

Matematicas aplicadas

Susana Hernández

Invalid Date

Table of contents

Preface	3
1 Introduction	4
2 Summary	5
3 Tarea 1	6
4 Tarea 2	14
Demostración:	14
5 Tarea 3	17
6 Tarea 4	28
7 Tarea 5	34
References	41

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit <https://quarto.org/docs/books>.

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

2 Summary

In summary, this book has no content whatsoever.

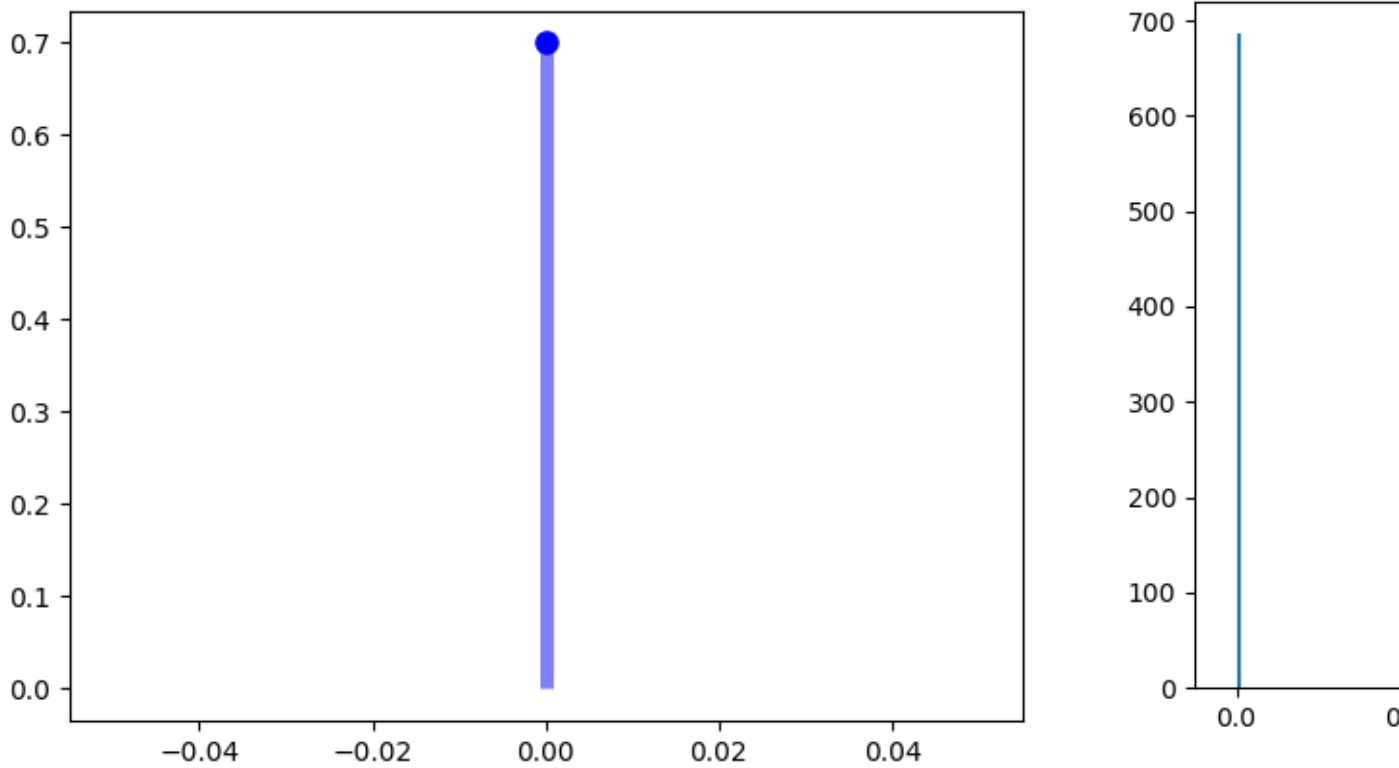
3 Tarea 1

Exercise 3.1. Se generan variables aleatorias Bernoulli y el histograma de los valores que toma con parametro $p = 0.3$.

