Universidade do Minho

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

Trabalho Pratico - Grupo 35

84656 - Hugo Cunha

86268 - Maria Pires

84167 - Susana Marques

29 de novembro de 2019

Conteúdo

1 | Parte 1

1.1 Questão 1

O número usado para determinação do sentido das ruas foi 86268.

A = 8 B=6 C=2 D=6 E=8

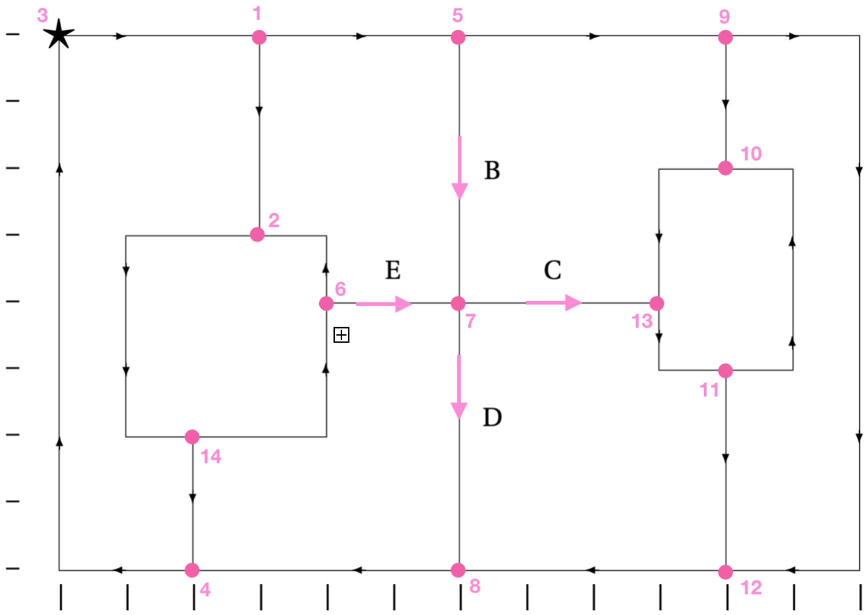


Figura 1.1: Sentido das ruas

1.2 Questão 2

O problema pode ser formulado como um problema de transporte numa rede geral G=(V,A) considerando variáveis de decisão x*i,j* que representam o fluxo no arco (i,j), (i,j)A,i.e., o número de vezes que o arco (i,j) é percorrido. O modelo de minimização de custo de transporte em rede tem as seguintes restrições:

- o fluxo que entra num vértice do grafo deve ser igual ao que sai, para o percurso ser fechado.

- o fluxo em qualquer arco deve ser,pelo menos,uma unidade,para visitar todos os arcos.

Parâmetros: Ci,j - comprimento do arco

Variáveis de Decisão: xi,j - a quantidade de vezes que se percorre o arco i j onde o i corresponde ao vértice de entrada e j ao de saída.

Função Objetivo: minz = $\sum_{i,j \in A} Ci,j * xi,j$

$\leftrightarrow minz = 3*x31+3*x12+6*x214+2*x144+4*x146+2*x62+4*x57+2*x67+4*x78+4*x59+2*x910+3*x1013+3*x713+2*x1311+5*x1110+3*x1112+4*x128+4*x84+10*x43+3*x15+12*x912$

Restrições: $\sum_{i,j \in A} xij - xji$

$x3,1 = x4,3$
$x1,2 = x3,1 - x1,5$
$x1,5 = x3,1 - x1,2$
$x2,14 = x1,2 + x6,1$;
$x14,4 = x2,14 - x14,6$;
$x14,6 = x2,14 - x14,4$;
$x6,2 = x14,6 - x6,7$;
$x5,7 = x1,5 - x5,9$;
$x6,7 = x14,6 - x6,2$;
$x7,8 = x6,7 + x5,7 - x7,13$;
$x5,9 = x1,5 - x5,7$;
$x9,10 = x5,9 - x9,12$;
$x10,13 = x9,10 + x11,10$;
$x7,13 = x6,7 + x5,7 - x7,8$;
$x13,11 = x7,13 + x10,13$;
$x11,10 = x13,11 - x11,12$;
$x11,12 = x13,11 - x11,10$;
$x12,8 = x9,12 + x11,12$;
$x8,4 = x12,8 + x7,8$;
$x4,3 = x8,4 + x14,4$;
$x1,5 = x3,1 - x1,2$;
$x9,12 = x5,9 - x9,10$

