Matematicas aplicadas

Susana Hernández

Invalid Date

Table of contents

Preface

This is a Quarto book.

To learn more about Quarto books visit https://quarto.org/docs/books.

1 Introduction

This is a book created from markdown and executable code.

See Knuth (1984) for additional discussion of literate programming.

2 Summary

In summary, this book has no content whatsoever.

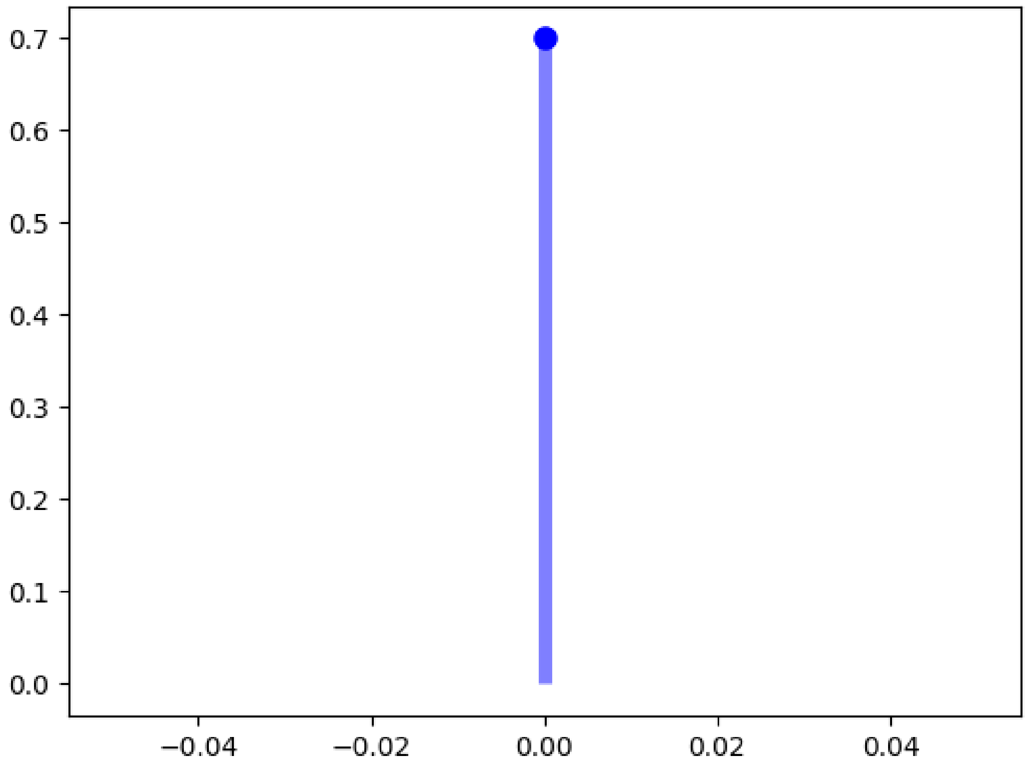
3 Tarea 1

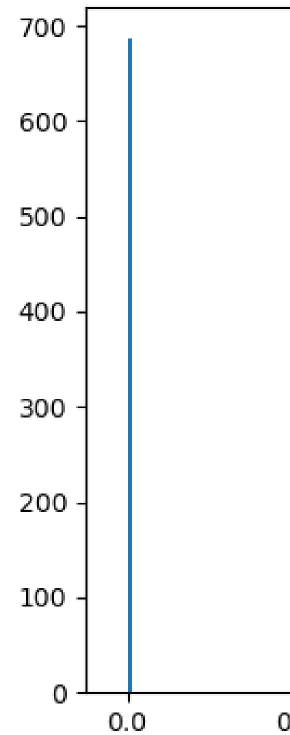
Exercise 3.1. Se generan variables aleatorias Bernoulli y el histograma de los valores que toma con paremetro $p = 0.3$.

