Matematicas aplicadas

Susana Hernández

Invalid Date

Table of contents

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit https://quarto.org/docs/books.

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

2 Summary

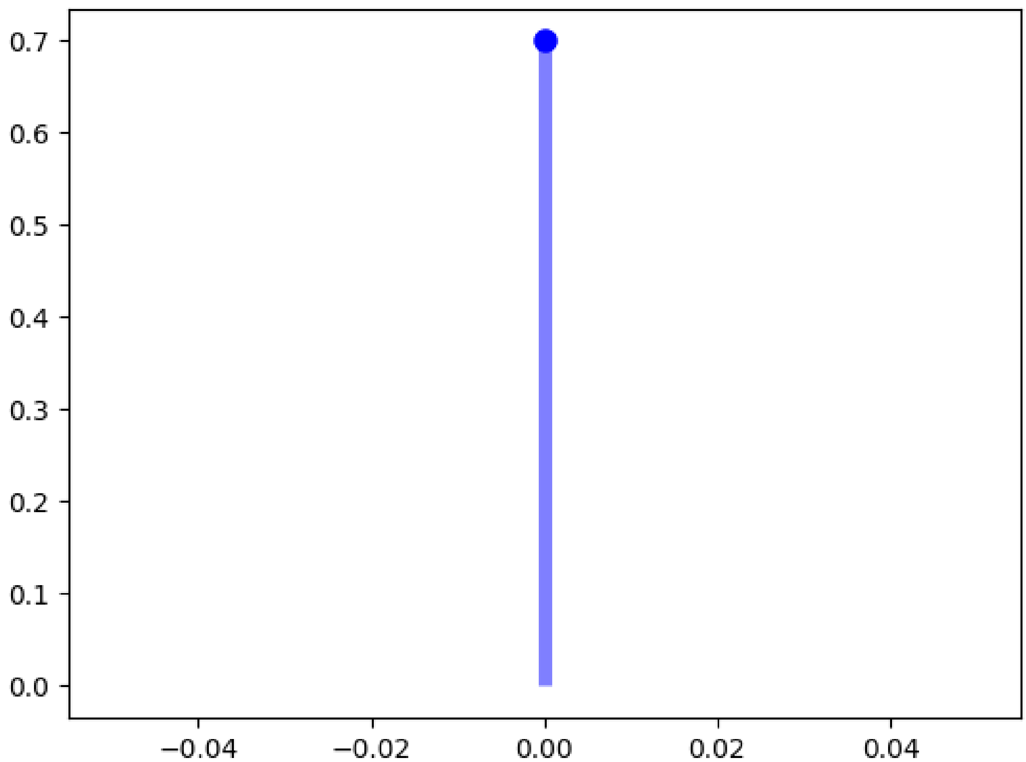
In summary, this book has no content whatsoever.

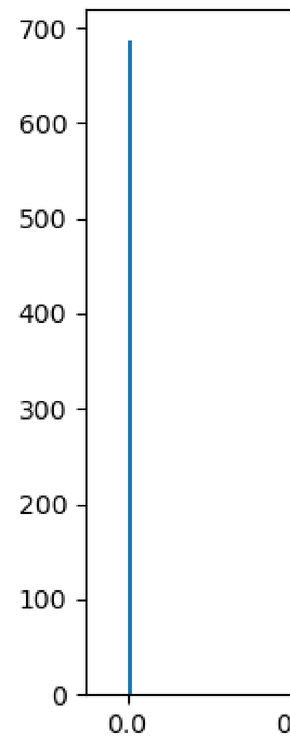
3 Tarea 1

Exercise 3.1. Se generan variables aleatorias Bernoulli y el histograma de los valores que toma con paremetro $p = 0.3$.

Listing 3.1 Exploring functions to generate random variables with a Bernoulli distribution.py

```python
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew,kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p),
              bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```





Exercise 3.2. Se generan variables aleatorias normales y el histograma de los valores que toma.

Exercise 3.3. Modificando reproducir el gráfico de una distribución gaussiana bivariada con media vectorial $\mu[0.1, 0.5]$ y matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3.0 & 0.3 \\ 0.75 & 1.5 \end{bmatrix}$$

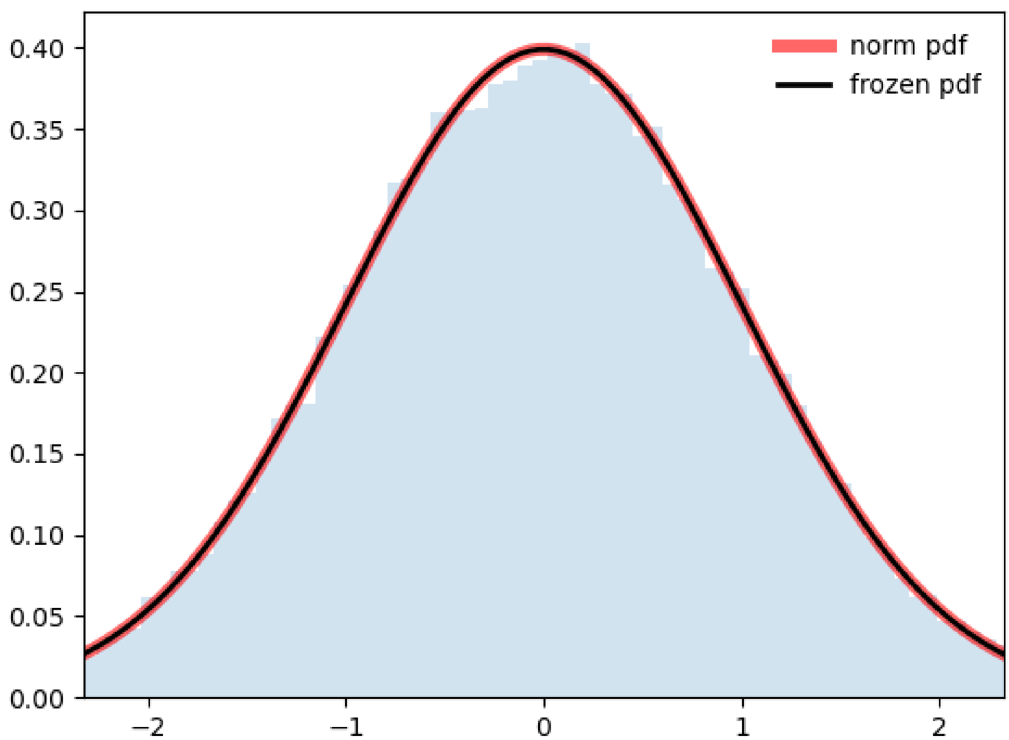
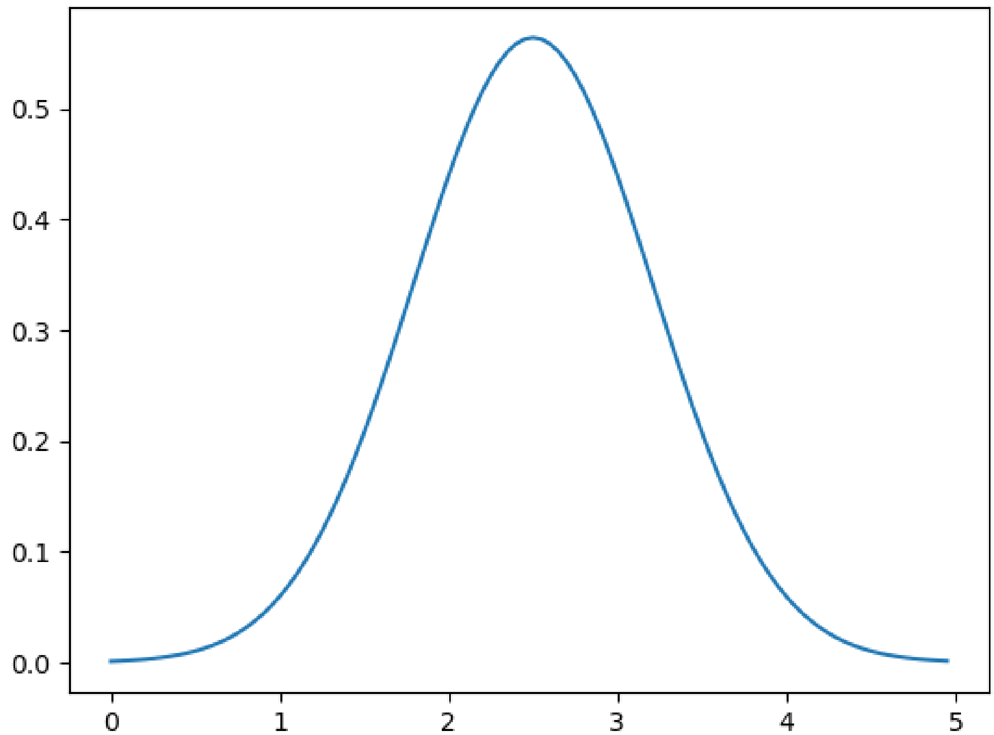
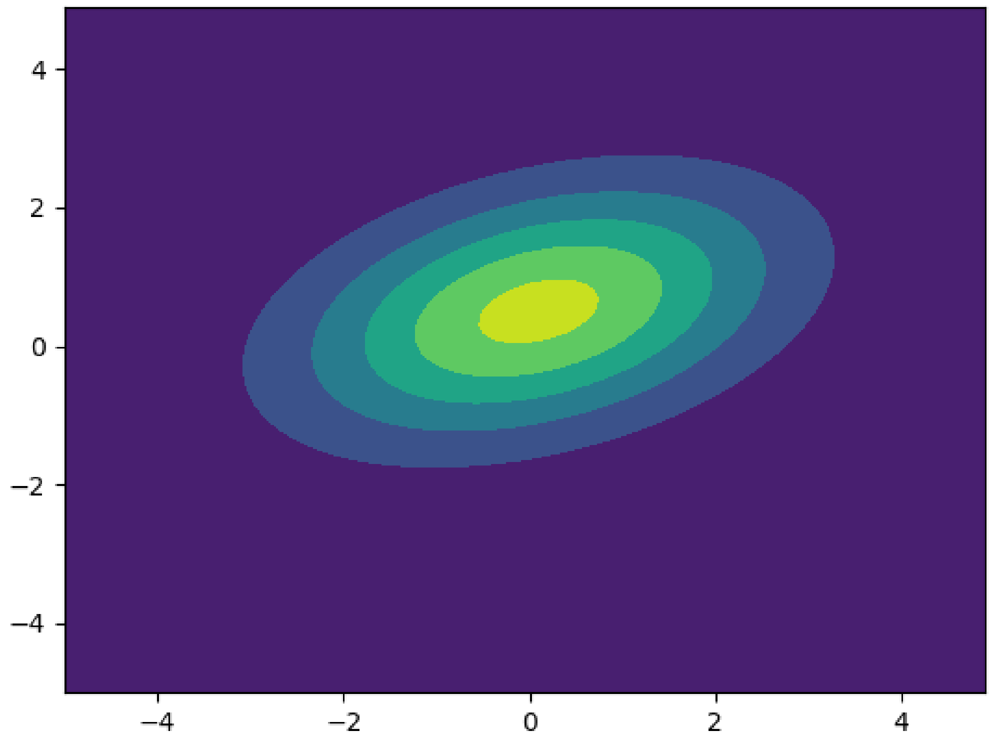
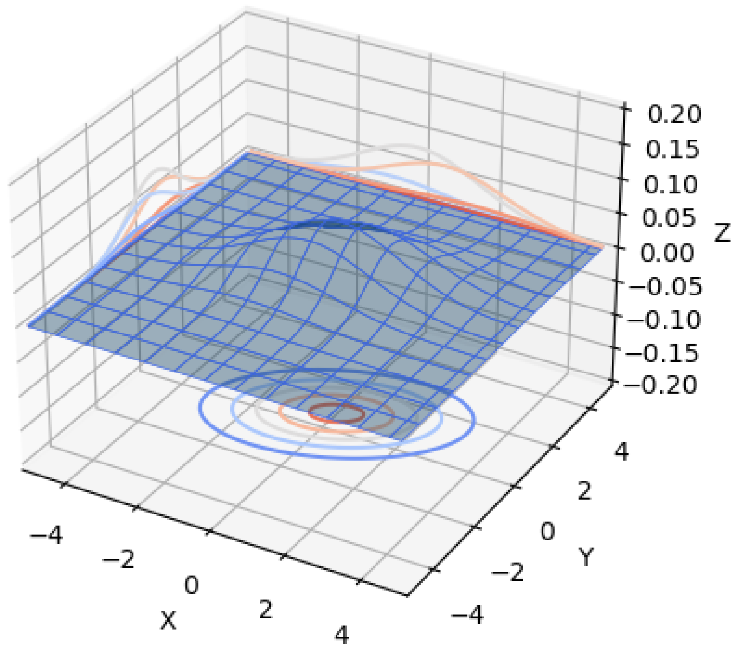


Figure 3.1: Figura 3


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
1
2
3
4
5


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
−0.20
Z
−4
−2
0
2
4
X
−4
−2
0
2
4
Y

Listing 3.2 Exploring functions to generate random variables with a Gaussian distribution.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

fig, ax = plt.subplots(1, 1)
mean, var, skew, kurt = norm.stats(moments='mvsk')

x = np.linspace(norm.ppf(0.01), norm.ppf(0.99), 100)
ax.plot(
    x,
    norm.pdf(x),
    'r-',
    lw=5,
    alpha=0.6,

    label='norm pdf'
)
rv = norm()
ax.plot(x, rv.pdf(x), 'k-', lw=2, label='frozen pdf')
vals = norm.ppf([0.001, 0.5, 0.999])

np.allclose([0.001, 0.5, 0.999], norm.cdf(vals))

r = norm.rvs(size=50000)

ax.hist(r, density=True, bins='auto', histtype='stepfilled', alpha=0.2)
ax.set_xlim([x[0], x[-1]])
ax.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```

Listing 3.3 `Revising multivariate Gaussian.py`

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5);


fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]

pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.1, 0.5], [[3.0, 0.3], [0.75, 1.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
# plt.show()


ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,

    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')


ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'

)
plt.show()
```

4 Tarea 2

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria. Demuestre que para δ y h pequeño tenemos

$$E\exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)] \approx \exp\left[-\frac{t\lambda^2h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4h^4}{12\delta}\right]$$

Demostración:

Considere una caminata aleatoria que comienza en 0 con saltos h y $-h$ igualmente probables en los momentos δ, 2 δ,..., donde h y δ son números positivos. Más precisamente, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. variables con

$$P\left[X_i = h\right] = P\left[X_i = -h\right] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y pongamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, defina $Y_{\delta,h}(t)$ mediante linealización, es decir, para $n\delta < t < (n+1)\delta$, defina

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Calculemos la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y sea $t = n\delta$ así, $n = t/\delta$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right] &= \prod_{j=1}^{n} Ee^{i\lambda X_j}, \text{ por ser variables independientes,} && (4.1)\\
&= (Ee^{i\lambda X_j})^n, \text{ por ser idénticamente distribuidas,} && (4.2)\\
&= \frac{1}{2}(e^{i\lambda h} + e^{-i\lambda h})^n, && (4.3)\\
&= (\cos(\lambda h))^n, && (4.4)\\
&= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}, && (4.5)
\end{aligned}$$

$$(4.6)$$

Por otro lado, sea $u = [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \Rightarrow \ln(u) = \frac{1}{\delta} \ln[\cos(\lambda h)]$.

