

clase 22 de agosto 2023

Susana Hernández

Invalid Date

Table of contents

Preface	3
1 Introduction	4
2 Summary	5
3 Tarea 1	6
4 Tarea 2	14
Demostración:	14
5 Tarea 3	17
6 Tarea 4	27
6.1 Ejercicio 1	27
6.1.1 Demostración	27
6.2 Ejercicio 2	28
6.3 Ejercicio 3	28
6.4 Ejercicio 4	28
References	34

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit <https://quarto.org/docs/books>.

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

2 Summary

In summary, this book has no content whatsoever.

3 Tarea 1

Listing 3.1 Exploring functions to generate random variables with a Bernoulli distribution.py

```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew, kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p),
              bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```

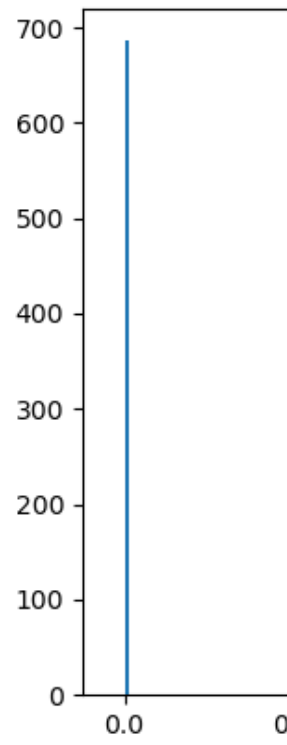
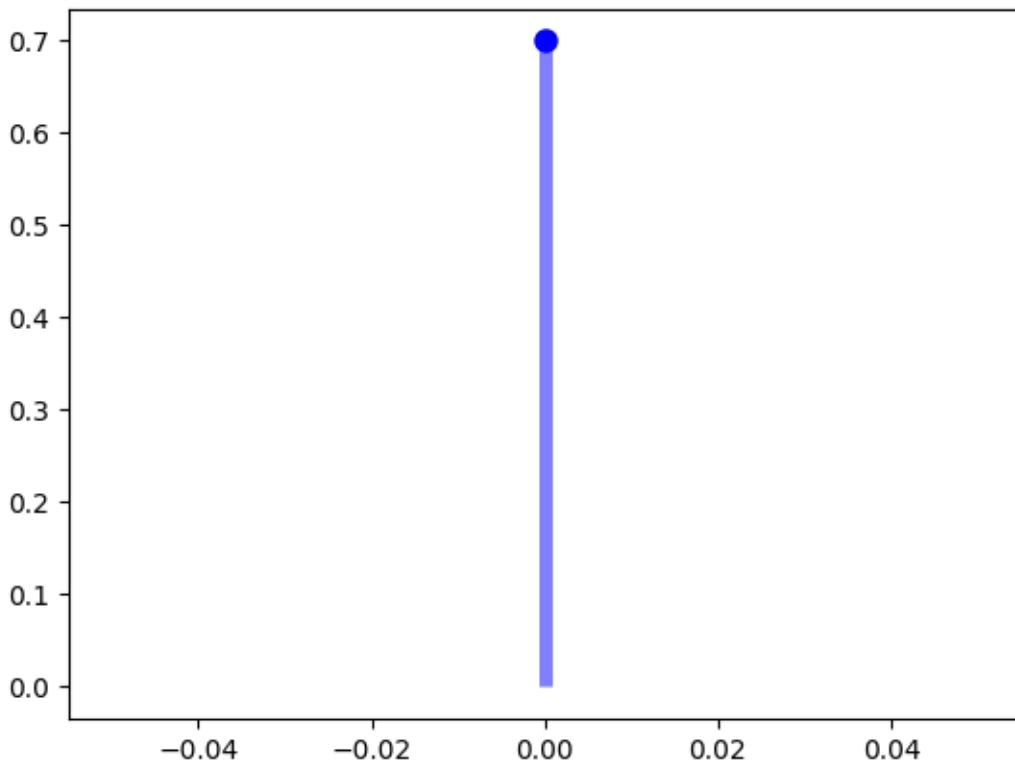
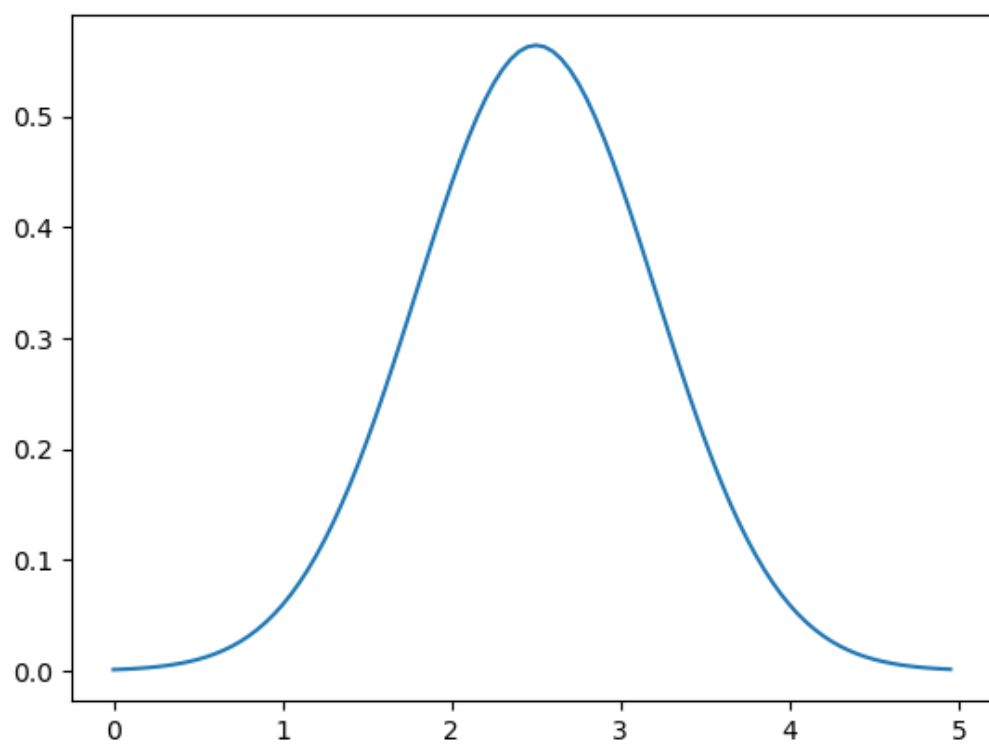
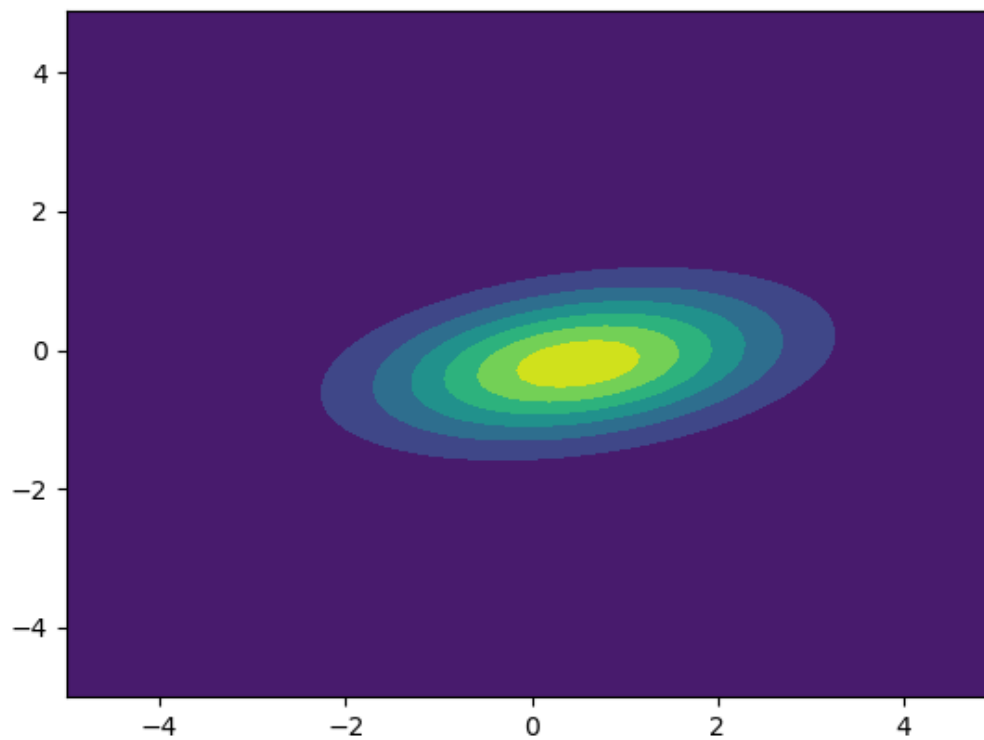
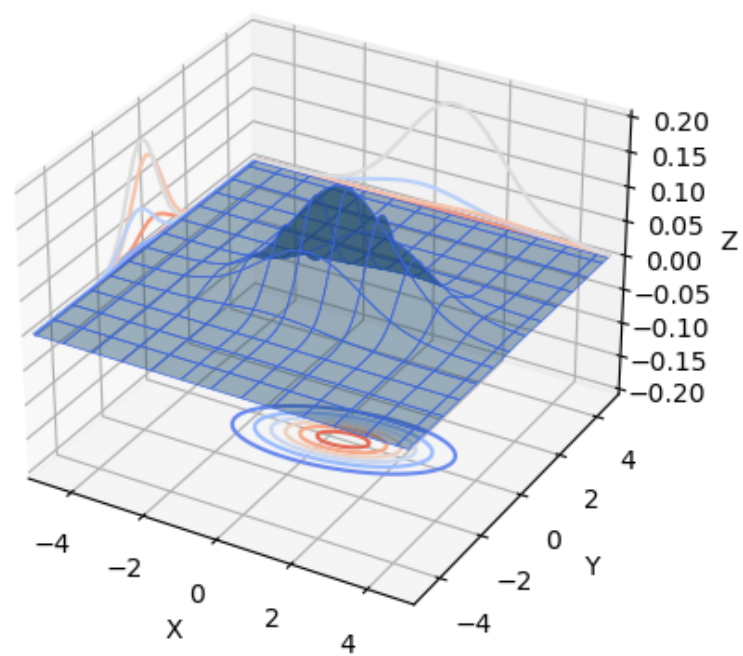




Figure 3.1: Figura 3







Listing 3.2 Exploring functions to generate random variables with a Gaussian distribution.py

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from scipy.stats import norm
```

