FVA F6 - Greens formel, potentialfält, exakta differentialformer

Wednesday, 29 April 2020 14:32

Repetition:

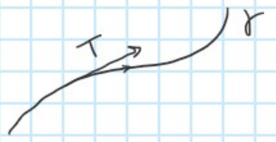
Givet vektorfält $F = (P, Q)$, kurva $\gamma : r(t),\ \alpha \le t \le \beta$, så def. kurvintegralen $\int_\gamma F \cdot dr := \int_\alpha^\beta F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$ eller $\int_\gamma \underbrace{P\,dx + Q\,dy}_{\text{differentialform}}$

Fysikaliskt:

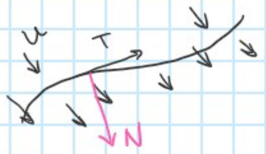
$\int_\gamma F \cdot dr$ = arbetet som F utsätter på partikel som rör sig längs γ

- $r'(t)\,dt = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}\,|r'(t)|\,dt = T\,ds$

onhetstangent längdelement



Låt u repr. riktning och täthet hos materialströmning.



N = högernormal till γ med längd 1:

$\int_\gamma u \cdot N\,ds$ = flödet genom γ från vänster till höger, flödesintegral

OBS: $T\,ds = (dx, dy)$, $N\,ds = (dy, -dx)$, så om $u = (u_1, u_2)$,

$\int_\gamma u \cdot N\,ds = \int_\gamma -u_2\,dx + u_1\,dy$

Greens formel

Låt D vara kompakt område i $\mathbb{R}^2$. Om ∂D består av en eller flera C^1-kurvor säger vi att randen är snäll.

Vi orienterar isf dessa positivt dvs så att D ligger till vänster om kurvan, låter ∂D beteckna kurvan.

Tenta

Sats 9.1 Greens formel

Låt P, Q vara C^1-funktioner i öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

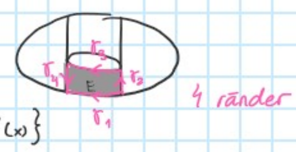
Om $D \subseteq \Omega$ kompakt med snäll rand gäller:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Bevis:

Visar först $\int_{\partial D} P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

Dela upp D som i figur:



E är på formen $E = \{a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right) dx = \int_a^b \left[-P(x,y) \right]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = \int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx - \int_a^b P(x, \psi(x))\,dx$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = \left[\gamma_1 : r(x) = (x, \varphi(x)),\ a \le x \le b \right] = \int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx = [\gamma_1 : r(x) = (x, \varphi(x)),\ a \le x \le b] = \int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx$$

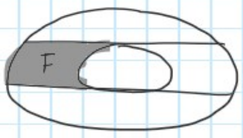
$$\int_{\gamma_3} P\,dx = \underset{\text{bytt riktn.}}{-}\int_{-\gamma_3} P\,dx = [-\gamma_3 : r(x) = (x, \psi(x)),\ a \le x \le b] = \int_a^b P(x, \psi(x))\,dx$$

$$\int_{\gamma_2} P\,dx = \int_{\gamma_4} P\,dx = 0 \quad \text{ty } dx = 0$$ x förändras ej i vertikal linje

$\Rightarrow \int_{\partial E} P\,dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$, och summerar vi över delområdena får vi

$$\int_{\partial D} P\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

Om vi istället delar upp D på formen $F = \{c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$



fås på liknande sätt att $\int_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$,
och sammanlagt får vi att

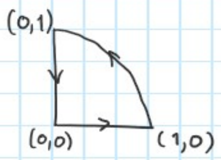
$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Greens formel beskriver likhet mellan kurv- och dubbelintegral.
Man kan beräkna den enklare integralen mha formeln.