Listing 3.1 Exploring functions to generate random variables with a Bernoulli distribution.py

```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew, kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p),
              bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```



Exercise 3.2. Se generan variables aleatorias normales y el histograma de los valores que toma.

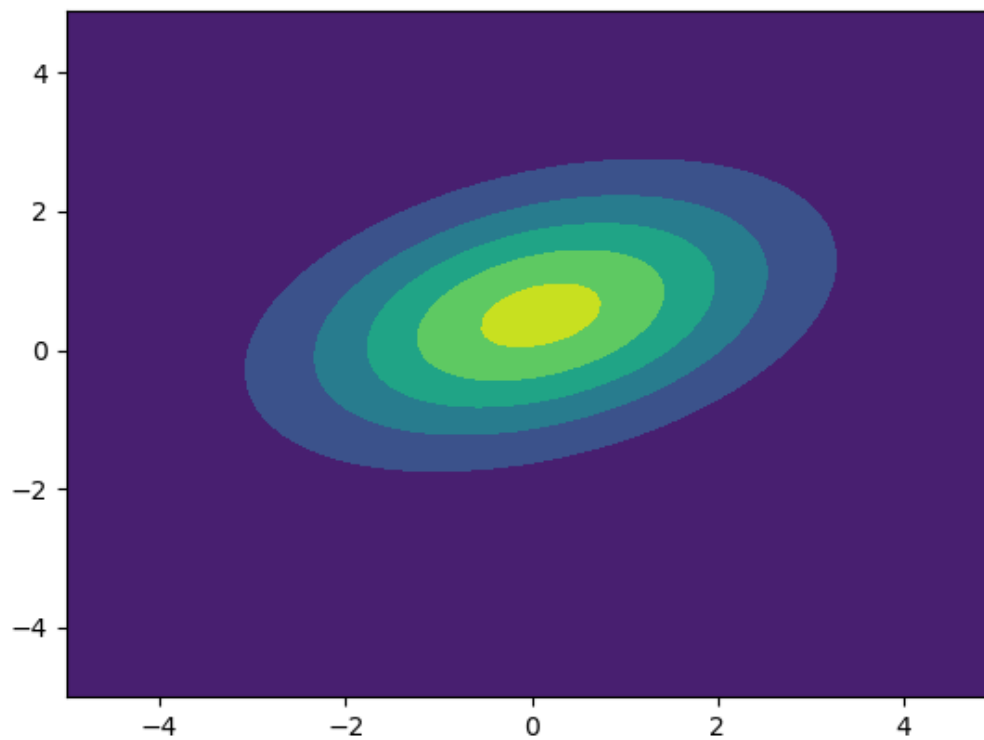
Exercise 3.3. Modificando reproducir el gráfico de una distribución gaussiana bivariada con media vectorial $\mu[0.1, 0.5]$ y matriz de covarianza

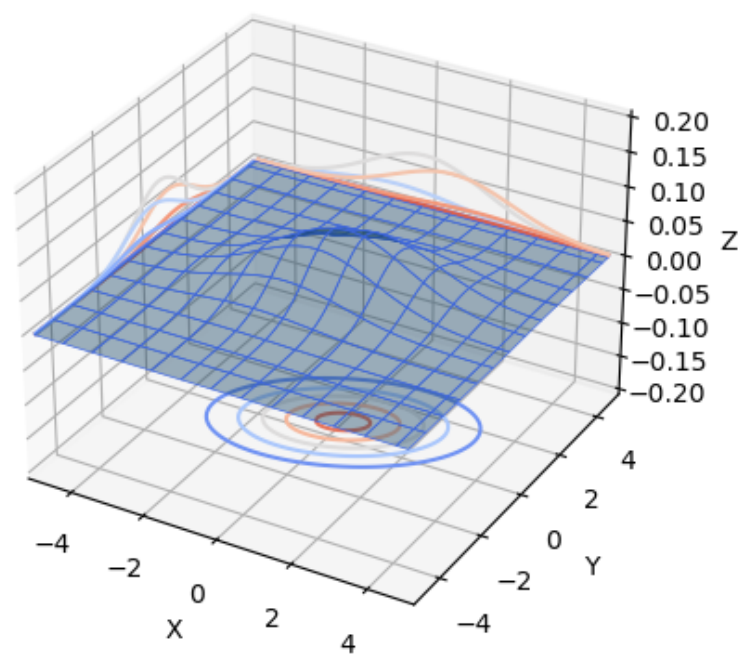
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3.0 & 0.3 \\ 0.75 & 1.5 \end{bmatrix}$$



Figure 3.1: Figura 3







Listing 3.2 Exploring functions to generate random variables with a Gaussian distribution.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

fig, ax = plt.subplots(1, 1)
mean, var, skew, kurt = norm.stats(moments='mvsk')

x = np.linspace(norm.ppf(0.01), norm.ppf(0.99), 100)
ax.plot(
    x,
    norm.pdf(x),
    'r-',
    lw=5,
    alpha=0.6,

    label='norm pdf'
)
rv = norm()
ax.plot(x, rv.pdf(x), 'k-', lw=2, label='frozen pdf')
vals = norm.ppf([0.001, 0.5, 0.999])

np.allclose([0.001, 0.5, 0.999], norm.cdf(vals))

r = norm.rvs(size=50000)

ax.hist(r, density=True, bins='auto', histtype='stepfilled', alpha=0.2)
ax.set_xlim([x[0], x[-1]])
ax.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```

Listing 3.3 Revising multivariate Gaussian.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5);

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]

pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.1, 0.5], [[3.0, 0.3], [0.75, 1.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
# plt.show()

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,

    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')

ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'

)
plt.show()
```

