

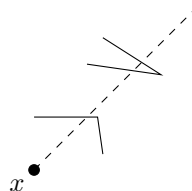
**Definicja.** Segmentem nazywamy odcinek łączący dwa punkty na płaszczyźnie.

**Definicja.** Wielolinia to skończona suma segmentów takich, że przecięcie dwóch kolejnych z nich jest punktem, który jest krańcem obu z nich. Wielokąt dodatkowo kończy się w tym samym punkcie, co zaczyna.

**Definicja.** Dla zbioru otwartego  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  wprowadzamy relację równoważności na jego elementach:  $x \sim y$  wtedy, gdy istnieje wielolinia między nimi. Jeśli  $\forall x, y \in \Omega \ x \sim y$ , to  $\Omega$  jest wieloliniowo spójny. Maksymalny wieloliniowo spójny podzbiór  $\Omega$  nazywamy komponentem. Dla zbioru domkniętego  $F \subset \mathbb{R}^2$  komponenty  $\mathbb{R}^2 \setminus F$  nazywamy ścianami.

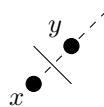
**Twierdzenie** (Jordana dla wielokąta). Każdy wielokąt  $P$  ma dokładnie dwie ściany: ograniczoną i nieograniczoną. Brzegiem każdej z tych ścian jest  $P$ .

*Dowód.* Niech  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus P$  i niech  $L$  będzie półprostą wychodzącą z  $x$ . Niech  $\pi(x, L) = |\{p \in P : p \cap L \neq \emptyset\}| \bmod 2$ , gdzie punkty przecięcia będące krańcami segmentów traktujemy w odrębny sposób: jeśli dla każdego odpowiednio małego otoczenia tego punktu półprosta będąca obroceniem  $L$  wokół  $x$  i przecinająca się niepusto z tym otoczeniem przecina się z któryś z segmentów zawierających ten punkt, to jest on liczony pojedynczo (mimo, że należy do dwóch segmentów). W przeciwnym wypadku jest liczony podwójnie. Przykłady takich punktów widać na poniższym obrazku (odpowiednio bliżej i dalej punktu  $x$ ).



Dla innej półprostej  $L'$  mamy  $\pi(x, L) = \pi(x, L')$ , bo można obrócić  $L$  do  $L'$  i podczas obracania gdy półprosta przestaje się przecinać z jednym segmentem, to albo zaczyna z następnym, albo z nim też przestaje, więc wynik  $\bmod 2$  się nie zmienia. Można więc mówić o  $\pi(x)$ . Dla  $x \sim y$  mamy  $\pi(x) = \pi(y)$  – wystarczy pokazać tylko dla  $x, y$  połączonych segmentem, bo dalej można postępować indukcyjnie. Biorąc półprostą  $L$  zaczynającą się w  $x$  i przechodzącą przez  $y$  mamy  $\pi(x, L) = \pi(y, L)$ .

Są co najmniej dwie ściany, bo biorąc dwa punkty  $x, y$  w bardzo małym otoczeniu pewnego segmentu z  $P$  po różnych jego stronach można rozważyć półproste o kierunku zgodnym z prostą  $xy$  i tym samym zwrocie, co daje nam  $\pi(x) \neq \pi(y)$ .



Są co najwyżej dwie ściany, bo dla dowolnych trzech punktów  $x, y, z$  z różnych ścian możemy wybrać odpowiednio małe sąsiedztwo  $N$  pewnego segmentu z  $P$ , a następnie z każdego z punktów  $x, y, z$  puścić wielolinię, która zbliży się bardzo blisko do  $P$ , a potem będzie szła wzdłuż niego.  $P$  jest wielokątem, więc każda z tych wielolinií kiedyś znajdzie się w  $N$ . Wtedy jednak dwa z tych punktów są po tej samej stronie segmentu, a więc można je połączyć wielolinią i są na tej samej ścianie – sprzeczność. W ten sposób widzimy też, że  $P$  jest brzegiem tych ścian, bo gdyby coś innego było, to można w taki właśnie sposób stworzyć wielolinię łączącą punkty, co da sprzeczność.

