

Matematicas aplicadas

Susana Hernández

Invalid Date

Table of contents

Preface	3
1 Introduction	4
2 Summary	5
3 Tarea 1	6
4 Tarea 2	14
Demostración:	14
5 Tarea 3	17
6 Tarea 4	28
7 Tarea 5	34
9 Tarea 7	45
10 Tarea 8	51
11 Tarea 9	59
References	73

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit <https://quarto.org/docs/books>.

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

2 Summary

In summary, this book has no content whatsoever.

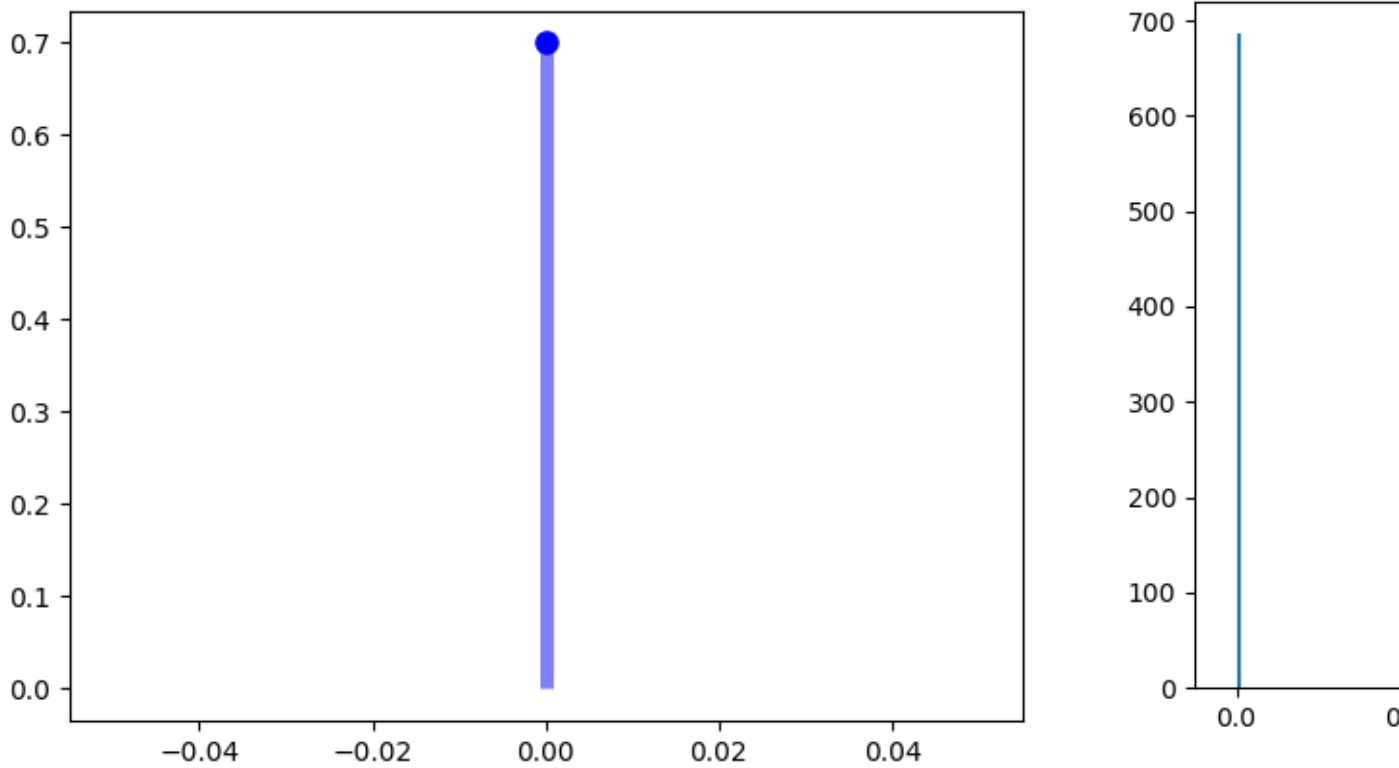
3 Tarea 1

Exercise 3.1. Se generan variables aleatorias Bernoulli y el histograma de los valores que toma con parametro $p = 0.3$.

Listing 3.1 Exploring functions to generate random variables with a Bernoulli distribution.py

```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew, kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p),
              bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```



Exercise 3.2. Se generan variables aleatorias normales y el histograma de los valores que toma.

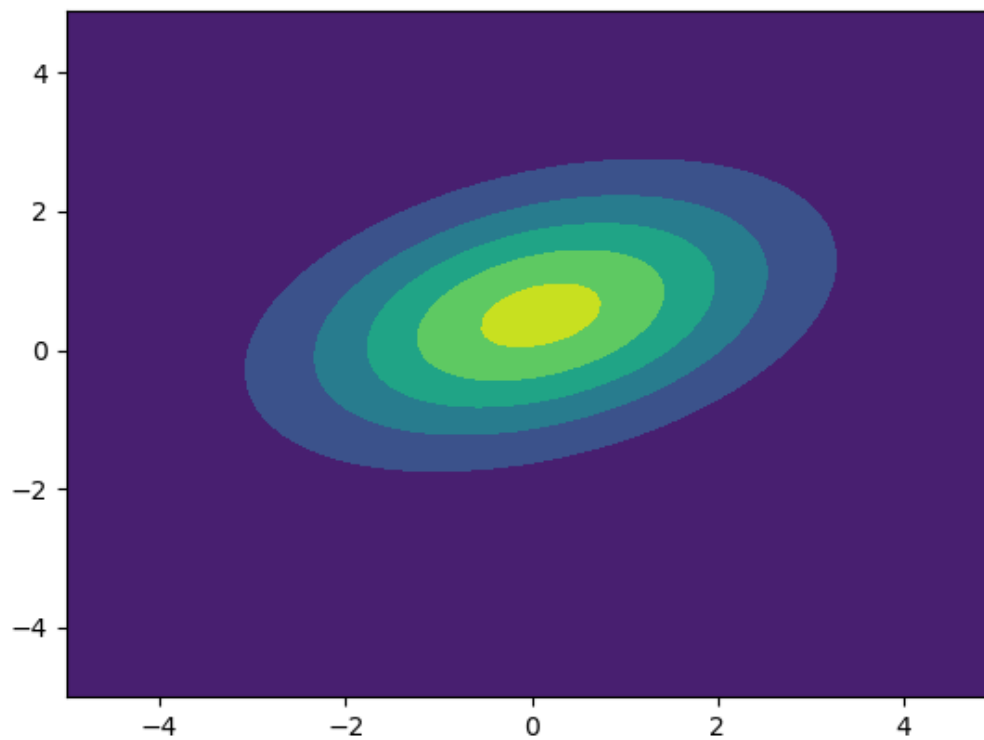
Exercise 3.3. Modificando reproducir el gráfico de una distribución gaussiana bivariada con media vectorial $\mu[0.1, 0.5]$ y matriz de covarianza

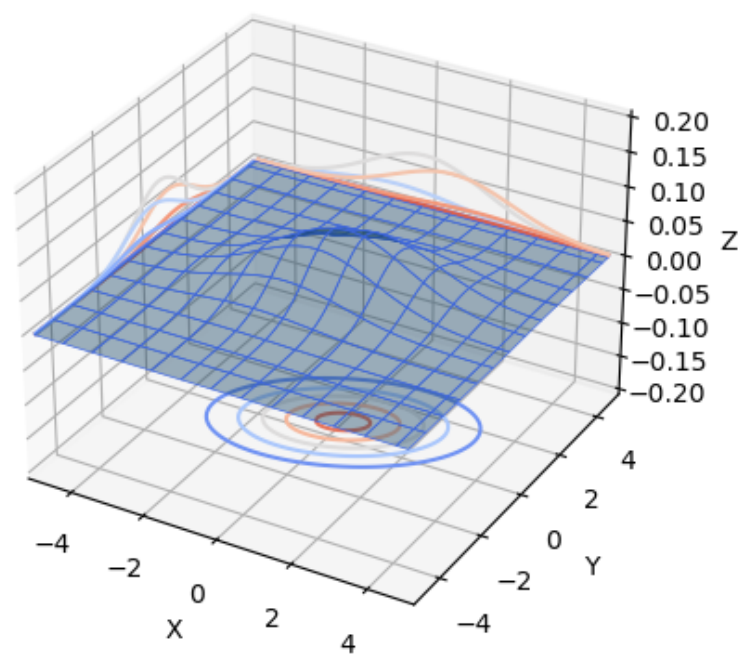
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3.0 & 0.3 \\ 0.75 & 1.5 \end{bmatrix}$$



Figure 3.1: Figura 3







Listing 3.2 Exploring functions to generate random variables with a Gaussian distribution.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

fig, ax = plt.subplots(1, 1)
mean, var, skew, kurt = norm.stats(moments='mvsk')

x = np.linspace(norm.ppf(0.01), norm.ppf(0.99), 100)
ax.plot(
    x,
    norm.pdf(x),
    'r-',
    lw=5,
    alpha=0.6,

    label='norm pdf'
)
rv = norm()
ax.plot(x, rv.pdf(x), 'k-', lw=2, label='frozen pdf')
vals = norm.ppf([0.001, 0.5, 0.999])

np.allclose([0.001, 0.5, 0.999], norm.cdf(vals))

r = norm.rvs(size=50000)

ax.hist(r, density=True, bins='auto', histtype='stepfilled', alpha=0.2)
ax.set_xlim([x[0], x[-1]])
ax.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```

Listing 3.3 Revising multivariate Gaussian.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5);

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]

pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.1, 0.5], [[3.0, 0.3], [0.75, 1.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
# plt.show()

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,

    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')

ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'

)
plt.show()
```

4 Tarea 2

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria. Demuestre que para δ y h pequeño tenemos

$$E \exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)] \approx \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right]$$

Demostración:

Considere una caminata aleatoria que comienza en 0 con saltos h y $-h$ igualmente probables en los momentos $\delta, 2\delta, \dots$, donde h y δ son números positivos. Más precisamente, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. variables con

$$P[X_i = h] = P[X_i = -h] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y pongamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Para $t > 0$, defina $Y_{\delta,h}(t)$ mediante linealización, es decir, para $n\delta < t < (n+1)\delta$, defina

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Calculemos la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y sea $t = n\delta$ así, $n = t/\delta$. Entonces se tiene que

$$E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] = \prod_{j=1}^n E e^{i\lambda X_j}, \text{ por ser variables independientes,} \quad (4.1)$$

$$= (E e^{i\lambda X_j})^n, \text{ por ser idénticamente distribuidas,} \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{i\lambda h} + e^{-i\lambda h})^n, \quad (4.3)$$

$$= (\cos(\lambda h))^n, \quad (4.4)$$

$$= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}, \quad (4.5)$$

(4.6)

Por otro lado, sea $u = [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \Rightarrow \ln(u) = \frac{1}{\delta} \ln[\cos(\lambda h)]$.

