

2022 线性代数（理工）期末考试（A 卷）参考答案

一、填空题：（每题 3 分，共 18 分）

1、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，

记矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ，矩阵 $B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$ ，

如果 $|A| = 1$ ，那么 $|B| = \underline{\quad 2 \quad}$

2、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，则 $A^{2022} - 2A^{2021} = \underline{\quad 0 \quad}$

3、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ ，当参数 $\lambda = \underline{\quad 3 \quad}$ 时，矩阵 A 的秩最小。

4、三阶矩阵 A 的特征值为 1, 1, 2，则行列式 $\left| \left(\frac{1}{3} A^2 \right)^{-1} + \frac{1}{2} A^* - E \right| = \underline{\quad 9/4 \quad}$

5、二维平面上的向量 $\beta = (5, 6)^T$ 在基 $\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (3, 4)^T$ 下的坐标为 $\underline{\quad (-1, 2) \quad}$

6、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - ax_2)^2 + (x_2 - bx_3)^2 + (x_3 - cx_1)^2$ ，当且仅当 a, b, c 满足 $\underline{\quad abc \neq 1 \quad}$

条件时，该二次型 f 正定。

二、解答题：（共 68 分）

1、（12 分）解：由题意

$$A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \beta^T\alpha = 2$$

$$A^2 = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2A, \quad A^4 = 8A$$

代入原方程，可化简为： $(A - E)X = \frac{1}{8}\gamma = A \Rightarrow X = A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

也可以使用初等行变换： $\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & 8 & 4 \\ 16 & 0 & 16 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$ 得到 $X = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2、（14 分）

解：（1）对方程组 I 的增广矩阵实施初等行变换，将其化为行最简形：

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -2-6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1-2 \\ 0 & 1 & 0 & -1-4 \\ 0 & 0 & 1 & -2-5 \end{array} \right]$$

可见 $r(A) = r(A, b) = 3$ ，方程组有解，且导出组的基础解系仅包含 1 个向量，可取为

$\xi = (1, 1, 2, 1)^T$, 方程组 I 的特解可取为 $\eta_0 = (-2, -4, -5, 0)^T$, 则方程组 I 的通解可表示为:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \in R$$

(2) 由题意, 方程组 I 与方程组 II 同解, 将特解 $\eta_0 = (-2, -4, -5, 0)^T$ 代入 II 中得:

$$\begin{cases} -2 - 4a + 5 = -5 \\ -4b + 5 = -11 \\ -5 = -c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

代入方程组 II , 可验证方程组 II 与 I 具有相同的行最简形, 即 II 与 I 同解。

3、(12 分) 解: (1) 对矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 8 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{-20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 的第 1 列、第 3 列和第 4 列可构成 A 的列向量组的一个极大无关组。

(2) 矩阵 A 的零空间 $nul(A)$ 的维数是 2;

可取 $\xi_1 = (2, 1, 0, 0, 0)^T$ 和 $\xi_2 = (\frac{20}{3}, 0, \frac{-4}{3}, -1, 1)^T$ 作为 $nul(A)$ 的一组最小生成集。

4、(15 分) 解: (1) 由题意, 令三维向量 α_0 的三个分量分别表示目前从事农、工、商工作的人数, 则

$\alpha_0 = (25, 15, 10)^T$, 1 年后从事农、工、商工作的人数 $\alpha_1 = A\alpha_0$, 其中状态转移矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \text{ 代入计算可得 } \alpha_1 = (21.5, 16.5, 12)^T.$$

(2) 假设 n 年之后从事农、工、商工作的人数为 α_n , 则 $\alpha_n = A^n \alpha_0$, 为方便计算 A^n , 先求 A 的特征值, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.7 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & \lambda - 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ 1 & \lambda - 0.7 & -0.1 \\ 1 & -0.1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 0.5)(\lambda - 0.7)$$

容易求得 A 的特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.7$.

相应的特征向量可取为: $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 注意到 A 是实对称矩阵, 可构造可逆矩阵

$$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \text{ 和对角矩阵 } \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0.5 & \\ & & 0.7 \end{bmatrix}, \text{ 使得 } A = P\Lambda P^{-1}, \text{ 则 } A^n = P\Lambda^n P^{-1},$$

$$\alpha_n = A^n \alpha_0 = P \begin{bmatrix} 1^n & & \\ & 0.5^n & \\ & & 0.7^n \end{bmatrix} P^{-1} \alpha_0 \approx P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \alpha_0 = \begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ 3 \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix}$$

所以只要 n 足够大, $0.5^n \rightarrow 0$, $0.7^n \rightarrow 0$ 从事各行业人员总数趋于相等。

5、(15 分) 解: (1) 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$, 由题意

$$\text{tr}(A) = a + 2 - 2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$|A| = 2(-2a - b^2) = -12 \Rightarrow b = 2$$

$$(2) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3), \text{ 故 } A \text{ 的特征值为: } \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -3$$

$$\text{当 } \lambda_{1,2} = 2 \text{ 时, 解齐次方程 } (2E - A)X = 0, \text{ 得基础解系 } \xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_3 = -3 \text{ 时, 解齐次方程 } (2E - A)X = 0, \text{ 得基础解系 } \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{注意到 } \xi_1, \xi_2 \text{ 正交, 只需将 } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ 单位化即可得到正交变换的矩阵 } Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

二次型 f 在正交变换下的标准形为: $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$

三、证明题 (14 分):

1、(6 分) 证: 由 $A^4\alpha = A \cdot A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2(3A\alpha - 2A^2\alpha) = -6A\alpha + 7A^2\alpha$

$$\text{所以 } B = (\alpha, A^2\alpha, A^4\alpha) = (\alpha, A^2\alpha, -6A\alpha + 7A^2\alpha) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3 维列向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 故 $[\alpha, A\alpha, A^2\alpha]$ 可逆, 又 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, 故矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ 可逆, 矩阵 } B \text{ 可以分解为两个可逆矩阵的乘积, 因此 } B \text{ 可逆.}$$

2、(8 分) 证: 由 $A^2 = A$ 可知, A 的特征值满足: $\lambda^2 = \lambda$, 即 A 的特征值为 0 或者 1.
因为

$$A - A^2 = (E - A)A = O$$

$$\text{故 } r(E - A) + r(A) \leq n$$

$$\text{又 } r(E - A) + r(A) \geq r(E - A + A) = r(E) = n$$

$$\text{故 } r(E - A) + r(A) = n, \text{ 即 } r(E - A) = n - r(A) = n - r.$$

对 $\lambda = 1$, 对应的齐次方程组 $(E - A)X = 0$, 因为 $r(E - A) = n - r$, 故有 r 个线性无关的特征向量

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r;$$

对 $\lambda = 0$, 对应的齐次方程组 $(0E - A)X = 0$, 因为 $r(-A) = r$, 故有 $n - r$ 个线性无关的特征向量

$$\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots, \xi_n;$$

于是存在可逆矩阵 $P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$, 使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} E_r & \\ & O \end{bmatrix}$.