Usando la expansión de Taylor de $\cos(x)$ se tiene que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(\lambda h)) &\approx \ln\left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}\right] && (4.7)\\
&\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!}\right)^2 && (4.8)\\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^4 h^4}{4} - \frac{\lambda^6 h^6}{24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{24}\right) && (4.9)\\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} - \frac{\lambda^4 h^4}{8} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} && (4.10)\\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} && (4.11)
\end{aligned}$$

para una h pequeña, se satisface que,

$$-\frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \approx 0$$

Por lo tanto, $\ln(\cos(\lambda h)) \approx -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}$.\ Así, para δ y h pequeña, se tiene que $\ln u \approx \frac{1}{\delta}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}\right)$.\ Entonces

$$u \approx \exp\left[\frac{1}{\delta}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}\right)\right] \tag{4.12}$$

Entonces por la ecuación (Equation 4.6),

$$E \exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}(t)\right] \approx \exp\left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right] \tag{4.13}$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta\to 0} E\left[\exp\left(i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right)\right] = \lim_{\delta\to 0}\exp\left[-t\left(\left[\frac{h^2}{\delta}\right]\left(\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^4 h^2}{24}\right)\right)\right],$$

Asumamos que $\delta \to 0$, $h \to 0$ pero $h^2/\delta \to \infty$. Entonces $\lim_{\delta\to 0} Y_{\delta,h}(t)$ no existe. Por otro lado, consideremos la siguiente renormalización,

$$\begin{aligned}
E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)+\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right] &= E\left[\exp(i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right))\exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)\right] && (4.14)\\
&= \exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right] && (4.15)\\
&\approx \exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)\exp\left[-\frac{t\lambda^2h^2}{2\delta}-\frac{t\lambda^4h^4}{12\delta}\right] && (4.16)\\
&= \exp\left(-\frac{t\lambda^4h^4}{12\delta}\right) && (4.17)
\end{aligned}$$

Así, si $\delta, h \to 0$ de tal manera que $h^2/\delta \to \infty$ y $h^4/\delta \to 0$, entonces

$$\lim_{\delta\to 0} E\left[\exp\left(i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)+\frac{th^2\lambda^2}{2}\right)\right] = \lim_{\delta\to 0}\exp\left(\frac{\left(\lambda h\right)^4}{24\delta}\right)=1$$

5 Tarea 3

Exercise 5.1. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E\left[e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right] && (5.1)\\
&= E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}-\frac{it\mu}{\sigma}\right)}\right] && (5.2)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}\right)}\right] && (5.3)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx && (5.4)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx && (5.5)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx && (5.6)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2-2itx\sigma}{\sigma^2}}\, dx && (5.7)\\
& && (5.8)
\end{aligned}$$

Observemos que,

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} &= \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} && (5.9)\\
&= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} && (5.10)\\
&= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma}\left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma^2}\right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} && (5.11)\\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} && (5.12)\\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} && (5.13)\\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2. && (5.14)\\
& && (5.15)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (Equation 5.15) en (Equation 5.8), resulta

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2\right]} dx && (5.16)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma} - \frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx && (5.17)\\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx && (5.18)\\
& && (5.19)
\end{aligned}
$$

Sea $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right) \Longrightarrow du = \frac{1}{\sigma}dx$, sustituyendo esto en (Equation 5.19), resulta

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du && (5.20)\\
&& (5.21)
\end{aligned}
$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0,1)$, entonces

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dx = 1.
$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.21), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{5.22}$$

$$\tag{5.23}$$

Por otro lado, consideremos $Z \sim N(0,1)$, entonces

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Entonces $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

□

Exercise 5.2. Si $Y \sim N(0,1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) &= E\left[e^{it(\sigma Y+\mu)}\right] && (5.24)\\
&= E\left[e^{it\sigma Y+it\mu}\right] && (5.25)\\
&= e^{it\mu}E\left[e^{it\sigma Y}\right] && (5.26)\\
&= e^{it\mu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy && (5.27)\\
&= e^{it\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2yit\sigma)}dy. && (5.28)\\
& && (5.29)
\end{aligned}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
y^2 - 2yit\sigma &= (y-it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 && (5.30)\\
&= (y-it\sigma)^2 + t^2\sigma^2. && (5.31)\\
& && (5.32)
\end{aligned}$$

Sustituyendo, (Equation 5.32) en (Equation 5.29) resulta

$$\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{it\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y-it\sigma)^2+t^2\sigma^2)}dy \tag{5.33}$$

$$= e^{it\mu}e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2}dy \tag{5.34}$$

$$\tag{5.35}$$

Tomando $u = y - it\sigma \implies du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

entonces $U \sim N(0,1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2}dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.35), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu,\sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y+\mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu,\sigma)$$

□

Exercise 5.3. Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proof. Por definición, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] && (5.36)\\
&= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} && (5.37)\\
&= E[e^{itX}]E[e^{itY}] && (5.38)\\
&= \varphi_X(t)\varphi_Y(t). && (5.39)\\
& && (5.40)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z, esta dada por,

$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\\
&= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}+it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\\
&= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}e^{it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\\
&= \varphi_X(t)\varphi_Y(t),
\end{aligned}
$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (Equation 5.40) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

□

Exercise 5.4 (Ejercicio 4:)**.** Si X, Y son variables aleatorias normales entonces X, Y son independientes si y solo si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proof. Primero recordemos que

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Como X, Y son independientes, sabemos que

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (5.41)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x)\, f_y(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (5.42)\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(y)\,\mathrm{d}y\right) && (5.43)\\
&= E(X)\,E(Y) && (5.44)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 5.1 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. Sea $Y = |X-\mu|$, observemos que Y es positiva, así por la desigualdad de Markov y dado que $\mathcal{P}\left[|X-\mu| \geq \epsilon\right] = \mathcal{P}\left[|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2\right]$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\left[|X-\mu| \geq \epsilon\right] &= \mathcal{P}\left[|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2\right] && (5.45)\\
&\leq \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}\left[X\right]}{\epsilon^2} && (5.46)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 5.2 (Ley de los grandes números)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ procesos de ensayos independientes, con esperanza finita $\mu = E(X_j)$ y varianza finita $\sigma^2 = Var(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.*

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \to 0$$

Proof. Observemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[\frac{S_n}{n}-\mu\right] &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}\left(S_n\right) && (5.47)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}\left(X_i\right), \text{ por ser iid} && (5.48)\\
&= \frac{\sigma^2}{n} && (5.49)
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 5.1,

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\epsilon\right]\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

así, tomando el limite cuando $n\to\infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon}\to 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\epsilon\right]\to 0$$

$\square$

Theorem 5.3 (Teorema del Limite Central)**.** *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una secuencia de v.a.i.id con media* a *y varianza* b^2*. Entonces para doo* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*, con* $\alpha<\beta$*, entonces*

$$\mathcal{P}\left(\lim_{M\to\infty}\alpha\leq\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{M}X_i-Ma}{\sqrt{M}b}\leq\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}\mathrm{d}x$$

Proof. Definamos a

$$S_M=\sum_{i=1}^{M}\left[X_i-a\right],$$

y

$$Y_M=\frac{S_M}{\sqrt{M}b}.$$

Sea φ_{Y_M} la función generadora de momentos de Y_M y φ la función generadora de momentos de la distribución normal estándar, demostraremos que $\varphi_{Y_M}\to\varphi$.

Por definición,

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_M}(t) &= E\left[\exp\left(t\frac{S_M}{\sqrt{M}b}\right)\right] && (5.50)\\
&= \varphi_{S_M}\left(\frac{t}{\sqrt{M}b}\right) && (5.51)\\
&= \left[\varphi_{(X_1-a)}\left(\frac{t}{\sqrt{M}b}\right)\right]^M \quad \text{ya que, las } X_i \text{ son i.i.d} && (5.52)\\
&= \left[E\left[\exp\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)\right]\right]^M && (5.53)
\end{aligned}$$

Recordando la serie de Taylor

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_M}(t) &= \left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E\left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)^i\right]}{i!}\right]^M && (5.54)\\
&= \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}\right)^2 E\left[(X_1-a)^2\right]+\epsilon(3)\right]^M && (5.55)\\
&= \left[1+\frac{1}{M}\frac{t^2}{2}+\epsilon(3)\right]^M, && (5.56)
\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty}\frac{E\left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)^i\right]}{i!}, \qquad (5.57)$$

Ahora sea $s=\dfrac{t}{b\sqrt{M}}$, así,

$$\epsilon(3)=\sum_{i=3}^{\infty}\frac{E\left[(X_1-a)^i\right]s^i}{i!}$$

Además observemos que, cuando $t\to 0$, $s\to 0$.

Así, de lo anterior, si φ_1 existe, se cumple que,

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E\left[(X_1 - a)^i\right] s^{i-2}}{i!} \to 0, \text{ cuando, } s \to 0.$$

Por otro lado,

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[1 + \frac{1}{M}\left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3)\right]\right]^M,$$

y $s \to 0$ cuando $M \to \infty$.

Entonces $\epsilon(3)\, s^{-2} = M\epsilon(3)\, b^2 t^{-2} \to 0$. Dado que b, t estan fijas, se cumple que

$$M\epsilon(3) \to 0, \text{ cuando, } M \to \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \to \frac{t^2}{2}, \text{ cuando, } M \to \infty$$

esto implica que,

$$\left[1 + \frac{1}{M}\left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3)\right]\right]^M \to \exp\left(t^2/2\right), M \to \infty$$

De aqui se concluye que,

$$\lim_{M\to\infty} \varphi_M(t) = \exp\left(t^2/2\right) = \varphi(t)$$

la cual es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \to F_{N(0,1)}(x)$$

que es equivalente a,

$$F_M(b) - F_M(a) \to F_N(b) - F_N(a)$$

$$\mathcal{P}\left(\lim_{M\to\infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i - Ma}{\sqrt{M} b} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$$

□

Theorem 5.4. *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a.i.i.d con media* a. *Entonces*

$$\mathcal{P}\left[\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i = a\right] = 1.$$

Proof. Esto es similar a decir que

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i \overset{\text{c.s}}{=} a$$

Sin perdida de generalidad, diremos que $X_i \geq 0, \forall i$. Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n|\leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[\left|\frac{Q_n - E\left[Q_n\right]}{n}\right| \geq \epsilon\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Var}\left(Q_n\right)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}\left(Y_i\right) \tag{5.58}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left(Y_n^2\right)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n^2}\int_0^n x^2 \mathrm{d}F \tag{5.59}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^n x\mathrm{d}F < \infty, \tag{5.60}$$

donde F es la función de distribución de X_i. Luego

$$E\left[X_1\right] = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x\mathrm{d}F = \lim_{n\to\infty}E\left[Y_n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{E\left[Q_n\right]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P}\left[\limsup\left(\left|\frac{Q_n - E\left[Q_n\right]}{n}\right| \geq \epsilon\right)\right] = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{n} = E\left[X_1\right], \text{c.s}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[X_i \neq Y_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[X_i > n\right]$$

como $E[X_i] < \infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n] \leq E[X_1] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}[\limsup [X_i \neq Y_i]] = 0, \forall i$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i, \text{c.s} && (5.61) \\ &\Rightarrow \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i \to E[X_1] = \mu. \text{ c.s} && (5.62) \end{aligned}$$

$\square$

6 Tarea 4

Exercise 6.1. Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0, T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0, T]$.

Proof.
Veamos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.
Propiedad C1 (Que comience en 0).
Se tiene que, $V(0) = \dfrac{1}{c} W(c^2 \cdot 0) = 0$.

Propiedad C2 (Incrementos Independientes).
Sean $s < t < u < v$, por definición de V, se tiene que,

$$E[(V(t) - V(s))\,(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))\,(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Dado que W tiene incrementos independientes, se cumple que,

$$\frac{1}{c^2} E\left[(W(c^2 t) - W(c^2 s))\,(W(c^2 v) - W(c^2 u))\right] = \frac{1}{c^2} E\left[(W(c^2 t) - W(c^2 s))\right] E\left[(W(c^2 v) - W(c^2 u))\right] \quad (6.1)$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

Propiedad C3 (Incrementos estacionarios).
Sea $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c}\left[W(c^2 t) - W(c^2 s)\right]$$

Por las propiedades de la definicion del movimiento Browniano.

$$E\left[V(t)-V(s)\right] = \frac{1}{c}E\left[W(c^2t)-W(c^2s)\right]=0 \tag{6.2}$$

$$\operatorname{Var}\left[V(t)-V(s)\right] = \frac{1}{c^2}\operatorname{Var}\left[W(c^2t)-W(c^2s)\right]=\frac{1}{c^2}\left(c^2\left(t-s\right)\right)=t-s \tag{6.3}$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

Con todo lo anterior se concluye que, V es un movimiento browniano.