Usando la expansión de Taylor de $\cos(x)$ se tiene que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\ln(\cos(\lambda h)) \approx \ln \left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right] \quad (4.7)$$

$$\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} \right)^2 \quad (4.8)$$

$$= -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^4 h^4}{4} - \frac{\lambda^6 h^6}{24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{24} \right) \quad (4.9)$$

$$= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} - \frac{\lambda^4 h^4}{8} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \quad (4.10)$$

$$= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \quad (4.11)$$

para una h pequeña, se satisface que,

$$-\frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \approx 0$$

Por lo tanto, $\ln(\cos(\lambda h)) \approx -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}$. Así, para δ y h pequeña, se tiene que $\ln u \approx \frac{1}{\delta} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} \right)$. Entonces

$$u \approx \exp \left[\frac{1}{\delta} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} \right) \right] \quad (4.12)$$

Entonces por la ecuación (Equation 4.6),

$$E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] \approx \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right] \quad (4.13)$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i \lambda Y_{n,\delta}(t) \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left[-t \left(\left[\frac{h^2}{\delta} \right] \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^2}{24} \right) \right) \right],$$

Asumamos que $\delta \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ pero $h^2/\delta \rightarrow \infty$. Entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} Y_{\delta,h}(t)$ no existe. Por otro lado, consideremos la siguiente renormalización,

$$E \exp \left[i \lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right] = E \left[\exp(i\lambda Y_{n,\delta}(t)) \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right] \quad (4.14)$$

$$= \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) E \exp \left[i \lambda Y_{n,\delta}(t) \right] \quad (4.15)$$

$$\approx \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right] \quad (4.16)$$

$$= \exp \left(-\frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right) \quad (4.17)$$

Así, si $\delta, h \rightarrow 0$ de tal manera que $h^2/\delta \rightarrow \infty$ y $h^4/\delta \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i \lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left(\frac{(\lambda h)^4}{24\delta} \right) = 1$$

5 Tarea 3

Exercise 5.1. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\frac{X - \mu}{\sigma}$,

$$\varphi_{\frac{X - \mu}{\sigma}}(t) = E \left[e^{it \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)} \right] \quad (5.1)$$

$$= E \left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} - \frac{it\mu}{\sigma} \right)} \right] \quad (5.2)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E \left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} \right)} \right] \quad (5.3)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.4)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.5)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.6)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2}} dx \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

Observemos que,

$$\frac{(x - \mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} = \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} \quad (5.9)$$

$$= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} \quad (5.10)$$

$$= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma} \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (5.11)$$

$$= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (5.12)$$

$$= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} \quad (5.13)$$

$$= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2. \quad (5.14)$$

$$(5.15)$$

Sustituyendo (Equation 5.15) en (Equation 5.8), resulta

$$\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2 \right]} dx \quad (5.16)$$

$$= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma} - \frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2} dx \quad (5.17)$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2} dx \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

Sea $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma} dx$, sustituyendo esto en (Equation 5.19), resulta

$$\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (5.20)$$

$$(5.21)$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0, 1)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1.$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.21), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (5.22)$$

$$(5.23)$$

Por otro lado, consideremos $Z \sim N(0, 1)$, entonces

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Entonces $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

□

Exercise 5.2. Si $Y \sim N(0, 1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = E[e^{it(\sigma Y + \mu)}] \quad (5.24)$$

$$= E[e^{it\sigma Y + it\mu}] \quad (5.25)$$

$$= e^{it\mu} E[e^{it\sigma Y}] \quad (5.26)$$

$$= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (5.27)$$

$$= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy. \quad (5.28)$$

$$(5.29)$$

Observemos que,

$$y^2 - 2yit\sigma = (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 \quad (5.30)$$

$$= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2. \quad (5.31)$$

$$(5.32)$$

Sustituyendo, (Equation 5.32) en (Equation 5.29) resulta

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y-it\sigma)^2 + t^2\sigma^2)} dy \quad (5.33)$$

$$= e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy \quad (5.34)$$

$$(5.35)$$

Tomando $u = y - it\sigma \implies du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

entonces $U \sim N(0, 1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2} dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.35), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu, \sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$$

□

Exercise 5.3. Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proof. Por definición, se tiene que,

$$\varphi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] \quad (5.36)$$

$$= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} \quad (5.37)$$

$$= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \quad (5.38)$$

$$= \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z , esta dada por,

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \\ &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}+it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \end{aligned}$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (Equation 5.40) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

□

Exercise 5.4 (Ejercicio 4:). Si X, Y son variables aleatorias normales entonces X, Y son independientes si y solo si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proof. Primero recordemos que

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy$$

Como X, Y son independientes, sabemos que

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Entonces

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \quad (5.41)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \quad (5.42)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \right) \quad (5.43)$$

$$= E(X) E(Y) \quad (5.44)$$

□

Theorem 5.1 (Desigualdad de Chebyshev). *Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. Sea $Y = |X - \mu|$, observemos que Y es positiva, así por la desigualdad de Markov y dado que $\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] = \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2]$, se cumple que

$$\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] = \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2] \quad (5.45)$$

$$\leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \quad (5.46)$$

□

Theorem 5.2 (Ley de los grandes números). *Sean X_1, X_2, \dots, X_n procesos de ensayos independientes, con esperanza finita $\mu = E(X_j)$ y varianza finita $\sigma^2 = \text{Var}(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.*

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \rightarrow 0$$

Proof. Observemos que

$$\text{Var} \left[\frac{S_n}{n} - \mu \right] = \frac{1}{n^2} \text{Var} (S_n) \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} (X_i), \text{ por ser iid} \quad (5.48)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.49)$$

Entonces, por el Teorema 5.1,

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

así, tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

□

Theorem 5.3 (Teorema del Límite Central). *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una secuencia de v.a.i.id con media a y varianza b^2 . Entonces para doo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, entonces*

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} dx$$

Proof. Definamos a

$$S_M = \sum_{i=1}^M [X_i - a],$$

y

$$Y_M = \frac{S_M}{\sqrt{Mb}}.$$

Sea φ_{Y_M} la función generadora de momentos de Y_M y φ la función generadora de momentos de la distribución normal estándar, demostraremos que $\varphi_{Y_M} \rightarrow \varphi$.

Por definición,

$$\varphi_{Y_M}(t) = E \left[\exp \left(t \frac{S_M}{\sqrt{Mb}} \right) \right] \quad (5.50)$$

$$= \varphi_{S_M} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \quad (5.51)$$

$$= \left[\varphi_{(X_1-a)} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \right]^M \text{ ya que, las } X_i \text{ son i.i.d} \quad (5.52)$$

$$= \left[E \left[\exp \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right) \right] \right]^M \quad (5.53)$$

Recordando la serie de Taylor

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!} \right]^M \quad (5.54)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} \right)^2 E[(X_1 - a)^2] + \epsilon(3) \right]^M \quad (5.55)$$

$$= \left[1 + \frac{1}{M} \frac{t^2}{2} + \epsilon(3) \right]^M, \quad (5.56)$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!}, \quad (5.57)$$

Ahora sea $s = \frac{t}{b\sqrt{M}}$, así,

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^i}{i!}$$

Además observemos que, cuando $t \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$.

Así, de lo anterior, si φ_1 existe, se cumple que,

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, \text{ cuando, } s \rightarrow 0.$$

Por otro lado,

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M,$$

y $s \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

Entonces $\epsilon(3) s^{-2} = M\epsilon(3) b^2 t^{-2} \rightarrow 0$. Dado que b, t estan fijas, se cumple que

$$M\epsilon(3) \rightarrow 0, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \rightarrow \frac{t^2}{2}, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty$$

esto implica que,

$$\left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M \rightarrow \exp(t^2/2), M \rightarrow \infty$$

De aqui se concluye que,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M(t) = \exp(t^2/2) = \varphi(t)$$

la cual es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$$

que es equivalente a,

$$F_M(b) - F_M(a) \rightarrow F_N(b) - F_N(a)$$

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

□

Theorem 5.4. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d con media a . Entonces

$$\mathcal{P} \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = a \right] = 1.$$

Proof. Esto es similar a decir que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \stackrel{\text{c.s.}}{=} a$$

Sin pérdida de generalidad, diremos que $X_i \geq 0, \forall i$. Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n| \leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left[\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Q_n)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) \quad (5.58)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \int_0^n x^2 dF \quad (5.59)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^n x dF < \infty, \quad (5.60)$$

donde F es la función de distribución de X_i . Luego

$$E[X_1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x dF = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[Q_n]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P} \left[\limsup \left(\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right) \right] = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{n} = E[X_1], \text{ c.s.}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i \neq Y_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n]$$

como $E[X_i] < \infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n] \leq E[X_1] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}[\limsup [X_i \neq Y_i]] = 0, \forall i$$

Entonces

$$X_i = Y_i, \text{ c.s} \tag{5.61}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \rightarrow E[X_1] = \mu. \text{ c.s} \tag{5.62}$$

□

6 Tarea 4

Exercise 6.1. Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0, T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0, T]$.

Proof.

Veamos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.

Propiedad C1 (Que comience en 0).

Se tiene que, $V(0) = \frac{1}{c} W(c^2 \cdot 0) = 0$.

Propiedad C2 (Incrementos Independientes).

Sean $s < t < u < v$, por definición de V , se tiene que,

$$E[(V(t) - V(s))(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Dado que W tiene incrementos independientes, se cumple que,

$$\frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))] E[(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

Propiedad C3 (Incrementos estacionarios).

Sea $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c} [W(c^2 t) - W(c^2 s)]$$

Por las propiedades de la definición del movimiento Browniano.

$$E[V(t) - V(s)] = \frac{1}{c} E[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = 0 \quad (6.2)$$

$$\text{Var}[V(t) - V(s)] = \frac{1}{c^2} \text{Var}[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = \frac{1}{c^2} (c^2 (t - s)) = t - s \quad (6.3)$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

Con todo lo anterior se concluye que, V es un movimiento browniano.