4 Tarea 2

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria. Demuestre que para δ y h pequeño tenemos

$$E \exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)] \approx \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right]$$

Demostración:

Considere una caminata aleatoria que comienza en 0 con saltos h y $-h$ igualmente probables en los momentos $\delta, 2\delta, \dots$, donde h y δ son números positivos. Más precisamente, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. variables con

$$P[X_i = h] = P[X_i = -h] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y pongamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Para $t > 0$, defina $Y_{\delta,h}(t)$ mediante linealización, es decir, para $n\delta < t < (n+1)\delta$, defina

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Calculemos la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y sea $t = n\delta$ así, $n = t/\delta$. Entonces se tiene que

$$E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] = \prod_{j=1}^n E e^{i\lambda X_j}, \text{ por ser variables independientes,} \quad (4.1)$$

$$= (E e^{i\lambda X_j})^n, \text{ por ser idénticamente distribuidas,} \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{i\lambda h} + e^{-i\lambda h})^n, \quad (4.3)$$

$$= (\cos(\lambda h))^n, \quad (4.4)$$

$$= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}, \quad (4.5)$$

(4.6)

Por otro lado, sea $u = [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \Rightarrow \ln(u) = \frac{1}{\delta} \ln[\cos(\lambda h)]$.

Usando la expansión de Taylor de $\cos(x)$ se tiene que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\ln(\cos(\lambda h)) \approx \ln \left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right] \quad (4.7)$$

$$\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} \right)^2 \quad (4.8)$$

$$= -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^4 h^4}{4} - \frac{\lambda^6 h^6}{24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{24} \right) \quad (4.9)$$

$$= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} - \frac{\lambda^4 h^4}{8} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \quad (4.10)$$

$$= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \quad (4.11)$$

para una h pequeña, se satisface que,

$$-\frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \approx 0$$

Por lo tanto, $\ln(\cos(\lambda h)) \approx -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}$. Así, para δ y h pequeña, se tiene que $\ln u \approx \frac{1}{\delta} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} \right)$. Entonces

$$u \approx \exp \left[\frac{1}{\delta} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} \right) \right] \quad (4.12)$$

Entonces por la ecuación (Equation 4.6),

$$E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] \approx \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right] \quad (4.13)$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i \lambda Y_{n,\delta}(t) \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left[-t \left(\left[\frac{h^2}{\delta} \right] \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^2}{24} \right) \right) \right],$$

Asumamos que $\delta \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ pero $h^2/\delta \rightarrow \infty$. Entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} Y_{\delta,h}(t)$ no existe. Por otro lado, consideremos la siguiente renormalización,

$$E \exp \left[i \lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right] = E \left[\exp(i\lambda Y_{n,\delta}(t)) \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right] \quad (4.14)$$

$$= \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) E \exp \left[i \lambda Y_{n,\delta}(t) \right] \quad (4.15)$$

$$\approx \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right] \quad (4.16)$$

$$= \exp \left(-\frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right) \quad (4.17)$$

Así, si $\delta, h \rightarrow 0$ de tal manera que $h^2/\delta \rightarrow \infty$ y $h^4/\delta \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i \lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left(\frac{(\lambda h)^4}{24\delta} \right) = 1$$

5 Tarea 3

Exercise 5.1. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\frac{X - \mu}{\sigma}$,

$$\varphi_{\frac{X - \mu}{\sigma}}(t) = E \left[e^{it \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)} \right] \quad (5.1)$$

$$= E \left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} - \frac{it\mu}{\sigma} \right)} \right] \quad (5.2)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E \left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} \right)} \right] \quad (5.3)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.4)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.5)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.6)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2}} dx \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

Observemos que,

$$\frac{(x - \mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} = \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} \quad (5.9)$$

$$= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} \quad (5.10)$$

$$= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma} \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (5.11)$$

$$= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (5.12)$$

$$= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} \quad (5.13)$$

$$= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2. \quad (5.14)$$

$$(5.15)$$

Sustituyendo (Equation 5.15) en (Equation 5.8), resulta

$$\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2 \right]} dx \quad (5.16)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma} - \frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2} dx \quad (5.17)$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2} dx \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

