学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

# 常数项级数

一、用定义或性质判别下列级数的敛散性.

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$;

$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

前$n$项和 $S_n = (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$

$+ \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \to \frac{3}{2} (n \to \infty)$

故收敛

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

前$n$项和 $S_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1} - 1 \to \infty \ (n \to \infty)$

故发散

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{n^4} + \frac{2}{n})$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4}$ 收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ 发散

故发散

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$;

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{2})^n$

故收敛

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{2n+1}$；

$\ln\frac{n}{2n+1} \to \ln\frac{1}{2} \neq 0 \quad (n\to\infty)$

故发散

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$；

$\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \quad (n\to\infty)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散

法二：$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1)-\ln n$

前n项和 $S_n = (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)$

$= \ln(n+1) \to \infty \quad (n\to\infty)$

故发散

7. $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})$；

$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

$=1\neq 0$

故发散

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

$= \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

前n项和 $S_n = (\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{2}-1)$

$= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1) \to 1-\sqrt{2} \quad (n\to\infty)$

故收敛.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

二、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = 3 - \frac{n}{2^n}$，求 $u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$u_1 = S_1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$n \geq 2, u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n-2}{2^n}$

$\therefore u_n = \begin{cases} \frac{5}{2}, & n=1 \\ \frac{n-2}{2^n}, & n \geq 2 \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} S_n = 3.$

三、将无限循环小数 $0.\dot{2} = 0.222\cdots$ 表示成无常级数，并进一步表示成整数的比值.

$0.\dot{2} = 0.2 + 0.02 + 0.002 + \cdots$

$= 2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$

$= \frac{2}{9}$

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

四、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$也收敛.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}+u_n)$ 收敛.

五、设数列$\{na_n\}$收敛,且级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛,证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$也收敛.

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$的前n项和

$$S_n = (a_1-a_0)+2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+n(a_n-a_{n-1})$$

$$= -a_0-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}+na_n$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k + na_n$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ 极限存在

$\because na_n$ 收敛. $\lim_{n\to\infty} na_n$ 存在.

故 $S_n$ 收敛.

学院＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿

# 常数项级数的审敛法

一、用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的敛散性.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n^2+n+1}$；

$\frac{2}{3n^2+n+1}\leqslant\frac{1}{n^2}$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n^2+n+1}$ 收敛

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$；

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}=1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3^n}$ 收敛

由比较判别法的极限形式知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$ 收敛

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

由极限审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n}}$.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}=1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛

由极限审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n}}$ 收敛

二、用比值审敛法或根值审敛法判别下列级数的敛散性.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$ 收敛

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}$；

令 $U_n=\frac{|a|^n\cdot n!}{n^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to\infty}|a|\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$=\frac{|a|}{e}$

①当 $|a|<e$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 原级数收敛

②当 $|a|=e$ 时. 1° $a=-e$ 时，原级数 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-e)^n\cdot n!}{n^n}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\underbrace{\frac{e^n\cdot n!}{n^n}}_{\text{单调递增(上学期讲过)}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^n}\neq0$. 故原级数发散

2°. $a=e$ 时，原级数发散(因为一般项极限 $\neq0$)

③当 $|a|>e$ 时，即 1° $a>e$，根据②中的2°

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散

2°当 $a<-e$ 时，根据②中的1°得

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 发散.

学院＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{3n^2+n}\right)^n$;

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+3}{3n^2+n}\right)^n}=\frac{1}{3}<1$

由根值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{3n^2+n}\right)^n$ 收敛.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$,其中 $a_n\to a(n\to\infty)$.

① 当 $b=0$ 时,原级数收敛

② 当 $b\neq 0$ 时, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{b}{a_n}\right)^n\right|}=\begin{cases}\frac{b}{a} & a\neq 0\\ +\infty, & a=0\end{cases}$

1° 当 $|\frac{b}{a}|<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{b}{a_n}|^n$ 收敛 ⇒ 原级数收敛

2° 当 $|\frac{b}{a}|=1$ 时. 无法判断.

3° 当 $|\frac{b}{a}|>1$ 时, 原级数发散.

4° 当 $a=0$ 时, 原级数发散.

三、判别下列级数是绝对收敛、条件收敛还是发散.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$;

$u_n=\frac{n}{n^2+1}$ , $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

$u_n\downarrow\to 0\ (n\to\infty)$

由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

故条件收敛

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$;

$u_n=\frac{10^n}{n!}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0<1$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

则绝对收敛

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{3^n}$;

$\left|\frac{\sin 3n}{3^n}\right|\leq\frac{1}{3^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{3^n}$ 绝对收敛.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,其中 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{3n+1}{2n+1}a_n$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}>1$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

四、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均收敛，且$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$也收敛.

证明：$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n-(b_n-c_n)$

$\because 0 \leqslant b_n-c_n \leqslant b_n-a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} b_n-c_n$收敛

故$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛

五、证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$及$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$及$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$均收敛.

证明：$\because |U_nV_n| \leqslant \frac{U_n^2+V_n^2}{2}$

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} U_nV_n$收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2+V_n^2+2U_nV_n$收敛

将$V_n = \frac{1}{n}$ 即证$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n}$收敛.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师

六、证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}=0$.

证明：考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}$

$$U_n=\frac{|b|^{3n}}{n!|a|^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b^3}{a}\right|\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$=0<1$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ 收敛

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}=0$.