□

Exercise 6.2. Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

Listing 6.1 Browniano escalado, con $c=1/5$.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)
T = 1
n = 100
dt = 1 / (n - 1)
dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n - 1)
w = np.concatenate(([0], dw.cumsum()))

time = np.linspace(0, T, n)
c = 0.2 # 1/5
c_time = c**2 * time
c_w = c**(-1) * w

fig, browniano_escalado = plt.subplots(2)
browniano_escalado[0].plot(time, w)
browniano_escalado[1].plot(c_time, c_w)
browniano_escalado[0].set_title('Movimiento browniano')
browniano_escalado[1].set_title('Movimiento browniano escalado')
plt.show()
```

Exercise 6.3. Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número

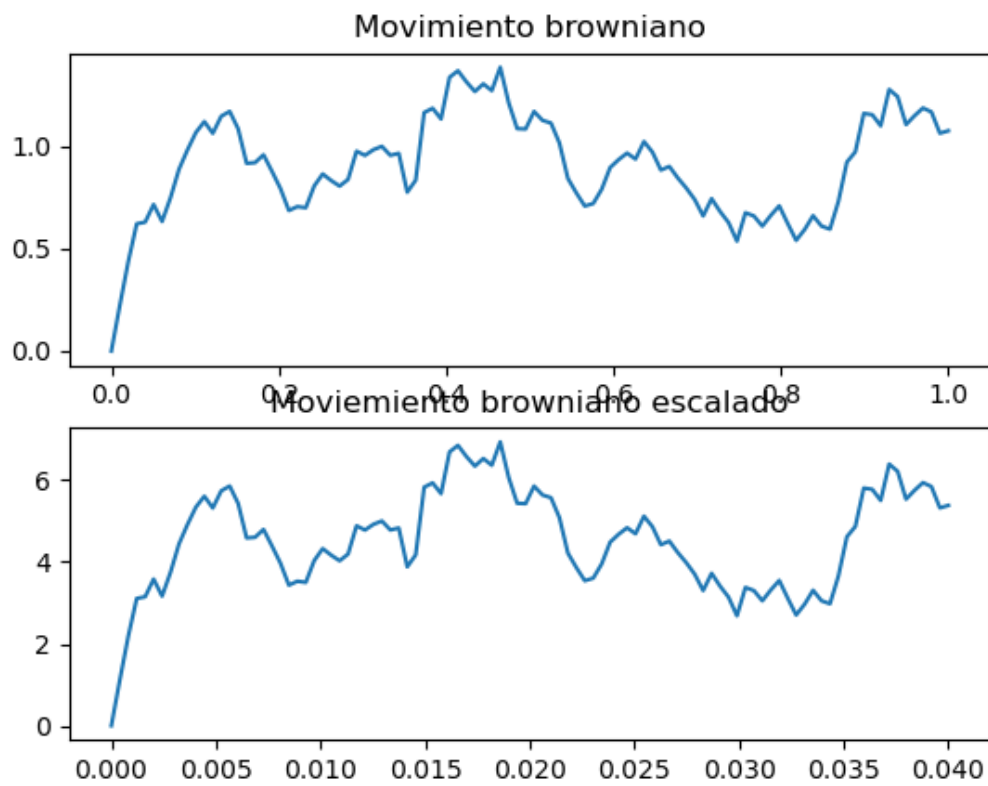


Figure 6.1: Figura 1

de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de una refinamiento con $2N$ incrementos.

Listing 6.2 Browniano refinado, con refinamiento $2N$.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)
    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t,t_half,W, W_refined
```

Exercise 6.4. En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

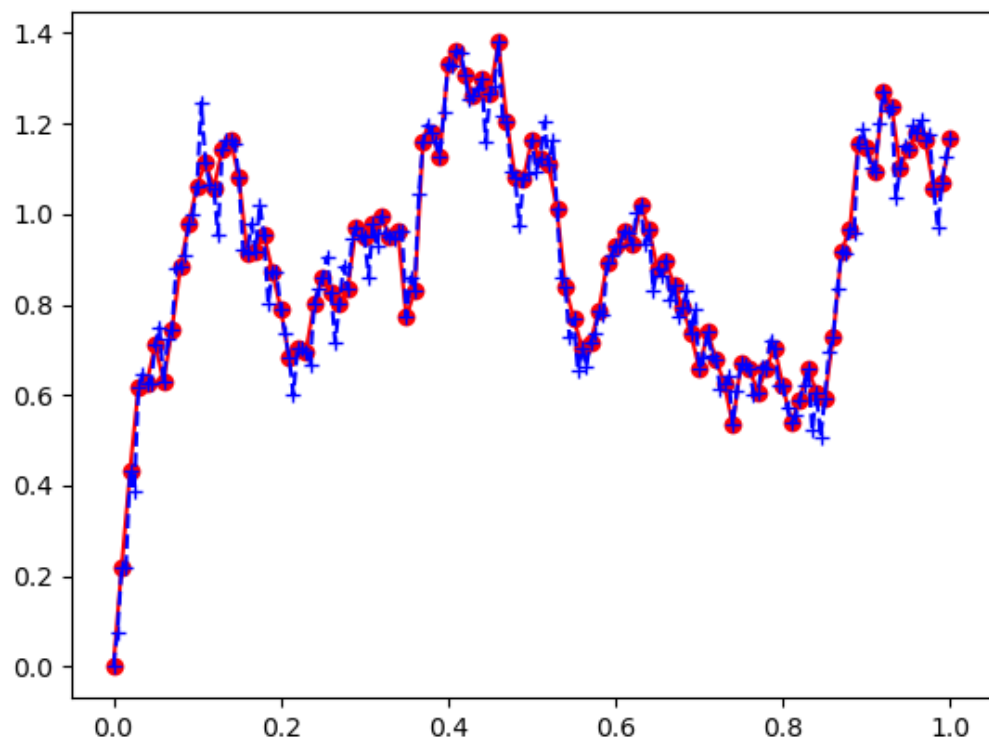


Figure 6.2: Figura 2

Listing 6.3 Browniano refinado, con refinamiento 2N y 100 incrementos.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import h_b_r as hbr

a, b, c, d = hbr.refined_brownian_2n(1, 100)

plt.plot(a, c, 'r-+')
plt.plot(
    b,
    d,
    'g*--',
    # alpha = transparencia