Sea $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma} dx$, sustituyendo esto en (Equation 5.19), resulta

$$\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (5.20)$$

$$(5.21)$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0, 1)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1.$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.21), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (5.22)$$

$$(5.23)$$

Por otro lado, consideremos $Z \sim N(0, 1)$, entonces

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Entonces $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

□

Exercise 5.2. Si $Y \sim N(0, 1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = E[e^{it(\sigma Y + \mu)}] \quad (5.24)$$

$$= E[e^{it\sigma Y + it\mu}] \quad (5.25)$$

$$= e^{it\mu} E[e^{it\sigma Y}] \quad (5.26)$$

$$= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (5.27)$$

$$= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy. \quad (5.28)$$

$$(5.29)$$

Observemos que,

$$y^2 - 2yit\sigma = (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 \quad (5.30)$$

$$= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2. \quad (5.31)$$

$$(5.32)$$

Sustituyendo, (Equation 5.32) en (Equation 5.29) resulta

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y-it\sigma)^2 + t^2\sigma^2)} dy \quad (5.33)$$

$$= e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy \quad (5.34)$$

$$(5.35)$$

Tomando $u = y - it\sigma \implies du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

entonces $U \sim N(0, 1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.35), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu, \sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$$

□

Exercise 5.3. Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proof. Por definición, se tiene que,

$$\varphi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] \quad (5.36)$$

$$= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} \quad (5.37)$$

$$= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \quad (5.38)$$

$$= \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z , esta dada por,

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \\ &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}+it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \end{aligned}$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (Equation 5.40) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

□

Exercise 5.4 (Ejercicio 4:). Si X, Y son variables aleatorias normales entonces X, Y son independientes si y solo si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proof. Primero recordemos que

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy$$

Como X, Y son independientes, sabemos que

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Entonces

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \quad (5.41)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \quad (5.42)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \right) \quad (5.43)$$

$$= E(X) E(Y) \quad (5.44)$$

□

Theorem 5.1 (Desigualdad de Chebyshev). *Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. Sea $Y = |X - \mu|$, observemos que Y es positiva, así por la desigualdad de Markov y dado que $\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] = \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2]$, se cumple que

$$\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] = \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2] \quad (5.45)$$

$$\leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \quad (5.46)$$

□

Theorem 5.2 (Ley de los grandes números). *Sean X_1, X_2, \dots, X_n procesos de ensayos independientes, con esperanza finita $\mu = E(X_j)$ y varianza finita $\sigma^2 = \text{Var}(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.*

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \rightarrow 0$$

Proof. Observemos que

$$\text{Var} \left[\frac{S_n}{n} - \mu \right] = \frac{1}{n^2} \text{Var} (S_n) \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} (X_i), \text{ por ser iid} \quad (5.48)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.49)$$

Entonces, por el Teorema 5.1,

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

así, tomando el limite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

□

Theorem 5.3 (Teorema del Limite Central). *Sea $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ una secuencia de v.a.i.id con media a y varianza b^2 . Entonces para doo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, entonces*

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} dx$$

Proof. Definamos a

$$S_M = \sum_{i=1}^M [X_i - a],$$

y

$$Y_M = \frac{S_M}{\sqrt{Mb}}.$$

Sea φ_{Y_M} la función generadora de momentos de Y_M y φ la función generadora de momentos de la distribución normal estándar, demostraremos que $\varphi_{Y_M} \rightarrow \varphi$.

Por definición,

$$\varphi_{Y_M}(t) = E \left[\exp \left(t \frac{S_M}{\sqrt{Mb}} \right) \right] \quad (5.50)$$

$$= \varphi_{S_M} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \quad (5.51)$$

$$= \left[\varphi_{(X_1-a)} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \right]^M \text{ ya que, las } X_i \text{ son i.i.d} \quad (5.52)$$

$$= \left[E \left[\exp \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right) \right] \right]^M \quad (5.53)$$

Recordando la serie de Taylor

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!} \right]^M \quad (5.54)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} \right)^2 E[(X_1 - a)^2] + \epsilon(3) \right]^M \quad (5.55)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{M} \frac{t^2}{2} + \epsilon(3) \right]^M, \quad (5.56)$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!}, \quad (5.57)$$

Ahora sea $s = \frac{t}{b\sqrt{M}}$, así,

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^i}{i!}$$

Además observemos que, cuando $t \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$.

