

# 2022 线性代数（理工）期末考试（A 卷）参考答案

## 一、填空题：（每题 3 分，共 18 分）

1、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  均为 3 维列向量，

记矩阵  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , 矩阵  $B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$ ,

如果  $|A| = 1$ , 那么  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$

2、设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $A^{2022} - 2A^{2021} = \underline{\hspace{2cm}} \mathbf{O}$

3、设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ , 当参数  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}} 3 \underline{\hspace{2cm}}$  时, 矩阵  $A$  的秩最小。

4、三阶矩阵  $A$  的特征值为 1, 1, 2, 则行列式  $\left| \left( \frac{1}{3} A^2 \right)^{-1} + \frac{1}{2} A^* - E \right| = \underline{\hspace{2cm}} 9/4 \underline{\hspace{2cm}}$

5、二维平面上的向量  $\beta = (5, 6)^T$  在基  $\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (3, 4)^T$  下的坐标为  $\underline{\hspace{2cm}} (-1, 2) \underline{\hspace{2cm}}$

6、设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - ax_2)^2 + (x_2 - bx_3)^2 + (x_3 - cx_1)^2$ , 当且仅当  $a, b, c$  满足  $\underline{\hspace{2cm}} abc \neq 1 \underline{\hspace{2cm}}$

条件时, 该二次型  $f$  正定。

## 二、解答题：（共 68 分）

1、(12 分) 解: 由题意

$$A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \beta^T\alpha = 2$$
$$A^2 = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2A, \quad A^4 = 8A$$

代入原方程, 可化简为:  $(A - E)X = \frac{1}{8}\gamma = A \Rightarrow X = A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

也可以使用初等行变换:  $\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 4 & 8 & 4 \\ 16 & 0 & 16 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$  得到  $X = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2、(14 分)

解: (1) 对方程组  $I$  的增广矩阵实施初等行变换, 将其化为行最简形:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

可见  $r(A) = r(A, b) = 3$ , 方程组有解, 且导出组的基础解系仅包含 1 个向量, 可取为

$\xi = (1, 1, 2, 1)^T$ , 方程组 I 的特解可取为  $\eta_0 = (-2, -4, -5, 0)^T$ , 则方程组 I 的通解可表示为:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \in R$$

(2) 由题意, 方程组 I 与方程组 II 同解, 将特解  $\eta_0 = (-2, -4, -5, 0)^T$  代入 II 中得:

$$\begin{cases} -2 - 4a + 5 = -5 \\ -4b + 5 = -11 \\ -5 = -c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

代入方程组 II, 可验证方程组 II 与 I 具有相同的行最简形, 即 II 与 I 同解。

3、(12 分) 解: (1) 对矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 8 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{-20}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以矩阵 A 的第 1 列、第 3 列和第 4 列可构成 A 的列向量组的一个极大无关组。

(2) 矩阵 A 的零空间  $nul(A)$  的维数是 2;

可取  $\xi_1 = (2, 1, 0, 0, 0)^T$  和  $\xi_2 = (\frac{20}{3}, 0, \frac{-4}{3}, -1, 1)^T$  作为  $nul(A)$  的一组最小生成集。

4、(15 分) 解: (1) 由题意, 令三维向量  $\alpha_0$  的三个分量分别表示目前从事农、工、商工作的人数, 则

$\alpha_0 = (25, 15, 10)^T$ , 1 年后从事农、工、商工作的人数  $\alpha_1 = A\alpha_0$ , 其中状态转移矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \text{ 代入计算可得 } \alpha_1 = (21.5, 16.5, 12)^T.$$

(2) 假设 n 年之后从事农、工、商工作的人数为  $\alpha_n$ , 则  $\alpha_n = A^n \alpha_0$ , 为方便计算  $A^n$ , 先求 A 的特征值, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.7 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & \lambda - 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ 1 & \lambda - 0.7 & -0.1 \\ 1 & -0.1 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 0.5)(\lambda - 0.7)$$

容易求得 A 的特征值为:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0.5$ ,  $\lambda_3 = 0.7$ .

相应的特征向量可取为:  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 注意到  $A$  是实对称矩阵, 可构造可逆矩阵

$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$  和对角矩阵  $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0.5 & \\ & & 0.7 \end{bmatrix}$ , 使得  $A = P\Lambda P^{-1}$ , 则  $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ ,

$$\alpha_n = A^n \alpha_0 = P \begin{bmatrix} 1^n & & \\ & 0.5^n & \\ & & 0.7^n \end{bmatrix} P^{-1} \alpha_0 \approx P \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \alpha_0 = \begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix}$$

所以只要  $n$  足够大,  $0.5^n \rightarrow 0$ ,  $0.7^n \rightarrow 0$  从事各行业人员总数趋于相等。

5、(15分) 解: (1) 二次型  $f$  的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}$ , 由题意

$$tr(A) = a + 2 - 2 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$|A| = 2(-2a - b^2) = -12 \Rightarrow b = 2$$

$$(2) |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3), \text{ 故 } A \text{ 的特征值为: } \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -3$$

当  $\lambda_{1,2} = 2$  时, 解齐次方程  $(2E - A)X = 0$ , 得基础解系  $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

当  $\lambda_3 = -3$  时, 解齐次方程  $(2E - A)X = 0$ , 得基础解系  $\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

注意到  $\xi_1, \xi_2$  正交, 只需将  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  单位化即可得到正交变换的矩阵  $Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

二次型  $f$  在正交变换下的标准形为:  $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$

三、证明题 (14 分):

1、(6分) 证: 由  $A^4\alpha = A \cdot A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2A^3\alpha = 3A^2\alpha - 2(3A\alpha - 2A^2\alpha) = -6A\alpha + 7A^2\alpha$

$$\text{所以 } B = (\alpha, A^2\alpha, A^4\alpha) = (\alpha, A^2\alpha, -6A\alpha + 7A^2\alpha) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

3 维列向量组  $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$  线性无关, 故  $[\alpha, A\alpha, A^2\alpha]$  可逆, 又  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ , 故矩阵

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$  可逆, 矩阵  $B$  可以分解为两个可逆矩阵的乘积, 因此  $B$  可逆。

2、(8分) 证: 由  $A^2 = A$  可知,  $A$  的特征值满足:  $\lambda^2 = \lambda$ , 即  $A$  的特征值为 0 或者 1. 因为

$$A - A^2 = (E - A)A = O$$

$$\text{故 } r(E - A) + r(A) \leq n$$

$$\text{又 } r(E - A) + r(A) \geq r(E - A + A) = r(E) = n$$

$$\text{故 } r(E - A) + r(A) = n, \text{ 即 } r(E - A) = n - r(A) = n - r.$$

对  $\lambda = 1$ , 对应的齐次方程组  $(E - A)X = 0$ , 因为  $r(E - A) = n - r$ , 故有  $r$  个线性无关的特征向量

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r;$$

对  $\lambda = 0$ , 对应的齐次方程组  $(0E - A)X = 0$ , 因为  $r(-A) = r$ , 故有  $n - r$  个线性无关的特征向量

$$\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots, \xi_n;$$

于是存在可逆矩阵  $P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ , 使得  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} E_r & \\ & O \end{bmatrix}$ .