)
plt.show()
```

7 Tarea 5

Exercise 7.1. Demuestre que el movimiento browniano satisface

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|.$$

Proof. Consideremos dos casos:

Si $t > s$.

$$\begin{aligned} E[|W(t) - W(s)|^2] &= E[(W(t) - W(s))^2] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

ya que, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.

Mientras que si $t \leq s$.

$$\begin{aligned} E[(W(t) - W(s))^2] &= E[(W(s) - W(t))^2] \\ &= s - t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|$$

□

Exercise 7.2. Dados $W(t_i)$ y $W(t_{i+1})$, demuestre que la variable aleatoria

$$W(t_{i+\frac{1}{2}}) := \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi, \quad \xi \sim N(0, 1)$$

satisface las tres condiciones C1, C2, C3 de la definicion de movimiento Browniano.

Proof. (C1) Veamos que $W(0) = 0$, cuando $t = 0$.

Se tiene por definicion del proceso que,

$$W(0) = \frac{1}{2}(W(0) + W(0)) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta(0)}\xi = 0.$$

Por la propiedad C1 se satisface.

(C2) Que tenga incrementos estacionarios.

Notemos que

$$\begin{aligned} W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i) &= \frac{1}{2}[W(t_{i+1}) + W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi - \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_i)) \\ &= \frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i)] &= E\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)]\right] + E\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= \frac{1}{2}E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E[\xi] \\ &= 0 \quad \text{ya que, } E[\xi] = 0 \text{ y } E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = 0. \end{aligned}$$

y

$$Var[W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i)] = Var\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \quad (7.1)$$

$$= Var\left[\frac{1}{2}[W(t_{i+1}) - W(t_i)]\right] + Var\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \quad (7.2)$$

$$= \frac{1}{4}Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{4}\delta t Var[\xi] \quad (7.3)$$

$$= \frac{1}{4}\delta t + \frac{1}{4}\delta t \quad \text{ya que, } Var[\xi] = 1 \text{ y } Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = \delta t \quad (7.4)$$

$$= \frac{1}{2}\delta t. \quad (7.5)$$

Además, sabemos que la combinación lineal de normales es una normal.

Por lo tanto $W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i) \sim N\left(0, \frac{\delta t}{2}\right)$, con esto C2 se cumple.

(C3) Que tenga incrementos independientes.

Para esta parte usaremos que dos variables aleatorias X y Y son independientes si y solo si

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

calculemos $E \left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(W(t_{j+1}) - W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right]$ y definamos a $\Delta W(t_i) := W(t_{i+1}) - W(t_i)$.

Por lo anterior se tiene que:

$$E \left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right] = E \left[\left(\frac{1}{2} \Delta W(t_i) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right) \left(\frac{1}{2} \Delta W(t_j) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right) \right],$$

donde $\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) = W(t_{i+1}) - W(t_{i+\frac{1}{2}})$ y $\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) = W(t_{j+1}) - W(t_{j+\frac{1}{2}})$. Desarrollando la parte derecha de la igualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned} E \left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right] &= E \left[\frac{1}{4} \Delta W(t_i) \Delta W(t_j) + \frac{1}{4} \Delta W(t_i) \sqrt{\delta t} \xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \Delta W(t_j) \sqrt{\delta t} \xi + \left(\frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ya que, } \Delta W(t_i), \Delta W(t_j) \text{ son independientes} &= \frac{1}{4} E[\Delta W(t_i)] E[\Delta W(t_j)] + \frac{1}{4} E[\Delta W(t_i)] \sqrt{\delta t} E[\xi] + \frac{1}{4} E[\Delta W(t_j)] \sqrt{\delta t} E[\xi] + \frac{1}{4} E[(\sqrt{\delta t} \xi)^2] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] + E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) \right] E \left[\frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] + E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) \right] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] + \frac{\delta t}{4} E[\xi^2] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] + E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_j) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] + E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} E[\xi] \\ &= E \left[\frac{1}{2} \Delta W(t_i) + \frac{1}{2} \sqrt{\delta t} \xi \right] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})] \\ &= E[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $E \left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}}) \right) \left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}}) \right) \right] = E[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})] E[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})]$, con lo que se concluye que se satisface la propiedad C3. Con todo lo anterior se concluye que $W(t_{i+\frac{1}{2}})$ define un Movimiento Browniano.

□

Exercise 7.3. Generalice la formula en el {Exercise 10.2} para el caso, dado $W(t_i), W(t_{i+1})$, y $\alpha \in (0, 1)$ el valor

$$W(t_i + \alpha dt)$$

satisface las tres condiciones que define un movimiento Browniano.

Proof. Observemos que

$$t_{i+\alpha} = \alpha t_{i+1} + (1 - \alpha)t_i,$$

y

$$W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) \sim \alpha \sqrt{dt} N(0, 1)$$

Definamos a

$$W(t_{i+\alpha}) = W(t_i + \alpha \Delta t) := (1 - \alpha) W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y.$$

donde Y será una v.a independiente de $W(t_i)$.

Dado que,

$$\begin{aligned} W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) &= (1 - \alpha) W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y - W(t_i) \\ &= \alpha (W(t_{i+1}) - W(t_i)) + Y. \end{aligned}$$

Entonces,

$$E[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)] - E[\alpha (W(t_{i+1}) - W(t_i))] = E[Y] \implies E[Y] = 0,$$

y

$$\text{Var}[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)] = \alpha^2 dt + \text{Var}[Y],$$

Así,

$$\text{Var}[Y] = dt (\alpha - \alpha^2),$$

entonces $Y = \sqrt{\alpha(1 - \alpha) dt} \xi, \xi \sim N(0, 1)$.

Con esto se cumple C1.

$$W(0) = 0.$$

y por construcción análogamente que el ejercicio anterior se satisfacen las propiedades C2 y C3.

□

Exercise 7.4. Suponga que $X \sim N(0, 1)$, sabemos que $E[X] = 0$ y $E(X^2) = 1$.

Además de la definición, el pésimo-momento satisface

$$E[X^p] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp(-x^2/2) dx.$$

Usando esta relación, demuestre que $E[X^3] = 0$ y $E[X^4] = 3$. Entonces deduce que un incremento Browniano $\delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ satisface que $E[\delta W_i^3] = 0$ y $E[\delta W_i^4] = 3\delta t^2$. Entonces encuentre una expresion para $E[X^p]$ para un entero positivo p

Proof. De la definición del p -ésimo momento se tiene para $p = 4$, que

$$E[X^4] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

resolviendo esta integral por el método integración por partes, se tiene que $E[X^4] = uv - \int v du$, donde $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$ y $dv = x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, calculemos primero v ,

$$\begin{aligned} v &= \int x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad \text{sea } y = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow dy = -x dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(y) dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(y) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo todo lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} E[X^4] &= -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) 3x^2 dx \\ &= -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + 3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + 3E[X^2], \end{aligned}$$

por otro lado,

$$-x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto, dado que $E[X^2] = 1$, se concluye que

$$E[X^4] = 3.$$

Procediendo de igual manera que el caso anterior, se tiene que:

$$E[X^3] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

tomando $u = x^2 \implies du = 2x dx$ y dv , v igual al caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} E[X^3] &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -2x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2E[X] \\ &= 0, \end{aligned}$$

usando el hecho que $E[X] = 0$ y

$$-x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$E[X^3] = 0.$$

De manera general se tiene que,

$$\begin{aligned} E[X^p] &= -x^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -(p-1)x^{p-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 0 + (p-1)E[X^{p-2}] \\ &= (p-1)E[X^{p-2}]. \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que $\delta W_i \sim N(0, \delta t)$, donde $\delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces

$$Z = \frac{\delta W_i}{\sqrt{\delta t}} \sim N(0, 1),$$

que por lo visto anteriormente, para $p = 4$.

$$E[Z^4] = 3 \implies E[(\delta W_i)^4] = E[Z^4](\delta t)^2 = 3(\delta t)^2$$

y para $p = 3$, resulta

$$E[Z^3] = 0 \implies E[(\delta W_i)^3] = E[Z^3](\delta t)^{3/2} = 0.$$

□

Exercise 7.5. Suponga que $X \sim N(0, 1)$. Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$E[\exp(a + bX)] = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Por lo tanto deduzca que

$$E[\exp(t + \frac{1}{4}W_t)] = \exp\left(\frac{32}{33}t\right).$$

Proof. Se tiene que

$$E[\exp(a + bX)] = \exp(a)E[\exp(bX)],$$

observemos que $bX \sim N(0, b^2)$ además, $E[\exp(bX)]$ es la función generadora de momentos cuando $t = 1$

$$M_{bX}(1) = E[\exp(bX)] = \exp\left(\frac{b^2}{2}\right),$$

sustituyendo, resulta

$$E[\exp(a + bX)] = \exp(a) \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Ahora calculemos $E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right]$, se tiene que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}(W_t - W_0)\right)\right],$$

entonces consideremos a $\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}$, observemos que, $\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}} \sim N(0, 1)$, por lo tanto, podemos usar la fórmula anterior con $a = t$ y $b = \frac{1}{4}\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}(W_t - W_0)\right)\right] &= E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\sqrt{t}\left(\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}\right)\right)\right] \\ &= \exp\left(t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}t\right)\right) \\ &= \exp\left(t + \frac{1}{32}t\right) \\ &= \exp\left(\frac{33}{32}t\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = \exp\left(\frac{33}{32}t\right).$$

□

8

Exercise 8.1. Cree un scrip para muestrear 10000 rutas del proceso $u(t, W_t)$ definido en el ejercicio Exercise 7.5. Graficar 10 rutas de muestra y la media de 10000 rutas de muestra de este proceso $u(t, W_t)$.

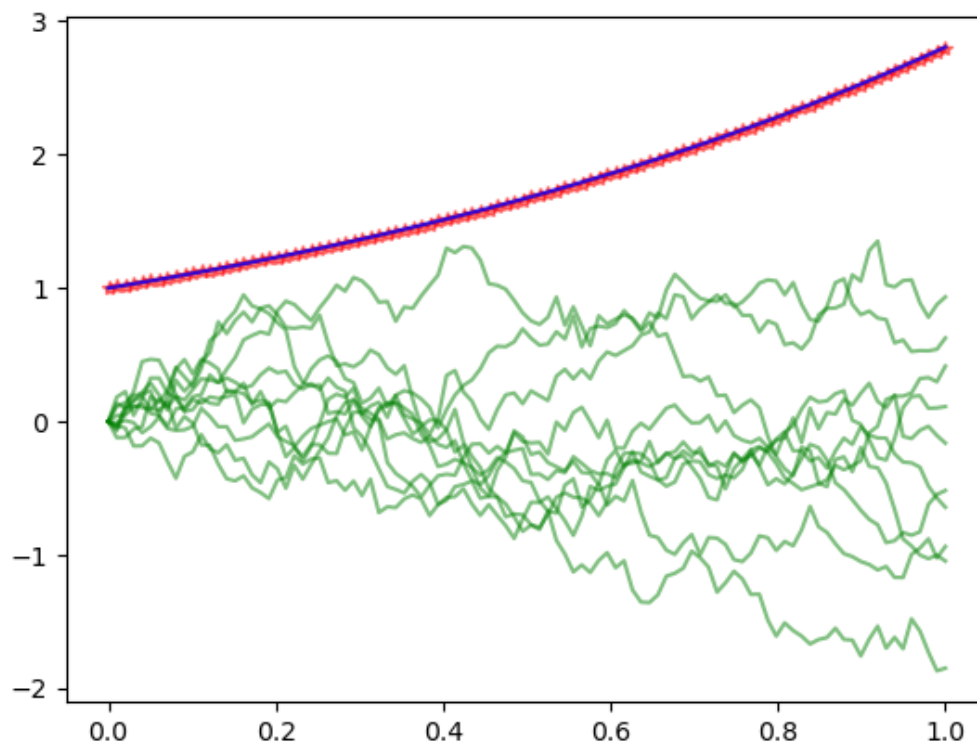


Figure 8.1: Figura 1

Exercise 8.2. Siguiendo las ideas para llenar un camino browniano en puntos $t_{i+\frac{1}{2}} := t_i + \frac{1}{2}\delta t$. Haga una función de Python para llenar un camino browniano dada una fracción $\alpha \in (0, 1)$ para llenar en los puntos $t_{i+\alpha} := t_i + \alpha\delta t$

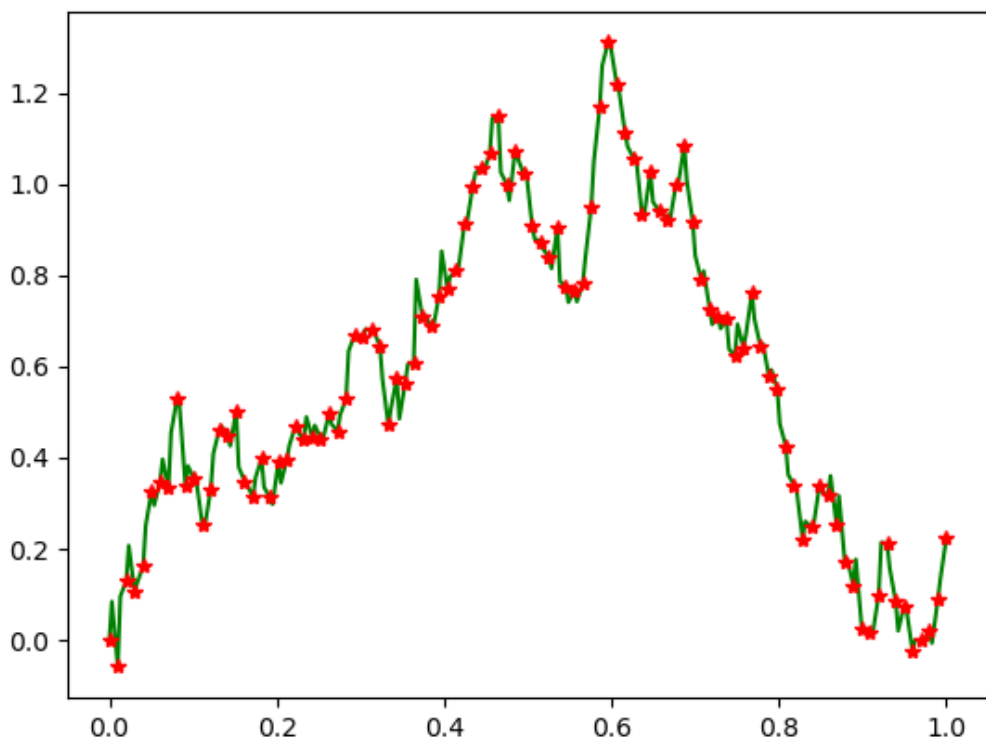


Figure 8.2: Figura 2

Listing 8.1 simulación ejercicio 7-5.py

