Д).

**41.Г.2.** Продолжите отображение  $Y \rightarrow Y \setminus (e \cup f)$  до отображения  $X \rightarrow X'$ , являющегося гомотопической эквивалентностью в силу 41.6х.

### 41'3х. Гомотопические эквивалентности клеточных пространств

**41.1х.** Пусть  $X = A \cup_\varphi D^n$  – пространство, полученное в результате приклеивания  $n$ -мерного шара к топологическому пространству  $A$  посредством непрерывного отображения  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow A$ . Докажите, что дополнение  $X \setminus x$  всякой точки  $x \in X \setminus A$  (строго) деформационно ретрагируется на  $A$ .

**41.2х.** Пусть  $X$  –  $n$ -мерное клеточное пространство, а  $K$  – множество, пересекающееся по одной точке с каждой из открытых  $n$ -мерных клеток этого пространства. Докажите, что  $(n - 1)$ -остов  $X_{n-1}$  пространства  $X$  является деформационным ретрактом дополнения  $X \setminus K$ .

**41.3х.** Докажите, что дополнение  $\mathbb{R}P^n \setminus \text{point}$  гомотопически эквивалентно  $\mathbb{R}P^{n-1}$ ; дополнение  $\mathbb{C}P^n \setminus \text{point}$  гомотопически эквивалентно  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

**41.4х.** Докажите, что дополнение  $D^2 \times S^1 \setminus \text{point}$  произвольной внутренней точки полнотория гомотопически эквивалентно тору, к которому приклеен круг вдоль меридиана  $S^1 \times 1$ .

**41.5х.** Пусть  $Y$  – топологическое пространство,  $\varphi : S^n \rightarrow Y$  и  $\psi : S^n \rightarrow Y$  – непрерывные отображения и пусть  $X_\varphi = Y \cup_\varphi D^{n+1}$  и  $X_\psi = Y \cup_\psi D^{n+1}$ . Докажите, что если отображения  $\varphi$  и  $\psi$  гомотопны, то пространства  $X_\varphi$  и  $X_\psi$  гомотопически эквивалентны:  $\varphi \sim \psi \Rightarrow X_\varphi \simeq X_\psi$ .

В дальнейшем нам потребуется более общее утверждение.

**41.6х.** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – гомотопическая эквивалентность,  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$  и  $\varphi' : S^{n-1} \rightarrow Y$  – непрерывные отображения. Докажите, что если  $f \circ \varphi \sim \varphi'$ , то  $X \cup_\varphi D^n \simeq Y \cup_{\varphi'} D^n$ .

**41.7х.** Пусть  $X$  – пространство, получающееся из окружности в результате приклеивания к ней двух экземпляров круга посредством отображений  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^2$  и  $S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^3$ , соответственно. Найдите клеточное пространство с возможно меньшим числом клеток, гомотопически эквивалентное пространству  $X$ .

**41.8х. Загадка.** Обобщите предыдущую задачу.

**41.9х.** Докажите, что если к тору  $S^1 \times S^1$  вдоль его параллели  $S^1 \times 1$  приклеить круг, то полученное пространство  $K$  гомотопически эквивалентно букету  $S^2 \vee S^1$ .

**41.10х.** Докажите, что если к тору  $S^1 \times S^1$  вдоль его параллели  $S^1 \times 1$  и меридиана  $1 \times S^1$  приклеить два круга, то получится пространство, гомотопически эквивалентное сфере  $S^2$ .

**41.11х.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  три окружности:  $S_1 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ ,  $S_2 = \{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$  и  $S_3 = \{z^2 + (y - 1)^2 = 1, x = 0\}$ . Поскольку  $\mathbb{R}^3 \cong S^3 \setminus \text{point}$ , то можно считать, что  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  лежат в  $S^3$ . Докажите, что пространство  $X = S^3 \setminus (S_1 \cup S_2)$  не гомотопически эквивалентно пространству  $Y = S^3 \setminus (S_1 \cup S_3)$ .

**41.Ах.** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $A$  – его клеточное подпространство. Тогда объединение  $(X \times 0) \cup (A \times I)$  является ретрактом цилиндра  $X \times I$ .

**41.Вх.** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $A$  – его клеточное подпространство. Предположим, что задано отображение  $F : X \rightarrow Y$  и гомотопия  $h : A \times I \rightarrow Y$  его сужения  $f = F|_A$ . Тогда гомотопию  $h$  можно продолжить до гомотопии  $H : X \times I \rightarrow Y$  отображения  $F$ .

**41.Сх.** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $A$  – его стягиваемое клеточное подпространство. Тогда проекция  $\text{pr} : X \rightarrow X/A$  является гомотопической эквивалентностью.

Следствиями из 41.Сх являются следующие утверждения.

**41.Dх.** Клеточное пространство  $X$ , содержащее одномерную замкнутую клетку  $e$ , гомеоморфную  $I$ , гомотопически эквивалентно клеточному пространству  $X/e$ , получающемуся в результате стягивания этой клетки в точку.

**41.Ех.** Всякое связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству, нульмерный остов которого состоит из единственной точки.

**41.Fх.** Односвязное двумерное конечное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству, одномерный остов которого состоит из одной точки.

**41.12х.** Решите задачу 41.9х, воспользовавшись теоремой 41.Сх.

**41.13х.** Докажите, что факторпространство

$$X = \mathbb{C}P^2 / [(z_0 : z_1 : z_2) \sim (\overline{z_0} : \overline{z_1} : \overline{z_2})]$$

комплексной проективной плоскости  $\mathbb{C}P^2$  гомотопически эквивалентно сфере  $S^4$ .

**Информация.**  $\mathbb{C}P^2 / [z \sim \tau(z)] \cong S^4$ .

**41.Gх.** Пусть  $X$  – клеточное пространство, а  $A$  его клеточное подпространство, такое что включение  $i : A \rightarrow X$  является гомотопической эквивалентностью. Тогда  $A$  есть деформационный ретракт  $X$ .



## 42. Одномерные клеточные пространства

### 42'1. Гомотопическая классификация

**42.А.** *Всякое связное конечное одномерное клеточное пространство гомотопически эквивалентно букету окружностей.*

**42.А.1 Лемма.** Пусть  $X$  – произвольное одномерное клеточное пространство,  $e$  – его замкнутая одномерная клетка, приклеенная при помощи инъекции  $S^0 \rightarrow X_0$  (т. е. предполагается, что ребро  $e$  имеет различные концы). Тогда естественная проекция  $X \rightarrow X/e$  является гомотопической эквивалентностью. Дайте явное описание гомотопически обратного к ней отображения.

**42.В.** *Всякое связное одномерное конечное клеточное пространство  $X$  гомотопически эквивалентно букету из  $1 - \chi(X)$  окружностей и, следовательно, его фундаментальной группой является свободная группа ранга  $1 - \chi(X)$ .*

**42.С** Следствие. *Эйлерова характеристика связного конечного одномерного клеточного пространства является инвариантом относительно гомотопических эквивалентностей. Она не превосходит единицы. Она равна единице, когда пространство стягиваемо.*

**42.Д** Следствие. *Эйлерова характеристика конечного одномерного клеточного пространства не превосходит числа его компонент связности. Она равна этому числу, когда каждая компонента стягиваема.*

**42.Е** Гомотопическая классификация конечных одномерных клеточных пространств. *Конечные связные одномерные клеточные пространства гомотопически эквивалентны, когда их фундаментальные группы изоморфны, когда их эйлеровы характеристики равны.*

**42.1.** Фундаментальная группа двумерной сферы с удаленными  $n$  точками есть свободная группа ранга  $n - 1$ .

**42.2.** Докажите, что эйлерова характеристика любого клеточного пространства, гомеоморфного сфере  $S^2$ , равна 2.

**42.3 Теорема Эйлера.** Для всякого выпуклого многогранника в  $\mathbb{R}^3$  общее число его вершин и граней на 2 больше числа его ребер.

**42.4.** Докажите теорему Эйлера, не используя фундаментальных групп.

**42.5.** Докажите, что эйлерова характеристика любого клеточного пространства, гомеоморфного тору, равна 0.

**Информация.** Эйлерова характеристика является гомотопическим инвариантом, но обычное доказательство этого факта использует аппарат теории сингулярных гомологий, что далеко выходит за рамки нашей книги.

## 42'2. Максимальные деревья

Клеточное пространство называется *деревом*, если оно связно, а дополнение любой его открытой клетки не связно. Клеточное подпространство  $A$  связного клеточного пространства  $X$  называется *максимальным деревом* пространства  $X$ , если  $A$  – дерево, не содержащееся ни в каком отличном от него дереве, являющимся клеточным подпространством  $X$ .

**42.F.** Всякое связное конечное одномерное клеточное пространство содержит максимальное дерево.

**42.G.** Пусть  $A$  – дерево, вложенное, как клеточное подпространство, в связное клеточное пространство  $X$ . Докажите, что  $A$  является максимальным деревом, тогда оно содержит все вершины пространства  $X$ .

Теорема 42.G проясняет смысл термина – *максимальное дерево*.

**42.H.** Клеточное подпространство  $A$  связного клеточного пространства  $X$  является максимальным деревом, тогда оно есть дерево, а факторпространство  $X/A$  – букет окружностей.

**42.I.** Если  $X$  – одномерное клеточное пространство и  $A$  – его клеточное подпространство, которое является деревом, то естественная проекция  $X$  на факторпространство  $X/A$  является гомотопической эквивалентностью.

Решив задачи 42.F, 42.I и 42.H, вы получите ещё одно доказательство теоремы 42.A.

## 42'3х. Разбивающие клетки

**42.Ax.** Дополнение открытой одномерной клетки в связном одномерном клеточном пространстве состоит не более чем из двух компонент связности, каждая из которых пересекается с замыканием этой клетки.

Важной характеристикой положения вершины в одномерном клеточном пространстве является её *степень*. Так называется суммарное число точек в прообразах этой вершины при приклеивающих отображениях всех одномерных клеток рассматриваемого пространства. Более традиционно, степени вершины называется количество инцидентных ей ребер, при этом ребра, инцидентные только этой вершине, учитываются с весом 2.

**42.Bx.** 1) Каждая компонента связности дополнения вершины в связном одномерном клеточном пространстве содержит ребро, в замыкание которого входит эта вершина. 2) Дополнение вершины кратности  $t$  состоит не более, чем из  $t$  компонент связности.

## 42'4х. Деревья и леса

Связное одномерное клеточное пространство называется *деревом*, если дополнение всякой его открытой одномерной клетки не является связным. Одномерное клеточное пространство называется *лесом*, если каждая его компонента является деревом. Таким образом, дерево – это связный лес.

**42.Сх.** Клеточное подпространство леса – лес. В частности, всякое связное клеточное подпространство дерева – дерево.

**42.Дх.** Дополнение любого (открытого) ребра дерева состоит из двух компонент связности.

**42.Ех.** Дополнение любой вершины кратности  $m$  дерева состоит из  $m$  компонент связности.

**42.Фх.** Во всяком конечном дереве существует вершина кратности один.

**42.Гх.** Любое конечное дерево комбинаторно стягивается в точку и имеет эйлерову характеристику один.

**42.Нх.** Любая точка дерева является его деформационным ретрактом.

**42.Их.** Любое конечное одномерное клеточное пространство, комбинаторно стягивающееся в точку, является деревом.

**42.Жх.** В любом конечном одномерном клеточном пространстве сумма кратностей всех вершин равна удвоенному числу рёбер.

**42.Кх.** В любом конечном связном одномерном клеточном пространстве с эйлеровой характеристикой один есть вершина кратности единица.

**42.Лх.** Любое связное одномерное конечное клеточное пространство с эйлеровой характеристикой один комбинаторно стягивается в точку.

## 42'5х. Простые пути

Пусть  $X$  – одномерное клеточное пространство. *Простым путём длины  $n$*  в  $X$  назовем конечную последовательность вида

$$(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_n, v_{n+1}),$$

составленную из попарно различных вершин  $v_i$  и ребер  $e_i$  пространства  $X$ , в которой граница каждого ребра  $e_i$  состоит из предшествующей вершины  $v_i$  и последующей –  $v_{i+1}$ . Вершина  $v_1$  называется *началом* этого простого пути, а вершина  $v_{n+1}$  – его *концом*. Мы говорим, что простой путь *соединяет* эти вершины. Начало и конец простого пути соединяются путём  $I \rightarrow X$ , являющимся топологическим вложением, образ которого

содержится в объединении всех клеток, входящих в простой путь. Объединение всех клеток, входящих в простой путь, является клеточным подпространством пространства  $X$ . Оно называется *простой незамкнутой ломаной*.

**42.Мх.** В связном одномерном клеточном пространстве любые две вершины соединяются простым путём.

**42.Нх.** Следствие. В связном одномерном клеточном пространстве  $X$  любые две точки соединяются путём  $I \rightarrow X$ , который является топологическим вложением.

**42.1х.** Найдите пример такого линейно связного пространства, в котором существуют различные точки, не соединимые вложенным путём.

**42.2х.** Не могли бы Вы найти такой пример среди хаусдорфовых линейно связных пространств?

**42.Ох.** Связное одномерное клеточное пространство  $X$  является деревом, тогда не существует вложения  $S^1 \rightarrow X$ .

**42.Рх.** В одномерном клеточном пространстве  $X$  существует петля  $S^1 \rightarrow X$ , не гомотопная постоянной, тогда существует топологическое вложение  $S^1 \rightarrow X$ .

**42.Qх.** Одномерное клеточное пространство является деревом, тогда любые две его вершины соединяются единственным простым путём.

**42.3х.** Всякое конечное дерево обладает свойством неподвижной точки.

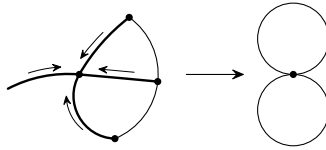
Ср. 37.12, 37.13 и 37.14

**42.4х.** Верно ли это для произвольного дерева; произвольного конечного связного одномерного клеточного пространства?

## 43. Фундаментальная группа клеточного пространства

### 43'1. Одномерные клеточные пространства

**43.А.** Фундаментальная группа связного конечного одномерного клеточного пространства  $X$  есть свободная группа ранга  $1 - \chi(X)$ .



**43.В.** Пусть  $X$  – конечное связное одномерное клеточное пространство,  $T$  – максимальное дерево в  $X$  и  $x_0 \in T$ . Для каждой одномерной клетки  $e \subset X \setminus T$  выберем петлю  $s_e$ , начинающуюся в  $x_0$ , проходящую по  $T$  до  $e$ , затем вдоль клетки  $e$  и возвращающуюся (вновь по  $T$ ) в исходную точку  $x_0$ . Тогда гомотопические классы петель  $s_e$  являются свободными образующими группы  $\pi_1(X, x_0)$ .

### 43'2. Образующие

**43.С.** Пусть  $A$  – топологическое пространство,  $x_0 \in A$ ,  $\varphi : S^{k-1} \rightarrow A$  – непрерывное отображение и  $X = A \cup_{\varphi} D^k$ . Если  $k > 1$ , то гомоморфизм  $\pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ , индуцированный включением  $A \rightarrow X$ , сюръективен. (Ср. 43.Г.4, 31.Г.4).

**43.Д.** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $x_0$  – его нульмерная клетка и  $X_1$  – его одномерный остов. Тогда гомоморфизм включения  $\pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ , сюръективен.

**43.Е.** Пусть  $X$  – конечное связное клеточное пространство,  $T$  – максимальное дерево в его одномерном остове  $X_1$ ,  $x_0 \in T$ . Выберем для каждой клетки  $e \subset X_1 \setminus T$  петлю  $s_e$ , начинающуюся в  $x_0$ , проходящую по  $T$  до  $e$  и затем вдоль клетки  $e$  и возвращающуюся (вновь по  $T$ ) в исходную точку  $x_0$ . Докажите, что гомотопические классы петель  $s_e$  являются образующими группы  $\pi_1(X, x_0)$ .

**43.1.** Выведите теорему 31.Г из теоремы 43.Д.

**43.2.** Вычислите  $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$ .

### 43'3. Соотношения

Пусть  $X$  – связное клеточное пространство,  $x_0$  – его нульмерная клетка. Напомним, что двумерный остов  $X_2$  пространства  $X$  получается

из его одномерного остова  $X_1$  посредством приклеивания нескольких экземпляров круга  $D^2$  при помощи непрерывных отображений  $\varphi_\alpha : S^1 \rightarrow X_1$ . Приклеивающие отображения являются круговыми петлями в  $X_1$ . Выберем для каждого  $\alpha$  путь  $s_\alpha : I \rightarrow X_1$ , соединяющий точку  $\varphi_\alpha(1)$  с  $x_0$ . Пусть  $[\varphi_\alpha] \in \pi_1(X, \varphi_\alpha(1))$  – соответствующие гомотопические классы. Обозначим через  $N$  нормальную подгруппу группы  $\pi_1(X, x_0)$ , порожденную (как нормальная подгруппа<sup>4</sup>) элементами

$$T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha] \in \pi_1(X_1, x_0).$$

**43.F.** Нормальная подгруппа  $N$  не зависит от выбора путей  $s_\alpha$ .

**43.G.** Нормальная подгруппа  $N$  совпадает с ядром гомоморфизма включения  $\text{in}_* : \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .

Теорему 43.G можно доказать различными способами, например ее можно вывести из теоремы Зейферта–ван Кампена (см. 43.4x). В данном разделе мы докажем ее, построив “правильное” накрывающее пространство. Включение  $N \subset \text{Ker in}_*$  достаточно очевидно (см. 43.G.1). Доказательство обратного включения основано на существовании накрытия  $p : Y \rightarrow X$ , приведение которого над одномерным остовом пространства  $X$  является накрытием  $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$  с группой  $N$ , и том факте, что  $\text{Ker in}_*$  содержится в группе любого накрытия над  $X_1$ , продолжающегося до накрытия над всем  $X$ . Предлагаемую в леммах 1–7 схему рассуждения также можно модифицировать. Дело в том, что включение  $X_2 \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп этих пространств. Доказать это не так уж сложно, однако применяемая при этом техника, хотя и является вполне общей и естественной, все же выходит за рамки нашей книги. Здесь мы просто хотим подчеркнуть, что этот результат заменяет собой леммы 4 и 5.

**43.G.1 Лемма 1.**  $N \subset \text{Ker in}_*$ , ср. 31.J (2).

**43.G.2 Лемма 2.** Пусть  $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$  – накрытие с группой  $N$  (т. е.  $N = (p_1)_*(\pi_1(Y_1, y_0))$ ). Для каждого  $\alpha$  и для всякой точки  $y \in p_1^{-1}(x_0)$  существует такое поднятие  $\tilde{\varphi}_\alpha : S^1 \rightarrow Y_1$  отображения  $\varphi_\alpha$ , что  $\tilde{\varphi}_\alpha(1) = y$ .

**43.G.3 Лемма 3.** Пусть  $Y_2$  – клеточное пространство, полученное в результате приклеивания нескольких экземпляров круга  $D^2$  к  $Y_1$  посредством всевозможных поднятий приклеивающих отображений  $\varphi_\alpha$ . Тогда существует отображение  $p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$ , которое продолжает  $p_1$  и является накрытием.

---

<sup>4</sup>Напомним, что подгруппа называется **нормальной**, если она совпадает со всеми подгруппами, с нею сопряженными. Нормальная подгруппа, нормально порожденная множеством  $A$ , есть наименьшая нормальная подгруппа, содержащая  $A$ . Как подгруппа, она порождается элементами множества  $A$  и элементами, сопряженными с ними. Это значит, что каждый элемент этой нормальной подгруппы является произведением элементов, сопряженных с элементами множества  $A$ .

**43.G.4 Лемма 4.** При  $n \geq 3$  приклеивающие отображения  $n$ -мерных клеток могут быть подняты в любое накрывающее пространство. Ср. 39.Wx, 39.Xx.

**43.G.5 Лемма 5.** Накрытие  $p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$  можно распространить до накрытия всего  $X$ .

**43.G.6 Лемма 6.** Всякая петля  $s : I \rightarrow X_1$ , реализующая элемент ядра  $\text{Ker in}_*$  (т. е. гомотопная постоянной петле в  $X$ ), накрывается петлей пространства  $Y$ , причем эта накрывающая петля лежит в  $Y_1$ .

**43.G.7 Лемма 7.** Подгруппа  $N = \text{Ker in}_*$ .

**43.H.** Включение  $\text{in}_2 : X_2 \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп клеточного пространства и его 2-остова.

**43.3.** Проверьте, что накрытие над клеточным пространством  $X$ , построенное в доказательстве теоремы 43.G, является универсальным.

#### 43'4. Выписывание образующих и соотношений

Теоремы 43.E и 43.G дают следующий способ выписывания образующих и соотношений фундаментальной группы конечного клеточного пространства.

Пусть  $X$  – конечное клеточное пространство и  $x_0$  – его нульмерная клетка. Пусть  $T$  – максимальное дерево одномерного остова пространства  $X$ . Для каждой одномерной клетки  $e \subset X$ , не лежащей в  $T$ , выберем петлю  $s_e$ , начинающуюся в  $x_0$ , идущую по  $T$  до клетки  $e$ , проходящую по этой клетке и возвращающуюся в  $x_0$  опять по  $T$ . Обозначим через  $g_1, \dots, g_m$  гомотопические классы этих петель. В силу 43.E это образующие группы  $\pi_1(X, x_0)$ . Далее, пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : S^1 \rightarrow X_1$  – приклеивающие отображения для всех двумерных клеток пространства  $X$ . Для каждого  $\varphi_i$  выберем путь  $s_i$ , соединяющий точку  $\varphi_i(1)$  с точкой  $x_0$  в одномерном остове пространства  $X$ . Выразим гомотопический класс  $T_{s_i}[\varphi_i]$  как произведение степеней образующих  $g_j$ . Пусть  $r_i$  – соответствующее слово в алфавите  $g_1, \dots, g_m$ . Фундаментальная группа пространства  $X$  порождается классами  $g_1, \dots, g_m$ , которые связаны соотношениями  $r_1 = \dots = r_n = 1$ .

**43.I.** Проверьте, что этот рецепт дает правильный результат для фундаментальных групп пространств  $\mathbb{R}P^n$  и  $S^1 \times S^1$  при различных их представлениях в виде клеточного пространства (см. 40.H и 40.E).

В условии доказанного ранее утверждения 41.Fx предполагалось, что клеточное пространство является двумерным. Дело в том, что в том момент нам еще не было известно, что включение  $X_2 \rightarrow X$  индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

**43.J.** Всякое конечное односвязное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству, одномерный остов которого состоит из одной точки.

#### 43'5. Фундаментальные группы основных поверхностей

**43.K.** Фундаментальная группа сферы с  $g$  ручками допускает следующее задание

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

**43.L.** Фундаментальная группа сферы с  $g$  плёнками допускает следующее задание

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle.$$

**43.M.** Фундаментальные группы сфер с различным числом ручек не изоморфны.

Когда требуется доказать неизоморфность двух групп, заданных посредством конечных наборов образующих и соотношений, прежде всего стоит прокоммутировать эти группы. Напомним, что прокоммутировать группу  $G$  — это значит профакторизовать её по её коммутанту. Коммутант группы  $G$  обозначается через  $[G, G]$  и представляет собой нормальную подгруппу, порождённую коммутаторами  $a^{-1}b^{-1}ab$  для всех  $a, b \in G$ . На языке образующих и соотношений коммутирование означает добавление к имеющимся соотношениям соотношений  $ab = ba$ ,  $a, b \in G$ .

Конечнопорождённые абелевы группы хорошо известны. Любая такая группа изоморфна произведению конечного числа циклических (конечных и бесконечных) групп. Ясно, что если прокоммутированные группы не изоморфны, то и сами исходные группы не изоморфны.

**43.M.1.** Прокоммутированная фундаментальная группа сферы с  $g$  ручками изоморфна свободной абелевой группе ранга  $2g$  (т. е.  $\mathbb{Z}^{2g}$ ).

**43.N.** Фундаментальные группы сфер с различным числом плёнок не изоморфны.

**43.N.1.** Прокоммутированная фундаментальная группа сферы с  $g$  плёнками изоморфна  $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ .

**43.O.** Сферы с различным числом ручек не являются гомотопически эквивалентными.

**43.P.** Сферы с различным числом плёнок не являются гомотопически эквивалентными.

**43.Q.** Сфера с ручками гомотопически не эквивалентна сфере с плёнками.



Если  $X$  – линейно связное пространство, то его прокоммутированная фундаментальная группа называется *одномерной* (или *первой*) *группой гомологий* пространства  $X$  и обозначается через  $H_1(X)$ . Если  $X$  не является линейно связным, то  $H_1(X)$  определяется как прямая сумма одномерных групп гомологий всех компонент линейной связности этого пространства. В этих обозначениях теорема 43.М.1 выглядит следующим образом: Пусть  $F_g$  – сфера с  $g$  ручками, тогда  $H_1(F_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ .

#### 43'6х. Теорема Зейферта–ван Кампена

Для того, чтобы найти фундаментальную группу клеточного пространства, вместо того, чтобы использовать его клеточное разбиение, бывает проще применить теорему Зейферта–ван Кампена.

**43.Ах** Теорема Зейферта–ван Кампена. Пусть  $X$  – линейно связное топологическое пространство,  $A$  и  $B$  – его открытые линейно связанные подмножества, покрывающие  $X$ . Предположим, что множество  $C = A \cap B$  также линейно связно,  $x_0 \in C$ . Тогда группа  $\pi_1(X, x_0)$  является свободным произведением групп  $\pi_1(A, x_0)$  и  $\pi_1(B, x_0)$  с объединенной подгруппой  $\pi_1(C, x_0)$ . Другими словами, если

$$\pi_1(A, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(B, x_0) = \langle \beta_1, \dots, \beta_q \mid \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1 \rangle,$$

$\pi_1(C, x_0)$  порождена элементами  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ , а  $\text{in}_A : C \rightarrow A$ ,  $\text{in}_B : C \rightarrow B$  – стандартные включения, то группа  $\pi_1(X, x_0)$  имеет задание

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \mid$$

$$\rho_1 = \dots = \rho_r = \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1,$$

$$\text{in}_{A*}(\gamma_1) = \text{in}_{B*}(\gamma_1), \dots, \text{in}_{A*}(\gamma_t) = \text{in}_{B*}(\gamma_t) \rangle.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда пространство  $X$  и его подмножества  $A$  и  $B$  являются клеточными.

**43.Вх.** Предположим, что  $X$  – связное конечное клеточное пространство, а  $A$  и  $B$  – его клеточные подпространства, покрывающие  $X$ . Положим  $C = A \cap B$ . Как фундаментальные группы пространств  $X$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  связаны между собой?

**43.Сх** Теорема Зейферта–ван Кампена. Пусть  $X$  – связное конечное клеточное пространство,  $A$  и  $B$  – покрывающие его связные клеточные подпространства,  $C = A \cap B$ . Предположим, что  $C$  также связно. Пусть  $x_0 \in C$  – некоторая нульмерная клетка,

$$\pi_1(A, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(B, x_0) = \langle \beta_1, \dots, \beta_q \mid \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1 \rangle,$$

и пусть группа  $\pi_1(C, x_0)$  порождается своими элементами  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ . Обозначим через  $\xi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  и  $\eta_i(\beta_1, \dots, \beta_q)$  образы элементов  $\gamma_i$  (точнее, их выражение посредством образующих) при гомоморфизмах включения

$$\pi_1(C, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0) \text{ и, соответственно, } \pi_1(C, x_0) \rightarrow \pi_1(B, x_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \mid \\ \rho_1 = \dots = \rho_r = \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1, \\ \xi_1 = \eta_1, \dots, \xi_t = \eta_t \rangle. \end{aligned}$$

**43.1х.** Пусть  $X$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  – такие как выше. Предположим, что  $A$  и  $B$  односвязны, а  $C$  состоит из двух компонент связности. Докажите, что группа  $\pi_1(X)$  изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

**43.2х.** Является ли теорема 43.Сх частным случаем теоремы 43.Ах?

**43.3х.** Можно ли опустить предположение об открытости множеств  $A$  и  $B$  в условиях теоремы 43.Ах?

**43.4х.** Выведите теорему 43.Г из теоремы Зейферта–ван Кампена 43.Ах.

**43.5х.** Вычислите фундаментальную группу так называемого линзового пространства, получающегося при склеивании двух полноторий по гомеоморфизму  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (u, v) \mapsto (u^k v^l, u^m v^n)$ , где  $kn - lm = 1$ .

**43.6х.** Определите гомотопический и топологический тип линзового пространства для  $m = 0, 1$ .

**43.7х.** Опишите задание фундаментальной группы дополнения в  $\mathbb{R}^3$  торического узла  $K$  типа  $(p, q)$ , где  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа. Этот узел лежит на торе, образованном при вращении окружности; формулы

$$\begin{cases} x = (2 + \cos 2\pi u) \cos 2\pi v, \\ y = (2 + \cos 2\pi u) \sin 2\pi v, \\ z = \sin 2\pi u \end{cases}$$

задают его параметрическое представление. Узел  $K$  задается в  $T$  уравнением  $pu = qv$ . Найдите также прокоммутированную фундаментальную группу (т. е. группу гомотопий) дополнения узла  $K$ .

**43.8х.** Пусть  $(X, x_0)$  и  $(Y, y_0)$  – односвязные топологические пространства с отмеченными точками,  $Z = X \vee Y$  – их букет.

- (1) Докажите, что если  $X$  и  $Y$  – клеточные пространства, то пространство  $Z$  односвязно.
- (2) Докажите, что если у точек  $x_0$  и  $y_0$  существует окрестности  $U_{x_0} \subset X$  и  $V_{y_0} \subset Y$ , строго деформационно ретрагирующиеся, соответственно, на  $x_0$  и  $y_0$ , то пространство  $Z$  односвязно.
- (3) Постройте односвязные топологические пространства  $X$  и  $Y$  с неодносвязным букетом.

**43'7х. Теоретико-групповое отступление:  
свободное произведение с объединенной подгруппой**

На первый взгляд описание фундаментальной группы пространства  $X$ , данное в теореме Зейферта–ван Кампена, далеко от того, чтобы быть инвариантным, поскольку в нем используются задания групп при помощи образующих и соотношений. Однако существует и категорное теоретико-групповое описание группы  $\pi_1(X)$ .

**43.Dх.** Рассмотрим задания групп  $A$  и  $B$ ,

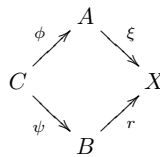
$$A = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \mid \rho_1 = \dots = \rho_r = 1 \rangle,$$

$$B = \langle \beta_1, \dots, \beta_q \mid \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1 \rangle,$$

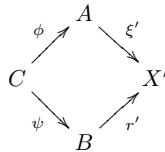
пусть группа  $C$  порождена элементами  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ . Рассмотрим также произвольные гомоморфизмы  $\xi : C \rightarrow A$  и  $\eta : C \rightarrow B$ . Тогда

$$\begin{aligned} X = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \mid \\ \rho_1 = \dots = \rho_r = \sigma_1 = \dots = \sigma_s = 1, \\ \xi(\gamma_1) = \eta(\gamma_1), \dots, \xi(\gamma_t) = \eta(\gamma_t) \rangle, \end{aligned}$$

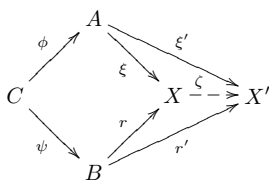
$\varphi : A \rightarrow X : \alpha_i \mapsto \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  и  $\psi : B \rightarrow X : \beta_j \mapsto \beta_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ .



При этом для любой группы  $X'$  и гомоморфизмов  $\varphi' : A \rightarrow X'$  и  $\psi' : B \rightarrow X'$ , для которых  $\xi \circ \varphi' = \eta \circ \psi'$ , т. е. в том случае, когда диаграмма



коммутативна, существует единственный гомоморфизм  $\zeta : X \rightarrow X'$ , такой что  $\varphi' = \zeta \circ \varphi$  и  $\psi' = \zeta \circ \psi$ , т. е. такой что коммутативна диаграмма



Данное свойство группы  $X$  характеризует ее единственным образом с точностью до изоморфизма.

Группа  $X$ , описанная в формулировке утверждения 43.Dx, называется *свободным произведением групп  $A$  и  $B$  с объединенной подгруппой  $C$*  и обозначается  $A *_C B$ .

Если  $C$  – тривиальная группа, то  $A *_C B$  есть просто  $A * B$  – так называемое *свободное произведение  $A$  и  $B$* .

**43.9x.** Является ли свободная группа ранга  $n$  свободным произведением  $n$  экземпляров группы  $\mathbb{Z}$ ?

**43.10x.** Используя подходящее разбиение бутылки Клейна, представьте ее фундаментальную группу в виде  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

**43.11x. Загадка.** Найдите определение свободного произведения групп как множества классов эквивалентности слов алфавита, буквами которого являются элементы групп – сомножителей данного произведения.

**43.12x.** Исследуйте алгебраические свойства операции свободного произведения групп. Будет ли оно ассоциативным, коммутативным, и в каком смысле. Определяют ли гомоморфизмы из сомножителей гомоморфизм из их произведения?

**43.13x\*.** Найдите представление модулярной группы

$$Mod = SL(2, \mathbb{Z}) / \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в виде свободного произведения  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ .

#### 43'8x. Дополнение к теореме Зейферта–ван Кампена

Теорема Зейферта–ван Кампена появилась и использовалась главным образом как средство вычисления фундаментальных групп. Однако она применима не во всех ситуациях, к примеру, в условиях следующей теоремы.

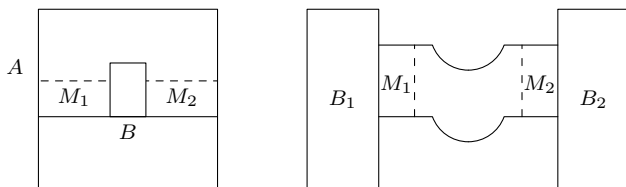
**43.Ех.** Пусть  $X$  – топологическое пространство,  $A$  и  $B$  – открытые множества, образующие его покрытие,  $C = A \cap B$ . Предположим, что  $A$  и  $B$  односвязны, а множество  $C$  состоит из двух связных компонент. Тогда  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Теорема 43.Ех верна и в том случае, когда предполагается, что пространство  $C$  состоит из двух линейно связных компонент. Казалось бы,

что отличие несущественно, однако доказательство становится несравнимо более техническим.

В действительности, Зейферт и ван Кампен получили использовавшиеся ими для вычисления фундаментальных групп гораздо более общие результаты, чем теорема 43.Ах. Эта теорема – единственная, которая перешла из их работ в учебники. Теорема 43.1х является другим частным случаем доказанных ими утверждений. Формулировка наиболее общего из них слишком тяжеловесна, чтобы здесь можно было её привести. В этой связи приведем еще один частный случай, используя который совместно с теоремой 43.Ах, можно получить все, что дает общая теорема Зейферта–ван Кампена (правда, не так быстро).

Прежде всего опишем общую ситуацию. Пусть  $A$  – топологическое пространство,  $B$  – его замкнутое подмножество и  $U$  – окрестность множества  $B$  в  $A$ , такая что  $U \setminus B$  есть объединение двух непересекающихся открытых в  $A$  множеств  $M_1$  и  $M_2$ , положим  $N_i = B \cup M_i$ ,  $i = 1, 2$ . Рассмотрим топологическое пространство  $C$ , полученное в результате приклеивания к  $A \setminus U$  множеств  $N_1$  и  $N_2$  по тождественным отображениям множеств  $M_1$  и  $M_2$ . Предположим, что множества  $(A \setminus U) \cup N_1$  и  $(A \setminus U) \cup N_2$  (с индуцированной из  $A$  топологией) образуют фундаментальное покрытие  $C$ . В пространстве  $C$  имеются, так сказать, два экземпляра пространства  $B$ , которые лежат, соответственно, в  $N_1$  и  $N_2$ . Пространство  $A$  можно отождествить с факторпространством  $C$ , полученным в результате отождествления двух экземпляров  $B$  друг с другом при помощи тождественного гомеоморфизма. Тем не менее наше построение начиналось с пространства  $A$ , чью фундаментальную группу мы и намерены подсчитать, тогда как пространство  $B$  является вспомогательным (рисунки).



В клеточной ситуации предполагается, что  $A$  – клеточное пространство,  $B$  – его клеточное подпространство. При этих предположениях пространство  $C$  также оказывается клеточным, также как и естественное отображение  $C \rightarrow A$ . Последнее утверждение означает, что для каждого целого неотрицательного числа  $n$  это отображение переводит  $n$ -остов пространства  $C$  в  $n$ -остов пространства  $A$ .

**43.Fx.** Предположим, что в описанной выше конструкции пространство  $C$  линейно связно и  $x_0 \in C \setminus (B_1 \cup B_2)$ . Предположим, что группа  $\pi_1(C, x_0)$  задана своими образующими  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  и соотношениями  $\psi_1 = 1, \dots, \psi_m = 1$ . Предположим, что отображение  $C \rightarrow A$  переводит точки  $y_i \in B_i$  в одну и ту же точку  $y$ . Обозначим через  $\sigma_i$  гомотопические классы путей, соединяющих  $x_0$  с  $y_i$  в  $C$ . Пусть  $\beta_1, \dots, \beta_p$  — образующие группы  $\pi_1(B, y)$ , а  $\beta_{1i}, \dots, \beta_{pi}$  — соответствующие элементы в  $\pi_1(B_i, y_i)$ . Обозначим через  $\varphi_{li}$  слово, представляющее элемент  $\sigma_i \beta_{li} \sigma_i^{-1}$  в алфавите  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Тогда группа  $\pi_1(A, x_0)$  имеет следующее задание:

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma \mid \psi_1 = \dots = \psi_m = 1, \gamma \varphi_{11} = \varphi_{12} \gamma, \dots, \gamma \varphi_{p1} = \varphi_{p2} \gamma \rangle.$$

**43.14x.** Вычислите фундаментальные группы тора и бутылки Клейна при помощи теоремы 43.Fx.

**43.15x.** Вычислите фундаментальные группы основных поверхностей при помощи теоремы 43.Fx.

**43.16x.** Выведите теорему 43.1x из теорем 43.Ax и 43.Fx.

**43.17x. Загадка.** Постройте алгебраическую теорию, основанную на теоретико-групповой конструкции, идея которой содержится в теореме 43.Fx.

## Доказательства и комментарии

**40.A** Пусть  $A$  – клеточное подпространство клеточного пространства  $X$ . Для  $n = 0, 1, \dots$  мы видим, что  $A \cap X_{n+1}$  получается из  $A \cap X_n$  приклеиванием  $(n+1)$ -клеток, содержащихся в  $A$ . Поэтому в случае, когда  $A$  содержится в некотором остове, оно конечно есть клеточное пространство, а пересечения  $A_n = A \cap X_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , являются его остовами. В общем случае необходимо проверить, что покрытие множества  $A$  множествами  $A_n$  фундаментально, что следует из пункта 3 следующей леммы, задачи 40.1 и утверждения 40.Gx.

**40.A.1** Докажем только утверждение 3, поскольку именно оно требуется для доказательства теоремы. Пусть множество  $F \subset A$  и пересекается с каждым из множеств  $A_i$  по замкнутому в  $A_i$  множеству. Так как  $F \cap X_i = F \cap A_i$  замкнуто в  $A_i$ , то оно замкнуто в  $X_i$ , поэтому  $F$  замкнуто в  $X$  в силу фундаментальности покрытия  $\{X_i\}$ . Следовательно,  $F$  замкнуто и в  $A$ , что и доказывает фундаментальность покрытия  $\{A_i\}$ .

**40.B** Это так, поскольку приклеив шар  $D^n$  к точке по его граничной сфере, мы получим факторпространство  $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ .

**40.C** Этими (открытыми) клетками являются: точка,  $(n-1)$ -мерная сфера без одной точки и ограниченный ею открытый  $n$ -мерный шар:  $e^0 = x \in S^{n-1} \subset D^n$ ,  $e^{n-1} = S^n \setminus x$ ,  $e^n = B^n$ .

**40.D** Действительно, профакторизовав дизъюнктное объединение отрезков по множеству всех их концов, мы получим букет окружностей.

**40.E** Представим произведение  $I \times I$  как клеточное пространство, состоящее из 9 клеток: четырех нульмерных – вершин квадрата, четырех одномерных – его сторон и одной двумерной – внутренности этого квадрата. В результате стандартной факторизации, при которой из квадрата получается тор, из четырех нульмерных клеток мы получим одну, а из четырех одномерных – две.

**40.F** Каждая открытая клетка произведения является произведением открытых клеток сомножителей, см. задачу 40.3.

**40.G** Пусть  $S^k = S^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$ , где

$$\mathbb{R}^{k+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Если представить  $S^n$  в виде объединения построенных сфер меньших размерностей:  $S^n = \bigcup_{k=0}^n S^k$ , то для всякого  $k \in \{1, \dots, n\}$  разность  $S^k \setminus S^{k-1}$  состоит ровно из двух  $k$ -клеток – открытых полусфер.

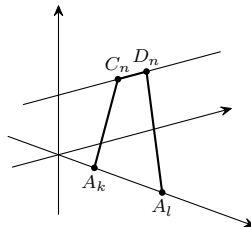
**40.H** Рассмотрим клеточное разбиение сферы  $S^n$ , описанное в решении предыдущей задачи. Тогда при факторизации  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  в каждой размерности обе клетки склеиваются в одну. Каждое из приклеивающих отображений является проекцией  $D^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$ , при которой граничная сфера  $S^{k-1}$  отображается на  $\mathbb{R}P^{k-1}$ .

**40.I** Нульмерными клетками являются все целые точки, одномерными – интервалы  $(k, k+1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**40.J** Так как  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  ( $n$  сомножителей), то его клеточная структура может быть определена клеточными структурами сомножителей (см. 40.3). Таким образом, нульмерные клетки – это точки, координаты которых суть целые числа. Одномерными клетками являются открытые отрезки с концами в точках  $(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$  и  $(k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_n)$ , т. е. отрезки, параллельные осям координат, двумерными – квадраты, параллельные двумерным координатным плоскостям, и т. д.

**40.M** Очевидно: всякое счетное нульмерное пространство гомеоморфно  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ .

**40.N** Отобразим нульмерные клетки в целые точки  $A_k(k, 0, 0)$  на оси абсцисс. Вложения одномерных клеток будут кусочно-линейными и производятся следующим образом. Сопоставим  $n$ -й одномерной клетке пространства  $X$  пару точек с координатами  $C_n(0, 2n-1, 1)$  и  $D_n(0, 2n, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если концы этой 1-клетки отображаются в точки  $A_k$  и  $A_l$ , то ее образом является трехзвенная ломаная  $A_k C_n D_n A_l$  (возможно, замкнутая). Легко видеть, что образы различных открытых клеток не пересекаются (поскольку их крайние трети лежат на скрещивающихся прямых). Тем самым, мы построили инъекцию  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которая очевидно непрерывна. Непрерывность обратного отображения следует из того, что оно непрерывно на каждой из построенных ломаных, которые к тому же образуют замкнутое и локально конечное, следовательно (9.U) фундаментальное, покрытие множества  $f(X)$ .



**40.O** Проведите индукцию по остовам, используя 40.O.2. Рассуждение существенно упрощается в случае, если клеточное пространство является конечным.



