2019~2020（I）线性代数（理工）期末试卷 A 参考解答

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\underline{-1}$；　2. $\underline{3}$；　3. $\underline{6}$；　4. $\underline{0}$；　5. $\underline{-8}$；　6. $\underline{y_1^2-3y_2^2+2y_3^2}$

二、（14 分）解：（1）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k-1\end{pmatrix}$，

因$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是$R^3$的一个基。

$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k-1\end{pmatrix}$是基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵。

（2）设非零向量ξ在两组基下的坐标都是$x=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Ax.$$

由坐标唯一性，有　$Ax=x$

整理得线性方程组：$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k-2\end{pmatrix}x=0$存在非零解，可得$k=-2$.

此时方程组化为$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$，可求得通解为$x=(c,0,-c)^T,c\in R$,

故　$\xi=c\alpha_1-c\alpha_3,c\in R$.

三、（14 分）解：$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&b+2\end{pmatrix}$,

（1）$|A|\neq 0$，即$a\neq 1$且$a\neq -2$时，有唯一解。

（2）$|A|=0$时，$a=1$或$a=-2$.

当$a=-2$，$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&0&0&b-4\end{pmatrix}$,

故当$a=-2,b=4$时，有无穷多解，

此时$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，全部解为$X=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_1&k_2\\-1&-2\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

当$a=1$，$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&b+2\end{pmatrix}$，

故当$a=1,b=-2$时，方程组有无穷多解，

此时$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，全部解为$X=\begin{pmatrix}1&1\\-k_1&-k_2\\k_1-1&k_2-1\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$.

四、（10 分）解：$\begin{bmatrix}2&1&4&2\\3&2&7&1\\1&1&3&1\\1&2&5&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，

故保留配方 1,2,4，且配方 3 可由 1 份配方 1 和两份配方 2 组合出来。

五、（12 分）解：（1）由已知，$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，

所以$\lambda=1$是A的特征值，$\alpha_1=(1,1,0)^T$是A属于 1 的特征向量；

$\lambda=-1$是A的特征值，$\alpha_2=(1,-1,0)^T$是A属于-1的特征向量。

由$r(A)=2$知$|A|=0$，所以$\lambda=0$是A的特征值，

设α_3是A属于 0 的特征向量，因实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交，可取$\alpha_3=(0,0,1)^T$.

故矩阵A的特征值为$1,-1,0$，特征向量依次为$k_1(1,1,0)^T,k_2(1,-1,0)^T,k_3(0,0,1)^T$，其中$k_1,k_2,k_3$均是不为零的任意实数。

（2）令 $P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$.

故 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

六、（12 分）解法 I：$A=\begin{bmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{bmatrix}$,

求解特征方程可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=6$.

对 $\lambda_1=0$，解 $(0E-A)x=0$，得一个基础解系 $p_1=\left(1,-2,1\right)^T$，

单位化得 $q_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$.

对 $\lambda_2=\lambda_3=6$，解 $(6E-A)x=0$，即 $x_1-2x_2+x_3=0$，得一个基础解系 $p_2=\left(-1,0,1\right)^T,p_3=\left(2,1,0\right)^T$，（直接取正交基础解系 $\left(-1,0,1\right)^T,\left(1,1,1\right)^T$ 亦可）

正交单位化得 $q_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$.

令正交阵 $Q=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

则二次型 $f(X)=X^TAX$ 经正交变换 $X=QY$ 化为标准形 $6y_1^2+6y_2^2$.

解法 II：由 α,β 的正交性，有 $A\alpha=6\alpha$，$A\beta=6\beta$，故 α,β 是 A 的属于 6 的特征向量。

注意到 A 的形式，A 的秩不超过 2（等于 2），故 0 是 A 的特征值

因为 A 实对称，故 0 的特征向量与 α,β 正交，可取 $\gamma=(1,-2,1)^T$.

对α,β,γ单位化得

$$q_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,q_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

令正交阵 $Q=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

则 $A=Q\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}Q^T$，或 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

故二次型$f(X)=X^TAX$经正交变换$X=QY$化为标准形 $6y_1^2+6y_2^2$.

解法 III：注意到A的形式和α,β的正交性，

对α,β单位化得 $q_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T,q_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$,

并求得与α,β正交的单位向量为 $q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

有 $A=2\alpha\alpha^T+3\beta\beta^T=6q_1q_1{}^T+6q_2q_2{}^T=\left[q_1,q_2,q_3\right]\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1{}^T\\q_2{}^T\\q_3{}^T\end{bmatrix}$.

令正交阵 $Q=\left[q_1,q_2,q_3\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$,

则 $A=Q\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}Q^T$，或 $Q^TAQ=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

故二次型$f(X)=X^TAX$经正交变换$X=QY$化为标准形 $6y_1^2+6y_2^2$.

七、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 证明：$B=BE_m=BAC=E_nC=C$.

$r_A \ge r_{BA}=n,\quad r_A \ge r_{AC}=m$，故 $r_A \ge \max\{m,n\}$.

又 $r_A \le \min\{m,n\}$，故 $m=n$.

2. 证明：因 $\left(B^TAB\right)^T=B^TA^T\left(B^T\right)^T=B^TAB$，故 B^TAB 为 r 阶对称阵.

任意 r 维向量 $x\ne 0$，有 $Bx\ne 0$，（否则由 $r_B=r$ 有 $x=0$）

则 $x^TB^TABx=(Bx)^TA(Bx)>0$，故 B^TAB 正定。

八、（6 分）（1）证明：由已知，$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=-\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$.

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，　(1)

用 A 左乘并化简得 $(k_1+k_3)\alpha_1-k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

两式相减得 $2k_1\alpha_1+k_3\alpha_2=0$，

因为 α_1,α_2 分属于 A 的不同特征值，故线性无关，所以 $k_1=k_3=0$，

代入(1)式，由 $\alpha_2\ne 0$，可得 $k_2=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

（2）由已知，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，即 $AP=P\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

因为 P 可逆，故 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.