Así, de lo anterior, si φ_1 existe, se cumple que,

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, \text{ cuando, } s \rightarrow 0.$$

Por otro lado,

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M,$$

y $s \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

Entonces $\epsilon(3) s^{-2} = M\epsilon(3) b^2 t^{-2} \rightarrow 0$. Dado que b, t estan fijas, se cumple que

$$M\epsilon(3) \rightarrow 0, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \rightarrow \frac{t^2}{2}, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty$$

esto implica que,

$$\left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M \rightarrow \exp(t^2/2), M \rightarrow \infty$$

De aqui se concluye que,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M(t) = \exp(t^2/2) = \varphi(t)$$

la cual es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$$

que es equivalente a,

$$F_M(b) - F_M(a) \rightarrow F_N(b) - F_N(a)$$

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

□

Theorem 5.4. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d con media a . Entonces

$$\mathcal{P} \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = a \right] = 1.$$

Proof. Esto es similar a decir que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \stackrel{\text{c.s.}}{=} a$$

Sin pérdida de generalidad, diremos que $X_i \geq 0, \forall i$. Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n| \leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left[\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Q_n)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) \quad (5.58)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \int_0^n x^2 dF \quad (5.59)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^n x dF < \infty, \quad (5.60)$$

donde F es la función de distribución de X_i . Luego

$$E[X_1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x dF = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[Q_n]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P} \left[\limsup \left(\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right) \right] = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{n} = E[X_1], \text{ c.s.}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i \neq Y_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n]$$

como $E[X_i] < \infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n] \leq E[X_1] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}[\limsup [X_i \neq Y_i]] = 0, \forall i$$

Entonces

$$X_i = Y_i, \text{ c.s} \tag{5.61}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \rightarrow E[X_1] = \mu. \text{ c.s} \tag{5.62}$$

□

6 Tarea 4

Exercise 6.1. Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0, T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0, T]$.

Proof.

Veamos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.

Propiedad C1 (Que comience en 0).

Se tiene que, $V(0) = \frac{1}{c} W(c^2 \cdot 0) = 0$.

Propiedad C2 (Incrementos Independientes).

Sean $s < t < u < v$, por definición de V , se tiene que,

$$E[(V(t) - V(s))(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Dado que W tiene incrementos independientes, se cumple que,

$$\frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))] E[(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

Propiedad C3 (Incrementos estacionarios).

Sea $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c} [W(c^2 t) - W(c^2 s)]$$

Por las propiedades de la definición del movimiento Browniano.

$$E[V(t) - V(s)] = \frac{1}{c} E[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = 0 \quad (6.2)$$

$$\text{Var}[V(t) - V(s)] = \frac{1}{c^2} \text{Var}[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = \frac{1}{c^2} (c^2 (t - s)) = t - s \quad (6.3)$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

Con todo lo anterior se concluye que, V es un movimiento browniano.

□

Exercise 6.2. Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

Listing 6.1 Browniano escalado, con $c=1/5$.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)
T = 1
n = 100
dt = 1 / (n - 1)
dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n - 1)
w = np.concatenate(([0], dw.cumsum()))