Jedna ze ścian jest nieograniczona, bo biorąc półprostą z dowolnego punktu istnieje taka odległość, po której ta półprosta nie przetnie się już z żadnym segmentem  $P$  – tam będzie nieograniczona ściana. Gdyby obie ściany były nieograniczone, to można na obu z nich wziąć punkty bardzo daleko od  $P$ , ale takie punkty można połączyć "obchodząc" wielolinią  $P$  – sprzeczność. ■

**Definicja.** Grafem płaskim nazywamy graf  $G$  o  $V(G) \subset \mathbb{R}^2$  wraz z funkcją  $\varepsilon_G : E(G) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  taką, że  $\forall_{uv \in E(G)} \varepsilon_G(uv) = A \setminus \{u, v\}$ , gdzie  $A$  jest wielolinia łączącą  $u, v$  i dodatkowo  $\varepsilon_G(uv) \cap V(G) = \emptyset$  oraz  $\forall_{e, e' \in E(G)} e \neq e' \implies \varepsilon_G(e) \cap \varepsilon_G(e') = \emptyset$ . Ta definicja łapie intuicję rysunku grafu, w którym krawędzie się nie przecinają. Zazwyczaj piszemy też  $e$  zamiast  $\varepsilon_G(e)$ .

**Definicja.**  $G$  nazywamy grafem planarnym, jeśli istnieje graf płaski  $\Gamma$  izomorficzny z  $G$ .  $\Gamma$  nazywamy rysunkiem planarnym  $G$ . Komponenty  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  (przez  $G$  rozumiemy tu sumę wierzchołków i wartości  $\varepsilon_\Gamma$  krawędzi grafu  $\Gamma$ ) nazywamy ścianami  $G$  (faces) i oznaczamy  $F(G)$ .

**Lemat 1.** Jeśli w grafie płaskim  $G$  dla ścian  $f_1, f_2$  istnieją takie dwa punkty  $x_1 \in f_1, x_2 \in f_2$ , że segment je łączący przecina się z pewną krawędzią  $e$  w dokładnie jednym punkcie, to  $e \subset \partial f_1, \partial f_2$  (tak oznaczamy brzeg zbioru) oraz  $\forall_{f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}} e \cap f = \emptyset$ . W szczególności zachodzi to też dla  $f_1 = f_2$ . Mówimy, że  $f_1, f_2$  są incydentne do  $e$ .

*Dowód.* Dla każdego otoczenia zawierającego punkt z  $e$  możemy puścić wielolinię z  $x_1, x_2$  w kierunku  $e$  (po odcinku je łączącym), a następnie iść wzdłuż  $e$  aż wejdziemy w to otoczenie. W każdym takim otoczeniu jest więc punkt ze ścianą  $f_1$  i nie z niej (np. punkt  $e$ ), więc  $e \subset \partial f_1$  i tak samo  $f_2$ . Gdyby  $e$  leżało na brzegu jakiejś innej ściany  $f_3$ , to dowolnie blisko  $e$  jest jakiś punkt  $f_3$ , ale wtedy można do niego dojść wielolinia z punktu  $x_1$  lub  $x_2$ , zależnie od strony krawędzi, po której jest ten punkt – sprzeczność. ■

**Lemat 2.** Dla grafu płaskiego  $G$  jeśli  $f \in F(G)$ , to  $\partial f$  jest sumą krawędzi i wierzchołków.

*Dowód.* Krawędzie i wierzchołki należą do brzegu ściany (z Lematu 1). Biorąc dowolny inny punkt taki, że w każdym jego odpowiednio małym sąsiedztwie jest punkt  $x \in f$  można ten punkt połączyć wielolinia z dowolnym innym punktem tego małego sąsiedztwa (żadne z tych punktów nie leżą na krawędziach i wierzchołkach grafu), zatem ten punkt nie należy do  $\partial f$ , czyli ten brzeg to tylko krawędzie i wierzchołki. ■