```
from import numpy as np
import aux_functions as aux
import matplotlib.pyplot as plt

def b_function(t, a, w):
    y = np.exp(t+ a * w)
    return y

n_samples = 10000
n = 100
t_initial = 0
t_final = 1

mean = np.zeros(n)
for i in range(n_samples):
    time, b_w = aux.strong_brownian(t_final,n)
    y = b_function(time,0.25, b_w)
    if i < 10:
        plt.plot(time,b_w,'g-',alpha = 0.5)
    mean += y

mean = (n_samples)**(-1) * mean
time = np.linspace(0,t_final, n_)

y = [np.exp(33 / 32 * t) for t in time]
plt.plot(time, mean, 'r-*', alpha = 0.5)
plt.plot(time, y,'b-',alpha = 0.8)
plt.show()
```

Listing 8.2 simulaci3n para llenar un camino browniano con alpha=0,3.py

```
from import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import aux_functions as aux

t_final = 1
n = 100
delta_t = 1/(n - 1)
alpha = 0.3

prng = np.random.RandomState(123456789)

time, w = aux.strong_brownian(1,n)

y = np.sqrt(delta_t *(alpha - alpha ** 2)) * prng.standard_normal(n - 1)

w_ = np.roll(w, -1)

w_alpha = alpha * w_ + (1 - alpha) * w
w_alpha = np.delete(w_alpha, -1)
w_alpha += y
w_ref = np.zeros(2* n -1)

w_ref[0::2] = w
w_ref[1::2] = w_alpha

time_ref = np.zeros(2 * n - 1)

for i in range(2 * n - 1):
    if i % 2 == 0:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)]
    else:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)] + alpha * delta_t

plt.plot(time_ref,w_ref,'g-')
plt.plot(time, w,'ro')

plt.show()
```

9 Tarea 7

Exercise 9.1. Sea $W(t)$ un Movimiento Browniano y Z_i una colección de variables aleatorias i.i.d, con distribución $N(0, \frac{\delta t}{4})$.

Pruebe que la suma

$$\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

tiene valor esperado igual a cero y una varianza de $O(\delta t)$.

Proof. Sin perdida de generalidad dado como estan definidas Z_i y $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ podemos suponer que son variables aleatorias independientes para cada $i = 1, \dots, L$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))] \\ &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= 0 \quad \text{ya que, por hipótesis, } \mathbb{E}(Z_i) = 0 \text{ y } \mathbb{E}(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = 0 \\ \therefore \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ahora calculemos la varianza; sabemos que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, sustituyendo resulta

$$\begin{aligned} Var \left[\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] - \left(\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] \quad \text{usando el hecho que tiene valor esp} \end{aligned}$$

Por el Teorema multinomial, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^L Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 + 2 \sum_{i \neq j}^L Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \right] \\
&= \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 + 2 \sum_{i \neq j}^L \mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))]
\end{aligned}$$

Dado que $i \neq j$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $i < j$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))] &= \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_j] \} \\
&= \mathbb{E} \{ [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j] \mathbb{E} [(W(t_{j+1}) - W(t_j)) | \mathcal{F}_j] \} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 &= \mathbb{E} \{ \mathbb{E} [Z_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 | \mathcal{F}_i] \} \\
&= \mathbb{E} \{ Z_i^2 \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 | \mathcal{F}_i] \} \\
&= \mathbb{E} [Z_i^2] (t_{i+1} - t_i) \\
&= \frac{\delta t}{4} (t_{i+1} - t_i),
\end{aligned}$$

sustituyendo todo lo anterior, resulta

$$\begin{aligned}
Var \left[\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \sum_{i=0}^L \frac{\delta t}{4} (t_{i+1} - t_i) \\
&= \frac{\delta t}{4} (t_{L+1} - t_0).
\end{aligned}$$

Para un L suficientemente grande podemos considerar que, dado un $\varepsilon > 0$, tal que, $(t_{L+1} - t_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, así

$$Var \left[\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] \leq \varepsilon \delta t.$$

Por lo tanto, con esto se concluye que, la varianza es de orden δt .

□

Exercise 9.2. La regla del punto medio de la integral de Riemann de una función $h \in C^2([a, b])$ sobre una partición de L puntos del intervalo $[a, b]$ está dada por,

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L h\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \delta t.$$

Use la relación

$$W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \underbrace{Z_i}_{i.i.d. \sim N(0, \delta t/4)},$$

y el ejercicio anterior para demostrar que la regla del punto medio de la integral de Riemann implica que

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2.$$

Proof. Sea $\Delta_L = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. De la regla del punto medio, aplicada para $h(t) = W(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)dW(t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L \left[\frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + Z_i \right] (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L \frac{1}{2} (W(t_{i+1})^2 - W(t_i)^2) + \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (W(T)^2 - W(0)^2) + \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \frac{1}{2}W(T)^2 + \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)). \end{aligned}$$

De la igualdad anterior solo nos faltaria demostrar que,

$$\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \rightarrow 0 \text{ en } L^2$$

es decir,

$$\lim_{\|\Delta_L\| \rightarrow 0} E \left[\left(\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] = 0$$

Del ejercicio anterior, sabemos que

$$E \left[\left(\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] = O(\delta t) \leq \varepsilon \|\Delta_L\|,$$

así, tomando el límite cuando $\|\Delta_L\| \rightarrow 0$ se tiene que,

$$\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \rightarrow 0 \text{ en } L^2,$$

por lo tanto, sustituyendo este último resultado, se concluye que

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W(T)^2$$

□

Exercise 9.3. Usando la aproximación de la suma de Riemann

$$\int_0^T h(t) dW(t) \sim \sum_{i=0}^L h(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)), \quad (9.1)$$

argumente que,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] = \frac{T^3}{3}.$$

Por tanto, enuncie la isometría de Itô y deduzca que esta isometría es válida para el caso $h(t) = t$.

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. De la aproximación de la suma de Riemann, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T t dW(t) &\sim \sum_{i=0}^L t_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ \Rightarrow \left(\int_0^T t dW(t) \right)^2 &\sim \left(\sum_{i=0}^L t_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2, \end{aligned}$$

del Teorema Multinomial, se sigue que

$$\left(\sum_{i=0}^L t_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 = \sum_{i=0}^L t_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i \neq j} t_i t_j (W(t_{i+1}) - W(t_i)) (W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

de las relaciones anteriores se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] &\sim \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L t_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i \neq j} t_i t_j (W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \right] \\
&= \sum_{i=0}^L t_i^2 \mathbb{E} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i \neq j} t_i t_j \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))] \\
&= \sum_{i=0}^L t_i^2 (t_{i+1} - t_i),
\end{aligned}$$

además, observemos que,

$$\lim_{L \rightarrow 0} \sum_{i=0}^L t_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T t^2 dt = \frac{T}{3}$$

entonces, de esto último se concluye que,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] = \frac{T}{3}.$$

Por otro lado, de la isometría de Itô, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T t dW(t) \right) \left(\int_0^T t dW(t) \right) \right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}(t^2) dt \\
&= \int_0^T t^2 dt \\
&= \frac{T}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la isometría de Itô se cumple para $h(t) = t$

□

Exercise 9.4. Escriba una función de Python para calcular la integral de Itô del movimiento Browniano $W(t)$ sobre $[0, T]$.

Listing 9.1 calculando la integral de Itô del movimiento Browniano $W(t)$.py

```
from import numpy as np

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n

    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()

        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

def f(x, t):
    y = x
    return y

def fB(partition, x, t):
    y = 0
    for i in range(len(partition) - 1):

        if partition[i] <= t < partition[i + 1]:
            y = f(x, t)
    return y

def ito_n(n, t):
    time, w = strong_brownian(t, n)
    integral = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1):