□

Exercise 6.2. Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

Listing 6.1 `Browniano escalado, con c=1/5.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)
T = 1
n= 100
dt = 1 / (n - 1)
dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n - 1)
w = np.concatenate(([0],dw.cumsum()))

time = np.linspace(0,T, n)
c = 0.2  # 1/5
c_time = c**2 * time
c_w = c**(-1) * w

fig, browniano_escalado = plt.subplots(2)
browniano_escalado[0].plot(time, w)
browniano_escalado[1].plot(c_time, c_w)
browniano_escalado[0].set_title('Movimiento browniano')
browniano_escalado[1].set_title('Moviemiento browniano escalado')
plt.show()
```

Exercise 6.3. Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número

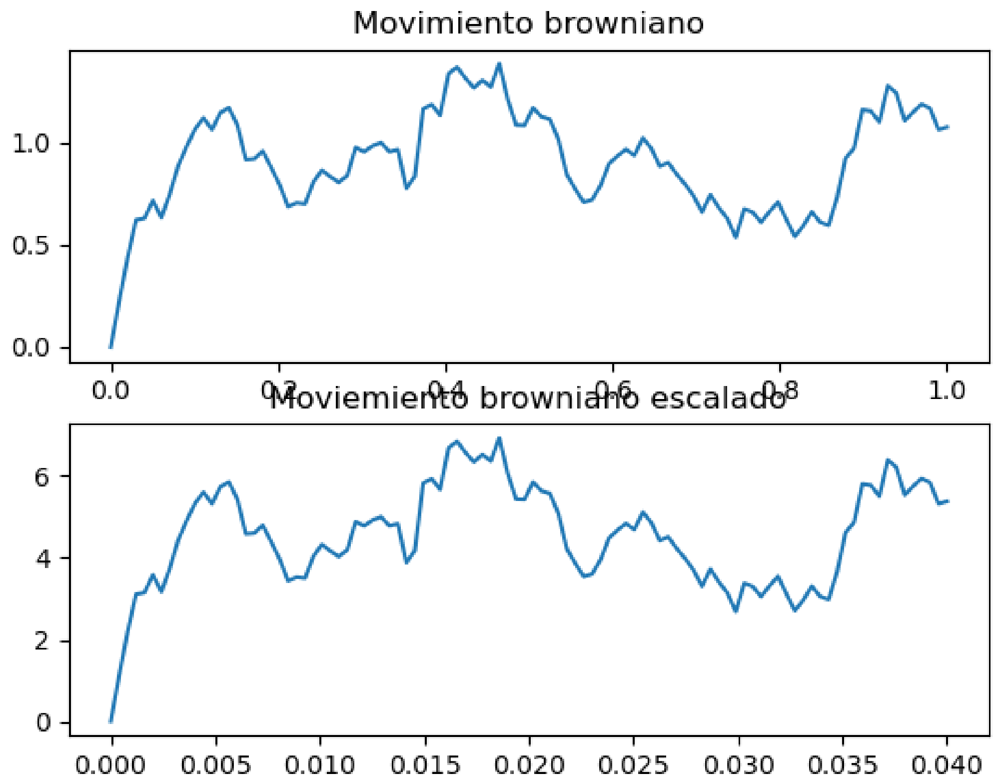


Figure 6.1: Figura 1

de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de una refinamiento con $2N$ incrementos.

Listing 6.2 `Browniano refinado, con refinamiento 2N.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)
    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t,t_half,W, W_refined
```

Exercise 6.4. En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

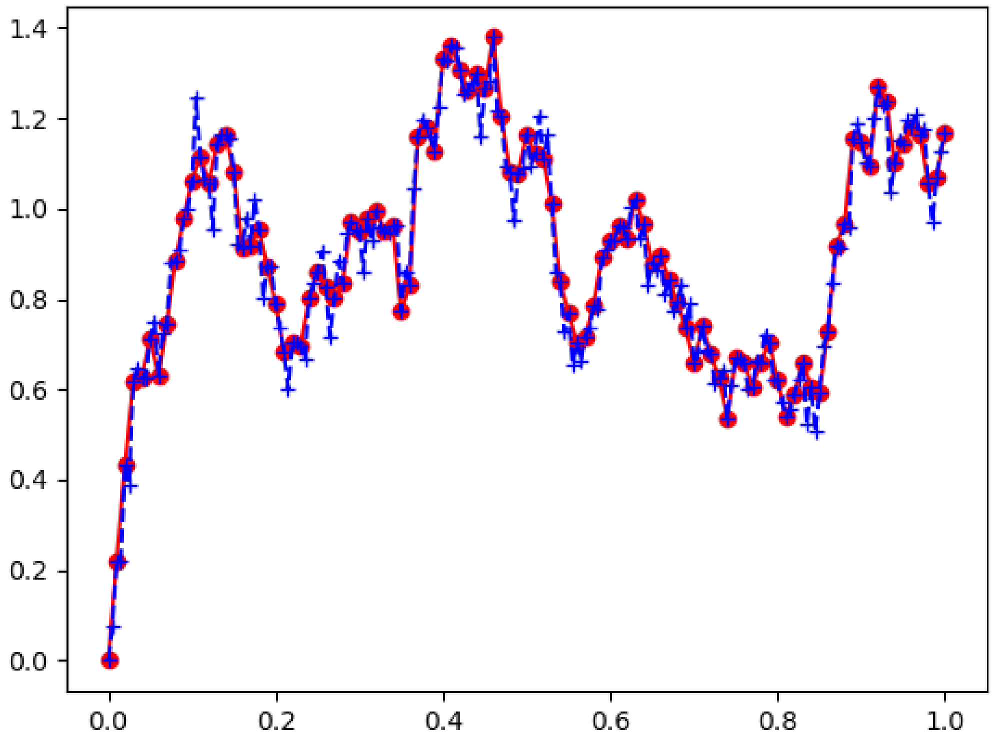


Figure 6.2: Figura 2

Listing 6.3 `Browniano refinado, con refinamiento 2N y 100 incrementos.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import h_b_r as hbr

a, b, c, d = hbr.refined_brownian_2n(1, 100)

plt.plot(a, c, 'r-+')
plt.plot(
    b,
    d,
    'g*--',
    # alpha = transparecia

    )
plt.show()
```

7 Tarea 5

Exercise 7.1. Demuestre que el movimiento browniano satisface

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|.$$

Proof. Consideremos dos casos:
Si $t > s$.

$$\begin{aligned} E\left[|W(t) - W(s)|^2\right] &= E\left[(W(t) - W(s))^2\right] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

ya que, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.
Mientras que si $t \leq s$.

$$\begin{aligned} E\left[(W(t) - W(s))^2\right] &= E\left[(W(s) - W(t))^2\right] \\ &= s - t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E\left[|W(t) - W(s)|^2\right] = |t - s|$$

□

Exercise 7.2. Dados $W(t_i)$ y $W(t_{i+1})$, demuestre que la variable aleatoria

$$W(t_{i+\frac{1}{2}}) := \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t \xi}, \quad \xi \sim N(0, 1)$$

satisface las tres condiciones C1, C2, C3 de la definicion de movimiento Browniano.

Proof. (C1) Veamos que $W\left(0\right)=0$, cuando $t=0$.
Se tiene por definicion del proceso que,

$$W\left(0\right)=\frac{1}{2}(W(0)+W(0))+\frac{1}{2}\sqrt{\delta(0)\xi}=0.$$

Por la propiedad C1 se satisface.

(C2) Que tenga incrementos estacionarios.
Notemos que

$$\begin{aligned} W(t_{i+\frac{1}{2}})-W(t_i) &= \frac{1}{2}\left[W\left(t_{i+1}\right)+W\left(t_i\right)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi-\frac{1}{2}(W(t_i)+W(t_i)) \\ &= \frac{1}{2}\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E\left[W(t_{i+\frac{1}{2}})-W(t_i)\right] &= E\left[\frac{1}{2}\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]\right]+E\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= \frac{1}{2}E\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] \\ &= 0 \quad \text{ya que, } E\left[\xi\right]=0 \text{ y } E\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]=0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var\left[W(t_{i+\frac{1}{2}})-W(t_i)\right] &= Var\left[\frac{1}{2}\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] && (7.1) \\ &= Var\left[\frac{1}{2}\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]\right]+Var\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] && (7.2) \\ &= \frac{1}{4}Var\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]+\frac{1}{4}\delta t Var\left[\xi\right] && (7.3) \\ &= \frac{1}{4}\delta t+\frac{1}{4}\delta t \quad \text{ya que, } Var\left[\xi\right]=1 \text{ y } Var\left[W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)\right]=\delta t && (7.4) \\ &= \frac{1}{2}\delta t. && (7.5) \end{aligned}$$

Además, sabemos que la combinación lineal de normales es una nornal.
Por lo tanto $W(t_{i+\frac{i}{2}})-W(t_i)\sim N\left(0,\frac{\delta t}{2}\right)$, con esto C2 se cumple.

(C3) Que tenga incrementos independientes.
Para esta parte usaremos que dos variables aleatorias X y Y son independientes si y solo si

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

calculemos $E\left[\left(W\left(t_{i+1}\right) - W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)\left(W(t_{j+1}) - W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)\right)\right]$ y definamos a $\Delta W(t_i) := W(t_{i+1}) - W(t_i)$.
Por lo anterior se tiene que:

$$E\left[\left(\Delta W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\Delta W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)\right)\right] = E\left[\left(\frac{1}{2}\Delta W\left(t_i\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right)\left(\frac{1}{2}\Delta W\left(t_j\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right)\right],$$

donde $\Delta W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) = W(t_{i+1}) - W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right)$ y $\Delta W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) = W(t_{j+1}) - W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)$.\ Desarrollando la parte derecha de la igualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right)\left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right)\right] &= E\left[\frac{1}{4}\Delta W(t_i)\Delta W(t_j) + \frac{1}{4}\Delta W(t_i)\sqrt{\delta t}\xi\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\Delta W(t_j)\sqrt{\delta t}\xi + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right)^2\right] \\
\text{ya que, } \Delta W(t_i), \Delta W(t_j) \text{ son independientes} &= \frac{1}{4}E\left[\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_j)\right] + \frac{1}{4}E\left[\Delta W(t_i)\right]\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] + \frac{1}{4}E\left[\Delta W\right. \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] + E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j)\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t} \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] + E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j)\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] + \frac{\delta t}{4} \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] + E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t} \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] + E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] \\
&= E\left[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $E\left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right)\left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right)\right] = E\left[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right]$, con lo que se concluye que se satisface la propiedad C3. Con todo lo anterior se concluye que $W(t_{i+\frac{1}{2}})$ define un Movimiento Browniano.

□

Exercise 7.3. Generalice la formula en el {Exercise 10.2} para el caso, dado $W(t_i), W(t_{i+1})$, y $\alpha \in (0,1)$ el valor

$$W(t_i + \alpha dt)$$

satisface las tres condiciones que define un movimiento Browniano.

Proof. Observemos que

$$t_{i+\alpha} = \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i,$$

y

$$W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) \sim \alpha\sqrt{dt}N(0,1)$$

Definamos a

$$W(t_{i+\alpha}) = W\left(t_i + \alpha\Delta t\right) := \left(1-\alpha\right)W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y.$$

donde Y será una v.a independiente de $W\left(t\right)$.
Dado que,

$$\begin{aligned} W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) &= \left(1-\alpha\right)W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y - W_i \\ &= \alpha\left(W_{i+1} - W(t_i)\right) + Y. \end{aligned}$$

Entonces,

$$E\left[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)\right] - E[\alpha\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)] = E\left[Y\right] \Longrightarrow E[Y] = 0,$$

y

$$Var\left[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)\right] = \alpha^2 dt + Var\left[Y\right],$$

Así,

$$Var\left[Y\right] = dt\left(\alpha - \alpha^2\right),$$

entonces $Y = \sqrt{\alpha\left(1-\alpha\right)dt}\xi, \xi \sim N\left(0,1\right)$.
Con esto se cumple $C1$.

$$W\left(0\right) = 0.$$

y por construcción análogamente que el ejercicio anterior se satisfacen las propiedades C2 y C3.

□

Exercise 7.4. Suponga que $X \sim N(0,1)$, sabemos que $E[X] = 0$ y $E(X^2) = 1$.
Además de la defición, el pésimo-momento satisface

$$E[X^p] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp(-x^2/2)dx.$$

Usando esta relación, demuestre que $E[X^3] = 0$ y $E[X^4] = 3$. Entonces deduce que un incremento Browniano $\delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ satisface que $E[\delta W t_i^3] = 0$ y $E[\delta W t_i^4] = 3\delta t^2$. Entonces encuentre una expresion para $E[X^p]$ para un entero positivo p

Proof. De la definición del p-esimo momento se tiene para $p = 4$, que

$$E\left[X^4\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

resolviendo esta integral por el método integración por partes, se tiene que $E\left[X^4\right] = uv - \int vdu$, donde $u = x^3 \Longrightarrow du = 3x^2dx$ y $dv = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$, calculemos primero v,

$$\begin{aligned}
v &= \int x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \qquad \text{sea } y = -\frac{x^2}{2} \Longrightarrow dy = -xdx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \exp(y)dy \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(y) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo todo lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned}
E\left[X^4\right] &= -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)3x^2dx \\
&= -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 3E[X^2],
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$-x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x\to-\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto, dado que $E[X^2] = 1$, se concluye que

$$E\left[X^4\right] = 3.$$

Procediendo de igual manera que el caso anterior, se tiene que:

$$E\left[X^3\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^3\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx.$$

tomando $u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx$ y dv, v igual al caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} E\left[X^3\right] &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -2x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2E[X] \\ &= 0, \end{aligned}$$

usando el hecho que $E[X] = 0$ y

$$-x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$E\left[X^3\right] = 0.$$

De manera general se tiene que,

$$\begin{aligned} E\left[X^p\right] &= -x^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -(p-1)x^{p-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= 0 + (p-1)E[X^{p-2}] \\ &= (p-1)E[X^{p-2}]. \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que $\delta W_i \sim N\left(0, \delta t\right)$, donde $\delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces

$$Z = \frac{\delta W_i}{\sqrt{\delta t}} \sim N\left(0, 1\right),$$

que por lo visto anteriormente, para $p = 4$.

$$E\left[Z^4\right] = 3 \Longrightarrow E[(\delta W_i)^4] = E[Z^4](\delta t)^2 = 3(\delta t)^2$$

y para $p = 3$, resulta

$$E[Z^3] = 0 \Longrightarrow E[(\delta W_i)^3] = E[Z^3](\delta t)^{3/2} = 0.$$

□

Exercise 7.5. Suponga que $X \sim N(0,1)$. Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$E[\exp(a+bX)] = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Por lo tanto deduzca que

$$E[\exp(t + \frac{1}{4}W_t)] = \exp\left(\frac{32}{33}t\right).$$

Proof. Se tiene que

$$E\left[\exp\left(a+bX\right)\right] = \exp\left(a\right) E\left[\exp\left(bX\right)\right],$$

observemos que $bX \sim N\left(0, b^2\right)$ además, $E\left[\exp\left(bX\right)\right]$ es la función generadora de momentos cuando $t = 1$

$$M_{bX}\left(1\right) = E\left[\exp\left(bX\right)\right] = \exp\left(\frac{b^2}{2}\right),$$

sustituyendo, resulta

$$E\left[\exp\left(a+bX\right)\right] = \exp\left(a\right)\exp\left(\frac{b^2}{2}\right) = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Ahora calculemos $E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right]$, se tiene que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\left(W_t - W_0\right)\right)\right],$$

entonces consideremos a $\dfrac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}$, observemos que, $\dfrac{W_t - W_0}{\sqrt{t}} \sim N\left(0,1\right)$, por lo tanto, podemos usar la fórmula anterior con $a = t$ y $b = \dfrac{1}{4}\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\left(W_t - W_0\right)\right)\right] &= E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\sqrt{t}\left(\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}t\right)\right) \\
&= \exp\left(t + \frac{1}{32}t\right) \\
&= \exp\left(\frac{33}{32}t\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = \exp\left(\frac{33}{32}t\right).$$

□

8

Exercise 8.1. Cree un scrip para muestrear 10000 rutas del proceso $u(t, W_t)$ definido en el ejercicio Exercise 7.5. Graficar 10 rutas de muestra y la media de 10000 rutas de muestra de este proceso $u(t, W_t)$.

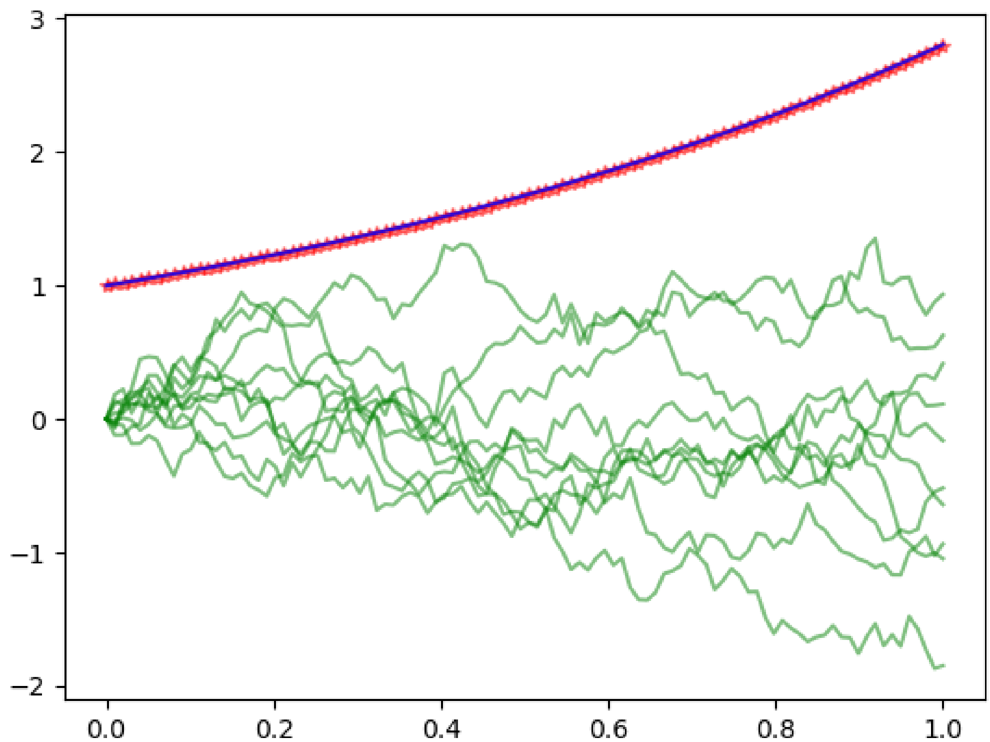


Figure 8.1: Figura 1

Exercise 8.2. Siguiendo las ideas para llenar un camino browniano en puntos $t_{i+\frac{1}{2}} := t_i + \frac{1}{2}\delta t$. Haga una función de Python para llenar un camino browniano dada una fracción $\alpha \in (0, 1)$ para llenar en los puntos $t_{i+\alpha} := t_i + \alpha\delta t$

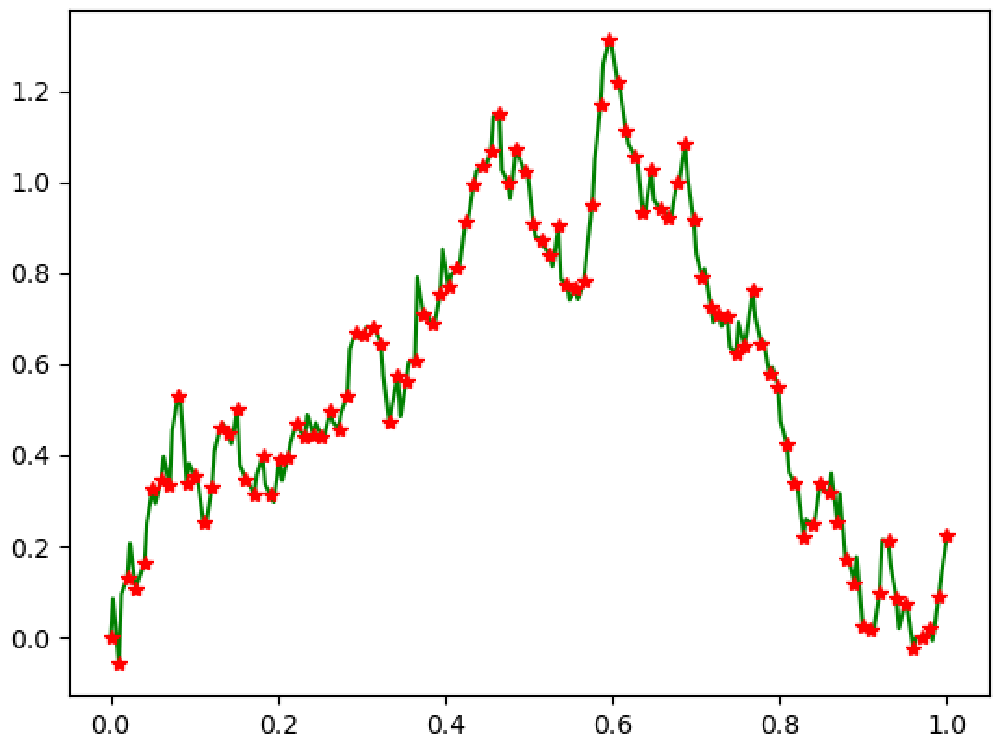


Figure 8.2: Figura 2

Listing 8.1 simulación ejercicio 7-5.py

Solution

