《微积分I-1》参考答案及评分标准-2022秋

一. **填空题**(每题3分, 共18分)

1. $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$ 2. $y=\frac{2}{5}x+4$ 3. $\frac{4}{3}\pi+\frac{\pi^3}{2}$

4. -2023 5. $(2x-4\sqrt{x}+4)e^{\sqrt{x}}+C$ 6. 2

二.(8分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{\ln(\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{\cos x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{-\frac{1}{2}x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-(\cos x)^2}(-\sin x)}{-x}$$
$$=e^{-1}$$

三.(10分: (1) 4分, (2) 6分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x^a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{a-1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^b\arctan x=\lim\limits_{x\to 0^-}x^{b+1}=0\,(\because b\geq 0)$

要使$f(x)$在$x=0$处有意义且连续则$a>1$且$b\geq 0$.

(2) 当$x>0$时, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{a-2}$

当$x<0$时, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x^b$

当$a=2,b=0$时$f(x)$在$x=0$处可导, 且$f'(0)=1$;

当$a>2,b>0$时$f(x)$在$x=0$处可导, 且$f'(0)=0$.

四.(8分)

$x=0$时$,y=1,y'=1,y''=0.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)y+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y+(x-1)y'}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2y'+(x-1)y''}{2}=1$$

五.(8分)

垂直(铅直)渐近线两条: $x=\pm 1$

水平渐近线: 无

斜渐近线两条: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-\frac{\pi}{2}x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(y+\frac{\pi}{2}x)=-1$

$y=\frac{\pi}{2}x-1, y=-\frac{\pi}{2}x-1$

六.(8分)

$$f(x)=\int_{\sin x}^{x}x(e^t-1)dt=x\int_{\sin x}^{x}(e^t-1)dt\overset{\exists\xi}{=}x(e^\xi-1)(x-\sin x)$$

$$\sim xx(x-\sin x)\sim\frac{1}{6}x^5.$$

故$a=\frac{1}{6},b=5.$

七.(10分)

$I_1=\int_0^a|x(x-a/2)|=\int_0^{a/2}x(a/2-x)dx+\int_{a/2}^a x(x-a/2))dx=\frac{a^3}{8}$

$I_2=\int_0^a\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}dt=\frac{\pi}{4}$

$I_1+I_2=\frac{a^3}{8}+\frac{\pi}{4}$

八.(10分, (1)6分, (2)4分)

(1) 设切点为$(t,\sqrt{t})$. 切线为: $y=\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}$.

$D(t)=\int_1^2(\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}-\sqrt{x})dx=\frac{3}{4\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

$D'(t)=\frac{1}{8t\sqrt{t}}(2t-3)=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$

$t<3/2\Rightarrow D'(t)<0; t>3/2\Rightarrow D'(t)>0$. 故$t=3/2$是$D(t)$的极小值点且为最小值点.

切线为$y=\frac{\sqrt{6}}{6}x+\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2) 由"柱壳法" $V_y=\int_1^2 2\pi x(y_1-y_2)dx=\int_1^2 2\pi x(\frac{\sqrt{6}}{6}x+\frac{\sqrt{6}}{4}-\sqrt{x})dx=\pi(\frac{55}{36}\sqrt{6}-\frac{16}{5}\sqrt{2}+\frac{4}{5})$.

九.(10分)

特征方程: $r^2-3r+2=0\Rightarrow r_1=1, r_2=2$

对应齐次方程的通解: $C_1e^x+C_2e^{2x}$

设非齐次方程的特解为$y=x(ax+b)e^{2x}$ ($\lambda=2$是单特征值), 代入原方程或书上结论得$a=1, b=2$

故非齐次方程的通解为$C_1e^x+C_2e^{2x}+x(x+2)e^{2x}$.

十.(10分: (1)4分, (2)4分, (3)2分)

(1) 存在$c\in[0,1]$使得$f(c)\neq 0$, 则$f((\sqrt[n]{c})^n)\neq 0$. 故$f((\sqrt[n]{c})^n)>0$.

$f(x^n)$连续$\Rightarrow$存在$d,e\in[0,1], d<e, \sqrt[n]{c}\in[d,e]$, 使得在$[d,e]$上$f(x^n)>0$. 2分

因而$I_n=\int_0^1 f(x^n)dx=\int_0^d f(x^n)dx+\int_d^e f(x^n)dx+\int_e^1 f(x^n)dx>0$

(2) 在$x_0=\frac{1}{n+1}$处应用泰勒公式得$f(x)=f(\frac{1}{n+1})+f'(\frac{1}{n+1})(x-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{1}{n+1})^2$

$f(x^n)=f(\frac{1}{n+1})+f'(\frac{1}{n+1})(x^n-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x^n-\frac{1}{n+1})^2$

$I_n=\int_0^1 f(x^n)dx=\int_0^1 f(\frac{1}{n+1})dx+\int_0^1 f'(\frac{1}{n+1})(x^n-\frac{1}{n+1})dx+\int_0^1\frac{1}{2}f''(\xi)(x^n-\frac{1}{n+1})^2dx\le\int_0^1 f(\frac{1}{n+1})dx+\int_0^1 f'(\frac{1}{n+1})(x^n-\frac{1}{n+1})dx=f(\frac{1}{n+1})$.

(3) 连续性$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n+1})=f(0)=0$

$0\le I_n\le f(\frac{1}{n+1})$ 两边取极限$\lim\limits_{n\to\infty}$, 由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$