**40.0.1** Будем считать, что  $X \subset \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{p+q+1}$ , где  $\mathbb{R}^p$  – координатное пространство первых  $p$  координатных прямых в  $\mathbb{R}^{p+q+1}$ , а  $Y \subset \mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^{p+q+1}$ , где  $\mathbb{R}^q$  – координатное пространство последних  $q$  координатных прямых в  $\mathbb{R}^{p+q+1}$ . Теперь определим отображение  $f : X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$ . Положим  $f(x) = x$ , если  $x \in X$ , и  $f(y) = (0, \dots, 0, 1, y)$ , если  $y \notin V = h^{-1}(A \times [0; \frac{1}{2}])$ . Наконец, если  $y \in U$ ,  $h(y) = (a, t)$  и  $t \in [0; \frac{1}{2}]$ , то положим

$$f(y) = ((1 - 2t)\varphi(a), 2t, 2ty).$$

Нетрудно видеть, что отображение  $f$  – собственное. Его факторотображение  $\hat{f} : X \cup_{\varphi} Y \rightarrow \mathbb{R}^{p+q+1}$  является собственной инъекцией, значит в силу 18.Ох (см. также 18.Рх) оно – вложение.

**40.0.2** По определению клеточного пространства,  $X$  получается приклеиванием объединения  $k$ -мерных замкнутых шаров к его  $(k - 1)$ -остову. Пусть  $Y$  – это (не более чем) счетное объединение  $k$ -мерных шаров, а  $A$  – объединение граничных сфер этих шаров (очевидно, что условие леммы 40.0.1 выполнено: в качестве окрестности  $U$  можно взять объединение дополнений шаров вдвое меньшего диаметра). Таким образом, лемма 40.0.2 следует из 40.0.1.

**40.Р** Следует из 40.0.2 в силу определения клеточной топологии.

**40.Q** Следует из 40.Р и 40.О.

**40.Р** Следует из 40.Q.

**40.С** Попробуйте доказать это утверждение хотя бы для одномерных пространств.

**40.Т** Данное утверждение можно доказать, несколько усложнив рассуждение, приведенное в доказательстве 40.Вх.

**40.У** См. [5, с. 94].

**40.Ах** Легко видеть, что замыкание любого открытого симплекса канонически гомеоморфно  $n$ -мерному замкнутому симплексу. и, поскольку симплицальное пространство хаусдорфово, оно гомеоморфно факторпространству, полученному из дизъюнктного объединения нескольких замкнутых симплексов в результате склеивания вдоль целых граней по аффинным гомеоморфизмам. Так как каждый симплекс является клеточным пространством, а его грани – клеточными подпространствами, то осталось воспользоваться задачей 40.Нх.

**40.Вх** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $x, y \in X$ . Пусть  $n$  – наименьшее число, такое что  $x, y \in X_n$ . Построим их непересекающиеся окрестности  $U_n$  и  $V_n$  в  $X_n$ . Пусть, например,  $x \in e$ , где  $e$  – открытая  $n$ -клетка. Тогда в качестве  $U_n$  можно взять маленький шарик с центром в точке  $x$ , а в качестве  $V_n$  – дополнение (в  $X_n$ ) его замыкания. Пусть

теперь  $a$  – центр некоторой  $(n+1)$ -мерной клетки,  $\varphi : S^n \rightarrow X_n$  – ее приклеивающее отображение. Рассмотрим открытый конус над  $\varphi^{-1}(U_n)$  и  $\varphi^{-1}(V_n)$  с вершиной в точке  $a$ . Пусть  $U_{n+1}$  и  $V_{n+1}$  – объединения образов подобных конусов по всем  $(n+1)$ -мерным клеткам пространства. Ясно, что это – дизъюнктные окрестности точек  $x$  и  $y$  в  $X_{n+1}$ . Множества  $U = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k$  и  $V = \bigcup_{k=n}^{\infty} V_k$  – дизъюнктные окрестности точек  $x$  и  $y$  в пространстве  $X$ .

**40.Cx** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $e \subset X$  – его клетка,  $\psi : D^n \rightarrow X$  – её характеристическое отображение,  $B \subset D^n$  – открытый единичный шар. Так как отображение  $\psi$  непрерывно, то  $\bar{e} = \psi(D^n) = \psi(\text{Cl} B) \subset \text{Cl}(\psi(B)) = \text{Cl}(e)$ . С другой стороны,  $\psi(D^n)$  – компактное множество, следовательно в силу 40.Bx оно замкнуто, поэтому  $\bar{e} = \psi(D^n) \supset \text{Cl}(e)$ .

**40.Dx** Из определения фактортопологии нетрудно видеть, что покрытие  $n$ -остова клеточного пространства его  $(n-1)$ -остовом и замкнутыми  $n$ -мерными клетками является фундаментальным. Начиная с  $n = 0$  и рассуждая по индукции, получаем, что покрытие каждого остова клеточного пространства его замкнутыми клетками является фундаментальным. А поскольку по определению клеточной топологии покрытие клеточного пространства его остовами является фундаментальным, то и покрытие самого этого пространства его замкнутыми клетками является фундаментальным (см. 9.31).

**40.Ex** Следует из утверждения 40.Dx, того, что, в силу определения клеточного подпространства, каждая замкнутая клетка содержится в одном из элементов покрытия, и утверждения 9.31.

**40.Fx** Пусть  $X$  – клеточное пространство,  $X_k$  – его  $k$ -остов. Докажем вначале, что всякое компактное множество  $K \subset X_k$  пересекается лишь с конечным числом открытых клеток остова  $X_k$ . Доказательство проведем индукцией по размерности остова. Поскольку топология в нульмерном остове дискретна, то всякое компактное множество может содержать лишь конечное множество 0-клеток данного клеточного пространства. Проведем индукционный переход. Рассмотрим компактное множество  $K \subset X_n$ . Для всякой  $n$ -клетки  $e_\alpha$ , пересекающейся с множеством  $K$ , выберем открытый шар  $U_\alpha \subset e_\alpha$ , такой что  $K \cap U_\alpha \neq \emptyset$ . Рассмотрим покрытие  $\Gamma = \{e_\alpha, X_n \setminus \bigcup \text{Cl}(U_\alpha)\}$ . Ясно, что  $\Gamma$  – открытое покрытие множества  $K$ . В силу его компактности из покрытия  $\Gamma$  можно выбрать конечное подпокрытие. Значит  $n$ -клеток, пересекающихся с  $K$  – конечное число. Пересечение множества  $K$  с  $(n-1)$ -остовом замкнуто, значит компактно. По индукционному предположению это множество  $(K \cap X_{n-1})$  пересекается с конечным числом открытых клеток, поэтому и множество  $K$  пересекается с конечным числом открытых клеток.

Пусть теперь  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$  – приклеивающее отображение для  $n$ -мерной клетки,  $F = \varphi(S^{n-1}) \subset X_{n-1}$ . Поскольку  $F$  компактно, то оно может пересекаться только с конечным числом открытых клеток. Таким образом получаем, что всякая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

**40.Gx** В силу 40.Dx достаточно проверить замкнутость пересечений  $A \cap \bar{e}$  для всех замкнутых клеток пространства  $X$ . Так как клеточное подпространство является объединением своих, как открытых, так и замкнутых клеток, т. е.  $A = \cup e_\alpha = \cup \bar{e}_\alpha$ , то в силу 40.Fx

$$A \cap \bar{e} = (\cup e_\alpha) \cap \bar{e} = (\cup_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \cap \bar{e} \subset (\cup_{i=1}^n \bar{e}_{\alpha_i}) \cap \bar{e} \subset A \cap \bar{e}$$

и, следовательно, включения в этой цепочке являются равенствами. Следовательно, в силу 40.Cx множество  $A \cap \bar{e} = \cup_{i=1}^n (\bar{e}_{\alpha_i} \cap \bar{e})$  замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств.

**40.Jx** Поскольку, в силу 40.Fx, всякая замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом открытых клеток, то пересечение всякой замкнутой клетки  $\bar{e}$  с множеством  $A$  является конечным и следовательно (в силу хаусдорфовости клеточного пространства) замкнутым – и в  $X$ , и, тем более, в  $\bar{e}$ . Так как, в силу 40.Dx, замкнутые клетки образуют фундаментальное покрытие, то и тем самым само множество  $A$  замкнуто. Точно так же и всякое его подмножество замкнуто и в  $X$ , и, тем более, в  $A$ . Таким образом, действительно, индуцированная топология в  $A$  дискретна.

**40.Jx** Пусть  $K \subset X$  – компактное подмножество. В каждой из клеток  $e_\alpha$ , пересекающихся с  $K$ , выберем по точке  $x_\alpha \in e_\alpha \cap K$  и рассмотрим множество  $A = \{x_\alpha\}$ . В силу 40.Ix множество  $A$  замкнуто, и топология в нем – дискретная. Поскольку  $A$  компактно, как замкнутое подмножество компактного множества, значит, оно конечно. Следовательно,  $K$  пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

**40.Kx**  $\Leftrightarrow$  Следует из 40.Jx.  $\Leftarrow$  Конечное клеточное пространство компактно как объединение конечного числа компактных множеств – замкнутых клеток.

**40.Lx** Проведите индукцию по размерностям клеток, воспользовавшись тем, что замыкание каждой клетки пересекается лишь с конечным числом клеток меньшей размерности. Обратите внимание, что само замыкание клетки может не быть клеточным подпространством.

**40.Mx** Следует из 40.Jx, 40.Lx и 40.2.

**40.Nx**  $\Rightarrow$  Если  $K$  – компактное подмножество клеточного пространства, то оно замкнуто, поскольку всякое клеточное пространство хаусдорфово, а из утверждения 40.Jx следует, что оно пересекается лишь с конечным числом открытых клеток.

$\Leftrightarrow$  Если множество  $K$  пересекается только с конечным числом открытых клеток, то в силу 40.Lx оно лежит в некотором конечном клеточном подпространстве данного пространства. Осталось воспользоваться тем, что конечное клеточное пространство компактно 40.Kx, а  $K$  – его замкнутое подмножество.

**40.Ox** Пусть  $X$  – клеточное пространство.  $\Leftrightarrow$  Если множество клеток в нем счетно, то, взяв в каждой клетке счетное всюду плотное множество и объединив их, мы получим счетное множество, плотное во всем  $X$  (проверьте это!). Таким образом,  $X$  сепарабельно.

$\Rightarrow$  Проведем рассуждение “от противного”. Пусть в  $X$  имеется несчетное множество  $n$ -мерных клеток  $e_\alpha^n$ . Положим  $U_\alpha^n = e_\alpha^n$ . Каждое из множеств  $U_\alpha^n$  открыто в  $n$ -остове  $X_n$  пространства  $X$ . Построим теперь несчетный дизъюнктивный набор открытых в  $X$  множеств. Пусть  $a$  – центр некоторой  $(n+1)$ -мерной клетки,  $\varphi : S^n \rightarrow X_n$  – ее приклеивающее отображение. Построим конус над  $\varphi^{-1}(U_\alpha^n)$  с вершиной в точке  $a$  и обозначим через  $U_\alpha^{n+1}$  объединение таких конусов по всем  $(n+1)$ -мерным клеткам пространства  $X$ . Ясно, что  $\{U_\alpha^{n+1}\}$  – несчетный дизъюнктивный набор множеств, открытых в  $X_{n+1}$ . Тогда множества  $U_\alpha = \bigcup_{k=n}^\infty U_\alpha^k$  образуют несчетный дизъюнктивный набор множеств, открытых во всем пространстве  $X$ , которое, таким образом, не имеет счетной базы, и, в частности, не сепарабельно.

**40.Px** Действительно, компонента линейной связности клеточного пространства вместе с любой своей точкой  $x$  целиком содержит каждую замкнутую клетку, содержащую  $x$  и, в частности, замыкание открытой клетки, содержащей  $x$ .

**40.Rx** Ср. рассуждение, использованное при решении задачи 40.Ox.

**40.Rx** Это так, в силу локальной линейной связности клеточного пространства (см. 40.Qx).

**40.Sx** Следует из 40.Rx.

**40.Tx** Ясно, что доказывать нужно лишь то, что из счетности 0-остова следует счетность всего пространства. Покажем по индукции, что число клеток каждой размерности (не более чем) счетно. Для этого достаточно доказать, что каждая клетка пересекается с конечным числом замкнутых клеток. Будет удобнее доказывать более сильное утверждение: всякая замкнутая клетка  $\bar{e}$  пересекается с конечным числом замкнутых клеток. Ясно, что всякая окрестность, пересекающаяся с замкнутой

клеткой, пересекается и с самой клеткой. Рассмотрим покрытие замкнутой клетки  $\bar{e}$  окрестностями, каждая из которых пересекает лишь конечное число замкнутых клеток. Осталось воспользоваться компактностью  $\bar{e}$ .

**40. Ux** В силу предыдущей задачи 1-остов пространства  $X$  связан. Из результата задачи 40. Tx следует, что достаточно доказать счетность числа его нульмерных клеток. Фиксируем некоторую нульмерную клетку  $x_0$ . Обозначим через  $A_1$  объединение всех замкнутых одномерных клеток, содержащих точку  $x_0$ . Теперь рассмотрим множество  $A_2$  – объединение всех замкнутых одномерных клеток, пересекающихся с  $A_1$ . В силу локальной конечности пространства  $X$  множества  $A_1$  и  $A_2$  состоят из конечного числа клеток. Продолжая построение аналогичным образом, мы получим возрастающую последовательность одномерных клеточных подпространств  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ , каждое из которых конечно. Положим  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Множество  $A$  состоит из (не более чем) счетного числа клеток. Из определения клеточной топологии следует, что множество  $A$  и открыто, и замкнуто в  $X_1$ . Поскольку  $X_1$  связно, то  $A = X_1$ .

**40. Vx**  $\Leftrightarrow$  Если 1-остов клеточного пространства связан, то само это пространство очевидно связно.  $\Rightarrow$  Предположим, что 1-остов не является связным. Тогда он представляется как объединение двух замкнутых множеств,  $X_1 = X'_1 \cup X''_1$ . Каждая двумерная клетка приклеивается к одному из этих множеств, значит,  $X_2 = X'_2 \cup X''_2$ . Аналогичное рассуждение показывает, что для каждого натурального  $n$  имеет место представление  $n$ -остова как объединения его замкнутых подмножеств. Положим  $X' = \bigcup_{n=0}^{\infty} X'_n$  и  $X'' = \bigcup_{n=0}^{\infty} X''_n$ . По определению клеточной топологии множества  $X'$  и  $X''$  являются замкнутыми, следовательно, пространство  $X$  несвязно.

**41. A** Утверждение непосредственно следует из очевидного равенства  $c_i(A \cup B) = c_i(A) + c_i(B) - c_i(A \cap B)$ .

**41. B** Воспользуемся следующим искусственным приемом. Введем многочлен  $\chi_A(t) = c_0(A) + c_1(A)t + \dots + c_i(A)t^i + \dots$ . Он называется *многочленом Пуанкаре*, и его важнейшее для нас свойство состоит в том, что  $\chi(X) = \chi_X(-1)$ . Так как  $c_k(X \times Y) = \sum_{i=0}^k c_i(X)c_{k-i}(Y)$ , то

$$\chi_{X \times Y}(t) = \chi_X(t) \cdot \chi_Y(t).$$

Значит,  $\chi(X \times Y) = \chi_{X \times Y}(-1) = \chi_X(-1) \cdot \chi_Y(-1) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$ .

**41. C** Из определения следует, что объединение всех открытых клеток пространства  $X \setminus (e \cup f)$  совпадает с объединением всех его замкнутых клеток, следовательно, оно является клеточным подпространством пространства  $X$ .

**41.D** Деформационная ретракция шара  $D^n$  на его нижнюю замкнутую полусферу  $S_-^{n-1}$  определяет деформационную ретракцию  $X \rightarrow X \setminus (e \cup f)$ .

**41.E** Утверждение очевидно, поскольку при каждом элементарном комбинаторном стягивании число клеток в двух соседних размерностях уменьшается на единицу.

**41.F** Пусть  $p : X \rightarrow X'$  – отображение факторизации. Пространство  $X'$  разбивается на те же открытые клетки, что и  $X$ , за исключением клеток  $e$  и  $f$ . Приклеивающим отображением для каждой из них является композиция исходного приклеивающего отображения и  $p$ .

**41.G.1** Можно взять  $Y = X_{n-1} \cup_{\varphi_e} D^n$ . Ясно, что  $Y' \cong Y \setminus (e \cup f)$ , будем отождествлять эти пространства. Тогда проекция  $p' : Y \rightarrow Y'$  является гомотопической эквивалентностью в силу утверждения 41.D.

**41.G.2** Пусть  $\{e_\alpha\}$  – набор  $n$ -клеток пространства  $X$ , отличных от клетки  $e$ ,  $\varphi_\alpha$  – соответствующие приклеивающие отображения. Рассмотрим отображение  $p' : Y \rightarrow Y'$ . Так как

$$X_n = Y \cup_{\sqcup \varphi_\alpha} \left( \bigsqcup D_\alpha^n \right), \text{ то } X'_n = Y' \cup_{\sqcup p' \circ \varphi_\alpha} \left( \bigsqcup D_\alpha^n \right).$$

Поскольку отображение  $p'$  в силу 41.G.1 является гомотопической эквивалентностью, то из результата утверждения 41.6х следует, что ее можно продолжить до гомотопической эквивалентности  $p_n : X_n \rightarrow X'_n$ . Продолжая индукцию по остовам, получим требуемое.

**41.Ax** Проведем доказательство индукцией по размерности. Ясно, что следует рассматривать только те клетки, которые не лежат в подпространстве  $A$ . Если имеется ретракция

$$\rho_{n-1} : (X_{n-1} \cup A) \times I \rightarrow (X_{n-1} \times 0) \cup (A \times I),$$

то, если мы построим ретракцию

$$\tilde{\rho}_n : (X_n \cup A) \times I \rightarrow (X_n \times 0) \cup ((X_{n-1} \cup A) \times I),$$

то очевидно, как с помощью их “композиции” получить ретракцию

$$\rho_n : (X_n \cup A) \times I \rightarrow (X_n \times 0) \cup (A \times I).$$

Нам потребуется стандартная ретракция  $\rho : D^n \times I \rightarrow (D^n \times 0) \cup (S^{n-1} \times I)$ . (Проще всего определить  $\rho$  геометрически. Расположим цилиндр стандартным образом в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  и рассмотрим какую-либо точку  $p$ , лежащую над центром его верхнего основания. Для  $z \in D^n \times I$  положим  $\rho(z)$  равным точке пересечения луча, исходящего из  $p$  и проходящего через  $z$ , с объединением основания  $D^n \times 0$  и боковой стенки  $S^{n-1} \times I$  цилиндра.) Фактором отображения  $\rho$  является отображение

$\bar{e} \times I \rightarrow (X_n \times 0) \cup (X_{n-1} \times I)$ , продолжив которое тождественным образом на  $X_{n-1} \times I$ , мы получим отображение

$$\rho_e : (\bar{e} \times I) \cup (X_{n-1} \times I) \rightarrow (X_n \times 0) \cup (X_{n-1} \times I).$$

Поскольку замкнутые клетки образуют фундаментальное покрытие клеточного пространства, то тем самым определена ретракция  $\tilde{\rho}_n$ .

**41.Вх** Формулы  $\tilde{H}(x, 0) = F(x)$  при  $x \in X$  и  $\tilde{H}(x, t) = h(x, t)$  при  $(x, t) \in A \times I$  определяют некоторое отображение  $\tilde{H} : (X \times 0) \cup (A \times I) \rightarrow Y$ . В силу 41.Ах существует ретракция  $\rho : X \times I \rightarrow (X \times 0) \cup (A \times I)$ . Композиция  $H = \tilde{H} \circ \rho$  и будет искомой гомотопией.

**41.Сх** Обозначим через  $h : A \times I \rightarrow A$  гомотопию между тождественным отображением подпространства  $A$  и постоянным отображением  $A \rightarrow A : a \mapsto x_0$ . Рассмотрим гомотопию  $\tilde{h} = i \circ h : A \times I \rightarrow X$ . В силу теоремы 41.Вх её можно продолжить до гомотопии  $H : X \times I \rightarrow X$  тождественного отображения всего пространства  $X$ . Рассмотрим отображение  $f : X \rightarrow X$ ,  $f(x) = H(x, 1)$ . По построению гомотопии  $\tilde{h}$ ,  $f(A) = \{x_0\}$ , следовательно, фактором  $f$  является непрерывное отображение  $g : X/A \rightarrow X$ .

Докажем, что  $\text{pr}$  и  $g$  являются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. Для этого необходимо проверить, что  $g \circ \text{pr} \sim \text{id}_X$  и  $\text{pr} \circ g \sim \text{id}_{X/A}$ .

1) Заметим, что  $H(x, 1) = g(\text{pr}(x))$  по определению отображения  $g$ . Поскольку  $H(x, 0) = x$  при всех  $x \in X$ , то  $H$  является гомотопией между  $\text{id}_X$  и композицией  $g \circ \text{pr}$ .

2) Если профакторизовать каждый слой  $X \times t$  по  $A \times t$ , то, поскольку  $H(x, t) \in A$  при всех  $x \in A$ ,  $t \in I$ , из гомотопии  $H$  мы получим гомотопию  $\tilde{H} : X/A \rightarrow X/A$  между  $\text{id}_{X/A}$  и композицией  $p \circ g$ .

**41.Фх** В силу 41.Ех мы вправе считать, что в данном пространстве имеется одна нульмерная клетка, таким образом, его одномерным остовом является букет окружностей. Рассмотрим характеристическое отображение  $\psi : I \rightarrow X_1$  некоторой 1-клетки. Нам будет удобнее вместо петли  $\psi$  рассмотреть круговую петлю  $S^1 \rightarrow X_1$ , которую мы обозначим той же буквой. Поскольку пространство односвязно, петлю  $\psi$  можно продолжить до отображения круга  $f : D^2 \rightarrow X$ . Рассмотрим теперь шар  $D^3$  и будем для простоты обозначений считать, что  $f$  определено на нижней полусфере  $S_-^2$  его границы. Положим  $Y = X \cup_f D^3 \simeq X$ . Пространство  $Y$  является клеточным и получается добавлением к клеточному разбиению пространства  $X$  двух клеток – двумерной и трехмерной. Новая двумерная клетка  $e$  – образ верхней полусферы в  $D^3$  –

является стягиваемым клеточным пространством. Значит, факторпространство  $Y/e \simeq Y$  и содержит на одну одномерную клетку меньше, чем исходное пространство  $X$ . Продолжая рассуждение, мы и получим пространство, двумерный остов которого состоит из одной точки. Обратите внимание, что наше построение привело к трехмерному клеточному пространству. В действительности можно доказать, что в наших условиях пространство будет гомотопически эквивалентно: точке, 2-сфере, или букету 2-сфер, однако доказательство этого использует более сложную (гомологическую) технику.

**41.Gx** Пусть отображение  $f : X \rightarrow A$  является гомотопически обратным к включению  $i$ . По условию сужение  $f$  на подпространство  $A$ , т. е. композиция  $f \circ i$ , гомотопна тождественному отображению  $\text{id}_A$ . В силу теоремы 41.Bx эту гомотопию можно продолжить до гомотопии  $H : X \times I \rightarrow A$  отображения  $f$ . Положим  $\rho(x) = H(x, 1)$ , при этом  $\rho(x, 1) = x$  при всех  $x \in A$ . Следовательно,  $\rho$  – ретракция. Осталось заметить, что, поскольку  $\rho$  гомотопна  $f$ , то  $i \circ \rho$  гомотопна композиции  $i \circ f$ , которая гомотопна  $\text{id}_X$ , так как по предположению  $f$  и  $i$  являются гомотопически обратными.

**42.A** Доказывается по индукции при помощи леммы 42.A.1.

**42.A.1** Конечно, то, что проекция является гомотопической эквивалентностью, есть частный случай утверждений 41.Dx и 41.G. Однако здесь мы приводим независимое рассуждение, которое в одномерном случае является более наглядным. Все гомотопии будут связаны вне окрестности одномерной клетки  $e$  исходного клеточного пространства  $X$  и вне окрестности нульмерной клетки  $x_0$  – образа клетки  $e$  в факторпространстве  $Y = X/e$ . В этой связи мы будем рассматривать только замыкания таких окрестностей. При этом, для простоты обозначений будем считать, что рассматриваемые пространства совпадают с этими окрестностями. В таком случае пространство  $X$  – это одномерная клетка  $e$ , к левому концу которой приклеены отрезки  $I_1, I_2, \dots, I_k$ , к правому – отрезки  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Пространство  $Y$  есть просто букет, составленный из всех этих отрезков с общей точкой  $x_0$ . Отображение  $f : X \rightarrow Y$  устроено следующим образом: оно отображает каждый из отрезков  $I_i$  и  $J_j$  на себя тождественным образом, а клетку  $e$  отображает в точку  $x_0$ . Отображение  $g : Y \rightarrow X$  переводит точку  $x_0$  в середину клетки  $e$ , половину каждого из отрезков  $I_s$  и  $J_t$  – в, соответственно, левую и правую половину этой клетки. Наконец, оставшаяся половина каждого из этих отрезков отображается (с растяжением в два раза) на целый отрезок. Докажем, что описанные отображения являются гомотопически обратными. При этом важно, чтобы гомотопии были связанными на свободных концах отрезков  $I_s$  и  $J_t$ . Композиция  $f \circ g : Y \rightarrow Y$  устроена



следующим образом. Приведение  $f \circ g$  на каждый из отрезков букета – это, собственно говоря, произведение тождественного пути и постоянного пути, которое, как известно, гомотопно тождественному пути. При этом гомотопия связана как на свободных концах отрезков, так и в точке  $x_0$ . Композиция  $g \circ f$  отображает всю клетку  $e$  в её середину, смежные клетке  $e$  половины каждого из отрезков  $I_s$  и  $I_t$  отображаются в половину этой клетки, а оставшиеся их части растягиваются в два раза и отображаются на весь соответствующий отрезок. Конечно, рассматриваемое отображение гомотопно тождественному.

**42.B** В силу 42.A.1, всякое связное одномерное конечное клеточное пространство  $X$  гомотопически эквивалентно пространству  $X'$ , число нульмерных и одномерных клеток в котором на единицу меньше, чем в пространстве  $X$ , следовательно,  $\chi(X) = \chi(X')$ . Рассуждая по индукции, мы в результате получим пространство с одной нульмерной клеткой, эйлерова характеристика которого равна  $\chi(X)$  (ср. 41.E). Пусть  $k$  – число одномерных клеток этого пространства. Тогда  $\chi(X) = 1 - k$ , значит,  $k = 1 - \chi(X)$ . Осталось заметить, что число  $k$  – это и есть ранг группы  $\pi_1(X)$ .

**42.C** Следует из 42.B в силу того, что фундаментальная группа пространства является инвариантом относительно гомотопических эквивалентностей.

**42.D** Следует из 42.C.

**42.E** В силу 42.B, Если фундаментальные группы двух конечных связных одномерных клеточных пространств изоморфны (или же совпадают эйлеровы характеристики этих пространств), то каждое из них гомотопически эквивалентно букету, состоящему из одного и того же числа окружностей, значит, сами пространства гомотопически эквивалентны. Если пространства гомотопически эквивалентны, то, конечно, их фундаментальные группы изоморфны, а в силу 42.C, совпадают и их эйлеровы характеристики.

**42.Ax** Пусть  $e$  – открытая клетка. Если образ  $\varphi_e(S^0)$  ее приклеивающего отображения состоит из одной точки, то очевидно, что дополнение  $X \setminus e$  связно. Предположим, что  $\varphi_e(S^0) = \{x_0, x_1\}$ . Докажите, что каждая из компонент связности дополнения  $X \setminus e$  содержит хотя бы одну из точек  $x_0$  и  $x_1$ .

**42.Bx** 1) Если компонента связности дополнения  $X \setminus x$  некоторой вершины  $x$  связного одномерного клеточного пространства  $X$  не содержит ребра, замыканию которого принадлежит вершина  $x$ , то в силу локальной связности клеточных пространств, эта компонента и открыта и замкнута во всем пространстве  $X$ , что противоречит его связности. 2)

Следует из того, что вершина степени  $m$  входит в замыкание не более чем  $m$  различных ребер.

**43.A** См. 42.B.

**43.B** Следствие 42.I (или 41.Cx) в силу 35.L.

**43.C** Достаточно доказать, что всякая петля  $u : I \rightarrow X$  гомотопна петле  $v$  с  $v(I) \subset A$ . Обозначим через  $U$  лежащий в  $D^k$  открытый шар радиуса  $\frac{2}{3}$ , а через  $V$  – дополнение в  $X$  замкнутого шара радиуса  $\frac{1}{3}$ . В силу леммы Лебега, существует такое разбиение отрезка  $I$  на отрезки  $I_1, \dots, I_N$ , что образ каждого из элементов разбиения целиком содержится в одном из множеств  $U$  или  $V$ . Предположим, что  $u(I_l) \subset U$ . Поскольку в  $D^k$  любые пути с одинаковым началом и концом гомотопны, сужение  $u|_{I_l}$  гомотопно пути, не задевающему центр  $a \in D^k$ . Значит, петля  $u$  гомотопна петле  $u'$ , образ которой не содержит точку  $a$ . Осталось заметить, что пространство  $A$  является деформационным ретрактом дополнения  $X \setminus a$ , значит,  $u'$  гомотопна петле  $v$  с лежащим в  $A$  образом.

**43.D** Пусть  $s$  – петля в точке  $x_0$ . Так как множество  $s(I)$  компактно, то оно содержится в некотором конечном клеточном подпространстве  $Y$  пространства  $X$ . Осталось воспользоваться утверждением 43.C и провести индукцию по числу клеток в  $Y$ .

**43.E** Следствие 43.D и 43.B.

**43.F** Если мы возьмем другой набор путей  $s'_\alpha$ , то элементы  $T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha]$  и  $T_{s'_\alpha}[\varphi_\alpha]$  будут сопряжены в  $\pi_1(X_1, x_0)$ , а поскольку подгруппа  $N$  – нормальна, то она содержит набор элементов  $\{T_{s'_\alpha}[\varphi_\alpha]\}$ , тогда в ней содержится набор  $\{T_{s'_\alpha}[\varphi_\alpha]\}$ .

**43.G** Мы вправе считать, что нульмерный остов пространства  $X$  состоит из единственной точки  $x_0$ , так что его одномерным остовом  $X_1$  является букет окружностей. Рассмотрим накрытие  $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$  с данной группой  $N$ . Его существование следует из общей теоремы 39.Dx о существовании накрытия с данной группой. В рассматриваемом случае тотальное пространство накрытия будет одномерным клеточным пространством. Теперь доказательство теоремы происходит в несколько шагов, каждый из которых представляет собой доказательство одной из следующих семи лемм. Нам будет также удобно считать, что  $\varphi_\alpha(1) = x_0$ , так что  $T_{s_\alpha}[\varphi_\alpha] = [\varphi_\alpha]$ .

**43.G.1** Так как ясно, что  $\text{in}_*([\varphi_\alpha]) = 1$  в группе  $\pi_1(X, x_0)$ , то  $\text{in}_*([\varphi_\alpha]) = 1$  в группе  $\pi_1(X, x_0)$ , значит, каждый из элементов  $[\varphi_\alpha] \in \text{Ker } i_*$ . Поскольку подгруппа  $\text{Ker } i_*$  является нормальной, то она содержит  $N$  – минимальную подгруппу, порожденную этими элементами.

**43.G.2** Следует из 39.Px.

**43.G.3** Пусть  $F = p_1^{-1}(x_0)$  – слой над точкой  $x_0$ . Отображение  $p_2$  является фактором отображения

$$Y_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{\alpha} \bigsqcup_{y \in F_{\alpha}} D_{\alpha, y}^2 \right) \rightarrow X_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^2 \right),$$

приведение которого  $Y_1 \rightarrow X_1$  – это отображение  $p_1$ , а отображения  $\bigsqcup_{y \in F_{\alpha}} D_{\alpha}^2 \rightarrow D_{\alpha}^2$  тождественны на каждом из кругов  $D_{\alpha}^2$ . Ясно, что у каждой точки  $x \in \text{Int } D_{\alpha}^2 \subset X_2$  ее правильно накрытой окрестностью является вся внутренность этого круга. Пусть теперь для точки  $x \in X_1$  множество  $U_1$  является ее правильно накрытой окрестностью по отношению к накрытию  $p_1$ . Положим  $U = U_1 \cup \bigcup_{\alpha'} \psi_{\alpha'}(B_{\alpha'})$ , где  $B_{\alpha'}$  – это открытый конус с вершиной в центре шара  $D_{\alpha'}^2$  над множеством  $\varphi_{\alpha'}^{-1}(U)$ . Множество  $U$  будет правильно накрытой по отношению к отображению  $p_2$  окрестностью точки  $x$ .

**43.G.4** Приведем доказательство данного утверждения вначале для  $n = 3$ . Итак, пусть  $p : X \rightarrow B$  – произвольное накрытие,  $\varphi : S^2 \rightarrow B$  – произвольное отображение. Рассмотрим подмножество  $A = (S^1 \times 0) \cup (1 \times I) \cup (S^1 \times 1)$  цилиндра  $S^1 \times I$ , пусть  $q : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I/A$  – то отображение факторизации. Нетрудно видеть, что  $S^1 \times I/A \cong S^2$ , поэтому будем считать, что  $q : S^1 \times I \rightarrow S^2$ . Композиция  $h = \varphi \circ q : S^1 \times I \rightarrow B$  является гомотопией между одной и той же постоянной петлей в базе накрытия. По теореме о накрывающей гомотопии 34.C гомотопия  $h$  накрывается отображением  $\tilde{h}$ , которое также является гомотопией между двумя постоянными путями, значит, его фактором будет отображение  $\tilde{\varphi} : S^2 \rightarrow X$ , накрывающее  $\varphi$ . При  $n > 3$  в рассуждении можно использовать 39.Xx.

**43.G.5** Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

**43.G.6** Поскольку петля  $\text{in os} : I \rightarrow X$  гомотопна постоянной петле, то она и накрывается петлей, образ которой будет автоматически лежать в  $Y_1$ .

**43.G.7** Пусть  $s$  – петля в  $X_1$ , такая что  $[s] \in \text{Ker}(i_1)_*$ . Из леммы 6 следует, что она накрывается петлей  $\tilde{s} : I \rightarrow Y_1$ , значит  $[s] = (p_1)_*([\tilde{s}]) \in N$ . Тем самым  $\text{Ker in}_* \subset N$ , поэтому в силу леммы 1  $N = \text{Ker in}_*$ .

**43.I** К примеру,  $\mathbb{R}P^2$  получается при приклеивании  $D^2$  к  $S^1$  посредством отображения  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ , где  $\varphi(z) = z^2$ . Класс петли  $\varphi$  в  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  представляет из себя удвоенную образующую, следовательно,  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ , как и следовало ожидать. Тор  $S^1 \times S^1$  получается в

результате приклеивания круга  $D^2$  к букету  $S^1 \vee S^1$  посредством отображения  $\varphi$ , классом которого является коммутатор образующих фундаментальной группы букета. Поэтому, как и следовало ожидать, фундаментальной группой тора является  $\mathbb{Z}^2$ .

**43.K** См. 40.L (h).

**43.L** См. 40.L (i).

**43.M.1** Так как единственное соотношение в фундаментальной группе сферы с  $g$  ручками означает, что произведение  $g$  коммутантов образующих  $a_i$  и  $b_i$  равно 1.

**43.M** Так как их прокоммутированные группы являются свободными абелевыми группами с разным числом образующих, значит, они не изоморфны.

**43.N.1** Взяв в прокоммутированной группе в качестве образующих элементы  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, g - 1$ , и  $b_n = a_1 a_2 \dots a_g$ , мы получим абелеву группу с единственным соотношением  $b_n^2 = 1$ .

**43.N** Следствие 43.N.1.

**43.O** Следствие 43.M.

**43.O** Следствие 43.N.

**43.Q** Следствие 43.M.1 и 43.N.1.

**43.Ax** Мы не предполагаем, что читатель сможет самостоятельно доказать эту теорему. Доказательство можно найти, к примеру, в книге [4].

**43.Bx** Нарисуйте коммутативную диаграмму, в которой участвуют гомоморфизмы, индуцированные всеми существующими в этой ситуации включениями.

**43.Cx** Поскольку, как будет доказано в разделе 43'7x, группа, заданная вышеуказанным образом, в действительности с точностью до канонического изоморфизма не зависит от выбора образующих и соотношений в группах  $\pi_1(A, x_0)$  и  $\pi_1(B, x_0)$  и выбора образующих в группе  $\pi_1(C, x_0)$ , мы можем воспользоваться наиболее удобным для нас заданием. Выведем данную теорему из теорем 43.D и 43.G. Прежде всего будет удобно заменить пространства  $X, A, B, C$  на гомотопические эквивалентные им пространства, нульмерный остов которых состоит из одной точки. Мы сделаем это при помощи следующей конструкции. Рассмотрим лежащее в одномерном остове  $C$  максимальное дерево; обозначим его  $T_C$ . Дополним его до максимального дерева  $T_A \supset T_C$  в  $A$ , а также дополним  $T_C$  до максимального дерева  $T_B \supset T_C$ . Объединение  $T = T_A \cup T_B$  является максимальным деревом в  $X$ . Осталось заменить каждое из рассматриваемых пространств его фактором по лежащему в

нем максимальному дереву. Таким образом, одномерный остов каждого из пространств  $X, A, B, C$  или совпадает с нульмерной клеткой  $x_0$ , или является букетом окружностей. Каждой из окружностей букетов соответствует образующая фундаментальной группы соответствующего пространства. Образом элемента  $\gamma_i \in \pi_1(C, x_0)$  при гомоморфизме включения является одна из образующих, пусть  $\alpha_i$  ( $\beta_i$ ) в группе  $\pi_1(A, x_0)$  (соответственно, в  $\pi_1(B, x_0)$ ). Таким образом,  $\xi_i = \alpha_i$  и  $\eta_i = \beta_i$ . Соотношения  $\xi_i = \eta_i$ , а в, данном случае  $\alpha_i = \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, t$  возникают в силу того, что каждая из лежащих в  $C$  окружностей определяет одну образующую группы  $\pi_1(X, x_0)$ . Все остальные соотношения, как следует из утверждения 43.G, определяются приклеивающими отображениями двумерных клеток пространства  $X$ , каждая из которых лежит по крайней мере в одном из множеств  $A$  или  $B$ , значит является соотношением между образующими фундаментальных групп этих пространств.

**43.Dx** Пусть  $\mathbb{F}$  – свободная группа с образующими  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ . По определению группа  $X$  является ее факторгруппой по нормальной оболочке  $N$  элементов

$$\{\rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s, \xi(\gamma_1)\eta(\gamma_1)^{-1}, \dots, \xi(\gamma_t)\eta(\gamma_t)^{-1}\}.$$

Из условия коммутативности первой диаграммы следует, что подгруппа  $N$  лежит в ядре гомоморфизма  $F \rightarrow X' : \alpha_i \mapsto \varphi'(\alpha_i), \beta_i \mapsto \psi'(\alpha_i)$ , следовательно, существует гомоморфизм  $\zeta : X \rightarrow X'$ . Его единственность очевидна. Последнее утверждение теоремы докажите самостоятельно.

**43.Ex** Постройте универсальное накрытие пространства  $X$ .

---

# Указания, комментарии, советы и ответы

**1.1** Множество  $\{\emptyset\}$  состоит из одного элемента, каковым является пустое множество  $\emptyset$ . Конечно, сам этот элемент есть пустое множество, которое не содержит элементов, но множество  $\{\emptyset\}$  состоит из единственного элемента  $\emptyset$ .

**1.2** Формулы 1) и 2) верны, а 3) — нет.

**1.3** Да, множество  $\{\{\emptyset\}\}$  состоит из одного элемента, его единственным элементом является множество  $\{\emptyset\}$ .

**1.4** 2, 3, 1, 2, 2, 2, 1, 2 для  $x \neq \frac{1}{2}$  и 1, если  $x = \frac{1}{2}$ .

**1.5** (a)  $\{1, 2, 3, 4\}$ ; (b)  $\{\}$ ; (c)  $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots\}$

**1.8** Множество решений системы уравнений есть пересечение множеств решений уравнений, составляющих эту систему.

**2.1** Решение задачи основано на теоретико-множественном тождестве:  $\cup(a_\alpha; +\infty) = (\inf a_\alpha; +\infty)$  (докажите его). Кстати, набор из замкнутых лучей  $[a; +\infty)$  не является топологией, поскольку вполне возможно, что  $\cup[a_\alpha; +\infty) = (a_0; +\infty)$  (приведите пример).

**2.2** Да, является. Решение почти дословно совпадает с решением предыдущей задачи.

**2.3** Основное, что нужно осознать в связи с определением топологии в множестве, — это то, что аксиомы топологической структуры являются условиями на *набор* подмножеств, при выполнении которых

этот набор и называется топологической структурой. Второй набор ею не является, поскольку множества  $\{a\}$ ,  $\{b, d\}$  в него входят, а множество  $\{a, b, d\} = \{a\} \cup \{b, d\}$  – нет. Найдите два таких элемента третьего набора пересечение которых ему не принадлежит. Тогда вы покажете, что это не топология. И, наконец, нетрудно видеть, что любые пересечения и объединения элементов первого набора не выводят из него (т. е. при таких операциях не будет получаться новых множеств).

**2.4** Нет, поскольку пересечение бесконечных множеств может быть конечным (приведите пример).

**2.5** Да. При решении удобно использовать формулу де Моргана 2.E, то, что пересечение конечных множеств всегда конечно и что объединение конечного числа конечных множеств также является конечным множеством.

**2.6** Да, является, поскольку

$$\bigcup (\{a\} \cup U_\alpha) = \{a\} \cup \left( \bigcup U_\alpha \right),$$

$$\bigcap (\{a\} \cup U_\alpha) = \{a\} \cup \left( \bigcap U_\alpha \right).$$

**2.7** Конечно, является.

**2.10** Замкнуты:

- (1) в дискретном пространстве – все множества;
- (2) в антидискретном – только те же, какие и открыты: пустое и все пространство;
- (3) в стрелке –  $\emptyset$ ,  $X$  и отрезки вида  $[0; a]$ ;
- (4) в  $\mathfrak{V}$  –  $X$ ,  $\emptyset$ ,  $\{b, c, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, d\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{c, d\}$ ;
- (5) в  $\mathbb{R}_{T_1}$  – все конечные множества и все  $\mathbb{R}$ .

**2.11** При решении этой задачи нужно преодолеть в себе ощущение полной очевидности вопроса. Почему промежуток  $(0; 1]$  не открыт? Если  $(0; 1] = \cup (a_\alpha; b_\alpha)$ , то  $1 \in (a_{\alpha_0}; b_{\alpha_0})$ , значит  $b_{\alpha_0} > 1$ , откуда  $\cup (a_\alpha; b_\alpha) \neq (0; 1]$ . Аналогично и множество

$$\mathbb{R} \setminus (0; 1] = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$$

не открыто. С другой стороны,

$$(0; 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}; 1 \right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( 0; \frac{n+1}{n} \right).$$

**2.12** Представьте дополнение этого множества как объединение интервалов.

**2.13** Проверьте, что  $\Omega = \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{F}\}$  есть топологическая структура.