```
import numpy as np
import aux_functions as aux
import matplotlib.pyplot as plt

def b_function(t, a, w):
    y = np.exp(t+ a * w)
    return y


n_samples = 10000
n = 100
t_initial = 0
t_final = 1

mean = np.zeros(n)
for i in range(n_samples):
    time, b_w = aux.strong_brownian(t_final,n)
    y = b_function(time,0.25, b_w)
    if i < 10:
        plt.plot(time,b_w,'g-',alpha = 0.5)
    mean += y

mean = (n_samples)**(-1) * mean
time = np.linspace(0,t_final, n_)

y = [np.exp(33 / 32 * t) for t in time]
plt.plot(time, mean, 'r-*', alpha = 0.5)
plt.plot(time, y,'b-',alpha = 0.8)
plt.show()
```

Listing 8.2 `simulación para llenar un camino browniano con alpha=0,3.py`

Solution

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import aux_functions as aux


t_final = 1
n = 100
delta_t = 1/(n - 1)
alpha = 0.3

prng = np.random.RandomState(123456789)

time, w = aux.strong_brownian(1,n)

y = np.sqrt(delta_t *(alpha - alpha ** 2)) * prng.standard_normal(n - 1)

w_ = np.roll(w, -1)

w_alpha = alpha * w_ + (1 - alpha) * w
w_alpha = np.delete(w_alpha, -1)
w_alpha += y
w_ref = np.zeros(2* n -1)

w_ref[0::2] = w
w_ref[1::2] = w_alpha

time_ref = np.zeros(2 * n - 1)

for i in range(2 * n - 1):
    if i % 2 == 0:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)]
    else:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)] + alpha * delta_t

plt.plot(time_ref,w_ref,'g-')
plt.plot(time, w,'ro')
plt.show()
```

9 Tarea 7

Exercise 9.1. Sea $W(t)$ un Movimiento Browniano y Z_i una colección de variables aleatorias i.i.d, con distribución $N\left(0, \frac{\delta t}{4}\right)$.
Pruebe que la suma

$$\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right),$$

tiene valor esperado igual a cero y una varianza de $O(\delta t)$.

Proof. Sin perdida de generalidad dado como estan definidas Z_i y $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ podemos suponer que son variables aleatorias independientes para cada $i = 1, \ldots, L$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] &= \sum_{i=0}^{L} \mathbb{E}\left[Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{L} \mathbb{E}(Z_i)\mathbb{E}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) \\
&= 0 \quad \text{ya que, por hipótesis, } \mathbb{E}(Z_i) = 0 \text{ y } \mathbb{E}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] = 0.$$

Ahora calculemos la varianza; sabemos que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, sustituyendo resulta

$$\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] \quad \text{usando el hecho que tiene valor esp}
\end{aligned}$$

Por el Teorema multinomial, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right)^2\right] &= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=0}^{L}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right]^2 + 2\sum_{i\neq j}^{L} Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{L}\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right]^2 + 2\sum_{i\neq j}^{L}\mathbb{E}\big[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1}
\end{aligned}
$$

Dado que $i \neq j$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $i < j$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1})-W(t_j))\right] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}_j\right]\} \\
&= \mathbb{E}\{[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j]\mathbb{E}\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}_j\right]\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right]^2 &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\left[Z_i^2(W(t_{i+1})-W(t_i))^2|\mathcal{F}_i\right]\} \\
&= \mathbb{E}\{Z_i^2\mathbb{E}\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))^2|\mathcal{F}_i\right]\} \\
&= \mathbb{E}[Z_i^2](t_{i+1}-t_i) \\
&= \frac{\delta t}{4}(t_{i+1}-t_i),
\end{aligned}
$$

sustituyendo todo lo anterior, resulta

$$
\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)\right] &= \sum_{i=0}^{L}\frac{\delta t}{4}(t_{i+1}-t_i) \\
&= \frac{\delta t}{4}(t_{L+1}-t_0).
\end{aligned}
$$

Para un L suficientemente grande podemos considerar que, dado un $\varepsilon > 0$, tal que, $(t_{L+1}-t_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, así

$$
Var\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)\right] \leq \varepsilon\delta t.
$$

Por lo tanto, con esto se concluye que, la varianza es de orden δt.

$\square$

Exercise 9.2. La regla del punto medio de la integral de Riemann de una función $h \in C^2([a,b])$ sobre una partición de L puntos del intervalo $[a,b]$ está dada por,

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} h\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)\delta t.$$

Use la relación

$$W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \underbrace{Z_i}_{i.i.d. \sim N(0,\delta t/4)},$$

y el ejercicio anterior para demostrar que la regla del punto medio de la integral de Riemann implica que

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2.$$

Proof. Sea $\Delta_L = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0,T]$. De la regla del punto medio, aplicada para $h(t) = W(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)dW(t) &= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} \left[\frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + Z_i\right](W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} \frac{1}{2}\left(W(t_{i+1})^2 - W(t_i)^2\right) + \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \frac{1}{2}\left(W(T)^2 - W(0)^2\right) + \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \frac{1}{2}W(T)^2 + \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)).
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior solo nos faltaria demostrar que,

$$\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \to 0 \text{ en } L^2$$

es decir,

$$\lim_{\|\Delta_L\| \to 0} E\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] = 0$$

Del ejercicio anterior, sabemos que

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] = O(\delta t) \leq \varepsilon\|\Delta_L\|,$$

así, tomando el limite cuando $\|\Delta_L\| \to$ se tiene que,

$$\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \to 0 \text{ en } L^2,$$

por lo tanto, sustituyendo este último resultado, se concluye que

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2$$

□

Exercise 9.3. Usando la aproximación de la suma de Riemann

$$\int_0^T h(t)dW(t) \sim \sum_{i=0}^{L} h(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \tag{9.1}$$

argumente que,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] = \frac{T^3}{3}.$$

Por tanto, enuncie la isometría de Itô y deduzca que esta isometría es válida para el caso $h(t) = t$.

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. De la aproximación de la suma de Riemann, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T tdW(t) &\sim \sum_{i=0}^{L} t_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ \implies \left(\int_0^T tdW(t)\right)^2 &\sim \left(\sum_{i=0}^{L} t_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2, \end{aligned}$$

del Teorema Multinomial, se sigue que

$$\left(\sum_{i=0}^{L} t_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2 = \sum_{i=0}^{L} t_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2\sum_{i\neq j} t_i t_j(W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

de las relaciones anteriores se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] &\sim \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} t_i^2(W(t_{i+1})-W(t_i))^2 + 2\sum_{i\neq j} t_i t_j (W(t_{i+1})-W(t_i))(W(t_{j+1})-W(t_j))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{L} t_i^2 \mathbb{E}(W(t_{i+1})-W(t_i))^2 + 2\sum_{i\neq j} t_i t_j \mathbb{E}\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))(W(t_{j+1})-W(t_j))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{L} t_i^2(t_{i+1}-t_i),
\end{aligned}$$

además, observemos que,

$$\lim_{L\to 0}\sum_{i=0}^{L} t_i^2(t_{i+1}-t_i) = \int_0^T t^2 dt = \frac{T}{3}$$

entonces, de esto último se concluye que,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] = \frac{T}{3}.$$

Por otro lado, de la isometría de Itô, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)\left(\int_0^T tdW(t)\right)\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}(t^2)dt \\
&= \int_0^T t^2 dt \\
&= \frac{T}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la isometría de Itô se cumple para $h(t) = t$

$\square$

Exercise 9.4. Escriba una función de Python para calcular la integral de Itô del movimiento Browniano $W(t)$ sobre $[0, T]$.

Listing 9.1 `calculando la integral de Itô del movimiento Browniano W(t).py`

Solution

```python
import numpy as np

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n

    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()

        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w



def f(x, t):
    y = x
    return y



def fB(partition, x, t):
    y = 0
    for i in range(len(partition) - 1):

        if partition[i] <= t < partition[i + 1]:
            y = f(x, t)
    return y


def ito_n(n, t):
    time, w = strong_brownian(t, n)
    integral = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1):

        integral[i] = fB(time, w[i], time[i]) * (w[i + 1] - w[i])
    ito = integral.sum()
    return w, ito
```

10 Tarea 8

Exercise 10.1. Use la aproximación de la suma de Riemann la ecuación (Equation 9.1). Muestra la propiedad de linealidad de la integral estocástica. Es decir,

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, de la aproximación de la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), se satisface que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dW_t &\sim \sum_{i=0}^{L} (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{L} \alpha f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \sum_{i=0}^{L} \beta g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{L} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \beta \sum_{i=0}^{L} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))
\end{aligned}$$

observemos que,

$$\alpha \sum_{i=0}^{L} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \text{ es la aproximacion de la suma de Riemann de; } \alpha \int_0^T f(t) dW_t,$$

análogamente se tiene para $\beta \sum_{i=0}^{L} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$, por lo tanto de aquí se sigue que, tomando el limite cuando $L \to \infty$, resulta

$$\alpha \lim_{L\to\infty} \sum_{i=0}^{L} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \alpha \int_0^T f(t) dW_t$$

y

$$\beta \lim_{L\to\infty} \sum_{i=0}^{L} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

entonces de estas dos últimas relaciones, se concluye que:

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

□

Exercise 10.2. Escriba con detalle la demostración del siguiente Teorema, también incluya la demostración del Lema 5.18 del Mao.

Theorem 10.1 (6.1 del Mao)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, sea* ρ, τ *dos tiempos de paro tales que* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left(\int_\rho^\tau f(s)dW_s \mid \mathcal{F}_\rho\right) = 0, \tag{10.1}$$

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_\rho^\tau f(s)dW_s\right|^2 \mid \mathcal{F}_\rho\right) = \mathbb{E}\left(\int_\rho^\tau |f(s)|^2\, ds \mid \mathcal{F}_\rho\right). \tag{10.2}$$

Antes de la demostración del teorema Theorem 10.1, veamos el siguiente Lema.