$x1,5 >= 1$;
$x5,9 >= 1$;
$x5,7 >= 1$;
$x3,1 >= 1$;
$x1,2 >= 1$;
$x2,14 >= 1$;
$x14,10 >= 1$;
$x14,6 >= 1$;
$x6,2 >= 1$;
$x6,7 >= 1$;

$x7,8 >= 1;$
$x9,10 >= 1;$
$x10,13 >= 1;$
$x7,13 >= 1;$
$x13,11 >= 1;$
$x11,10 >= 1;$
$x11,12 >= 1;$
$x12,8 >= 1;$
$x8,4 >= 1;$
$x4,3 >= 1;$
$x9,12 >= 1;$

1.3 Questão 3

Usando a mudança de variável yi,j = xi,j li,j, (i,j)A, em que li,j é o limite inferior de fluxo no arco (i,j), pode obter-se uma nova instância em que os limites inferiores são todos iguais a zero.

Parâmetros: Ci,j - comprimento do arco

Variáveis de Decisão: yi,j - a quantidade de vezes que se percorre o arco i j onde o i corresponde ao vértice de entrada e j ao de saída.

Função Objetivo: minz $= \sum Ci,j * (yi,j + li,j)$

$\leftrightarrow minz = 3*(y31+l31)+3*(y12+l12)+6*(y214+x214)+1*(y144+l144)+4*(y146+l146)+2*(y62+l62)+4*(y57+l57)+2*(y67+l67)+4*(y78+l78)+a*(y59+l59)+2*(y910+l910)+3*(y1013+l1013)+3*(y713+l713)+2*(y1311+l1311)+5*(y1110+l1110)+3*(y1112+1112l)+4*(y128+l128)+4*(y84+l84)+10*(y43+l43)+3*(y15+l15)+12*(y912+l912)$

Restrições: $\sum_{i,j\in A} yi,j + li,j - yj,i - lj,i$

$y3,1 + l3,1 = y3,4 + l3,4;$
$y1,2 + l1,2 = y3,1 + l3,1 - y1,5 - l1,5$
$y1,5 + l1,5 = y3,1 + l3,1 - y1,2 - l1,2$
$y2,14 + l2,14 = y1,2 + l1,2 + y6,2 + l6,2$
$y14,4 + l14,4 = y2,14 + l2,14 - y14,6 - l14,6$
$y6,2 + l6,2 = y14,6 + l14,6 - y6,7 - l6,7$
$y5,7 + l5,7 = y1,5 + l1,5 - y5,9 - l5,9$
$y6,7 + l6,7 = y14,6 + l14,6 - y6,2 - l6,2$
$y7,8 + l7,8 = y6,7 + l6,7 + y5,7 + l5,7 - y7,13 - l7,13$
$y5,9 + l5,9 = y1,5 + l1,5 - y5,7 - l5,7$
$y9,10 + l9,10 = y5,9 + l5,9 - y9,12 - l9,12$
$y10,13 + l10,13 = y9,10 + l9,10 + y11,10 + l11,10$
$y7,13 + l7,13 = y6,7 + l6,7 + y5,7 + l5,7 - y7,8 - l7,8$

$y13{,}11 + l13{,}11 = y7{,}13 + l7{,}13 + y10{,}13 + l10{,}13$
$y11{,}10 + l11{,}10 = y13{,}11 + l13{,}11 - y11{,}12 - l11{,}12$
$y11{,}12 + l11{,}12 = y13{,}11 + l13{,}11 - y11{,}10 - l11{,}10$
$y12{,}8 + l12{,}8 = y9{,}12 + l9{,}12 + y11{,}12 + l11{,}12$
$y8{,}4 + l8{,}4 = y12{,}8 + l12{,}8 + y7{,}8 + l7{,}8$
$y3{,}5 + l3{,}5 = y8{,}4 + l8{,}4 + y14{,}4 + l14{,}4$
$y1{,}5 + l1{,}5 = y3{,}1 + l3{,}1 - y1{,}2 - l1{,}2$
$y9{,}12 + l9{,}12 = y5{,}9 + l5{,}9 - y9{,}10 - l9{,}10$