**2.14** Для контроля укажем, что всего существует четырнадцать таких наборов.

**2.15** Вы уже знаете все, что нужно для решения этой задачи и просто обязаны находить ответы на такие вопросы самостоятельно. Не ленитесь.

**3.1** Нет, конечно! Топологическая структура восстанавливается по базе, поскольку она является совокупностью объединений всевозможных наборов множеств, входящих в эту базу.

### 3.2

- (1) База дискретного пространства — набор всех одноточечных подмножеств, и эта база минимальна.
- (2) В пространстве  $\mathfrak{Y}$  базой является, к примеру, такой набор:  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{a, b, c, d\}$ .
- (3) В антидискретном пространстве минимальная база состоит из всего пространства.
- (4) В стрелке, к примеру, базой является набор  $\{[0; +\infty), (r; +\infty)\}_{r \in \mathbb{Q}_+}$ .

**3.3** Сама топологическая структура является своей собственной базой. Следовательно, никакой отличный от нее набор, не является базой. Значит, в таком пространстве никакое открытое множество не может быть объединением двух отличных от него открытых множеств. Следовательно, в нем открытые множества линейно упорядочены по включению. Более того, в нем не существует бесконечных строго возрастающих цепочек открытых множеств.

**3.4** Мы покажем, что в результате удаления любого элемента из любой базы прямой получается база той же топологии. Пусть  $U$  — произвольное базовое множество. Его можно представить как объединение открытых интервалов, которые короче чем расстояние между некоторыми двумя точками множества  $U$ . Таких интервалов понадобится не меньше двух. В свою очередь, каждый из них можно представить как объединение множеств из рассматриваемой базы. Поскольку  $U$  удалось представить как объединение других базовых множеств, его самого можно из базы удалить.

**3.5** Это так, поскольку второе из условий, сформулированных в 3.B, выполнено автоматически.

**3.6** Докажите, что пересечение арифметических прогрессий есть арифметическая прогрессия.



**3.7** Поскольку множества  $\{i, i+d, i+2d, \dots\}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , открыты, попарно не пересекаются и покрывают  $\mathbb{N}$ , то каждое из них и замкнуто. В частности, для каждого простого числа  $p$  замкнуты и множества  $\{p, 2p, 3p, \dots\}$ , образующие покрытие множества  $\mathbb{N} \setminus 1$ . Если бы простых чисел было конечное число, то оказалось бы, что одноточечное множество  $\{1\}$  открыто.

**3.8** Включение  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  означает, что множество, открытое в первой топологии (т. е. входящее в набор  $\Omega_1$ ) принадлежит и набору  $\Omega_2$ . Поэтому следует показать, что множество  $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=1}^n$  является открытым в обычной топологии прямой.

**4.2** Ср. 4.B.

**4.4** Отгадка в 4.7.

**4.7** Квадраты, стороны которых параллельны, соответственно, осям координат и биссектрисам координатных углов.

**4.8**  $D_1(a) = X$ ,  $D_{1/2}(a) = \{a\}$ ,  $S_{1/2}(a) = \emptyset$ .

**4.9** К примеру,  $X = D_1(0) \subset \mathbb{R}^1$ , а  $D_{3/2}(5/6) \subset D_1(0)$ .

**4.10** Обойдитесь тремя точками.

**4.11** Пусть  $R > r$  и  $D_R(b) \subset D_r(a)$ . Возьмите  $c \in D_R(b)$  и воспользуйтесь тем, что  $\rho(b, c) \leq \rho(b, a) + \rho(a, c)$ .

**4.12** Положим  $u = b - x$  и  $t = x - a$ . Неравенство Коши обращается в равенство, тогда векторы  $u$  и  $t$  сонаправлены, т. е. тогда точка  $x$  лежит на отрезке с концами в точках  $a$  и  $b$ .

**4.13** В метрике  $\rho^{(p)}$  при  $p > 1$  указанное множество совпадает с отрезком с концами  $a$  и  $b$ , а в метрике  $\rho^{(1)}$  является прямоугольным параллелепипедом, противоположными вершинами которого являются эти точки.

**4.14** См. решение задачи 4.F.

**4.19** Дискретная.

**4.20** Покажите, что множество  $X \setminus D_r(a) = \{x \mid \rho(x, a) > r\}$  открыто.

**4.23** Воспользуйтесь равенством  $X \setminus S_r(a) = B_r(a) \cup (X \setminus D_r(a))$  и результатом задачи 4.20.

**4.25** Только прямая и дискретное пространство.

**4.26** Утверждение задачи 3.F как раз и состоит в том, что при  $n = 2$  метрики  $\rho^{(2)}$ ,  $\rho^{(1)}$  и  $\rho^{(\infty)}$  эквивалентны; аналогичное рассуждение можно провести и при  $n > 2$ . Однако в этом случае удобнее воспользоваться результатом следующей задачи, показав, что для любой пары метрик вида  $\rho^{(p)}$  с  $(1 \leq p \leq \infty)$  найдутся соответствующие константы  $c$  и  $C$ .

**4.27** Разобьем эту задачу на две. Именно, вначале покажем, что если  $\rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$ , то  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ . Действительно, из неравенства  $\rho_2 \leq C\rho_1$  следует включение  $B_r^{(\rho_1)}(a) \subset B_{Cr}^{(\rho_2)}$ . Теперь воспользуемся утверждением задачи 4.1. Неравенство  $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y)$  можно переписать в виде  $\rho_1(x, y) \leq \frac{1}{c}\rho_2(x, y)$ . Тем самым,  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ .

**4.28** Метрики  $\rho_1(x, y) = |x - y|$  и  $\rho_2(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$  на прямой эквивалентны, однако ясно, что не существует такой константы  $C$ , что  $\rho_1 \leq C\rho_2$ .

**4.29** Отгадка: метрики  $\rho_1, \rho_2$  эквивалентны, если существуют такие  $c, C, d > 0$ , что если  $\rho_1(x, y) \leq d$ , то  $c\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C\rho_1(x, y)$ .

**4.30** Найдите такие константы  $c$  и  $C$ , что  $c\rho^{(\infty)}(x, y) \leq \rho^{(p)}(x, y) \leq C\rho^{(\infty)}$ .

**4.31** Поскольку  $\rho_1(f, g) \leq \rho_C(f, g)$ , то  $\Omega_1 \subset \Omega_C$ . С другой стороны, не существует такого шара в метрике  $\rho_1$  с центром в нуле, который содержался бы в шаре  $B_1^{(\rho_C)}(0)$ , поскольку  $\forall \varepsilon > 0 \exists f$ , такая что  $\int_0^1 |f(x)| dx < \varepsilon$ , а  $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \geq 1$ , таким образом  $\Omega_C \not\subset \Omega_1$ .

**4.32** 1) Ясно, что во всех случаях требует проверки лишь неравенство треугольника, причем для  $\rho_1 + \rho_2$  оно очевидно верно. Далее:

$$\rho_1(x, y) \leq \rho_1(x, z) + \rho_1(z, y) \leq \max\{\rho_1(x, z), \rho_2(x, z)\} + \max\{\rho_1(y, z), \rho_2(y, z)\}.$$

Аналогичное неравенство верно для  $\rho_2(x, y)$ , поэтому  $\max\{\rho_1, \rho_2\}$  — метрика.

2) Постройте примеры, из которые показывали бы, что ни  $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ , ни  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ , ни  $\rho_1\rho_2$  метриками не являются (для этого достаточно надлежащим образом подобрать попарные расстояния между тремя точками).

**4.33** Последнее утверждение практически очевидно. Первое и второе следуют из него при  $f(t) = \frac{t}{1+t}$  и  $f(t) = \min\{1, t\}$ , соответственно, так что достаточно проверить, что эти функции удовлетворяют условиям последнего пункта.

**4.34** Поскольку  $\frac{\rho}{1+\rho} \leq \rho$ , а при  $\rho(x, y) \leq 1$  верно неравенство  $\frac{1}{2}\rho(x, y) \leq \frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$ , то утверждение задачи следует из 4.29.

**4.35** Для произвольной точки  $z \in A$  верно, что

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A),$$

значит,  $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$ , или  $\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq \rho(x, y)$ . Поменяв местами  $x$  и  $y$ , получим неравенство  $\rho(y, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, y)$ . Система из двух полученных неравенств равносильна искомому неравенству.

**5.1** Так же, как строится сама топология: если  $\Sigma$  – база в  $X$ , то  $\Sigma_A = \{A \cap V \mid V \in \Sigma\}$  – база индуцированной топологии в  $A$ .

## 5.2

- (1) Дискретная, поскольку  $(n-1, n+1) \cap \mathbb{N} = \{n\}$ ;
- (2)  $\Omega_{\mathbb{N}} = \{(k, k+1, k+2, \dots)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ;
- (3) дискретная;
- (4)  $\Omega = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .

**5.3** Да, открыт, поскольку  $[0; 1) = (-1; 1) \cap [0; 2]$ , а множество  $(-1; 1)$  открыто на прямой.

**5.5**  $\Leftrightarrow$  Положите  $V = U$ .  $\Leftarrow$  Используйте задачу 5.E.

**5.6** Рассмотрите интервал  $(-1; 1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  и открытый единичный круг с центром в начале координат. Другое решение основано на следующем общем утверждении: всякое открытое множество является локально замкнутым. Действительно, если множество  $U$  открыто в  $X$ , то для всякой его точки пересечение  $U \cap U$  замкнуто в  $U$ .

**5.7** Топология, порожденная метрикой в  $A$ , задается базой  $\Sigma_1 = \{B_r^A(a) \mid a \in A\}$ , где  $B_r^A(a) = \{x \in A \mid \rho(x, a) < r\}$  – открытый шар в  $A$  с центром в  $a$  и радиусом  $r$ . Вторая топология задается базой  $\Sigma_2 = \{B_r(x) \cap A \mid x \in X\}$ . Здесь  $B_r(x)$  – открытый шар в  $X$ . Очевидно  $B_r^A(a) = B_r(a) \cap A$  для  $a \in A$ . Поэтому  $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ . Однако, может случиться, что  $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ . Таким образом, осталось показать, что множества из  $\Sigma_2$  являются открытыми в топологии, порожденной базой  $\Sigma_1$ . Для этого проверьте, что для всякой точки  $x$  элемента второй базы  $U \in \Sigma_2$  найдется элемент  $V \in \Sigma_1$  первой базы, такой что  $x \in V \subset U$ .

**6.1**  $\text{Int}\{a, b, d\} = \{a, b\}$ , поскольку это и есть наибольшее открытое множество пространства  $\mathbb{V}$ , содержащееся в  $\{a, b, d\}$ .

**6.2** Внутренность интервала  $(0; 1)$  на прямой с топологией Зариского пуста, поскольку никакое непустое открытое множество этого пространства не помещается в  $(0; 1)$ .

**6.3** 1) Действительно,

$$\text{Cl}_A B = \bigcap_{\substack{F \supset B, \\ A \setminus F \in \Omega_A}} F = \bigcap_{\substack{H \supset B, \\ X \setminus H \in \Omega}} (H \cap A) = A \cap \bigcap_{\substack{H \supset B, \\ X \setminus H \in \Omega}} H = A \cap \text{Cl}_X B.$$

2) Очевидно, что второе равенство может быть неверным. Действительно, если  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $A = \mathbb{R}^1$ ,  $B = A$ , то  $\text{Int}_A B = \mathbb{R}^1 \neq \emptyset = (\text{Int}_X B) \cap A$ .

$$6.4 \quad \text{Cl}\{a\} = \{a, c, d\}.$$

$$6.5 \quad \text{Fr}\{a\} = \{c, d\}.$$

6.6 Следует из 6.К; см. 6.7.

$$6.7 \quad \text{Fr } A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A = \text{Cl } A \cap (X \setminus \text{Int } A) = \text{Cl } A \cap \text{Cl}(X \setminus A).$$

6.8 В топологии  $\Omega_1$  меньше открытых множеств, значит, меньше и замкнутых множеств, следовательно, пересечение всех замкнутых в этой топологии и содержащих  $A$  множеств не может быть меньше, чем пересечение содержащих  $A$  замкнутых в топологии  $\Omega_2$  множеств.

$$6.9 \quad \text{Int}_1 A \subset \text{Int}_2 A.$$

6.10 Так как  $\text{Int } A$  есть открытое и содержащееся в  $B$  множество, то оно содержится в  $\text{Int } B$ .

6.11 Так как множество  $\text{Int } A$  является открытым, то его внутренность совпадает с ним самим.

6.12 Из очевидного включения  $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subset A \cap B$  следует, что  $\text{Int } A \cap \text{Int } B \subset \text{Int}(A \cap B)$ . Далее, если  $x \in \text{Int}(A \cap B)$ , то у точки  $x$  имеется окрестность, содержащаяся в  $A \cap B$ , значит, эта окрестность содержится в каждом из этих множеств, следовательно,  $x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B$ . Второе утверждение неверно – см. задачу 6.13.

$$6.13 \quad \text{Int}([-1; 0] \cup [0; 1]) = (-1; 1) \neq (-1; 0) \cup (0; 1) = \text{Int}[-1; 0] \cup \text{Int}[0; 1].$$

6.14  $\text{Int } A \cup \text{Int } B$  – это открытое множество, содержащееся в объединении  $A \cup B$ , значит, оно содержится и в его внутренности, таким образом,  $\text{Int } A \cup \text{Int } B \subset \text{Int}(A \cup B)$ .

6.15 Если  $A \subset B$ , то  $\text{Cl } A \subset \text{Cl } B$ ;  $\text{Cl } \text{Cl } A = \text{Cl } A$ ;  $\text{Cl } A \cup \text{Cl } B = \text{Cl}(A \cup B)$ ;  $\text{Cl } A \cap \text{Cl } B \supset \text{Cl}(A \cap B)$ .

$$6.16 \quad \text{Cl}\{1\} = [0; 1], \text{Int}[0; 1] = \emptyset, \text{Fr}(2; +\infty) = [0; 2].$$

$$6.17 \quad \text{Int}((0; 1] \cup \{2\}) = (0; 1), \text{Cl}\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \text{Fr } \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

6.18  $\text{Cl } \mathbb{N} = \mathbb{R}$ ,  $\text{Int}(0; 1) = \emptyset$ ,  $\text{Fr}[0; 1] = \mathbb{R}$ . Действительно, в  $\mathbb{R}_{T_1}$  замкнутыми множествами являются лишь конечные и сама прямая, значит замыкание всякого бесконечного множества есть...

6.19 Да, содержит. Действительно, так как  $\text{Cl } B_r(x) \subset D_r(x)$ , то

$$\text{Fr } B_r(x) = \text{Cl } B_r(x) \setminus B_r(x) \subset D_r(x) \setminus B_r(x) = S_r(x).$$

6.20 Да, содержит. Действительно, так как  $\text{Int } D_r(x) \supset B_r(x)$ , то

$$\text{Fr } D_r(x) = D_r(x) \setminus \text{Int } D_r(x) \subset D_r(x) \setminus B_r(x) = S_r(x).$$

6.21 Если  $X = [0; 1] \cup \{2\}$  с метрикой  $\rho(x, y) = |x - y|$ , то  $S_2(0) = \{2\}$ , а  $\text{Cl } B_2(0) = [0; 1]$ .

**6.22.1** К примеру,  $A = [0; 1)$ .

**6.22.2** Возьмите  $A = [0; , 1) \cup (1; 2] \cup (\mathbb{Q} \cap [3; 4]) \cup \{5\}$ .

**6.22.3** Так как  $\text{Int } A \subset \text{Cl Int } A$  и множество  $\text{Int } A$  открыто, то  $\text{Int } A \subset \text{Int Cl Int } A$ , следовательно,  $\text{Cl Int } A \subset \text{Cl Int Cl Int } A$ . Так как  $\text{Int Cl Int } A \subset \text{Cl Int } A$  и множество  $\text{Cl Int } A$  замкнуто, то  $\text{Cl Int } A \supset \text{Cl Int Cl Int } A$ .

**6.23** Будем последовательно строить множества  $J_n$ ,  $n \geq 1$ , каждое из которых является объединением интервалов длиной  $3^{-n}$ . Если  $J_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n; 2n + 1)$  и множества  $J_0, \dots, J_{n-1}$  уже построены, то  $J_n$  — это объединение срединных третей тех отрезков, на которые распадается множество  $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} J_k$ . Если  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{3k}$ ,  $B = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{3k+1}$ ,  $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{3k+2}$ , то  $\text{Fr } A = \text{Fr } B = \text{Fr } C = \text{Cl}(\bigcup_{k=0}^{\infty} \text{Cl } J_k)$ . (Аналогичным образом можно построить даже бесконечное семейство открытых множеств с общей границей.)

**6.24** Если концы двух отрезков достаточно близки, то для любой точки на одном из них найдется близкая к ней точка на другом отрезке. Если две точки принадлежат внутренности выпуклого множества, то оно содержит цилиндр, осью которого является отрезок с концами в этих точках.

**6.26** Только если  $A$  лежит в некоторой гиперплоскости, в этом случае  $\text{Cl } A = \text{Fr } A$ , или же если  $A$  — полупространство. Иначе  $\text{Int } A \neq \emptyset$  (докажите это), и если  $x_0 \notin A$ , то найдется содержащий ее отрезок, концы которого принадлежат  $\text{Fr } A$ .

**6.27** В силу свойства (а)  $X \in \Omega$ . Из (б) следует, что  $\text{Cl}_* X = X$ , значит  $\emptyset \in \Omega$ . Если  $U_1, U_2 \in \Omega$ , то прямо из (с) получаем, что  $U_1 \cap U_2 \in \Omega$ . Прежде чем проверить последнее условие топологической структуры, покажите, что из (с) следует монотонность: если  $A \subset B$ , то  $\text{Cl}_* A \subset \text{Cl}_* B$ . Для доказательства последнего утверждения задачи советуем проверить два включения и использовать тот факт, что множество  $F$  замкнуто, тогда  $F = \text{Cl}_* F$  (надо где-то использовать данное в условии свойство (d)!).

**6.29** 1) Непустые; 2) неограниченные; 3) бесконечные.

**6.30**  $\Rightarrow$  Ясно, что в дискретном пространстве единственным всюду плотным множеством является само это пространство.  $\Leftarrow$  Рассуждаем от противного. Если пространство не дискретно, то в нем имеется такая точка  $x$ , что одноточечное множество  $\{x\}$  не открыто, значит, множество  $X \setminus x$  также будет всюду плотным.

**6.31** См. 2.6.

**6.32** Первое утверждение следует из монотонности замыкания. Контр-пример ко второму утверждению проще всего построить, рассмотрев антидискретное пространство. Полезно также построить его и в  $\mathbb{R}$ , взяв  $\mathbb{Q}$  в качестве одного из множеств.

**6.33** Пусть множества  $A$  и  $B$  открыты и всюду плотны,  $U$  – произвольное непустое открытое множество. Основная идея:  $U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap B$ .

**6.34** Открытость одного из множеств.

**6.35** 1) Пусть  $U_k$  – счетное семейство всюду плотных множеств,  $V$  – произвольное непустое открытое подмножество прямой. Нетрудно построить вложенную последовательность  $\{[a_n; b_n]\}$ , такую, что  $[a_n; b_n] \subset$

$V \cap \bigcap_{k=1}^n U_k$  и  $b_n - a_n \rightarrow 0$ . По аксиоме Кантора найдется точка, принадле-

жащая каждому из этих отрезков, следовательно, пересечение  $V \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$

непусто, значит, пересечение  $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$  всюду плотно. 2) Ответ на второй во-

прос задачи – отрицательный.

**6.36** Рассмотрим открытые множества  $U_n \supset \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Так как каждое из них содержит множество  $\mathbb{Q}$ , все они всюду плотны на прямой. Теперь занумеруем рациональные числа, пусть  $\mathbb{Q} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Возьмем отрезок  $[a_1; b_1] \subset U_1$ , такой что  $x_1 \notin [a_1; b_1]$ . Поскольку множество  $U_2$  всюду плотно, в нем имеется отрезок  $[a_2; b_2] \subset [a_1; b_1] \cap U_2$ , такой что  $x_2 \notin [a_2; b_2]$ . Продолжая построение аналогичным образом, мы получим вложенную последовательность  $\{[a_n; b_n]\}$  отрезков, такую что 1)  $[a_n; b_n] \subset U_n$  и 2)  $x_n \notin [a_n; b_n]$ . В силу стандартного факта математического анализа, найдется точка  $c \in \bigcap_1^{\infty} [a_n; b_n]$ . Ясно, что  $c \in (\bigcap U_n) \setminus \mathbb{Q}$ .

**6.37** Конечно, нет, поскольку внешность всюду плотного множества пуста.

**6.38** Конечно, пуста.

**6.39** Конечно, является.

**6.40** Имеем,  $X \setminus \text{Int Cl } A = \text{Cl}(X \setminus \text{Cl } A) = X$ , в силу определения нигде не плотного множества.

**6.41** Внешностью границы замкнутого множества  $F$  является объединение  $(X \setminus F) \cup \text{Int } F$ . Осталось заметить, что  $\text{Cl}(X \setminus F) \supset \text{Fr } F$ . Если множество  $U$  открыто, то множество  $F = X \setminus U$  замкнуто, а  $\text{Fr } U = \text{Fr } F$ , значит, граница открытого множества является нигде не плотным множеством. Для произвольного множества утверждение очевидно неверно, к примеру,  $\text{Fr } \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

**6.42** Имеем,

$$X \setminus \text{Cl}(\cup A_i) = X \setminus \cup \text{Cl} A_i = \cap (X \setminus \text{Cl} A_i).$$

Осталось применить задачу 6.33, точнее, ее прямое обобщение на случай конечных пересечений.

**6.43** Это множество  $\text{Int Cl } A$ .

**6.44** Пусть множества  $Y_n \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , нигде не плотны. Поскольку  $Y_1$  нигде не плотно, то найдется отрезок  $[a_1; b_1] \subset \mathbb{R} \setminus Y_1$ . Аналогично, так как и множество  $Y_2$  нигде не плотно, отрезок  $[a_1; b_1]$  содержит отрезок  $[a_2; b_2] \subset \mathbb{R} \setminus Y_2$ . Продолжая построение, мы получим вложенную последовательность  $\{[a_n; b_n]\}$  отрезков, такую что  $[a_n; b_n] \subset \mathbb{R} \setminus Y_n$ . В силу стандартного утверждения математического анализа, найдется точка  $c \in \cap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$ . Ясно, что  $c \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \neq \emptyset$ .

**6.45** Например, всякая точка конечного подмножества прямой, конечно, является его точкой прикосновения, но не является предельной.

**6.47** Множеством предельных точек является все пространство  $\mathbb{R}_{T_1}$ .

**6.48** (a)  $\implies$  (b): Рассмотрите  $V = \bigcup_{x \in A} U_x$ , где  $U_x$  – окрестности, существующие по определению локальной замкнутости, и покажите, что  $A = V \cap \text{Cl } A$ . (b)  $\implies$  (c): Используйте определение топологии подпространства. (c)  $\implies$  (a): В качестве окрестностей  $U_x$  можно взять одно и то же множество.

**7.1** Нет, поскольку это отношение не антисимметрично. Действительно,  $-1|1$  и  $1|-1$ , но  $-1 \not\equiv 1$ .

**7.2** Обозначим через  $-C$  множество, симметричное  $C$  относительно точки 0 – начала координат. Прямо из определения нестрогого частичного порядка следует, что:  $C$  должно быть замкнуто относительно сложения; должно содержать ноль и  $C \cap (-C) = \{0\}$ . Верхним конусом элемента  $a$  является множество  $a + C$  – результат параллельного переноса множества  $C$  на вектор  $a$ .

**7.6** Очевидно, наибольший элемент максимален, наименьший – минимален, но обратные утверждения вообще говоря не верны. Если же для любого подмножества частично упорядоченного множества эти понятия совпадают, то любые два элемента этого множества сравнимы, то есть один из них больше другого. Действительно, рассмотрим любое двухэлементное подмножество. Если бы эти два элемента не были сравнимы, то каждый из них был бы максимальным и значит наибольшим элементом этого множества. Но наибольший элемент единствен. Это противоречие показывает, что элементы на самом деле сравнимы. Наоборот, из сравнимости любых двух элементов легко выводится, что во всяком подмножестве любой максимальный элемент является наибольшим, а любой минимальный – наименьшим.

**7.9** Отношение включения в множестве подмножеств множества  $X$  является линейным порядком, тогда  $X$  либо пусто, либо состоит из единственного элемента.

**7.11** Рассмотрите, например, следующее условие: для любых  $a, b$  и  $c$ , таких что  $a < c$  и  $b < c$ , найдется такой элемент  $d$ , что  $a < d$ ,  $b < d$  и  $d < c$ . Покажите, что это условие выполнено во всяком линейно упорядоченном множестве и что из этого условия следует, что правые лучи составляют базу некоторой топологии. Покажите, что верно и обратное: из того, что правые лучи составляют базу некоторой топологии, следует это условие.

**7.13** Точка, открытая в топологии порядка, это наибольший элемент пространства. Аналогично, точка, замкнутая в топологии порядка, это наименьший элемент.

**7.14** Лучи вида  $(a; \infty)$  и  $[a; \infty)$ , пустое множество и вся прямая.

**7.16** Одноточечное множество, элемент которого является наибольшим во всем пространстве.

**8.1** Да, правда. Докажем, к примеру, последнее равенство. Если  $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$ , то  $f(x) \in Y \setminus A$ , значит,  $f(x) \notin A$ , таким образом,  $x \notin f^{-1}(A)$ , следовательно,  $x \in X \setminus f^{-1}(A)$ . Осталось заметить, что рассуждение можно провести в обратном направлении.

**8.2** Докажем первое равенство. Если  $y \in f(A \cup B)$ , то найдется такой элемент  $x \in A \cup B$ , что  $f(x) = y$ . Если  $x \in A$ , то  $y \in f(A)$ , если же  $x \in B$ , то  $y \in f(B)$ , таким образом, во всяком случае  $y \in f(A) \cup f(B)$ . Обратное включение доказывается проще. Так как  $A \subset A \cup B$ , то  $f(A) \subset f(A \cup B)$ , аналогично,  $f(B) \subset f(A \cup B)$ , откуда и следует, что  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ . Оба других равенства неверны, см. 8.3 и 8.4.

**8.3** Рассмотрим отображение  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$ :  $f(0) = f(1) = 0$ . Пусть  $A = \{0\}$  и  $B = \{1\}$ . Тогда  $f(A) \cap f(B) = \{0\}$ , между тем, как  $f(A \cap B) = \emptyset$ . Аналогично,  $f(X \setminus A) = \{0\}$ , тогда как  $Y \setminus f(A) = \emptyset$ .

**8.4**  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ , однако никакого естественного включения между множествами  $f(X \setminus A)$  и  $Y \setminus f(A)$  не имеется.

**8.5** Отображение  $f$  является биекцией.

**8.6** Пусть  $y \in B \cap f(A)$ . Тогда  $y = f(x)$ , где  $x \in A$ . С другой стороны,  $x \in f^{-1}(B)$ , значит,  $x \in f^{-1}(B) \cap A$ , следовательно,  $y \in f(f^{-1}(B) \cap A)$ . Докажите обратное включение самостоятельно.

**8.7** Нет, не обязательно. Пример:  $f : \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $g : \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$ . Конечно, отображение  $f$  обязано быть инъекцией, а  $g$  — сюръекцией.

**9.1** Отображение  $\text{id}$  непрерывно, тогда  $U = \text{id}^{-1}(U) \in \Omega_1$  для каждого  $U \in \Omega_2$ , что и означает, что  $\Omega_2 \subset \Omega_1$ .



**9.2** (a),(d) Да, останется. (b),(c) Нет, не обязательно.

**9.3** 1) Произвольные; 2) только постоянные, т. е. отображающие все пространство  $Y$  в некоторую точку пространства  $X$ .

**9.4** 1) Только постоянные, т. е. отображающие все пространство  $Y$  в некоторую точку пространства  $X$ ; 2) произвольные.

**9.5** Семейство  $\Omega' = \{f^{-1}(U) \mid U \in \Omega\}$  является топологией на  $A$ , причем эта топология – самая грубая из тех, относительно которых отображение  $f$  непрерывно.

**9.6** Имеем,  $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A)$ . Если отображение  $f$  непрерывно, то множество  $f^{-1}(\text{Cl } A)$  замкнуто, следовательно,  $\text{Cl } f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\text{Cl } A)$ . Если имеет место данное включение, то для всякого замкнутого в  $Y$  множества  $F$ ,  $\text{Cl } f^{-1}(F) \subset f^{-1}(F)$ , следовательно, множество  $f^{-1}(F)$  совпадает со своим замыканием, значит, оно замкнуто. Тем самым доказано, что  $f$  – непрерывное отображение.

**9.7** Отображение  $f$  непрерывно, тогда  $\text{Int } f^{-1}(A) \supset f^{-1}(\text{Int } A)$  для любого  $A \subset Y$ , тогда  $\text{Cl } f(A) \supset f(\text{Cl } A)$  для любого  $A \subset X$ , тогда  $\text{Int } f(A) \subset f(\text{Int } A)$  для любого  $A \subset X$ .

**9.8** Утверждение следует из того, что прообраз открытого множества есть объединение прообразов базовых множеств.

**9.9** Конечно нет, поскольку введенное определение совпадает с известным для числовых функций (см. 9.K). Рассуждение, основанное на определении: множество  $U = (1; 2]$  открыто в  $[0; 2]$ , однако его прообраз  $f^{-1}((1; 2]) = [1; 2)$  не является открытым в  $[0; 2]$  множеством.

**9.10** Да, непрерывно. Рассмотрите, каким может быть множество  $f^{-1}(a; +\infty)$  (прообраз множества, открытого в стрелке). Кстати, будет ли непрерывным отображение  $g$ , совпадающее с  $f$  всюду, кроме  $x = 1$ , а  $g(1) = 2$ ?

**9.11** Только постоянные. Если, к примеру,  $0, 1 \in f(\mathbb{R}_{T_1})$ , то рассмотрим  $f^{-1}(-\infty; \frac{1}{2})$  и  $f^{-1}(\frac{1}{2}; +\infty)$ . В чем противоречие?

**9.12** Конечнократные или постоянные.

**9.13** Монотонно возрастающие, непрерывные слева (в смысле математического анализа).

**9.14** Отображение  $f$  непрерывно, а  $g^{-1}$  – нет. Дело в том, что топология на  $\mathbb{Z}_+$  дискретна, а в топологии на множестве  $f(\mathbb{Z}_+)$  одноэлементное множество  $\{0\}$  не является открытым.

**9.15** Если  $U$  открыто и непусто, то, поскольку отображение сюръективно и непрерывно,  $f^{-1}(U)$  тоже открыто и непусто, значит, непусто его пересечение со всюду плотным в  $X$  множеством  $A$ , следовательно,

непусто пересечение  $U \cap f(A)$ , откуда и следует, что множество  $f(A)$  всюду плотно в пространстве  $Y$ .

**9.16** Конечно, неверно.

**9.17** Да, существует. Возьмем в качестве  $A$  канторово множество.

Отображение сопоставляет числу  $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ , где  $a_i = 0; 2$ , число  $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^{i+1}}$ .

Осталось проверить, что определенное таким образом отображение является непрерывным (проделайте это самостоятельно).

**9.18** Докажем первое утверждение. Пусть  $U_a$  – окрестность точки  $a \in X$ , такая что  $f(U_a) \subset (-\frac{\varepsilon}{2} + f(a); f(a) + \frac{\varepsilon}{2})$ , а  $V_a$  – аналогичная окрестность для отображения  $g$ . Нетрудно видеть, что, взяв  $W_a = U_a \cap V_a$ , мы получим, что  $(f + g)(W_a) \subset (-\varepsilon + f(a); f(a) + \varepsilon)$ .

**9.20** Если

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ ix & 0 \leq x \leq \frac{1}{i}, \\ 1 & x \geq \frac{1}{i}, \end{cases}$$

то указанная в задаче формула определяет функцию, равную 0 при  $x \leq 0$  и равную 1 при  $x > 0$ .

**9.21** Топология в  $\mathbb{R}^n$  индуцируется метрикой  $\rho^{(\infty)}$ , где

$$\rho^{(\infty)}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Следовательно,  $\rho^{(\infty)}(f(x), f(a)) < \varepsilon$ , тогда  $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**9.22** Воспользуйтесь 9.21 и 9.18.

**9.23** Воспользуйтесь 9.21 и 9.18, 9.19.

**9.24** Если топология  $\Omega'$  такова, что для любого множества  $A$  отображение  $x \mapsto \rho(x, A)$  непрерывно, то  $\Omega'$  содержит всевозможные открытые шары. Значит, в нее входят и все множества, открытые в метрической топологии.

**9.25** Если  $\rho(x, a) < \varepsilon$ , то  $\rho(f(x), f(a)) \leq \alpha\varepsilon < \varepsilon$ .

**9.27** Там, где речь идет о замкнутых множествах.

**9.28** Следует использовать такой, возможно неизвестный для вас факт: если  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  в некоторой окрестности некоторой точки, то  $P \equiv 0$ . Отсюда следует, что для во всякой окрестности всякой точки  $x$  множества  $\{x \mid P(x) = 0\}$  найдется точка, не принадлежащая этому множеству. Осталось заметить, что множество  $\{x \mid P(x) = 0\}$  замкнуто.

**9.29** В случаях (а), (с) и (d), конечно, нет. Попробуйте доказать, что ответ утвердительный в случае (b), к примеру, используя технику математического анализа (см. также 9.Т).

**9.31** Если пересечение некоторого множества  $U$  с каждым элементом покрытия  $\Gamma$  открыто в этом элементе, то то же верно для любого элемента покрытия  $\Gamma'$ . Поскольку по условию покрытие  $\Gamma'$  фундаментально, то множество  $U$  открыто во всем пространстве, таким образом, и покрытие  $\Gamma$  является фундаментальным.

**9.32** Если  $B \cap U$  открыто в  $U$  для всякого  $U \in \Gamma$ , а  $A \in \Delta$ , то множество  $(B \cap U) \cap A = (B \cap A) \cap (U \cap A)$  открыто в  $U \cap A$ , значит,  $B \cap A$  открыто в  $A$ . Поскольку покрытие  $\Delta$  фундаментально, то  $B$  открыто в пространстве  $X$ .

**9.33** Следствие предыдущего утверждения. Что за покрытие следует взять в качестве  $\Delta$ ?

**9.1x** Рассмотрите  $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $f(x) = x$  при  $x \in [0; 1]$  и  $f(x) = x + 1$  при  $x \in (1; 2]$ .

**9.2x** Рассмотрите естественное отображение  $f : \{\pm \frac{1}{n}, 0\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ .

**9.3x** Да, непрерывно. Более того, достаточно требовать обычной (нестрогой) монотонности отображения.

**9.Cx** Построим такое пространство  $Z$  как объединение дизъюнктивных копий пространств  $X$  и  $Y$ . В нём расстояние между точками, принадлежащими копии одного из исходных пространств, положим равным расстоянию между соответствующими точками этого пространства. Для того, чтобы определить расстояния между точками разных пространств, выберем точки  $x_0 \in X$  и  $y_0 \in Y$  и положим  $\rho(a, b) = \rho_X(a, x_0) + \rho_Y(y_0, b) + 1$  для  $a \in X$  и  $b \in Y$ . Проверьте (это действительно легко), что это будет метрика.

**9.Dx** Да, например, одноточечное пространство и любое неограниченное пространство.

**9.Ex** Хотя, как мы видели, решив предыдущую задачу, расстояние Громова-Хаусдорфа может быть бесконечным, а симметричность и неравенство треугольника формулировались выше для функций, принимающих только конечные значения, симметричность имеет смысл и очевидна, а неравенству треугольника тоже легко придать разумный смысл при появлении бесконечных значений. Именно, при наличии бесконечностей неравенство треугольника следует считать выполненным, тогда из трёх расстояний бесконечны два или три. Для доказательства таким образом обобщённого неравенства треугольника полезна следующая конструкция. Пусть пространства  $X$  и  $Y$  изометрически вложены в пространство

$A$ , а пространства  $Y$  и  $Z$  изометрически вложены в пространство  $B$ . Построим новое пространство, в котором будут изометрически вложены  $A$  и  $B$ , пересекаясь друг с другом по  $Y$ . Для этого добавим к  $A$  точки множества  $B \setminus A$ . Расстояния между добавленными точками положим равным расстоянию между ними в  $B$ . Расстояние между точками  $x \in A \setminus B$  и  $z \in B \setminus A$  положим равным  $\inf\{\rho_A(x, y) + \rho_B(y, z) \mid y \in A \cap B\}$ . Сравните эту конструкцию с конструкцией из решения задачи 9.Сх. Докажите, что так получается метрическое пространство, и примените неравенство треугольника для расстояния Хаусдорфа между множествами  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в этом пространстве.

**9. Fx** Отчасти, ответ очевиден. Конечно, расстояние Громова-Хаусдорфа неотрицательно! Но вот если оно равно нулю, в каком смысле тогда пространства равны? Первое, наиболее оптимистическое предположение, что приходит в голову, это что тогда должна существовать изометрическая биекция между пространствами. Но это предположение неверно, как показывает пример пространств  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$  со стандартным расстоянием в них. Однако это верно для компактных метрических пространств.

**10.1** Утверждения 10.С–10.Е и означают, что гомеоморфность является отношением эквивалентности.

**10.2** Пусть  $\tau : x \mapsto \frac{Rx}{|x|^2}$  – инверсия. Покажите, что  $\tau^{-1} = \tau$ . Непрерывность следует из теорем математического анализа: выпишите координатное представление отображения  $\tau$  и воспользуйтесь утверждениями 9.18, 9.19 и 9.21.

**10.3** Покажите, что если  $z = x + iy$  и  $f(z) = u + iv$ , то  $v = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$ , откуда следует, что  $f(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ . Обратное отображение задается аналогичной формулой. Для доказательства непрерывности воспользуйтесь 9.18, 9.19 и 9.21

**10.4**  $\Rightarrow$  Воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении.  
 $\Leftarrow$  См. 10.М.

**10.5** 1) и 2) очевидны; 3) Всякая биекция  $\mathbb{R}_{T_1} \rightarrow \mathbb{R}_{T_1}$  устанавливает биективное соответствие между конечными множествами.

**10.6** Только тождественное отображение  $\mathcal{V}$  есть гомеоморфизм.

**10.7** Используйте 9.13 и 10.М.

**10.8** Пусть  $X = Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k; 2k+1)$  и рассмотрите биекцию

$$X \rightarrow Y : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{при } x \in [0; 1), \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } x \in [2; 3), \\ x-2 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

**10.10** При решении пунктов (f) и (i) используйте полярные координаты; при решении остальных можно применить отображения, построенные при решении задачи 10.0.

**10.11** В пункте (b).

**10.12** Каждое из них гомеоморфно одному из следующих множеств: точка, отрезок, луч, круг, полоса, полуплоскость, плоскость. Докажите это!

**10.13** В задачах 10.Т и 10.11 достаточно заменить замкнутый круг  $D^2$  замкнутым  $n$ -мерным шаром  $D^n$  и открытый круг  $B^2$  открытым  $n$ -мерным шаром  $B^n$ . В задаче 10.12 ситуация более запутанная. Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество. Прежде всего, мы вправе считать, что  $\text{Int } K \neq \emptyset$ , поскольку в противном случае  $K$  изометрично подмножеству пространства  $\mathbb{R}^k$  с  $k < n$ . Во-вторых, предположим, что  $K$  не ограничено. (В противном случае оно будет гомеоморфно замкнутому шару.) Если  $K$  не содержит никакой прямой, то оно гомеоморфно полупространству. Если  $K$  содержит некоторую прямую, то оно изометрично “цилиндру” с замкнутой выпуклой “базой”, лежащей в пространстве  $\mathbb{R}^{n-1}$ , образующие которого параллельны  $n$ -ой координатной оси. Таким образом, мы можем провести индукцию по размерности. Сформулируйте полный ответ!

**10.14** Отобразите каждое звено ломаной на дугу окружности.

**10.15** См. решение предыдущей задачи. Можно построить даже кусочно-линейный гомеоморфизм.

**10.16** Внимательно сопоставьте все необходимые определения!

**10.17** Рассмотрите квадрат на плоскости, заданный неравенством  $|x| + |y| \leq 2$ , и используйте идею задач 10.Т или 10.8.

**10.18** Доказательство элементарное, но тяжелое...

**10.19** При помощи гомеоморфизмов, описанных в решении задачи 10.0, вы сможете построить, к примеру, следующие гомеоморфизмы: (a)  $\cong$  (d)  $\cong$  (f), (d)  $\cong$  (e)  $\cong$  (h)  $\cong$  (b), (h)  $\cong$  (g)  $\cong$  (c).

**10.21** Если множество  $X$  состоит только из одного отрезка, то это в точности утверждение 10.20 (f). В общем случае используйте 10.19 (т. е. то, что (l)  $\cong$  (h), при этом надо заметить, что гомеоморфизм можно считать тождественным на границе квадрата). Окружите отрезки непересекающимися ромбами и примените построенный гомеоморфизм к каждому из них.

**10.22** Проведите индукцию по числу звеньев ломаной  $X$ . На каждом шаге, используя рассуждение в решении задачи 10.21, отображайте  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  на дополнение ломаной с меньшим числом звеньев.

**10.23** Докажите, что для всякой пары точек  $p, q \in \text{Int } D^2$  существует гомеоморфизм  $f : D^2 \rightarrow D^2$ , такой что  $f(p) = f(q)$ , а  $\text{ab}(f) = \text{id}_{S^1}$ . Осталось провести рассуждение по индукции.

Ниже приведена более явная конструкция. Пусть  $K = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ . Мы вправе предположить, что абсциссы точек множества  $K$  различны. (Почему?) Рассмотрим непрерывную функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такую что  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x, y - f(x))$  — гомеоморфизм, для которого  $F(K) \subset \mathbb{R}^1$ . Существует также гомеоморфизм  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такой что  $g(x_i) = i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Рассмотрим гомеоморфизм  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (g(x), y)$ . Тогда  $(G \circ F)(K) = \{1, \dots, n\}$ , следовательно,  $\mathbb{R}^2 \setminus K \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{1, \dots, n\}$ .

**10.24** Используйте гомеоморфизм (b)  $\cong$  (c) задачи 10.20.

**10.26** Рассмотрите отображение  $(x, t) \mapsto (x, (1 - t)f(x) + tg(x))$ .

**10.27** Первый вопрос — а что представляет собой с математической точки зрения кофейная чашка, каким образом она задана? В дальнейшем мы укажем точный подход к описанию подобных объектов, введя соответствующий класс пространств, а пока будем рассуждать “с точки зрения здравого смысла”. Замкнутый шар гомеоморфен своей половине, не правда ли? Далее, если вы из половины шара удалим половину шара меньшего радиуса с тем же центром, то оставшаяся часть (“корка от половины арбуза”) по-прежнему будет гомеоморфна и полушару, и шару. Эти утверждения можно доказать аккуратно, даже выписав необходимые формулы. Оставшаяся “корка” — это чашка с отбитой ручкой. Значит, чашка с отбитой ручкой гомеоморфна замкнутому шару, который, в свою очередь, гомеоморфен цилиндру. Более того, если на поверхности шара зафиксированы два “круга”, то мы вправе считать, что именно они и являются основаниями цилиндра, ср. 10.25. В качестве отмеченных кругов давайте возьмем круги, по которым к чашке приставлена ручка, которая сама представляет собой цилиндр. Что же получилось, — да, конечно, бублик!

