

Úloha 3 - vrstevnaté neurónové siete

Prvá časť

Tak ako aj na prednáške je dobre si stanoviť pár predpokladov.

1. Váhy tohto neurónu sú náhodné hodnoty z rovnomerného rozdelenia z intervalu $\langle -a, a \rangle$. Z tohto vyplýva, že stredná hodnota váh neurónov je rovná $\int_{-a}^a x \cdot \frac{1}{2a} = 0$.
2. Vieme že potenciál skrytého neurónu je definovaný :

Potenciál skrytého neuronu je dán pomocí:

$$\xi = w_0 + w_1 x_1 + \dots + w_n x_n$$

$x_i \dots$ aktivita i -tého neuronu z predchozí vrstvy

$w_i \dots$ váha od i -tého neuronu z predchozí vrstvy

3. Po prvé máme dosiahnuť, aby stredná hodnota tohto potenciálu bola 0.

Střední hodnota potenciálu skrytého neuronu:

$$E\{\xi_j\} = E\left\{\sum_{i=0}^n w_{ij} x_i\right\} = \sum_{i=0}^n E\{w_{ij}\} E\{x_i\} = 0$$

4. Tiež vieme, že jednotlivé zložky vstupných vektorov majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 0$ a smerodajnou odchylkou $\sigma > 0$.
5. Rozptyl potenciálu je určený ako :

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi}^2 &= E\{(\xi_j)^2\} - E^2\{(\xi_j)\} = E\left\{\left(\sum_{i=0}^n w_{ij} x_i\right)^2\right\} - 0 = \\ &= \sum_{i,k=0}^n E\{w_{ij} w_{kj} x_i x_k\} = \leftarrow \text{vzájemná nezávislosť pro všechna } j \\ &= \sum_{i=0}^n E\{(w_{ij})^2\} E\{(x_i)^2\}\end{aligned}$$

6. Hodnoty $E[X^2] = \text{var}X + (E[X])^2$
7. Podľa vzorca zo 6 nám na dopočítanie $E\{(x_i)^2\}$ stačí vedieť rozptyl a strednú hodnotu vstupných vektorov a tie sú z bodu 4 jednoznačné. $E\{(x_i)^2\} = \sigma + 0^2 = \sigma$.
8. Stredná hodnota $E\{(w_{ij})^2\}$ je rovnaká ako zo slajdov, keďže váhy sú rovnomerne rozložené na $[-a, a]$:

$$E\{(w_{ij})^2\} = \int_{-a}^a w_{ij}^2 \cdot \frac{1}{2a} dw_{ij} = \frac{w_{ij}^3}{3 \cdot 2a} \Big|_{-a}^a = \frac{a^2}{3}$$

9. $\sigma_{\xi}^2 = \frac{\sigma a^2}{3} N \Rightarrow \sigma_{\xi} = a \sqrt{N \frac{\sigma}{3}}$.

10. Taktiež chceme dosiahnuť aby smerodajná odchylka potenciálu bola 1. Dokopy teda dostávame,

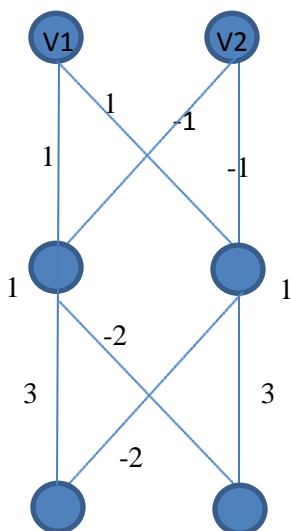
$$\text{že } a = \sqrt{\frac{3}{\sigma N}}.$$

Druhá časť

Treba si uvedomiť, čo chceme dosiahnuť. Začneme odzadu pričom chceme rozdeliť vstupy tak, aby sme ich ľahšie mohli separovať. Do druhej časti nám prichádzajú už pozmenené hodnoty podľa sigmoidálnej funkcie. Na obidvoch neurónoch skrytej vrstvy budú nejaké hodnoty, ktoré sa pohybujú od 0 do 1. Ich súčet nazvime skóre. Separovať by sme chceli podľa určitých podmienok :

- Vieme, že vo vrchole V1 bude jednotka iba v prípade, keď na vstupe budú jednotky. Pre všetky ostatné prípady to bude 0.
- Vieme, že vrchol V2 bude jednotka v prípade keď bude na vstupe striedajúce 0 a 1. Pre ostatok to musí byť 0.

Z týchto dvoch podmienok je vidieť, že by bolo vhodné oddeliť vstup samých jednotiek od vstupov striedajúcich 0 a 1 a nastaviť váhy podľa toho. V rámci nášho skóre by sme to mohli pochopiť, že samým jednotkám dám najväčšie skóre a striedajúcim znakom dám najmenšie skóre. Keby v takomto stave prišli hodnoty k výstupnej vrstve tak môžeme nastaviť váhy tak, že budeme separovať pomocou skóre.




Potenciál pri V2 bude 3 najväčšie skóre. Z toho vyplýva, že keď na skrytých neurónoch budú hodnoty získané zo samých jedničiek, tak mínusové váhy z toho spravia najmenšiu hodnotu a po pričítaní 3 najmenšej váhy to bude stále číslo menšie ako 0 => na výstupe 0. Pri striedajúcich hodnotách (3. a 4 najmenšie) nám minúsové váhy z toho spravia najväčšie hodnoty (stále záporné) a po pričítaní potenciálu sa stanú kladnými => na výstupe 1.

Potenciál pri V1 bude najväčšie skóre. Takýmto spôsobom keď na skrytých neurónoch budú hodnoty získané zo samých jedničiek, tak kladné váhy z toho spravia najväčšiu hodnotu/skóre a po odčítaní dostaneme 0, čo nám dá na výstupe 1. Pre ostatné hodnoty nás odčítanie najväčšieho skóre presunie do zápornej hodnoty.

Teraz nám ešte zostáva nastaviť váhy zo vstupnej do skrytej vrstvy, tak aby sme dodržali naše pravidlá s tým že samé jedničky dajú najväčšie hodnoty a striedajúce hodnoty najnižšiu hodnotu. To môžeme dosiahnuť nastavením váh, tak ako to je vidieť v spodnej časti obrázku 1. Týmto pádom dostaneme pre každý vstup na skrytej vrstve hodnoty, ktoré dávajú také skóre aké chceme (tabuľka 1)

1	0	Logsig(4),LogSig(-1) Skóre = 1.25
0	1	Logsig(-1),LogSig(4) Skóre = 1.25
0	0	Logsig(1),LogSig(1) Skóre = 1.46
1	1	Logsig(2),LogSig(2) Skóre = 1.76



Takýmto spôsobom nám sieť dá výsledky pre rôzne vstupy takéto :

1	0	0.3750, 0.5000 0, 1
0	1	0.3750, 0.5000 0, 1
0	0	0.4257, 0.4474 0, 0
1	1	0.5, 0.375 1, 0

Tretia časť

Váhy siete počítam skriptom. Hodnoty po prvej iterácii sú :

W_I_HB

1.3623 0.4377 -0.0377

-1.9971 0.7971 -0.4971

W_H_OB

2.2390 -1.0030 0.3166