clase 22 de agosto 2023

Susana Hernández

Invalid Date

Table of contents

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit https://quarto.org/docs/books.

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

2 Summary

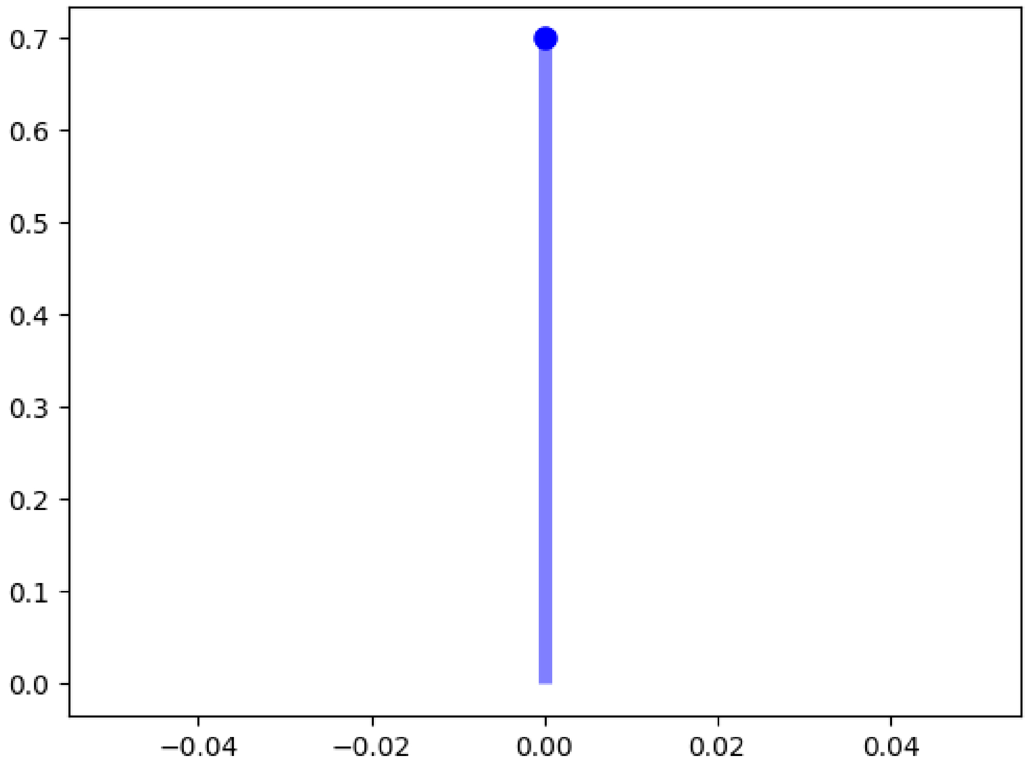
In summary, this book has no content whatsoever.