Lemma 10.1 (5.18 del Mao)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ *y sea* τ *un tiempo de paro tal que* $0 \leq \tau \leq T$*. Entonces*

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) = I(\tau),$$

donde $\{I(t)\}_{0\leq t\leq t}$ *es la integral indefinida de* f *dada por la Definición 5.11.*

Proof. La definición 5.11 del Mao, nos dice que,

$$I(t) = \int_0^t f(s)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

Por otro lado, de la definición 5.15 del Mao, también se tiene que

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) = \int_0^T \mathbb{I}_{[0,\tau]} f(s)dW(s)$$

así, por las dos definiciones anteriores se cumple que,

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) = I(\tau)$$

□

Del Teorema 6.1. El Teorema de paro de la martingala de Doob, nos dice que:

$$E(I(\tau)|\mathcal{F}_\rho) = I(\rho) \tag{10.3}$$

Además la definición 5.15, nos dice que para ρ otro tiempo de paro, tal que $0 \leq \rho \leq \tau$, se cumple que

$$\int_{\rho}^{\tau} f(s)dW(s) = \int_{0}^{\tau} f(s)dW(s) - \int_{0}^{\rho} f(s)dW(s).$$

Entonces, aplicando la igualdad anterior, el Lema Lemma 10.1 y el Teorema de paro de la martingala de Doob, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_{\rho}^{\tau} f(s)dW_s \middle| \mathcal{F}_{\rho}\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_{0}^{\tau} f(s)dW(s) - \int_{0}^{\rho} f(s)dW(s)\right) \middle| \mathcal{F}_{\rho}\right) \\
&= \mathbb{E}(I(\tau) - I(\rho)|\mathcal{F}_{\rho}) \\
&= \mathbb{E}(I(\tau)|\mathcal{F}_{\rho}) - \mathbb{E}(I(\rho)|\mathcal{F}_{\rho}) \\
&= I(\rho) - I(\rho) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De aquí, se concluye que la primera relación del teorema Theorem 10.1 se satisface.
Por otro lado, nuevamente por el Teorema de paro de Doob, se tiene que

$$E(I^2(\tau) - \langle I, I\rangle_{\tau}|\mathcal{F}_{\rho}) = I^2(\rho) - \langle I, I\rangle_{\rho}, \tag{10.4}$$

y además, del Teorema 5.14 del Mao, se tiene que

$$\langle I, I\rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

De estos dos hechos anteriores, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2|\mathcal{F}_{\rho}) &= \mathbb{E}(I^2(\tau) - 2I(\rho)I(\tau) + I^2(\rho)|\mathcal{F}_{\rho}) \\
&= \mathbb{E}(I^2(\tau)|\mathcal{F}_{\rho}) - 2I(\rho)\mathbb{E}(I(\tau)|\mathcal{F}_{\rho}) + I^2(\rho) \\
&= \mathbb{E}(I^2(\tau)|\mathcal{F}_{\rho}) - 2I(\rho)^2 + I^2(\rho) \\
&= \mathbb{E}(I^2(\tau)|\mathcal{F}_{\rho}) - I^2(\rho) \\
&= \mathbb{E}(\langle I, I\rangle_{\tau} - \langle I, I\rangle_{\rho}|\mathcal{F}_{\rho}) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} |f(s)|^2 ds - \int_0^{\rho} |f(s)|^2 ds|\mathcal{F}_{\rho}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 ds|\mathcal{F}_{\rho}\right).
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_{\rho}^{\tau} f(s)dW_s\right|^2 \mid \mathcal{F}_{\rho}\right) = \mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2|\mathcal{F}_{\rho}),$$

se sigue que la segunda relación del teorema Theorem 10.1 se satisface.

$\square$

Exercise 10.3. Usando la aproximación de la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), la isometría de Itô y la identidad $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ pruebe que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)\right] = \int_0^T \mathbb{E}[f(t)g(t)]dt.$$

Proof. Sea $a = \int_0^T g(t)dW_t$ y $b = \int_0^T f(t)dW_t$, entonces de la identidad $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} 4\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right) &= \left(\int_0^T g(t)dW_t + \int_0^T f(t)dW_t\right)^2 - \left(\int_0^T g(t)dW_t - \int_0^T f(t)dW_t\right)^2 \\ &= \left(\int_0^T (g(t)+f(t))dW_t\right)^2 - \left(\int_0^T (g(t)-f(t))dW_t\right)^2, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)\right] &= \mathbb{E}\left(\int_0^T (g(t)+f(t))dW_t\right)^2 - \mathbb{E}\left(\int_0^T (g(t)-f(t))dW_t\right)^2 \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}(g(t)+f(t))^2 dt\right) - \left(\int_0^T \mathbb{E}(g(t)-f(t))^2 dt\right) \quad \text{esto se sigu} \\ &= \left(\int_0^T (\mathbb{E}[(g(t)+f(t))^2] - \mathbb{E}[(g(t)-f(t))^2])dt\right) \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}[(g(t)+f(t))^2 - (g(t)-f(t))^2]dt\right) \quad \text{usando nuevamente q} \\ &= 4\left(\int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)]dt\right) \end{aligned}$$

De aquí, se concluye que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)\right] = \left(\int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)]dt\right)$$

□

Exercise 10.4. Usando la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), deduzca que,

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3}W(T)^3 - \int_0^T W(t)dt.$$

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. Primero, observemos que,

$$3W(t_i)^2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = W(t_{i+1})^3 - \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - 3\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i) - W(t_{i-1})^3,$$

entonces de la ecuación (Equation 9.1) y la relación anterior, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)^2 dW(t) &\sim \sum_{i=0}^{L} W(t_i)^2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L} [W(t_{i+1})^3 - W(t_{i-1})^3] - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - \sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3}(W(T)^3 - W(t_0)^3) - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - \sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3}W(T)^3 - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - \sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \to 0$ en L^2.
En efecto, calculemos la media de la variación cuadrática. Del Teorema Multinomial, resulta

$$\frac{1}{9}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\right)^2\right] = \frac{1}{9}\sum_{i=0}^{L} \mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^6\right] + \frac{2}{9}\sum_{i \neq j}^{L} \mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \left(W(t_{j+1}) - W\right.\right.$$

notemos que, como $i \neq j$, sin perdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3 \middle| \mathcal{F}_j\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3 \middle| \mathcal{F}_j\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\right] \mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right]
\end{aligned}$$

dado que de la tarea 5 se demostro que, $\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\right] = 0$, de la última igualdad ses concluye que,

$$\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right] = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{9}\sum_{i=0}^{L} \mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right] = 0.$$

Por otro lado, también de la tarea 5, sabemos que

$$\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^6\right]=15\left(t_{i+1}-t_i\right)^3,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}\sum_{i=0}^{L}E\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^6\right] &= \frac{5}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(t_{i+1}-t_i\right)^3\\ &\leq \frac{5}{3}\|\Delta_L\|^2\sum_{i=0}^{L}\left(t_{i+1}-t_i\right)\\ &\leq \frac{5}{3}\|\Delta_L\|^2 L \to 0, \quad \text{cuando, } \|\Delta_L\|\to 0.\end{aligned}$$

Con todo lo anterior se concluye que,

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^3\to 0.$$

Ahora veamos que,

$$\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2 W(t_i)\to\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right) \text{ en } L^2$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2 W(t_i)-\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-(t_{i+1}\right.\right.\right.\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L}W(t_i)^2\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-(t_{i+1}\right.\right.\\ &= \sum_{i=0}^{L}\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-(t_{i+1}\right.\right.\end{aligned}$$

para $i<j$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W(t_i)W(t_j)\left(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)\left(\left(W(t_{j+1})-W(t_j)\right)^2-\left(t_{j+1}-t_j\right)\right)\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[W(t_i)W(t_j\right.\right.\\ &= \mathbb{E}\left\{W(t_i)W(t_j)\left(\right.\right.\\ &= \mathbb{E}\left\{W(t_i)W(t_j)\left(\right.\right.\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{L} W(t_i)W(t_j)\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]\left[\left(W(t_{j+1})-W(t_j)\right)^2-\left(t_{j+1}-t_j\right)\right]=0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)^2\right]\middle|\mathcal{F}_i\right\}\\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4-2\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)\right.\right.\right.\\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4-2W(t_i)^2\left(W(t_{i+1})-W\right.\right.\right.\\
&= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4\middle|\mathcal{F}_i\right]-2\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(W(t\right.\right.\right.\\
&= \mathbb{E}\left\{W(t_i)^2\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4|\mathcal{F}_i\right]-2W(t_i)^2\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i-}\right.\right.\right.\\
&= \mathbb{E}\left\{W(t_i)^2 3(t_{i+1}-t_i)^2-2W(t_i)^2(t_{i+1}-t_i)^2+W(t_i)^2\left(t_{i+}\right.\right.\\
&= 3t_i(t_{i+1}-t_i)^2-2t_i(t_{i+1}-t_i)^2+t_i(t_{i+1}-t_i)^2\\
&= 2t_i(t_{i+1}-t_i)^2,
\end{aligned}$$

de esta última igualdad se sigue que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L}W(t_i)^2\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]^2\right] &= \sum_{i=0}^{L}2t_i(t_{i+1}-t_i)^2\\
&\leq 2L\|\Delta_L\|\sum_{i=0}^{L}t_{i+1}-t_i\\
&= 2\|\Delta_L\|L^2\to 0, \quad \text{cuando } \|\Delta_L\|\to 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2W(t_i)\to\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right).$$

Así, sustituyendo todo lo anterior, resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)^2dW(t) &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{3}W(T)^3-\lim_{L\to\infty}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2W(t_i)\\
&= \frac{1}{3}W(T)^3-\int_0^T W(t)dt
\end{aligned}$$

$\square$

Exercise 10.5. Verifique que la isometría de Itô, dada por

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T h(t)dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t)^2 dt\right], \tag{10.5}$$

se tiene cuando $h(t) := 1$.

Proof. Del ejercicio Exercise 11.1 con $h(t) = 1$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T h(t)dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T 1dW(t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T 1dW_t\right)\left(\int_0^T 1dW_t\right)\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}[1]dt \\
&= \int_0^T dt \\
&= T.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T h(t)^2 dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T 1^2 dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[T\right] \\
&= T
\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T dt\right],$$

y con esto se concluye que, para $h(t) = 1$ se satisface que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T h(t)dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t)^2 dt\right].$$

□

11 Tarea 9

El siguiente código calcula la aproximación de la Integral de Ito. Con $T = 1$, $L = 2^13$ correspondiente al error de $\mathcal{O}(10^{-3})$

```
import numpy as np
T = 1.0
L = 2**13
dt = T / L
dW = np.sqrt(dt) * np.random.normal(size=L)
W = np.zeros(L + 1)
W[1 :] = np.cumsum(dW)
ito_integral = np.sum(np.multiply(W[0: -1], dW))
err = np.abs(ito_integral - 0.5 * (W[-1] ** 2 - T))
```

Adapta este código para la Integral de Stratonovich correspondiente y evalue el error.

Escoja un integrando y computacionalmente verifique la Isometría de Ito de la Ecuación (Equation 10.5).

Exercise 11.1. Sea τ un tiempo de paro. Prueba que $W(t+\tau) - W(\tau)$ es un movimiento browniano.

Proof. Definamos a,

$$W_\tau(t) = W(t+\tau) - W(\tau),$$

Claramente $W_\tau(0) = 0$, ya que:

$$W_\tau(0) = W(\tau) - W(\tau) = 0.$$

Sea $s \leq t$, observemos que

$$\begin{aligned} W_\tau(t) - W_\tau(s) &= W(t+\tau) - W(\tau) - [W(s+\tau) - W(\tau)] \\ &= W(t+\tau) - W(s+\tau), \end{aligned}$$

Listing 11.1 `Aproximando la integral de Stratonovich.py`

Solution.

```
import numpy as np

def bw(t, n):
    dt = t / (n - 1)
    dw = np.sqrt(dt) * np.random.standard_normal(n - 1)
    w = np.zeros(n)
    w[1:] = dw.cumsum()
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

t_f = 1
n_p = 2** 13
t, wt = bw(t_f, n_p)
y = 0.5 * np.sqrt(t[1] - t[0]) * np.random.standard_normal(n_p)
stratonovich = [(0.5 * (wt[i + 1] + wt[i]) + y[i])* (wt[i + 1] - wt[i]) for i in range(n_p
stratonovich = np.array(stratonovich).sum()
print(np.abs(stratonovich - 0.5 * wt[-1] ** 2))
```

dado que $W\left(t+\tau\right)-W\left(s+\tau\right)\sim N\left(0,t-s\right)$ entonces de la última igualdad se sigue que

$$W_{\tau}\left(t\right)-W_{\tau}\left(s\right)\sim N\left(0,t-s\right).$$

De aquí se concluye que $W_{\tau}(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios.
Por lo tanto, con todo lo anterior se concluye que $W_{\tau}(t)$ es un Movimiento Browniano.

□

Exercise 11.2. Sea $W_1\left(t\right),W_2\left(t\right)$ movimientos brownianos independientes con punto inicial $\left(W_1\left(0\right),W_2\left(0\right)\right)\neq(0,0)$.
Defina $X_t:=\ln\left(W_1^2\left(t\right)+W_2^2\left(t\right)\right).$

(a) Demuestre que X_t es una martingala local.
(b) Demuestre que $E\left|X_t\right|<\infty$ para cada $t>0$.
(c) Demuestre que X_t no es una martingala.

Proof. (a) Consideremos a,

$$\tau_n=\inf_t\left\{X_t=n\right\}$$

Dado que X_t no es acotada, se tiene que,

$$\tau_n\to\infty,\ \text{cuando } n\to\infty,\forall n.$$

Ahora probaremos que $X_{\min\{t,\tau_n\}}$ es una martingala.
Primero veamos que es adaptado a la filtración:
Si $\tau_n \geq t$ lo tenemos por construcción, ya que, en este caso

$$X_{\min\{t,\tau_n\}} = X_t,$$

y X_t si es adaptado con respecto a la filtración. Ahora si $\tau_n < t$, tenemos que,

$$X_{\min\{t,\tau_n\}} = X_{\tau_n} = n.$$

Además, observemos que,

$$\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} = n\right] \subset [\tau_n < t],$$

y dado que τ_n es tiempo de paro, se cumple que $[\tau_n < t] \in \mathcal{F}_t$. Por lo tanto, de la última relación se sigue que, $X_{\min\{t,\tau_n\}}$ es adaptado a la filtración.
Ahora solo nos queda probar que es una martingala. Sea $s < t$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} 1_{[t<\tau_n]} \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} 1_{[\tau_n \leq t]} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[X_t 1_{[t<\tau_n]} \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq t]} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[X_s 1_{[s<\tau_n]} \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s 1_{[s<\tau_n]} + X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]} \\
&= X_{\min\{s,\tau_n\}},
\end{aligned}$$

y con esto se concluye que $X_{\min\{t,\tau_n\}}$ es una martingala.