**10.28** Монете гомеоморфны: блюдце, стакан, ложка, вилка, нож, тарелка, гвоздь, винт, болт, сверло. Обручальному кольцу гомеоморфны: кофейная чашка, гайка, шайба, цветочный горшок, ключ.

**10.29** См. решение следующей задачи.

**10.30** К этой задаче применимы те же слова, что были сказаны в решении задачи 10.27. Ясно, что если в шаре высверлить неглубокую ямку, то полученное тело по-прежнему гомеоморфно шару. Осталось объяснить, почему же описанное в задаче тело гомеоморфно слегка просверленному шару. Основная идея та же, что и в решении задачи 10.22; в данном случае решение основано на следующем утверждении. Пусть  $C_0$

– цилиндр, пусть цилиндр  $C$  лежит в  $C$ , имеет меньший радиус, меньшую высоту, а его нижнее основание лежит внутри нижнего основания цилиндра  $C$ . Пусть  $C'$  – это некоторая нижняя часть цилиндра  $C$ . Существует такой гомеоморфизм  $f : C_0 \rightarrow C_0$ , тождественный на границе  $C_0$ , что  $f(C) = C'$ . Отверстие, высверленное в данном шаре, является цилиндром. В силу сформулированной леммы мы вправе считать, что этот цилиндр – небольшой.

**10.33** Каждое из пространств гомеоморфно  $S^3 \setminus (S^1 \cup \text{point})$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрите гомеоморфизм  $\mathbb{R}^3 \cong S^3 \setminus \text{point}$ , описанный в решении задачи 10.R. (Во втором случае удалите точку из окружности  $S^1$ .) Рассуждение остается справедливым и в случае пространства  $\mathbb{R}^n$ . Но что произойдет, если заменить  $S^1$  на  $S^k$ ?

**10.34** Стереографическая проекция  $S^n \setminus (0, \dots, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  переводит рассматриваемое множество в (сферически симметричную) окрестность  $S^{k-1}$ , которая, как совсем нетрудно видеть, гомеоморфна  $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-k}$ .

**10.35**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  счетны, остальные три – нет.  $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Q}$ , поскольку в первом из них топология дискретна, во втором – нет. Только в  $\mathbb{R}_{T_1}$  нет бесконечных замкнутых множеств, не совпадающих со всем пространством. В стрелке два любых открытых множества пересекаются.

**10.36** Пусть  $X = \{k\}_{-\infty}^{-1} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k; 2k+1)$ ,  $Y = X \cup \{1\}$ . Рассмотрите биекции

$$X \rightarrow Y : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{при } x \leq -2, \\ 1 & \text{при } x = -1, \\ x & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad Y \rightarrow X : x \mapsto \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{при } x \in [0; 1], \\ \frac{x-1}{2} & \text{при } x \in [2; 3), \\ x-2 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

Похожий трюк называется “гостиницей Гильберта”; а почему?

**10.37** Возьмите  $[0; 1]$  и  $\mathbb{R}$ .

**10.38** Топология в  $\mathbb{Q}$  не дискретна.

**10.39** 1), 2) Если они не одноточечны, то нельзя.

**10.40** См. 10.35.

**11.1** 1)–3) Да, в каждом из них два любых непустых открытых множества имеют непустое пересечение.

**11.2** Пустое и одноточечное.

**11.3** Несвязное двуточечное пространство, очевидно, является дискретным.

**11.4** 1) Нет, не связно, так как  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty; \sqrt{2})) \cup (\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}; +\infty))$ .  
 2)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  несвязно по таким же (и даже более простым) соображениям.

**11.5** 1) Да, так как, если  $X = U \cup V$ , где  $U, V \in \Omega_1$ , то  $U, V \in \Omega_2$ .  
 2) Нет, не обязательно: рассмотрите ситуацию, в которой топология  $\Omega_1$  тривиальна, топология  $\Omega_2$  дискретна, а множество  $X$  состоит более, чем из одной точки.

**11.6** Множество  $A$  несвязно, если существуют открытые множества  $U$  и  $V$ , такие что  $A \subset U \cup V$ ,  $U \cap V \cap A = \emptyset$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$  и  $V \cap A \neq \emptyset$ .

**11.7** 1), 3) Нет, так как индуцированная на  $\{0, 1\}$  топология является дискретной. 2) Да, так как индуцированная топология не дискретна (см. 11.3).

**11.8** 1) Всякое подмножество стрелки связно. 2) Подмножество пространства  $\mathbb{R}_{T_1}$  связно, когда оно пусто, является одноточечным или бесконечным.

**11.9** Покажите, что отрезок  $[0; 1]$  и открыт и замкнут в  $[0; 1] \cup (2; 3]$ .

**11.10** Если  $x, y \in A \subset \mathbb{R}$ ,  $z \in (x; y)$  и  $z \notin A$ , то на какие открытые в  $A$  подмножества можно разбить множество  $A$ ? Ср. 11.4.

**11.11** Используйте такое соображение: если  $B \cap \text{Cl}_X C = \emptyset$ , то  $B = A \cap (X \setminus \text{Cl}_X C)$ .

**11.12** Пусть  $X = A \cup \{x_*\}$ , а  $\Omega_*$  состоит из пустого множества и всех множеств, содержащих точку  $x_*$ . Проверьте, что  $\Omega_*$  – топологическая структура. Какова топологическая структура  $\Omega_A$ ?

**11.13** Пусть  $A$  несвязно, а множества  $B$  и  $C$  удовлетворяют утверждениям задачи 11.11. Множества

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, B) < \rho(x, C)\}, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, B) > \rho(x, C)\}$$

являются искомыми. Заметим, что утверждение этой задачи останется верным, если вместо  $\mathbb{R}^n$  рассмотреть произвольное пространство, любое открытое подмножество которого нормально, см. 14.

**11.14** Очевидно. (Ср. 11.6.)

**11.15** Множество  $A$  плотно в  $B$ , снабженном относительной топологией. Осталось применить теорему 11.B.

**11.16** Предположим противное, что множество  $A \cup B$  несвязно. Тогда в объемлющем пространстве найдутся открытые подмножества  $U$  и  $V$ , такие что  $A \cup B \subset U \cup V$ ,  $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ ,  $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$  и  $U \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset$  (см. решение задачи 11.6). Так как  $A \cup B \subset U \cup V$ , то множество  $A$  пересекается по крайней мере с одним из множеств  $U$  или  $V$ . Пусть, для определенности,  $A \cap U \neq \emptyset$ . Тогда  $A \cap V = \emptyset$  в силу связности множества  $A$ , значит  $A \subset U$ . Так как множество  $U$  является окрестностью любой точки из пересечения  $A \cap \text{Cl} B$ , то  $U \cap B \neq \emptyset$ .



Множество  $V$  также пересекается с  $B$ , поскольку  $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ , а  $A \cap V = \emptyset$ . Мы получили противоречие со связностью  $B$ , так как  $B \cap U$  и  $B \cap V$  – два непустых открытых в  $B$  и непересекающихся множества, объединение которых дает  $B$ .

**11.17** Если множество  $A \cup B$  несвязно, то найдутся такие открытые в  $X$  множества  $U$  и  $V$ , для которых:  $U \cup V \supset A \cup B$  и  $U \cap V \cap (A \cup B) = \emptyset$ . Поскольку множество  $A$  связно, то оно содержится в одном из множеств  $U$  или  $V$ , для определенности, пусть  $A \subset U$ . Положим  $B_1 = B \cap V$ . Так как  $B$  открыто в  $X \setminus A$ , а  $V \subset X \setminus A$ , то  $B_1$  открыто в  $V$ , значит, оно открыто в  $X$ . Далее, так как  $B_1 \subset X \setminus U \subset X \setminus A$ , то  $B_1$  замкнуто в  $X \setminus U$ , значит, замкнуто в  $X$ . Таким образом, множество  $B_1$  открыто и замкнуто в  $X$ , что противоречит связности этого пространства.

**11.18** Нет, не следует. Пример:  $A = \mathbb{Q}$ ,  $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**11.19** 1) Если  $A$  и  $B$  открыты и  $A$  несвязно, то  $A = U \cup V$ , где  $U$  и  $V$  – непустые, не пересекающиеся и открытые в  $A$  множества. Так как  $A \cap B$  связно, то либо  $A \cap B \subset U$ , либо  $A \cap B \subset V$ . Для определенности считаем, что  $A \cap B \subset U$ . Тогда множества  $V, U \cup B$  составляют разбиение  $A \cup B$  на два непустых открытых множества. Действительно,  $U$  и  $V$  открыты в  $A \cup B$ , так как открытое подмножество открытого множества открыто в объемлющем пространстве. Мы получили противоречие со связностью  $A \cup B$ .

2) Замените везде в предыдущем рассуждении слова *открыто*, *открытое* на слова *замкнуто*, *замкнутое*.

**11.20** Нет, не обязательно. Рассмотрим связные множества  $K_n = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \in \{0, 1\}\} \cup \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, x \geq n, y \in [-1; 1]\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . (Бесконечный забор, железная дорога, баллюстрада – что вам больше нравится.) Пересечением этих множеств является объединение лучей  $\{y = 1, x \geq 0\}$  и  $\{y = -1, x \geq 0\}$ .

**11.21** Пусть  $C$  – компонента  $X$ . Рассмотрим точку  $x \in C$ , пусть  $U_x$  – это её связная окрестность. Тогда  $U_x$  целиком содержится в  $C$ , значит  $x$  – внутренняя точка множества  $C$ . Таким образом у множества  $C$  все точки – внутренние, следовательно, оно открыто.

**11.22** Переформулируем утверждение, после чего оно станет очевидным. Именно, если множество  $M$  связно, а  $A$  открыто и замкнуто, то либо  $M \subset A$ , либо  $M \subset X \setminus A$ .

**11.23** См. следующую задачу.

**11.24** Докажите, что никакие две точки канторова множества не могут принадлежать одной его компоненте связности.

**11.25** Если  $\text{Fr } A = \emptyset$ , то  $A = \text{Cl } A = \text{Int } A$  – нетривиальное открытое и замкнутое множество.

**11.26** Если  $F \cap \text{Fr } A = \emptyset$ , то  $F = (F \cap \text{Cl } A) \cup (F \cap \text{Cl}(X \setminus A))$ , причем  $F \cap \text{Cl } A \cap \text{Cl}(X \setminus A) = \emptyset$ .

**11.27** Если  $\text{Cl } A$  – несвязное множество, то  $\text{Cl } A = F_1 \cup F_2$ , где  $F_1, F_2$  – замкнутые и непересекающиеся в  $X$  множества. По 11.25 имеем  $\text{Fr } F_1, \text{Fr } F_2 \neq \emptyset$  и  $\text{Fr } \text{Cl } A = \text{Fr } F_1 \cup \text{Fr } F_2$ , что противоречит связности  $\text{Fr } A$ .

**11.30** Сопоставьте 11.N и 11.10.

**11.31** Пусть  $M$  – компонента единицы. Для каждой точки  $x \in M$  множество  $xM$  связно и содержит точку  $x = xe$ . Таким образом, множества  $xM$  и  $M$  пересекаются, следовательно  $xM \subset M$ , т. е.  $M$  является подгруппой  $X$ . Далее, для каждой точки  $x \in X$  множество  $x^{-1}Mx$  связно и содержит единицу. Следовательно  $x^{-1}Mx \subset M$ , так что  $M$  – нормальная подгруппа.

**11.32** Пусть множество  $U \subset \mathbb{R}$  открыто. Для всякой точки  $x \in U$  рассмотрите максимальный интервал  $(m_x; M_x) \subset U$ , содержащий эту точку. Любые два таких интервала либо совпадают, либо не пересекаются, таким образом, они составляют разбиение множества  $U$ .

**11.33** 1) Конечно, связно, поскольку, если  $l$  – спираль, то  $\text{Cl } l = l \cup S^1$ . 2) Конечно, ответ не изменится, если к спирали добавлена только часть предельной окружности.

**11.34** (a) Несвязно, к примеру, потому что несвязна его проекция на ось абсцисс. (b) Связно, поскольку любые две точки этого множества соединены (не более чем) двузвенной ломаной. (c) Связно. Рассмотрим множество  $X \subset \mathbb{R}^2$ , являющееся объединением прямых  $y = kx$ , где  $k \in \mathbb{Q}$ . Ясно, что координаты  $(x, y)$  всякой точки множества  $X$  или обе рациональны, или обе иррациональны. Осталось заметить, что это множество связно, а данное в задаче множество лежит в его замыкании (совпадающей со всей плоскостью).

**13.17** Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  – связное множество. Воспользуйтесь тем, что шары пространства  $\mathbb{R}^n$  связны (см. 11.U или 11.V), и примерите утверждение 11.E к семейству  $\{A\} \cup \{B_\varepsilon(x)\}_{x \in A}$ .

**11.36** Для каждой точки  $x \in A$  рассмотрим шаровую окрестность  $V_x \subset U$  этой точки. Окрестность  $\bigcup_{x \in A} V_x$  of  $A$  является искомой (см. рассуждение предыдущей задачи).

**11.37** Пусть

$$X = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{(x, y) \mid x \in [0; 1], y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Докажите, что любое одновременно и открытое, и замкнутое в  $X$  множество содержит точки  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ .

**12.1** Действительно, всякий многочлен нечетной степени принимает как положительные, так и отрицательные значения (при достаточно больших по модулю значениях аргумента), следовательно, он принимает и нулевое значение.

**12.2** Сопоставьте 11. *Y*, 12. *B* и 12. *E*.

**12.3** Имеются девять топологических типов, именно: (1) *A*, *R*; (2) *B*; (3) *C*, *L*, *M*, *N*, *S*, *U*, *V*, *W*, *Z*; (4) *D*, *O*; (5) *E*, *F*, *G*, *J*, *T*, *Y*; (6) *I*, *H*; (7) *K*, *X*; (8) *P*; (9) *Q*. Заметим, что ответ зависит от принятых начертаний букв. К примеру, можно так нарисовать букву *R*, что она будет гомеоморфна не *A*, а *Q*. Постарайтесь понять, какие же начертания подразумевали авторы, приводя данный выше ответ. Парную негомеоморфность букв разных типов можно доказать, используя аналоги рассуждения, проведенного в 12. *E*.

**12.4** Поскольку квадрат без любой своей точки связан (докажите это!). Подчеркнем, что часто произносимая фраза: “Потому что его нельзя разбить на два открытых” доказательством отнюдь не является. Проще всего воспользоваться утверждением 11. *I*.

**12.5** Поскольку  $S^n \setminus \text{point} \cong \mathbb{R}^n$ .

**12.4x** Фиксируем  $h \in H$  и рассмотрим отображение  $x \mapsto xhx^{-1}$ . Поскольку  $H$  – нормальный делитель, то образ группы  $G$  лежит в  $H$ . Поскольку топология в  $H$  дискретна, то это отображение является локально постоянным, значит, в силу 12.2x, оно постоянно. Так как единица отображается в  $h$ , то тем самым  $xhx^{-1} = h$  для всякого элемента  $x$  группы  $G$ , откуда и следует, что  $gh = hg$  для любых элементов  $g \in G$  и  $h \in H$ .

**12.5x** Рассмотрите то, что естественно назвать компонентой точки в смысле свойства  $\mathcal{E}$ , т. е. объединение всех множеств, обладающих этим свойством. Докажите, что из условия задачи следует, что любая компонента открыта. Поэтому, если пространство связно, то компонента любой точки совпадает со всем пространством.

**12.7x** Для удобства введем систему координат, осью ординат которой является данная прямая  $l$ , и рассмотрим функцию, значение  $f(t)$  которой равно площади части множества  $A$ , лежащей левее прямой  $x = t$ . Докажите, что функция  $f$  непрерывна. Осталось заметить, что множеством ее значений является отрезок  $[0; S]$ , где  $S$  – площадь  $A$ , и применить теорему о промежуточном значении.

**12.8x** Если множество  $A$  связно, то определенная в решении задачи 12.7x функция будет строго монотонной на множестве  $f^{-1}((0, S))$ .

**12.9x** Фиксируем на плоскости некоторую систему координат и для всякого числа  $\varphi \in [0; \pi]$  будем рассматривать также систему координат,

получаемую поворотом исходной на угол  $\varphi$ . Введем функции  $f_A$  и  $f_B$  следующим образом: прямая  $x = f_A(\varphi)$  ( $x = f_B(\varphi)$ ) делит фигуру  $A$  (соответственно, фигуру  $B$ ) на две части равной площади (конечно, для каждого угла  $\varphi$  прямая задана уравнением в соответствующей системе координат). Положим  $g(\varphi) = f_A(\varphi) - f_B(\varphi)$ . Ясно, что  $g(\pi) = -g(0)$ , поэтому, если мы докажем непрерывность функций  $f_A$  и  $f_B$ , то найдется такое значение  $\varphi_0$ , что  $g(\varphi_0) = 0$ , таким образом прямая  $x = f_A(\varphi_0)$  делит каждую из фигур на две части равной площади. Докажите непрерывность функций  $f_A$  и  $f_B$ !

**12.10x** Идея решения близка к идее решения предыдущей задачи.

**13.1** Сопоставьте 11.*R* и 11.*N*.

**13.2** Сопоставьте 13.1 и 11.26.

**13.3**  $\Rightarrow$  Это очевидно, поскольку включение  $\text{in}_A$  непрерывно.

$\Leftarrow$  Не менее очевидно; отображение  $u$  непрерывно как подотображение непрерывного отображения  $\text{in}_A \circ u$ .

**13.4** Из перечисленных пространств линейно связными являются только: одноточечное дискретное, антидискретное, стрелка,  $\mathbb{R}_{T_1}$ . Заметим также, что в пространстве  $\mathfrak{Y}$  точки  $a$  и  $c$  можно соединить путем!

**13.5** Следствие 13.3.

**13.6** См. формулу в 13.*C* и 13.5.

**13.8** Действительно, пусть  $u : I \rightarrow X$  – путь. Тогда любые две точки  $u(x), u(y) \in u(I)$  можно соединить путем, являющимся композицией отображений  $u$  и  $I \rightarrow I : t \mapsto (1-t)x + ty$ .

**13.9** Путем в пространстве многоугольников является непрерывная деформация многоугольника. Покажем, что произвольный выпуклый многоугольник  $P$  можно продеформировать в правильный треугольник  $T$ . Выберем некоторую вершину  $V$  многоугольника и станем сдвигать ее по направлению к, например, середине диагонали, соединяющей смежные с  $V$  вершины  $P$ . Тем самым мы уменьшим число вершин на единицу. Продолжая в том же духе, мы в результате получим некоторый треугольник, который легко продеформировать в правильный треугольник  $T$ .

Также нетрудно видеть, что всякий выпуклый  $n$ -угольник можно продеформировать в правильный в пространстве выпуклых  $n$ -угольников.

**13.11** Приведем рассуждение для случая, когда  $A$  и  $B$  – открытые множества. Пусть  $x, y \in A$  и  $u$  – путь, соединяющий эти точки в  $A \cup B$ , причем  $\exists t_0 \ u(t_0) \notin A$ . Положим  $\bar{t} = \sup\{t \mid u([0; t]) \subset A\}$ . Ясно, что  $u(\bar{t}) \in B \setminus A$ . Покажите, что  $\exists t_1 < \bar{t} : u(t_1) \in A \cap B$ . Аналогично построим  $t_2$ . Осталось заметить, что точки  $u(t_1)$  и  $u(t_2)$  можно соединить путем в  $A \cap B$ .

**13.12** 1), 2) Утверждение относительно границы очевидно. Пример легко найти в  $\mathbb{R}^1$ , а в  $\mathbb{R}^2$  нетрудно найти линейно связное множество, внутренность которого не является связной (так сказать, не “размерностно-однородное” множество).

**13.13** Пусть  $x, y \in \text{Cl } A$ . Предположим, что  $x, y \in \text{Int } A$  (в противном случае рассуждение станет лишь проще). Соединим  $x$  и  $y$  отрезками с точками  $x', y' \in \text{Fr } A$ , которые, в свою очередь, соединим друг с другом путем в  $\text{Fr } A$ .

**13.16** Всякое связное подмножество прямой является выпуклым, значит, и линейно связным.

**13.17** Сопоставьте задачу 11.35 и теорему 13.U.

**13.18** Сопоставьте задачу 11.36 и теорему 13.U. Приведем также другое рассуждение. Если  $U$  – окрестность связного подмножества  $\mathbb{R}^n$ , то существует такая непрерывная функция  $r : A \rightarrow (0; +\infty)$ , что  $V = \bigcup_{x \in A} B_{r(x)}(x) \subset U$ . В любой компоненте линейной связности множества  $V$  найдутся точки из множества  $A$ , поэтому если  $V$  не линейно связно, то множество  $A$  не может быть связным.

**13.1x** Используйте произведение путей.

**13.2x** Очевидно.

**13.3x** Очевидно.

**13.4x** Введите понятие компоненты соответствующей связности и докажите, что для открытых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  такие компоненты являются открытыми множествами.

**13.5x** Например,  $S^1$ .

**13.6x** Пусть  $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus X$ . Изобразите две непараллельные прямые, проходящие через точки  $x$  и  $y$  и непересекающие множество  $X$ .

**13.7x** Сведите эту задачу к предыдущей задаче, показав, что для любых точек  $x, y \in \mathbb{R}^n$  найдется плоскость, содержащая эти точки и пересекающаяся с любым заданным подпространством не более чем по одной точке.

**13.8x** Всякая комплексная прямая, проходящая через точки  $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus X$ , пересекается с каждым из алгебраических множеств в конечном числе точек, поэтому общее число точек пересечения счетно, так что утверждение задачи является следствием 13.7x.

**13.9x** При решении этой задачи следует использовать два соображения. Первое связано с тем, что функция  $\det : A \mapsto \det A$  непрерывна, откуда сразу следует, что множества  $GL(n; \mathbb{R})$ ,  $O(n; \mathbb{R})$ ,  $Symm(n; \mathbb{R}) \cap GL(n; \mathbb{R})$  и  $\{A \mid A^2 = E\}$  связными не являются. Множество  $Symm(n; \mathbb{R}) = \{A \mid {}^t A = A\}$  является линейным подпространством пространства всех

матриц, значит, оно линейно связно. Осталось показать, что, к примеру, множество  $GL_+(n; \mathbb{R}) = \{A : \det A > 0\}$  линейно связно. Здесь и далее полезно использовать следующее утверждение (докажите его). Для всякого базиса  $\{e_i\}$  в  $\mathbb{R}^n$  существуют такие непрерывные отображения  $e_i(t)$ ,  $t \in [0; 1]$ , что: 1) для любого  $t \in [0; 1]$  множество  $\{e_i(t)\}$  есть базис; 2)  $e_i(0) = e_i$ ; 3)  $\{e_i(1)\}$  – ортонормированный базис.

**13.10x**  $GL(n, \mathbb{C})$  связно, поскольку уравнение  $\det A \neq 0$  является алгебраическим в  $\mathbb{C}^{n^2}$ , значит, в силу 13.8x, оно даже связно посредством ломаных. Остальные пространства также связны (и даже линейно связны).

**14.1** Только дискретное пространство является хаусдорфовым (и, с формальной точки зрения, еще одноточечное с тривиальной топологией).

**14.2** Прочитайте следующее выражение с кванторами:

$$\exists U_b : \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : a_n \notin U_b.$$

**14.4** Рассмотрим два непрерывных отображения  $f, g : X \rightarrow Y$ . Предположим, что  $Y$  – хаусдорфово пространство. Для того, чтобы доказать, что множество совпадения  $C(f, g)$  является замкнутым, докажем, что его дополнение открыто. Если  $x \in X \setminus C(f, g)$ , то  $f(x) \neq g(x)$ . Так как пространство  $Y$  является хаусдорфовым, то у точек  $f(x)$  и  $g(x)$  имеются непересекающиеся окрестности  $U$  и  $V$ . Ясно, что для каждой точки  $y \in W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$  верно, что  $f(y) \neq g(y)$ , таким образом  $W \subset X \setminus C(f, g)$ . Так как отображения  $f$  и  $g$  непрерывны, то  $W$  является окрестностью точки  $x$ , следовательно множество  $X \setminus C(f, g)$  открыто.

**14.5** Рассмотрите следующие отображения из  $I$  в пространство стрелки:  $x \mapsto 1$  и  $x \mapsto \operatorname{sign} x$ . (Здесь  $\operatorname{sign}$  – это функция, отображающая отрицательные числа в  $-1$ , 0 в 0 и положительные числа в 1.)

**14.6** Следует 14.4, так как множество неподвижных точек отображения  $f$  – это множество  $C(f, \operatorname{id}_X)$ .

**14.7** Пусть  $X$  – пространство стрелки. Рассмотрим отображение  $f : X \rightarrow X : x \mapsto x + \sin x$ . Что представляет из себя множество неподвижных точек этого отображения? Является ли оно замкнутым?

**14.8** В силу 14.4, множество совпадения  $C(f, g)$  замкнуто в  $X$ . По условию оно содержит всюду плотное в  $X$  подмножество, значит, оно совпадает со всем пространством.

**14.10** Только первые два свойства являются наследственными.

**14.11**  $\{x\} = \bigcap_{U \ni x} U$ , тогда для любой точки  $y \neq x$  найдется окрестность  $U$  точки  $x$ , такая что  $y \notin U_x$ , что и есть в точности аксиома  $T_1$ .

**14.12** Очевидно.

**14.13** См. 14.1.

**14.14** Рассмотрите прообраз той окрестности точки  $f(a)$ , которая не содержит точку  $f(b)$ .

**14.15** Следует из предыдущей задачи.

**14.16** Эта топология является полным аналогом топологии  $\mathbb{R}_{T_1}$ : в таком пространстве замкнуты лишь конечные множества и все пространство.

**14.17** Рассмотрите слабейшую топологию, содержащую обычную топологию прямой и такую, в которой множество  $A = \{\frac{1}{n}\}_1^\infty$  замкнуто. В ней 0 нельзя отделить от  $A$ .

**14.18** Во-первых, антидискретное. Более содержательный пример:  $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \cup 0_1 \cup 0_2$ , база топологии состоит из интервалов, однако интервалы  $(a; b)$ , где  $a < 0 < b$ , бывают двух типов: одни содержат  $0_1$ , а другие —  $0_2$ . Проверьте, что это действительно база. Третья аксиома отделимости выполнена, однако “различные нули” нельзя отделить друг от друга.

**14.19**  $\Rightarrow$  Предположим, что в пространстве  $X$  выполнена аксиома  $T_3$ . Если  $b \in X$  и  $W$  — окрестность  $b$ , то, применяя  $T_3$  к точке  $b$  и множеству  $X \setminus W$ , получаем, что найдутся непересекающиеся открытые множества  $U$  и  $V$ , такие что  $b \in U$  и  $X \setminus W \subset V$ . Ясно, что  $\text{Cl}(U) \subset X \setminus V \subset W$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $X$  — топологическое пространства,  $F \subset X$  — замкнутое множество и  $b \in X \setminus F$ . Тогда  $X \setminus F$  — окрестность точки  $x$ , следовательно, найдется окрестность  $U$  точки  $x$ , такая что  $\text{Cl}(U) \subset X \setminus F$ . Тогда  $X \setminus \text{Cl}(U)$  — искомая окрестность множества  $F$ , не пересекающаяся с  $U$ .

**14.20** Пусть  $X$  — пространство,  $A$  — его подпространство,  $B$  — замкнутое в  $A$  множество. Если  $x \notin B$ , то  $x \notin F$ , где  $F$  замкнуто и  $F \cap A = B$ . Далее очевидно.

**14.21** Например, антидискретное пространство или пространство стрелки.

**14.22** Сравните с доказательством задачи 14.19.  $\Rightarrow$  Пусть в пространстве  $X$  выполнена  $T_4$ . Если множество  $F \subset X$  замкнуто и  $W$  — окрестность  $F$ , то, применяя  $T_4$  к  $F$  и  $X \setminus W$ , мы получим, что имеются непересекающиеся открытые множества  $U$  и  $V$ , такие что  $F \subset U$  и  $X \setminus W \subset V$ . Ясно, что  $\text{Cl}(U) \subset X \setminus V \subset W$ .

$\Leftarrow$  Пусть  $X$  — пространство,  $F, G \subset X$  — два замкнутых непересекающихся множества. Тогда  $X \setminus G$  — окрестность  $F$ , следовательно, найдется окрестность  $U$  множества  $F$ , такая что  $\text{Cl}(U) \subset X \setminus G$ . Тогда  $X \setminus \text{Cl}(U)$  — искомая окрестность  $F$ , не пересекающаяся с  $U$ .

**14.23** Используйте то, что замкнутое множество замкнутого подпространства замкнуто во всем пространстве.

**14.24** Рассмотрите, к примеру, множества  $A = \mathbb{N}$  и  $B = \{n + \frac{1}{n}\}_1^\infty$  в  $\mathbb{R}$ .

**14.26** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  дизъюнктные замкнутые подмножества пространства  $Y$ . Так как  $f$  непрерывно, то их прообразы  $f^{-1}(F_1)$  и  $f^{-1}(F_2)$  замкнуты, а так как  $X$  нормально, то они отделимы друг посредством окрестностей  $W_1$  и  $W_2$ . Положим  $A_i = X \setminus W_i$ ,  $i = 1, 2$ . Множества  $A_i$  замкнуты, значит, замкнуты и их образы  $B_i$ . При этом  $B_1 \cup B_2 = f(A_1 \cup A_2) = Y$ , следовательно, открытые множества  $U_1 = Y \setminus B_1$  и  $U_2 = Y \setminus B_2$  не пересекаются. Докажите, что  $U_i \supset F_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**14.1x** Для всяких точек  $x, y \in L$  найдутся непересекающиеся круги  $D_x$  и  $D_y$ . Если же хотя бы одна из точек лежит в  $\mathcal{H}$ , то существование их непересекающихся окрестностей совсем очевидно.

**14.2x** Убедитесь, что если открытый круг  $D$  касается  $L$  в точке  $x \in L$ , то  $\text{Cl}(\{x\} \cup D) = \text{Cl } D$ ; далее используйте 14.19.

**14.3x** Дискретная.

**14.4x** Поскольку  $L$  является замкнутым в  $X$  множеством, а топология на  $L$  дискретна, то всякое подмножество  $L$  замкнуто в  $\mathcal{N}$ . Докажем, что подмножество  $\mathcal{N}$ , состоящее из рациональных точек  $L$  невозможно отделить от подмножества, состоящего из иррациональных точек  $L$ . Пусть  $U$  – окрестность в пространстве Немыцкого множества  $L \setminus \mathbb{Q}$ . Для каждой точки  $x \in L \setminus \mathbb{Q}$  фиксируем число  $r(x)$  таким образом, что открытый круг  $D_{r(x)} \subset U$  радиуса  $r(x)$  касается прямой  $L$  в точке  $x$ . Пусть  $Z_n = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid r(x) > 1/n\}$ . Так как, очевидно, что  $\mathbb{Q} \cup \bigcup_{n=1}^\infty Z_n = \mathbb{R}^1$ , то из утверждения 6.44 следует, что для некоторого (достаточно большого)  $n$  множество  $Z_n$  не является нигде не плотным. Следовательно  $\text{Cl } Z_n$  содержит некоторый отрезок  $[a; b] \subset \mathbb{R}^1$ . Значит,  $U \cup [a; b]$  содержит окрестность  $[a; b]$ , которая пересекается с каждой окрестностью произвольной рациональной точки из  $[a; b]$  в  $\mathcal{N}$ . Следовательно,  $U$  пересекается с каждой окрестностью множества  $\mathbb{Q}$ , поэтому пространство  $\mathcal{N}$  не является нормальным.

**14.6x** См. 18.Jx и 16.N.

**14.8x** Положите  $f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$ .

**14.9x.1** Положим  $A = f^{-1}([-1; -\frac{1}{3}])$  и  $B = f^{-1}([\frac{1}{3}; 1])$ . Используйте 14.8x для того, чтобы показать, что найдется функция  $g : X \rightarrow [-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$ , такая что  $g(A) = -\frac{1}{3}$  и  $g(B) = \frac{1}{3}$ .



**14.9x** В силу 14.9x.1 существует функция  $g_1 : X \rightarrow [-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$  такая что  $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$  при всех  $x \in F$ . Положим  $f_1(x) = f(x) - g_1(x)$ . Если слегка изменить доказательство утверждения 14.9x.1, то мы покажем, что найдется функция  $g_2 : X \rightarrow [-\frac{2}{9}; \frac{2}{9}]$ , такая что  $|f_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9}$  при всех  $x \in F$ , так что  $|f(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9}$ . Продолжая конструкцию, мы построим последовательность функций  $g_n : X \rightarrow [-\frac{2^{n-1}}{3^n}; \frac{2^{n-1}}{3^n}]$ , такую что

$$|f(x) - g_1(x) - \dots - g_n(x)| \leq \frac{2^n}{3^n}.$$

Используйте 24.Nx для того, чтобы показать, что сумма  $g_1(x) + \dots + g_n(x)$  сходится к непрерывной функции  $g : X \rightarrow [-1; 1]$ . Ясно, что  $g|_F = f$ .

**15.1** Очевидно.

**15.2** Сопоставим каждой восьмерке пару точек с рациональными координатами, лежащих внутри каждой из ее половин. Таким образом, каждой восьмерке сопоставлена четверка рациональных чисел. Нетрудно видеть, что непересекающимся восьмеркам сопоставляются различные пары, значит, их имеется не более, чем есть четверок рациональных чисел, т. е. счетное количество.

**15.3** Стрелка удовлетворяет второй аксиоме счетности: набор  $\{(x; +\infty) \mid x \in \mathbb{Q}\}$  является ее счетной базой (используйте 15.F.) Используйте 15.G, чтобы показать, что в пространстве  $\mathbb{R}_{T_1}$  не существует счетной базы топологии.

**15.4** Да, сепарабельны: множество  $\mathbb{N}$  всюду плотно и в стрелке, и в  $\mathbb{R}_{T_1}$ .

**15.5** Рассмотрите пример пространства из задачи 2.6.

**15.6** Рассмотрите несчетное множество (например,  $\mathbb{R}$ ), расстояния между различными точками которого равны 1 (см. 4.A.).

**15.7** Сопоставим каждому открытому множеству из данной совокупности некоторую лежащую в нем точку всюду плотного множества. В результате мы получим инъекцию заданной совокупности в счетное множество.

**15.8** Следует из предыдущей задачи, поскольку компоненты открытого подмножества  $\mathbb{R}^n$  открыты и не пересекаются.

**15.9** Рассмотрите отображение  $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{T_1}$  и воспользуйтесь 15.M и результатом 15.3.

**15.10** Пусть  $X$  – пространство,  $\Sigma_0$  – счетная база топологии пространства  $X$ , а  $\Sigma$  – произвольная база топологии в  $X$ . В силу теоремы Линделёфа 15.O, каждое множество из  $\Sigma_0$  является объединением счетного множества элементов базы  $\Sigma$ . Осталось использовать 15.E.

**15.12** Ясно, что надо доказать лишь последнее утверждение. Если множество  $U$  открыто и  $a \in U$ , то  $\exists r \ B_r(a) \subset U$ . Далее, существует такое число  $k$ , что  $r_k < r$ , поэтому  $B_{r_k}(a) \subset U$ .

**15.13** В дискретном пространстве минимальной базой в точке  $x$  является одноточечное множество  $\{x\}$ . В антидискретном пространстве  $X$  минимальной базой в точке является все это пространство.

**15.14** Все, кроме пространства  $\mathbb{R}_{T_1}$ .

**15.15** Прямая, базой топологии которой является множество промежутков вида  $[a; b)$ .

**15.16** Если  $\{V_i\}_1^\infty$  – счетная база в точке, то можно положить  $U_i = \bigcap_1^n V_i$ .

**15.17** В этом пространстве  $x_n \rightarrow a$ , тогда  $x_n = a$  при всех  $n$ , начиная с некоторого номера. Таким образом,  $\text{SCl } A = A$  для всякого  $A \subset \mathbb{R}$ . С другой стороны, к примеру, отрезок  $[0; 1]$  не является замкнутым множеством, поэтому  $\text{SCl}[0; 1] = [0; 1] \neq \text{Cl}[0; 1] = \mathbb{R}$ .

**15.18** Рассмотрите тождественное отображение пространства из задачи 15.17 в  $\mathbb{R}$ .

**16.1** 1) Если пространство  $(X, \Omega_2)$  компактно, то очевидно, что пространств  $(X, \Omega_1)$  также является компактным. 2) Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

**16.2** Стрелка компактна (какое множество обязано принадлежать всякому ее покрытию?). Пространство  $\mathbb{R}_{T_1}$  также компактно, поскольку, если рассмотреть всякий непустой элемент произвольного открытого покрытия, то останется непокрытым лишь конечное число точек этого пространства.

**16.3** Это множество не компактно в  $\mathbb{R}$ , так как из покрытия  $\{(-\infty; \frac{2n-1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$  невозможно выделить конечное подпокрытие.

**16.4** Множество  $[1; 2)$  компактно в стрелке, так как одним из элементов покрытия  $[1; 2)$  является луч  $(a; +\infty)$ , где  $a < 1$ .

**16.5**  $A$  компактно в стрелке, тогда  $\inf A \in A$ .

**16.6** См. решение задачи 16.2.

**16.7** 1) Если  $\{U_\alpha\}$  – покрытие множества  $A \cup B$ , то оно одновременно покрытие  $A$  и покрытие  $B$ , следовательно, из него можно выбрать конечное подпокрытие множества  $A$  и конечное подпокрытие  $B$ , объединение которых будет конечным покрытием объединения  $A \cup B$ . 2) Множество  $A \cap B$  не обязано быть компактным (используйте 16.5 для построения соответствующего примера). К сожалению, часто приходится встречать слышать от студентов на экзаменах и зачетах такое вот, с позволения сказать, “доказательство” компактности  $A \cap B$ . “Так как  $A$  компактно,

то у него есть конечное покрытие, аналогично оно имеется и у  $B$ . Взяв попарные пересечения элементов этих покрытий, получим конечное покрытие пересечения множеств  $A$  и  $B$ ." Почему из этого рассуждения никоим образом не следует компактность пересечения компактных множеств?

**16.8** Пусть  $U_0$  – элемент покрытия, содержащий  $0$ . Осталось заметить, что вне  $U_0$  лежит конечное число точек множества  $A$ .

**16.9** Рассмотрите двуточечное пространство с антидискретной топологией и его одноточечное подмножество.

**16.10** Сопоставьте 16.K, 2.F и 16.J.

**16.11**  $\{X \setminus K_\alpha\}$  – покрытие компактного множества  $K_{\alpha_0} \setminus U$ . Если  $\{X \setminus K_i\}$  – его конечное подпокрытие, то  $U \supset \bigcap K_i$ .

**16.12** Набор  $\{K_n\}$  образует центрированную систему, значит, пересечение  $\bigcap K_n$  непусто. Если  $\bigcap K_n$  несвязно, то  $\bigcap K_n = F_1 \cup F_2$ , где  $F_1, F_2$  – непересекающиеся замкнутые множества. Рассмотрите их непересекающиеся окрестности  $U_1, U_2$ , используйте предыдущую задачу и придите к противоречию со связностью множеств  $K_n$ .

**16.13** Только если это пространство конечно.

**16.14** Из 16.S следует, что компактны  $S^1, S^n$ , эллипсоид. Множества  $[0; 1)$  и  $[0; 1) \cap \mathbb{Q}$  не компактны, так как не замкнуты, а некомпактность луча и гиперboloида следует из того, что они не ограничены.

**16.15** Замкнуто и ограничено в  $\mathbb{R}^{n^2}$  лишь  $O(n)$ , значит, только оно и компактно.

**16.16** В силу 12.C и теорем 16.O и 16.T, множество  $f(I)$  является компактным промежутком, значит – отрезком.

**16.17**  $\Leftrightarrow$  Это утверждение 16.U.  $\Leftarrow$  Так как функция  $A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \rho(0, x)$  ограничена, то множество  $A$  ограничено. Докажем, что оно замкнуто. Предположим противное, пусть  $x_0 \in \text{Cl } A \setminus A$ . Тогда функция  $A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/\rho(x, x_0)$  не является ограниченной – противоречие. Значит  $A$  замкнуто и ограничено, поэтому в силу 16.S оно компактно.

**16.18** Рассмотрим функцию  $f : K \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \rho(x, F)$ . В силу 4.35, функция  $f$  непрерывна. Поскольку  $\rho(K, F) = \inf_{x \in K} f(x)$ , то осталось применить 16.U.

**16.19** Следствие предыдущего утверждения, примененного к множествам  $A$  и  $X \setminus U$ , где  $U$  – окрестность  $A$ ; положите  $\varepsilon = \rho(A, X \setminus U)$ .

**16.20** Докажите, что если  $A$  замкнуто в  $\mathbb{R}^n$ , то для всякой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  найдется  $y \in A$ , такая, что  $\rho(x, y) = \rho(x, A)$ , откуда следует, что  $V = \bigcup_{x \in A} D_\varepsilon(x)$ . Множество  $\bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$  линейно связно как связное открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , откуда и следует линейная связность множества  $V$ .

**16.22** Рассмотрим функцию  $\varphi : x \mapsto \rho(x, f(x))$ . Если  $f(x) \neq x$ , то  $\varphi(f(x)) = \rho(f(x), f(f(x))) < \rho(x, f(x)) = \varphi(x)$ . Ясно (докажите это), что  $\varphi$  непрерывна. Поскольку пространство  $X$  компактно, то  $\varphi$  достигает своего наименьшего значения в некоторой точке  $x_0$ . Если  $f(x_0) \neq x_0$ , то значение  $\varphi$  в  $x_0$  не будет наименьшим.

**16.23** Пусть  $U_1, \dots, U_n$  – конечное подпокрытие данного покрытия. Положим  $f_i(x) = \rho(x, X \setminus U_i)$ . Покажите, что функция  $\varphi : x \mapsto \max\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, n\}$  непрерывна и положительна; так как  $X$  компактно, то она достигает своего наименьшего значения  $r > 0$ .

**16.24** Очевидно.

**16.25** Если  $X$  не компактно, см., к примеру, 10.B; если  $Y$  не хаусдорфово, рассмотрите, к примеру, тождественное отображение  $\text{id}$  отрезка  $[0; 1]$  с обычной топологией в него же с топологией Зариского, или же просто тождественное отображение пространства с дискретной топологией в пространство с антидискретной топологией.

**16.26** Нет, не существует. Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Если  $A$  не замкнуто, то отображение  $\text{in} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  не замкнуто. Если  $A = \mathbb{R}^n$ , то существует гомеоморфизм  $\mathbb{R}^n \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ . Если  $A$  замкнуто, но не ограничено, то возьмем  $x_0 \notin A$  и рассмотрим инверсию относительно этой точки.