**Lemat 3.** Jeśli graf płaski  $G$  jest izomorficzny z lasem, to  $|F(G)| = 1$ .

*Dowód.* Graf jest ograniczony, a więc ma tylko jedną nieograniczoną ścianę. Weźmy tę ograniczoną i idźmy wzdłuż jej brzegu. Z Lematu 2 ten brzeg to krawędzie i wierzchołki, co da nam cykl – sprzeczność. ■

**Lemat 4.** Niech  $G' \subset G$  (grafy płaskie) oraz  $f \in F(G), f' \in F(G')$ . Wtedy:

1. Każda ściana  $G$  zawiera się w ścianie  $G'$ .
2.  $\partial f \subset G' \implies f \in F(G')$ .
3.  $f' \cap G = \emptyset \implies f' \in F(G)$ .

*Dowód.* Dla  $G' \subset G$  mamy  $\mathbb{R}^2 \setminus G \subset \mathbb{R}^2 \setminus G'$ , a więc komponenty  $G$  zawierają się w komponentach  $G'$ , co dowodzi 1.

Dla dowodu 2. bierzemy taką ścianę  $g' \in F(G')$ , że  $f \subset g'$  (istnieje z 1.). Gdyby było  $f \subsetneq g'$ , to istnieją  $x \in f$  i  $x' \in g' \setminus f$ , łącząc je odcinkiem dostajemy na nim punkt  $y \in \partial f \subset G'$ , który jednocześnie spełnia  $y \in g$ , a więc jest  $y \notin G'$  – sprzeczność, czyli  $f = g'$ .

Dla dowodu 3. zauważamy, że  $f'$  jest wieloliniowo spójnym podzbiorem  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  (jako ściana jest spójny, a nie ma w sobie nic z  $G$ ), więc istnieje  $g \in F(G)$  taka, że  $f' \subset g$ , z 1. dostajemy  $g \subset f'$  (to musi być ta sama ściana, bo ma z nią niepuste przecięcie, a tych punktów nie ma w żadnej innej), co kończy dowód. ■

**Lemat 5.** Niech  $G$  będzie grafem płaskim,  $C \subset G$  cyklem,  $e \in E(C)$  krawędzią taką, że ściany  $f_1, f_2$  są do niej incydentne. Zachodzi  $f_1 \neq f_2$ .

*Dowód.*  $C$  jest wielokątem, więc z twierdzenia Jordana ma on dokładnie dwie ściany  $f'_1, f'_2$ . Biorąc małe otoczenie jakiegoś punktu z  $C$  widzimy, że należy on do którejś ze ścian  $f_1, f_2$  i na pewno do którejś ściany cyklu, więc  $f_1 \cap f'_1 \neq \emptyset$ , a więc Lemat 4.1 daje nam, że  $f_1 \subset f'_1$  i podobnie  $f_2 \subset f'_2$ , a że ściany cyklu były różne, to zachodzi  $f_1 \neq f_2$ . ■

**Lemat 6.** Niech  $G$  będzie grafem płaskim,  $e \in E(G)$  krawędzią taką, że  $f_1, f_2 \in F(G)$  są do niej incydentne. Niech  $f_{12} = f_1 \cup e \cup f_2$ . Mamy  $f_{12} \in F(G - e)$  oraz  $F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G - e) \setminus \{f_{12}\}$  (usunięcie krawędzi wpływa tylko na ściany do niej incydentne).