Listing 3.3 Revising multivariate Gaussian.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5);

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]
pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.5, -0.2], [[2.0, 0.3], [0.3, 0.5]])
fig2 = plt.figure()

ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
# plt.show()

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,
    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')

ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')

ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'
)
plt.show()
```

4 Tarea 2

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria. Demuestre que para δ y h pequeño tenemos

$$E \exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)] \approx \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right]$$

Demostración:

Considere una caminata aleatoria que comienza en 0 con saltos h y $-h$ igualmente probables en los momentos $\delta, 2\delta, \dots$, donde h y δ son números positivos. Más precisamente, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. variables con

$$P[X_i = h] = P[X_i = -h] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y pongamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Para $t > 0$, defina $Y_{\delta,h}(t)$ mediante linealización, es decir, para $n\delta < t < (n+1)\delta$, defina

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Calculemos la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y sea $t = n\delta$ así, $n = t/\delta$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] &= \prod_{j=1}^n E e^{i\lambda X_j}, \text{ por ser variables independientes,} \\ &= (E e^{i\lambda X_j})^n, \text{ por ser idénticamente distribuidas,} \\ &= \frac{1}{2}(e^{i\lambda h} + e^{-i\lambda h})^n, \\ &= (\cos(\lambda h))^n, \\ &= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.2)

Por otro lado, sea $u = [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \Rightarrow \ln(u) = \frac{1}{\delta} \ln[\cos(\lambda h)]$.

Usando la expansión de Taylor de $\cos(x)$ se tiene que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln(\cos(\lambda h)) &\approx \ln \left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right] \\ &\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} \right)^2 \\ &= -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^4 h^4}{4} - \frac{\lambda^6 h^6}{24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{24} \right) \\ &= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} - \frac{\lambda^4 h^4}{8} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \\ &= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \end{aligned} \quad (4.3)$$

para una h pequeña, se satisface que,

$$-\frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \approx 0$$

Por lo tanto, $\ln(\cos(\lambda h)) \approx -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}$. Así, para δ y h pequeña, se tiene que $\ln u \approx \frac{1}{\delta} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} \right)$. Entonces

$$u \approx \exp \left[\frac{1}{\delta} \left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} \right) \right] \quad (4.4)$$

Entonces por la ecuación (Equation 4.2)

$$E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] \approx \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right] \quad (4.5)$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E [\exp (i\lambda Y_{n,\delta}(t))] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left[-t \left(\left[\frac{h^2}{\delta} \right] \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^2}{24} \right) \right) \right],$$

Asumamos que $\delta \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ pero $h^2/\delta \rightarrow \infty$. Entonces $\lim_{\delta \rightarrow 0} Y_{\delta,h}(t)$ no existe. Por otro lado, consideremos la siguiente renormalización,

$$\begin{aligned}
E \exp \left[i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right] &= E \left[\exp(i\lambda Y_{n,\delta}(t)) \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right] \\
&= \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) E \exp [i\lambda Y_{n,\delta}(t)] \\
&\approx \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \exp \left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right] \\
&= \exp \left(-\frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta} \right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Así, si $\delta, h \rightarrow 0$ de tal manera que $h^2/\delta \rightarrow \infty$ y $h^4/\delta \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left(\frac{(\lambda h)^4}{24\delta} \right) = 1$$

5 Tarea 3

Exercise 5.1 (Ejercicio 1:). Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ entonces $\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\frac{X - \mu}{\sigma}$,

\$\$