$y1{,}5 + l1{,}5 = 0$
$y5{,}9 + l5{,}9 = 0$
$y5{,}7 + l5{,}7 = 0$
$y3{,}1 + l3{,}1 = 0$
$y1{,}2 + l1{,}2 = 0$
$y2{,}14 + l2{,}14 = 0$
$y14{,}4 + l14{,}4 = 0$
$y14{,}6 + l14{,}6 = 0$
$y6{,}7 + l6{,}7 = 0$
$y6{,}2 + l6{,}2 = 0$
$y7{,}8 + l7{,}8 = 0$
$y10{,}9 + l10{,}9 = 0$
$y10{,}13 + l10{,}13 = 0$
$y7{,}13 + l7{,}13 = 0$
$y13{,}11 + l13{,}11 = 0$
$y11{,}10 + l11{,}10 = 0$
$y11{,}12 + l11{,}12 = 0$
$y12{,}8 + l12{,}8 = 0$
$y3{,}5 + l3{,}5 = 0$
$y9, 12 + l9{,}12 = 0$

1.4 Questão 4

Apresente a rede do problema de transporte que resulta da mudança de variável, indicando claramente quais são os valores de oferta (para os vértices de excesso) e de procura (para os vértices de defeito) associados a cada vértice do grafo.

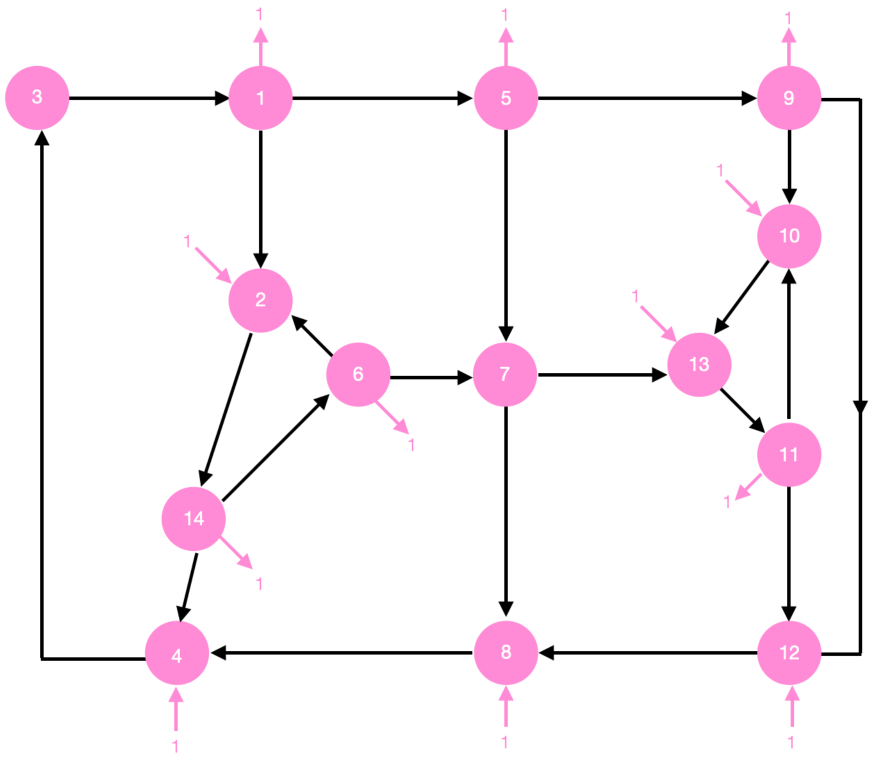


Figura 1.2: Rede de transporte resultante da mudança de variável

1.5 Questão 5

```
Mdrelax.txt
14
21
1  3 3  1000
1  2  3  1000
1  5  3  1000
2  14 6  1000
14 4  2  1000
6  2  2  1000
5  7  4  1000
6  7  2  1000
7  8  4  1000
5  9  4  1000
9  10 2  1000
10 13 3  1000
7  13 3  1000
13 11 2  1000
11 10 5  1000
11 12 3  1000
12 8  4  1000
8  4  4  1000
4  3 10 1000
1  5  3  1000
9  12 12 1000
-1
1
0
1
-1
-1
0
1
-1
1
-1
1
1
-1
```