*Dowód.*  $f_{12}$  jest spójne, a więc  $f_{12} \subset f'$  dla pewnego  $f' \in F(G - e)$ . Analogicznie jak w dowodzie Lematu 4.2 zauważamy, że jeśli  $f_{12} \subsetneq f'$ , to istnieją  $x' \in f' \setminus f_{12}$  i  $x \in f_{12}$ , które można połączyć wielolinia bez przechodzenia przez  $e$ . Oba są w  $f'$ , ale jednocześnie każda wielolinia między nimi przechodzi przez coś z  $G - e$  (brzeg  $f_{12}$ ) – sprzeczność.

Biorąc  $f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$  widzimy, że  $\partial f \subset G \setminus e$  i  $f \neq f_{12}$ , więc z Lematu 4.2 jest  $f \in F(G - e) \setminus \{f_{12}\}$ . Analogicznie dla  $f' \in F(G - e) \setminus \{f_{12}\}$  jest  $f' \cap G = \emptyset$  i  $f' \notin \{f_1, f_2\}$ , co z Lematu 4.3 daje  $f' \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$ . ■

**Twierdzenie** (Formuła Eulera). Dla grafu płaskiego  $G$  zachodzi  $|V(G)| + |F(G)| = |E(G)| + a + 1$ , gdzie  $a$  jest liczbą spójnych składowych  $G$ .

*Dowód.* Najpierw założymy, że  $G$  jest spójny. Indukcja po  $|E(G)|$ . Minimalna liczba krawędzi jest dla drzewa, a wtedy  $|F(G)| = 1$  z Lematu 3. Jednocześnie dla  $|V(G)| = n$  jest  $|E(G)| = n - 1$ , co daje  $|V(G)| + |F(G)| = n + 1 = (n - 1) + 2 = |E(G)| + 2$ . Jeśli  $G$  nie jest drzewem, to ma cykl  $C$ . Ustalmy  $e \in E(C)$  i ściany  $f_1, f_2$  incydentne do  $e$ . Z Lematu 5 są to różne ściany. W grafie  $G' = G - e$  indukcyjnie zachodzi formuła Eulera, a z Lematu 6 jest  $|F(G')| - 1 = |F(G)| + 2$ , co z  $|V(G')| + (|F(G')| + 1) = (|E(G')| + 1) + 2$  daje nam formułę Eulera dla  $G$ .

Dla dowodu ogólnego przypadku zauważmy, że dla każdej spójnej składowej można powtórzyć ten dowód i trzeba tylko zwrócić uwagę na to, by nie zliczyć wielokrotnie ściany nieograniczonej. ■

**Twierdzenie.** Dla spójnego grafu planarnego  $G$  o  $V(G) \geq 3$  zachodzi  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ . Dodatkowo jeśli  $G$  nie zawiera trójkątów ( $K_3$  jako podgrafu), to jest  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ .

*Dowód.* Będziemy zliczać liczbę relacji incydentności między ścianami a krawędziami (zakładamy, że każda krawędź jest w dwóch takich relacjach, być może z tą samą ścianą). Liczba ta wynosi oczywiście  $2|E(G)|$ . Jednocześnie każda ściana jest incydentna do co najmniej 3 krawędzi (poza przypadkiem ścieżki na 3 wierzchołkach, to sprawdzamy ręcznie), więc mamy  $2|E(G)| \geq 3|F(G)| = 3(|E(G)| - |V(G)| + 2)$ , gdzie równość wynika z formuły Eulera. To kończy dowód. W grafie bez trójkątów każda ściana jest incydentna do co najmniej 4 krawędzi, dowód kończymy analogicznie. ■

**Twierdzenie.**  $K_5$  i  $K_{3,3}$  nie są planarne.

*Dowód.* Dla  $K_5$  nierówność  $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$  dałaby  $10 \leq 9$  – sprzeczność.  $K_{3,3}$  nie ma trójkątów (bo nie ma cykli nieparzystych), więc  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$  daje  $9 \leq 8$  – sprzeczność. ■

**Twierdzenie** (Whitney, 1933). Każdy 3-spójny graf planarny ma unikalne zanurzenie planarne (zanurzenia są różne, gdy jest taki wierzchołek, że jego krawędzie wchodzi do niego w innym porządku patrząc na kolejność zgodną z ruchem wskazówek zegara).

