Twierdzenie. Niech $k \in \mathbb{N}_1$ i niech G bdzie k-regularnym grafem dwudzielnym. Krawdzie G mona podzieli na k skojarze doskonaych.

Dowód. Niech podzia wierzchoków w grafie dwudzielnym to $\{A, B\}$. Dla $S \subseteq A$ mamy $E_A \subseteq E_{N(S)}$, bo kada krawd z E_S jest przylega do ssiada czego z S. Mamy $|E_S| = k|S|$ i $|E_{N(S)}| = k|N(S)|$, wic $|S| \leq |N(S)|$ i z twierdzenia Halla istnieje skojarzenie nasycajce A, a e $k|A| = |E| = k|B| \implies |A| = |B|$, to skojarzenie jest doskonae. Po usuniciu go mamy graf $(k-1)$-regularny – indukcja. ■

Twierdzenie. Niech k bdzie parzyst i dodatni liczb naturaln, a G grafem k-regularnym. Istnieje $H \subseteq G$ taki, e $V(H) = V(G)$ i H jest sum rozcznych cykli.

Dowód. Spójne skadowe G maj cykle Eulera, tworzymy graf G' o wierzchokach v^-, v^+: jeli w cyklu Eulera jest $v \to w$, to $v^+w^- \in E(G')$. Graf G' jest dwudzielny (podzia na wierzchoki z plusem i minusem) i $\frac{k}{2}$-regularny (dla kadego wierzchoka poowa krawdzi jest wchodzca, a poowa wychodzca), a wic ma skojarzenie doskonae. Po scaleniu wierzchoków v^-, v^+ (powrocie do G) to skojarzenie daje rozczne cykle (kady wierzchoek ma dokadnie dwie krawdzie). ■

Twierdzenie. Niech G bdzie grafem 3-regularnym bez mostów. G ma skojarzenie doskonae.

Dowód. Wemy $S \subseteq V(G)$ i H bdce skadow $G - S$ takie, e $2 \nmid |H|$. Jeli w G jest parzycie wiele krawdzi midzy H a S (powiedzmy 2ℓ), to w $G[H]$ jest $\sum \deg(v) = 3|H| - 2\ell$, co jest nieparzyste. Zatem jest nieparzycie wiele krawdzi midzy S i H, ale nie jedna, bo nie ma mostów. S wic co najmniej 3. Zatem wszystkich krawdzi wychodzcych do S z nieparzystych skadowych $G - S$ jest co najmniej $3\,\mathrm{odd}(G - S)$, ale co najwyej $3|S|$, wic $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$ i z twierdzenia Tutte'a istnieje skojarzenie doskonae. ■

Twierdzenie. Niech G bdzie grafem i $k \in \mathbb{N}_1$. G zawiera skojarzenie licznoci k wtedy i tylko wtedy, gdy dla kadego $S \subseteq V(G)$ zachodzi $\mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + |V(G)| - 2k$.

Dowód. Niech $d = \max\{\mathrm{odd}(G - S) - |S|\}$. Bdziemy wykazywa równowano z nierównoci $2k \leq |V(G)| - d$.
$(\implies)$ Co najmniej jeden wierzchoek kadej z $\mathrm{odd}(G-S)$ nieparzystych skadowych musi by skojarzony z czym z S (wewntrz jego skadowej nie mona zrobi par, bo jest nieparzycie wiele wierzchoków), wic d wierzchoków musi pozosta bez skojarzenia i skada si ono z co najwyej $|V(G)| - d$ wierzchoków.
$(\impliedby)$ Widzimy, e $d \geq 0$ (wiadczy o tym $S = \emptyset$), a d jest tej samej parzystoci, co $|V(G)|$ (parzysto $\mathrm{odd}(G-S) - |S|$ nie zostanie zmieniona przez adn z parzystych skadowych). Tworzymy graf G', dodajc do G zbiór D o d wierzchokach tworzcych klik i poczonych ze wszystkim z $V(G)$. G' spenia warunek Tutte'a: dla $S' = \emptyset$ jest $\mathrm{odd}(G' - S') = 0$, bo jest tylko jedna skadowa z parzyst iloci wierzchoków ($V(G) + d$ parzyste); jak $D \subsetneq S'$, to $G' - S'$ ma jedn skadow i $1 \leq |S'|$; jak $D \subset S'$, to dla $S = S' \setminus D$ jest $\mathrm{odd}(G' - S') = \mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + d = |S'|$, gdzie nierówno wynika z definicji d. Zatem G' ma skojarzenie doskonae, a po usuniciu z niego D dalej jest w nim $V(G) - d$ wierzchoków. ■

Twierdzenie. G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy pomidzy dowolnymi dwoma wierzchokami $x, y \in V(G)$ istnieje k wierzchokowo rozcznych cieek z x do y.

Dowód. $(\implies)$ Zaómy, e istnieje mniej cieek. Dla nieprzylegych x, y twierdzenie Mengera odpalone na ich ssiedztwach daje, e wielko minimalnego separatora jest równa iloci rozcznych cieek, wic musi istnie krawd xy (inaczej istnieje separator mniejszy ni k). Rozwamy graf $G' = G - xy$. Istnieje w nim co najwyej $k - 2$ rozdzielnych cieek $x \rightsquigarrow y$ (w G byo ich co najwyej $k - 1$), zatem z twierdzenia Mengera istnieje separator $X : |X| = k - 2$, a e $|G'| > k$, to istnieje wierzchoek $w \notin X \cup \{x, y\}$. X rozdziela w od x lub y (inaczej nowa cieka przez w), bez straty ogólnoci od x. Teraz $X \cup \{y\}$ oddziela w od x w G i ma liczno $k - 1$, co daje sprzeczno.
$(\impliedby)$ Do odseparowania x i y potrzeba co najmniej po jednym wierzchoku z kadej z tych cieek. ■

Twierdzenie. Graf G jest 2-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych trzech rónych wierzchoków x, y, z w G istnieje cieka z x do z przechodzca przez y.

Dowód. ($\implies$) Dodajmy wierzchoek w przylegy tylko do x, z. Graf dalej jest dwuspójny, bo w zawsze ma drugiego ssiada, który czy go z reszt grafu. w i y s nieprzylege, wic odpalajc twierdzenie Mengera na ich ssiedztwach dostajemy, e istniej co najmniej 2 rozczne cieki czce y i w. Jedna musi i przez x, a druga przez z, zatem mamy ciek $x \dots y \dots z$.
($\impliedby$) Dla dowolnych trzech wierzchoków x, y, z istnieje cieka $x \dots y \dots z$, zatem po usuniciu x dalej istnieje cieka $y \rightsquigarrow z$. Wobec ich dowolnoci graf jest dwuspójny. ■