

演算法設計方法論 (Design Strategies for Computer Algorithms)

Homework 4

DUE DATE: January 8, 2018

學號: b03902129 系級: 資工四 姓名: 陳鵬宇

1 問題定義

問題: *Determining whether a point belongs to the union of given n circles*

輸入:

- n 個圓 $C_i(Q_i, r_i)$, 其中圓心座標 $Q_i(x_i, y_i)$ 且半徑 r_i 。
- 一點 $P(x, y)$

輸出:

- **TRUE**, $P \in C_i, \forall i$
- **FALSE**, $P \notin C_i, \forall i$

2 解法敘述

2.1 The Algorithm of Shamos and Hoey

給定一 n 個點的集合 $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

1. 根據 x 座標對這 n 個點排序
2. 給予新的座標
3. 將 S 分成兩個子集 $L = \{P_1, P_2, \dots, P_{[n/2]}\}$ 和 $R = \{P_{[n/2]+1}, P_{[n/2]+2}, \dots, P_n\}$
4. 分別對 L 和 R 中的點建構沃羅諾伊圖 $V(L)$ 和 $V(R)$
 - 分治線 (Dividing line) 使得 $L(R)$ 中的每一點都會更靠近他們原本的那一側 $L(R)$ 。
 - 時間複雜度: $O(n)$ 。

Lemma 2.1 分治線由延伸至無窮的兩條射線和一些有限的線段組成。每一個元素 (一射線或一線段) 包含於 $V(L)$ 中 $V(P_i)$ 和 $V(R)$ 中 $V(P_j)$ 相交的部分, 其中 $P_i \in L, P_j \in R$ 且會是 P_i 和 P_j 的垂直平分線。

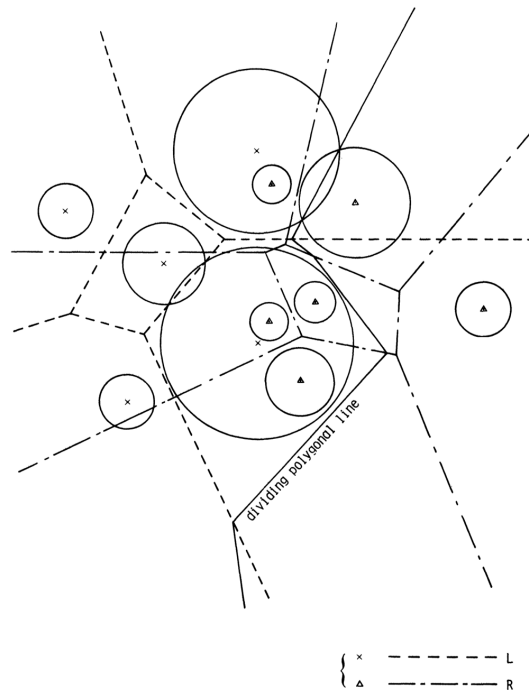
Lemma 2.2 每兩條射線必定是凸包 $CH(S)$ 連續兩點的垂直平分線, 其中一條位於 L , 另一條位於 R 。

Lemma 1 告訴我們可以在 $O(n)$ 內找到分治線。

Lemma 2 告訴我們可以在 $O(n)$ 內在 $CH(S)$ 找到所述射線, 同時可在 $O(n)$ 內分別從 $CH(L)$ 和 $CH(R)$ 找到一條射線。