time = np.linspace(0, T, n)
c = 0.2 # 1/5
c_time = c**2 * time
c_w = c**(-1) * w

fig, browniano_escalado = plt.subplots(2)
browniano_escalado[0].plot(time, w)
browniano_escalado[1].plot(c_time, c_w)
browniano_escalado[0].set_title('Movimiento browniano')
browniano_escalado[1].set_title('Movimiento browniano escalado')
plt.show()
```

Exercise 6.3. Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número

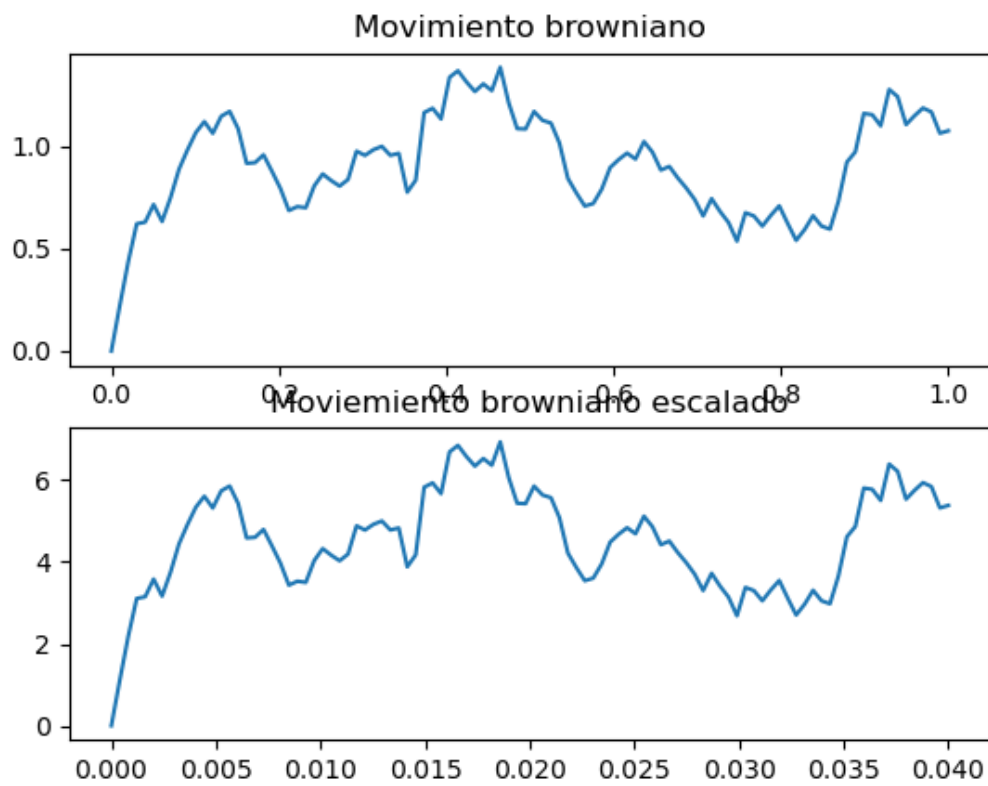


Figure 6.1: Figura 1

de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de una refinamiento con $2N$ incrementos.

Listing 6.2 Browniano refinado, con refinamiento $2N$.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)
    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t,t_half,W, W_refined
```

Exercise 6.4. En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

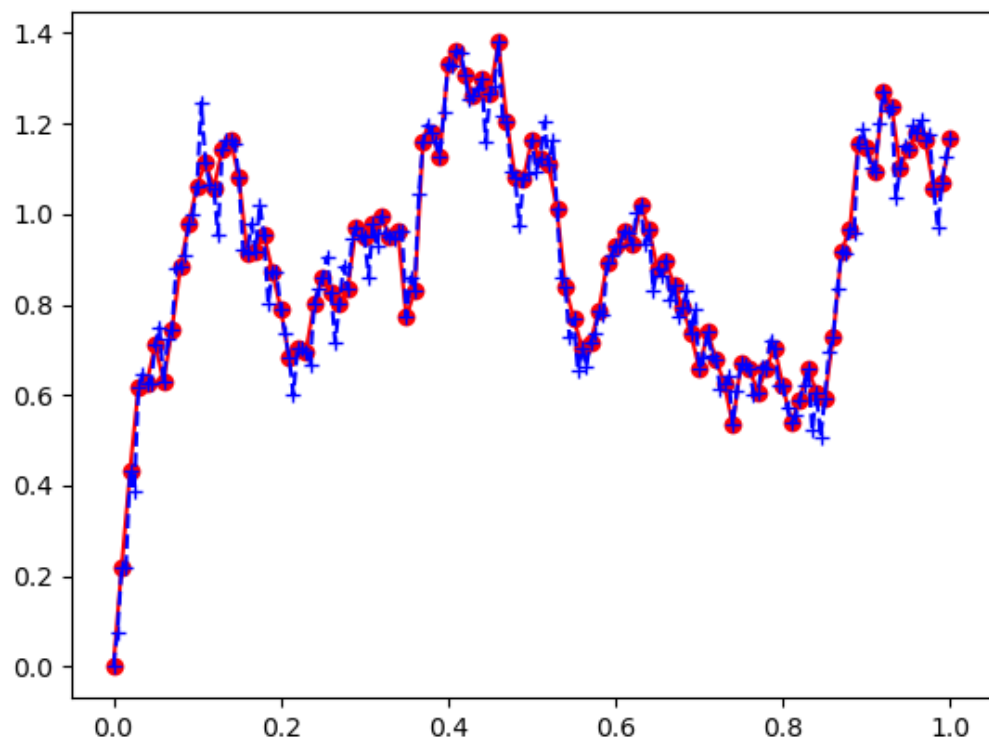


Figure 6.2: Figura 2

Listing 6.3 Browniano refinado, con refinamiento 2N y 100 incrementos.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import h_b_r as hbr

a, b, c, d = hbr.refined_brownian_2n(1, 100)

plt.plot(a, c, 'r-+')
plt.plot(
    b,
    d,
    'g*--',
    # alpha = transparencia