        integral[i] = fB(time, w[i], time[i]) * (w[i + 1] - w[i])
    ito = integral.sum()
    return w, ito
```

10 Tarea 8

Exercise 10.1. Use la aproximación de la suma de Riemann la ecuación (Equation 9.1). Muestra la propiedad de linealidad de la integral estocástica. Es decir,

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t)) dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, de la aproximación de la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), se satisface que,

$$\begin{aligned} \int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t)) dW_t &\sim \sum_{i=0}^L (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^L \alpha f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \sum_{i=0}^L \beta g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^L f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \beta \sum_{i=0}^L g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \end{aligned}$$

observemos que,

$$\alpha \sum_{i=0}^L f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \text{ es la aproximación de la suma de Riemann de; } \alpha \int_0^T f(t) dW_t,$$

análogamente se tiene para $\beta \sum_{i=0}^L g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$, por lo tanto de aquí se sigue que, tomando el límite cuando $L \rightarrow \infty$, resulta

$$\alpha \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \alpha \int_0^T f(t) dW_t$$

y

$$\beta \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

entonces de estas dos últimas relaciones, se concluye que:

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t)) dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

□

Exercise 10.2. Escriba con detalle la demostración del siguiente Teorema, también incluya la demostración del Lema 5.18 del Mao.

Theorem 10.1 (6.1 del Mao). *Sea $f \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R})$, sea ρ, τ dos tiempos de paro tales que $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$. Entonces*

$$\mathbb{E} \left(\int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_{\rho} \right) = 0, \quad (10.1)$$

$$\mathbb{E} \left(\left| \int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s \right|^2 \mid \mathcal{F}_{\rho} \right) = \mathbb{E} \left(\int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 ds \mid \mathcal{F}_{\rho} \right). \quad (10.2)$$

Antes de la demostración del teorema Theorem 10.1, veamos el siguiente Lema.

Lemma 10.1 (5.18 del Mao). *Sea $f \in \mathcal{M}^2([0, T], \mathbb{R})$ y sea τ un tiempo de paro tal que $0 \leq \tau \leq T$. Entonces*

$$\int_0^{\tau} f(s) dW(s) = I(\tau),$$

donde $\{I(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ es la integral indefinida de f dada por la Definición 5.11.

Proof. La definición 5.11 del Mao, nos dice que,

$$I(t) = \int_0^t f(s) dW(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

Por otro lado, de la definición 5.15 del Mao, también se tiene que

$$\int_0^{\tau} f(s) dW(s) = \int_0^T \mathbb{1}_{[0, \tau]} f(s) dW(s)$$

así, por las dos definiciones anteriores se cumple que,

$$\int_0^{\tau} f(s) dW(s) = I(\tau)$$

□

Del Teorema 6.1. El Teorema de paro de la martingala de Doob, nos dice que:

$$E(I(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) = I(\rho) \quad (10.3)$$

Además la definición 5.15, nos dice que para ρ otro tiempo de paro, tal que $0 \leq \rho \leq \tau$, se cumple que

$$\int_{\rho}^{\tau} f(s) dW(s) = \int_0^{\tau} f(s) dW(s) - \int_0^{\rho} f(s) dW(s).$$

Entonces, aplicando la igualdad anterior, el Lema Lemma 10.1 y el Teorema de paro de la martingala de Doob, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s \middle| \mathcal{F}_{\rho} \right) &= \mathbb{E} \left(\left(\int_0^{\tau} f(s) dW(s) - \int_0^{\rho} f(s) dW(s) \right) \middle| \mathcal{F}_{\rho} \right) \\ &= \mathbb{E}(I(\tau) - I(\rho) | \mathcal{F}_{\rho}) \\ &= \mathbb{E}(I(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) - \mathbb{E}(I(\rho) | \mathcal{F}_{\rho}) \\ &= I(\rho) - I(\rho) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De aquí, se concluye que la primera relación del teorema Theorem 10.1 se satisface. Por otro lado, nuevamente por el Teorema de paro de Doob, se tiene que

$$E(I^2(\tau) - \langle I, I \rangle_{\tau} | \mathcal{F}_{\rho}) = I^2(\rho) - \langle I, I \rangle_{\rho}, \quad (10.4)$$

y además, del Teorema 5.14 del Mao, se tiene que

$$\langle I, I \rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

De estos dos hechos anteriores, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2 | \mathcal{F}_{\rho}) &= \mathbb{E}(I^2(\tau) - 2I(\rho)I(\tau) + I^2(\rho) | \mathcal{F}_{\rho}) \\ &= \mathbb{E}(I^2(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) - 2I(\rho)\mathbb{E}(I(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) + I^2(\rho) \\ &= \mathbb{E}(I^2(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) - 2I(\rho)^2 + I^2(\rho) \\ &= \mathbb{E}(I^2(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) - I^2(\rho) \\ &= \mathbb{E}(\langle I, I \rangle_{\tau} - \langle I, I \rangle_{\rho} | \mathcal{F}_{\rho}) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_0^{\tau} |f(s)|^2 ds - \int_0^{\rho} |f(s)|^2 ds \middle| \mathcal{F}_{\rho} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 ds \middle| \mathcal{F}_{\rho} \right). \end{aligned}$$

Ya que,

$$\mathbb{E} \left(\left| \int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\rho} \right) = \mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2 | \mathcal{F}_{\rho}),$$

se sigue que la segunda relación del teorema Theorem 10.1 se satisface.

□

Exercise 10.3. Usando la aproximación de la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), la isometría de Itô y la identidad $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ pruebe que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T g(t) dW_t \right) \left(\int_0^T f(t) dW_t \right) \right] = \int_0^T \mathbb{E}[f(t)g(t)] dt.$$

Proof. Sea $a = \int_0^T g(t) dW_t$ y $b = \int_0^T f(t) dW_t$, entonces de la identidad $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} 4 \left(\int_0^T g(t) dW_t \right) \left(\int_0^T f(t) dW_t \right) &= \left(\int_0^T g(t) dW_t + \int_0^T f(t) dW_t \right)^2 - \left(\int_0^T g(t) dW_t - \int_0^T f(t) dW_t \right)^2 \\ &= \left(\int_0^T (g(t) + f(t)) dW_t \right)^2 - \left(\int_0^T (g(t) - f(t)) dW_t \right)^2, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 4\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T g(t) dW_t \right) \left(\int_0^T f(t) dW_t \right) \right] &= \mathbb{E} \left(\int_0^T (g(t) + f(t)) dW_t \right)^2 - \mathbb{E} \left(\int_0^T (g(t) - f(t)) dW_t \right)^2 \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}(g(t) + f(t))^2 dt \right) - \left(\int_0^T \mathbb{E}(g(t) - f(t))^2 dt \right) \quad \text{esto se sigue de la isometría de Itô} \\ &= \left(\int_0^T (\mathbb{E}[(g(t) + f(t))^2] - \mathbb{E}[(g(t) - f(t))^2]) dt \right) \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}[(g(t) + f(t))^2 - (g(t) - f(t))^2] dt \right) \quad \text{usando nuevamente la linealidad de la esperanza} \\ &= 4 \left(\int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)] dt \right) \end{aligned}$$

De aquí, se concluye que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T g(t) dW_t \right) \left(\int_0^T f(t) dW_t \right) \right] = \left(\int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)] dt \right)$$

□

Exercise 10.4. Usando la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), deduzca que,

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3} W(T)^3 - \int_0^T W(t) dt.$$

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. Primero, observemos que,

$$3W(t_i)^2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = W(t_{i+1})^3 - (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - 3(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) - W(t_{i-1})^3,$$

entonces de la ecuación (Equation 9.1) y la relación anterior, tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)^2 dW(t) &\sim \sum_{i=0}^L W(t_i)^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L [W(t_{i+1})^3 - W(t_{i-1})^3] - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \\ &= \frac{1}{3} (W(T)^3 - W(t_0)^3) - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \\ &= \frac{1}{3} W(T)^3 - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \rightarrow 0$ en L^2 .

En efecto, calculemos la media de la variación cuadrática. Del Teorema Multinomial, resulta

$$\frac{1}{9} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \right)^2 \right] = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^L \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^6 \right] + \frac{2}{9} \sum_{i \neq j}^L \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right]$$

notemos que, como $i \neq j$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] \middle| \mathcal{F}_j \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \mathbb{E} \left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \middle| \mathcal{F}_j \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \right] \mathbb{E} \left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] \end{aligned}$$

dado que de la tarea 5 se demostró que, $\mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \right] = 0$, de la última igualdad se concluye que,

$$\mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{9} \sum_{i=0}^L \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] = 0.$$

Por otro lado, también de la tarea 5, sabemos que

$$\mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^6 \right] = 15 (t_{i+1} - t_i)^3,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \sum_{i=0}^L E \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^6 \right] &= \frac{5}{3} \sum_{i=0}^L (t_{i+1} - t_i)^3 \\ &\leq \frac{5}{3} \|\Delta_L\|^2 \sum_{i=0}^L (t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \frac{5}{3} \|\Delta_L\|^2 L \rightarrow 0, \quad \text{cuando, } \|\Delta_L\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con todo lo anterior se concluye que,

$$\frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \rightarrow 0.$$

Ahora veamos que,

$$\sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \rightarrow \sum_{i=0}^L W(t_i) (t_{i+1} - t_i) \text{ en } L^2$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) - \sum_{i=0}^L W(t_i) (t_{i+1} - t_i) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^L W(t_i) \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right] \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L W(t_i)^2 \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right] \right] \\ &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E} \left[W(t_i)^2 \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right] \right] \end{aligned}$$

para $i < j$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[W(t_i) W(t_j) \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right) \left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j) \right) \right] &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[W(t_i) W(t_j) \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right) \left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j) \right) \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ W(t_i) W(t_j) \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right) \left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j) \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ W(t_i) W(t_j) \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right) \left((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j) \right) \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^L W(t_i)W(t_j) \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right] \left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j) \right] = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[W(t_i)^2 \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[W(t_i)^2 \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right)^2 \middle| \mathcal{F}_i \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[W(t_i)^2 \left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 - 2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right) \middle| \mathcal{F}_i \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[W(t_i)^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 - 2W(t_i)^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \middle| \mathcal{F}_i \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[W(t_i)^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 \middle| \mathcal{F}_i \right] - 2\mathbb{E} \left[W(t_i)^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \middle| \mathcal{F}_i \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ W(t_i)^2 \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 \middle| \mathcal{F}_i \right] - 2W(t_i)^2 \mathbb{E} \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \middle| \mathcal{F}_i \right] \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ W(t_i)^2 3(t_{i+1} - t_i)^2 - 2W(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i) + W(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i) \right\} \\ &= 3t_i(t_{i+1} - t_i)^2 - 2t_i(t_{i+1} - t_i)^2 + t_i(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 2t_i(t_{i+1} - t_i)^2, \end{aligned}$$

de esta última igualdad se sigue que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^L W(t_i)^2 \left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i) \right]^2 \right] &= \sum_{i=0}^L 2t_i(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq 2L\|\Delta_L\| \sum_{i=0}^L t_{i+1} - t_i \\ &= 2\|\Delta_L\|L^2 \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \|\Delta_L\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \rightarrow \sum_{i=0}^L W(t_i) (t_{i+1} - t_i).$$

Así, sustituyendo todo lo anterior, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)^2 dW(t) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{3} W(T)^3 - \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \\ &= \frac{1}{3} W(T)^3 - \int_0^T W(t) dt \end{aligned}$$

□

Exercise 10.5. Verifique que la isometría de Itô, dada por

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T h(t) dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T h(t)^2 dt \right], \quad (10.5)$$

se tiene cuando $h(t) := 1$.

Proof. Del ejercicio Exercise 11.1 con $h(t) = 1$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T h(t) dW(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T 1 dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T 1 dW_t \right) \left(\int_0^T 1 dW_t \right) \right] \\ &= \int_0^T \mathbb{E}[1] dt \\ &= \int_0^T dt \\ &= T. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T h(t)^2 dt \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^T 1^2 dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T dt \right] \\ &= \mathbb{E}[T] \\ &= T \end{aligned}$$

Así,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T dt \right],$$

y con esto se concluye que, para $h(t) = 1$ se satisface que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T h(t) dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T h(t)^2 dt \right].$$

□

11 Tarea 9

El siguiente código calcula la aproximación de la Integral de Ito. Con $T = 1$, $L = 2^{13}$ correspondiente al error de $\mathcal{O}(10^{-3})$