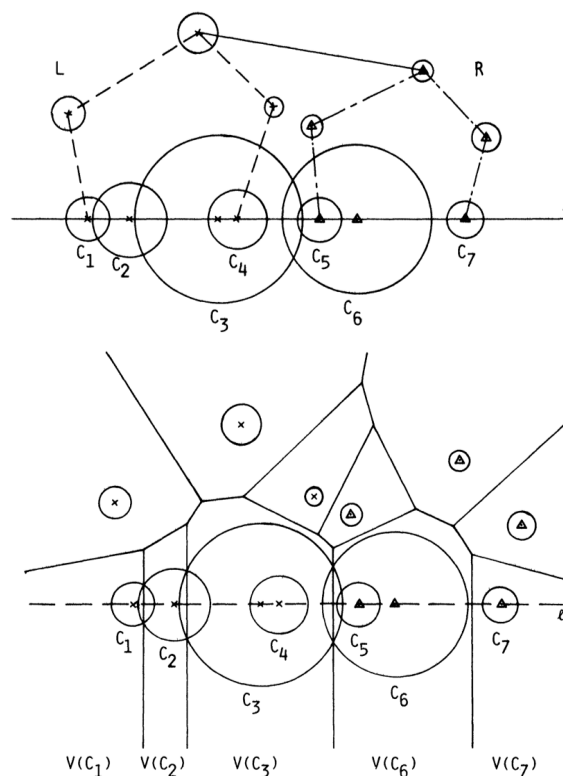
2.2 建構沃羅諾伊圖

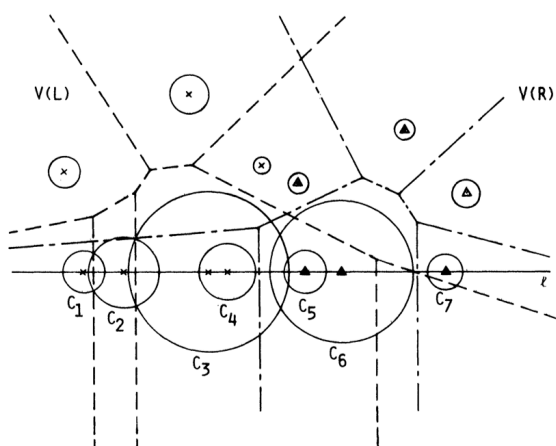
1. 將 n 個圓 $C_i(Q_i, r_i)$ 分為兩子集
根據 2.1 Shamos 和 Hoey 所提出的演算法, 我們可以以得到兩個沃羅諾伊圖 $V(L)$ 和 $V(R)$ 。



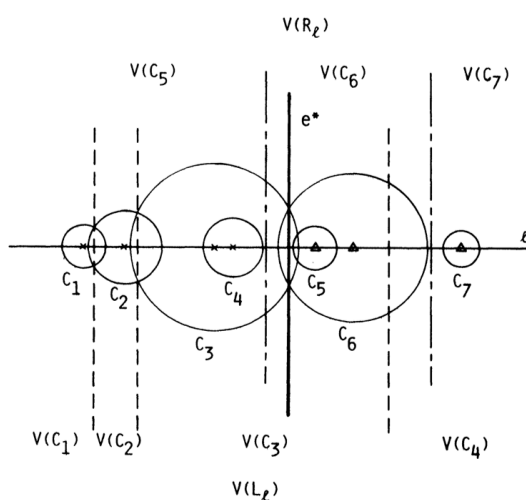
Lemma 2.3 分治線是單行的，由兩條射線和幾條有限線段組成。Laguerre 幾何中的巨觀下，多邊型左邊（右邊）的每一點與 $L(R)$ 中的某個圖比 $R(L)$ 中的任何圖更接近。

2. 在 $O(n)$ 內找到分治線
利用沃羅諾伊邊皆為直線的性質，便可以順時針方向掃描在 $O(n)$ 內找到分治線。
3. 在 $O(n)$ 內找到射線
凸包邊緣可能退化至一直線，而有些情況會變得不成立。





由於在 $V(L_l)$ 和 $V(R_l)$ 中所有沃羅諾伊邊都與直線 l ，所以我們可以在 $O(n)$ 內合併 $V(L_l)$ 和 $V(R_l)$ 來得到 $V(L_l \cap R_l)$ 。由於在沃羅諾伊圖中區域數量的複雜度為 $O(n)$ ，因此可以在 $O(n)$ 內找到分治線。



2.3 延伸應用

有了上述的演算法，以下兩個問題也能夠在 $O(n \log n)$ 的時間內被以類似的方式求解出來：

- *Finding the contour of the union of given n circles*
可被運用在數據分析。
- *Connected components of given n circles*
可被運用在圖片處理及電腦視覺。

在這裡我們就不特別詳加敘述此兩問題，因為解法都是建立在沃羅諾伊圖的建構上。

3 閱讀心得

這次的報告，圖例多了不少，我自認為自己空間觀念薄弱，所以在思考這種跟幾何有關的問題時，總會花上比別人更多的時間。但從此篇東大所著作的論文中，仍然得到滿多收穫的。

沃羅諾伊圖在幾何、晶體學、建築學、地理學、氣象學、資訊系統等許多領域都有廣泛的應用。沃羅諾伊圖在繪製地理資料時，能夠將地圖切成許多分塊，每一塊都有專屬最方便的站點。走在路上，如果想要找間便利商店，我們會打開電子地圖搜尋商店，然後挑一間看起來最近的商店朝著他走去。看似簡單的動作由電腦來做卻不容易；最簡單的做法，是先將所有的便利商店列出來，逐一用當前位置算距離，再取出距離最短的一個。

舉例來說，最近台灣空氣汙染嚴重，比如當我們只關心 50 公里內的空氣汙染指數，那麼我們便以每個可能產生汙染的地點（台中發電廠、通霄發電廠、大潭發電廠等）為圓心建立許多 50 公里的圓，取沃羅諾伊圖的交集。

維諾圖在各個領域的應用還有很多，高效率的演算法都能使得我們在尋找交集求解時，省下大量的時間！