Figura 1.3: Input submetido ao software de optimização em rede

1.6 Questão 6

```
Z:\home\hc\Desktop\Wine-relax>relax4.exe<Mdrelax.txt
 END OF READING
 NUMBER OF NODES = 14, NUMBER OF ARCS = 21
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
   3 1  4.
   1 2  1.
   1 5  2.
   2 14  2.
   5 9  1.
   10 13  1.
   13 11  2.
   11 12  1.
   12 8  2.
   8 4  3.
   4 3  4.
   14 6  1.
 OPTIMAL COST =   111.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 63
 NUMBER OF ITERATIONS =  32
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  4
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  2
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  4
 ***********************************
```

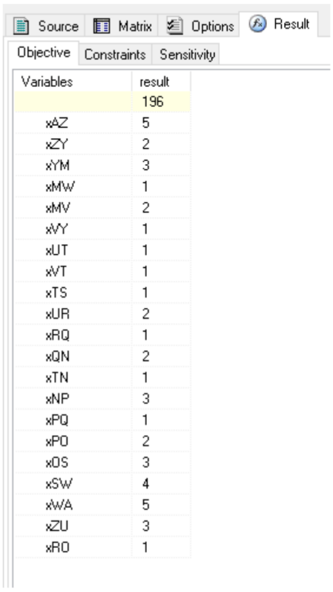
Figura 1.4: Output produzido pelo relax

1.7 Questão 7

Interprete a solução óptima, apresente o conjunto óptimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito, e calcule o seu custo. Caso tenha obtido a mesma solução óptima do Trabalho 1, pode fazer cut-and-paste do relatório anterior e identificar no desenho anteriormente apresentado o conjunto óptimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito. Caso contrário, teça todas as considerações que considere necessárias.

O resultado que obtivemos foi uma rede de caminhos mais curtos entre os vértices de excesso e os vértices de defeito através do relax. Para tal, efetuamos uma mudança de variável que nos permitiu adaptar o problema em questão ao software de optimização em rede, relax. Assim, obtemos um modelo em que o limite inferior é 0 ($l = 1$). Os valores de oferta e procura obtidos são consequência da mudança de variável associada às restrições de fluxo. Para obter a solução real voltamos a variável inicial, pelo que concluímos que a solução ótima obtida foi igual à do primeiro trabalho prático, como se pode verificar na figura 1.4 (solução após a mudança de variável) e na figura 1.5 (solução obtida no primeiro trabalho prático).

3 | **Ficheiro de output**



Variables	result
	196
xAZ	5
xZY	2
xYM	3
xMW	1
xMV	2
xVY	1
xUT	1
xVT	1
xTS	1
xUR	2
xRQ	1
xQN	2
xTN	1
xNP	3
xPQ	1
xPO	2
xOS	3
xSW	4
xWA	5
xZU	3
xRO	1

Figura 1.5: Solução obtida no primeiro trabalho prático

1.8 Questão 8

Descreva os procedimentos usados para validar o modelo.

O novo modelo ocorre de uma mudança de variável do modelo anterior, que já tinha sido validado. A introdução da mudança de variável, como sugerida no enunciado, permitiu-nos obter um excesso e um defeito associado a cada arco, necessários à resolução do problema no software em questão.

2 | Parte 2

2.1 Questão 1

Apresente o grafo bipartido deste problema de transporte, indicando os valores das ofertas e das procuras associados aos vértices e os custos unitários de transporte (calculados na alínea seguinte). Verifique que o problema é balanceado, i.e., o número total de caminhos que saem dos vértices de excesso é igual ao número de caminhos que chegam aos vértices de defeito. Dê uma justificação sucinta para esse facto.

O problema é balanceado devido à restrição de conservação de fluxo. Dado que o grafo é cíclico e fechado, iremos acabar com a mesma quantidade de arcos de entrada e de arcos de saída pois nenhum fluxo pode ser perdido. Caso contrário teríamos de ter fluxo para um vértice externo que não existe.