**16.27** Используйте 5.F: замкнутые подмножества замкнутого подпространства замкнуты в объемлющем пространстве.

**16.1x** Пусть  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – норма. Из неравенства

$$p(x) \leq \sum |x_i| p(e_i) = \sum \lambda_i |x_i|$$

следует, что  $p$  непрерывна в нуле (здесь  $\{e_i\}$  – базис  $\mathbb{R}^n$ ). Покажите, что  $p$  непрерывна и в любой другой точке  $\mathbb{R}^n$ .

**16.2x** Поскольку сфера компактна, то найдутся такие числа  $c, C > 0$ , что  $c|x| \leq p(x) \leq C|x|$ , где  $|\cdot|$  – обычная евклидова норма. Далее воспользуйтесь 4.27.

**16.3x** Конечно же, нет!

**16.4x** Рассмотрите покрытие пространства  $X$  окрестностями, на которых  $f$  ограничена.

**17.1** Очевидное следствие 17.E.

**17.2** По лемме Цорна существует максимальное множество, попарные расстояния между точками которого не меньше  $\varepsilon$ ; оно и будет искомой  $\varepsilon$ -сетью.

**17.N**  $\Leftrightarrow$  Очевидно.  $\Rightarrow$  Следует из предыдущего утверждения, так как  $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть для  $\frac{\varepsilon}{2}$ -сети есть  $\varepsilon$ -сеть всего пространства.

**17.1x** Замкнутые шары пространства  $\ell^\infty$  некомпактны. Действительно, рассмотрим последовательность  $\{e_n\}$ , где  $e_n$  – орт. Каковы попарные расстояния между этими точками?

**17.2x** Это множество компактно, поскольку множество

$$A = \{x \in \ell^\infty \mid |x_n| \leq 2^{-n} \text{ при } n \leq k, \ x_n = 0 \text{ при } n > k\}$$

является его  $2^{-k}$ -сетью.

**17.4x** Нет, не существует. Докажите, что если  $E$  – конечномерное подпространство нормированного пространства  $(X, p)$ ,  $x \notin E$  и  $y \in E$  является ближайшей к  $x$  точкой  $E$ , то точка  $x_0 = \frac{x-y}{|x-y|}$  такова, что  $p(x_0 - z) \geq 1$  (это так называемая *лемма о перпендикуляре*). Используя ее, можно по индукции построить такую последовательность  $x_n \in X$ , что  $p(x_n) = 1$ ,  $p(x_n - x_k) \geq 1$  при  $n \neq k$ . Ясно, что у нее нет никакой сходящейся подпоследовательности.

**17.5x** См. 4.1x.

**17.6x** Если  $x = a_0 + a_1p + \dots$ , а  $y = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$ , то  $\rho(x, y) \leq p^{-k-1}$ .

**17.7x** Да, является. Для доказательства используйте следующее утверждение: если  $x = a_0 + a_1p + \dots$ ,  $y = b_0 + b_1p + \dots$  и  $\rho(x, y) < p^{-k}$ , то  $a_i = b_i$  при всех  $i = 1, \dots, k$ .

**17.8x** Поскольку конечное множество  $A = \{y = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k\}$  является  $p^{-k-1}$ -сетью в  $\mathbb{Z}_p$ , то из доказанной в 17.7x полноты этого пространства следует его компактность.

**17.9x** Рассмотрите метрику Хаусдорфа.

**17.10x** Рассмотрим  $\mathbb{R}^{2n}$  как пространство (упорядоченных) наборов  $n$  точек плоскости. У каждого набора точек рассмотрим его выпуклую оболочку, которая будет представлять собой многоугольник с не более, чем  $n$  вершинами. Пусть  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{2n}$  – множество наборов из  $n$  точек, выпуклые оболочки которых являются многоугольниками, принадлежащими пространству  $\mathcal{P}_n$ . Нетрудно видеть, что множество  $\mathcal{K}$  ограничено и замкнуто, значит, компактно. Ясно, что отображение  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}_n$ , переводящее набор точек в его выпуклую оболочку, сюръективно и непрерывно, откуда и следует, что множество  $\mathcal{P}_n$  компактно.

**17.11x** Используйте то, что множество  $\mathcal{P}_n$  компактно, а площадь является непрерывной функцией  $S : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**17.12x** Достаточно показать, что если многоугольник  $P \subset D$  не является правильным, то найдется многоугольник  $P' \subset D$ , такой что его периметр не превосходит  $p$ , а его площадь больше площади многоугольника  $P$ , или же такой, что его периметр меньше  $p$ , а площадь не

превосходит площади  $P$ . 1) Прежде всего, удобно считать, что  $P$  (так же как и  $P'$ ) содержит центр круга  $D$ . 2) Если у  $P$  имеются две соседние стороны, длины которых различны, то легко построить многоугольник той же площади и меньшего периметра. 3) Если все стороны  $P$  имеют одну и ту же длину, но его углы различны, то мы, опять-таки легко можем построить многоугольник большей площади и меньшего периметра.

**17.13x** Так же как в 17.9x, рассмотрите метрику Хаусдорфа.

**17.14x** Рассмотрим последовательность парвильных многоугольников периметра  $p$  с увеличивающимся числом вершин. Покажите, что эта последовательность не имеет предела в пространстве  $\mathcal{P}_\infty$ . Более того, у нее нет сходящейся подпоследовательности. Следовательно, пространство  $\mathcal{P}_\infty$  не является даже секвенциально компактным.

**17.15x** Опять-таки, как в 17.9x и 17.13x, можно рассмотреть метрику Хаусдорфа.

**17.16x** В силу 17.N, достаточно показать, что: 1) для каждого (достаточно малого)  $\varepsilon > 0$  в пространстве  $\mathcal{P}$  имеется компактная  $\varepsilon$ -сеть и 2) пространство  $\mathcal{P}$  является полным. Итак, 1) таковой сетью является пространство  $\mathcal{P}_n$  при достаточно больших  $n$ . (Какие конечные  $\varepsilon$ -сети вы можете предложить?) 2) Пусть  $K_1, K_2, \dots$  – последовательность Коши пространства  $\mathcal{P}$ . Покажите, что  $K_* = \text{Cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{i=n}^{\infty} K_i))$  является выпуклым множеством и  $K_i \rightarrow K_*$  при  $i \rightarrow \infty$ .

**17.17x** Следует из 17.16x и непрерывности площади. (Ср. 17.11x.)

**17.18x** Аналогично решению задачи 17.12x, достаточно показать, что мы можем увеличить площадь компактного множества  $X$ , отличного от круга без увеличения его периметра. 1) Рассмотрим точки  $A, B \in \text{Fr } X$ , которые делят  $\text{Fr } X$  на две дуги равной длины. 2) Отрезок  $AB$  делит множество  $X$  на две части,  $X_1$  и  $X_2$ . Предположим, что площадь  $X_1$  не меньше площади  $X_2$ . Если мы заменим  $X_2$  зеркальным образом  $X_1$ , мы не уменьшим площадь множества. Так как  $X_1$  не является полукругом, то найдется точка,  $C \in X_1 \cap \text{Fr } X$ , такая что  $\angle ACB \neq \pi/2$ , так что мы сможем увеличить площадь множества.

**18.1x** Очевидно.

**18.2x** Все, за исключением  $\mathbb{Q}$ .

**18.3x** Пусть  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n})$ ,  $B = \{0\}$ . Множества  $A$  и  $B$  локально компактны, однако у точки  $0 \in A \cup B$  нет окрестности с компактным замыканием (в  $A \cup B$ ).

**18.4x** См. 18.Lx.

**18.7x** Это очевидно, так как если открытое множество  $U$  пересекается с  $A \in \Gamma$ , тогда  $U$  пересекается с  $\text{Cl } A$ .

**18.8x** Прямое следствие утверждения 18.Qx.

**18.9x** Воспользуйтесь 18.8x.

**18.11x** Пусть  $X$  – локально компактное пространство. Тогда у  $X$  имеется база, состоящая из открытых множеств с компактным замыканием. В силу теоремы Линделёфа, из этой базы (которая является открытым покрытием  $X$ ) можно выделить счетное подпокрытие пространства  $X$ . Осталось воспользоваться утверждением 18.Xx.

**18.12x** Доказательство аналогично сходному факту о компактности.

**18.13x** Очевидно. (Все, что нужно – это вспомнить определения.)

**18.14x** Рассмотрим покрытие  $\Gamma' = \{X \setminus F, U_\alpha\}$  пространства  $X$ . Пусть  $\{V_\alpha\}$  – вписанное в  $\Gamma'$  локально конечное покрытие. Тогда  $\Delta = \{V_\alpha \mid V_\alpha \cap F \neq \emptyset\}$  – покрытие множества  $F$ . Положим  $W = \bigcup_{V_\alpha \in \Delta} V_\alpha$ . Так как покрытие  $\Delta$  локально конечно, то множество  $K = \bigcup_{V_\alpha \in \Delta} \text{Cl } V_\alpha$  является замкнутым. Следовательно,  $W$  и  $X \setminus K$  – искомые окрестности множеств  $F$  и  $M$ .

**18.15x** Непосредственно следует из 18.14x (или 18.16x).

**18.16x** Немедленно следует из 18.14x.

**18.17x** Поскольку  $X$  хаусдорфово и локально компактно, у каждой точки  $x \in U_\alpha \in \Gamma$  существует окрестность  $V_{\alpha,x}$ , замыкание которой компактно и содержится в  $U_\alpha$ . Поскольку  $X$  также является паракомпактным, в нем существует локально конечное покрытие  $\Delta$ , вписанное в покрытие  $\{V_{\alpha,x}\}$ , что и требовалось доказать.

**18.18x** Рассуждение опирается на лемму Цорна. Рассмотрим множество  $\mathcal{M}$  всех открытых покрытий  $\Delta$  пространства  $X$ , таких что для каждого  $V \in \Delta$ :  $V \in \Gamma$  или же  $\text{Cl } V$  содержится в некотором элементе покрытия  $\Gamma$ . Сопоставим каждому покрытию  $\Delta \in \mathcal{M}$  подмножество  $A_\Delta = \{V_\alpha \mid \text{Cl } V_\alpha \subset U_\alpha\} \subset \Gamma$ . Введем порядок на множестве  $\mathcal{M}$ :  $\Delta \preceq \Delta'$ , если  $A_\Delta \subset A_{\Delta'}$  и  $V_\alpha = V'_\alpha$  для каждого  $\alpha \in A_\Delta$ . Можно доказать, что в этом множестве существует наибольший элемент  $\Delta_0$ , при этом  $A_{\Delta_0}$  – всё множество индексов  $\Gamma$ , таким образом,  $\Delta_0$  является искомым покрытием.

**18.20x** Практически очевидно.

**19.1**  $\text{pr}_Y^{-1}(B) = X \times B$ .

**19.2** Имеем:

$$\begin{aligned} \text{pr}_Y(\Gamma_f \cap (A \times Y)) &= \text{pr}_Y(\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \cap (A \times Y)) = \\ &= \text{pr}_Y(\{(x, f(x)) \mid x \in A\}) = \{f(x) \mid x \in A\} = f(A). \end{aligned}$$

Докажите второе тождество самостоятельно.

**19.3** Действительно,  $(A \times B) \cap \Delta = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x = y\} = \{(x, x) \mid x \in A \cap B\}$ .

**19.4**  $\text{pr}|_{\Gamma_f} : (x, f(x)) \leftrightarrow x$ .

**19.5** Действительно,  $f(x_1) = f(x_2)$ , тогда  $\text{pr}_Y(x_1, f(x_1)) = \text{pr}_Y(x_2, f(x_2))$ .

**19.6** Очевидным образом следует из равенства  $T(x, f(x)) = (f(x), x) = (y, f^{-1}(y))$ .

**19.7** Воспользуйтесь формулой

$$(A \times B) \cap W = (A \times B) \cap \left( \bigcup U_\alpha \times V_\alpha \right) = \\ \bigcup ((A \times B) \cap (U_\alpha \times V_\alpha)) = \bigcup ((A \cap U_\alpha) \times (B \cap V_\alpha)).$$

**19.8** Воспользуйтесь третьей формулой из 19.A:

$$X \times Y \setminus A \times B = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)).$$

**19.9** Как обычно, будем проверять два включения.  $\square$  Воспользуйтесь 19.8.

$\square$  Если  $x$  и  $y$  — точки прикосновения множеств  $A$  и  $B$ , соответственно, то, очевидно, что  $(x, y)$  — точка прикосновения  $A \times B$ .

**19.10** Да, верно.  $\square$  Это очевидно.  $\square$  Если  $z = (x, y) \in \text{Int}(A \times B)$ , то у точки  $z$  существует элементарная окрестность  $W = U \times V \subset A \times B$ , значит,  $x \in U \subset A$  и  $y \in V \subset B$ , следовательно  $x \in \text{Int } A$  и  $y \in \text{Int } B$ , так что  $z \in \text{Int } A \times \text{Int } B$ .

**19.11** Конечно, нет! К примеру, границей квадрата  $I \times I \subset \mathbb{R}^2$  является контур этого квадрата, тогда как произведение  $\text{Fr } I \times \text{Fr } I$  состоит из четырех точек.

**19.12** Нет, не верно; рассмотрите множество  $(-1; 1) \times (-1; 1) \subset \mathbb{R}^2$ .

**19.13** Верно. Если множества  $A$  и  $B$  замкнуты, то  $\text{Fr } A = A \setminus \text{Int } A$  и  $\text{Fr } B = B \setminus \text{Int } B$ . Множество  $A \times B$  также замкнуто, поэтому

$$\text{Fr}(A \times B) = A \times B \setminus \text{Int}(A \times B) = A \times B \setminus \text{Int } A \times \text{Int } B = \\ ((A \setminus \text{Int } A) \times B) \cup (A \times (B \setminus \text{Int } B)) = (\text{Fr } A \times B) \cup (A \times \text{Fr } B).$$

**19.14**  $\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr } A \times B) \cup (A \cup B) \cup (A \times \text{Fr } B)$ , поскольку

$$\text{Fr}(A \times B) = \text{Cl}(A \times B) \setminus \text{Int}(A \times B) = (\text{Cl } A \times \text{Cl } B) \setminus (\text{Int } A \times \text{Int } B) \\ = ((\text{Cl } A \setminus \text{Int } A) \times \text{Cl } B) \cup (\text{Cl } A \times (\text{Cl } B \setminus \text{Int } B)) = (\text{Fr } A \times \text{Cl } B) \cup (\text{Cl } A \times \text{Fr } B) \\ = (\text{Fr } A \times (B \cup \text{Fr } B)) \cup ((A \cup \text{Fr } A) \times \text{Fr } B) = (\text{Fr } A \times B) \cup (\text{Fr } A \times \text{Fr } B) \cup (A \times \text{Fr } B).$$



**19.15** Достаточно показать, что всякое элементарное множество в топологии произведения есть объединение множеств данного вида. Действительно,

$$U \times V = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times \bigcup_{\beta} V_{\beta} = \bigcup_{\alpha, \beta} U_{\alpha} \times V_{\beta}.$$

**19.16**  $\Rightarrow$  Сужение  $\text{pr}_X|_{\Gamma_f}$  — непрерывная биекция. Обратное отображение  $X \rightarrow \Gamma_f : x \mapsto (x, f(x))$  непрерывно, тогда отображение  $g : X \rightarrow X \times Y : x \mapsto (x, f(x))$  непрерывно, что имеет место в силу равенства  $g^{-1}(U \times V) = U \cap f^{-1}(V)$ .  $\Leftarrow$  Воспользуйтесь равенством  $f = \text{pr}_Y \circ (\text{pr}_X|_{\Gamma_f})^{-1}$ .

**19.17** Действительно,  $\text{pr}_X(W) = \text{pr}_X(\cup U_{\alpha} \times V_{\alpha}) = \cup \text{pr}_X(U_{\alpha} \times V_{\alpha}) = \cup U_{\alpha}$ . (Мы предполагали, что  $V_{\alpha} \neq \emptyset$ )

**19.18** Нет, не является. К примеру, рассмотрите проекцию множества  $A = \{(x, y) \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  на ось абсцисс.

**19.19** Рассмотрим замкнутое множество  $F \subset X \times Y$  и точку  $x \notin \text{pr}_X(F)$ . Тогда  $(x \times Y) \cap F = \emptyset$  и для всякой точки  $y \in Y$  найдется элементарное множество  $U_x^y \times V_y \subset X \times Y \setminus F$ . Поскольку слой  $x \times Y$  компактен, то существует конечное подпокрытие  $\{V_{y_i}\}_{i=1}^n$ . Окрестность  $U = \bigcap_{i=1}^n U_x^{y_i}$  такова, что  $U \cap \text{pr}_X(F) = \emptyset$ . Значит, дополнение проекции  $\text{pr}_X(F)$  множества  $F$  открыто, таким образом, само множество  $\text{pr}_X(F)$  является замкнутым.

**19.K** Положим  $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ . Если  $f(z) = (x, y) \in X \times Y$ , то  $x = (\text{pr}_X \circ f)(z) = f_1(z)$ . Аналогично и  $y = f_2(z)$ .

**19.20** Несложное и полезное упражнение на использование теоретико-множественных определений.

**19.21** Проведите прямое вычисление.

**19.22** Опять-таки, проведите прямое вычисление.

**19.23** Вспомните определение произведения топологий и воспользуйтесь 19.21.

**19.24** Проще всего доказать непрерывность в каждой точке  $(x_1, x_2) \in X \times X$ . Действительно, пусть  $d = \rho(x_1, x_2)$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда из неравенства треугольника сразу следует, что

$$\rho(B_{\varepsilon/2}(x_1) \times B_{\varepsilon/2}(x_2)) \subset (d - \varepsilon; d + \varepsilon).$$

**19.25** Проведите прямую проверку.

**19.26**  $\Rightarrow$  Пусть  $(x, y) \notin \Delta$ . Тогда  $x \neq y$ , значит, у них существуют непересекающиеся окрестности:  $U_x \cap V_y = \emptyset$ . Тогда  $(U_x \times V_y) \cap \Delta = \emptyset$  в силу 19.3, таким образом,  $U_x \times V_y \subset X \times X \setminus \Delta$ . Следовательно,

множество  $(X \times X) \setminus \Delta$  открыто, а  $\Delta$ , тем самым, замкнуто.

$\Leftarrow$  Пусть  $x$  и  $y$  – две различные точки пространства  $X$ . Тогда  $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$  и так как множество  $\Delta$  замкнуто, у точки  $(x, y)$  имеется элементарная окрестность  $U_x \times V_y \subset X \times X \setminus \Delta$ . Значит, множество  $U_x \times V_y$  не пересекается с  $\Delta$ , так что  $U_x \cap V_y = \emptyset$  в силу 19.3, что и требовалось доказать.

**19.27** Сопоставьте 19.26 и 19.25.

**19.28** В силу 19.19 проекция  $\text{pr}_X : X \rightarrow Y$  является замкнутым отображением. Следовательно, ее сужение  $\text{pr}_X|_\Gamma : \Gamma \rightarrow X$  также замкнуто (см. 16.27, в силу 16.24 оно – гомеоморфизм, так что из 19.16 следует, что отображение  $f$  непрерывно).

Или по-другому: воспользуйтесь 19.19 и равенством  $f^{-1}(F) = \text{pr}_X(\Gamma_f \cap (X \times F))$ .

**19.29** Да, существенно. Рассмотрите отображение

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

**19.32** Только из линейной связности. Контрпример к остальным утверждением дают функции из задачи 19.31.

**19.36** Нет, не верно.

**19.37** Удобно использовать следующее свойство, эквивалентное определению регулярности пространства (см. 14.19). Для всякой окрестности  $W$  точки  $(x, y)$  найдется такая ее окрестность  $U$ , что  $\text{Cl}U \subset W$ . Достаточно рассмотреть случай, когда  $W$  – элементарная окрестность. Воспользуйтесь регулярностью пространств  $X$  и  $Y$  и задачей 19.9.

**19.38.1** Пусть  $A$  и  $B$  – непересекающиеся замкнутые множества. Для каждой точки  $a \in A$  найдется открытое множество  $U_a = [a; x_a) \subset X \setminus B$ . Положим  $U = \bigcup_{a \in A} U_a$ . Окрестность  $V \supset B$  определяется аналогичным образом. Предположим, что  $U \cap V \neq \emptyset$ , то  $[a; x_a) \cap [b; y_b) \neq \emptyset$  для некоторых точек  $a \in A$  и  $b \in B$ . Пусть, для определенности,  $a < b$ . Тогда  $b \in [x; x_a)$ , что противоречит выбору  $x_a$ .

**19.38.2** Множество  $\nabla$  замкнуто в  $\mathbb{R}^2$ , тем более оно замкнуто в  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ . Поскольку  $\{(x, -x)\} = \nabla \cap [x; x+1) \times [-x; -x+1)$ , то каждая точка множества  $\nabla$  открыта в нем.

**19.38.3** См. 14.4х.

**19.39** Модифицируйте рассуждение, использованное при доказательстве утверждения 19.5.

**19.40** Следует из 19.U и 19.9.

$$19.44 \quad \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \cong (\mathbb{R}^{n-k} \setminus 0) \times \mathbb{R}^k \cong (S^{n-k-1} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \cong S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}.$$

19.46 Пространство  $O(n)$  является объединением  $SO(n)$  и не пересекающегося с ним открытого подмножества, гомеоморфного  $SO(n)$ , значит, оно гомеоморфно  $SO(n) \times \{-1, 1\} \cong SO(n) \times O(1)$ .

19.47 Достаточно показать, что  $GL_+(n) = \{A \mid \det A > 0\}$  гомеоморфно произведению  $SL(n) \times (0; +\infty)$ . Искомый гомеоморфизм сопоставляет матрице  $A \in GL_+(n)$  пару, состоящую из матрицы  $\frac{1}{\sqrt[n]{\det A}}A$  и числа  $\det A$ .

19.49 Существование подобного гомеоморфизма непосредственно связано с существованием кватернионов (см. последний раздел в 22), поэтому и в доказательстве мы будем использовать свойства кватернионов. Пусть  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  – четверка попарно перпендикулярных единичных кватерниона, определяющая точку  $SO(4)$ . Искомый гомеоморфизм сопоставляет этой четверке пару, состоящую из единичного кватерниона  $x_0 \in S^3$  и тройки  $\{x_0^{-1}x_1, x_0^{-1}x_2, x_0^{-1}x_3\}$  попарно перпендикулярных векторов пространства  $\mathbb{R}^3$ , определяющей элемент  $SO(3)$ . Предупреждаем, что, к примеру,  $SO(5)$  не гомеоморфно  $S^4 \times SO(4)$ !

20.2 Отображение  $\text{pr}$  относит каждой точке содержащий её элемент разбиения (рассматриваемый как элемент фактормножества), поэтому прообразом  $\text{pr}^{-1}(\text{point}) = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(x))$  и является элемент разбиения, содержащий точку  $x \in X$ .

20.3 Пусть  $X/S = \{a, b, c\}$ , где  $p^{-1}(a) = [0; \frac{1}{3}]$ ,  $p^{-1}(b) = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ ,  $p^{-1}(c) = (\frac{2}{3}; 1]$ . Тогда  $\Omega_{X/S} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ .

20.4 Все элементы этого разбиения являются открытыми в  $X$  множествами.

20.6 Пусть  $X = \mathbb{N} \times I$ , а разбиение  $S$  состоит из множества  $\mathbb{N} \times 0$ , а остальные элементы разбиения  $S$  являются одноточечными. Пусть  $\text{pr}(\mathbb{N} \times 0) = x_* \in X/S$ . Докажем, что в точке  $x_*$  не существует счетной базы. Доказательство проведем от противного. Предположим, что  $\{U_k\}$  – это счетная база в этой точке. Каждое из множеств  $\text{pr}^{-1}(U_k)$  открыто в  $X$  и содержит каждую из точек  $x_n = (n, 0) \in X$ . Для каждой из этих точек найдется такое открытое в  $X$  множество  $V_n$ , что  $x_n \in V_n \subset \text{pr}^{-1}(U_n)$ . Осталось заметить, что множество  $W = \text{pr}(\cup V_n)$  является окрестностью точки  $x_*$ , не содержащейся ни в одной из окрестностей  $U_n$  этой точки, что противоречит предположению.

20.7 Для всякого открытого в  $X/S$  множества  $U$  его образ  $(f/S)(U) = f(\text{pr}^{-1}(U))$  открыт, поскольку он совпадает с образом открытого множества  $\text{pr}^{-1}(U)$  при открытом отображении  $f$ .

**20.1x**  $\Rightarrow$  Если  $F$  – замкнутое в  $X$  множество, то  $F = \text{pr}^{-1}(\text{pr}(F))$ , значит, множество  $\text{pr}(F)$  замкнуто.  $\Leftarrow$  Для всякого множества  $F$ , замкнутого в  $X$ , множество  $\text{pr}^{-1}(\text{pr}(F))$ , во-первых, замкнуто, так как  $\text{pr}$  непрерывна, во-вторых, является насыщением  $F$ .

**20.2x** Пусть  $A$  – замкнутое множество, являющееся неодноточечным элементом данного разбиения. Насыщением любого замкнутого множества  $F$  будет либо само  $F$ , либо объединение  $F \cup A$ , т. е. замкнутое множество.

**20.3x** Аналог 20.1x.

**20.4x** Если множество  $A$  насыщено, то для всякого множества  $U \subset A$  насыщение  $U$  также является подмножеством  $A$ , следовательно, насыщение множества  $\text{Int } A$  лежит в  $A$  и, поскольку это насыщение является открытым, должно совпадать с  $\text{Int } A$ . Так как множество  $X \setminus A$ , также насыщенное, то насыщено  $\text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \text{Cl } A$ , следовательно, насыщено и множество  $\text{Cl } A$ .

**21.1** Опишем, к примеру, разбиение отрезка, для которого соответствующее факторпространство гомеоморфно букве  $A$ . Оно состоит из двуточечных множеств  $\{\frac{1}{6}, 1\}$ ,  $\{\frac{2}{3} - x, \frac{2}{3} + x\}$  при  $x \in (0; \frac{1}{6})$ ; остальные его элементы одноточечны. Идея доказательства та же, что была использована в 21.2, именно, надо построить непрерывную сюръекцию отрезка на букву  $A$ . Рассмотрим отображение, определенное формулами

$$f(t) = \begin{cases} (3t, 6t) & \text{при } x \in [0; \frac{1}{3}], \\ (3t, 4 - 6t) & \text{при } x \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{2}], \\ (\frac{9}{2} - 6t, 1) & \text{при } x \in [\frac{1}{2}; \frac{2}{3}], \\ (6t - \frac{7}{2}, 1) & \text{при } x \in [\frac{2}{3}; \frac{5}{6}], \\ (3t - 1, 6 - 6t) & \text{при } x \in [\frac{5}{6}; 1]. \end{cases}$$

Покажите, что  $f(I)$  – это и есть буква  $A$ , а разбиение на прообразы  $f$  – это в точности разбиение, описанное в начале решения.

**21.2** Пусть  $u : I \rightarrow I \times I$  – кривая Пеано, т. е. непрерывная сюръекция. Тогда инъективный фактор отображения  $u$  и будет гомеоморфизмом некоторого факторпространства отрезка на квадрат.

**21.3** Пусть  $S$  – это разбиение подпространства  $A$  на  $A \cap B$  и одноточечные множества, состоящие из точек  $x \in X \setminus B = A \setminus B$ , а  $T$  – разбиение  $X$  на  $B$  и одноточечные подмножества из  $X \setminus B$ . Включение  $A \hookrightarrow X$  индуцирует непрерывное факторотображение  $\text{in}/(S, T) : A/A \cap B \rightarrow X/B$ , являющееся непрерывной биекцией. Осталось доказать, что эта биекция открыта. Рассмотрим открытое множество  $U \subset A/A \cap B$  и его

прообраз  $V \subset A$  относительно проекции. Если  $U \cap B = \emptyset$ , то  $W = U$  открыто в  $X$ , так как множества  $A, B$  образуют фундаментальное покрытие пространства  $X$ . Если  $U \cap B \neq \emptyset$ , то  $U \supset A \cap B$ , таким образом множество  $W = U \cup B$  открыто в  $X$ . В любом случае  $W$  является открытым насыщенным относительно разбиения  $T$  множеством, значит, открыт и его образ в  $X/B$ , совпадающий с  $(\text{in}/(S, T))(U)$ .

**21.4** Рассмотрите отображение

$$f : I \rightarrow I : x \mapsto \begin{cases} \frac{3}{2}x, & x \in [0; \frac{1}{3}); \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}); \\ \frac{3x-1}{2}, & x \in [\frac{2}{3}; 1], \end{cases}$$

и докажите, что  $S(f)$  – заданное разбиение. Таким образом,  $f/S(f) : I/S(f) \cong I$ . Какое отображение надо взять, чтобы доказать второе утверждение?

**21.5** Рассмотрим функцию  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , равную 0 при  $t \in [0; 1]$  и равную  $t - 1$  при  $t \geq 1$  и отображение  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $f(x, y) = (\frac{\varphi(r)}{r}x, \frac{\varphi(r)}{r}y)$ , здесь, как и ранее,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . По построению,  $\mathbb{R}^2/D^2 = \mathbb{R}^2/S(f)$ . Отображение  $f/S(f)$  является непрерывной биекцией. Для того, чтобы установить, что оно – гомеоморфизм, следует воспользоваться утверждением 18.0х (18.Рх). Для проверки гомеоморфности  $\mathbb{R}^2$  и других пространств, воспользуйтесь конструкциями, описанными в решениях задач 10.20–10.22.

**21.6** Обозначим через  $S$  разбиение пространства  $X$  на множество  $A$  и одноточечные подмножества его дополнения  $X \setminus A$ . Пусть  $T$  – это разбиение  $Y$  на  $f(A)$  и точки  $Y \setminus f(A)$ . Покажите, что  $f/(S, T)$  – гомеоморфизм.

**21.7** Нет, эти пространства не гомеоморфны; в пространстве  $\mathbb{R}^2/A$  не выполнена первая аксиома счетности (ср. 20.6).

**21.8** Разбиение  $S(\varphi)$ , где  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} : z \mapsto z^3$ , совпадает с заданным, поэтому  $S^1/S \cong S^1$ .

**21.9** В первом случае рассмотрите отображение  $\varphi(z) = z^2$ .

**21.10** Предостережение: факторпространство  $D^n$  по отношению эквивалентности  $x \sim y \iff x_i = -y_i$  не гомеоморфно  $D^n$ !

**21.11** Рассмотрите  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ . Ясно, что  $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ , таким образом, разбиение  $S(f)$  совпадает с заданным. К сожалению, прямая  $\mathbb{R}$  некомпактна, поэтому мы не можем

просто сослаться на теорему 16.X. Докажите, что, тем не менее, данное факторпространство является компактным.

**21.12** Факторпространство цилиндра по отношению эквивалентности  $(x, p) \sim (y, q)$ , если  $x + y = 1$ ,  $p = -q$  (здесь  $x, y \in [0; 1]$ ,  $p, q \in S^1$ ), гомеоморфно ленте Мебиуса.

**21.13** Следует использовать транзитивность факторизации (теорему 21.H). Пусть  $S$  – разбиение квадрата на пары расположенных на одной горизонтали точек его вертикальных сторон, все остальные элементы разбиения одноточечны. Получаем, что факторпространство  $I^2/S$  гомеоморфно цилиндру. Пусть теперь  $S'$  – разбиение цилиндра на пары точек его оснований, симметричные относительно прямой, параллельной основаниям цилиндра и пересекающей его ось симметрии; остальные элементы одноточечны. Тогда  $T$  – разбиение квадрата на прообразы при отображении  $p : I^2 \rightarrow I^2/S$  прообразов элемента разбиения  $S'$  – совпадает с разбиением, факторпространство которого есть бутылка Клейна.

**21.17** Первое утверждение следует из того, что множества, открытые в индуцированной из  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  на образе  $\text{in}_\beta(X_\beta)$  топологии, имеют вид  $\{(x, \beta) \mid x \in U\}$ , где  $U$  – это множество, открытое в пространстве  $X_\beta$ , таким образом,  $\text{ab}(\text{in}_\beta) : X_\beta \rightarrow \text{in}_\beta(X_\beta)$  – гомеоморфизм. Более того, каждый из этих образов открыт в сумме пространств (поскольку каждый из его прообразов при  $\text{in}_\alpha$  либо пуст, либо же равен  $X_\beta$ ), значит, и замкнут.

**21.18** Аксиомы отделимости и первая аксиома счетности передаются. Для сепарабельности или же существования счетной базы необходима счетность индексного множества. Пространство  $\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  несвязно, если число слагаемых больше единицы. Оно будет компактным, если число слагаемых конечно и каждое из рассматриваемых пространств компактно.

**21.19** Инъективность композиции  $\varphi = \text{pr} \circ \text{in}_2$  следует из того, что в каждом элементе разбиения в  $X_1 \sqcup X_2$  имеется не более одной точки из  $\text{in}_2(X_2)$ . Ее непрерывность очевидна. Рассмотрим открытое множество  $U \subset X_2$ . Множество  $\text{in}_1(X_1) \cup \text{in}_2(U)$  открыто в  $X_1 \sqcup X_2$  и является насыщенным, поэтому его образ  $W$  открыт в  $X_2 \cup_f X_1$ . Так как пересечение  $W \cap \varphi(X_2) = \varphi(U)$  открыто в  $\varphi(X_2)$ , то  $\varphi$  – топологическое вложение.

**21.20** Итак,  $Y = \{x_*\}$ . Положим  $X' = X \sqcup \{x_*\}$  и  $A' = A \sqcup \{x_*\}$ . Ясно, что фактор  $g : X/A \rightarrow X'/A'$  инъекции  $\text{in} : X \rightarrow X'$  является непрерывной биекцией. Докажите, что отображение  $g$  открыто.

**21.21** Разрежем квадрат так, как изображено на рисунке. Произведя склеивание сторон  $a$  и  $a'$ ,  $b$  и  $b'$ ,  $c$  и  $c'$ , получим две ленты Мебиуса, которые надо склеить по окружности, являющейся факторпространством объединения отрезков  $d_1$  и  $d_2$ .

**21.22** Рассмотрите отображение

$$(\text{id}_{S^1} \times i_+) \sqcup (\text{id}_{S^1} \times i_-) : (S^1 \times I) \sqcup (S^1 \times I) \rightarrow S^1 \times S^1,$$

где  $i_{\pm}$  – вложения отрезка  $I$  в  $S^1$  как верхней и, соответственно, нижней полуокружности.

**21.23** См. 21.М и 21.22.

**21.24** Если квадрат, факторпространством которого является бутылка Клейна, разрезать вертикальным отрезком на два прямоугольника, то после склеивания его горизонтальных сторон мы получим два цилиндра.

**21.25** Пусть  $S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ . Подмножество этой сферы, определяемое уравнением  $|z_1| = |z_2|$  состоит из всех пар  $(z_1, z_2)$ , таких что  $|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , таким образом, оно является тором. Теперь рассмотрим подмножество  $T_1$ , заданное неравенством  $|z_1| \leq |z_2|$  и отображение, сопоставляющее точке  $(z_1, z_2) \in T_1$  точку  $(u, v) = \left(\frac{z_1}{|z_2|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right) \in \mathbb{C}^2$ . Покажите, что это отображение является гомеоморфизмом  $T_1$  на  $D^2 \times S^1$ , и закончите рассуждение самостоятельно.

**21.26** Цилиндр или лента Мёбиуса. Рассмотрим гомеоморфизм  $g$  между вертикальными сторонами квадрата, пусть  $g : (0, x) \mapsto (1, f(x))$ . Отображение  $f$  – это гомеоморфизм  $I \rightarrow I$ , значит, оно является (строго) монотонной функцией. Предположим, что функция  $f$  – возрастающая, в частности,  $f(0) = 0$  и  $f(1) = 1$ . Покажем, что существует такой гомеоморфизм  $h : I^2 \rightarrow I^2$ , что  $h(0, x) = x$  и  $h(1, x) = (1, f(x))$  при всех  $x \in I$ . Для этого разобьем квадрат его диагоналями на четыре части, и определим  $h$  на правом треугольнике посредством формулы

$$h\left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} + tx\right) = \left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2} + tf(x)\right),$$

$t, x \in I$ . На остальных трех треугольниках  $h$  тождественно. Ясно, что при указанном гомеоморфизме элемент  $\{(0, x), (1, x)\}$  разбиения переходит в элемент  $\{(0, x), (1, f(x))\}$ , значит, существует непрерывная биекция цилиндра (следовательно, гомеоморфизм) на результат склейки квадрата посредством гомеоморфизма  $g$  его вертикальных сторон. Если же функция  $f$  является убывающей, то, рассуждая аналогичным образом, получим, что результат склеивания будет лентой Мёбиуса.

**21.27** Тор и бутылка Клейна; рассуждение аналогично 21.26.

**21.28** Покажите, что любой гомеоморфизм граничной окружности ленты Мёбиуса можно продолжить до гомеоморфизма всей ленты Мёбиуса.

**21.29** См. 21.27.

**21.30** Покажите, что любой автогомеоморфизм граничной окружности ручки можно продолжить до автогомеоморфизма всей ручки. (Ср. с задачей 21.28. При решении обеих задач полезно воспользоваться следующим фактом: любой автогомеоморфизм внешней граничной окружности кольца можно продолжить до автогомеоморфизма всего кольца, который на внутренней граничной окружности был бы неподвижен или задавал бы ее осевую симметрию.)

**21.31** См. решения задач 21.28 и 21.30.

**21.32** Можно считать, что дыры разбиты на пары “близких” дыр, соединенных “трубками”. (Ср. решение задачи 21.V.) Вместе с кругом, окружающим такую пару, каждая трубка образует ручку или бутылку Клейна с дырой. Если все трубки образуют ручки, то перед нами – сфера с ручками. В противном случае мы превращаем все ручки в бутылки Клейна с дырами (см. решение задачи 21.V), и перед нами – сфера с пленками.

**22.1** Существует естественное взаимно однозначное соответствие между прямыми на плоскости, заданными уравнением вида  $ax + by + c = 0$  и точками  $(a : b : c)$  пространства  $\mathbb{RP}^2$ . При этом дополнением образа множества всех прямых является множество, состоящее из единственной точки  $(0 : 0 : 1)$ .

**23.1x** Да, является. Число  $a$  всегда делит самое себя (даже 0 делит 0). Далее, если  $a$  делит  $b$  и  $b$  делит  $c$ , то  $a$  делит  $c$ .

**23.2x**  $a \sim b$ , тогда  $a = \pm b$ .

**23.3x** Утверждение очевидно, поскольку включение  $A \subset \text{Cl } B$  имеет место, тогда  $\text{Cl } A \subset \text{Cl } B$ .

**24.1x** Очевидно.

**24.2x** Сопоставив каждой точке  $y \in Y$  постоянное отображение  $f_y$ , образом которого является эта точка, мы и получим инъекцию  $Y \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ .

**24.4x** Соответствие  $f \mapsto f^{-1}(0)$  определяет биекцию  $\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \Omega_X$ .

**24.5x** Поскольку топология в пространстве  $X$  дискретна, то всякое отображение  $f : X \rightarrow Y$  непрерывно. Если  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , то отображение  $f$  однозначно определяется набором  $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\} \in Y^n$ .

**24.6x** Множество  $X$  состоит из двух компонент связности.



**24. Cx** Так как всякое одноточечное подмножество компактно, то  $\Delta^{(pw)} \subset \Delta^{(co)}$ , следовательно,  $\Omega^{(pw)} \subset \Omega^{(co)}$ .

**24. 7x** Ясно (докажите это), что топологические структуры  $\mathcal{C}(I, I)$  и  $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$  различны, и, следовательно, тождественное отображение множества  $\mathcal{C}(I, I)$  не есть гомеоморфизм. Чтобы доказать, что рассматриваемые пространства не гомеоморфны, нужно найти такое топологическое свойство, которым одно из них обладает, а другое – нет. Покажите, что  $\mathcal{C}(I, I)$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, а  $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$  – нет.

**24. 8x** Отождествим  $Y$  с  $\text{Const}(X, Y)$  посредством отображения  $y \mapsto f_y : x \mapsto y$ . Рассмотрим пересечения множеств из предбазы с образом пространства  $Y$  при указанном отображении. Имеем  $W(x, U) \cap \text{Const}(X, Y) = U$ , значит, пересечение с  $Y$  всякого предбазового множества из топологии поточечной сходимости открыто в  $Y$ . Обратно, для всякого открытого в  $Y$  множества  $U$  и для всякой точки  $x \in X$  выполняется равенство  $U = W(x, U) \cap \text{Const}(X, Y)$ . То же рассуждение справедливо и в случае компактно-открытой топологии.

**24. 9x** Отображение  $f \mapsto (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$  переводит предбазовое множество  $W(x_1, U_1) \cap W(x_2, U_2) \cap \dots \cap W(x_n, U_n)$  в базовое множество  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  топологии произведения. Наконец, ясно, что если пространство  $X$  конечно, то топологии  $\Omega^{co}(X, Y)$  и  $\Omega^{pw}(X, Y)$  совпадают.

**24. 10x**  $\Leftrightarrow$  Воспользуйтесь 24. Tx.  $\Leftrightarrow$  Если  $X$  – линейно связное пространство, то в нем любые два пути свободно гомотопны. Рассмотрим гомотопию  $h : I \times I \rightarrow X$ . В силу утверждения 24. Sx отображение  $\tilde{h} : I \rightarrow \mathcal{C}(I, X)$ , определенное формулой  $\tilde{h}(t)(s) = h(t, s)$ , непрерывно. Таким образом, любые два пути в пространстве  $X$  соединены путем в пространстве путей, что и означает, что пространство  $\mathcal{C}(I, X)$  линейно связно.

**24. 11x** Пространство  $\mathcal{C}^{(pw)}(I, I)$  не компактно, поскольку последовательность функций  $f_n(x) = x^n$  не имеет в нем точки накопления. Та же последовательность не имеет в  $\mathcal{C}(I, I)$  предельных точек, и, следовательно, это пространство также не является компактным.

**24. 12x** Пусть

$$d_n(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [-n; n]\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f, g)}{2^n(1 + d_n(f, g))}.$$

Нетрудно доказать, что  $d$  – метрика. Покажите, что индуцированная ею топология является компактно-открытой.

**24.13x** Доказательство аналогично доказательству утверждения 24.12x. Надо лишь заметить, что поскольку, очевидно,  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Int } X_i$ , то для всякого компактного множества  $K \subset X$  найдется  $n$ , такое что  $K \subset X_n$ .

**26.1x** Отметим, что: 1)  $\beta(x, y) = \omega(x, \alpha(y))$ ; 2)  $\alpha(x) = \beta(1, x)$  и  $\omega(x, y) = \beta(x, \alpha(y))$ .  $\Leftrightarrow$  Отображение  $\beta$  непрерывно как композиция непрерывных отображений в силу равенства 1).  $\Leftarrow$  Используйте равенства 2).

**26.2x** В обозначениях из доказательства утверждения 26.1x,  $\alpha$  является непрерывным и обратным самому себе отображением, значит оно – гомеоморфизм.

**26.3x** Непрерывность указанных отображений вытекает из того, что первое из них является композицией  $\omega \circ (f \times g)$ , второе – композицией  $\alpha \circ f$  (в обозначениях из доказательства 26.1x).