)
plt.show()
```

7 Tarea 5

Exercise 7.1. Demuestre que el movimiento browniano satisface

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|.$$

Proof. Consideremos dos casos:

Si $t > s$.

$$\begin{aligned} E[|W(t) - W(s)|^2] &= E[(W(t) - W(s))^2] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

ya que, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

Mientras que si $t \leq s$.

$$\begin{aligned} E[(W(t) - W(s))^2] &= E[(W(s) - W(t))^2] \\ &= s - t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|$$

□

Exercise 7.2. Dados $W(t_i)$ y $W(t_{i+1})$, demuestre que la variable aleatoria

$$W(t_{i+\frac{1}{2}}) := \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi, \quad \xi \sim N(0, 1)$$

satisface las tres condiciones C1, C2, C3 de la definicion de movimiento Browniano.

Proof. (C1) Veamos que $W(0) = 0$, cuando $t = 0$.

Se tiene por definicion del proceso que,

$$W(0) = \frac{1}{2}(W(0) + W(0)) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta(0)}\xi = 0.$$

Por la propiedad C1 se satisface.

(C2) Que tenga incrementos estacionarios.

Notemos que

$$\begin{aligned} W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i) &= \frac{1}{2}[W(t_{i+1}) + W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi - \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_i)) \\ &= \frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i)] &= E\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)]\right] + E\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= \frac{1}{2}E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E[\xi] \\ &= 0 \quad \text{ya que, } E[\xi] = 0 \text{ y } E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0. \end{aligned}$$

y

$$Var[W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i)] = Var\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \quad (7.1)$$

$$= Var\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)]\right] + Var\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \quad (7.2)$$

$$= \frac{1}{4}Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{4}\delta t Var[\xi] \quad (7.3)$$

$$= \frac{1}{4}\delta t + \frac{1}{4}\delta t \quad \text{ya que, } Var[\xi] = 1 \text{ y } Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = \delta t \quad (7.4)$$

$$= \frac{1}{2}\delta t. \quad (7.5)$$

Además, sabemos que la combinación lineal de normales es una normal.

Por lo tanto $W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i) \sim N\left(0, \frac{\delta t}{2}\right)$, con esto C2 se cumple.

(C3) Que tenga incrementos independientes.

Para esta parte usaremos que dos variables aleatorias X y Y son independientes si y solo si

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

calculemos $E \left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(W(t_{j+1}) - W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right]$ y definamos a $\Delta W(t_i) := W(t_{i+1}) - W(t_i)$.

Por lo anterior se tiene que:

$$E \left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right] = E \left[\left(\frac{1}{2} \Delta W(t_i) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right) \left(\frac{1}{2} \Delta W(t_j) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right) \right],$$

donde $\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) = W(t_{i+1}) - W(t_{i+\frac{1}{2}})$ y $\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) = W(t_{j+1}) - W(t_{j+\frac{1}{2}})$. Desarrollando la parte derecha de la igualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned} E \left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right] &= E \left[\frac{1}{4} \Delta W(t_i) \Delta W(t_j) + \frac{1}{4} \Delta W(t_i) \sqrt{\delta t} \xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \Delta W(t_j) \sqrt{\delta t} \xi + \left(\frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ya que, } \Delta W(t_i), \Delta W(t_j) \text{ son independientes} &= \frac{1}{4} E[\Delta W(t_i)] E[\Delta W(t_j)] + \frac{1}{4} E[\Delta W(t_i)] \sqrt{\delta t} E[\xi] + \frac{1}{4} E[\Delta W(t_j)] \sqrt{\delta t} E[\xi] + \frac{1}{4} E[(\sqrt{\delta t} \xi)^2] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] + E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) \right] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] + E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) \right] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] + \frac{\delta t}{4} E[\xi^2] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] + E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] + E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] \\ &= E[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $E \left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right] = E[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})]$, con lo que se concluye que se satisface la propiedad C3. Con todo lo anterior se concluye que $W(t_{i+\frac{1}{2}})$ define un Movimiento Browniano.

□

Exercise 7.3. Generalice la formula en el {Exercise 7.2} para el caso, dado $W(t_i), W(t_{i+1})$, y $\alpha \in (0, 1)$ el valor

$$W(t_i + \alpha dt)$$

satisface las tres condiciones que define un movimiento Browniano.

Proof. Observemos que

$$t_{i+\alpha} = \alpha t_{i+1} + (1 - \alpha)t_i,$$

y

$$W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) \sim \alpha \sqrt{dt} N(0, 1)$$

Definamos a