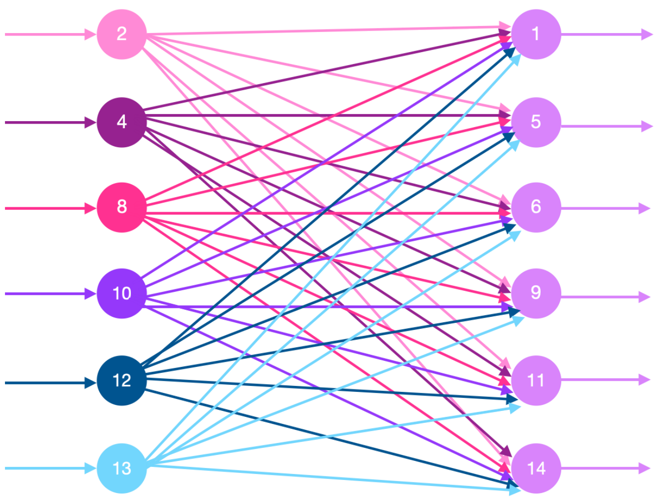


Figura 2.1: Grafo Bipartido

2.2 Questão 2

Por inspecção, ou usando um programa adequado, determine os caminhos mais curtos entre os vértices relevantes. Apresente uma matriz com os valores dos caminhos mais curtos para cada par vértice de

excesso / defeito.

O grupo decidiu realizar apenas o método de inspeção para a determinação da matriz, em vez de utilizar o *lpsolve*.

	1	5	6	9	11	14
2	21	24	10	28	17	6
4	13	16	26	20	25	24
8	17	20	30	24	29	28
10	29	32	42	36	5	38
12	21	24	34	28	33	30
13	26	29	39	33	2	35

Figura 2.2: Matriz dos valores dos caminhos mais curtos

2.3 Questão 3

```
14
36
2  1  21 1000
2  5  24 1000
2  6  10 1000
2  9  17 1000
2  11 17 1000
2  14  6 1000
4  1  13 1000
4  5  16 1000
4  6  26 1000
4  9  20 1000
4  11 25 1000
4  14 24 1000
8  1  17 1000
8  5  20 1000
8  6  30 1000
8  9  24 1000
8  11 29 1000
8  14 28 1000
10  1  29 1000
10  5  32 1000
10  6  42 1000
10  9  36 1000
10  11  5 1000
10  14 38 1000
12  1  21 1000
12  5  24 1000
12  6  34 1000
12  9  28 1000
12  11 33 1000
12  14 30 1000
13  1  26 1000
13  5  29 1000
13  6  39 1000
13  9  33 1000
13  11  2 1000
13  14 35 1000
-1
1
0
1
-1
-1
0
1
-1
1
-1
1
1
-1
```

Figura 2.3: Input submetido ao software de optimização em rede

2.4 Questão 4

```
Z:\home\hc\Desktop\Wine-relax>relax4.exe<Md2.txt
 END OF READING
 NUMBER OF NODES = 14, NUMBER OF ARCS = 36
 CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
 CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
 ***********************************
 TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
 TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
   2 6  1.
   4 5  1.
   8 1  1.
   10 14  1.
   12 9  1.
   13 11  1.
 OPTIMAL COST =   111.
 NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 24
 NUMBER OF ITERATIONS =  23
 NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  3
 NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  4
 NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  3
 ***********************************
```

Figura 2.4: Output produzido pelo relax

2.5 Questão 5

Interprete a solução óptima, apresente o conjunto óptimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito, e calcule o seu custo (faça isto caso apenas no caso de obter uma solução óptima alternativa).

Ao formular o modelo, estipulamos que para manter a integridade do fluxo teríamos de associar a todos os vértices com número de entradas diferente do número de saídas um excesso ou um defeito, obtendo assim uma solução que consiste no conjunto dos caminhos mais curtos entre os vértices de excesso e defeito, isto é, as ruas que preciso atravessar mais do que uma vez para cumprir as condições de atravessar todos os arcos do grafo e manter as restrições de fluxo. O custo é representativo do custo adicional necessário a essa condição que vai ser somado ao custo de atravessar cada um dos arcos.

2.6 Questão 6

Descreva os procedimentos usados para validar o modelo.

O problema em questão, consiste num camião que tem de atravessar todas as ruas, o que dada a natureza das ruas e seus entroncamentos, implica passar por certos arcos mais que uma vez. A partir dai, construímos um modelo com todos os caminhos em que é necessário passar mais que uma vez, caminhos extra, de forma a minimizar o custo que obtemos da solução.