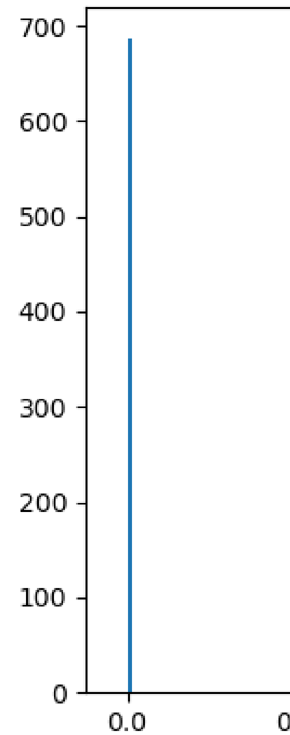
3 Tarea 1

Listing 3.1 Exploring functions to generate random variables with a Bernoulli distribution.py

```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew,kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p),
              bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```


0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−0.04
−0.02
0.00
0.02
0.04


700
600
500
400
300
200
100
0
0.0

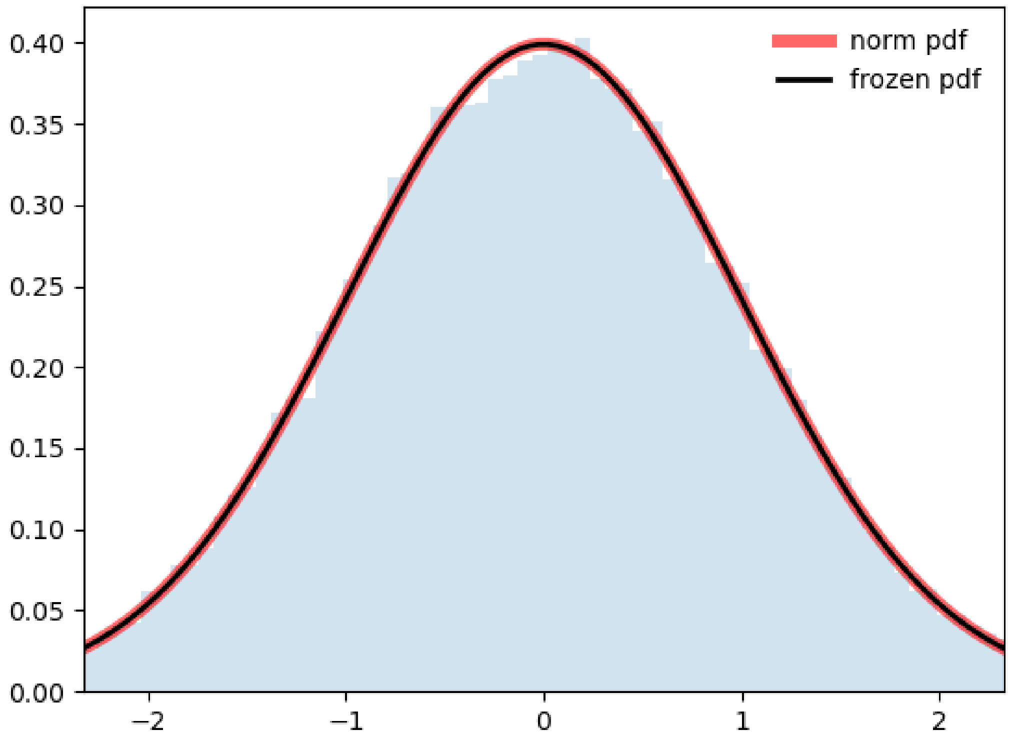
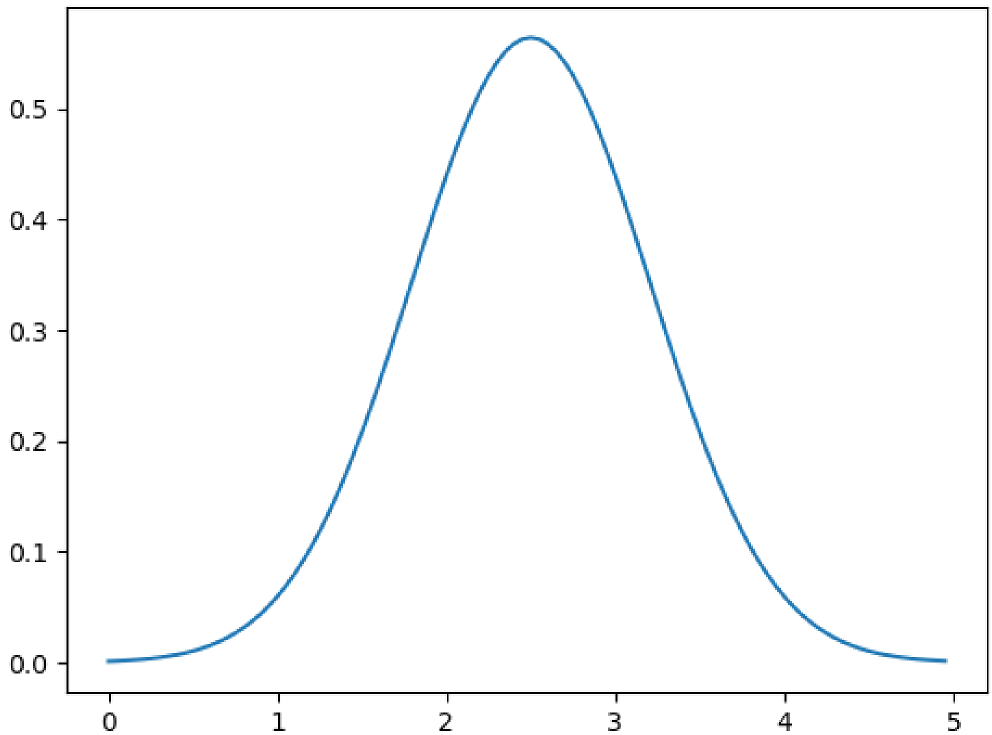
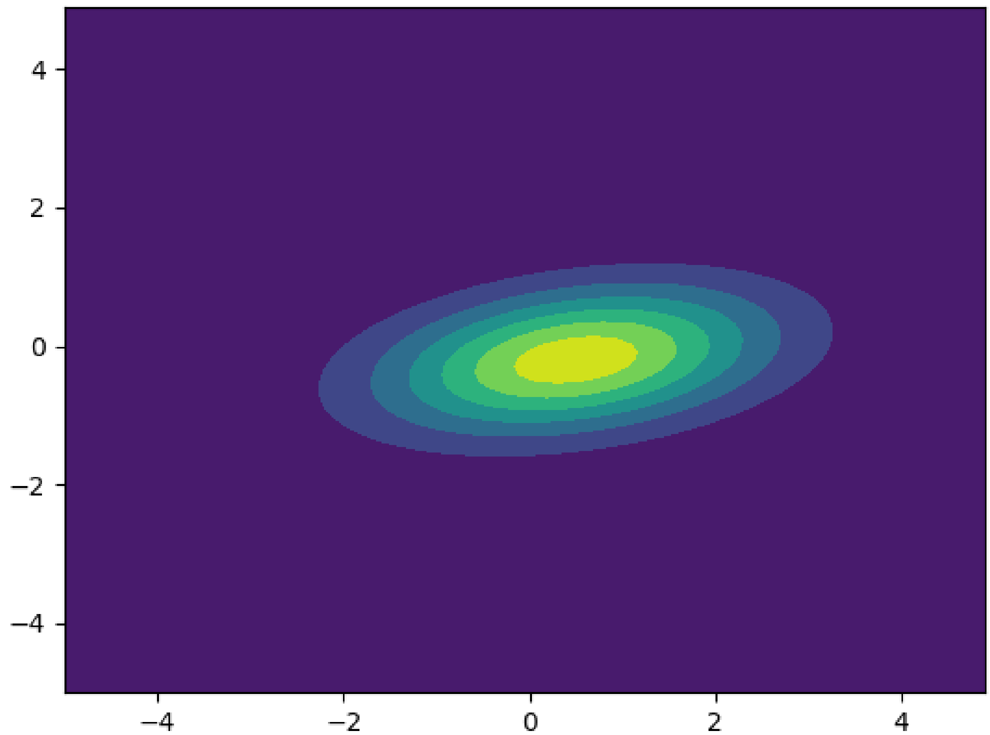
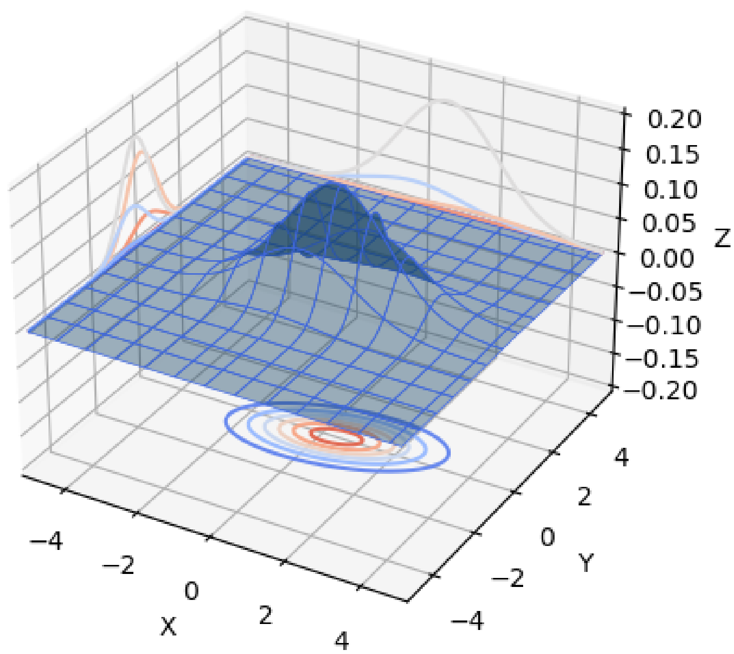


Figure 3.1: Figura 3


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
1
2
3
4
5


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
−0.20
Z
−4
−2
0
2
4
X
4
2
0
−2
−4
Y

Listing 3.2 Exploring functions to generate random variables with a Gaussian distribution.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```