**26.5x** В тех случаях, когда топология в группе индуцируется стандартной топологией евклидова пространства, для проверки непрерывности отображений  $(x, y) \mapsto xy$  и  $x \mapsto x^{-1}$  достаточно убедиться, что они задаются непрерывными функциями. Если  $x = a + ib$  и  $y = c + id$ , то  $xy = (ac - bd) + i(ad + bc)$ , значит умножение задается функцией  $(a, b, c, d) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$ , которая очевидно непрерывна. Переход к обратному элементу также задается непрерывной (на  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ ) функцией  $(a, b) \mapsto \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ .

**26.6x** Используйте идею рассуждения из решения задачи 26.5x.

**26.7x** Возьмите, к примеру, топологию из задачи 2.5.

**26.10x** Да, справедливо.

**26.11x** Утверждение следует из равенств  $UV = \bigcup_{x \in V} Ux$  и  $VU = \bigcup_{x \in V} xU$  в силу 26.Ех.

**26.12x** Нет, не останется. Если  $U = \{0\}$  и  $V = (0; 1) \in \mathbb{R}$ , то  $U + V = V$ . Контрпример, в котором оба множества замкнуты, дан в 26.13x.

**26.13x** Первые две. Докажите, что вторая группа всюду плотна в  $\mathbb{R}$  и не совпадает с ней (хотя бы потому, что она счетна, а  $\mathbb{R}$  – нет).

**26.14x** Из 26.Іх следует, что найдется окрестность  $V'$  единицы, такая что  $V'V' \subset U$ , а в силу 26.Нх существует симметричная окрестность единицы, такая что  $V_2 \subset V'$ . Значит  $V_2V_2 \subset V'V' \subset U$ . Проведем рассуждение по индукции. Если  $V_n$  – симметричная окрестность единицы, такая что  $V_n^{n-1} \subset V_2$ , то  $V_n^n = V_nV_n^{n-1} \subset V_2V_2 \subset U$  (обратите внимание, что  $VV \subset V$ ).

**26.15x** Ясно, что  $H = \cup_{n=1}^{\infty} V^n$  открытое множество,  $1 \in H$ ,  $HH \subset H$  и  $H^{-1} \subset H$  (в силу симметричности окрестности  $V$ ). Значит  $H$  – открытая подгруппа. То, что всякая открытая подгруппа одновременно является и замкнутой, будет доказано в 27.3x.

**26.Nx.1** Достаточно взять симметричную окрестность единицы, такую что  $V^2 \subset U$ . Действительно, тогда для любого элемента  $g \notin U$  множества  $gV$  и  $V$  не будут пересекаться. Следовательно,  $\text{Cl}V \subset U$ .

**26.17x** Пусть  $N$  – пересечение всех окрестностей единицы. Так как группа  $G$  конечна, то  $N$  – окрестность единицы. Из 26.Hx и 26.Ix следует, что  $N = N^{-1}$  и  $N^2 = N$ , значит  $N$  – подгруппа. Из построения  $N$  следует, что  $N \subset gNg^{-1}$  для любого элемента  $g \in G$ . Поскольку оба множества содержат одинаковое число элементов, то  $N = gNg^{-1}$ , следовательно,  $N$  – нормальная подгруппа. Одноэлементный набор  $\{N\}$  является базой в единице, значит набор  $\{gN \mid g \in G\}$  – база топологии на группе  $G$ .

**27.2x**  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Пусть  $H$  – подгруппа,  $U$  открытое множество и  $g \in U \subset H$ . Тогда  $h \in hg^{-1}U \subset H$  для любого  $h \in H$ , значит всякая точка подгруппы  $H$  – внутренняя.

**27.3x** Если  $H$  – подгруппа и  $g \notin H$ , то множества  $H$  и  $gH$  не пересекаются. Следовательно, множество  $G \setminus H = \cup_{g \notin H} (gH)$  открыто, поэтому множество  $H$  замкнуто.

**27.4x** Если  $H$  – подгруппа конечного индекса, то множество  $G \setminus H = \cup_{i=1}^n g_i H$  замкнуто, значит подгруппа  $H$  – открытое множество.

**27.5x** (a)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ; (b)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**27.6x**  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Если в подгруппе имеется изолированная точка, то все ее точки – изолированные.

**27.7x**  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Пусть  $U \subset G$  – открытое множество, такое что  $U \cap H = U \cap \text{Cl}H \neq \emptyset$ . Если  $g \notin H$  и  $gH \cap U \neq \emptyset$ , то  $g \in \bigcup_{h \in H} h(U \setminus H)$  – открытое и не пересекающееся с  $H$  множество. Если  $gH \cap U = \emptyset$ , то выберем точку  $h' \in H \cap U$  и симметричную окрестность  $V$  единицы, такую что  $Vh' \subset U$ . Множество  $Vg$  – окрестность элемента  $g$ , не пересекающаяся с  $H$  (в противном случае из равенства  $vg = h'$  следовало бы, что  $gh^{-1}h' = v^{-1}h' \in Vh'$ ).

**27.8x** В силу 27.7x замыкание множества  $\text{Cl}H \setminus H$  содержит подгруппу  $H$ .

**27.9x** Это следует из равенств  $(\text{Cl}H)^{-1} = \text{Cl}H^{-1}$  и  $\text{Cl}H \cdot \text{Cl}H \subset \text{Cl}(H \cdot H) = \text{Cl}H$ .

**27.10x** Это так, если внутренность подгруппы непуста, ср. 27.2x.

**27.12x** Отождествим элементы группы  $SO(n)$  с положительно ориентированными ортонормальными базисами в  $\mathbb{R}^n$ . Отображение  $p : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$  сопоставляет каждому базису его последний вектор. Прообразом каждой точки  $x \in S^{n-1}$  является правый класс смежности по подгруппе  $SO(n-1)$  (докажите это). Ясно, что отображение  $p$  непрерывно. Его фактором является непрерывная биекция  $\hat{p} : SO(n)/SO(n-1) \rightarrow S^{n-1}$ .

В силу компактности  $SO(n)$  и хаусдорфовости  $S^{n-1}$ ,  $\hat{p}$  – гомеоморфизм.

**27.13x** 1) Компактность групп  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(n)$  следует из того, что они являются замкнутыми и ограниченными подмножествами в соответствующем пространстве матриц.

2) Связность групп  $SO(n)$  доказывается по индукции при помощи 27.12x. Заметим, что группа  $SO(2) \cong S^1$  связна. Для того, чтобы проверить связность  $U(n)$ ,  $SU(n)$  и  $Sp(n)$ , сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное 27.12x. В группе  $O(n)$  имеются две компоненты:  $SO(n)$  и ее дополнение (единственный нетривиальный класс смежности подгруппы  $SO(n)$ ). При  $p > 0$ ,  $q > 0$  в группе  $O(p, q)$  имеется 4 компоненты. Проведите доказательство индукцией по  $p$  и  $q$ , используя утверждения 27.Gx и 18.Ox.

**27.14x** См. решение задачи 27.Ix.

**27.15x** Пусть  $H$  – дискретная нормальная подгруппа,  $h \in H$ . Рассмотрим образ группы  $G$  при отображении сопряжения  $g \mapsto ghg^{-1}$ . Поскольку  $H$  нормальна, то этот образ лежит в  $H$ , в силу связности группы  $G$  и дискретности топологии на  $H$ , он состоит из единственной точки. Так как  $h$  является образом единицы, то  $ghg^{-1} = h$  при всех  $g \in G$ . Таким образом, элемент  $h$  коммутирует со всеми элементами группы  $G$ .

**27.Tx** Они не изоморфны, так как не гомеоморфны (окружность  $S^1$  компактна, а прямая – нет). Проверьте, что отображение  $\mathbb{R} \rightarrow S^1 : x \mapsto e^{2\pi i x}$  является локальным изоморфизмом.

**27.18x** Рассмотрите стандартное отображение (см. 27.Tx) и открытый интервал в  $\mathbb{R}$ , содержащий 0 and  $\frac{1}{2}$ .

**27.19x** Пусть  $f : U \rightarrow V$  гомеоморфизм окрестности  $U$  единицы группы  $G$  на окрестность единицы группы  $H$ , такой что  $f(xy) = f(x)f(y)$  для всех  $x, y \in U$ . В силу 26.Ix существует окрестность  $\hat{U}$  единицы группы  $G$ , такая что  $\hat{U}^2 \subset U$ . Так как  $\hat{U} \subset U$ , то  $f(xy) = f(x)f(y)$  для всех  $x, y \in \hat{U}$ , таких что  $xy \in \hat{U}$ . Положим  $\hat{V} = f(\hat{U})$  и рассмотрим  $z, t \in \hat{V}$ , такие что  $zt \in \hat{V}$ . Тогда  $z = f(x)$  и  $t = f(y)$ , где  $x, y \in \hat{U}$ , значит  $xy \in U$ , поэтому  $f(xy) = f(x)f(y) = zt$ . Таким образом,  $x = f^{-1}(z)$ ,  $y = f^{-1}(t)$ , следовательно  $f^{-1}(z)f^{-1}(t) = xy = f^{-1}(zt)$ .

**27.20x** Следует из 27.19x, так как проекция  $p_G : G \times H \rightarrow G$  является открытым отображением.

**27.22x** Первое утверждение очевидно, так как указанное отображение есть сужение непрерывного отображения  $G \times G \rightarrow G : (x, y) \mapsto xy$ . Для построения требуемого примера пусть  $G = \mathbb{R}$ ,  $A = \mathbb{Q}$ , а группа  $B$  порождена элементами  $h \notin \mathbb{Q}$  базиса Гамеля пространства  $\mathbb{R}$  (базиса  $\mathbb{R}$ , рассматриваемого как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ ). Так как пространство  $A \times B$  несвязно, оно не может быть гомеоморфно  $\mathbb{R}$ .

**27.23x** Изоморфизм  $S^0 \times \mathbb{R}_+^*$  задается правилом  $(s, r) \mapsto rs$ .

**27.24x** Замените в решении задачи 27.23x  $S^0$  на  $S^1$ .

**27.25x** Замените в решении задачи 27.23x  $S^0$  на  $S^3$ .

**27.26x** Утверждение очевидно, так как трехмерная сфера связна, а двоеточие – нет. Однако подгруппа  $S^0 = \{1, -1\}$  не является прямым фактором группы  $S^3 = \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\}$  даже в алгебраическом смысле. Для доказательства используйте то, что  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ .

**27.27x** Таковой является факторгруппа  $S^3/S^0$  (см. 27.26x).

**28.1x** В случаях (1) и (2) отображение  $G \rightarrow \text{Тор } X$  непрерывно (см. решение 28.6x). Тем не менее, если мы требуем, чтобы множество  $\text{Тор } X$  было бы топологической группой, необходимы дополнительные условия, к примеру такие как хаусдорфовость и локальная компактность.

**28.2x** Ясно, что величины углов такого треугольника должны быть равными  $\pi/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В действительности решений всего два:  $(\pi/2, \pi/3, \pi/6)$  и  $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ .

**28.3x** Рассмотрите иррациональный поток (28.1x) или же действие группы  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  с дискретной топологией на  $\mathbb{R}$  посредством сдвигов. В последнем случае  $G = G/G^x$ , но группа  $G(x)$  не дискретна (ср. 26.13x).

**28.4x** Если  $A$  – компактное множество, то его орбита  $G(A)$  компактна как образ компактного множества  $G \times A$  при непрерывном отображении  $G \times X \rightarrow X$ . Предположим, что множество  $A$  замкнуто и рассмотрим некоторую орбиту  $G(x)$ , не лежащую в  $G(A)$ . Для каждого элемента  $g \in G$  возьмем окрестность  $U(g)$  точки  $x \in X$  и окрестность  $V(g)$  элемента  $g \in G$ , такие что множество  $V(g)U(g)$  не пересекается с  $G(A)$ . В силу компактности  $G$ , найдется конечный набор элементов  $g_k \in G$ , такой что множества  $V(g_k)$  образуют покрытие группы  $G$ . Насыщение множества  $\cap U(g_k)$  будет окрестностью орбиты  $G(x)$ , не пересекающим множество  $G(A)$ . Таким образом,  $G(A)$  замкнуто.

**28.5x** Существуют всего две различные орбиты:  $\{0\}$  и  $\mathbb{R} \setminus 0$ . Соответствующими изотропными подгруппами являются  $G$  и  $1$ . Пространство

орбит состоит из двух точек, к примеру,  $\{0, 1\}$  в котором множество  $\{1\}$  является открытым.

**28.6х** Пространство орбит гомеоморфно самому этому треугольнику, причем гомеоморфизм индуцирован его вложением в  $\mathbb{R}^2$  (являющемуся, тем самым, непрерывным сечением для отображения фактооризации). Группа  $G$  – свободное произведение трех экземпляров группы  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**28.7х** Воспользуемся транзитивностью факторизации и заменим пространство орбит  $\mathbb{R}^2/G$  на результат склеивания объединения двух треугольников с общей стороной по двум парам оставшихся сторон посредством осевой симметрии. В результате мы получим пространство, гомеоморфное  $S^2$  (точнее, “подушку”). Группа  $G$  есть прямое произведение  $C \times C$ , где  $C = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ ,  $H$  – ее подгруппа, состоящая из элементов четных степеней.

**28.8х** Две точки принадлежат одной и той же орбите, когда пропорциональны модули их однородных координат. Другими словами, существует взаимно-однозначное соответствие между орбитами и выходящими из начала координат лучами, лежащими в первом ортанте  $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid x_i \geq 0\}$ . Изотропными подгруппами являются координатные торы меньшей размерности. В силу транзитивности факторизации пространство орбит гомеоморфно проективизации  $\mathbb{R}_+^{n+1}/\mathbb{R}_+$  первого ортанта, т. е.  $n$ -мерному симплексу.

**28.9х** Две точки принадлежат одной и той же орбите, когда совпадают значения элементарных симметрических многочленов от их координат. Поэтому, по крайней мере с теоретико-множественной точки зрения, формулы Виета отождествляют каждую орбиту с множеством всех унитарных многочленов степени  $n$ , которое есть  $\mathbb{C}^n$ . Поскольку оба пространства локально компактны, а группа  $G = \text{Sym}(n)$  конечна (значит, компактна), то  $X/G \cong \mathbb{C}^n$ .

**28.10х** Две такие матрицы принадлежат одной и той же орбите, когда у них совпадает набор их собственных чисел (с учетом их кратностей). Значит, с теоретико-множественной точки зрения, сопоставив орбите набор собственных чисел матрицы, расположенных в порядке убывания,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , мы получим взаимно-однозначное соответствие между пространством орбит и подмножеством  $\mathbb{R}^3$ , заданным указанными неравенствами и уравнением  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Поскольку у данного отображения имеется непрерывное сечение – сопоставление набору такому набору диагональной матрицы, – то пространство орбит  $X/G$  гомеоморфно указанному подмножеству  $\mathbb{R}^3$ , представляющему собой плоскую область, ограниченную двумя лучами, угол между которыми равен  $\frac{2\pi}{3}$ .

Для всякой точки внутри этой области изотропная подгруппа изоморфна  $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ . Для внутренних точек на граничных лучах изотропной подгруппой является нормализатор группы  $SO(2)$ , а орбиты гомеоморфны проективной плоскости. Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , то орбитой является точка, а ее изотропная группа есть вся группа  $SO(3)$ .

**28.11x** Сфера  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ) является однородным хаусдорфовым  $G$ -пространством на котором естественным образом действует группа  $G = O(n+1)$  (соответственно,  $G = U(n)$ ). Для каждой точки  $x \in S^n$  (соответственно,  $x \in S^{2n-1}$ ) соответствующей изотропной подгруппой является группа  $O(n) \subset O(n+1)$  (соответственно,  $U(n-1) \subset U(n)$ ). Осталось применить утверждение 28.Мх.

**28.12x** Описанное выше действие группы  $O(n+1)$  (группы  $U(n)$ ) переносится на  $\mathbb{R}P^n$  (соответственно,  $\mathbb{C}P^{n-1}$ ). Для каждой точки  $x \in S^n$  (соответственно,  $x \in S^{2n-1}$ ) соответствующей изотропной подгруппой является группа  $O(n) \times O(1)$  (соответственно,  $U(n-1) \times U(1)$ ).

**28.13x** Как и в случае задачи 28.11x, утверждение следует из представления сферы  $S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$  как однородного  $G$ -пространства с группой  $G = Sp(n)$ .

**28.14x** Тор гомеоморфен факторпространству (в данном случае – факторгруппе)  $\mathbb{R}^2/H$  плоскости по лежащей в ней целочисленной решетке  $H = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Чтобы аналогичным образом получить бутылку Клейна, достаточно к группе  $H$  добавить осевые симметрии  $(x, y) \mapsto (1-x, y)$ .

**28.15x** 1) Пространство наборов из  $n$  попарно ортогональных прямых в  $\mathbb{R}^n$ . 2) Грассманово многообразие  $k$ -мерных плоскостей в  $\mathbb{R}^n$ . 3) Грассманово многообразие ориентированных  $k$ -мерных плоскостей в  $\mathbb{R}^n$ . 4) Многообразие Штифеля  $(n-k)$ -мерных ортонормированных реперов в  $\mathbb{R}^n$ .

**28.16x** Воспользуйтесь тем, что произведение однородных пространств является однородным пространством. С другой стороны, это произведение изоморфно пространству ориентированных двумерных плоскостей в  $\mathbb{R}^4$  (попробуйте доказать это!).

**28.17x** По своему определению, группа  $SO(n, 1)$  действует транзитивно на квадрике в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , заданной уравнением  $-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ . Для каждой точки на этой квадрике соответствующей изотропной подгруппой является образ  $SO(n)$  при ее стандартном вложении в  $SO(n, 1)$ . В силу 28.Мх, пространство орбит гомеоморфно указанной квадрике, таким образом оно гомеоморфно несвязному объединению двух открытых  $n$ -мерных шаров.

**29.1** Для любого непрерывного отображения  $f : X \rightarrow I$  отображение  $H : H(x, t) = (1-t)f(x)$  является гомотопией между  $f$  и постоянным отображением  $h_0 : x \mapsto 0$ .

**29.2**  $\Rightarrow$  Пусть  $f_0, f_1 : Z \rightarrow X$  – постоянные отображения,  $x_0 = f_0(Z)$  и  $x_1 = f_1(Z)$ . Если  $H$  – гомотопия между  $f_0$  и  $f_1$ , то для произвольной точки  $z_* \in Z$  путь  $u : t \mapsto H(z_*, t)$  соединяет  $x_0$  с  $x_1$ . Значит, эти точки лежат в одной компоненте линейной связности пространства  $X$ .

$\Leftarrow$  Если путь  $u : I \rightarrow X$  соединяет точку  $x_0$  с  $x_1$ , то формула  $H(z, t) = u(t)$  задает гомотопию  $H : Z \times I \rightarrow X$  между  $f_0$  и  $f_1$ .

**29.3** Рассмотрим произвольное отображение  $f : I \rightarrow Y$  и покажем, что оно гомотопно нулю. Действительно, если  $H(s, t) = f(s(1-t))$ , то  $H(s, 0) = f(s)$  и  $H(s, 1) = f(0)$ . Рассмотрим два непрерывных отображения  $f, g : I \rightarrow Y$ . Покажем, что если  $f(I)$  и  $g(I)$  лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства  $Y$ , то эти отображения гомотопны. Каждое из отображений  $f$  и  $g$  гомотопно нулю, следовательно они являются гомотопными в силу транзитивности отношения гомотопности и результата задачи 29.2. Для полноты картины предьявим в явном виде гомотопию, соединяющую  $f$  и  $g$ :

$$H(s, t) = \begin{cases} f(s(1-3t)) & \text{при } t \in [0; \frac{1}{3}], \\ u(3s-1) & \text{при } t \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \\ g(s(3t-2)) & \text{при } t \in [\frac{2}{3}; 1]. \end{cases}$$

**29.4** Докажите, что всякое непрерывное отображение в звёздное множество гомотопно постоянному отображению, образом которого центр звезды.

**29.5** Пусть  $f : C \rightarrow X$  – непрерывное отображение. Если  $a$  – центр множества  $C$ , то искомая гомотопия  $H : C \times I \rightarrow X$  определяется формулой  $H(c, t) = f(ta + (1-t)c)$ .

**29.6** Пространство  $X$  линейно связно.

**29.7** Воспользуйтесь утверждением 29.6 и тем, что  $S^n \setminus \text{point} \cong \mathbb{R}^n$ .

**29.8** Если путь  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus 0$  соединяет  $x = f(0)$  с точкой  $y = g(0)$ , то он определяет гомотопию между  $f$  и  $g$ , так как  $0 \times I \cong I$ .

**29.9** Рассмотрим отображения  $f$  и  $g$ , определенные формулами  $f(0) = -1$ ,  $g(0) = 1$ . Они не гомотопны, так как точки 1 и -1 лежат в разных компонентах линейной связности пространства  $\mathbb{R} \setminus 0$ .

**29.10** Если  $n > 1$ , то существует ровно один гомотопический класс. При  $n = 1$  имеется  $(k+1)^m$  таких классов.



**29.11** Поскольку для всякой точки  $x \in X$  и любого числа  $t \in I$  справедливо неравенство

$$|(1-t)f(x) + tg(x)| = |f(x) + t(g(x) - f(x))| \geq |f(x)| - |g(x) - f(x)| > 0,$$

то образ прямолинейной гомотопии, соединяющей  $f$  и  $g$ , лежит в  $\mathbb{R}^n \setminus 0$ , следовательно эти отображения гомотопны.

**29.12** Для простоты будем считать, что у многочленов  $p$  и  $q$  коэффициенты при старшей степени равны 1. Воспользуйтесь 29.11 для того, чтобы показать, что отображения, задаваемые многочленом  $p(x)$  степени  $n$  и одночленом  $z^n$ , гомотопны.

**29.13** Искомая гомотопия задается формулой

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$

Подумайте, для чего нам нужно условие  $|f(x) - g(x)| < 2$ ?

**29.14** Это непосредственно следует из 29.13.

**30.1**  $\Rightarrow$  Для краткости записи положим  $\alpha = (uv)w$  и  $\beta = u(vw)$ ; по условию  $\alpha(s) = \beta(s)$  при всех  $s \in [0; 1]$ . В доказательстве утверждения 30.E.2 будет построена такая функция  $\varphi$ , что  $\alpha \circ \varphi = \beta$ . Следовательно,  $\alpha(s) = \alpha(\varphi(s))$ , поэтому  $\alpha(s) = \alpha(\varphi^n(s))$  при всех  $s \in [0; 1]$  и  $n \in \mathbb{N}$  (здесь через  $\varphi^n$  обозначена  $n$ -кратная композиция функции  $\varphi$ ). Поскольку  $\varphi(s) < s$  при  $s \in (0; 1)$ , то последовательность  $\varphi^n(s)$  является монотонно убывающей, при этом нетрудно видеть, что её предел равен нулю для каждого  $s \in (0; 1)$ . По предположению  $\alpha : I \rightarrow X$ , значит  $\alpha(s) = \alpha(\varphi^n(s)) \rightarrow \alpha(0) = x_0$  при всех  $s \in [0, 1)$ , следовательно, и  $\alpha(s) = x_0$  при всех  $s \in [0; 1)$ . Следовательно, и  $\alpha(1) = x_0$ .  $\Leftarrow$  Очевидно.

**30.2** Из решения задачи 30.D следует, что надо построить пути  $u$ ,  $v$  и  $w$  в некотором пространстве, такие что  $\alpha(\varphi(s)) = \alpha(s)$  при всех  $s \in [0; 1]$  (здесь, как и в 30.D,  $\alpha = (uv)w$ ). Рассмотрим, к примеру, пути  $I \rightarrow [0; 3]$ , заданные формулами:  $u(s) = s$ ,  $v(s) = s + 1$  и  $w(s) = s + 2$ ; путь  $\alpha : [0; 1] \rightarrow [0; 3]$  является биекцией. Введем в  $[0; 3]$  следующее отношение эквивалентности:  $x \sim y$ , если существуют  $n, k \in \mathbb{N}$ , такие что  $x = \alpha(\varphi^k(s))$  и  $y = \alpha(\varphi^n(s))$ . Пусть  $X$  – это факторпространство отрезка  $[0, 3]$  по этому отношению. Для путей  $u' = \text{pr } ou$ ,  $v' = \text{pr } ov$ ,  $w' = \text{pr } ow$  как раз и имеет место равенство  $(u'v')w' = u'(v'w')$ .

**30.4** Если  $u(s) = e_a u(s)$ , то

$$u(s) = \begin{cases} a & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ u(2s - 1) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1]. \end{cases}$$

Таким образом,  $u(s) = a$  при всех  $s \in [0; \frac{1}{2}]$ . Далее, если  $s \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$ , то  $2s - 1 \in [0; \frac{1}{2}]$ , откуда следует, что  $u(s) = u(2s - 1) = a$  и при всех  $s \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$ . Рассуждая далее аналогичным образом, в результате получим, что  $u(s) = a$  при всех  $s \in [0; 1)$ . Если на пространство  $X$  не накладывать никаких условий, то вполне возможно, что  $u(1) = x \neq a$  (покажите это). И покажите, что из условия задачи следует, что  $u(1) = a$  (ср. 30.1).

**30.5** Совсем очевидно.

**31.1** Такие гомотопии  $h$ , при которых  $h(0, t) = h(1, t)$  для всех  $t \in I$ .

**31.2** См. следующую задачу.

**31.3** Если  $z = e^{2\pi is}$ , то

$$uv(e^{2\pi is}) = \begin{cases} u(e^{4\pi is}) & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ v(e^{4\pi is}) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1], \end{cases} = \begin{cases} U(z^2) & \text{при } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ V(z^2) & \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases}$$

**31.4** Следует рассмотреть множество гомотопических классов круговых петель в некоторой точке  $x_0$ , операция в котором определена так, как в задаче 31.3.

**31.5** Она тривиальна, так как всякое отображение в такое пространство является непрерывным, следовательно, всякие две петли (в одной и той же точке) гомотопны.

**31.6** Эта группа тривиальна, так как описанное факторпространство гомеоморфно кругу  $D^2$ .

**31.7** На двуточечном пространстве существуют (с точностью до гомеоморфизма) ровно три топологические структуры: тривиальная, дискретная и топология, в которой открыта только одна точка из двух. Первый случай тривиален; дискретное пространство не является линейно связным, поэтому следует рассмотреть случай, когда  $\Omega_X = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ . Пусть  $u$  – петля в точке  $a$ . Формула

$$h(s, t) = \begin{cases} u(s) & \text{при } t = 0, \\ a & \text{при } t \in (0; 1] \end{cases}$$

определяет гомотопию между  $u$  и постоянной петлей. Действительно, непрерывность  $h$  следует из того, что множество  $h^{-1}(a) = (u^{-1}(a) \times I) \cup (I \times (0; 1])$  открыто в квадрате  $I \times I$ .

**31.9** Воспользуйтесь теоремой 31.H, тем, что  $\mathbb{R}^n \setminus 0 \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ , и теоремой 31.G.

**31.10** Дискретное пространство односвязно, тогда оно одноточечно. Антидискретное пространство,  $\mathbb{R}^n$ , выпуклое множество, звездное множество односвязны. Сфера  $S^n$  односвязна, тогда  $n \geq 2$ . Пространство  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  односвязно, тогда  $n \geq 3$ .

**31.11** Пусть  $X = U \cup V$ , где  $U$  и  $V$  – открытые множества, причем оба они односвязны, а их пересечение  $U \cap V$  линейно связно. Заметим, что, поскольку пространство  $X$  линейно связно, то  $U \cap V \neq \emptyset$ . Рассмотрим петлю  $u$ , для определенности пусть  $u(0) = u(1) = x_0 \in U$ . В силу 31.G.3, найдется последовательность точек  $a_1, \dots, a_N \in I$ , где  $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$ , такая что для всякого  $i$  образ  $u([a_i; a_{i+1}])$  содержится в одном из множеств  $U$  или  $V$ . При этом (за счет укрупнения отрезков) мы вправе считать, что если  $u([a_{k-1}; a_k]) \not\subset U$  (или  $V$ ), то  $u([a_k; a_{k+1}]) \subset U$  (соответственно,  $V$ ), таким образом,  $u(a_k) \in U \cap V$  при всех  $k = 1, 2, \dots, N-1$ . Рассмотрим отрезок  $[a_k; a_{k+1}]$ , такой что  $u([a_k; a_{k+1}]) \subset V$ . Точки  $u(a_k)$  и  $u(a_{k+1})$  можно соединить путем  $v_k : [a_k; a_{k+1}] \rightarrow U \cap V$ . Поскольку множество  $V$  односвязно, то существует гомотопия  $h_k : [a_k; a_{k+1}] \times I \rightarrow V$ , соединяющая  $u|_{[a_k; a_{k+1}]}$  и  $v_k$ , следовательно, петля  $u$  гомотопна петле  $v : I \rightarrow U$ . Так как множество  $U$  также односвязно, то  $v$  гомотопна нулю, таким образом, пространство  $X$  является односвязным.

**31.12** В действительности, в настоящий момент эту задачу полностью решить невозможно, так как у нас до сих пор не было ни одного примера не односвязного пространства. В дальнейшем будет доказано, что таким пространством является, к примеру, окружность. Пусть

$$U = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\} \cup \{(1, 0)\}, \quad V = \{(x, y) \in S^1 \mid y \leq 0\}.$$

Каждое из этих множеств гомеоморфно промежутку, значит, оно односвязно, их пересечением является точка – линейно связное множество, однако пространство  $U \cup V = S^1$  односвязным не является.

**31.13** Рассмотрим произвольную петлю  $s : I \rightarrow U$ . Так как пространство  $U \cup V$  односвязно, то эта петля гомотопна нулю в  $U \cup V$ , значит, существует гомотопия  $H : I \times I \rightarrow U \cup V$  между путем  $s$  и постоянным путем. Разобьем единичный квадрат  $I \times I$  отрезками, параллельными его на сторонам, на мелкие квадраты  $K_n$  так, чтобы образ каждого из этих квадратов содержался бы целиком в одном из открытых множеств  $U$  или  $V$ . Рассмотрим объединение  $K$  квадратов разбиения, образ каждого из которых содержится в множестве  $V$ . Пусть  $L$  – это контур, состоящий из границ квадратов множества  $K$ , охватывающий некоторую часть этого множества. Ясно, что  $L \subset U \cap V \subset U$ , значит, гомотопию  $H$  можно продолжить с контура  $L$  до ограниченного им множества так, чтобы его образ содержался в  $U$ . Рассуждая подобным образом далее, получим гомотопию  $H' : I \times I \rightarrow U$ .

**32.1** Нетрудно описать семейство петель  $a_t$ , составляющее свободную гомотопию между петлей  $a$  и петлей, представляющей элемент  $T_s(\alpha)$ . Именно, петля  $a_t$  начинается в точке  $s(t)$ , далее за время  $\frac{t}{3}$  она доходит до точки  $x_0 = s(0)$ , затем за время  $1 - \frac{2t}{3}$  мы пробегаем по пути  $a$  и, наконец, вновь за время  $\frac{t}{3}$  мы возвращаемся в точку  $s(t)$ . В таком случае петля  $a_0$  совпадает с исходной петлей  $a$ . Петля  $a_1$  задана формулами

$$a_1(\tau) = \begin{cases} s(1 - 3\tau), & \text{если } \tau \in [0; \frac{1}{3}], \\ a(3\tau - 1), & \text{если } \tau \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \\ s(3\tau - 2), & \text{если } \tau \in [\frac{2}{3}; 1], \end{cases}$$

и, следовательно, ее гомотопический класс совпадает с классом петли  $\sigma^{-1}\alpha\sigma$ . Для полноты рассуждения приведем формулу для описанной выше гомотопии:

$$H(\tau, t) = \begin{cases} s(t - 3\tau), & \text{если } \tau \in [0; \frac{t}{3}], \\ a(\frac{3\tau - t}{3 - 2t}), & \text{если } \tau \in [\frac{t}{3}; \frac{3-t}{3}], \\ s(3\tau + t - 3), & \text{если } \tau \in [\frac{3-t}{3}; 1]. \end{cases}$$

**32.2** Рассмотрите гомотопию, определенную формулой

$$H'(\tau, t) = \begin{cases} s(1 - 3\tau), & \text{если } \tau \in [0; \frac{1-t}{3}], \\ H(\frac{3\tau + t - 1}{2t + 1}, t), & \text{если } \tau \in [\frac{1-t}{3}; \frac{t+2}{3}], \\ s(3\tau - 2), & \text{если } \tau \in [\frac{t+2}{3}; 1], \end{cases}$$

и убедитесь в том, что  $H'(\tau, 1) = b(\tau)$ , а соответствие  $\tau \mapsto H'(\tau, 0)$  определяет путь из гомотопического класса  $[s^{-1}\alpha s]$ .

**32.1x** Прямое следствие утверждения 32.Bx.

**33.1** Если  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$  — гомеоморфизм, то  $p$  гомеоморфно отображает  $V_\alpha \cap p^{-1}(U')$  на  $U'$ .

**33.E** Убедитесь в том, что произведение правильно накрытых окрестностей точек  $b \in B$  и  $b' \in B'$  является правильно накрытой окрестностью точки  $(b, b') \in B \times B'$ .

**33.2** См. доказательство утверждения 33.F; накрытия  $p$  и  $q$  называются изоморфными.

**33.3** Следствие 33.H и 33.E в силу того, что  $\mathbb{C} \setminus 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ , и  $p' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto nx$  есть тривиальное накрытие. Нарисуйте также правильно накрытую окрестность какой-либо точки  $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ .

**33.4** Рассмотрим два следующих разбиения прямоугольника  $K = [0; 2] \times [0; 1]$ . Разбиение  $R$  состоит из двуточечных множеств  $\{(0, y), (2, y) |$

$y \in [0; 1]$ }, все остальные его элементы одноточечны. Разбиение  $R'$  состоит из двуточечных множеств  $\{(x, y), (x + 1, 1 - y) \mid x \in (0; 1), y \in [0; 1]\}$  и трехточечных множеств  $\{(0, y), (1, 1 - y), (2, y) \mid x \in (0; 1), y \in [0; 1]\}$ . Поскольку каждый элемент первого разбиения содержится в некотором элементе второго разбиения, то определено факторотображение  $p : K/R \rightarrow K/R'$ , которое и является накрытием ленты Мёбиуса цилиндром. Можно было поступить проще. Введем отношение эквивалентности на  $S^1 \times I : (z, t) \sim (-z, 1 - t)$ . Убедитесь, что факторпространство по этому отношению гомеоморфно ленте Мёбиуса, а отображение факторизации есть накрытие.

**33.5** Решение аналогично решению предыдущей задачи. Рассмотрите два разбиения прямоугольника  $K = [0; 3] \times [0; 1]$ . Двуточечными элементами первого из них являются пары  $\{(0, y), (3, 1 - y) \mid y \in [0; 1]\}$ , а четырехточечными элементами второго – четверки  $\{(0, y), (1, 1 - y), (2, y), (3, 1 - y) \mid x \in (0; 1), y \in [0; 1]\}$ .

**33.6** Модифицируйте решение задачи 33.4, включив в разбиение  $R$  четверку вершин прямоугольника  $K$  и пары  $\{(x, 0), (x, 1) \mid x \in (0; 2)\}$ . Другой подход к построению того же самого накрытия состоит во введении в  $S^1 \times S^1$  отношения эквивалентности:  $(z, w) \sim (-z, \bar{w})$  (см. решение задачи 33.4).

**33.7** Существуют стандартные накрытия  $\mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  и  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ , композиции которых с накрытием, построение которого намечено в решении предыдущей задачи, являются накрытиями бутылки Клейна цилиндром и плоскостью. Нетривиальное накрытие бутылки Клейна бутылкой Клейна получится, если модифицировать решение задачи 33.5. Приведем также более геометричное описание искомого накрытия. Пусть  $q : M \rightarrow M$  – это накрытие ленты Мёбиуса лентой Мёбиуса. Рассмотрим две копии  $M_1$  и  $M_2$  ленты Мёбиуса. Пусть  $q_1 : M_1 \rightarrow M_1$  и  $q_2 : M_2 \rightarrow M_2$  – две копии отображения  $q$ . Мы можем склеить  $M_1$  и  $M_2$  по их общей границе, получив в результате бутылку Клейна. Ясно, что в результате мы построим накрытие бутылки Клейна бутылкой Клейна.

**33.8** Прообразы точек имеют вид  $\{(x + k, \frac{1}{2} + (-1)^{k-1}(\frac{1}{2} - y) + l) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ .

**33.9** Мы уже имеем накрытия  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  и  $S^1 \times S^1 \rightarrow K$ , где  $K$  – бутылка Клейна, таким образом, имеем накрытия сферы с  $k$  пленками сферой с  $k - 1$  ручками при  $k = 1, 2$ . Докажем, что подобное накрытие существует при любом  $k$ . Пусть  $S_1$  и  $S_2$  – два экземпляра сферы с  $k$  дырами. Обозначим через  $S$ , основную, так сказать, сферу с  $k$  дырами и рассмотрим отображение  $p' : S_1 \sqcup S_2 \rightarrow S$ . Теперь заклеим имеющиеся на  $S$  дыры пленками (т. е. лентами Мёбиуса), а пары имеющихся на  $S_1$

и, соответственно,  $S_2$  дыр цилиндрами  $S^1 \times I$ . В результате мы получим  $K$  – сферу с  $k$  пленками, а  $S_1 \sqcup S_2$  с приклеенными  $k$  цилиндрами гомеоморфно сфере  $M$  с  $k - 1$  ручками. Поскольку существует накрытие ленты Мёбиуса цилиндром, то  $p'$  продолжается до двулистного накрытия  $p : M \rightarrow K$ .

**33.10** В действительности будет доказано, что всякий локальный гомеоморфизм является открытым отображением, а, как следует из 33.11, всякое накрытие есть локальный гомеоморфизм. Итак, пусть множество  $V$  открыто в  $X$ ,  $V' = p(V)$ . Рассмотрим точку  $b = p(x) \in V'$ , где  $x \in V$ . По определению локального гомеоморфизма, найдется такая окрестность  $U$  точки  $x$ , что  $p(U)$  является открытым множеством и отображение  $p : U \rightarrow p(U)$  есть гомеоморфизм. Значит, множество  $p(U \cap V)$  открыто в  $V'$ , таким образом, оно открыто в  $B$ , следовательно, оно является лежащей в  $p(V)$  окрестностью точки  $b$ . Таким образом,  $p(U)$  – открытое множество.

**33.11** Если  $x \in X$ ,  $U$  – правильно накрытая окрестность точки  $b = p(x)$ ,  $p^{-1}(U) = \bigcup V_\alpha$ , то найдется множество  $V_\alpha$ , которое содержит точку  $x$ . В силу определения накрытия,  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$  есть гомеоморфизм.

**33.12** Да, существуют; см., к примеру, 33.К.

**33.13** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  – локальный гомеоморфизм,  $G$  – открытое подмножество пространства  $X$  и  $x \in G$ . Предположим, что  $U$  такая окрестность точки  $x$  (в  $X$ ), что множество  $f(U)$  открыто в  $Y$  и сужение  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  является гомеоморфизмом. Если  $V = W \cap U$ , то множество  $f(W)$  открыто в  $f(U)$ , значит, оно открыто в  $Y$ . Ясно, что  $f|_W : W \rightarrow f(W)$  – гомеоморфизм.

**33.14** Только для всей прямой. Покажем, что если  $A$  – собственное подмножество  $\mathbb{R}$ , то  $p|_A : A \rightarrow S^1$  не является накрытием. Действительно, у множества  $A$  есть граничная точка  $x_0$ , пусть  $b_0 = p(x_0)$ . Нетрудно видеть, что  $b_0$  не обладает правильно накрытой (для отображения  $p|_A$ ) окрестностью.

**33.15** См., к примеру, 33.Н.

**33.16** К примеру, число листов накрытия из задачи 33.І равно  $pq$ . Во многих примерах число листов бесконечно (счетно).

**33.17** Все натуральные четные числа и только они. Первое утверждение очевидно, а аккуратно доказать второе в настоящее время в действительности невозможно. В приведенном далее рассуждении мы будем использовать методы и факты, изложенные в последующих параграфах (ср. 39.3). Рассмотрим гомоморфизм  $p_* : \pi_1(S^1 \times I) \rightarrow \pi_1(M)$ , который есть мономорфизм. Известно, что  $\pi_1(S^1 \times I) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(M)$ , при

этом образующая группы  $\pi_1(S^1 \times I)$  переходит в  $2k$ -кратную образующую группы  $\pi_1(M)$ . Следовательно, в силу 39.G (или 39.H), накрытие является четнолистным.

**33.18** Все нечетные натуральные числа (ср. 33.5) и только их (см. 39.4).

**33.19** Все четные натуральные числа (ср. 33.6) и только их (см. 39.5).

**33.20** Все натуральные числа (ср. 33.7).

**33.21** Рассмотрим накрытие  $T_1 = S^1 \times S^1 \rightarrow T_2 = S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^d, w)$ . Обозначим через  $S_2$  поверхность, получающуюся из тора  $T_2$  после того, как из него удалили  $p - 1$  дыр. Прообразом  $S_2$  при указанном накрытии является поверхность  $S_1$ , гомеоморфная тору с  $d(p - 1)$  дырами. Если каждую из дыр (на  $S_1$  и  $S_2$ ) заклеить ручкой, то мы подклеим  $p - 1$  ручек к  $S_2$ , в результате чего получим поверхность  $M_2$  – сферу с  $p$  ручками, и  $d(p - 1)$  ручек – к  $S_1$ , получив поверхность  $M_1$  – сферу с  $d(p - 1) + 1$  ручками. Ясно, что накрытие  $S_1 \rightarrow S_2$  продолжается до  $d$ -листного накрытия  $M_1 \rightarrow M_2$ .

**33.22** Рассмотрим произвольную точку  $z \in Z$ , пусть  $q^{-1}(z) = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$ . Если  $V$  – окрестность точки  $z$ , правильно накрытая относительно проекции  $q$ , а  $W_k$  – окрестности точек  $y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ , правильно накрытые относительно проекции  $p$ , то  $U = \bigcap_{k=1}^d q(W_k \cap q^{-1}(V))$  – окрестность точки  $z$ , правильно накрытая при проекции  $q \circ p$ . Значит,  $q \circ p : X \rightarrow Z$  – накрытие.

**33.23** Пусть  $Z$  есть объединение бесконечного множества окружностей, заданных уравнениями  $x^2 + y^2 = \frac{2x}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $Y$  – объединение оси ординат и “дважды” бесконечного семейства  $x^2 + (y - k)^2 = \frac{2x}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Накрытие  $q : Y \rightarrow Z$  устроено следующим образом: ось ординат “наматывается” на внешнюю окружность пространства  $Z$ , а сужения  $q$  на другие окружности задаются параллельными переносами. Постройте накрытие  $p : X \rightarrow Y$ , композиция которого с  $q$  не будет накрытием. При этом накрытие  $p$  может быть всего лишь двулистным.

**33.24** 1) Заметим, что топология в слое (индуцированная из  $X$ ) дискретна. Значит, если пространство  $X$  компактно, то слой  $F = p^{-1}(b)$  замкнут в  $X$  и, следовательно, компактен. Поэтому множество  $F$  конечно, таким образом накрытие конечнолистно.