**Definicja.** Graf płaski  $G$  nazywamy triangulacją, jeśli wszystkie jego ściany to trójkąty. Taki graf jest maksymalnym na liczbę krawędzi grafem płaskim i zachodzi dla niego równość w nierówności między liczbą krawędzi i wierzchołków w grafie planarnym.

**Twierdzenie.** Dla grafu płaskiego  $G$  istnieje triangulacja  $G'$  taka, że  $G \subset G'$  i  $V(G) = V(G')$  oraz triangulacja  $G''$  taka, że  $G \subset_{\text{ind}} G''$ .

*Dowód.* Jeśli jakaś ściana nie jest trójkątem, to można dodać między jej wierzchołkami krawędź. Powtarzanie te operacji daje nam  $G'$ . Można też dodać nowy wierzchołek i połączyć z nim wszystkie wierzchołki nietrójkątnej ściany, co daje nam  $G''$ . ■

**Twierdzenie.** Nie istnieje skończona lista grafów, których zabronienie jako podgrafów charakteryzuje klasę grafów planarnych.

*Dowód.* Załóżmy, że ta lista to  $H_1, \dots, H_k$ . Jeśli w grafie nieplanarnym dodamy na środku krawędzi nowe wierzchołki (dla pewnych wierzchołków połączonych krawędzią usuniemy tę krawędź i dodamy nowy wierzchołek i połączymy go z tymi wierzchołkami), to dalej będzie on nieplanarny, bo teraz któraś w tych dwóch krawędzi będzie musiała przeciąć inną na każdym rysunku planarnym. Wykonywanie takiej operacji więcej razy, niż długość najdłuższej ścieżki w każdym z grafów  $H_1, \dots, H_k$  spowoduje, że nie będą one podgrafami zmienionego grafu (chyba, że są ścieżką lub kilkoma ścieżkami połączonymi w wierzchołku, ale takie grafy są planarne), a dalej będzie on nieplanarny. ■

**Definicja.** Graf  $H$  jest minorem  $G$  (oznaczenie  $H \leq G$ ), jeśli istnieje rodzina  $\{\mathcal{B}_x : x \in V(H)\}$  zbiorów zwanych branch-setami taka, że  $\emptyset \neq \mathcal{B}_x \subset V(G)$ ,  $x \neq y \implies \mathcal{B}_x \cap \mathcal{B}_y = \emptyset$ ,  $G[\mathcal{B}_x]$  jest spójny oraz  $xy \in E(H) \implies \exists_{uv \in E(G)} u \in \mathcal{B}_x, v \in \mathcal{B}_y$ . Inaczej mówiąc: minor jest podgrafem grafu uzyskanego z  $G$  przez kontraktowanie krawędzi (łączenie wierzchołków połączonych krawędzią w jeden).

**Twierdzenie** (Kuratowski, 1930; Wagner 1937). Graf  $G$  jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera  $K_5$  ani  $K_{3,3}$  jako minoru.

**Twierdzenie.** W grafie planarnym  $G$  jest  $\delta(G) \leq 5$ .

*Dowód.* Gdyby było  $\delta(G) \geq 6$ , to z formuły Eulera dla  $|V(G)| = n$  jest  $6n \leq \sum_v \deg_G(v) = 2|E(G)| \leq 6n - 12$ , co daje sprzeczność. ■

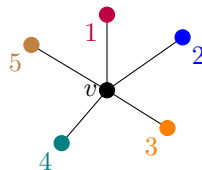
**Twierdzenie.** Każdy graf planarny  $G$  jest 6-kolorowalny.