```
from scipy.stats import norm
```

Listing 3.3 Revising multivariate Gaussian.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5);

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]
pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.5, -0.2], [[2.0, 0.3], [0.3, 0.5]])
fig2 = plt.figure()

ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
# plt.show()

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,
    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')

ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')

ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'
)
plt.show()
```

4 Tarea 2

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria. Demuestre que para δ y h pequeño tenemos

$$E\exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)] \approx \exp\left[-\frac{t\lambda^2h^2}{2\delta}-\frac{t\lambda^4h^4}{12\delta}\right]$$

Demostración:

Considere una caminata aleatoria que comienza en 0 con saltos h y $-h$ igualmente probables en los momentos δ, 2 δ,..., donde h y δ son números positivos. Más precisamente, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. variables con

$$P\left[X_i = h\right] = P\left[X_i = -h\right] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y pongamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, defina $Y_{\delta,h}(t)$ mediante linealización, es decir, para $n\delta < t < (n+1)\delta$, defina

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta}Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t-n\delta}{\delta}Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Calculemos la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y sea $t = n\delta$ así, $n = t/\delta$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right] &= \prod_{j=1}^{n} Ee^{i\lambda X_j}, \text{ por ser variables independientes,}\\
&= (Ee^{i\lambda X_j})^n, \text{ por ser idénticamente distribuidas,}\\
&= \frac{1}{2}(e^{i\lambda h}+e^{-i\lambda h})^n,\\
&= (\cos(\lambda h))^n,\\
&= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}, \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

$$. \tag{4.2}$$

Por otro lado, sea $u = [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \Rightarrow \ln(u) = \frac{1}{\delta}\ln[\cos(\lambda h)]$.

Usando la expansión de Taylor de $\cos(x)$ se tiene que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(\lambda h)) &\approx \ln\left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}\right] \\
&\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!}\right)^2 \\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^4 h^4}{4} - \frac{\lambda^6 h^6}{24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{24}\right) \\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} - \frac{\lambda^4 h^4}{8} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

para una h pequeña, se satisface que,

$$-\frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \approx 0$$

Por lo tanto, $\ln(\cos(\lambda h)) \approx -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}$.\ Así, para δ y h pequeña, se tiene que $\ln u \approx \frac{1}{\delta}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}\right)$.\ Entonces

$$u \approx \exp\left[\frac{1}{\delta}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}\right)\right] \tag{4.4}$$

Entonces por la ecuación (Equation 4.2)

$$E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}(t)\right] \approx \exp\left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right] \tag{4.5}$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta\to 0} E\left[\exp\left(i\lambda Y_{n,\delta}(t)\right)\right] = \lim_{\delta\to 0}\exp\left[-t\left(\left[\frac{h^2}{\delta}\right]\left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^2}{24}\right)\right)\right],$$

Asumamos que $\delta \to 0$, $h \to 0$ pero $h^2/\delta \to \infty$. Entonces $\lim_{\delta\to 0} Y_{\delta,h}(t)$ no existe. Por otro lado, consideremos la siguiente renormalización,

$$\begin{aligned}
E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right] &= E\left[\exp(i\lambda Y_{n,\delta}(t))\exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)\right] \\
&= \exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right) E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}(t)\right] \\
&\approx \exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)\exp\left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right] \\
&= \exp\left(-\frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Así, si $\delta, h \to 0$ de tal manera que $h^2/\delta \to \infty$ y $h^4/\delta \to 0$, entonces

$$\lim_{\delta\to 0} E\left[\exp\left(i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2}\right)\right] = \lim_{\delta\to 0}\exp\left(\frac{(\lambda h)^4}{24\delta}\right) = 1$$