(b) Observemos que, como $X_t = \ln\left(W_1^2(t) + W_2^2(t)\right)$, entonces

$$\exp(X_t) = W_1^2(t) + W_2^2(t).$$

Asi,

$$\begin{aligned}
E\left[\exp(X_t)\right] &= E\left[W_1^2(t)\right] + E\left[W_2^2(t)\right] \\
&= 2t,
\end{aligned}$$

dado que, $X_t \geq 0, \forall t$ y $X_t \leq \exp(X_t)$, entonces

$$E[X_t] \leq 2t < \infty, \forall t$$

(c) Primero recordemos lo siguiente:
Si X_t es martingala entonces $E[X_t]$ es constante, entonces este resultado nos diría que si $E[X_t]$

no es constante, X_t no es martingala.
Dado lo anterior, supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$E\left[X_t\right] = c, \forall t \Longrightarrow E\left[\ln\left(W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right)\right)\right] = c.$$

Así,

$$\int_0^{\infty} \ln\left(W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right)\right) \mathrm{d}\mathcal{P} = c,$$

de aquí se tendría que la integral es finita. Entonces

$$X_t \to 0, t \to \infty, \text{ c.s.}$$

De esto último y de la continuidad de la exponencial, se concluye que

$$W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right) \to 1, t \to \infty, \text{c.s}$$

Pero de lo demostrado del inciso anterior, sabemos que,

$$E\left[W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right)\right] = 2t,$$

la cual converge a infinito, cuando $t \to \infty$. Así, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $E\left[X_t\right]$ no es constante, y se siguiría que X_t no puede ser martingala.

$\square$

Listing 11.2 `simulacion de la isometria de Ito con h(t)=t.py`

Solution

```
import numpy as np
import aux_functions as aux

n = 500
n2 = 500
time=1
integral1 = time**3/3

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w


E_If = 0
for j in range(n2):
   I_fn = 0
   t,w = strong_brownian(time, n)
   for i in range(n-1):
      I_fi= t[i]*(w[i+1]-w[i])
      I_fn += I_fi
   I_f = I_fn ** 2
   E_If += I_f

print(n2 ** (-1) * E_If)
print(integral1)
```

12 Tarea 10

Considere la ecuación diferencial estocástica lineal con ruido multiplicativo.

$$\mathrm{d}Y\left(t\right)=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)Y\left(t\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W\left(t\right) \tag{12.1}$$

Usando la función

$$u\left(t,x\right)=y_{0}\exp\left(\mu t+\sigma x\right),$$

y la diferencial

$$dS(t)=dW(t)$$

Aplique la Fórmula de Ito a la función

$$du(t,S_t).$$

Use esta relación para demostrar que

$$Y\left(t\right)=Y\left(0\right)\exp\left(\mu t+\sigma W\left(t\right)\right), \tag{12.2}$$

resuelve (Equation 12.1). Es decir,

$$dY(t)=du(t,S_t)=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)u(t,S_t)dt+\sigma u(t,S_t)dW_t$$

Solution. Consideremos

$$u\left(t,x\right)=y_{0}\exp\left(\mu t+\sigma x\right)$$

calculando las derivadas parciales, resulta

$$\begin{aligned}\partial_t u&=\mu u\\ \partial_x u&=\sigma u\\ \partial_{xx}&=\sigma^2 u.\end{aligned}$$

Además sabemos que,

$$\mathrm{d}S_t=\mathrm{d}W_t$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u\left(t, Y_t\right) &= \mu u \mathrm{d}t + \sigma u \mathrm{dY}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 u \left(\mathrm{dY}_t\right)^2 \\
&= \mu u \mathrm{d}t + \sigma u \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\sigma^2 u \mathrm{d}t \\
&= \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) u\mathrm{dt} + \ \mathrm{ud}W_t,
\end{aligned}
$$

así,

$$
\begin{aligned}
Y_t &= u\left(t, Y_t\right) \\
&= Y\left(0\right) \exp\left(\mu t + \sigma W_t\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, Y_t resuelve (Equation 12.1).

Use el hecho de que la relación en la ecuación en (Equation 12.2) resulve la ecuación (Equation 12.1), para confirmar que

$$
Y\left(t\right) = Y\left(0\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W\left(t\right)\right),
$$

resuelve,

$$
\mathrm{d}Y\left(t\right) = \mu Y\left(t\right) \mathrm{d}t + \sigma Y\left(t\right) \mathrm{d}W\left(t\right)
$$

Solution. Consideremos

$$
u\left(t, x\right) = y_0 \exp\left(q_1 t + q_2 x\right)
$$

calculando las parciales, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\partial_t u &= q_1 u \\
\partial_x u &= q_2 u \\
\partial_{xx} &= q_2^2 u
\end{aligned}
$$

nuevamente, usando que,

$$
\mathrm{d}S_t = \mathrm{d}W_t
$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u\left(t, Y_t\right) &= q_1 u \mathrm{d}t + q_2 u \mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2} q_2^2 u \left(\mathrm{d}Y_t\right)^2 \\
&= q_1 u \mathrm{d}t + q_2 u \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2} q_2^2 u \mathrm{d}t \\
&= \left(q_1 + \frac{1}{2} q_2^2\right) u \mathrm{d}t + q_2 u \mathrm{d}W_t,
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
q_2 &= \sigma \\
q_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 &= \mu \Longrightarrow q_1 = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2,
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de lo anterior se sigue que,

$$Y_t = Y\left(0\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$\mathrm{d}S\left(t\right) = \left(a_1 \mathrm{S}\left(t\right) + a_2\right) \mathrm{d}t + g\left(S\left(t\right)\right) \mathrm{d}W\left(t\right),$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier función global de Lipschitz con crecimiento lineal, y a_1, a_2 son dos constantes diferentes de cero. Use la forma integral de la ecuación diferencial estocástica, la propiedad de martingala de la integral de Ito y la notación

$$m\left(t\right) = E\left[X_t\right],$$

para deducir que

$$m\left(t\right) - m\left(0\right) = a_1 \int_0^t m\left(s\right) \mathrm{d}s + a_2 t$$

Usando que $m\left(t\right)$ es la solución

$$\frac{\mathrm{d}m\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = a_1 m\left(t\right) + a_2, m\left(0\right) = E\left[X_0\right]$$

Finalmente, muestre que

$$E\left[X\left(t\right)\right] = -\frac{a_2}{a_1} + \left(E\left[X\left(0\right)\right] + \frac{a_2}{a_1}\right) \exp\left(a_1 t\right)$$

Solution. De la formula Integral, se tiene que

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + \int_0^t (a_1 \mathrm{S}(t) + a_2)\,\mathrm{d}t + \int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s) \\ &= S(0) + a_1 \int_0^t \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t + \int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s), \end{aligned}$$

calculando esperanza, resulta

$$m(t) = m(0) + a_1 \int_0^t m(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t + \int_0^t E[g(S(s))]\,\mathrm{d}B(s)$$

entonces

$$m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t + E\left[\int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}B(s)\right]$$

Dado que, g es de lipschitz y de crecimiento lineal, y además $S \in L^2_{\mathrm{ad}}$, se sigue que, $g(S) \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega_a^b)$, por lo tanto existe una constante c tal que

$$E\left[\int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s)\right] = c, \ \forall t$$

Por otro lado, sabemos que

$$\int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n g(S(t_{i-1}))(B_i - B_{i-1}),$$

además, para cada i

$$\begin{aligned} E[g(S(t_{i-1}))(B_i - B_{i-1})] &= E[E[g(S(t_{i-1}))(B_i - B_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= E[g(S(t_{i-1}))E[(B_i - B_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, de los hechos anteriores, se tiene que

$$m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t,$$

ahora, considere su forma diferencial.

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = a_1 m(t) + a_2,$$

la cual es una ecuación diferencial lineal. Ahora resolveremos esta ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}m\left(t\right)}{\mathrm{d}t}-a_1m\left(t\right)=a_2,$$

definamos

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\int -a_1\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-a_1t}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[um\left(t\right)\right] &= a_2u \\ u\left(t\right)m\left(t\right) &= a_2\int u\left(t\right)\mathrm{d}t \\ m\left(t\right) &= \frac{a_2}{u\left(t\right)}\int u\left(t\right)\mathrm{d}t \\ &= a_2e^{a_1t}\int e^{-a_1t}\mathrm{d}t \\ &= -a_2e^{a_1t}\left[-\frac{1}{a_1}e^{-a_1t}+C\right] \\ m\left(t\right) &= -\frac{a_2}{a_1}-Ca_2e^{a_1t}, \end{aligned}$$

de la condición inicial se tiene que,.

$$\begin{aligned} m\left(0\right) &= -\frac{a_2}{a_1}-Ca_2 \\ \Rightarrow C &= -\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}m\left(0\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E\left[X_t\right]=-\frac{a_2}{a_1}-\left[-\frac{a_2}{a_1}-E\left[X_0\right]\right]\exp\left(a_1t\right)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$\mathrm{d}S\left(t\right)=\left(\alpha\left(t\right)\mathrm{S}\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\beta\left(t\right)S\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right), \quad S\left(0\right)=s_0,$$

con s_0 constante y funciones α,β integrables. Use la formula de Ito con la fórmula

$$u\left(t,x\right)=\ln\left(\frac{x}{S_0}\right),$$

para deducir que

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \left[\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)\right]\mathrm{d}s + \int_0^t \beta(s)\,\mathrm{d}W(s)\right)$$

Solution. Calculemos las parciales de u.

$$\begin{aligned} u_t &= 0 \\ u_x &= \frac{1}{x} \\ u_{xx} &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(t, S_t) &= \alpha(t)\,\mathrm{d}t + \beta(t)\,\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2S_t^2}(dS_t)^2 \\ &= \alpha(t)\,\mathrm{d}t + \beta(t)\,\mathrm{d}W(t) - \frac{1}{2S_t^2}\beta^2 S_t^2\mathrm{d}t \\ &= \left[\alpha(t) - \frac{\beta^2(t)}{2}\right]\mathrm{d}t + \beta(t)\,\mathrm{d}W(t), \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= \int_0^t \left[\alpha(t) - \frac{\beta^2(t)}{2}\right]\mathrm{d}t + \int_0^t \beta(t)\,\mathrm{d}W(t) \\ S_t &= S_0\exp\left(\int_0^t \left[\alpha(t) - \frac{\beta^2(t)}{2}\right]\mathrm{d}t + \int_0^t \beta(t)\,\mathrm{d}W(t)\right) \end{aligned}$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$\mathrm{d}S(t) = (\alpha(t)\,\mathrm{S}(t))\,\mathrm{d}t + \beta(t)\,S(t)\,\mathrm{d}W(t), S(0) = s_0,$$

con constantes s_0 y funciones α, β integrables. Considere

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \sin(t) \\ \beta(t) &= \frac{t}{1+t} \\ s_0 &= 1, \end{aligned}$$

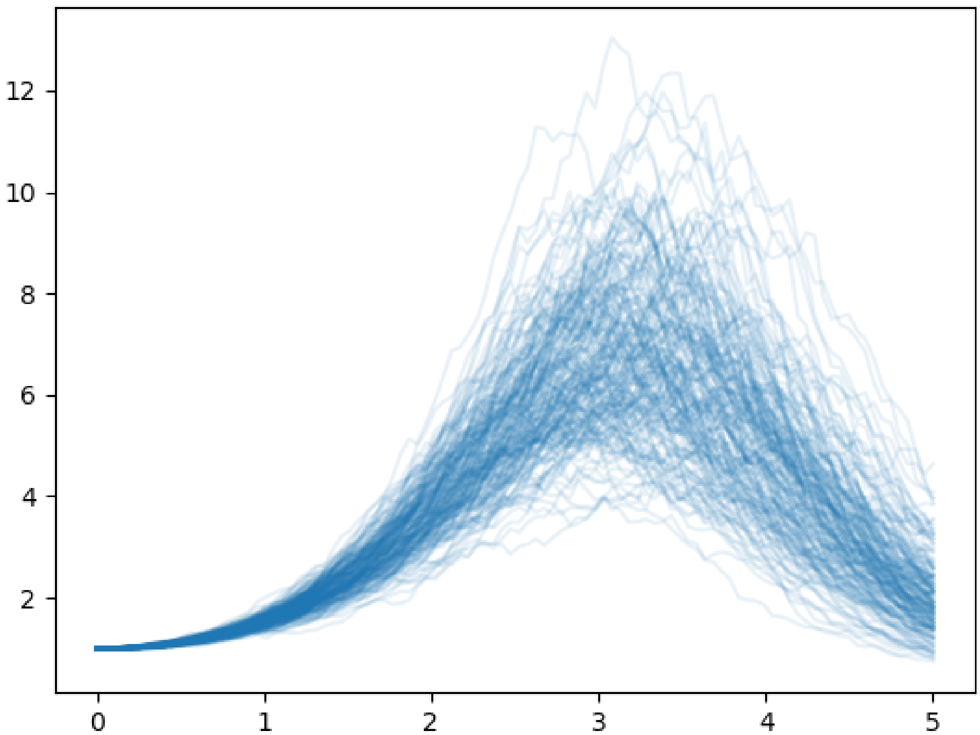
sobre el intervalo $[0, 5]$.

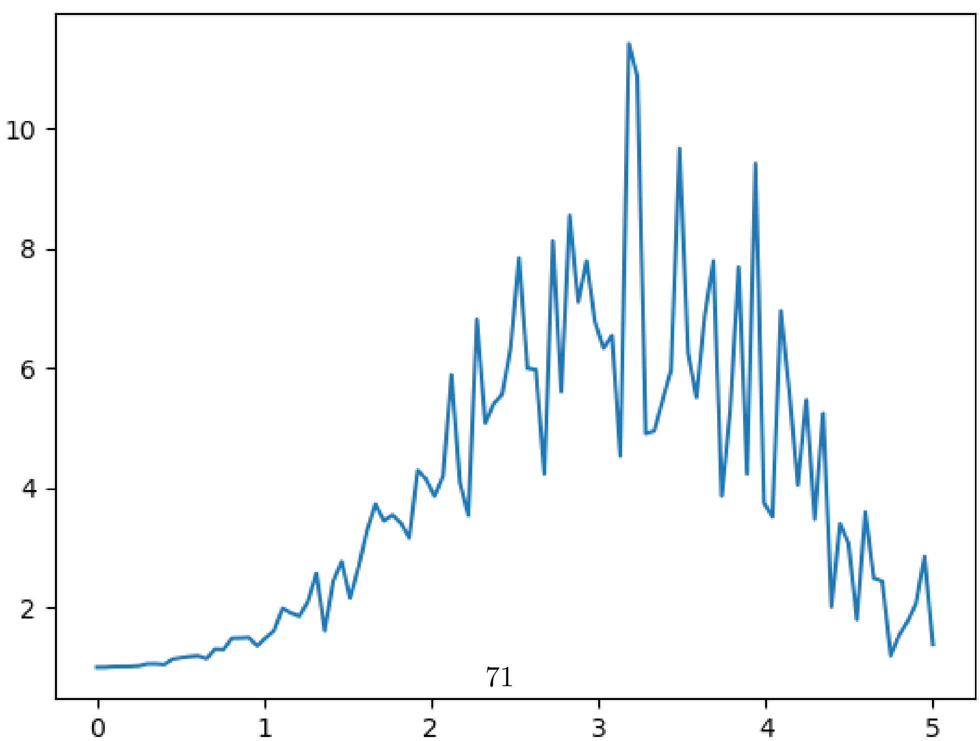
Usando el acercamiento apropiado, la salida del código reproduce 200 realizaciones de la solución con el proceso de Euler-Maruyama.