*Dowód.* Podgrafy grafu planarnego są planarne, więc z  $\delta(G) \leq 5$  mamy  $\text{col}(G) \leq 6$ . ■

**Twierdzenie.** Każdy graf planarny  $G$  jest 5-kolorowalny.

*Dowód.* Załóżmy, że  $G$  jest minimalnym kontrprzykładem.  $G$  jest spójny, bo inaczej mniejszym kontrprzykładem jest jego składowa. Istnieje wierzchołek  $v$  stopnia 5, bo inaczej można go usunąć, pokolorować resztę z minimalności i potem pokolorować, bo ma mniej niż 5 sąsiadów.

Weźmy  $v$  i pokolorujmy  $G - v$  z minimalności  $G$ . Jeśli w sąsiedztwie  $v$  nie ma 5 kolorów, to można pokolorować – sprzeczność. Zatem są wszystkie. Przez 1-3 łańcuch Kempego rozumiemy maksymalny komponent pokolorowany kolorami 1 i 3. Rozważmy 1-3 łańcuch Kempego zawierający sąsiada  $v$  o kolorze 1. Jeśli nie zawiera on sąsiada  $v$  o kolorze 3, to można zamienić na nim kolory (łańcucha Kempego nie można rozszerzyć, więc żaden niełańcuchowy sąsiad czegoś na łańcuchu nie ma kolorów 1, 3) i otrzymać kolorowanie, w którym sąsiedzi  $v$  mają tylko 4 kolory, więc da się całość pokolorować 5 kolorami.



Dalej załóżmy, że ten łańcuch zawiera sąsiada  $v$  o kolorze 3. W takim wypadku rozważamy 2-4 łańcuch Kempego zawierający sąsiada  $v$  o kolorze 2. Ten łańcuch nie może zawierać sąsiada  $v$  o kolorze 4, bo wtedy łańcuch musiałby przeciąć na rysunku poprzedni łańcuch (dla takiego ułożenia wierzchołków jak na rysunku, ale jak jest inaczej można zmienić nazwy kolorów). Zatem tutaj zamiana się uda i znowu sąsiedzi  $v$  mają tylko 4 kolory. ■

**Twierdzenie** (Twierdzenie o 4 kolorach). Każdy graf planarny  $G$  jest 4-kolorowalny.

*Dowód.* Dowód przed historię: w 1852 Francis Guthrie kolorował hrabstwa Anglii, zawsze działały 4 kolory, zapytał Augustusa De Morgana, czy zawsze się da. Pierwszy dowód: Alfred Kempe (łańcuchy Kempego) w 1879, kolejny dowód po roku, po dekadzie znaleziono błędy, dopiero w 1976 dowód Appela, Hakkena i Kocha – silnie bazujący na sprawdzaniu przypadków przez komputer, stosuje łańcuchy Kempego i metodę

dischargingu, która pozwala zredukować problem do skończonej ilości przypadków. Dało to algorytm 4-kolorowania w  $O(n^4)$ , potem usprawnienie  $O(n^2)$ . ■

**Twierdzenie** (Ringel-Youngs, 1968; Hipoteza Heawooda, 1890). Na powierzchniach innych niż płaszczyzna graf planarny da się pokolorować za pomocą  $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor$  kolorów, gdzie  $\chi$  to charakterystyka Eulera.

**Twierdzenie** (Grötzsch, 1959). Każdy graf planarny bez trójkątów jest 3-kolorowalny.

**Hipoteza** (Pytanie Erdősa). Najmniejsza taka liczba  $k$ , że graf planarny bez cykli długości od 4 do  $k$  jest 3-kolorowalny wynosi 6 lub 7.