5 Tarea 3

Exercise 5.1 (Ejercicio 1:)**.** Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ entonces $\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,

$$

```
 \begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) & =  E\left[e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right]\
& = E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}-\frac{it\mu}{\sigma}\right)}\right]\nonumber\\
& =  e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}\right)}\right]\nonumber\\
& =  e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{itx}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sc
& =  e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{itx
& =  e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{itx
& =  e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}
 \end{aligned}
```

$${#eq-1.1}

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E\left[e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right] \\
&= E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}-\frac{it\mu}{\sigma}\right)}\right] \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}\right)}\right] \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2-2itx\sigma}{\sigma^2}}\, dx \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{(x-\mu)^2-2itx\sigma}{\sigma^2} &= \frac{x^2-2x\mu+\mu^2-2itx\sigma}{\sigma^2}\\
&= \frac{x^2}{\sigma^2}-\frac{2x\mu}{\sigma^2}+\frac{\mu^2}{\sigma^2}-\frac{2itx\sigma}{\sigma^2}\\
&= \frac{x^2}{\sigma^2}-\frac{2x}{\sigma}\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma^2}\right)+\frac{\mu^2}{\sigma^2}\\
&= \left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)^2+\frac{\mu^2}{\sigma^2}\\
&= \left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2-\frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2}-\frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2}\\
&= \left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2-\frac{2it\mu}{\sigma}+t^2. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (5.2) en ((**eq?**)-{1.1}), resulta

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2-\frac{2it\mu}{\sigma}+t^2\right]}dx\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}}e^{\frac{it\mu}{\sigma}-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2}dx\\
&= e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2}dx \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

Sea $u=\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right) \Longrightarrow du=\frac{1}{\sigma}dx$, sustituyendo esto en (5.3), resulta

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (5.4)$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0,1)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}dx=1.$$

sustituyendo esto ultimo en (5.4), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad (5.5)$$

Por otro lado, consideremos $Z \sim N(0,1)$, entonces

$$\varphi_Z(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Entonces $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

$\square$

Exercise 5.2 (Ejercicio 2:)**.** Si $Y \sim N(0,1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma Y+\mu}(t) &= E\left[e^{it(\sigma Y+\mu)}\right] \\ &= E\left[e^{it\sigma Y + it\mu}\right] \\ &= e^{it\mu} E\left[e^{it\sigma Y}\right] \\ &= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \\ &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} y^2 - 2yit\sigma &= (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 \\ &= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Sustituyendo, (5.7) en (5.6) resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma Y+\mu}(t) &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y-it\sigma)^2 + t^2\sigma^2)} dy \\ &= e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tomando $u = y - it\sigma \Longrightarrow du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

entonces $U \sim N(0,1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (5.8), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu, \sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$$

□

Exercise 5.3 (Ejercicio 3:)**.** Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proof. Por definición, se tiene que,

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] \\ &= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} \\ &= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z, esta dada por,

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2} + it\mu_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \end{aligned}$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (5.9) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

□

Exercise 5.4 (Ejercicio 4:)**.** Si X, Y son variables aleatorias normales entonces X, Y son independientes si y solo si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proof. Primero recordemos que

$$E\left(XY\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Como X, Y son independientes, sabemos que

$$f_{XY}\left(x,y\right) = f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E\left(XY\right) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X\left(x\right)f_y\left(y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf_X\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} yf_y\left(y\right)\mathrm{d}y\right) \\
&= E\left(X\right)E\left(Y\right)
\end{aligned}$$

□

Theorem 5.1 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. Sea $Y = |X-\mu|$, observemos que Y es positiva, así por la desigualdad de Markov y dado que $\mathcal{P}\left[|X-\mu| \geq \epsilon\right] = \mathcal{P}\left[|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2\right]$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left[|X-\mu| \geq \epsilon\right] &= \mathcal{P}\left[|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2\right] \\
&\leq \frac{E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{\epsilon^2}
\end{aligned}$$

□

Theorem 5.2 (Ley de los grandes números). *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ procesos de ensayos independientes, con esperanza finita $\mu = E(X_j)$ y varianza finita $\sigma^2 = Var(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.*

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \to 0$$

Proof. Observemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\frac{S_n}{n} - \mu\right] &= \frac{1}{n^2}\text{Var}\left(S_n\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}\left(X_i\right), \text{ por ser iid} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 5.1,

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

así, tomando el limite cuando $n \to \infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon} \to 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \to 0$$

□

Theorem 5.3 (Teorema del Limite Central). *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una secuencia de v.a.i.id con media a y varianza b^2. Entonces para doo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, entonces*

$$\mathcal{P}\left(\lim_{M\to\infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i - Ma}{\sqrt{M}b} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}\mathrm{d}x$$

Proof. Definamos a

$$S_M = \sum_{i=1}^{M}\left[X_i - a\right],$$

y

$$Y_M = \frac{S_M}{\sqrt{M}b}.$$

Sea φ_{Y_M} la función generadora de momentos de Y_M y φ la función generadora de momentos de la distribución normal estándar, demostraremos que $\varphi_{Y_M} \to \varphi$.