$$W(t_{i+\alpha}) = W(t_i + \alpha \Delta t) := (1 - \alpha) W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y.$$

donde Y será una v.a independiente de $W(t_i)$.

Dado que,

$$\begin{aligned} W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) &= (1 - \alpha) W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y - W(t_i) \\ &= \alpha (W(t_{i+1}) - W(t_i)) + Y. \end{aligned}$$

Entonces,

$$E[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)] - E[\alpha (W(t_{i+1}) - W(t_i))] = E[Y] \implies E[Y] = 0,$$

y

$$\text{Var}[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)] = \alpha^2 dt + \text{Var}[Y],$$

Así,

$$\text{Var}[Y] = dt (\alpha - \alpha^2),$$

entonces $Y = \sqrt{\alpha(1 - \alpha)} \sqrt{dt} \xi, \xi \sim N(0, 1)$.

Con esto se cumple C1.

$$W(0) = 0.$$

y por construcción análogamente que el ejercicio anterior se satisfacen las propiedades C2 y C3.

□

Exercise 7.4. Suponga que $X \sim N(0, 1)$, sabemos que $E[X] = 0$ y $E(X^2) = 1$.

Además de la definición, el pésimo-momento satisface

$$E[X^p] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp(-x^2/2) dx.$$

Usando esta relación, demuestre que $E[X^3] = 0$ y $E[X^4] = 3$. Entonces deduce que un incremento Browniano $\delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ satisface que $E[\delta W_i^3] = 0$ y $E[\delta W_i^4] = 3\delta t^2$. Entonces encuentre una expresion para $E[X^p]$ para un entero positivo p

Proof. De la definición del p -ésimo momento se tiene para $p = 4$, que

$$E[X^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

resolviendo esta integral por el método integración por partes, se tiene que $E[X^4] = uv - \int v du$, donde $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ y $dv = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, calculemos primero v ,

$$\begin{aligned} v &= \int x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad \text{sea } y = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow dy = -x dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(y) dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(y) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo todo lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} E[X^4] &= -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) 3x^2 dx \\ &= -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + 3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + 3E[X^2], \end{aligned}$$

por otro lado,

$$-x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto, dado que $E[X^2] = 1$, se concluye que

$$E[X^4] = 3.$$

Procediendo de igual manera que el caso anterior, se tiene que:

$$E[X^3] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

tomando $u = x^2 \implies du = 2x dx$ y dv , v igual al caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} E[X^3] &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -2x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2E[X] \\ &= 0, \end{aligned}$$

usando el hecho que $E[X] = 0$ y

$$-x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$E[X^3] = 0.$$

De manera general se tiene que,

$$\begin{aligned} E[X^p] &= -x^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -(p-1)x^{p-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 0 + (p-1)E[X^{p-2}] \\ &= (p-1)E[X^{p-2}]. \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que $\delta W_i \sim N(0, \delta t)$, donde $\delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces

$$Z = \frac{\delta W_i}{\sqrt{\delta t}} \sim N(0, 1),$$

que por lo visto anteriormente, para $p = 4$.

$$E[Z^4] = 3 \implies E[(\delta W_i)^4] = E[Z^4](\delta t)^2 = 3(\delta t)^2$$

y para $p = 3$, resulta

$$E[Z^3] = 0 \implies E[(\delta W_i)^3] = E[Z^3](\delta t)^{3/2} = 0.$$

□

Exercise 7.5. Suponga que $X \sim N(0, 1)$. Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$E[\exp(a + bX)] = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Por lo tanto deduzca que

$$E[\exp(t + \frac{1}{4}W_t)] = \exp\left(\frac{32}{33}t\right).$$

Proof. Se tiene que

$$E[\exp(a + bX)] = \exp(a)E[\exp(bX)],$$

observemos que $bX \sim N(0, b^2)$ además, $E[\exp(bX)]$ es la función generadora de momentos cuando $t = 1$

$$M_{bX}(1) = E[\exp(bX)] = \exp\left(\frac{b^2}{2}\right),$$

sustituyendo, resulta

$$E[\exp(a + bX)] = \exp(a) \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Ahora calculemos $E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right]$, se tiene que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}(W_t - W_0)\right)\right],$$

entonces consideremos a $\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}$, observemos que, $\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}} \sim N(0, 1)$, por lo tanto, podemos usar la fórmula anterior con $a = t$ y $b = \frac{1}{4}\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}(W_t - W_0)\right)\right] &= E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\sqrt{t}\left(\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left(t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}t\right)\right) \\ &= \exp\left(t + \frac{1}{32}t\right) \\ &= \exp\left(\frac{33}{32}t\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = \exp\left(\frac{33}{32}t\right).$$

□

References

Knuth, Donald E. 1984. “Literate Programming.” *Comput. J.* 27 (2): 97–111. <https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97>.