```
import numpy as np
T = 1.0
L = 2**13
dt = T / L
dW = np.sqrt(dt) * np.random.normal(size=L)
W = np.zeros(L + 1)
W[1 :] = np.cumsum(dW)
ito_integral = np.sum(np.multiply(W[0: -1], dW))
err = np.abs(ito_integral - 0.5 * (W[-1] ** 2 - T))
```

Adapta este código para la Integral de Stratonovich correspondiente y evalúe el error.

Escoja un integrando y computacionalmente verifique la Isometría de Ito de la Ecuación (Equation 10.5).

Exercise 11.1. Sea τ un tiempo de paro. Pruebe que $W(t + \tau) - W(\tau)$ es un movimiento browniano.

Proof. Definamos a,

$$W_{\tau}(t) = W(t + \tau) - W(\tau),$$

Claramente $W_{\tau}(0) = 0$, ya que:

$$W_{\tau}(0) = W(\tau) - W(\tau) = 0.$$

Sea $s \leq t$, observemos que

$$\begin{aligned} W_{\tau}(t) - W_{\tau}(s) &= W(t + \tau) - W(\tau) - [W(s + \tau) - W(\tau)] \\ &= W(t + \tau) - W(s + \tau), \end{aligned}$$

Listing 11.1 Aproximando la integral de Stratonovich.py

```
Solutoimport numpy as np

def bw(t, n):
    dt = t / (n - 1)
    dw = np.sqrt(dt) * np.random.standard_normal(n - 1)
    w = np.zeros(n)
    w[1:] = dw.cumsum()
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

t_f = 1
n_p = 2** 13
t, wt = bw(t_f, n_p)
y = 0.5 * np.sqrt(t[1] - t[0]) * np.random.standard_normal(n_p)
stratonovich = [(0.5 * (wt[i + 1] + wt[i]) + y[i]) * (wt[i + 1] - wt[i])) for i in range(n_p)]
stratonovich = np.array(stratonovich).sum()
print(np.abs(stratonovich - 0.5 * wt[-1] ** 2))
```

dado que $W(t + \tau) - W(s + \tau) \sim N(0, t - s)$ entonces de la última igualdad se sigue que

$$W_\tau(t) - W_\tau(s) \sim N(0, t - s).$$

De aquí se concluye que $W_\tau(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios.

Por lo tanto, con todo lo anterior se concluye que $W_\tau(t)$ es un Movimiento Browniano.

□

Exercise 11.2. Sea $W_1(t), W_2(t)$ movimientos brownianos independientes con punto inicial $(W_1(0), W_2(0)) \neq (0, 0)$.

Defina $X_t := \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t))$.

- (a) Demuestre que X_t es una martingala local.
- (b) Demuestre que $E|X_t| < \infty$ para cada $t > 0$.
- (c) Demuestre que X_t no es una martingala.

Proof. (a) Consideremos a,

$$\tau_n = \inf_t \{X_t = n\}$$

Dado que X_t no es acotada, se tiene que,

$$\tau_n \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \forall n.$$

Ahora probaremos que $X_{\min\{t, \tau_n\}}$ es una martingala.

Primero veamos que es adaptado a la filtración:

Si $\tau_n \geq t$ lo tenemos por construcción, ya que, en este caso

$$X_{\min\{t, \tau_n\}} = X_t,$$

y X_t si es adaptado con respecto a la filtración. Ahora si $\tau_n < t$, tenemos que,

$$X_{\min\{t, \tau_n\}} = X_{\tau_n} = n.$$

Además, observemos que,

$$\left[X_{\min\{t, \tau_n\}} = n \right] \subset [\tau_n < t],$$

y dado que τ_n es tiempo de paro, se cumple que $[\tau_n < t] \in \mathcal{F}_t$. Por lo tanto, de la última relación se sigue que, $X_{\min\{t, \tau_n\}}$ es adaptado a la filtración.

Ahora solo nos queda probar que es una martingala. Sea $s < t$, se tiene que,

$$\begin{aligned} E \left[X_{\min\{t, \tau_n\}} \mid \mathcal{F}_s \right] &= E \left[X_{\min\{t, \tau_n\}} 1_{[t < \tau_n]} \mid \mathcal{F}_s \right] + E \left[X_{\min\{t, \tau_n\}} 1_{[\tau_n \leq t]} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[X_t 1_{[t < \tau_n]} \mid \mathcal{F}_s \right] + E \left[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq t]} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[X_s 1_{[s < \tau_n]} \mid \mathcal{F}_s \right] + E \left[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= X_s 1_{[s < \tau_n]} + X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]} \\ &= X_{\min\{s, \tau_n\}}, \end{aligned}$$

y con esto se concluye que $X_{\min\{t, \tau_n\}}$ es una martingala.

(b) Observemos que, como $X_t = \ln (W_1^2(t) + W_2^2(t))$, entonces

$$\exp(X_t) = W_1^2(t) + W_2^2(t).$$

Así,

$$\begin{aligned} E[\exp(X_t)] &= E[W_1^2(t)] + E[W_2^2(t)] \\ &= 2t, \end{aligned}$$

dado que, $X_t \geq 0, \forall t$ y $X_t \leq \exp(X_t)$, entonces

$$E[X_t] \leq 2t < \infty, \forall t$$

(c) Primero recordemos lo siguiente:

Si X_t es martingala entonces $E[X_t]$ es constante, entonces este resultado nos diría que si $E[X_t]$

no es constante, X_t no es martingala.

Dado lo anterior, supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$E[X_t] = c, \forall t \implies E[\ln(W_1^2(t) + W_2^2(t))] = c.$$

Así,

$$\int_0^\infty \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t)) d\mathcal{P} = c,$$

de aquí se tendría que la integral es finita. Entonces

$$X_t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ c.s.}$$

De esto último y de la continuidad de la exponencial, se concluye que

$$W_1^2(t) + W_2^2(t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty, \text{ c.s.}$$

Pero de lo demostrado del inciso anterior, sabemos que,

$$E[W_1^2(t) + W_2^2(t)] = 2t,$$

la cual converge a infinito, cuando $t \rightarrow \infty$. Así, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $E[X_t]$ no es constante, y se seguiría que X_t no puede ser martingala.

□

Listing 11.2 simulacion de la isometria de Ito con $h(t)=t$.py

```
Solution
import numpy as np
import aux_functions as aux

n = 500
n2 = 500
time=1
integral1 = time**3/3

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

E_If = 0
for j in range(n2):
    I_fn = 0
    t,w = strong_brownian(time, n)
    for i in range(n-1):
        I_fi= t[i]*(w[i+1]-w[i])
        I_fn += I_fi
    I_f = I_fn ** 2
    E_If += I_f