Por definición,

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_M}(t) &= E\left[\exp\left(t\frac{S_M}{\sqrt{M}b}\right)\right] \\
&= \varphi_{S_M}\left(\frac{t}{\sqrt{M}b}\right) \\
&= \left[\varphi_{(X_1-a)}\left(\frac{t}{\sqrt{M}b}\right)\right]^M \quad \text{ya que, las } X_i \text{ son i.i.d} \\
&= \left[E\left[\exp\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)\right]\right]^M
\end{aligned}$$

Recordando la serie de Taylor

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_M}(t) &= \left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E\left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)^i\right]}{i!}\right]^M \\
&= \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}\right)^2 E\left[(X_1-a)^2\right]+\epsilon(3)\right]^M \\
&= \left[1+\frac{1}{M}\frac{t^2}{2}+\epsilon(3)\right]^M,
\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty}\frac{E\left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)^i\right]}{i!},$$

Ahora sea $s = \dfrac{t}{b\sqrt{M}}$, así,

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty}\frac{E\left[(X_1-a)^i\right]s^i}{i!}$$

Además observemos que, cuando $t \to 0$, $s \to 0$.

Así, de lo anterior, si φ_1 existe, se cumple que,

$$\frac{\epsilon\left(3\right)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E\left[\left(X_1 - a\right)^i\right] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, \text{ cuando, } s \rightarrow 0.$$

Por otro lado,

$$\varphi_{Y_M}\left(t\right) = \left[1 + \frac{1}{M}\left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon\left(3\right)\right]\right]^M,$$

y $s \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

Entonces $\epsilon\left(3\right) s^{-2} = M\epsilon\left(3\right) b^2 t^{-2} \rightarrow 0$. Dado que b, t estan fijas, se cumple que

$$M\epsilon\left(3\right) \rightarrow 0, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{t^2}{2} + M\epsilon\left(3\right) \rightarrow \frac{t^2}{2}, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty$$

esto implica que,

$$\left[1 + \frac{1}{M}\left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon\left(3\right)\right]\right]^M \rightarrow \exp\left(t^2/2\right), M \rightarrow \infty$$

De aqui se concluye que,

$$\lim_{M\rightarrow\infty} \varphi_M\left(t\right) = \exp\left(t^2/2\right) = \varphi\left(t\right)$$

la cual es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M\left(x\right) \rightarrow F_{N(0,1)}\left(x\right)$$

que es equivalente a,

$$F_M\left(b\right) - F_M\left(a\right) \rightarrow F_N\left(b\right) - F_N\left(a\right)$$

$$\mathcal{P}\left(\lim_{M\rightarrow\infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i - Ma}{\sqrt{M}b} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$$

□

Theorem 5.4. *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a.i.i.d con media* a*. Entonces*

$$\mathcal{P}\left[\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i=a\right]=1.$$

Proof. Esto es similar a decir que

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i\overset{\text{c.s}}{=}a$$

Sin perdida de generalidad, diremos que $X_i\geq 0,\forall i$. Definamos

$$Y_n=X_nI_{[|X_n|\leq n]},Q_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

Por la desigualdad de

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[\left|\frac{Q_n-E\left[Q_n\right]}{n}\right|\geq\epsilon\right]&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Var}\left(Q_n\right)}{\epsilon^2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}\left(Y_i\right)\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left(Y_n^2\right)}{\epsilon^2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2n^2}\int_0^n x^2\mathrm{d}F\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^n x\mathrm{d}F<\infty,\end{aligned}$$

donde F es la función de distribución de X_i. Luego

$$E\left[X_1\right]=\lim_{n\to\infty}\int_0^n x\mathrm{d}F=\lim_{n\to\infty}E\left[Y_n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{E\left[Q_n\right]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P}\left[\limsup\left(\left|\frac{Q_n-E\left[Q_n\right]}{n}\right|\geq\epsilon\right)\right]=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{n}=E\left[X_1\right],\text{c.s}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[X_i\neq Y_i\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[X_i>n\right]$$

como $E\left[X_i\right]<\infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}\left[X_i > n\right] \leq E\left[X_1\right] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}\left[\limsup\left[X_i \neq Y_i\right]\right] = 0, \forall i$$

Entonces

$$\begin{aligned} &X_i = Y_i, \text{c.s} \\ \Rightarrow &\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i \to E\left[X_1\right] = \mu. \text{ c.s} \end{aligned}$$

$\square$

6 Tarea 4

6.1 Ejercicio 1

Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0,T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c}W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0,T]$.