```
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E\left[e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right] \\
&= E\left[e^{i\left(\frac{tX}{\sigma} - \frac{t\mu}{\sigma}\right)}\right] \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E\left[e^{i\left(\frac{tX}{\sigma}\right)}\right] \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{tx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{tx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{tx}{\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2}} dx
\end{aligned}
```

\$\$\{\#eq-1.1\}

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E\left[e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right] \\
 &= E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} - \frac{it\mu}{\sigma}\right)}\right] \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}\right)}\right] \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{tx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{tx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{tx}{\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2}} dx
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{(x - \mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} &= \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} \\
&= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} \\
&= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma} \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} \\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Sustituyendo (5.2) en ((eq?)-{1.1}), resulta

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2 \right]} dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma} - \frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2} dx
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Sea $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma} dx$, sustituyendo esto en (5.3), resulta

$$\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{5.4}$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0, 1)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dx = 1.$$

sustituyendo esto ultimo en (5.4), se tiene,

$$\varphi_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{5.5}$$

Por otro lado, consideremos $Z \sim N(0, 1)$, entonces

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Entonces $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

□

Exercise 5.2 (Ejercicio 2:). Si $Y \sim N(0, 1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) &= E[e^{it(\sigma Y + \mu)}] \\
 &= E[e^{it\sigma Y + it\mu}] \\
 &= e^{it\mu} E[e^{it\sigma Y}] \\
 &= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 y^2 - 2yit\sigma &= (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 \\
 &= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Sustituyendo, (5.7) en (5.6) resulta

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2)} dy \\
 &= e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tomando $u = y - it\sigma \Rightarrow du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

entonces $U \sim N(0, 1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (5.8), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu, \sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$$

□

Exercise 5.3 (Ejercicio 3:). Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proof. Por definición, se tiene que,

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] \\ &= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} \\ &= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z , esta dada por,

$$\begin{aligned} \varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{t^2}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2} + it\mu_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\ &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \end{aligned}$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (5.9) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

□

Exercise 5.4 (Ejercicio 4:). Si X, Y son variables aleatorias normales entonces X, Y son independientes si y solo si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proof. Primero recordemos que

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy$$

Como X, Y son independientes, sabemos que

