



学院 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 教师 _____

常数项级数

一、用定义或性质判别下列级数的敛散性.

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1};$

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

前 n 项和 $S_n = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

$$+ \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{3}{2} (n \rightarrow \infty)$$

故收敛

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$

前 n 项和 $S_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$= \sqrt{n+1} - 1 \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$$

故发散

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{n^4} + \frac{2}{n});$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4} \text{ 收敛}$$

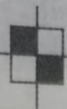
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \text{ 发散}$$

故发散

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n};$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{2})^n$$

故收敛



学院

姓名

学号

教师

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{2n+1};$$

$$\ln \frac{n}{2n+1} \rightarrow \ln \frac{1}{2} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故发散

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n});$$

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ 发散

$$\text{法二: } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$$

$$\text{前 } n \text{ 项和 } S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

故发散

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 \neq 0$$

故发散

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\text{前 } n \text{ 项和 } S_n = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - (\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - (\sqrt{2} - 1) \rightarrow 1 - \sqrt{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

故收敛

学院

姓名

学号

教师

二、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = 3 - \frac{n}{2^n}$, 求 u_n 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$u_1 = S_1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$n \geq 2, u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n-2}{2^n}$$

$$\therefore u_n = \begin{cases} \frac{5}{2}, & n=1 \\ \frac{n-2}{2^n}, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3.$$

三、将无限循环小数 $0.\dot{2} = 0.222\cdots$ 表示成无常级数, 并进一步表示成整数的比值.

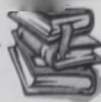
$$0.\dot{2} = 0.2 + 0.02 + 0.002 + \cdots$$

$$= 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{2}{9}$$



学院

姓名

学号

教师

四、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 也收敛.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} + u_n)$ 收敛.

五、设数列 $\{na_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 也收敛.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 的前 n 项和

$$S_n = (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + 3(a_3 - a_2) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})$$

$$= -a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} + na_n.$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k + na_n$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ 极限存在

$\therefore na_n$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 存在.

故 S_n 收敛.



学院

姓名

学号

教师

常数项级数的审敛法

一、用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的敛散性.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2 + n + 1};$$

$$\frac{2}{3n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2 + n + 1}$ 收敛

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{3^n} \text{ 收敛}$$

由比较判别法的极限形式知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{3^n} \text{ 收敛}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}};$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot n} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散
由极限审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ 发散

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7 + 2n}}.$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7 + 2n}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \text{ 收敛}$$

由极限审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7 + 2n}}$ 收敛

二、用比值审敛法或根值审敛法判别下列级数的敛散性.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}} = \frac{1}{5} < 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n} \text{ 收敛}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n};$$

$$\text{令 } u_n = \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{|a|}{e}$$

③ 当 $|a| > e$ 时, 即 $|a| > e$, 根据②中的 2° 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$ 发散

2° 当 $|a| < e$ 时, 根据②中的 1° 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$ 收敛

① 当 $|a| < e$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow$ 原级数收敛

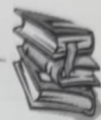
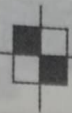
② 当 $|a| = e$ 时, 1° $a = -e$ 时, 原级数 = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n \cdot n!}{n^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$$

单调递减 (上学期讲过)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n} \neq 0, \text{ 故原级数发散}$$

2° $a = e$ 时, 原级数发散 (因为一般项极限 $\neq 0$)



学院

姓名

学号

教师

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{3n^2+n} \right)^n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+3}{3n^2+n} \right)^n} = \frac{1}{3} < 1$$

由根值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{3n^2+n} \right)^n$ 收敛.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n, \text{ 其中 } a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

① 当 $b=0$ 时, 原级数收敛

$$\text{② 当 } b \neq 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a_n} \right)^n} = \begin{cases} \frac{b}{a} & a \neq 0 \\ +\infty & a = 0 \end{cases}$$

1° 当 $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n} \right)^n$ 收敛 \Rightarrow 原级数收敛

2° 当 $\left| \frac{b}{a} \right| = 1$ 时, 无法判断.

3° 当 $\left| \frac{b}{a} \right| > 1$ 时, 原级数发散.

三、判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散. 4° 当 $a=0$ 时, 原级数发散.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1};$$

$$U_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 发散}$$

$$U_n \downarrow \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$ 收敛

故条件收敛

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!};$$

$$U_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ 收敛}$$

则绝对收敛

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{3^n};$$

$$\left| \frac{\sin 3n}{3^n} \right| \leq \frac{1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{3^n} \text{ 绝对收敛}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ 其中 } a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3n+1}{2n+1} a_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}$$



学院

姓名

学号

教师

四、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 且 $a_n \leq c_n \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - (b_n - c_n)$

$\because 0 \leq b_n - c_n \leq b_n - a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - c_n$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛

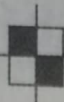
五、证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n, \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 均收敛.