Exempel:

Beräkna $\int_\gamma (x-y^3)\,dx + (x^3-y^3)\,dy$ där γ är den positivt orienterade randen till $D = \{x^2+y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

Lösning



$$\int_\gamma (x-y)^3\,dx + (x^3+y^3)\,dy \underset{\uparrow}{=} \iint_D (3x^2 - (-3y^2))\,dxdy$$

Kurva är positivt orienterad rand till kompakt område
P och Q är C^1 i området → kan använda Greens

$$= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = [\text{pol. koord.}] = \dots = \frac{3\pi a^4}{8}$$

Areaberäkning

Notera: $\int_{\partial D} x\,dy \underset{\text{Green}}{=} \iint_D 1\,dxdy = \text{Area}(D)!$, pss $(Q = x,\ P = 0,\ F = (0, x))$

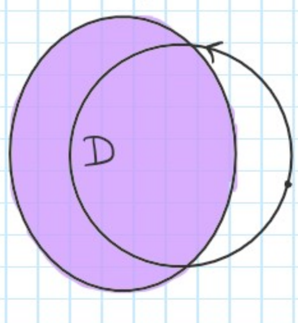
$\text{Area}(D) = \int_{\partial D} -y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy$ $\left(Q = \frac{x}{2},\ P = \frac{-y}{2}\right)$

Exempel:

Beräkna arean av D som begr. av kurvan

$\gamma: r(t) = (\cos t + a\sin 2t,\ \sin t - \frac{a}{2}\cos 2t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ \underset{}{|a| \ll 1}$ ($|a|$ är något litet tal)

Lösning



Undersöker lite olika värden på a
a = 0 → enhetscirkel
a > 0 → liten ellips

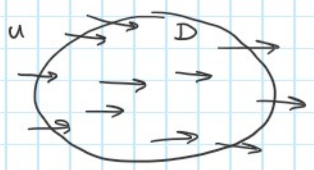
$$\text{Area}(D) \underset{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} x\,dy = \int_0^{2\pi} (\cos t + a\sin 2t)(\cos t - a\sin 2t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - a^2 \sin^2 2t)\,dt = \dots = \pi(1-a^2)$$

använd dubbla vinkeln

Flödesintegraler

Låt u vara strömningsfält, flödet ut ur D:



$$\int_{\partial D} u \cdot N\,ds = \int_{\partial D} \overset{Q}{-u_2}\,dx + \overset{P}{u_1}\,dy = \text{Greens}$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right) dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\right) dx\,dy$$

$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$ = Totala produktion av materia i området

Potentialfält och exakta differentialformer

Definition: Potential

Vektorfältet $F = (P,Q)$ kallas ett potentialfält eller konservativt fält i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ om det finns C^1-funk u i Ω s.a. $F = \nabla u$, u kallas då potential till F.

Differentialformen $P\,dx + Q\,dy$ sägs vara exakt i Ω om det finns C^1-funk u i Ω s.a. $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy := du = P\,dx + Q\,dy$

OBS: $F = (P,Q)$ är konservativt omm $P\,dx + Q\,dy$ exakt.

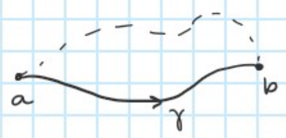
ex. $F = (\sin y, x\cos y)$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ med potential $u = x\sin y + C$

Tenta

Sats 9.2

Låt $F = (P,Q)$ vara konservativt med potential u i Ω, γ kurva i Ω, a,b start/slutpunkt för γ. Då gäller:

$\int_\gamma F\cdot dr = u(b) - u(a)$. Speciellt är $\int_\gamma F\cdot dr$ ober. av vägen.



Bevis:

$$\int_\gamma F\cdot dr = [\gamma : r(t),\ \alpha \le t \le \beta] = \int_\alpha^\beta F(r(t))\,dt =$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\big(u(r(t))\big) \underset{\text{kedjeregel}}{=} \nabla u(r(t))\cdot r'(t) = F(r(t))\cdot r'(t) \right]$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\big(u(r(t))\big)\,dt \underset{\text{Analysens fundamentalsats}}{=} \big[u(r(t))\big]_\alpha^\beta = u(b) - u(a) \qquad \square$$

Hitta potential kan hjälpa en enormt i uträkning

Exempel:

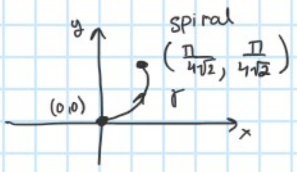
Bestäm $\int_\gamma \sin y\,dx + x\cos y\,dy$ där γ param. av

$r(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

Lösning

potential till F

$F = (\sin y, x\cos y) = \nabla x\sin y$



$$\int_\gamma \sin y\,dx + x\cos y\,dy \overset{\text{Sats 9.2}}{=}$$

$$= u\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) - u(0,0)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$$