Adapta el código para obtener la media de la solución de 1000 realizaciones y comparalo con la media de la solución de la forma diferencial, usando los mismos parámetros. Ilustra la diferencia con un log-plot de

$$\ln\left|S(t) - \tilde{S}(t)\right|,$$

donde S es la solución de Euler y $\tilde{S}$ es la solución de la diferencial.


12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5


10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5

Listing 12.1 `comparacion de Euler-Maruyama con la version analitica.py`

Solution

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w


def alpha(t):
    y = np.sin(t)
    return y
def beta(t):
    y = t / (1.0 + t)
    return y

def drift(t, x):
    a = alpha(t) * x
    return a

def diffusion(t, x):
    b = beta(t) * x
    return b

samples = 200
sigma = 2 ** (-2)

n_p = 100
T = 5.0
x_0 = 1.0

def get_em_solution(x_0, T, N, sigma):
    x_t = np.zeros(N)
    x_t[0] = x_0
    dt = T / N
    t, W = strong_brownian(T, N)
    for i in np.arange(N - 1):
        w_inc = W[i + 1] - W[i]
        f = drift(t[i], x_t[i])
        g = diffusion(t[i], x_t[i])
        x_t[i + 1] = x_t[i] + f * dt + sigma * g * w_inc  # Importante la sigma.
    return t, x_t

fig, ax = plt.subplots()
df = []
for k in np.arange(samples):
```

13 Proyecto Final

13.1 objetivo:

Nuestra referencia principal sera el articulo “Analytic Solution of a Stochastic Richards Equation driven by Brownian motion” para encontrar la solución de la ecuación de Richard, deducir la forma y condiciones para obtener una distribución estacionaria y también contrastar el comportamiento de la realización de la solución respecto a su contraparte determinista.

13.2 Introducción:

Uno de los modelos más famosos de la dinámica de poblaciones es la ecuación logística que se propuso por primera vez por P F Verhulst en 1838. La ecuación logística, también conocida como ecuación de Verhulst, viene dada por la ecuación diferencial ordinaria

$$dN(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)dt$$

donde $N(t)$ es el tamaño de la población en el momento t, r es la tasa de crecimiento intrínseco y $K > 0$ es la capacidad de carga/nivel de saturación.
En 1959, FJ Richard en propuso la siguiente modificación de la ecuación logística para modelar el crecimiento de poblaciones biológicas:

$$dN(t) = rN(t)\left(1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\alpha}\right)dt, \tag{13.1}$$

con la condición inicial $N(0) = N_0$, se asume que $0 < N_0 < K$ y $\alpha > 0$ es el exponente de la desviación de la curva logística estándar.
Ahora construimos el modelo estocástico de Richard insertando el término de ruido multiplicativo en el modelo determinista (Equation 13.1) para obtener una ecuación aleatoria. Escribimos N_t en lugar de $N(t)$ para enfatizar que N_t, ya no es una función determinista sino una variable aleatoria, el ruido como el ruido blanco gaussiano dB_t y obtenemos la ecuación diferencial estocástica en el sentido de Itô

$$dN(t) = rN(t)\left(1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\alpha}\right)dt + \sigma N_t dB_t \tag{13.2}$$

donde σ es el coeficiente de difusión que mide el tamaño de la fluctuación del ruido. Para resolver la ecuación diferencial estocástica (Equation 13.2) necesitamos algunos resultados del cálculo estocástico de Itô.
Primero, recordemos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se llama adaptado si existe un espacio de probabilidad filtrado $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ tal que, para cada $t \geq 0$ la variable aleatoria X_t está definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ así como $\mathcal{F}_t$-medible. Un proceso estocástico adaptado $(X_t)_{t\in[0,T]}$ se llama proceso de Itô si se puede escribir de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\,(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\,(s)\,\mathrm{d}B_s,\; X_0 = x_0,\; t \in [0, T],$$

donde b y σ son procesos estocásticos adaptados que satisfacen $\int_0^t |b(s)|ds < \infty$ y $\int_0^t \sigma(s)^2 ds < \infty$. El proceso $\langle X\rangle_t := \langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma(s)^2 ds$ es llamada la variación cuadrática de X.

13.3 Desarrollo:

Para encontrar la solucion de la ecuación diferencial estocástica de Richard (Equation 13.2) primero necesitamos los siguientes dos Teoremas.

Theorem 13.1. *Si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ es un proceso de Itô y $F \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R})$, entonces*

$$F(T, X_t) - F(0, X_0) = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X\rangle_t.$$

Proof. Sea X_t un proceso de Itô dado por

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\,(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\,(s)\,\mathrm{d}B_s,\; X_0 = x_0,\; t \in [0, T]. \tag{13.3}$$

Sea $F\,(t, x)$, dado que $F \in C^{1,2}$ entonces $F\,(t, X_t)$ es también un proceso de Itô.
Usaremos la serie de Taylor y la tabla de Itô para encontrar la formula de Itô del proceso F.
Primero recordemos que la serie de Taylor para dos variables, esta dada por,

$$\begin{aligned} F\,(t, x) \;\;=\;\; & F\,(t_0, x_0) + \partial_t F(t_0, x_0)\,(t - t_0) + \partial_x F(t_0, x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\partial^2_{xx} F\,(t_0, x_0)\,(x - x_0)^2\right. \\ & \left. + \partial^2_{xt} F\,(t_0, x_0)\,(t - t_0)\,(x - x_0) + \partial^2_{tx} F\,(t_0, x_0)\,(x - x_0)\,(t - t_0) + \partial^2_{tt} F\,(t_0, x_0)\,(t - t_0)^2\right). \end{aligned}$$

Sea $\Delta_n = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, entonces

$$
\begin{aligned}
F(T, X_t) - F(0, X_0) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right) \\
& + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1}) \left(X_{t_i} - \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})
\end{aligned}
$$

Por otro lado, dado que, $(t_i - t_{i-1}) = dt_i$, $(t_i - t_{i-1})\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right) = dt_i dX_{t_i}$, y $\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right) = (dX_i)^2$, de la tabla de Itô y de la ecuación (Equation 13.3), resulta para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)^2 = \sigma^2(t_i) dt_i,$$

$$(t_i - t_{i-1}) \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right) = 0,$$

$$\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right)(t_i - t_{i-1}) = 0,$$

$$(t_i - t_{i-1})^2 = 0.$$

Sustituyendo las relaciones anteriores se obtiene,

$$
\begin{aligned}
F(T, X_t) - F(0, X_0) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) dt_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) dX_{t_i} \\
& + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \sigma^2(t_i) dt_i.
\end{aligned}
$$

Haciendo $\|\Delta_n\| \to 0$, se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) dt_i \to \int_0^T \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \sigma^2(t_i) dt_i \to \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \sigma^2(t) dt$$

y del Teorema 5.3.3 del Kuo,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) dX_{t_i} \to \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t.$$

Entonces de todo lo anterior se sigue que,

$$F\left(T, X_t\right)-F\left(0, X_0\right)=\int_0^T \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt+\int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t+\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) \sigma^2(t) dt .$$

Además como $\sigma^2 dt=d\langle X\rangle_t$, se concluye que

$$F\left(T, X_t\right)-F\left(0, X_0\right)=\int_0^T \frac{\partial F}{\partial t}(t, X_t) dt+\int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(t, X_t) dX_t+\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X\rangle_t$$

■

□

Una ecuación diferencial estocástica lineal es una ecuación de la forma

$$dX_t=\left(a_1(t) X_t+a_2(t)\right) dt+\left(b_1(t) X_t+b_2(t)\right) dB_t . \quad X_0=x_0, \tag{13.4}$$

donde a_i y b_i, $i=1,2$ son funciones deterministas, acotadas en todo intervalo finito $[0, T]$.

Theorem 13.2. *El proceso estocástico*

$$X_t=\Phi_t^{-1}\left(x_0+\int_0^t\left(a_2(s)-b_1(s) b_2(s)\right) \Phi_s ds+\int_0^t b_2(s) \Phi_s dB_s\right), \quad t \geq 0,$$

donde $\Phi_t := e^{-\left(\int_0^t\left(a_1(s)-\frac{1}{2} b_1^2(s)\right) ds+\int_0^t b_1(s) dB_s\right)}$ *es la solución de la ecuación lineal diferencial estocástica (Equation 13.4).*

Proof. Primero, necesitamos encontrar $d(\Phi_t X_t)$. Para esto, recordemos de la sección 7.5 del Kuo H-H, se tiene que para dos procesos de Itô X_t, Y_t se satisface que

$$d(X_t Y_t)=Y_t dX_t+X_t dY_t+dX_t dY_t .$$

La igualdad anterior se llama la fórmula del producto de Itô.
Por la fórmula del producto de Itô, aplicada para Φ_t y X_t tenemos que

$$d(\Phi_t X_t)=\Phi_t dX_t+X_t d\Phi_t+(d\Phi_t)(dX_t). \tag{13.5}$$

Sea $Z_t=\int_0^t\left(a_1(s)-\frac{1}{2} b_1^2(s)\right) ds+\int_0^t b_1(s) dB_s$, entonces $\Phi_t=e^{-Z_t}$, usando la fórmula de Itô para encontrar $d\Phi_t$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
d\Phi_t &= d(e^{-Z_t}) \\
&= -e^{-Z_t} dZ_t - \frac{1}{2}\left(de^{-Z_t}\right)(dZ_t) \\
&= -\Phi_t dZ_t + \frac{1}{2} e^{-Z_t}(dZ_t)^2 \\
&= \Phi_t \left(-a_1(t)dt + \frac{1}{2} b_1^2(t)dt - b_1(t)dB_t\right) + \frac{1}{2}\Phi_t b_1^2(t)dt \\
&= \Phi_t \left(-a_1(t)dt + b_1^2(t)dt - b_1(t)dB_t\right)
\end{aligned}
$$

De esta ultima igualdad, la ecuacion (Equation 13.4) y de la tabla de Itô, se sigue que

$$
\begin{aligned}
(d\Phi_t)(dX_t) &= \left(\Phi_t \left(-a_1(t)d + b_1^2(t)dt - b_1(t)dB_t\right)\right)\left(\left(a_1(t)X_t + a_2(t)\right)dt + \left(b_1(t)X_t + b_2(t)\right)dB_t\right) \\
&= -\Phi_t b_1^2(t)X_t dt - \Phi_t b_1(t)b_2(t)dt \\
&= -\Phi_t b_1(t)\{b_1(t)X_t + b_2(t)\}dt
\end{aligned}
$$

sustituyendo el valor de $d\Phi_t$ y el de $(d\Phi_t)(dX_t)$ en la ecuación (Equation 13.5) resulta

$$
\begin{aligned}
d(\Phi_t X_t) &= \Phi_t dX_t + X_t \Phi_t \left(-a_1(t)dt + b_1^2(t)dt - b_1(t)dB_t\right) - \Phi_t b_1(t)\{b_1(t)X_t + b_2(t)\}dt \\
&= \Phi_t\{dX_t - a_1(t)X_t dt - b_1(t)X_t dB_t - b_2(t)b_1(t)d(t)\},
\end{aligned}
$$

sustituyendo la ecuación (Equation 13.4) en la igualdad anterior resulta,

$$
d(\Phi_t X_t) = \Phi_t\{b_2(t)dB(t) + a_2(t)dt - b_2(t)b_1(t)dt\},
$$

entonces se tiene que,

$$
\Phi_t X_t = x_0 + \int_0^t \Phi_s b_2(s)dB(s) + \int_0^t \Phi_s(a_2(s) - b_2(s)b_1(s))ds
$$

Al dividir ambos lados por Φ_t obtenemos la solución X_t de la Ecuación (Equation 13.4),

$$
X_t = \Phi_t^{-1}\left(x_0 + \int_0^t \Phi_s b_2(s)dB(s) + \int_0^t \Phi_s(a_2(s) - b_2(s)b_1(s))ds\right)
$$

■

□

Solución exacta de la ecuación estocástica de Richards.

$$
dN_t = rN_t\left(1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^{\alpha}\right)dt + \sigma N_t dB_t \tag{13.6}
$$

Theorem 13.3. *La solución de la ecuación estocástica de Richards (Equation 13.6) viene dada por*

$$N_t = N_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)\left(1 + \left(\frac{N_0}{K}\right)^{\alpha} r\alpha \int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right)ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Proof. Sea $X_t := \frac{N_t}{K}$. Entonces de la ecuacion (Equation 13.6), obtenemos $dX_t = rX_t\left(1 - X_t^{\alpha}\right)dt + \sigma X_t dB_t$ con condición inicial $X_0 = \frac{N_0}{K}$. Sea $F(t,x) := x^{-\alpha}$ entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}},\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}} \text{ y } \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

La variación cuadrática de X_t esta dada por $\langle X\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 X_s^2 ds$ lo que significa $d\langle X\rangle_t = \sigma^2 X_t^2 dt$. Usando la notación $Y_t := X_t^{-\alpha}$ y aplicando la formula de Itô Teorema Theorem 13.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
dY_t &= -\frac{\alpha}{X_t^{\alpha+1}}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{X_t^{\alpha+2}}d\langle X\rangle_t \\
&= -\frac{\alpha}{X_t^{\alpha+1}}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{X_t^{\alpha+2}}\sigma^2 X_t^2 dt \\
&= -\frac{\alpha}{X_t^{\alpha+1}}\left(rX_t\left(1 - X_t^{\alpha}\right)dt + \sigma X_t dB_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{X_t^{\alpha}}\sigma^2 dt \\
&= -\frac{\alpha r\left(1 - X_t^{\alpha}\right)dt}{X_t^{\alpha}} - \frac{\sigma\alpha dB_t}{X_t^{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{X_t^{\alpha}}\sigma^2 dt \\
&= -\alpha r Y_t dt + \alpha r dt - \sigma\alpha Y_t dB_t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)Y_t\sigma^2 dt \\
&= \left(\left(\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\sigma^2 - r\alpha\right)Y_t + r\alpha\right)dt - \sigma\alpha Y_t dB_t.
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación diferencial estocástica lineal con factor integrante, donde,

$$a_1(t) = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\sigma^2 - r\alpha,\ a_2(t) = r\alpha,\ b_1(t) = -\sigma\alpha,\ b_2(t) = 0.$$

entonces es una ecuación del tipo de (Equation 13.4), con

$$\begin{aligned}\Phi_t &= \exp\left(-\left(\int_0^t \left(\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\sigma^2 - r\alpha\right) ds - \frac{1}{2}\int_0^t (-\sigma\alpha)^2 ds - \int_0^t \sigma\alpha dB_s\right)\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\sigma^2 ds + \int_0^t r\alpha ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\alpha^2 ds + \int_0^t \sigma\alpha dB_s\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2\sigma^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha\sigma^2 ds + \int_0^t r\alpha ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\alpha^2 ds + \int_0^t \sigma\alpha dB_s\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha\sigma^2 ds + \int_0^t r\alpha ds + \int_0^t \sigma\alpha dB_s\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 t + r\alpha t + \sigma\alpha B_t\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, según el Teorema Theorem 13.2, la solución de la ecuación diferencial estocástica lineal en Y_t es

$$\begin{aligned}Y_t &= \Phi_t^{-1}\left(Y_0 + \int_0^t r\alpha\Phi_s ds\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 t - r\alpha t - \sigma\alpha B_t\right)\left(Y_0 + \int_0^t r\alpha \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 s + r\alpha s + \sigma\alpha B_s\right) ds\right) \\ &= \exp\left(\alpha\left(\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)t - \sigma B_t\right)\right)\left(Y_0 + r\alpha\int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right) ds\right).\end{aligned}$$

Reescribiendo la última expresión en términos de X_t se obtiene

$$X_t = \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)\left(\left(\frac{1}{X_0}\right)^{\alpha} + r\alpha\int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right) ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Finalmente, la solución de (Equation 13.6) viene dada por

$$\begin{aligned}X_t &= \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)\left(\left(\frac{1}{X_0}\right)^{\alpha} + \left(\frac{X_0}{X_0}\right)^{\alpha} r\alpha\int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right) ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)\left(\frac{1}{X_0}\right)^{-1}\left(1 + (X_0)^{\alpha} r\alpha\int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right) ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)\left(\frac{N_0}{K}\right)\left(1 + \left(\frac{N_0}{K}\right)^{\alpha} r\alpha\int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right) ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$N_t = N_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right)\left(1 + \left(\frac{N_0}{K}\right)^{\alpha} r\alpha \int_0^t \exp\left(\alpha\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s + \sigma B_s\right)\right)ds\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

■

□

Por último, para encontrar la distribución estacionaria, utilizaremos la siguiente proposición.

Proposition 13.1. *Sea X un proceso de difusión con generador A y densidad de transición $p = p(t,x,y)$ que tiene una densidad estacionaria $p_0 = p_0(y)$ en el intervalo (a,b). Supongamos que p y p_0 son funciones continuas y derivadas parciales continuas $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \frac{\partial p_0}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2}$. Supongamos también que $\sigma(x) > 0$, $x \in (a,b)$. Entonces la densidad estacionaria p_0 de X es de la forma*

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left(2\int_k^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right), \quad y \in (a,b)$$

donde k es un punto arbitrario de (a,b) y N es la constante de normalización tal que $\int_a^b p_0(y)dy = 1$.

Proof. Usaremos la ecuación de Fokker-Planck (FPE), para la evolución de la densidad de probabilidad de transición $p(y,t|x)$ para la formula de Itô, la cual esta dada por:

$$\partial_t p(y,t|x) = -\partial_y f(y)p(y,t|x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{yy} g^2(y)p(y,t|x),$$

con $p_s(x)$ la solución estacionaria de FPE que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\partial_t p\left(x,t|x_0,0\right) + \partial_x J\left(x,t|x_0,0\right) = 0,$$

donde

$$J\left(x,t|x_0,0\right) = f(x)p\left(x,t|x_0,0\right) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_x g^2(y)p(y,t|x_0,0),$$

Por lo tanto, se tiene que, para la densidad de probabilidad estacionaria $p_s(x)$:

$$-f(x)p_s(x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_x g^2(x)p_s(x) = -J, \tag{13.7}$$

para resolver la ecuación (Equation 13.7) definimos la función auxiliar $q(x) = g^2(x)p_s(x)$. La FPE estacionaria queda dada por:

$$\partial_x q(x) = \frac{2}{\sigma^2}\frac{f(x)}{g^2(x)}q(x) - \frac{2}{\sigma^2}J,$$

y su solución queda determinada por:

$$q(x) = N \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\int^x \frac{f(u)}{g^2(u)}du\right) - \frac{2J}{\sigma^2}\int^x \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\int_z^x \frac{f(u)}{g^2(u)}du\right)dz$$

por lo tanto la densidad estacionaria

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\int^x \frac{f(u)}{g^2(u)}du\right) - \frac{2J}{\sigma^2 g^2(x)}\int^x \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\int_z^x \frac{f(u)}{g^2(u)}du\right)dz$$

en este caso $J = 0$, así

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\int^x \frac{f(u)}{g^2(u)}du\right).$$

Que por todas las notaciones anteriores, resulta

$$p_0(y) = \frac{N}{\sigma^2(y)} \exp\left(2\int_k^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right).$$

■

□

La proposición Proposition 13.1 nos da una idea de como sería (en caso de existir) la función de densidad estacionaria de la ecuación de Richard (Equation 13.6), esta quedaría determinada por,

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{N}{\sigma^2 x^2}\exp\left(2\int_1^x \frac{ru\left(1-\left(\frac{u}{K}\right)^\alpha\right)}{\sigma^2 u^2}\right) \\
&= \frac{N}{\sigma^2 x^2}\exp\left(2\int_1^x \left(\frac{r}{\sigma^2 u} - \frac{r}{\sigma^2 K}u^{\alpha-1}\right)du\right) \\
&= \frac{N}{\sigma^2 x^2}\exp\left(\frac{2r}{\sigma^2}\left(\ln x + \frac{1}{\alpha K}(1-x^\alpha)\right)\right) \\
&= \frac{N}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2r}{\alpha K\sigma^2}\right)x^{\frac{2r}{\sigma^2}-2}\exp\left(-\frac{2r}{\alpha K\sigma^2}x^\alpha\right).
\end{aligned}$$

De aqui se puede observar que, la función p_0 es integrable en $(0,\infty)$ si y solo si $\frac{2r}{\sigma^2} - 2 > -1$, es decir, para $r > \frac{1}{2}\sigma^2$. Esto significa que el proceso de difusión descrito por la ecuación de Richard (Equation 13.6) no tiene densidad estacionaria para $r \leq \frac{1}{2}\sigma^2$ y tiene una densidad estacionaria para $r > \frac{1}{2}\sigma^2$.

Por último, veremos la simulación de la comparacion de la solución exacta con la de Euler-Maruyana y tambien el histograma de como se vería la distribución estacionaria.
Primero definimos las siguientes funciones auxiliares.

$$
\begin{aligned}
u\left(t, X_t\right) &= \alpha X_t\left[1-\left(\frac{X_t}{K}\right)^m\right] \\
v\left(t, X_t\right) &= \sigma X_t
\end{aligned}
$$

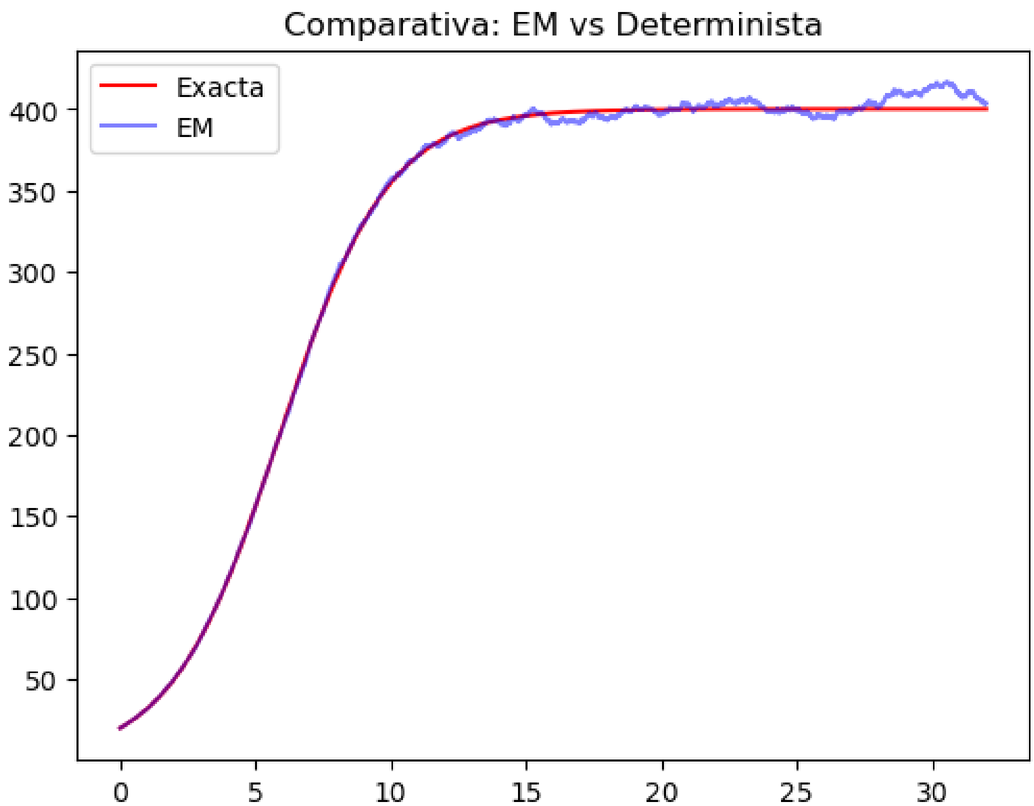
Reescribiendo el sistema, queda

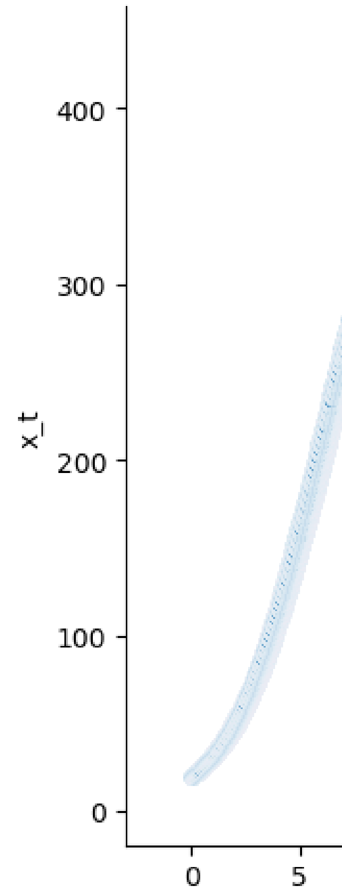
$$
\begin{aligned}
\mathrm{d} X_t &= u\left(t, X_t\right) \mathrm{d} t+v\left(t, X_t\right) \mathrm{d} B_t, t>t_0 \\
X_{t_0} &= x_0,
\end{aligned}
$$