6.1.1 Demostración

Veamos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.

6.1.1.1 Propiedad 1 (Que comience en 0)

Se tiene que, $V(0) = \dfrac{1}{c}W(c^2 \cdot 0) = 0$.

6.1.1.2 Propiedad 2 (Incrementos Independientes)

Sean $s < t < u < v$, por definición de V, se tiene que,

$$E[(V(t) - V(s))\,(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2}E[(W(c^2t) - W(c^2s))\,(W(c^2v) - W(c^2u))]$$

Dado que W tiene incrementos independientes, se cumple que.

$$\frac{1}{c^2}E\left[(W(c^2t) - W(c^2s))\,(W(c^2v) - W(c^2u))\right] = \frac{1}{c^2}E\left[(W(c^2t) - W(c^2s))\right]E\left[(W(c^2v) - W(c^2u))\right]$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

6.1.1.3 Propiedad 3 (Incrementos estacionarios)

Sea $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c}\left[W(c^2 t) - W(c^2 s)\right]$$

Por las propiedades de la definicion del movimiento Browniano.

$$\begin{aligned} E\left[V(t) - V(s)\right] &= \frac{1}{c} E\left[W(c^2 t) - W(c^2 s)\right] = 0 \\ \operatorname{Var}\left[V(t) - V(s)\right] &= \frac{1}{c^2} \operatorname{Var}\left[W(c^2 t) - W(c^2 s)\right] = \frac{1}{c^2}\left(c^2\left(t - s\right)\right) = t - s \end{aligned}$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

Con todo lo anterior se concluye que, V es un movimiento browniano.

6.2 Ejercicio 2

Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

6.3 Ejercicio 3

Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de una refinamiento con $2N$ incrementos.