证明: $\because |u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$ 收敛

将 $v_n = \frac{1}{n}$ 即证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛.



学院

姓名

学号

教师

六、证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{3n}}{n! a^n} = 0$.证明: 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{3n}}{n! a^n}$

$$U_n = \frac{b^{3n}}{n! |a|^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b^3}{a} \right| \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= 0 < 1$$

 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0.$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^{3n}}{n! a^n} = 0.$$

幂级数

一、求下列幂级数的收敛半径和收敛域。

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[n]{n}};$

$$a_{n+1} = \frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}} = 2$$

$$\text{收敛半径 } R = \frac{1}{2}$$

$$\text{收敛区间 } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 收敛

$$\therefore \text{收敛域 } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2};$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |4x+1| \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= |4x+1|$$

由比值审敛法知, $|4x+1| < 1$ 时, 即 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 时, 收敛 $|4x+1| > 1$ 即 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 0$ 时, 发散当 $|4x+1| = 1$ 时 收敛

$$\text{收敛域为 } [-\frac{1}{2}, 0]$$

二、求和函数。

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1};$

$$\text{收敛域 } (-1, 1)$$

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 内, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} x^{n+1})''$$

$$= \frac{1}{2} (\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1})''$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{x^2}{1-x^2})''$$

$$= \frac{1}{(1-x)^3}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4^n} x^{2n-2};$

$$U_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

由比值审敛法知, $\frac{x^2}{4} < 1$, 即 $|x| < 2$ 时, 级数收敛 $|x| > 2$ 时, 级数发散. \therefore 收敛半径 $R = 2$.当 $|x| = 2$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4^n}$ 发散

$$\therefore \text{收敛域为 } (-2, 2)$$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = 0$$

$$\therefore \text{收敛半径 } R = 0$$

$$\text{收敛域 } (-\infty, +\infty)$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}};$

$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}} = x \cdot S(x)$$

$$\text{收敛域为 } [-3, 3]$$

$$\text{在 } (-3, 3) \text{ 内, } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{3^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{x^2}{9})^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}}$$

$$= \frac{3}{9+x^2}$$

$$\therefore S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{3}{9+t^2} dt = \arctan \frac{x}{3}, x \in (-3, 3)$$

 $x \cdot \arctan \frac{x}{3}$ 在 $x = -3$ 和 $x = 3$ 处连续

$$\therefore \text{和函数} = x \cdot \arctan \frac{x}{3}, x \in [-3, 3]$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ 之和.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n+1})'' - \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)'$$

$$= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' - \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} = \frac{1}{5} \frac{1+\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^3}$$

$$= \frac{15}{32}$$

三、求 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^2 - n + 1)}{2^n}$ 之和.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n(n-1) \cdot \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{4} \cdot 8 \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{16}{27} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{22}{27}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)''$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right)''$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3}$$

四、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 的收敛半径和收敛区间.

$\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

$$\text{令 } y = x+1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^n \text{ 收敛半径 } R = 1$$

$$\therefore |y| < 1 \text{ 即 } -2 < x < 0.$$

$$\text{收敛区间 } (-2, 0)$$

五、将下列

1. $f(x) =$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$-1 < x < 1$$

3. $\operatorname{ch} x =$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

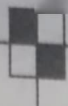
$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

六、将函

$$f(x) =$$



学院

姓名

学号

教师

五、将下列函数展开成 x 的幂级数, 并求展开式成立的区间.

1. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x};$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\underline{-1 < x < 1}$$

2. $f(x) = \arctan \frac{x}{3};$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}}{1 + (\frac{x}{3})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{x^2}{9}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{9}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{3^{2n+1}}$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}}$$

$$\underline{-3 < x < 3.}$$

3. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\underline{x \in (-\infty, +\infty)}$$

六、将函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ 展开成 $(x-5)$ 的幂级数.

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}$$

$$= \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-5}{2}\right)^n - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-5}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] \cdot (x-5)^n$$

$$\underline{|x-5| < 2.}$$



学院

姓名

学号

教师

七、将函数 e^x 展开成 $(x-e)$ 的幂级数.

$$\begin{aligned}
 e^x &= e^{x-e+e} = e^e \cdot e^{x-e} \\
 &= e^e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-e)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^e}{n!} \cdot (x-e)^n \\
 x &\in (-\infty, +\infty)
 \end{aligned}$$

八、将函数 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(10)}(0)$ 的值.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot e^x \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < 1
 \end{aligned}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right)x + \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \cdots + \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)x^n + \cdots$$

$$x^{10} \text{ 的系数为 } \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!}$$

$$\therefore f^{(10)}(0) = \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!}\right) \cdot 10!$$

九、求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4} dx$ 的近似值, 误差不超过 10^{-4} .

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n \quad |x| < 1$$

$$= 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 - \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512 \times 9} = \frac{1}{4608}$$

$$\frac{1}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \leq \frac{1}{10000}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9$$