四川大学期末考试试题 (闭卷)

(2023 – 2024 学年第 1 学期)　A 卷

课程号:201056030　课序号: 01,02　课程名称: 数学物理方法　任课教师: 王泉　成绩:

适用专业年级:　学生人数: 235　印题份数: 260　学号:　姓名:

考 试 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定(修订)》, 郑重承诺:

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点;

2、不带手机进入考场;

3、考试期间遵守以上两项规定, 若有违规行为, 同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

一. (30 分) 填空题 (每小题 5 分)

1 (1) 设 $\mathrm{Re}z > 0, \mathrm{Im}z < 0$ 且 $z^5 = 1$, 则 $\arg(z^4) = (\quad)$.

(2) 设解析函数的 $f(z)$ 的实部为 $u(x,y) = x^2 - y^2 + 4x$, $f'(z-2) = (\quad)$.

(3) 若 C 为 $|z| = 1$, 则 $\int_C \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{|z|}\right) dz = (\quad)$.

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2023}{n}\right)^n z^n$ 的收敛半径 $R = (\quad)$.

(5) $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z^2}$ 的 ( ) 阶极点.

(6) 函数 $f(x) = \frac{e^{ix}}{1+x^2}$ 的傅立叶变换为 ( ).

二. (10 分) 将函数 $f(z) = \frac{z+4}{z(z-1)}$ 在指定圆环内展开为以 1 为中心的洛朗级数.

~~(1) $0 < |z| < 1$　(2) $1 < |z| < +\infty$.~~

$0<|z-1|<1$　$1<|z-1|<\infty$

三. (10 分) 采用留数定理计算下列积分

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2+\cos x}\, dx \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}\, dx$$

四. (10 分) 解下列方程

$$\begin{cases} u_{tt} = w_{xx} - t\sin x, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos x, \quad u_t|_{t=0} = -\sin x. \end{cases}$$

五. (14 分) 采用分离变量法求解热传导方程 $\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \cos \frac{5\pi}{2l} x. \end{cases}$

六. (14 分) 采用适当的方法求解下列方程

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = \cos \pi y, \\ u_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=1} = 0, \end{cases}$$

七. (1)(6 分) 采用 Laplace 变换法求解

$$\begin{cases} y' + 2023y = f(t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(2) (6 分) 使用 1) 中的结论求解

$$\begin{cases} y' + 2023y = e^{-t}, \\ y(0) = \frac{2027}{2022}. \end{cases}$$

可能用到的参考公式:

$$e^{-\beta x^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \quad e^{-\beta|x|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} \quad e^{\alpha t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{p - \alpha}$$

$$f''(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \quad f'(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} pF(p) - f(0)$$

$$f(t) = \sum_{k=1} \mathrm{Res}_{p=p_k} \left[F(p) e^{pt} \right], \quad \text{其中 } p_k \text{ 是 } F(p) \text{ 的孤立奇点.}$$