print(n2 ** (-1) * E_If)
print(integral1)
```

12

Considere la ecuación diferencial estocástica lineal con ruido multiplicativo.

$$dY(t) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) Y(t) dt + \sigma dW(t) \quad (12.1)$$

Usando la función

$$u(t, x) = y_0 \exp(\mu t + \sigma x),$$

y la diferencial

$$dS(t) = dW(t)$$

Aplique la Fórmula de Ito a la función

$$du(t, S_t).$$

Use esta relación para demostrar que

$$Y(t) = Y(0) \exp(\mu t + \sigma W(t)), \quad (12.2)$$

resuelve (Equation [12.1](#)). Es decir,

$$dY(t) = du(t, S_t) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) u(t, S_t) dt + \sigma u(t, S_t) dW_t$$

Solution. Consideremos

$$u(t, x) = y_0 \exp(\mu t + \sigma x)$$

calculando las derivadas parciales, resulta

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \mu u \\ \partial_x u &= \sigma u \\ \partial_{xx} u &= \sigma^2 u. \end{aligned}$$

Además sabemos que,

$$dS_t = dW_t$$

Entonces

$$\begin{aligned} du(t, Y_t) &= \mu u dt + \sigma u dY_t + \frac{1}{2} \sigma^2 u (dY_t)^2 \\ &= \mu u dt + \sigma u dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 u dt \\ &= \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) u dt + u dW_t, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} Y_t &= u(t, Y_t) \\ &= Y(0) \exp(\mu t + \sigma W_t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y_t resuelve (Equation 12.1).

Use el hecho de que la relación en la ecuación en (Equation 12.2) resuelve la ecuación (Equation 12.1), para confirmar que

$$Y(t) = Y(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right),$$

resuelve,

$$dY(t) = \mu Y(t) dt + \sigma Y(t) dW(t)$$

Solution. Consideremos

$$u(t, x) = y_0 \exp(q_1 t + q_2 x)$$

calculando las parciales, se tiene que,

$$\begin{aligned} \partial_t u &= q_1 u \\ \partial_x u &= q_2 u \\ \partial_{xx} u &= q_2^2 u \end{aligned}$$

nuevamente, usando que,

$$dS_t = dW_t$$

Entonces

$$\begin{aligned} du(t, Y_t) &= q_1 u dt + q_2 u dY_t + \frac{1}{2} q_2^2 u (dY_t)^2 \\ &= q_1 u dt + q_2 u dW_t + \frac{1}{2} q_2^2 u dt \\ &= \left(q_1 + \frac{1}{2} q_2^2 \right) u dt + q_2 u dW_t, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} q_2 &= \sigma \\ q_1 + \frac{1}{2} \sigma^2 &= \mu \implies q_1 = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2, \end{aligned}$$

Por lo tanto, de lo anterior se sigue que,

$$Y_t = Y(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$dS(t) = (a_1 S(t) + a_2) dt + g(S(t)) dW(t),$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función global de Lipschitz con crecimiento lineal, y a_1, a_2 son dos constantes diferentes de cero. Use la forma integral de la ecuación diferencial estocástica, la propiedad de martingala de la integral de Ito y la notación

$$m(t) = E[X_t],$$

para deducir que

$$m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(s) ds + a_2 t$$

Usando que $m(t)$ es la solución

$$\frac{dm(t)}{dt} = a_1 m(t) + a_2, m(0) = E[X_0]$$

Finalmente, muestre que

$$E[X(t)] = -\frac{a_2}{a_1} + \left(E[X(0)] + \frac{a_2}{a_1} \right) \exp(a_1 t)$$

Solution. De la formula Integral, se tiene que

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t (a_1 S(t) + a_2) dt + \int_0^t g(S(s)) dW(s) \\ &= S(0) + a_1 \int_0^t S(t) dt + a_2 t + \int_0^t g(S(s)) dW(s), \end{aligned}$$

calculando esperanza, resulta

$$m(t) = m(0) + a_1 \int_0^t m(t) dt + a_2 t + \int_0^t E[g(S(s))] dB(s)$$

entonces

$$m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(t) dt + a_2 t + E \left[\int_0^t g(S(s)) dB(s) \right]$$

Dado que, g es de lipschitz y de crecimiento lineal, y además $S \in L_{\text{ad}}^2$, se sigue que, $g(S) \in L_{\text{ad}}^2(\Omega_a^b)$, por lo tanto existe una constante c tal que

$$E \left[\int_0^t g(S(s)) dW(s) \right] = c, \quad \forall t$$

Por otro lado, sabemos que

$$\int_0^t g(S(s)) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(S(t_{i-1})) (B_i - B_{i-1}),$$

además, para cada i

$$\begin{aligned} E[g(S(t_{i-1})) (B_i - B_{i-1})] &= E[E[g(S(t_{i-1})) (B_i - B_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= E[g(S(t_{i-1})) E[(B_i - B_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, de los hechos anteriores, se tiene que

$$m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(t) dt + a_2 t,$$

ahora, considere su forma diferencial.

$$\frac{dm(t)}{dt} = a_1 m(t) + a_2,$$

la cual es una ecuación diferencial lineal. Ahora resolveremos esta ecuación:

$$\frac{dm(t)}{dt} - a_1 m(t) = a_2,$$

definamos

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\int -a_1 dt\right) \\ &= e^{-a_1 t}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[um(t)] &= a_2 u \\ u(t)m(t) &= a_2 \int u(t) dt \\ m(t) &= \frac{a_2}{u(t)} \int u(t) dt \\ &= a_2 e^{a_1 t} \int e^{-a_1 t} dt \\ &= -a_2 e^{a_1 t} \left[-\frac{1}{a_1} e^{-a_1 t} + C \right] \\ m(t) &= -\frac{a_2}{a_1} - C a_2 e^{a_1 t}, \end{aligned}$$

de la condición inicial se tiene que,.

$$\begin{aligned} m(0) &= -\frac{a_2}{a_1} - C a_2 \\ \Rightarrow C &= -\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} m(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E[X_t] = -\frac{a_2}{a_1} - \left[-\frac{a_2}{a_1} - E[X_0] \right] \exp(a_1 t)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$dS(t) = (\alpha(t) S(t)) dt + \beta(t) S(t) dW(t), \quad S(0) = s_0,$$

con s_0 constante y funciones α, β integrables. Use la formula de Ito con la fórmula

$$u(t, x) = \ln\left(\frac{x}{S_0}\right),$$

para deducir que

$$S(t) = S(0) \exp \left(\int_0^t \left[\alpha(s) - \frac{1}{2} \beta^2(s) \right] ds + \int_0^t \beta(s) dW(s) \right)$$

Solution. Calculemos las parciales de u .

$$\begin{aligned} u_t &= 0 \\ u_x &= \frac{1}{x} \\ u_{xx} &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que,

$$\begin{aligned} du(t, S_t) &= \alpha(t) dt + \beta(t) dW(t) - \frac{1}{2S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \alpha(t) dt + \beta(t) dW(t) - \frac{1}{2S_t^2} \beta^2 S_t^2 dt \\ &= \left[\alpha(t) - \frac{\beta^2(t)}{2} \right] dt + \beta(t) dW(t), \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) &= \int_0^t \left[\alpha(t) - \frac{\beta^2(t)}{2} \right] dt + \int_0^t \beta(t) dW(t) \\ S_t &= S_0 \exp \left(\int_0^t \left[\alpha(t) - \frac{\beta^2(t)}{2} \right] dt + \int_0^t \beta(t) dW(t) \right) \end{aligned}$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$dS(t) = (\alpha(t) S(t)) dt + \beta(t) S(t) dW(t), S(0) = s_0,$$

con constantes s_0 y funciones α, β integrables. Considere

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \sin(t) \\ \beta(t) &= \frac{t}{1+t} \\ s_0 &= 1, \end{aligned}$$

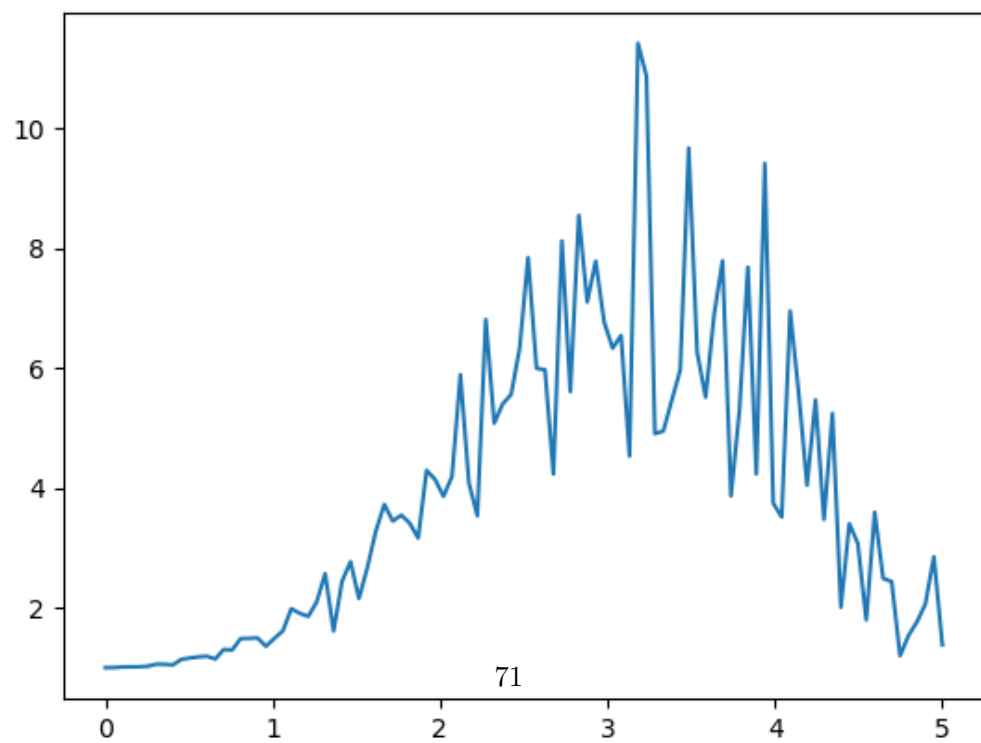
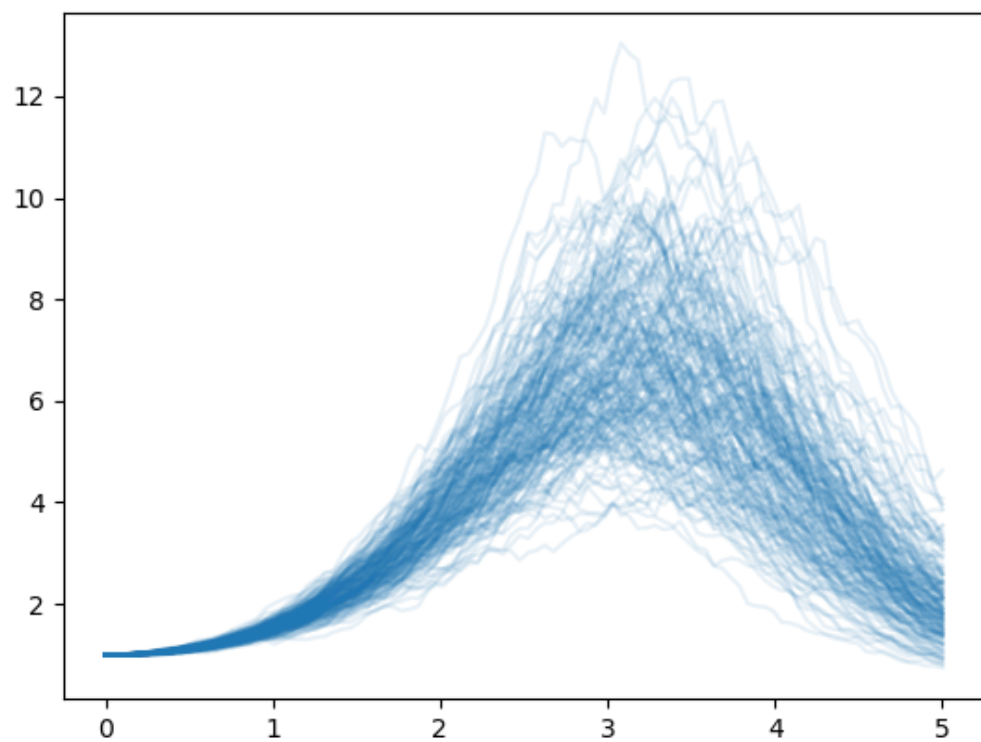
sobre el intervalo $[0, 5]$.

Usando el acercamiento apropiado, la salida del código reproduce 200 realizaciones de la solución con el proceso de Euler-Maruyama.

Adapta el código para obtener la media de la solución de 1000 realizaciones y comparalo con la media de la solución de la forma diferencial, usando los mismos parámetros. Ilustra la diferencia con un log-plot de

$$\ln |S(t) - \tilde{S}(t)|,$$

donde S es la solución de Euler y \tilde{S} es la solución de la diferencial.



Listing 12.1 comparacion de Euler-Maruyama con la version analitica.py

```
from import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

def alpha(t):
    y = np.sin(t)
    return y
def beta(t):
    y = t / (1.0 + t)
    return y

def drift(t, x):
    a = alpha(t) * x
    return a

def diffusion(t, x):
    b = beta(t) * x
    return b

samples = 200
sigma = 2 ** (-2)

n_p = 100
T = 5.0
x_0 = 1.0

def get_em_solution(x_0, T, N, sigma):
    x_t = np.zeros(N)
    x_t[0] = x_0
    dt = T / N
    t, W = strong_brownian(T, N)
    for i in np.arange(N - 1):
        w_inc = W[i + 1] - W[i]
        f = drift(t[i], x_t[i])
        g = diffusion(t[i], x_t[i])
        x_t[i + 1] = x_t[i] + f * dt + sigma * g * w_inc # Importante la sigma.
    return t, x_t

fig, ax = plt.subplots()
df = []
for k in np.arange(samples):
```


References

Knuth, Donald E. 1984. “Literate Programming.” *Comput. J.* 27 (2): 97–111. <https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97>.