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Entonces

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \right) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

□

Theorem 5.1 (Desigualdad de Chebyshev). Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. Sea $Y = |X - \mu|$, observemos que Y es positiva, así por la desigualdad de Markov y dado que $\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] = \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2]$, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[|X - \mu| \geq \varepsilon] &= \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \varepsilon^2] \\ &\leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

Theorem 5.2 (Ley de los grandes números). Sean X_1, X_2, \dots, X_n procesos de ensayos independientes, con esperanza finita $\mu = E(X_j)$ y varianza finita $\sigma^2 = \text{Var}(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

Proof. Observemos que

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{S_n}{n} - \mu \right] &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i), \text{ por ser iid} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 5.1,

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

así, tomando el limite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

□

Theorem 5.3 (Teorema del Limite Central). Sea $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ una secuencia de v.a.i.id con media a y varianza b^2 . Entonces para doo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, entonces

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Proof. Definamos a

$$S_M = \sum_{i=1}^M [X_i - a],$$

y

$$Y_M = \frac{S_M}{\sqrt{Mb}}.$$

Sea φ_{Y_M} la función generadora de momentos de Y_M y φ la función generadora de momentos de la distribución normal estándar, demostraremos que $\varphi_{Y_M} \rightarrow \varphi$.

Por definición,

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_M}(t) &= E \left[\exp \left(t \frac{S_M}{\sqrt{Mb}} \right) \right] \\ &= \varphi_{S_M} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \\ &= \left[\varphi_{(X_1-a)} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \right]^M \text{ ya que, las } X_i \text{ son i.i.d} \\ &= \left[E \left[\exp \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right) \right] \right]^M\end{aligned}$$

Recordando la serie de Taylor

$$\begin{aligned}\varphi_{Y_M}(t) &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!} \right]^M \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} \right)^2 E[(X_1 - a)^2] + \epsilon(3) \right]^M \\ &= \left[1 + \frac{1}{M} \frac{t^2}{2} + \epsilon(3) \right]^M,\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!},$$

Ahora sea $s = \frac{t}{b\sqrt{M}}$, así,

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^i}{i!}$$

Además observemos que, cuando $t \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$.

Así, de lo anterior, si φ_1 existe, se cumple que,

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, \text{ cuando, } s \rightarrow 0.$$

Por otro lado,

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M,$$

y $s \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

Entonces $\epsilon(3) s^{-2} = M\epsilon(3) b^2 t^{-2} \rightarrow 0$. Dado que b, t estan fijas, se cumple que

$$M\epsilon(3) \rightarrow 0, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \rightarrow \frac{t^2}{2}, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty$$

esto implica que,

$$\left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M \rightarrow \exp(t^2/2), M \rightarrow \infty$$

De aqui se concluye que,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M(t) = \exp(t^2/2) = \varphi(t)$$

la cual es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$$

que es equivalente a,

$$F_M(b) - F_M(a) \rightarrow F_N(b) - F_N(a)$$

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

□

Theorem 5.4. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d con media a . Entonces

$$\mathcal{P} \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = a \right] = 1.$$

Proof. Esto es similar a decir que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \stackrel{\text{c.s.}}{=} a$$