# 幂级数

一、求下列幂级数的收敛半径和收敛域.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$;

$a_{n+1}=\frac{(-2)^n}{\sqrt[4]{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+1}}=2$

收敛半径 $R=\frac{1}{2}$

收敛区间 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ 发散

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

2. $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4^n}x^{2n-2}}_{U_n(x)}$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}$

由比值审敛法知，$\frac{x^2}{4}<1$，即 $|x|<2$ 时，级数收敛

$|x|>2$ 时，级数发散．$\therefore$ 收敛半径 $R=2$.

当 $|x|=2$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4}$ 发散

$\therefore$ 收敛域为 $(-2,2)$

3. $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x+1)^n}{n^2}}_{U_n(x)}$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}(x)|}{|U_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}|4x+1|\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}$

$=|4x+1|$

由比值审敛法知，$|4x+1|<1$ 时，即 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，收敛

$|4x+1|>1$ 即 $x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>0$ 时，发散

当 $|4x+1|=1$ 时 收敛

收敛域为 $[-\frac{1}{2},0]$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(\ln n)^n}$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=0$

$\therefore$ 收敛半径 $R=0$

收敛域 $(-\infty,+\infty)$

二、求和函数.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$;

收敛域 $(-1,1)$.

在 $(-1,1)$ 内，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}x^{n+1})''$

$=\frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$

$=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{1-x^2})''$

$=\frac{1}{(1-x)^3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}$;

$=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}=x\cdot S(x)$

收敛域为 $[-3,3]$

在 $(-3,3)$ 内，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{3^{2n-1}}$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{x^2}{9})^{n-1}$

$=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}$

$=\frac{3}{9+x^2}$

$\therefore S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{3}{9+t^2}\,dt=\arctan\frac{x}{3}$，$x\in(-3,3)$

$x\cdot\arctan\frac{x}{3}$ 在 $x=-3$ 和 $x=3$ 处连续

$\therefore$ 和函数 $=x\cdot\arctan\frac{x}{3}$，$x\in[-3,3]$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ 之和.

$= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(x^{n+1})'' - \sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$

$= (\frac{x^2}{1-x})'' - (\frac{x}{1-x})'$

$= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}$

$= \frac{1+x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n} = \frac{1}{5} \frac{1+\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^3}$

$= \frac{15}{32}$

三、求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n^2-n+1)}{2^n}$ 之和.

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot n(n-1) \cdot \frac{1}{2^n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n}$.

$\Downarrow$

$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot (-\frac{1}{2})^{n-2}$  $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$

$= (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)''$

$= (\frac{1}{1-x})''$

$= \frac{2}{(1-x)^3}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{4} \cdot S(-\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{27} + \frac{2}{3}$

$= \frac{22}{27}$.

四、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1，求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^n$ 的收敛半径和收敛区间.

$\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$

令 $y = x+1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} na_n y^n$ 收敛半径 $R=1$

$\therefore |y|<1$ 即 $-2<x<0$.

收敛区间 $(-2,0)$

五、将下列函

1. $f(x) =$

$f(x) = \ln(1+$

$= \sum_{n=0}^{\infty}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}$

$-1<$

3. $\text{ch}x =$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}$

$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}$

$\text{ch}x = \sum_{k=0}^{\infty}$

$x \in (-$

六、将函

$f(x) =$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、将下列函数展开成 $x$ 的幂级数,并求展开式成立的区间.

1. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$;

$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-x)^{n+1}}{n+1}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}$

$-1<x<1$

2. $f(x)=\arctan\frac{x}{3}$;

$f'(x)=\frac{\frac{1}{3}}{1+(\frac{x}{3})^2}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{9})^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{3^{2n+1}}$

$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$

$-3<x<3.$

3. $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$

$\operatorname{ch}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

$x\in(-\infty,+\infty)$

六、将函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$ 展开成 $(x-5)$ 的幂级数.

$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}$

$=\frac{3}{(x-5)+2}-\frac{2}{(x-5+3)}$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}$

$=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-5}{2})^n-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-5}{3})^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^n-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{3})^n]\cdot(x-5)^n$

$|x-5|<2.$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、将函数 $e^x$ 展开成 $(x-e)$ 的幂级数.

$e^x = e^{x-e+e}$

$= e^e \cdot e^{x-e}$

$= e^e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-e)^n}{n!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^e}{n!} \cdot (x-e)^n.$

$x \in (-\infty, +\infty)$

八、将函数 $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ 展开成 $x$ 的幂级数,并求 $f^{(10)}(0)$ 的值.

$f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^x$

$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad |x|<1$

$= 1 + (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!})x + (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!})x^2 + \cdots + (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!})x^n + \cdots$

$x^{10}$的系数为 $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!}$

$\therefore f^{(10)}(0) = (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!}) \cdot 10!$

九、求 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4} dx$ 的近似值,误差不超过 $10^{-4}$.

$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n \qquad |x|<1$

$= 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 + \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^9 - \frac{1}{13}(\frac{1}{2})^{13} + \cdots$

$\because \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^9 = \frac{1}{512 \times 9} = \frac{1}{4608}$

$\frac{1}{13}(\frac{1}{2})^{13} < \frac{1}{10000}$

$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 + \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^9.$