2) Так как пространство  $B$  компактно и хаусдорфово, то оно регулярно, значит у каждой точки имеется окрестность  $U_x$ , такая что ее компактное замыкание  $\text{Cl } U_x$  лежит в некоторой правильно накрытой окрестности.

В силу компактности базы,  $B = \cup U_{x_i}$ ,  $X = \cup p^{-1}(\text{Cl } U_{x_i})$ . Так как накрытие конечнолистно, то тем самым  $X$  покрывается конечным числом компактных множеств, значит оно само компактно.

**33.25** Пусть  $U \cap V = G_0 \cup G_1$ , где  $G_0$  и  $G_1$  – открытые подмножества. Рассмотрим произведение  $X \times \mathbb{Z}$  и его подмножество

$$Y = \{(x, k) \mid x \in U, k \text{ четно}\} \cup \{(x, k) \mid x \in V, k \text{ нечетно}\},$$

являющееся несвязным объединением счетного числа экземпляров множеств  $U$  и  $V$ . Введем в  $Y$  отношение

$$\begin{aligned} (x, k) &\sim (x, k+1), & \text{если } x \in G_1, k \text{ четно,} \\ (x, k) &\sim (x, k-1), & \text{если } x \in G_0, k \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

Рассмотрим разбиение  $Y$  на пары эквивалентных друг другу точек и на одноточечные подмножества из  $(Y \setminus (U \cap V)) \times \mathbb{Z}$ . Обозначим через  $Z$  факторпространство по построенному разбиению. Пусть  $p : Z \rightarrow X$  – это факторизация отображения, являющегося сужением на  $Y$  стандартной проекции  $X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$ . Убедитесь, что  $p : Z \rightarrow X$  является бесконечнолистным накрытием. Примените описанную конструкцию к окружности  $S^1$ , являющейся объединением двух открытых дуг с несвязным пересечением; что за накрытие в результате вы получите?

**34.1** По условию  $X = B \times F$ , где  $F$  – дискретное пространство, а  $p = \text{pr}_B$ . Пусть  $y_0 \in F$  – вторая координата точки  $x_0$ . Соответствие  $a \mapsto (f(a), y_0)$  определяет непрерывное поднятие  $\tilde{f} : A \rightarrow X$  отображения  $f$ .

**34.2** Пусть  $x_0 = (b_0, y_0) \in B \times F = X$ . Рассмотрим отображение  $g = \text{pr}_F \circ \tilde{f} : A \rightarrow F$ . Поскольку множество  $A$  связно, а топологическая структура в  $F$  дискретна, то  $g$  – постоянное отображение. Значит,  $\tilde{f}(a) = (f(a), y_0)$ , следовательно, поднятие единственно.

**34.3** Рассмотрим множество совпадения  $G = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$  отображений  $f$  и  $g$ , по условию  $G \neq \emptyset$ . Для всякой точки  $a \in A$  выберем связную окрестность  $V_a \subset \varphi^{-1}(U_b)$ , где  $U_b$  – некоторая правильно накрытая окрестность точки  $b = \varphi(a)$ . Если  $V_a \cap G \neq \emptyset$ , то  $V_a \subset G$  в силу 34.2. В частности, если  $a \in G$ , то  $V_a \subset G$ , следовательно множество  $G$  открыто. Точно так же, если  $a \notin G$ , то  $V_a \cap G = \emptyset$ , т. е.  $V_a \subset A \setminus G$ , значит, и множество  $A \setminus G$  открыто. По условию  $A$  связно и  $G \neq \emptyset$ , откуда следует, что  $A = G$ .

**34.5** Покажите, что если  $b_0 = -1$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ , то поднятия пути  $u : t \mapsto e^{3\pi i t}$  не существует.



**34.6** Имеем:  $\tilde{u}(t) = \ln(2 - t)$ ,  $\tilde{v}(t) = \ln(1 + t) + 2\pi it$ ,  $\widetilde{uv} = \tilde{u}\tilde{v}$ , а  $\widetilde{vu} = \tilde{v}\tilde{u}$ , где  $\tilde{u} = \ln(2 - t) + 2\pi i$ .

**34.7** Если накрытие нетривиально и при этом накрывающее пространство линейно связно, то существует путь  $s$ , соединяющий различные точки  $x_0, x_1 \in p^{-1}(b_0)$ . В силу утверждения 34.E петля  $p \circ s$  не гомотопна нулю, значит, пространство  $B$  не односвязно.

**34.8** Это следует из 34.7.

**34.9** К примеру, пространство  $\mathbb{R}P^2$  не односвязно.

**35.1** Это класс  $\alpha$ . Действительно, путь  $\tilde{s}(t) = t^2$ , накрывающий данный путь, заканчивается в точке  $1 \in \mathbb{R}$ , значит, он гомотопен пути  $s_1$ .

**35.2** Если  $[s] = \alpha^n$ , то  $s \sim s_n$ , значит, пути  $\tilde{s}$  и  $\tilde{s}_n$  оканчиваются в одной и той же точке.

**35.3** Универсальным накрывающим пространством для  $n$ -мерного тора является пространство  $\mathbb{R}^n$ , накрытие  $p$  определяется формулой  $p(x_1, \dots, x_n) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$ . Отображение  $\deg : \pi_1((S^1)^n, (1, 1, \dots, 1)) \rightarrow \mathbb{Z}^n$  определяется следующим образом. Если  $u$  – петля на торе и  $\tilde{u}$  – накрывающий ее путь, начинающийся в начале координат, то  $\deg([u]) = \tilde{u}(1) \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Докажите, что это отображение определено корректно и является изоморфизмом.

**35.4** Это предположение использовалось там, где мы использовали односвязность  $n$ -мерной сферы, другими словами, накрытие  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^2$  является универсальным лишь при  $n \geq 2$ .

**31.7** Рассмотрите три случая, именно, когда в пространстве  $X$ : 1) нет открытых одноточечных множеств; 2) имеется единственное открытое одноточечное множество; 3) существуют два открытых одноточечных множества.

**35.7** К примеру, постройте бесконечно-листное накрытие (в узком смысле) пространства  $X$  (см. 7.V).

**35.8** Покажем, что  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ . Пространством, накрывающим  $X$ , является множество  $\mathbb{Z}$  с топологией, базой которой являются одноточечные множества  $\{2k\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , и трехточечные множества  $\{2k, 2k+1, 2k+2\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . При этом  $p^{-1}(a) = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Как и в случае вычисления фундаментальной группы окружности, достаточно показать, что пространство, накрывающее  $X$ , является односвязным. Это следует, к примеру, из того, что взяв  $U = \{0, 1, 2\}$  и  $V = \{2, 3, 4\}$ , получим, что  $U$  и  $V$  открыты в  $U \cup V$ , односвязны и их пересечение линейно связно. Следовательно, их объединение  $U \cup V$  также односвязно (см. 31.11). Приведем также другое рассуждение. Положим  $J_n = \{0, 1, \dots, 2n\}$ . Определим отображение

$H_n : J_n \times I \rightarrow J_n$  посредством формул:

$$H_n(x, t) = x \text{ при } x \in J_{n-1}, \quad H_n(2n-1, t) = \begin{cases} 2n-1 & \text{при } t = 0, \\ 2n-2 & \text{при } t \in (0; 1], \end{cases}$$

$$H_n(2n, t) = \begin{cases} 2n & \text{при } t \in [0; \frac{1}{3}), \\ 2n-1 & \text{при } t \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], \\ 2n-2 & \text{при } t \in (\frac{2}{3}; 1]. \end{cases}$$

Пусть  $u$  – петля в  $0$ , образ которой содержится в множестве  $J_n$ . Формула  $h_n(s, t) = H_n(u(s), t)$  определяет гомотопию между  $u$  и петлей, образ которой лежит в множестве  $J_{n-1}$ . Рассуждая по индукции, получим, что петля  $u$  гомотопна постоянной петле.

**35.9** 1) Из результатов задач 31.7, 35.6, and 35.7 следует, что  $n_0 = 4$ .  
2) Из вычисления, проведенного при решении задачи 35.8, следует, что группа  $\mathbb{Z}$  реализуется как фундаментальная группа четырехточечного пространства. Покажите, что никакая другая нетривиальная группа не может быть фундаментальной группой такого пространства.

**35.10** 1) Рассмотрим семиточечное пространство

$$Z = \{a, b, c, d, e, f, g\},$$

топология в котором определена базой

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, e\}, \{a, b, f\}, \{b, c, g\}\}.$$

Для того, чтобы убедиться, что  $Z$  не является односвязным, достаточно построить его универсальное накрытие в узком смысле, которое в нашем случае строится так же, как универсальное накрытие букета двух окружностей. Вместо “креста”  $K$  рассмотрите пространство  $\tilde{K} = \{a, b_+, b_-, c_+, c_-, d, e, f, g\}$ . 2) В силу 35.9, необходимо взять по крайней мере пять точек. Рассмотрим пространство  $Y = \{a, b, c, d, e\}$ , топология в котором определена базой

$$\{\{a\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}\}.$$

Убедитесь, что фундаментальной группой пространства  $Y$  является свободная группа с двумя образующими.

**35.12** Рассмотрите топологическое пространство

$$X = \{a_0, b_0, c_0, a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1, a_2, b_2, c_2, d_2\}$$

топология в котором определена базой

$$\begin{aligned} \{a_0\}, \quad \{a_0, b_0, c_1\}, \quad \{a_0, b_0, c'_1\}, \quad \{a_0, b_0, c_0, a_1, b'_1, c'_1, a_2\}, \\ \{b_0\}, \quad \{a_0, b_1, c_0\}, \quad \{a_0, b'_1, c_0\}, \quad \{a_0, b_0, c_0, a'_1, b_1, c'_1, b_2\}, \\ \{c_0\}, \quad \{a_1, b_0, c_0\}, \quad \{a'_1, b_0, c_0\}, \quad \{a_0, b_0, c_0, a'_1, b'_1, c_1, c_2\}, \\ \{a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, d_2\}. \end{aligned}$$

**36.1** Заметим прежде всего, что, поскольку фундаментальная группа проколотой плоскости коммутативна, то оператор переноса вдоль петли является тождественным гомоморфизмом. Следовательно, если два отображения  $f, g : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0$  гомотопны, то они индуцируют один и тот же гомоморфизм фундаментальных групп. Пусть  $f$  – отображение  $z \mapsto z^3$ . Образующей группы  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus 0, 1)$  является класс  $\alpha$  петли  $s(t) = e^{2\pi it}$ . образом  $f_*(\alpha)$  является класс петли  $f_\#(u) = f \circ u$ , таким образом,  $f_\#(u)(t) = e^{6\pi it}$ , значит,  $f_*(\alpha) = \alpha^3 \neq \alpha$ . Следовательно,  $f_* \neq \text{id}_{\pi_1(\mathbb{C} \setminus 0, 1)}$ , откуда и следует, что отображение  $f$  не гомотопно тождественному.

**36.2** Обозначим через  $i$  включение  $X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Если отображение  $f$  продолжается до  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ , то  $f = F \circ i$ , значит,  $f_* = F_* \circ i_*$ . Однако, поскольку пространство  $\mathbb{R}^n$  односвязно, то гомоморфизм  $F_*$  тривиален, следовательно, тривиален и гомоморфизм  $f_*$ .

**36.3.1** Обозначим через  $\varphi$  гомеоморфизм открытого множества  $U \subset X$  на  $S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\}$ . Если  $X = U$ , то утверждение очевидно, так как группа  $\pi_1(S^1 \times S^1 \setminus \{(1, 1)\})$  изоморфна свободной группе с двумя образующими. В противном случае определим отображение  $f : X \rightarrow S^1 \times S^1$ , положив

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in U, \\ (1, 1) & \text{при } x \notin U. \end{cases}$$

Проверьте, что  $f$  – непрерывное отображение. Теперь возьмем точку  $x_0 \in U$  и рассмотрим гомоморфизм

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1, f(x_0)).$$

Нетрудно видеть, что  $f_*$  – эпиморфизм.

**36.4** Пусть  $f(z) = \text{diag}\{z, 1, 1, \dots, 1\}$  для всякой точки  $z \in S^1$ , а  $g(A) = \frac{\det(A)}{|\det(A)|}$  для всякой матрицы  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ . Тем самым определены отображения  $f : S^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  и  $g : GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow S^1$ , композиция  $g \circ f$  которых является тождественным отображением. Так как композиция  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_{\pi_1(S^1)}$ , то  $g_*$  – эпиморфизм, следовательно, фундаментальная группа пространства  $GL(n, \mathbb{C})$  бесконечна.

**36.1x** Это в точности утверждение 36.Dx.

**36.2x** В силу 36.1x достаточно проверить, что если  $a \in \text{Int } D^2$  и  $i$  – это стандартное вложение стандартной окружности  $S^1$  в  $\mathbb{R}^2 \setminus a$ , то круговая петля  $i$  определяет нетривиальный элемент в группе  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus a)$ . Действительно, формула  $h(z, t) = z + ta$  определяет гомотопию между  $i$  и круговой петлей, класс которой очевидно порождает фундаментальную группу проколотой плоскости  $\mathbb{R}^2 \setminus a$ .

**36.3x** Возьмем произвольную точку  $a \in \mathbb{R}^2$ , пусть  $R > |a| + m$ . Рассмотрим круговую петлю, определенную формулой  $\varphi(z) = f(Rz)$ , где  $z \in S^1$ , и стандартную петлю  $i_R$ , где  $i_R(z) = Rz$ . Если  $h(z, t) = t\varphi(z) + (1-t)i_R(z)$ , то

$$|h(z, t)| = |Rz + t(f(Rz) - Rz)| \geq R - |f(Rz) - rz| \geq R - m > |a|,$$

значит, отображение  $h$  определяет гомотопию в  $\mathbb{R}^2 \setminus a$  между круговыми петлями  $\varphi$  и  $i_R$ . Так как петля  $i_R$  в  $\mathbb{R}^2 \setminus a$  не гомотопна постоянной петле, то и  $\varphi$  не гомотопна постоянной петле. В силу 36.1x,  $a = f(Rz)$ , где  $|z| < 1$ , таким образом, точка  $a$  принадлежит образу отображения  $f$ .

**36.4x.1** Проще всего было бы воспользоваться теоремой 36.1x, проверив, что соответствующая круговая петля не гомотопна в  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  постоянной петле. Конечно в этой теореме речь идет о круге, а не о квадрате, но квадрат гомеоморфен кругу, так что с топологической точки зрения нет никакой разницы между парой  $(I^2, \text{Fr } I^2)$  и парой  $(D^2, S^1)$ . Однако для того, чтобы читатель лучше осознал основную идею доказательства теоремы 36.1x, мы приведем решение данной задачи, не опирающееся на эту теорему. Предположим, что  $w(x, y) \neq 0$  при всех  $(x, y) \in I^2$ . Рассмотрим пути, идущие по сторонам квадрата, именно,

$$s_1(\tau) = (1, \tau); \quad s_2(\tau) = (1 - \tau, 1); \quad s_3(\tau) = (0, 1 - \tau); \quad s_4(\tau) = (\tau, 0).$$

Ясно, что определено произведение  $s = s_1 s_2 s_3 s_4$ , которое является петлей, гомотопной нулю в квадрате  $I^2$ . Теперь рассмотрим петлю  $w \circ s$  и покажем, что она не гомотопна нулю в проколотой плоскости  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ . Поскольку  $w(s_1(\tau)) = u(1) - v(\tau)$ , то образ пути  $w \circ s_1$  лежит в первой четверти. Его началом является точка  $u(1) - v(0) = (1, 0)$ , а концом – точка  $u(1) - v(1) = (0, 1)$ . Так как первая четверть является односвязным множеством, то путь  $w \circ s_1$  гомотопен в ней любому пути, соединяющему те же точки, к примеру, пути  $\varphi_1(t) = e^{\pi i t/2}$ . Аналогичным образом, путь  $w \circ s_2$  лежит во второй четверти и гомотопен в ней пути  $\varphi_2(t) = e^{\pi i (t+1)/2}$ . Таким образом, путь  $w \circ s$  гомотопен в  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$  пути  $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$ , который определен формулой  $\varphi(\tau) = e^{2\pi i \tau}$ . Следовательно, класс петли  $w \circ s$  является образующей фундаментальной группы  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus (1, 0))$ , в частности, эта петля не гомотопна постоянной петле. С другой стороны,

в силу 36.Г.4 петля  $w \circ s$  гомотопна постоянной петле в  $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ . Полученное противоречие доказывает то, что  $u(x) - v(y) = w(x, y) = 0$  при некоторых  $x \in I$  и  $y \in I$ , т. е., что пути  $u$  и  $v$  пересекаются.

**36.5x** К примеру, рассмотрите множества

$$F = \{(1, 1)\} \cup ([0, 1) \times 0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \times [0; \frac{2n-1}{2n}]\right)$$

$$G = \{(1, 0)\} \cup ([0, 1) \times 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \times [\frac{1}{2n+1}; 1]\right).$$

**36.6x** Нет, нельзя. Проведем доказательство от противного. Пусть  $\varepsilon = \rho(F, G) > 0$ . Из результата задачи 13.17 следует, что точки  $(0, 0), (1, 1) \in F$  можно соединить путем  $u$ , образ которого лежит в  $\varepsilon/2$ -окрестности множества  $F$ , а точки  $(0, 1), (1, 0) \in G$  – путем  $v$  с образом в  $\varepsilon/2$ -окрестности  $G$ . При этом  $u(I) \cap v(I) = \emptyset$  в силу выбора  $\varepsilon$ , что противоречит утверждению задачи 36.4x.

Теперь приведем более элементарное решение этой задачи. Из результата задачи 13.4x следует, что существует простая ломаная, соединяющая точки  $(0, 0)$  и  $(1, 1)$  и не пересекающаяся с множеством  $G$ . Рассмотрим многоугольник  $K_0 \dots K_n PQR$  (рисунок). Одна из оставшихся вершин лежит внутри этого многоугольника, а другая – вне него. Следовательно, эти точки не могут принадлежать связному множеству, не пересекающемуся с этим многоугольником.

**36.8x** Докажем, что если точки  $x$  и  $y$  соединены путем, не пересекающим множество  $u(S^1)$ , то  $\text{ind}(u, x) = \text{ind}(u, y)$ . Действительно, если такой путь  $s$  существует, то формула

$$h(z, t) = \varphi_{u, s(t)}(z) = \frac{u(z) - s(t)}{|u(z) - s(t)|}$$

определяет гомотопию между отображениями  $\varphi_{u, x}$  и  $\varphi_{u, y}$ ; далее – как в доказательстве 36.Ех. Таким образом, если  $\text{ind}(u, x) \neq \text{ind}(u, y)$ , то точки  $x$  и  $y$  нельзя соединить путем, образ которого не задевал бы множество  $u(S^1)$ .

**36.9x** Предположим для простоты, что данный круг содержит начало координат. Из формулы

$$h(z, t) = \frac{(1-t)u(z) - x}{|(1-t)u(z) - x|}$$

следует, что отображение  $\varphi_{u, x}$  гомотопно нулю, значит,  $\text{ind}(u, x) = 0$ .

**36.10x** (a)  $\text{ind}(u, x) = 1$ , если  $|x| < 1$ , и  $\text{ind}(u, x) = 0$ , если  $|x| > 1$ . (b)  $\text{ind}(u, x) = -1$ , если  $|x| < 1$ , и  $\text{ind}(u, x) = 0$ , если  $|x| > 1$ . (c)  $\{\text{ind}(u, x) \mid x \in \mathbb{R}^2 \setminus u(S^1)\} = \{0, 1, -1\}$ .

**36.11x** Лемниската разбивает плоскость на три компоненты. Индекс любой петли, образом которой является лемниската, относительно любой точки, лежащей в неограниченной компоненте, равен нулю. Для любой пары  $(k, l)$  целых чисел найдется такая петля  $u$ , что её индекс относительно точки из одной ограниченной компоненты равен  $k$ , а её индекс относительно точки, лежащей в другой ограниченной компоненте, равен  $l$ .

**36.12x** См. решение предыдущей задачи.

**36.13x** Мы вправе считать, что  $x$  – начало координат, а луч  $R$  совпадает с положительной частью оси абсцисс. Будет удобнее рассматривать петлю

$$u : I \rightarrow S^1 : t \mapsto \frac{f(e^{2\pi it})}{|f(e^{2\pi it})|}.$$

Предположим, что множество  $f^{-1}(R)$  конечно и состоит из  $n$  точек. Следовательно  $u^{-1}(1) = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , при этом  $t_0 = 0$  и  $t_n = 1$ . Петля  $u$  гомотопна произведению петель  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , каждая из которых обладает следующим свойством:  $u_i(t) = 1$  только при  $t = 0, 1$ . Докажите, что  $[u_i]$  либо равен нулю, либо является одной из образующих группы  $\pi_1(S^1)$ . Значит, если  $k_i$  – целое число – образ  $[u_i]$  при изоморфизме  $\pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $k = \text{ind}(f, x)$  – образ класса  $[u]$  при этом изоморфизме, то

$$|k| = |k_1 + k_2 + \dots + k_n| \leq |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n| \leq n,$$

так как каждое из чисел  $k_i$  – это 0 или  $\pm 1$ .

**36.14x** Примените теорему Борсука–Улама к функции, сопоставляющей каждой точке земной поверхности пару чисел  $(t, p)$ , где  $t$  есть температура в этой точке, а  $p$  – давление.

**37.1** Если  $\rho_1 : X \rightarrow A$  и  $\rho_2 : A \rightarrow B$  являются ретракциями, то и  $\rho_2 \circ \rho_1 : X \rightarrow B$  есть ретракция.

**37.2** Если  $\rho_1 : X \rightarrow A$  и  $\rho_2 : Y \rightarrow B$  являются ретракциями, то и  $\rho_1 \times \rho_2 : X \times Y \rightarrow A \times B$  есть ретракция.

**37.3** Положим  $f(x) = a$  при  $x \leq a$ ,  $f(x) = x$  при  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) = b$  при  $x \geq b$  (т. е.  $f(x) = \max\{a, \min\{x, b\}\}$ ). Тогда  $f : \mathbb{R} \rightarrow [a; b]$  – ретракция.

**37.4** Следствие 37.6, или, более привычно: если  $f(x) = x$  при всех  $x \in (a; b)$ , то из непрерывности функции  $f$  следует, что  $f(b) = b$ , таким образом, не существует непрерывной функции на  $\mathbb{R}$ , образом которой является интервал  $(a; b)$ .

**37.5** Те свойства, которые передаются от топологических пространств их подпространствам и (или) непрерывным образам. К примеру, хаусдорфовость, связность, компактность, и т. п.

**37.6** Следует из 14.4.

**37.7** Так как это пространство не является линейно связным.

**37.8** Нет, не является. Действительно, группа  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$  конечна, а группа  $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  бесконечна, следовательно, не существует эпиморфизма первой из них на вторую (так же как и не существует мономорфизма второй на первую). Значит, в силу утверждения 37.F не существует и ретракции  $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^1$ .

**37.9** Пусть  $L$  – это граничная окружность ленты Мёбиуса  $M$ . Ясно, что  $\pi_1(L) \cong \pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ . Однако (ср. 33.4) нетрудно убедиться (проверьте это!), что гомоморфизм  $i_*$ , индуцированный включением  $i : L \rightarrow M$ , переводит образующую  $\alpha \in \pi_1(L)$  в элемент  $2\beta$ , где  $\beta$  – это образующая  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ . Если бы существовала ретракция  $\rho : M \rightarrow L$ , то композиция  $\rho_* \circ i_*$  переводила бы образующую  $\alpha \in \pi_1(L)$  в элемент  $2\rho_*(\beta) \neq \alpha$ , что противоречит тому, что эта композиция является тождественным изоморфизмом фундаментальной группы  $\pi_1(L)$ .

**37.10** Пусть  $L$  – это граничная окружность ручки  $K$ . Ясно, что  $\pi_1(L) \cong \mathbb{Z}$ , а  $\pi_1(K)$  – это свободная группа с двумя образующими  $a$  и  $b$ . При этом можно проверить (сделайте это!), что гомоморфизм включения  $i_* : \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(K)$  переводит образующую  $\alpha \in \pi_1(L)$  в коммутатор  $aba^{-1}b^{-1}$ . Предположим противное: пусть существует ретракция  $\rho : K \rightarrow L$ . Тогда композиция  $\rho_* \circ i_*$  переводит образующую  $\alpha \in \pi_1(L)$  в нейтральный элемент этой группы, поскольку в силу коммутативности группы  $\mathbb{Z}$  элемент

$$\rho_* \circ i_*(\alpha) = \rho_*(aba^{-1}b^{-1}) = \rho_*(a)\rho_*(b)\rho_*(a)^{-1}\rho_*(b)^{-1}$$

является нейтральным. С другой стороны, эта композиция должна совпадать с  $\text{id}_{\pi_1(L)}$ . Противоречие.

**37.11** Утверждение очевидно, так как всякое свойство, сформулированное в топологических терминах, является топологическим. Интересно, однако, поставить такой вопрос. Пусть пространство  $X$  обладает свойством неподвижной точки и  $h : X \rightarrow Y$  – гомеоморфизм. Таким образом, мы знаем, что всякое непрерывное отображение  $f : X \rightarrow X$  имеет неподвижную точку. Как, зная это, доказать, что и произвольное непрерывное отображение  $g : Y \rightarrow Y$  имеет неподвижную точку? Покажите, что таковой будет точка  $h(x)$ , где  $x$  – неподвижная точка некоторого отображения  $X \rightarrow X$ .

**37.12** Рассмотрим непрерывную функцию  $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$  и вспомогательную функцию  $g(x) = f(x) - x$ . Так как  $g(a) = f(a) - a \geq 0$ ,

а  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ , то найдется точка  $x \in [a; b]$ , такая что  $g(x) = 0$ . Таким образом,  $f(x) = x$ , т. е.  $x$  – неподвижная точка  $f$ .

**37.13** Пусть  $\rho : X \rightarrow A$  – ретракция. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение  $f : A \rightarrow A$  и композицию  $g = \text{in} \circ f \circ \rho : X \rightarrow X$ . Пусть  $x$  – неподвижная точка отображения  $g$ , таким образом,  $x = f(\rho(x))$ . Поскольку  $\rho(x) \in A$ , то и  $x \in A$ , поэтому  $\rho(x) = x$ , значит,  $x = f(x)$ .

**37.14** Обозначим через  $\omega$  точку букета, являющуюся образом пары  $\{x_0, y_0\}$  при отображении факторизации.  $\Leftrightarrow$  Рассмотрим произвольное непрерывное отображение  $f : X \vee Y \rightarrow X \vee Y$ , пусть для определенности  $f(\omega) \in X$ . Пусть  $i : X \rightarrow X \vee Y$  – стандартное включение, а  $\rho : X \vee Y \rightarrow X$  – ретракция, переводящая все пространство  $Y$  в точку  $\omega$ . По предположению отображение  $\rho \circ f \circ i$  имеет неподвижную точку  $x \in X$ ,  $\rho(f(i(x))) = x$ , таким образом,  $\rho(f(x)) = x$ . Если  $f(x) \in Y$ , то  $\rho(f(x)) = \omega$ , значит,  $x = \omega$ . С другой стороны мы предполагали, что  $f(\omega) \in X$ , следовательно,  $f(\omega) = \omega$  – неподвижная точка отображения  $f$ . Теперь предположим, что  $f(x) \in X$ . В таком случае

$$x = (\rho \circ f \circ i)(x) = \rho(f(x)) = f(x),$$

значит,  $x$  – неподвижная точка отображения  $f$ .  $\Leftarrow$  Следует из 37.13.

**37.15** Поскольку отрезок обладает свойством неподвижной точки (см. 37.12), то, в силу 37.14, рассуждая по индукции, получаем, что всякое конечное дерево обладает этим свойством. Произвольное бесконечное дерево этим свойством обладать не обязано; пример – числовая прямая. Однако попробуйте сформулировать дополнительное условие, при выполнении которого и бесконечное дерево будет обладать свойством неподвижной точки.

**37.16** Конечно, нет; например, параллельный перенос не имеет неподвижных точек.

**37.17** Конечно, нет; например, антиподальное отображение  $x \mapsto -x$  не имеет неподвижных точек.

**37.18** Пусть  $n = 2k - 1$ . Например, отображение

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{2k-1} : x_{2k}) \mapsto (-x_2 : x_1 : \dots : -x_{2k} : x_{2k-1})$$

не имеет неподвижных точек.

**37.19** Пусть  $n = 2k - 1$ . Например, отображение

$$(z_1 : z_2 : \dots : z_{2k-1} : z_{2k}) \mapsto (-\bar{z}_2 : \bar{z}_1 : \dots : -\bar{z}_{2k} : \bar{z}_{2k-1})$$

не имеет неподвижных точек.

**38.1** Отображение  $f : [0; 1] \rightarrow \{0\}$  является гомотопической эквивалентностью; гомотопически обратным к нему отображением будет,



например, включение  $i : \{0\} \rightarrow [0; 1]$ . Композиция  $i \circ f$  гомотопна  $\text{id}_I$ , так как любые непрерывные два отображения  $I \rightarrow I$  гомотопны, а композиция  $f \circ i : \{0\} \rightarrow \{0\}$  сама является тождественным отображением. Конечно,  $f$  – не гомеоморфизм.

**38.2** Обозначим через  $\pi_0(X)$  множество компонент линейной связности пространства  $X$ , через  $\pi_0(Y)$  – множество компонент линейной связности гомотопически ему эквивалентного пространства  $Y$ . Пусть  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$  – взаимно обратные гомотопические эквивалентности. Поскольку отображение  $f$  непрерывно, то оно переводит линейно связное множество в линейно связное, следовательно, гомотопические эквивалентности  $f, g$  индуцируют отображения  $\hat{f} : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  и  $\hat{g} : \pi_0(Y) \rightarrow \pi_0(X)$ . Так как композиция  $g \circ f$  гомотопна тождественному отображению, то всякая точка  $x \in X$  лежит в той же компоненте линейной связности, что и точка  $g(f(x))$ , следовательно, композиция  $\hat{g} \circ \hat{f}$  является тождественным отображением. Аналогичным образом, тождественна и композиция  $\hat{f} \circ \hat{g}$ . Следовательно,  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  являются взаимно обратными отображениями, в частности, множества  $\pi_0(X)$  и  $\pi_0(Y)$  равномощны.

**38.3** Аналогично 38.2.

**38.4** К примеру, возьмите: точку, отрезок, букет  $n$  отрезков при  $n \geq 3$ .

**38.5** Докажем, что средняя линия  $L$  ленты Мёбиуса  $M$  (т. е. образ отрезка  $I \times \frac{1}{2}$  при факторизации квадрата  $I \times I \rightarrow M$ ) является ее строгим деформационным ретрактом. Геометрическое рассуждение очевидно: в качестве  $h_t$  можно взять сжатие с коэффициентом  $1 - t$  ленты Мёбиуса по направлению к ее средней линии. Таким образом,  $h_0$  тождественно, а  $h_1$  отображает  $M$  в  $L$ . Теперь выпишем соответствующие формулы. Поскольку  $M$  является факторпространством квадрата, вначале рассмотрим гомотопию

$$H : I \times I \times I \rightarrow I \times I : (u, v, t) \mapsto (u, (1 - t)v + \frac{t}{2}).$$

При этом  $H(u, \frac{1}{2}, t) = (u, \frac{1}{2})$  при всех  $t \in I$ . Поскольку  $(1 - t)v + \frac{t}{2} + (1 - t)(1 - v) + \frac{t}{2} = 1$ , то эта гомотопия выдерживает факторизацию, порождая гомотопию  $h : M \times I \rightarrow M$ . Имеем  $H(u, v, 0) = (u, v)$ , значит,  $h_0 = \text{id}_M$ , а  $H_1(u, v) = (u, \frac{1}{2})$ .

**38.6** Буквы  $E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, S, T, U, V, W, X, Y, Z$  гомотопически эквивалентны точке; буквы  $A, O, P, Q, R$  гомотопически эквивалентны окружности; буква  $B$  – букету из двух окружностей.

**38.7** Это можно доказать различными способами. Укажем лежащие в ручке окружности, объединение которых является ее строгим деформационным ретрактом. Для этого представим ручку как результат факторизации кольца  $\{z \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$  по следующему отношению:  $e^{i\varphi} \sim -e^{-i\varphi}$  при  $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$  и  $e^{i\varphi} \sim e^{-i\varphi}$  при  $\varphi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$ . Образом стандартной единичной окружности при факторизации по указанному отношению эквивалентности и является лежащий в ручке букет двух окружностей. Формула  $H(z, t) = (1 - t)z + t\frac{z}{|z|}$  определяет гомотопию между тождественным отображением кольца и отображением  $z \mapsto \frac{z}{|z|}$  этого кольца на его внешнюю окружность, причем  $H(z, t) = z$  при всех  $z \in S^1$  и  $t \in I$ . Факторотображение гомотопии  $H$  и является искомой гомотопией кольца.

**38.8** Следствие 38.7 и 38.1.

**38.9** Вложите каждое из этих пространств в пространство  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  так, чтобы его образ при вложении был деформационным ретрактом этого пространства. Укажем еще одно пространство, гомотопически эквивалентное указанным: объединение сферы  $S^2$  и одного ее диаметра. Его также можно вложить в  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  в качестве деформационного ретракта.

**38.10** Положим  $A = \{(z_1, z_2) \mid 4z_2 = z_1^2\} \subset \mathbb{C}^2$ . Рассмотрим отображение  $f : \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus 0) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus A : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2 + \frac{z_1^2}{4})$ . Убедитесь, что  $f$  – гомеоморфизм, а  $\mathbb{C}^2 \setminus A \simeq \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus 0) \simeq S^1$ . Более того, окружность вкладывается в  $\mathbb{C} \setminus A$  в качестве его деформационного ретракта.

**38.11** Докажем, что  $O(n)$  является деформационным ретрактом пространства  $GL(n, \mathbb{R})$ . Пусть  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$  – набор столбцов матрицы  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , каждый из которых мы будем рассматривать как элемент  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  – результат применения процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Таким образом матрица, столбцы которой образованы координатами этих векторов, является ортогональной. Векторы  $\mathbf{e}_k$  выражаются через  $\mathbf{f}_k$  посредством формул

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \lambda_{11}\mathbf{f}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \lambda_{21}\mathbf{f}_1 + \lambda_{22}\mathbf{f}_2, \\ &\dots, \\ \mathbf{e}_n &= \lambda_{n1}\mathbf{f}_1 + \lambda_{n2}\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_{nn}\mathbf{f}_n,\end{aligned}$$

где  $\lambda_{kk} > 0$  при всех  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Введем векторы

$$\mathbf{w}_k(t) = t(\lambda_{n1}\mathbf{f}_1 + \lambda_{n2}\mathbf{f}_2 + \dots + \lambda_{k-1}\mathbf{f}_{k-1}) + (t\lambda_{kk} + 1 - t)\mathbf{f}_k$$

и рассмотрим матрицу  $h(A, t)$ , столбцы которой состоят из координат этих векторов. Ясно, что соответствие  $(A, t) \mapsto h(A, t)$  определяет непрерывное отображение  $GL(n, \mathbb{R}) \times I \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ . Как нетрудно видеть,  $h(A, 0) = A$ ,  $h(A, 1) \in O(n)$ , причем  $h(B, t) = B$  для всех  $B \in O(n)$ . Таким образом, отображение  $A \mapsto h(A, 1)$  является искомой деформационной ретракцией.

**38.13** Используйте, к примеру, 19.44.

**38.14** Нам понадобится понятие цилиндра  $Z_f$  непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$ . По определению,  $Z_f$  есть пространство, получающееся в результате приклеивания обычного цилиндра  $X \times I$  к пространству  $Y$  вдоль отображения  $X \times 0 \rightarrow Y$ ,  $(x, 0) \mapsto f(x)$ . Тем самым  $Z_f$  есть результат факторизации несвязного объединения  $(X \times I) \sqcup Y$ , при которой точка  $(x, 0) \in X \times 0$  отождествляется с точкой  $f(x) \in Y$ . Будем отождествлять пространство  $X$  с  $X \times 1 \subset Z_f$ , пространство  $Y$  также естественно считать лежащим в цилиндре отображения. Имеется очевидная строгая деформационная ретракция  $p_Y : Z_f \rightarrow Y$ , при которой  $Y$  остается на месте, а точка  $(x, t) \in X \times (0, 1)$  отображается в точку  $f(x)$ . Осталось доказать, что если  $f$  является гомотопической эквивалентностью, то и пространство  $X$  является деформационным ретрактом  $Z_f$ . Пусть  $g : Y \rightarrow X$  — обратная к  $f$  гомотопическая эквивалентность. Таким образом, существует гомотопия  $H : X \times I \rightarrow X$ , такая что  $H(x, 0) = g(f(x))$  и  $H(x, 1) = x$ . Определим ретракцию  $\rho : Z_f \rightarrow X$  как фактор отображения  $(X \times I) \sqcup Y \rightarrow X$ :  $(x, t) \mapsto h(x, t)$ ,  $y \mapsto g(y)$ . Осталось доказать, что отображение  $\rho$  является деформационной ретракцией, т. е. проверить, что  $\text{in}_X \circ \rho$  гомотопно  $\text{id}_{Z_f}$ . Эта гомотопность следует из следующей цепочки, где значком  $\sim$  обозначена гомотопность, которая в каждом случае следует из гомотопности композиции гомотопных отображений:

$$\begin{aligned} \text{in}_X \circ \rho &= \bar{\rho} = \bar{\rho} \circ \text{id}_{Z_f} \sim \bar{\rho} \circ p_Y = g \circ p_Y = \text{id}_{Z_f} \circ (g \circ p_Y) \sim \\ &\sim p_Y \circ (g \circ p_Y) = (p_Y \circ g) \circ p_Y = (f \circ g) \circ p_Y \sim \text{id}_Y \circ p_Y = p_Y \sim \text{id}_{Z_f}. \end{aligned}$$

**38.15** Достаточно воспользоваться прямолинейными гомотопиями.

**38.16** Пусть  $h : X \times I \rightarrow X$  — гомотопия между  $\text{id}_X$  и постоянным отображением  $x \mapsto x_0$ . Формула  $u_x(t) = h(x, t)$  задает путь, соединяющий (произвольную) точку  $x$  пространства  $X$  с точкой  $x_0$ . Следовательно, пространство  $X$  линейно связно.

**38.17** Утверждения (a)–(d) очевидно попарно эквивалентны. Докажем, что они также эквивалентны утверждениям (e) и (f).

(a)  $\implies$  (e): Пусть  $h : X \times I \rightarrow X$  — гомотопия между  $\text{id}_X$  и постоянным отображением. Для любого непрерывного отображения  $f : Y \rightarrow X$  формула  $H = h \circ (f \times \text{id}_I)$  (или по-другому:  $H(y, t) = h(f(y), t)$ ) определяет

гомотопию между  $f$  и постоянным отображением.

(e)  $\implies$  (a): Возьмите  $Y = X$  и  $f = \text{id}_X$ .

(a)  $\implies$  (f): Пусть  $h$  – то же, что и выше. Формула  $H = f \circ h$  определяет гомотопию между отображением  $f : X \rightarrow Y$  и постоянным отображением.

(f)  $\implies$  (a): Возьмите  $Y = X$  и  $f = \text{id}_X$ .

**38.18** Утверждение (b) верно; утверждение (a) верно, тогда пространство  $Y$  линейно связно.

**38.19** Каждое из пространств (a)–(e) стягиваемо.

**38.20**  $\Leftarrow$  Пусть  $h$  – гомотопия между  $\text{id}_X$  и постоянным отображением  $x \mapsto x_0$ , а  $g$  – между  $\text{id}_Y$  и постоянным отображением  $y \mapsto y_0$ . Формула  $H(x, y, t) = (h(x, t), g(y, t))$  определяет гомотопию между  $\text{id}_{X \times Y}$  и отображением  $(x, y) \mapsto (x_0, y_0)$ .

$\Rightarrow$  Для всякой гомотопии  $H$  между  $\text{id}_{X \times Y}$  и постоянным отображением  $(x, y) \mapsto (x_0, y_0)$  формула  $h(x, t) = \text{pr}_X(H(x, y_0, t))$  определяет гомотопию между  $\text{id}_X$  и постоянным отображением  $x \mapsto x_0$ . Стягиваемость  $Y$  доказывается аналогичным образом.

**38.21** (a) Поскольку  $X = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1 \cong (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{R}^1 \simeq S^1$ , то  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ .

(b) Ясно, что  $X = \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^{N-n} \setminus 0) \times \mathbb{R}^n \simeq S^{N-n-1}$ . Следовательно, если  $N = n + 1$ , то  $X \simeq S^0$ ; если  $N = n + 2$ , то  $X \simeq S^1$ , поэтому  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ ; если  $N > n + 2$ , то  $X$  односвязно.

(c) Так как  $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$ , то  $\pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

(d) Если  $N = n + 1$ , то  $X = \mathbb{R}^N \setminus S^{N-1}$  состоит из двух компонент, одна из которых является открытым  $N$ -мерным шаром, и, значит, стягиваема, а вторая – гомотопически эквивалентна сфере  $S^{N-1}$ . Если  $N > n + 1$ , то  $X$  гомотопически эквивалентно букету  $S^{N-1} \vee S^{N-n-1}$ . Следовательно, при  $N = 2$  и  $n = 0$   $\pi_1(X)$  есть свободная группа с двумя образующими; при  $N > 2$  или  $N = n + 2$  мы получим группу  $\mathbb{Z}$ ; во всех оставшихся случаях пространство  $X$  односвязно.

(e) Деформационным ретрактом пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  является сфера с двумя отождествленными точками, которая, в силу 38.9, гомотопически эквивалентна букету  $X = S^1 \vee S^2$ . Универсальным накрывающим пространства  $X$  является “гирлянда”, представляющая собой прямую  $\mathbb{R}^1$ , к которой во всех ее целых точках приклеены двумерные сферы. Таким образом,  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ .

(f) Если  $N = k + 1$ , то  $S^N \setminus S^{N-1}$  гомеоморфно объединению двух открытых  $N$ -мерных шаров, так что фундаментальная группа каждой из двух его компонент тривиальна. Конечно, этот факт следует из общего результата:  $S^N \setminus S^k \cong S^{N-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$ , поэтому фундаментальная группа  $\pi_1(S^N \setminus S^k) \cong \mathbb{Z}$  при  $N = k + 2$  и является тривиальной в остальных случаях.

(g) Можно показать, что  $\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$ , но проще показать, что это пространство деформационно ретрагируется на  $S^1$ . В обоих случаях ясно, что  $\pi_1(\mathbb{R}P^3 \setminus \mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ .

(h) Так как ручка гомотопически эквивалентна букету двух окружностей, то ее фундаментальной группой является свободная группа с двумя образующими.

(i) Средняя линия (окружность) ленты Мёбиуса является ее деформационным ретрактом, значит, фундаментальная группа ленты Мёбиуса изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

(j) Сфера с  $s$  дырами гомотопически эквивалентна букету  $s - 1$  окружностей, поэтому ее фундаментальная группа тривиальна при  $s = 1$ , а при других значениях  $s$  она является свободной группой с  $s - 1$  образующими.

(k) В результате удаления одной точки из бутылки Клейна получится пространство, гомотопически эквивалентное букету двух окружностей, поэтому его фундаментальная группа – это свободная группа с двумя образующими.