6.4 Ejercicio 4

En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

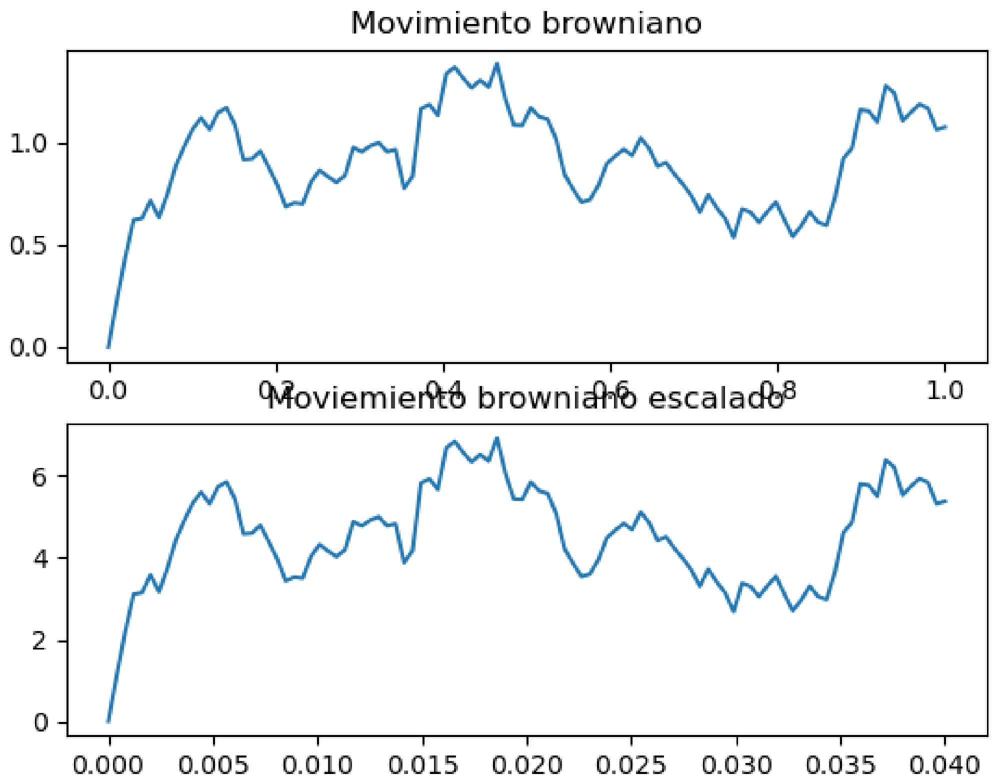


Figure 6.1: Figura 1

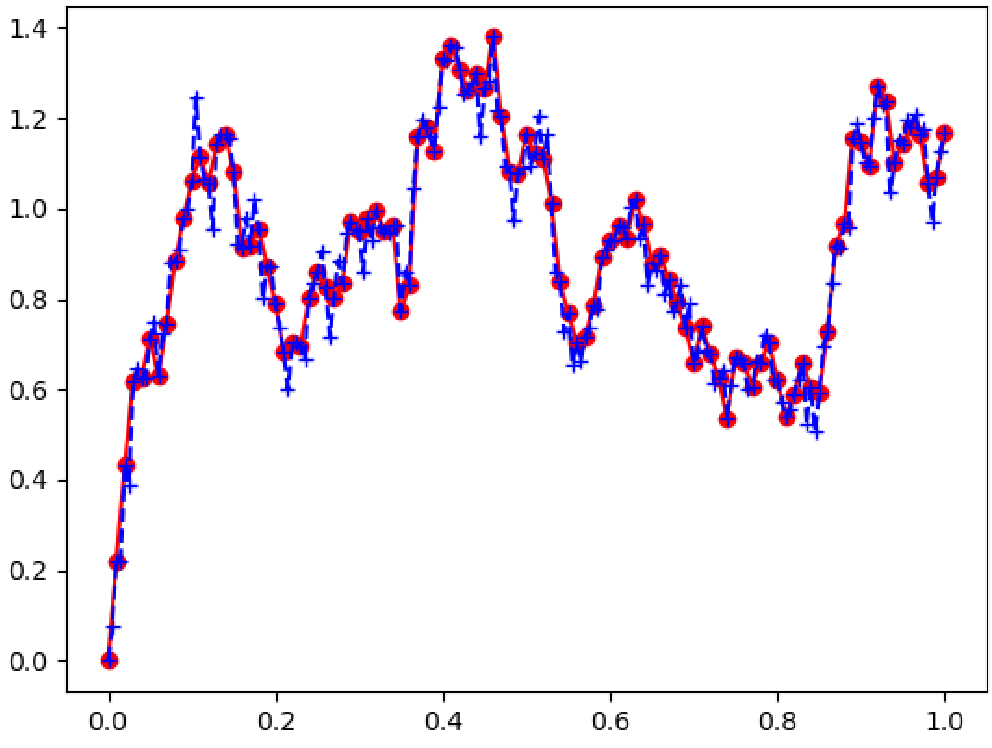


Figure 6.2: Figura 2

Listing 6.1 `Browniano escalado, con c=1/5.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)
T = 1
n= 100
dt = 1 / (n - 1)
dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n - 1)
w = np.concatenate(([0],dw.cumsum()))

time = np.linspace(0,T, n)
c = 0.2  # 1/5
c_time = c**2 * time
c_w = c**(-1) * w

fig, browniano_escalado = plt.subplots(2)
browniano_escalado[0].plot(time, w)
browniano_escalado[1].plot(c_time, c_w)
browniano_escalado[0].set_title('Movimiento browniano')
browniano_escalado[1].set_title('Moviemiento browniano escalado')
plt.show()
```

Listing 6.2 `Browniano refinado, con refinamiento 2N.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)

    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t,t_half,W, W_refined
```

Listing 6.3 `Browniano refinado, con refinamiento 2N y 100 incrementos.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import h_b_r as hbr

a, b, c, d = hbr.refined_brownian_2n(1, 100)


plt.plot(a, c, 'r-+')
plt.plot(
    b,
    d,
    'g*--',

    # alpha = transparecia
    )
plt.show()
```

References

Knuth, Donald E. 1984. "Literate Programming." *Comput. J.* 27 (2): 97–111. https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97.