2022-2023 学年秋季学期微积分（I）-1 期末试题

一 填空题(每题3分，共18分)

1 .极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+2\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)=$ ________.

2 .曲线 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=t^2+\ln(t-1) \end{cases}$ 在$x=0$处的法线方程为________.

3 .积分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[x(\sin x)^3+x(2023)^{\cos x}+\sqrt{\pi^2-x^2}\right]dx=$ ________.

4 .已知 $f(x)=(x^2+x-2)\cos x$, 则 $f^{(2023)}(0)=$ ________.

5 .不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=$ ________.

6 .设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导，其反函数为 $y=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x-2}{\sin x}=2$, 则$\varphi(1+x^2)$在$x=1$处的导数为 ________.

二 (8分) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{\ln(\cos x)}$.

三 (10分) 设$a>0$. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(e^{x^a}-1), & x>0\\ x^b\arctan x, & x\le 0\end{cases}$. 试讨论

(1) 当a,b取何值时函数在$x=0$处连续.

(2) 当a,b取何值时函数在$x=0$处可导, 并求$f'(0)$.

四 (8分) 设函数 $y=y(x)$由方程$x^3+y^3-3xy=1$确定, 且二阶导函数$y''(x)$连续. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)y+1}{x^2}$.

五 (8分) 求曲线$y=\dfrac{x^3\arctan x}{x^2-1}$的渐近线.

六 (8分) 当$x\to 0$时, 无穷小量$\displaystyle\int_{\sin x}^{x} x(e^t-1)dt$与$ax^b$等价, 求$a,b$的值.

七 (10分) 设$a>0$, 求定积分$I=\displaystyle\int_0^a\left(|x^2-\frac{a}{2}x|+\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$.

八 (10分) 求曲线$y=\sqrt{x}$在区间$[1,2]$内的一条切线, 使得该切线与曲线$y=\sqrt{x}$及直线$x=1$, $x=2$所围图形D的面积最小; 并求此时D绕y轴旋转一周形成的旋转体体积V_y.

九 (10分) 求微分方程$y''-3y'+2y=(2x+4)e^{2x}$的通解.

十 (10分) 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶连续可导. 设$f(x)\ge 0, f''(x)<0$.
令$I_n=\displaystyle\int_0^1 f(x^n)dx$ (n是自然数).

(1) 若存在$c\in[0,1]$使得$f(c)\ne 0$. 证明: $I_n>0$.

(2) 证明: $I_n\le f(\dfrac{1}{n+1})$.

(3) 设$f(0)=0$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.