**Hipoteza** (Hipoteza Hadwigera). Jeśli graf  $G$  nie ma  $K_t$  jako minora, to  $\chi(G) \leq t - 1$ .

**Twierdzenie.** Jeśli graf  $G$  nie ma  $K_t$  jako minora, to  $\chi(G) \leq O(t \log \log t)$ .

**Definicja.** Listowa liczba chromatyczna grafu  $G$ , oznaczana  $\text{ch}(G)$ , to najmniejsza taka liczba  $k$ , że dla każdej funkcji  $S : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  takiej, że  $\forall v \in V(G) \quad |S(v)| = k$  istnieje właściwe kolorowanie  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  takie, że  $\forall v \in V(G) \quad c(v) \in S(v)$ . Takie kolorowanie nazywamy kolorowaniem listowym. Dla ustalonego  $S$  jest to  $S$ -kolorowanie.

**Twierdzenie.** Niech  $G$  będzie grafem. Zachodzi  $\chi(G) \leq \text{ch}(G) \leq \text{col}(G)$ .

*Dowód.* Pierwsza nierówność wynika z tego, że wszystkie listy mogą mieć te same  $k$  elementów. Druga nierówność wynika z tego, że algorytm First-Fit na porządku wierzchołków świadczącym o  $\text{col}(G)$  działa też dla kolorowań listowych. ■

**Twierdzenie** (Alon, 2000). W grafie  $G$  zachodzi  $\text{ch}(G) = \Omega(\log(\text{col}(G)))$ .

**Twierdzenie** (Thomassen, 1994). Dla każdego grafu planarnego  $G$  jest  $\text{ch}(G) \leq 5$ .

*Dowód.* Załóżmy, że każda ściana wewnętrzna (ograniczona) grafu  $G$  jest trójkątem (możemy tak zrobić, bo dodanie większej ilości krawędzi tylko utrudnia) i niech  $f$  będzie ścianą zewnętrzną. Ustalmy  $S : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Załóżmy, że istnieją takie wierzchołki  $u, v$ , że  $uv \in E(G)$ ,  $uv \in \partial f$ ,  $|S(u)| = |S(v)| = 1$  oraz  $S(u) \neq S(v)$ . Dodatkowo załóżmy, że  $\forall x \in \partial f \setminus \{u, v\} \quad 5 \geq |S(x)| \geq 3$  oraz  $\forall x \in V(G) \setminus \partial f \quad |S(x)| = 5$  (również możemy to wszystko założyć – zmniejszanie list tylko utrudnia). Pokażemy indukcyjnie, że  $G$  ma  $S$ -kolorowanie. Dla grafów o co najwyżej 3 wierzchołkach jest to oczywiste.

Założmy, że istnieje krawędź łącząca wierzchołki na ścianie zewnętrznej i nienależąca do jej brzegu. Taka krawędź jest cięciwą, która dzieli graf  $G$  na dwa grafy  $G_1$  i  $G_2$ . Niech  $G_1$  zawiera wierzchołki  $u, v$ . Można go pokolorować z indukcji. Teraz wierzchołki tworzące cięciwę są pokolorowane, więc na potrzeby kolorowania  $G_2$  mają listy długości 1, więc teraz można indukcyjnie pokolorować  $G_2$ .

Teraz załóżmy, że nie ma cięciw. Niech  $\omega$  będzie sąsiadem  $u$  innym od  $v$  na ścianie zewnętrznej, a  $\omega'$  jego kolejnym sąsiadem. Załóżmy, że  $S(u) = \{\alpha\}$ . Wtedy  $\omega$  ma do wyboru co najmniej dwa inne kolory  $\beta, \gamma$ . Każda ściana wewnętrzna jest trójkątem, a więc  $u$  i  $\omega$  muszą być połączone w trójkąt z jakimś wierzchołkiem wewnętrznym, tak samo  $\omega$  i  $\omega'$ . Sam  $\omega$  może mieć jeszcze więcej wewnętrznych sąsiadów. Wszystkim im usuwamy z list  $\beta$  i  $\gamma$ , teraz mają między 5 a 3 kolory. Kolorujemy z indukcji graf  $G - \omega$ , a na koniec  $\omega - \beta$  i  $\gamma$  mogły zostać zajęte tylko przez  $\omega'$ , ale zawsze mamy drugi z tych kolorów. ■