(l) Лента Мёбиуса с выколотой из нее точкой гомотопически эквивалентна “букве  $\theta$ ”, которая, в свою очередь, гомотопически эквивалентна букету двух окружностей. Если из ленты Мёбиуса удалить  $s$  точек, то полученное пространство будет гомотопически эквивалентно букету из  $s + 1$  окружностей, таким образом, его фундаментальной группой является свободная группа с  $s + 1$  образующими.

**38.22** Пусть  $K$  – край ленты Мёбиуса  $M$ ,  $L$  – ее средняя линия и  $T$  – полноторие, на границе которого лежит  $K$ . Рассмотрим вложения  $i : K \rightarrow T \setminus S$  и  $j : T \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus S$ . Так как  $T \setminus S \cong (D^2 \setminus 0) \times S^1$ , то  $\pi_1(T \setminus S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Обозначим через  $a$  и  $b$  образующие группы  $\pi_1(T \setminus S)$ . Пусть  $\alpha$  – образующая  $\pi_1 K \cong \mathbb{Z}$ , тогда  $i_*(\alpha) = a + 2b$ . При этом  $j_*(a)$  является образующей группы  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ , а  $j_*(b) = 0$ . Значит,  $j_*(i_*(\alpha)) \neq 0$ . Если бы существовал диск  $D$ , границей которого является край ленты Мёбиуса и который не имеет с ней других общих точек, то тогда  $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus S$ , следовательно, край ленты Мёбиуса определял бы петлю, гомотопную нулю в  $\mathbb{R}^3 \setminus S$ . Однако  $j_*(i_*(\alpha)) \neq 0$ .

**38.23** 1) Используем обозначения, введенные в 38.10, и рассмотрим отображение

$$Q \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0) \times (\mathbb{C}^2 \setminus A) \simeq S^1 \times S^1 : (a, b, c) \mapsto (a, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}).$$

Оно является гомеоморфизмом, следовательно  $\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

2) Как следует из результата задачи 38.10, подпространство  $Q_1$  гомотопически эквивалентно окружности, и, следовательно, его фундаментальная группа изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

**39.1** Следует из 39.H в силу того, что группа  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  универсального накрытия тривиальна, а значит, ее индекс равен порядку фундаментальной группы  $\pi_1(B, b_0)$  базы этого накрытия.

**39.2** Следует из 39.H в силу того, что группа, в которой существует подгруппа ненулевого индекса, не тривиальна.

**39.3** Все четные числа. Будем считать что каждая из граничных окружностей цилиндра отображается на край  $S$  ленты Мёбиуса  $M$ . Пусть  $\alpha$  – образующая группы  $\pi_1(S^1 \times I)$ , тогда  $p_*(1) = b^k$ , где элемент  $b \in \pi_1(M)$  является образом образующей  $\pi_1(S)$  при вложении  $S \rightarrow M$ . Осталось заметить, что  $b = a^2$ , где  $a$  – образующая группы  $\pi_1(M)$  с  $\mathbb{Z}$ . Таким образом,  $p_*(\alpha) = a^{2k}$ , следовательно, индекс  $p_*(\pi_1(S^1 \times I))$  является четным числом. Нетрудно видеть, что существуют накрытия с произвольным четным числом листов (см. 33.4).

**39.4** Все нечетные числа, см. 39.10х.

**39.5** См. 39.10х.

**39.6** См. 39.10х.

**39.7** Если база накрытия компактна, а его тотальное пространство некомпактно, то, в силу 33.24, накрытие является бесконечнолистным.

**39.8** См. указание к 39.7.

**39.9** Класс тождественного отображения.

**39.1х** К примеру, объединение стандартных единичных отрезков на осях абсцисс и ординат и отрезков  $I_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in I\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (так называемая “расческа”).

**39.4х** Это очевидно, так как группа  $\pi_1(X, a)$  тривиальна, так что можно положить  $U = X$ .

**39.5х** К примеру, таким пространством является окружность.

**39.6х** Пусть  $V$  – наименьшая окрестность точки  $a$ , поэтому топология на ней антидискретна. Пусть  $h_t(x) = x$  при  $t < 1$ ,  $h_1(x) = a$ . Докажите, что  $h : V \times I \rightarrow V$  – гомотопия.

**39.7х** Это так, поскольку уже гомоморфизм включения  $\pi_1(V, a) \rightarrow \pi_1(U, a)$  является тривиальным.

**39.8х** Например, таким пространством будет  $D^2 \setminus \{(\frac{1}{n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$  (рассмотрите точку  $(0, 0)$ ).

**39.9х** Рассмотрите конус над пространством из примера 39.8х.

**39.10х** Как следует из теоремы 39.Fх, достаточно описать иерархию классов сопряженных подгрупп базы и указать накрытия с данной

подгруппой. Во всех примерах фундаментальная группа данного пространства (базы) коммутативна, поэтому достаточно указать все подгруппы фундаментальной группы и определить их порядок по включению. В каждом случае все накрытия подчинены универсальному накрытию, а тривиальное накрытие подчинено всем накрытиям.

(а) Универсальным накрытием является отображение  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Накрытие  $p_k : S^1 \rightarrow S^1 : z \mapsto z^k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , подчинено накрытию  $p_l$ , когда число  $k$  является делителем числа  $l$ , при этом подчинение само является накрытием  $p_{l/k}$ .

(b) Поскольку  $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ , ответ аналогичен предыдущему.

(с) Если  $M$  – лента Мёбиуса, то  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ . Таким образом, как и в первом примере, все подгруппы фундаментальной группы базы имеют вид  $k\mathbb{Z}$ . Отличие в том, что при нечетном  $k$  накрываемым пространством будет лента Мёбиуса, если же число  $k$  четно, то накрывающее пространство – это цилиндр  $S^1 \times I$ .

(d) Универсальное накрывающее было построено при решении задачи 35.7. Поскольку фундаментальная группа данного пространства изоморфна  $\mathbb{Z}$ , достаточно указать накрытия, группой которых является подгруппа  $k\mathbb{Z}$ . Постройте их самостоятельно. В отличие от примера (а), тотальные пространства не гомеоморфны, поскольку в каждом из них – свое число точек.

(е) Универсальным накрытием тора является отображение  $p : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ . Примером накрытия с группой  $k\mathbb{Z} \oplus l\mathbb{Z}$  является отображение тора на себя

$$p_k \times p_l : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^k, w^l).$$

Более общо, для всякой целочисленной матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  можно

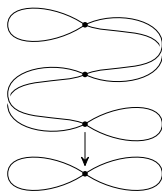
рассмотреть накрытие  $p_A : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$ , группой которого является решетка  $L \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  с базисными векторами  $\mathbf{a}(a, c)$  и  $\mathbf{b}(b, d)$ . Накрытие  $p_A$  подчинено накрытию  $p_{A'}$ , заданно-

му матрицей  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , если решетка  $L'$  с базисными вектора-

ми  $\mathbf{a}'(a', c')$  и  $\mathbf{b}'(b', d')$  содержится в решетке  $L$ . В таком случае базисы  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  в  $L$  и  $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$  в  $L'$  можно выбрать согласованными, т. е. так, чтобы  $\mathbf{a}' = k\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}' = l\mathbf{b}$  для некоторых  $k, l \in \mathbb{N}$ . Подчинение само будет накрытием  $p_k \times p_l$ . Бесконечнолистные накрытия с точностью до эквивалентности описываются циклическими подгруппами в  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , т. е. векторами  $\mathbf{a}(a, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Каждый такой вектор задает отображение  $p_{\mathbf{a}} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1 : (z, t) \mapsto (z^a e^{2\pi i t}, z^b)$ . Накрытие  $p_{\mathbf{a}}$  подчинено накрытию  $p_{\mathbf{b}}$ , если  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Подчинение в таком случае имеет вид

$S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} : (z, t) \mapsto (z^k, t)$ . Описание подчинений между конечнолистными и бесконечнолистными накрытиями оставляется читателю в качестве упражнения.

**39.11x** См. рисунок.



**39.12x** Действительно, всякая подгруппа абелевой группы нормальна. Можно также убедиться непосредственно, что для любой петли  $s : I \rightarrow B$  либо каждый путь в  $X$ , накрывающий петлю  $s$ , является петлей (независимо от его начальной точки), либо ни один из этих путей не есть петля.

**39.13x** Это так, поскольку подгруппа индекса два всегда является нормальной.

**39.15x** См. пример, построенный в решении задачи 39.11x.

**39.16x** Следствие пункта (d) утверждения 39.Px.

**40.3** Клеточное разбиение пространства  $Z$  очевидно: если  $e^m$  – открытая клетка в  $X$ , а  $e^n$  – в  $Y$ , то  $e^m \times e^n$  будет открытой клеткой в  $Z$ , поскольку  $B^m \times B^n \cong B^{m+n}$ . Таким образом,  $n$ -остовом пространства  $Z$  будет объединение попарных произведений всех открытых клеток в  $X$  и  $Y$ , сумма размерностей которых не больше  $n$ . Теперь надо описать приклеивающие отображения соответствующих замкнутых клеток. Чтобы построить клеточное пространство  $X$ , мы начинаем с дискретного топологического пространства  $X_0$ , а затем для каждого  $m \in \mathbb{N}$  строим пространство  $X_m$ , приклеивая к  $X_{m-1}$  дизъюнктное объединение  $m$ -мерных шаров  $D_{X,\alpha}^m$  по некоторому приклеивающему отображению  $\bigsqcup_{\alpha} S_{X,\alpha}^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$ . Ясно, что  $X$  можно описать как результат одновременной факторизации дизъюнктного объединения  $\bigsqcup_{m,\alpha} D_{X,\alpha}^m$  по некоторому единому отождествлению. То же самое верно для пространства  $Y$ . В силу перестановочности в данном случае операций факторизации и перемножения топологических пространств (см. 24.Qx), произведение  $X \times Y$  гомеоморфно результату факторизации дизъюнктного объединения

$$\bigsqcup_{\substack{m,\alpha \\ n,\beta}} D_{X,\alpha}^m \times D_{Y,\beta}^n$$



попарных произведений шаров, участвующих в построении пространств  $X$  и  $Y$ . Осталось заметить, что эту факторизацию, в свою очередь, можно произвести “по остовам”, начиная с дискретного топологического пространства  $Z_0 = \bigsqcup (D_{X,\alpha}^0 \times D_{Y,\beta}^0)$ . Приклеив к нему одномерные клетки вида  $D_{X,\alpha}^1 \times D_{Y,\beta}^0$  и  $D_{X,\alpha}^0 \times D_{Y,\beta}^1$ , мы получим 1-остов  $Z_1$ , и т. д. В размерностях, больших 1, описание приклеивающих отображений может вызвать затруднение. Рассмотрим клетку вида  $e^m \times e^n$ . Её характеристическое отображение  $D^m \times D^n \rightarrow X \times Y$  есть просто произведение характеристических отображений клеток  $e^m$  и  $e^n$ , при котором образ граничной сферы “шара”  $D^m \times D^n$  попадает в уже построенный остов  $Z_{n+m-1}$ . Тем самым определено приклеивающее отображение  $\omega : S^{n+m-1} \rightarrow Z_{n+m-1}$ . Дадим еще и явное его описание. Для этого нам потребуется стандартный гомеоморфизм  $\kappa : D^{m+n} \rightarrow D^m \times D^n$ , при котором  $\kappa(S^{m+n-1}) = (S^{m-1} \times D^n) \cup (D^m \times S^{n-1})$ . Пусть  $\varphi_1 : S^{m-1} \rightarrow X_{m-1}$  и  $\varphi_2 : S^{n-1} \rightarrow Y_{n-1}$  – приклеивающие отображения клеток  $e^m$  и  $e^n$ . Тогда  $\omega$  можно описать как композицию

$$\begin{aligned} S^{m+n-1} &\rightarrow (D^m \times S^{n-1}) \cup (S^{m-1} \times D^n) \rightarrow \\ &\rightarrow ((X_{m-1} \cup_{\varphi_1} D^m) \times Y_{n-1}) \cup (X_{m-1} \times (Y_{n-1} \cup_{\varphi_2} D^n)) \hookrightarrow Z_{m+n-1}, \end{aligned}$$

где первое отображение – сокращение гомеоморфизма  $\kappa$ , второе – очевидное отображение, определяемое на каждой части как произведение характеристического и приклеивающего отображений, а третье отображение – включение.

**40.4** Нет, не останется. Покажите, что топология произведения двух экземпляров клеточного пространства из задачи 40.9 не является клеточной.

**40.5** В действительности при решении предыдущей задачи использовалось, во-первых, представление  $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{R}P^k$ , во-вторых, то, что  $\mathbb{R}P^k \setminus \mathbb{R}P^{k-1}$  есть открытая  $k$ -мерная клетка. Воспользуйтесь представлением  $\mathbb{C}P^n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{C}P^k$ . Докажите, что при всех целых  $k \geq 0$  разность  $\mathbb{C}P^k \setminus \mathbb{C}P^{k-1} \cong B^{2k}$ . При этом ясно, что приклеивающее отображение  $S^{2k-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$  является отображением факторизации.

**40.6** (а) Удалите из квадрата множество, гомеоморфное открытому кругу, ограниченное кривой, начинающейся и заканчивающейся в некоторой вершине квадрата  $I^2$ . Его дополнение разбито на 10 клеток, а факторпространство этого дополнения разбито на 5 клеток и гомеоморфно ручке.

(б) Лента Мёбиуса есть факторпространство квадрата, у которого существует клеточное разбиение из 9 клеток. В результате факторизации мы

получим разбиение ленты Мёбиуса, состоящее из 6 клеток.

(с) Как и пространство из предыдущего пункта,  $S^1 \times I$  – это факторпространство квадрата. Или по-другому, см. 40.3.

(d-e) См. 40.L.

**40.7** (а) 4 клетки – представьте ленту Мёбиуса как результат факторизации треугольника, при которой все три его вершины склеиваются в одну. Покажите, что одной одномерной клетки недостаточно.

(b)  $2p+2$  клеток; (с)  $q+2$  клеток. См. 40.L. То, что данное число клеток является наименьшим возможным, следует из вычисления фундаментальных групп этих пространств; см. 43.L.

**40.8** Нужны хотя бы три клетки: нульмерная, одномерная и еще одна.

**40.9** См. 20.6.

**40.K** См. решение задачи 40.J.

**40.11** Обратите внимание, что поскольку всякие две точки  $\mathbb{R}^\infty$  лежат в некотором его подпространстве  $\mathbb{R}^N$ , то несложно определить расстояние между ними. Таким образом, в  $\mathbb{R}^\infty$  имеется метрика, однако эта метрика индуцирует в нем не ту топологию. Невозможность индуцировать существующую в  $\mathbb{R}^\infty$  топологию какой-либо метрикой следует из того, что в этом пространстве нет счетной базы в точке (докажите это).

**40.L** Докажем несколько утверждений из перечисленных.

(а) Слово  $aa^{-1}$  описывает факторпространство диска  $D^2$  по разбиению на пары точек окружности, симметричные относительно одного из ее диаметров, гомеоморфное двумерной сфере. Клеточное разбиение состоит из двух нульмерных клеток, одной одномерной и одной двумерной.

(b) Слово  $aa$  описывает факторпространство диска  $D^2$  по разбиению на пары точек окружности, симметричные относительно ее центра, гомеоморфное проективной плоскости. Клеточное разбиение состоит из трех клеток: по одной в каждой из размерностей 0, 1 и 2.

(g) Рассмотрим  $p$ -угольник с вершинами в точках, в которых сходятся ребра, отмеченные символами  $a_1$  и  $b_p^{-1}$ ,  $a_2$  и  $b_1^{-1}$ , ...,  $a_p$  и  $b_{p-1}^{-1}$ , и разрежем исходный  $4p$ -угольник вдоль сторон рассмотренного  $p$ -угольника. Из этого  $p$ -угольника при его факторизации мы получим сферу с  $p$  дырками. При факторизации оставшихся  $5$ -угольников мы получим  $p$  ручек.

**40.12** Таков, например, так называемый полный 5-граф  $K_5$ , т. е. пространство с 5 вершинами, каждая пара которых соединена ребром. Его невложимость в  $\mathbb{R}^2$  можно доказать, воспользовавшись теоремой Эйлера 42.3.

**41.1x** Пусть  $\psi : D^n \rightarrow X$  – характеристическое отображение приклеенной клетки,  $i : A \rightarrow X$  – включение. Мы вправе считать, что

$x = \psi(0)$ , где  $0$  – центр шара  $D^n$ . Введем отображение

$$g : X \setminus x \rightarrow A : g(z) = \begin{cases} z & \text{при } z \in A, \\ \varphi(\psi^{-1}(z)/|\psi^{-1}(z)|) & \text{при } z \notin A. \end{cases}$$

Докажем, что отображения  $\text{id}_{X \setminus x}$  и  $i \circ g$   $A$ -гомотопны. Рассмотрим прямолинейную гомотопию  $\tilde{h} : (D^n \setminus x) \times I \rightarrow D^n \setminus x$  между тождественным отображением и проекцией  $\rho : D^n \setminus x \rightarrow D^n \setminus x : z \mapsto \frac{z}{|z|}$ . Определим гомотопию

$$h : (A \sqcup (D^n \setminus x)) \times I \rightarrow A \sqcup (D^n \setminus x),$$

положив

$$h(z, t) = \begin{cases} z, & \text{если } z \in A, \\ \tilde{h}(z, t), & \text{если } z \in D^n. \end{cases}$$

Её факторотображение  $H : (X \setminus x) \times I \rightarrow X \setminus x$  является искомой  $A$ -гомотопией между  $\text{id}_{X \setminus A}$  и  $i \circ g$ .

**41.2x** Следует из 41.1x, в силу того, что замкнутые  $n$ -мерные клетки вместе с  $X_{n-1}$  образуют фундаментальное покрытие клеточного пространства  $X$ .

**41.3x** Утверждение об  $\mathbb{R}P^n$  следует из 41.1x, поскольку пространство  $\mathbb{R}P^n$  есть результат приклеивания одной  $n$ -мерной клетки к пространству  $\mathbb{R}P^{n-1}$  – см. 40.Н. Утверждение про  $\mathbb{C}P^n$  доказывается аналогичным образом (см. 40.5). С другой стороны, попробуйте дать явные формулы для деформационных ретракций  $\mathbb{R}P^n \setminus \text{point} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  и  $\mathbb{C}P^n \setminus \text{point} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ .

**41.4x** Рассмотрите клеточное разбиение полнотория с одной 3-клеткой, 2-остовом которого является тор, к которому вдоль меридиана  $S^1 \times 1$  приклеен круг, и примените утверждение 41.1x.

**41.5x** Обозначим через  $e_\varphi : D^{n+1} \rightarrow X_\varphi$  и  $e_\psi : D^{n+1} \rightarrow X_\psi$  характеристические отображения  $(n+1)$ -мерной клетки, приклеенной к пространству  $Y$ . Пусть  $h : S^n \times I \rightarrow Y$  – это гомотопия, соединяющая  $\varphi$  и  $\psi$ . Рассмотрим отображения  $f' : Y \sqcup D^{n+1} \rightarrow X_\varphi$  и  $g' : Y \sqcup D^{n+1} \rightarrow X_\psi$ , которые являются стандартными вложениями на  $Y$ , а на шарах  $D^{n+1}$  определены формулами

$$f'(x) = \begin{cases} e_\psi(2x) & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ h\left(\frac{x}{|x|}, 2(1 - |x|)\right) & \text{при } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} e_\varphi(2x) & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ h\left(\frac{x}{|x|}, 2|x| - 1\right) & \text{при } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что определены факторы  $f : X_\varphi \rightarrow X_\psi$  и  $g : X_\psi \rightarrow X_\varphi$  отображений  $f'$  и  $g'$ . Покажите, что  $f$  и  $g$  являются взаимно-обратными гомотопическими эквивалентностями.

**41.6x** Для доказательства нужно слегка изменить рассуждение, использованное при решении предыдущей задачи.

**41.7x** Пусть  $A$  – пространство, получающееся в результате приклеивания круга к окружности посредством отображения  $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\alpha(z) = z^2$ . Тогда  $A \cong \mathbb{R}P^2$ , значит  $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}_2$ . Следовательно, отображение  $\varphi : S^1 \rightarrow A : z \mapsto z^3$ , гомотопно отображению  $\psi = \text{id}_{S^1}$ . В силу 41.5x, пространство  $X$  гомотопически эквивалентно пространству  $A \cup_\psi D^2$ , которое совпадает с  $D^2 \cup_\alpha D^2$ . Поскольку отображение  $\alpha : S^1 \rightarrow D^2$  гомотопно постоянному, то (снова в силу 41.5x)  $X$  гомотопически эквивалентно букету  $D^2 \vee S^2$ , который гомотопически эквивалентен  $S^2$ :

$$X \simeq A \cup_\psi D^2 \simeq D^2 \cup_\alpha D^2 \simeq D^2 \vee S^2 \simeq S^2.$$

В этом разбиении – две клетки.

**41.9x** Тор  $S^1 \times S^1$  получается из букета  $S^1 \vee S^1$  приклеиванием к нему 2-клетки вдоль некоторого отображения  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ . Обозначим через  $i$  включение  $S^1 \vee S^1 \rightarrow A = (1 \times S^1) \cup (D^2 \times 1)$  и покажем, что композиция  $i \circ \varphi : S^1 \rightarrow A$  гомотопна постоянному отображению. Действительно, пусть  $\alpha, \beta$  – стандартные образующие  $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ . Тогда  $[\varphi] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , и

$$[i \circ \varphi] = i_*([\varphi]) = i_*(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) =$$

$$i_*(\alpha)i_*(\beta)i_*(\alpha)^{-1}i_*(\beta)^{-1} = i_*(\alpha)i_*(\alpha)^{-1} = 1,$$

так как  $i_*(\beta) = 1 \in \pi_1(A)$ . В силу теоремы 41.5x,

$$A \cup_\varphi D^2 \simeq A \vee S^2 = S^1 \vee D^2 \vee S^2 \simeq S^1 \vee S^2.$$

**41.10x** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и утверждением 41.5x.

**41.11x** Докажите, что  $X \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2$ , значит,  $\pi_1(X) \cong \mathbb{F}_2$ , в то время как  $Y \simeq S^1 \times S^1$ , поэтому  $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}^2$ . Так как  $\pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y)$ , то сами пространства не являются гомотопически эквивалентными.

**41.13x** Рассмотрим клеточное разбиение  $\mathbb{C}P^2$ , состоящее из одной нульмерной клетки, одной одномерной, двух двумерных клеток и одной 4-клетки. При этом можно считать, что 2-остов полученного клеточного пространства совпадает с  $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ , а 1-остов – с вещественной частью  $RP^1 \subset \mathbb{C}P^1$ . Обозначим через  $\tau : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  инволюцию комплексного сопряжения, по которой и происходит факторизация. Ясно, что  $\mathbb{C}P^1/[z \sim \tau(z)] \cong D^2$ . Рассмотрим характеристическое отображение

$\psi : D^4 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  четырехмерной клетки данного клеточного разбиения. Факторпространство  $D^4/[z \sim \tau(z)]$  очевидно гомеоморфно  $D^4$ , поэтому факторотображение

$$D^4/[z \sim \tau(z)] \rightarrow \mathbb{C}P^1/[z \sim \tau(z)]$$

является характеристическим отображением для 4-клетки пространства  $X$ . Таким образом,  $X$  – клеточное пространство, 2-остов которого совпадает с кругом  $D^2$ . Значит, в силу 41.Cx,  $X \simeq S^4$ .

**42.1** См. 38.21.

**42.2** Пусть  $X \cong S^2$ . Обозначим через  $v = c_0(X)$ ,  $e = c_1(X)$  и  $f = c_2(X)$  число нульмерных, одномерных и двумерных клеток пространства  $X$ , соответственно. Выкинув по точке из каждой двумерной клетки пространства  $X$  мы получим пространство  $X'$ , которое деформационно ретрагируется на свой 1-остов. С одной стороны, в силу 42.1, фундаментальной группой  $\pi_1(X')$  является свободная группа ранга  $f-1$ . С другой стороны,  $\pi_1(X') \cong \pi_1(X_1)$ , а ранг последней группы, в силу 42.B, равен  $1 - \chi(X_1) = 1 - v + e$ . Таким образом,  $f-1 = 1 - e + v$ , откуда и следует, что  $\chi(X) = v - e + f = 2$ .

**42.3** Следует из 42.2.

**43.1** Фундаментальная группа сферы  $S^n$  при  $n > 1$  тривиальна, поскольку существует ее клеточное разбиение, 1-остов которого состоит из одной точки.

**43.2** Группа  $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$  тривиальна по той же причине.

**43.1x** Выберем по точке  $x_0$  и  $x_1$  в каждой из компонент связности множества  $C$  так, чтобы их можно было соединить двумя вложенными в одномерный остов  $X_1$  отрезками  $\bar{e}_A \subset A$  и  $\bar{e}_B \subset B$ , общими точками которых являются только точки  $x_0$  и  $x_1$ . Идея состоит в том, чтобы заменить все пространства на гомотопически им эквивалентные, так чтобы одномерным остовом пространства  $X$  была окружность, являющаяся объединением отрезков  $\bar{e}_A$  и  $\bar{e}_B$ . Для этого можно использовать технику, примененную при решении задачи 41.Fx. Тогда фундаментальная группа одномерного остова полученного в результате пространства будет изоморфна  $\mathbb{Z}$ . Осталось заметить, что образом приклеивающего отображения двумерной клетки не может быть весь 1-остов, так как эта клетка лежит либо в  $A$ , либо в  $B$ , но никак не в них обоих. Значит, оно гомотопно постоянному отображению, и, следовательно, при приклеивании 2-клетки не возникает никаких соотношений.

**43.2x** Нет, так как в условиях теоремы 43.Ax сказано, что множества  $A$  и  $B$  являются открытыми, а в теореме 43.2x предполагается, что они – клеточные подпространства, которые лишь в исключительных

случаях являются открытыми. С другой стороны, теорему 43.3х можно вывести из 43.4х, построив окрестности клеточных подпространств  $A$ ,  $B$  и  $C$ , деформационно ретрагирующиеся на сами эти пространства.

**43.3х** Вообще говоря, нельзя (приведите пример).

**43.4х** Проследим, как меняется фундаментальная группа, когда к одномерному остову пространства  $X$  приклеиваются его двумерные клетки. Будем считать, что нульмерный остов состоит из точки  $x_0$ . На первом шаге к  $X_1$  приклеивается двумерная клетка, пусть  $\varphi : S^1 \rightarrow X_1$  – приклеивающее, а  $\chi : D^2 \rightarrow X_2$  – характеристическое отображение этой клетки. Пусть  $F \subset D^2$  замкнутый диск (к примеру, радиусом  $\frac{1}{2}$ ),  $S$  – его граница,  $A = \chi(D^2 \setminus \text{Int } F) \cup X_1$ ,  $B = \chi(F)$ , тогда  $C = \chi(S) \cong S^1$ . Ясно, что  $X_1$  является (строгим) деформационным ретрактом множества  $A$ , поэтому группа  $\pi_1(A) \cong \pi_1(X_1)$  – свободная группа с образующими  $\alpha_i$ . С другой стороны, множество  $B \cong D^2$ , поэтому оно односвязно. Отображение  $\chi|_S$  гомотопно  $\varphi$ , следовательно, образом образующей группы  $\pi_1(C)$  является класс  $\rho = [\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$  приклеивающего отображения данной клетки. Следовательно, в фундаментальной группе  $\pi_1(X, x_0)$  имеется соотношение  $\rho = 1$ . При приклеивании клеток старшей размерности никаких новых соотношений в этой группе не возникает, так как в этом случае  $C \cong S^k$  – односвязное пространство, поскольку  $k > 1$ . Из теоремы Зейферта–ван Кампена следует, что соотношениями  $[\varphi_i] = 1$  исчерпываются все соотношения между стандартными образующими фундаментальной группы пространства.

**43.5х** Если  $m \neq 0$ , то фундаментальной группой является циклическая группа порядка  $|m|$ , если  $m = 0$ , то фундаментальная группа изоморфна  $\mathbb{Z}$ .

**43.6х** Эти пространства гомеоморфны, соответственно,  $S^2 \times S^1$  и  $S^3$ .

**43.7х** Вместо дополнения узла будем рассматривать дополнение некоторой его открытой окрестности  $U$ , гомеоморфной  $\text{Int } D^2 \times S^1$ , для которой узел  $K$  является её осевой линией. Нам будет удобнее считать, что все рассматриваемые множества лежат не в  $\mathbb{R}^3$ , а в  $S^3$ . Пусть  $X = S^3 \setminus U$ . Тор, на котором лежит данный узел, разбивает  $S^3$  на два полнотория  $G = D^2 \times S^1$  и  $F = S^1 \times D^2$ . Положим  $A = G \setminus U$  и  $B = F \setminus U$ , тогда  $X = A \cup B$ , а  $C = A \cap B$  представляет собой дополнение в торе открытой ленточки, являющейся окрестностью кривой, заданной на этом торе уравнением  $pu = qv$ , поэтому  $\pi_1(C) \cong \pi_1(A) \cong \pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$ . В силу теоремы Зейферта–ван Кампена фундаментальной группой  $\pi_1(X)$  является группа  $\{\alpha, \beta \mid i_*(\gamma) = j_*(\gamma)\}$ , где  $i$  и  $j$  – включения  $C$  в  $A$  и  $B$ , соответственно. Петля в  $C$ , класс которой является образующей группы

$\pi_1(C)$ ,  $p$  раз обходит тор вдоль его параллели и  $q$  раз вдоль меридиана, поэтому  $i_*(\gamma) = a^p$  и  $j_*(\gamma) = b^q$ . Значит  $\pi_1(X) = \{a, b \mid a^p = b^q\}$ . Покажите, что  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$  (не забудьте, что  $p$  и  $q$  взаимно просты).

**43.8x** (а) Следует непосредственно из теорем 43 (или теоремы 43.Cx).  
 (b) Так как множества  $A = X \vee V_{y_0}$  и  $B = U_{x_0} \vee Y$  образуют открытое покрытие пространства  $Z$  и их пересечение  $A \cap B = U_{x_0} \vee V_{y_0}$  связно, то односвязность  $Z$  следует из результата задачи 31.11.

(с)\* Пусть пространство  $X \subset \mathbb{R}^3$  – конус с вершиной в точке  $(-1, 0, 1)$  над объединением окружностей, заданных в плоскости  $\mathbb{R}^2$  уравнениями  $x^2 + \frac{2x}{n} + y^2 = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а пространство  $Y$  симметрично  $X$  относительно оси  $Oz$ . Каждое из пространств  $X$  и  $Y$  очевидным образом стягиваемо, значит односвязно. Попробуйте доказать (это совсем непросто), что их объединение  $X \cup Y$  не является односвязным.

**43.9x** Да, является.

**43.10x** Бутылку Клейна можно представить как объединение двух лент Мёбиуса, склеенных по их границам – окружностям.

**43.13x** Проверьте, что класс матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  имеет порядок 2, а класс матрицы  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  – порядок 3. Детали рассуждения можно найти в книге [3, с. 211].

**43.14x** Разрежем тор (соответственно, бутылку Клейна) по окружности  $B$  так, чтобы в результате у нас получился цилиндр, который и будет пространством  $C$ . Обозначим через  $\beta$  образующую группы  $\pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$ , через  $\alpha$  – образующую  $\pi_1(C) \cong \mathbb{Z}$ . В случае тора  $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$ , для бутылки Клейна  $\varphi_1 = \alpha = \varphi_2^{-1}$ . Таким образом, в силу теоремы 43.Fx мы получаем задание фундаментальной группы тора  $\langle \alpha, \gamma \mid \gamma\alpha = \alpha\gamma \rangle$  и бутылки Клейна  $\langle \alpha, \gamma \mid \gamma\alpha = \alpha\gamma^{-1} \rangle$ .

---

# Литература

1. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
2. О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. Задачи по топологии. Л.: ЛГУ, 1988. – 92 с.
3. А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука, 1967. – 648 с.
4. У. Масси, Дж. Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977. – 344 с.
5. В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977. – 488 с.
6. J. R. Munkres. Topology. Prentice Hall, Inc., 2000.
7. L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr. Counterexamples in Topology. Springer-Verlag, 1978.





---

# Предметный указатель

- Автогомеоморфизм 202
- Автоморфизм накрытия 286
- Аксиома
  - отделимости
    - $T_0$  (Колмогорова) 104
    - $T_1$  (Тихонова) 103
    - $T_2$  (Хаусдорфа) 101
    - $T_3$  105
    - $T_4$  106
  - счетности
    - первая 110
    - вторая 109
- Аксиомы
  - группы 195
  - отделимости 101
    - в топологической группе 204
  - счетности 108
    - в топологической группе 204
  - топологической структуры 11
- Асимметрия 27
- База
  - топологии 17
  - в точке 110
- Барицентрическое подразделение 175
- Букет 276
- Бутылка Клейна 78, 160
- Вложение 79, 127
  - изометрическое 69
- Внешность множества 31
- Внутренность
  - как операция 33, 35
  - множества 31
- Гомоморфизм 198
  - индуцированный непрерывным отображением 267
  - индуцированный проекцией 282
  - топологических групп 207
- Гомотопия 224
  - свободная 227, 233
  - связанная 227
  - прямолинейная 225
  - путей 228
- Граница множества 33, 90
- График отображения 144
- Гомеоморфизм 72
- Гомотопическая эквивалентность 277
  - клеточных пространств 311
- Гомотопические группы 232, 236
  - накрывающих пространств 289
- Гомотопический
  - класс 225
  - тип 277, 280
- Группа 94, 195
  - абелева 196
  - гомеоморфизмов 210
  - гомотопических классов путей 231
  - накрытия 282
  - свободная 258
  - топологическая 201
  - циклическая 199
- $G$ -множество
  - левое (правое) 211
  - однородное 211
- Действие
  - вполне разрывное 213
  - группы на множестве 211
    - транзитивное 211
    - эффективное 211
  - непрерывное 212
  - фундаментальной группы в слое 286
- Дерево 315
  - максимальное 315

- Диаграмма Хассе 44  
 Диагональ 146  
 Диаметр множества 23  
 Задача  
   Куратовского 34  
   поднятия 254, 282  
 Замкнутое  
   множество 13  
   в подпространстве 29  
   отображение 117  
 Замыкание  
   как операция 33, 35  
   множества 32  
   в метрическом пространстве 32  
 Иерархия накрытий 283  
 Изометрия 66  
 Изоморфизм 198  
   локальный топологических групп 208  
   топологических групп 207  
 Индекс  
   подгруппы 200, 282  
   петли относительно точки 271  
 Индукция  
   по компактности 118  
   по связности 94  
 Инъективный фактор  
   гомоморфизма топологических групп  
     207  
   непрерывного отображения 153  
 Иррациональный поток 212  
 Канторово множество 15  
 Класс эквивалентности 150  
 Клетка 301  
   замкнутая 301  
   разбивающая 315  
 Клеточное  
   пространство 301  
   одномерное 314  
   подпространство 304  
 Комбинаторное стягивание 310  
 Компактификация одноточечная 123  
 Композиция отображений 61  
 Компактное  
   множество 114  
   клеточное пространство 309  
   пространство 113  
 Компонента 89  
   связности 89  
   линейной связности 98  
 Конус 40  
 Кривая Пеано 70  
 Круговая петля 233  
 Куб 115  
 Лемма  
   Лебега 117  
   Урысона 107  
 Лента Мёбиуса 158  
 Линейно связное  
   клеточное пространство 309  
   множество 97  
   пространство 97  
 Лист накрытия 252  
 Локальный  
   изоморфизм 208  
   гомеоморфизм 251  
 Максимальное  $T_0$ -факторпространство  
   172  
 Матричные множества 100, 116  
 Метрика 20  
   евклидова 20  
   равномерной сходимости 178  
   Хаусдорфа 26  
    $\rho^{(p)}$  20  
    $p$ -адическая 27  
 Множество  
   алгебраическое 100  
   всюду плотное 35  
   выпуклое 75  
   замкнутое 13  
   звёздное 225  
   линейно упорядоченное 41  
   локально замкнутое 37  
   неподвижных точек 102  
   насыщенное 150  
   нигде не плотное 36  
   ограниченное 23  
   открытое 13  
   совпадения 102  
   счетное 108  
   циклически упорядоченное 45  
   частично упорядоченное 39  
 Накрытие 249  
   букета окружностей 259  
   в узком смысле 250  
   индуцированное 289  
   регулярное 287  
   тривиальное 250  
   универсальное 253  
 Накрытия  
   бутылки Клейна 251  
   основных поверхностей 251  
   проективного пространства 251  
   тора 250  
   ленты Мёбиуса 251  
   эквивалентные 283  
 Наследственность 103, 115, 107  
 Насыщение множества 150  
 Неподвижные точки 276  
 Неравенство  
   треугольника 20  
   Гёльдера 20  
 Норма 23, 118  
 Нормализатор 212  
 Образ множества 60

- Образующие группы 199
- Ограниченное множество 23
- Однородное
  - $G$ -множество 211
- Односвязность 235
- Окрестность
  - точки 15
  - правильно накрытая 249
  - симметричная 203
- Орбита 213
- Основная теорема высшей алгебры 268
- Основные поверхности 163, 306
- Остов клеточного пространства 303
- Открытое
  - множество 13
  - в подпространстве 30
- Отношение
  - линейного порядка 41
  - нестрогий частичного порядка 38
  - строгий частичного порядка 38
  - эквивалентности 150
- Отображение 59
  - биективное 59
  - включения 61
  - гомотопное нулю 225
  - замкнутое 117
  - инъективное 59
  - локально ограниченное 118
  - локально постоянное 94
  - монотонное 69
  - непрерывное 63
    - в точке 65
  - обратимое 62
  - обратное 62
  - открытое 146
  - сжимающее 66
  - собственное 124
  - сюръективное 59
  - тождественное 61
  - характеристическое клетки 303
  - эквивариантное 211
- Перенос вдоль пути 238
  - в топологической группе 240
  - в гомотопических группах 240
- Петля 232
- Подгруппа 199
  - изотропная 211
  - нормальная 200
    - топологической группы 206
    - топологической группы 205
- Подотображение 62
- Подпространство
  - метрического пространства 21
  - топологическое 29
- Подчинение накрытий 283
- Покрытие 67
  - вписанное 68, 125
  - замкнутое 68
  - локально конечное 68, 125
  - открытое 68
  - фундаментальное 67, 308
- Порядок
  - линейный 41
  - нестрогий частичный 38
  - строгий частичный 38
  - группы 200
  - элемента группы 200
- Последовательность Коши 120
- Предбаза 18
- Предел последовательности 102
- Предпорядок 171
- Признак базы
  - данной топологии 17
  - некоторой топологии 17
- Приклеивание пространств 162
- Приложения
  - теоремы о промежуточном значении 94
- Пробраз множества 60
- Проективная плоскость 160
- Проективное пространство
  - вещественное 166
  - комплексное 167
  - кватернионное 169
- Проекция
  - на сомножитель 144
  - на фактормножество 150
- Произведение
  - гомотопических классов путей 229
  - множеств 143
  - клеточных пространств 304
  - накрытий 250
  - отображений 146
  - полупрямое 209
  - свободное (с объединенной подгруппой) 325
  - топологических групп 208
  - топологических пространств 144, 147
  - путей 96, 229
- Производное частично упорядоченное множество 175
- Простой путь 317
- Пространства
  - гомеоморфные 72
  - гомотопически эквивалентные 277
- Пространство
  - антидискретное 11
  - асимметрическое 28
  - вполне несвязное 90
  - выпуклых фигур 121
  - дискретное 11
  - Зариского 12
  - классов смежности 206
  - клеточное 301
  - компактное 113

- линейно связное 97
- локально линейно связное 284
- локально компактное 123
- локально стягиваемое 285
- метризуемое 24, 112
- метрическое 20
  - полное 120
- микроодносвязное 284
- наименьших окрестностей 43
- Немыцкого 106
- непрерывных отображений 177
- нормальное 106
- нормированное 23
- паракомпактное 125
- регулярное 105
- связное 87
- сепарабельное 109
- стрелки 11
- стягиваемое 280
- ультраметрическое 26
- хаусдорфово 101
- Прямая
  - числовая 12, 91
  - Халимского 44
- Путь 96
- $p$ -адические числа 121
- Разбиение 150
  - единицы 126
  - замкнутое 153
  - множества 87
  - открытое 154
- Расстояние
  - Громова–Хаусдорфа 69
  - между множествами 26
  - от точки до множества 25
- Ретракт 274
  - деформационный 278
  - строгий 278
- Ретракция 274
  - деформационная 278
  - строгая 278
- Ручка 77
- Связное
  - клеточное пространство 309
  - пространство 87
  - множество 88
- Связность посредством ломаных 99
- Сдвиг (левый и правый) 202
- Секвенциальная
  - компактность 119
  - непрерывность 112
- Секвенциальное замыкание 111
- Симплициальная схема 173
- Симплициальное пространство 174
- Склеивание подпространств 155, 159
- Смежные классы 200
- Сопряжение 202
- Степень точки относительно петли 271
- Стягивание множества 155
- Сужение отображения 62
- Сумма
  - множеств 161
  - пространств 161
- Сфера 21
  - с пленками 164
  - с ручками 164
- Теорема
  - Борсука 275
  - Брауэра 276
  - Борсука–Улама 272
  - Зейферта–ван Кампена 322, 326
  - Лагранжа об индексе 200
  - Линделёфа 109
  - об обратной функции 79
  - о накрывающей гомотопии 255
  - о накрывающем пути 254
  - о промежуточном значении 93, 269
  - Титце о продолжении 107
- Топологическая структура 11
  - всюду плотной точки 12
  - грубая 19
  - интервальная 42
  - клеточная 303
  - компактно-открытая 176
  - левых (правых) лучей 42
  - подпространства 29
  - порожденная метрикой 23
  - поточечной сходимости 176
  - тонкая 19
  - частичного порядка 43
  - циклического порядка 47
- Топологическое пространство 11
- Точка
  - внешняя 31
  - внутренняя 31
  - граничная 31
  - изолированная 36
  - конечное 172
  - накопления 119
  - предельная 36
  - прикосновения 32
- Узел 80
- Ультраметрика 26
- Фактор
  - группа 200
  - множество 150
  - пространство 151
  - отображение 152
  - топология 151
- Формулы де Моргана 13
- Фундаментальная группа 232
  - букета окружностей 257
  - клеточного пространства 318, 322
  - конечного пространства 233, 261

- линзового пространства 323
- окружности 256
- произведения пространств 234
- проективного пространства 257
- пространства  $\mathbb{R}^n$  233
- сферы  $S^n$  при  $n > 1$  233
- сферы с ручками и пленками 321
- топологической группы 236
- тора 256
- узла 323
- Число листов накрытия 252, 282
- Пар
  - открытый 21
  - замкнутый 21
- Эйлерова характеристика 310
- Эквивалентные
  - вложения 80
  - метрики 24
  - накрытия 283
- Экспоненциальный закон 179
- Элемент
  - максимальный 41
  - минимальный 41
  - наибольший 41
  - наименьший 41
- $\epsilon$ -сеть 119
- Ядро гомоморфизма 199