Sin pérdida de generalidad, diremos que $X_i \geq 0, \forall i$. Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n| \leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Por la desigualdad de

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left[\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Q_n)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \int_0^n x^2 dF \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^n x dF < \infty, \end{aligned}$$

donde F es la función de distribución de X_i . Luego

$$E[X_1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x dF = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[Q_n]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P} \left[\limsup \left(\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right) \right] = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{n} = E[X_1], \text{ c.s.}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i \neq Y_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n]$$

como $E[X_i] < \infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P} [X_i > n] \leq E [X_1] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P} [\limsup [X_i \neq Y_i]] = 0, \forall i$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i, \text{ c.s} \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i &\rightarrow E [X_1] = \mu. \text{ c.s} \end{aligned}$$

□

6 Tarea 4

6.1 Ejercicio 1

Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0, T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0, T]$.

6.1.1 Demostración

Veamos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.

6.1.1.1 Propiedad 1 (Que comience en 0)

Se tiene que, $V(0) = \frac{1}{c} W(c^2 \cdot 0) = 0$.

6.1.1.2 Propiedad 2 (Incrementos Independientes)

Sean $s < t < u < v$, por definición de V , se tiene que,

$$E[(V(t) - V(s))(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Dado que W tiene incrementos independientes, se cumple que.

$$\frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))] E[(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

6.1.1.3 Propiedad 3 (Incrementos estacionarios)

Sea $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c} [W(c^2 t) - W(c^2 s)]$$

Por las propiedades de la definicion del movimiento Browniano.

$$\begin{aligned} E[V(t) - V(s)] &= \frac{1}{c} E[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = 0 \\ \text{Var}[V(t) - V(s)] &= \frac{1}{c^2} \text{Var}[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = \frac{1}{c^2} (c^2 (t - s)) = t - s \end{aligned}$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

Con todo lo anterior se concluye que, V es un movimiento browniano.

6.2 Ejercicio 2

Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

6.3 Ejercicio 3

Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de una refinamiento con $2N$ incrementos.

6.4 Ejercicio 4

En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

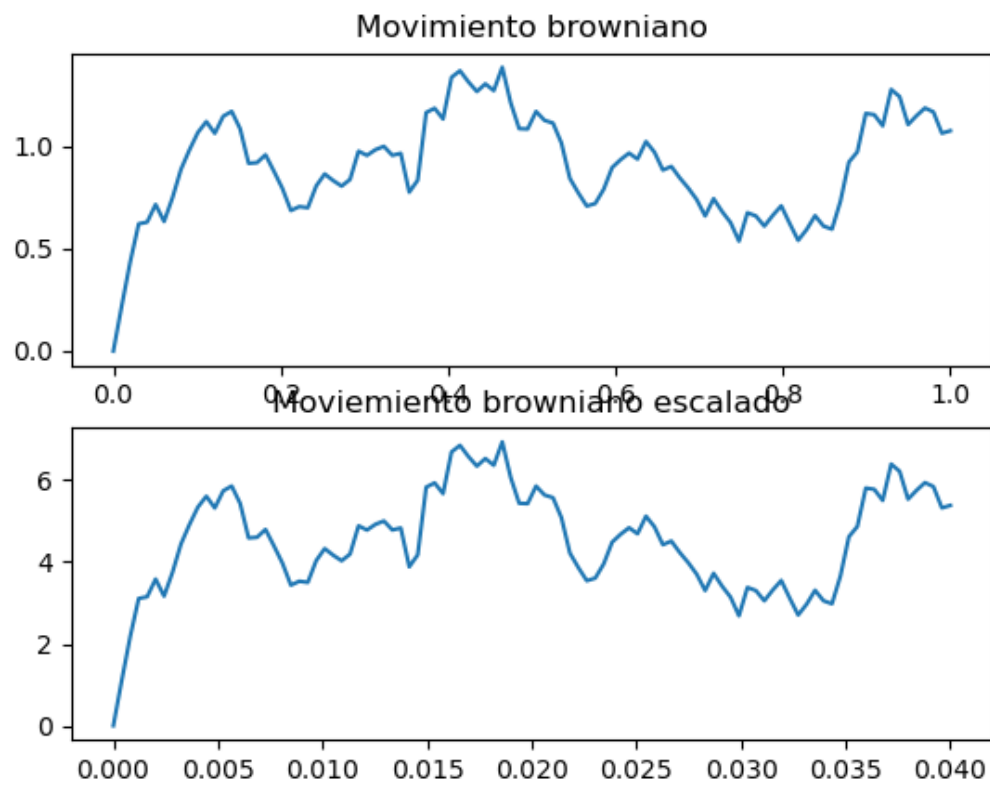


Figure 6.1: Figura 1

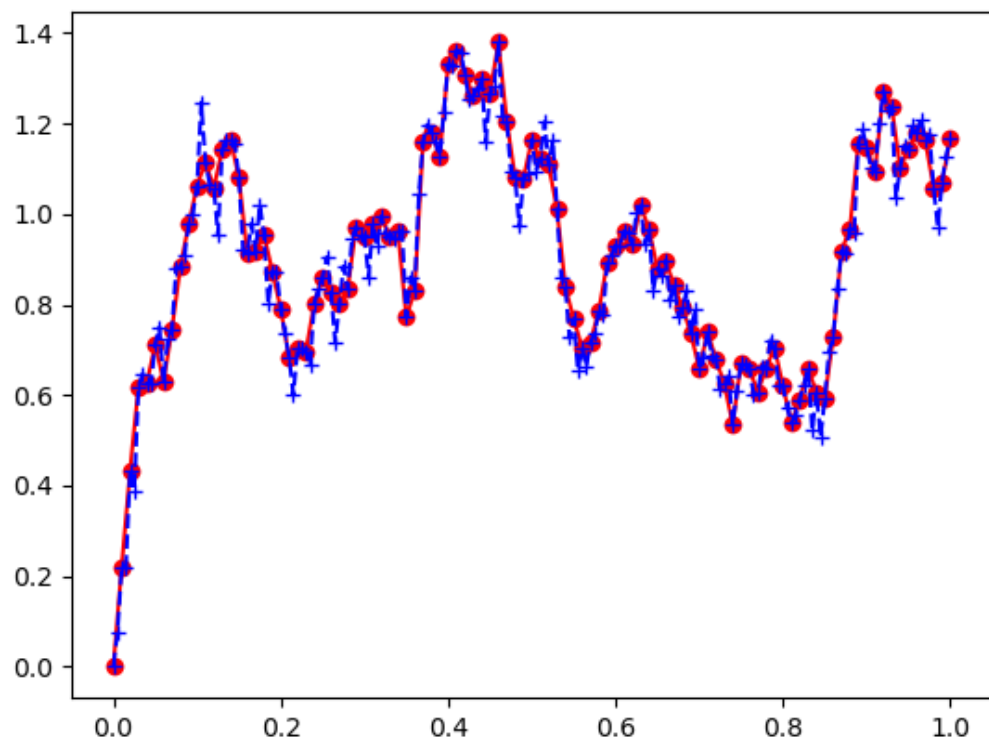


Figure 6.2: Figura 2

Listing 6.1 Browniano escalado, con $c=1/5$.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)
T = 1
n = 100
dt = 1 / (n - 1)
dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n - 1)
w = np.concatenate(([0], dw.cumsum()))

time = np.linspace(0, T, n)
c = 0.2 # 1/5
c_time = c**2 * time
c_w = c**(-1) * w

fig, browniano_escalado = plt.subplots(2)
browniano_escalado[0].plot(time, w)
browniano_escalado[1].plot(c_time, c_w)
browniano_escalado[0].set_title('Movimiento browniano')
browniano_escalado[1].set_title('Movimiento browniano escalado')
plt.show()
```

Listing 6.2 Browniano refinado, con refinamiento 2N.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)

    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t,t_half,W, W_refined
```

Listing 6.3 Browniano refinado, con refinamiento 2N y 100 incrementos.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import h_b_r as hbr

a, b, c, d = hbr.refined_brownian_2n(1, 100)

plt.plot(a, c, 'r-+')
plt.plot(
    b,
    d,
    'g*--',

    # alpha = transparencia
)
plt.show()
```

References

Knuth, Donald E. 1984. “Literate Programming.” *Comput. J.* 27 (2): 97–111. <https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97>.