```
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
import matplotlib.pyplot as plt


def log_rich(pars,t,x):
    alpha = pars[0]
    m = pars[1]
    k = pars[2]
    sigma = pars[3]
    u = alpha * x * (1 - (x / k) ** m)
    v = sigma * x
    return u, v

def logistic_step(pars,t,x, dt):
    u, v = log_rich(pars,t,x)
    y = x + u * dt + v * np.sqrt(dt)* np.random.standard_normal()
    return y

x_0 = 20
tf = 32
log_pars = [0.5, 1, 400, 0.01]
n = 2 ** 12

time = np.linspace(0, tf, n)
delta_t = time[1] - time[0]
```

```
x_t = [x_0]
for i in range(n - 1):
    x_t.append(logistic_step(log_pars, time[i], x_t[i], delta_t))

def exact_solution(pars, x_0, t):
    alpha = pars[0]
    m = pars[1]
    k = pars[2]
    a_1 = (k / x_0) ** m - 1
    a_2 = np.exp( -1 * m * alpha * t)
    a_3 = 1 + a_1 * a_2
    y = k * a_3 ** (-1 * m ** (-1))
    return y

exact = [exact_solution(log_pars, x_0, t) for t in time]
plt.plot(time, exact, 'r')
plt.plot(time, x_t, 'b', alpha = 0.5)
plt.legend(['Exacta','EM'])
plt.title('Comparativa: EM vs Determinista')
plt.show()

def solve_logistic(pars, x_0, tf, n):
    delta_t = tf / (n - 1)
    x_t = [x_0]
    for i in range(n - 1):
        x_t.append(logistic_step(pars, 1, x_t[i], delta_t))
    return x_t


samples = 1000

data = []
for i in range(samples):
    y_t = solve_logistic(log_pars, x_0, tf, n)
    for j in range(n):
        data.append([i + 1, j, j * delta_t, y_t[j]])

distr = pd.DataFrame(data, columns=['sample','step','time','x_t'])
distr.head()
distr.to_csv("muestra_em_logistic.csv")
```

```
fig, ax = plt.subplots()
marker_style_00 = dict(
    color="blue",
    linestyle="-",
    # marker="",
    markersize=1,
    markerfacecoloralt="gray",
    alpha=0.1,
)
x_T = []
for j in range(samples):
    ax.plot(distr.iloc[j *n: (j+1) * n, 2], distr.iloc[j *n: (j+1) * n, 3], **marker_style
    x_T.append(distr.iloc[j *n: (j+1) * n -1, 3])
plt.xlabel(r"$t$")
plt.ylabel(r"$X(t)$")

x_T = np.array(x_T)
ymax = np.max(np.abs(x_T))
binwidth = 0.025
lim = (int(ymax / binwidth) + 1) * binwidth
bins = 100
divider = make_axes_locatable(ax)
ax_histy = divider.append_axes("right", 1.2, pad=0.1, sharey=ax)
n, bins, patches = ax_histy.hist(x_T, bins=bins, orientation="horizontal", density=True)
sigma = np.std(x_T)
mu = np.mean(x_T)
y = (1 / (np.sqrt(2 * np.pi) * sigma)) * np.exp(
    -0.5 * ((1.0 / sigma) * (bins - mu)) ** 2
)

plt.savefig("gen_log_sde_batch_sample_path.png", dpi=300)
plt.show()
g = grid = sns.JointGrid(data=distr, x="time", y="x_t")
g.plot_joint(sns.scatterplot)
g.plot_marginals(sns.kdeplot)
g.plot_marginals(sns.histplot)
g.ax_marg_x.remove()
g.savefig("marginal.png")
```





13.4 Referencias:

[1] Analytic Solution of a Stochastic Richards Equation driven by Brownian motion, H P Suryawan, 2018.
[2] H.-H. Kuo, Introduction to stochastic integration, Springer, New York, 2006.
[3] Oksendal B, 2003, Stochastic Differential Equations, sixth edition (Heidelberg: Springer)

References

Knuth, Donald E. 1984. “Literate Programming.” *Comput. J.* 27 (2): 97–111. https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97.