Listing 3.1 Exploring functions to generate random variables with a Bernoulli distribution.py

```python
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew,kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p),
              bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```





Exercise 3.2. Se generan variables aleatorias normales y el histograma de los valores que toma.

Exercise 3.3. Modificando reproducir el gráfico de una distribución gaussiana bivariada con media vectorial $\mu[0.1, 0.5]$ y matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3.0 & 0.3 \\ 0.75 & 1.5 \end{bmatrix}$$

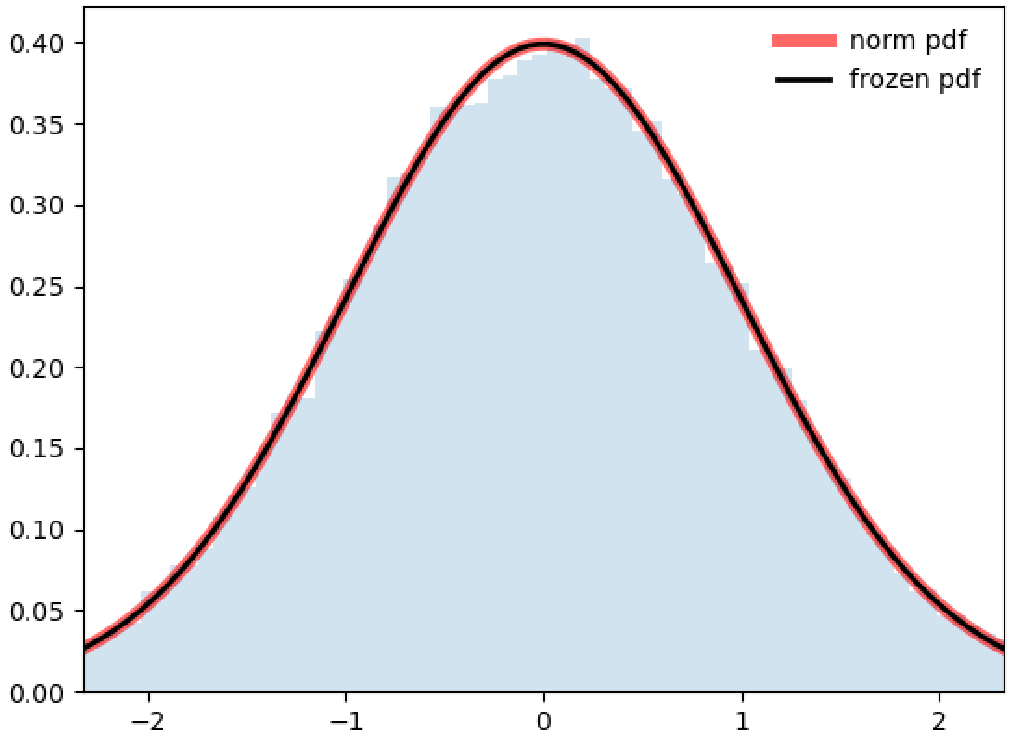
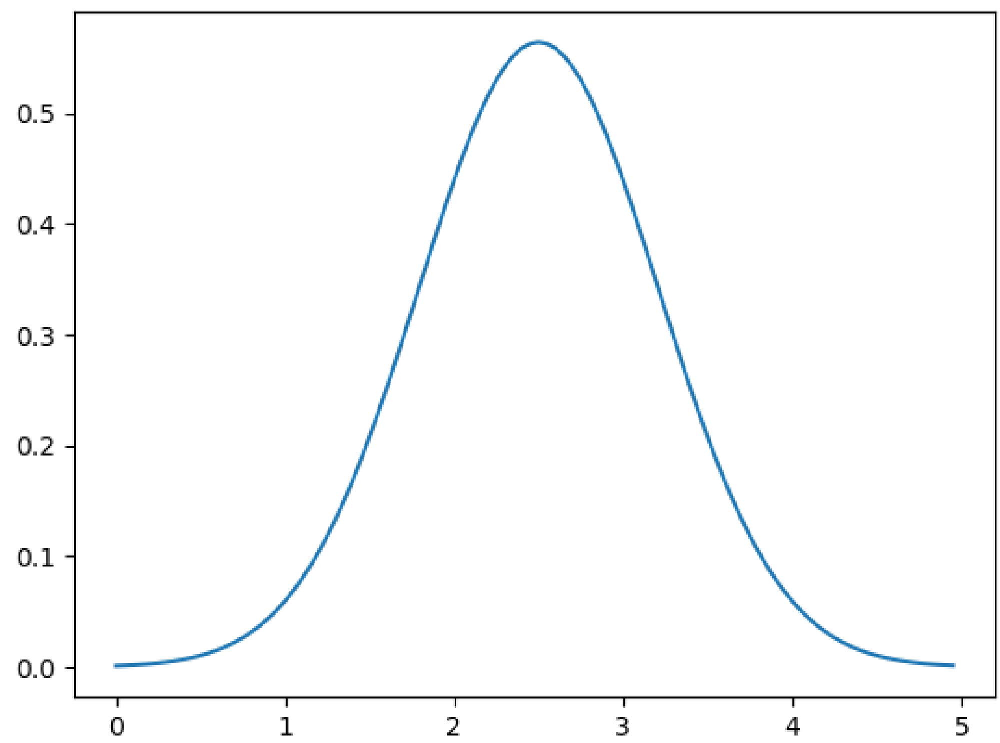
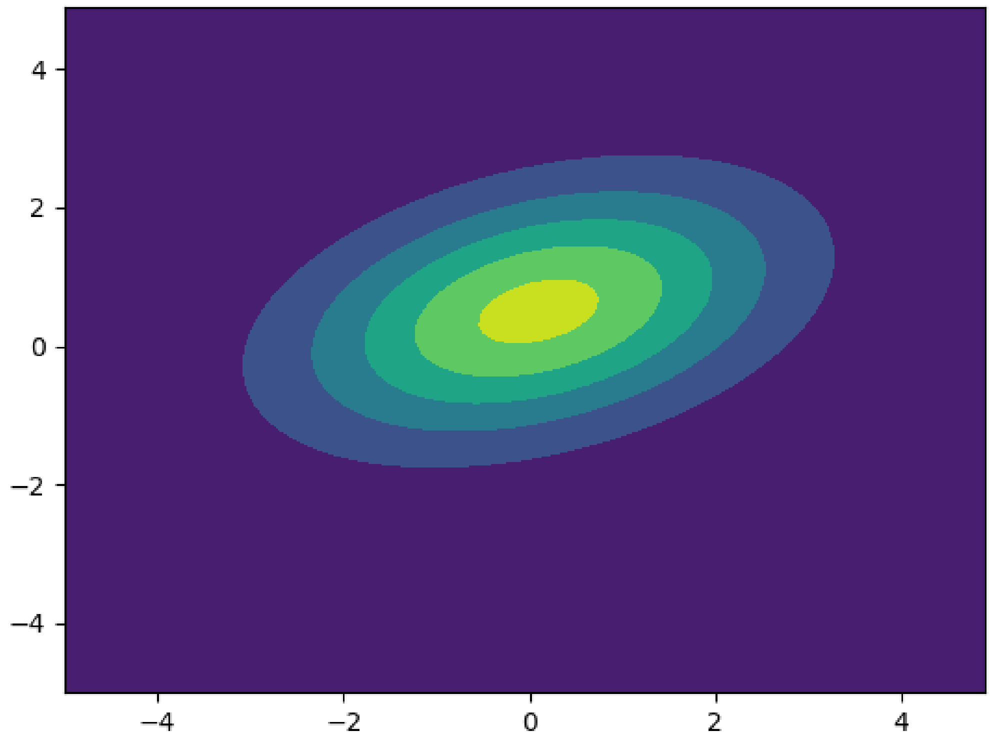
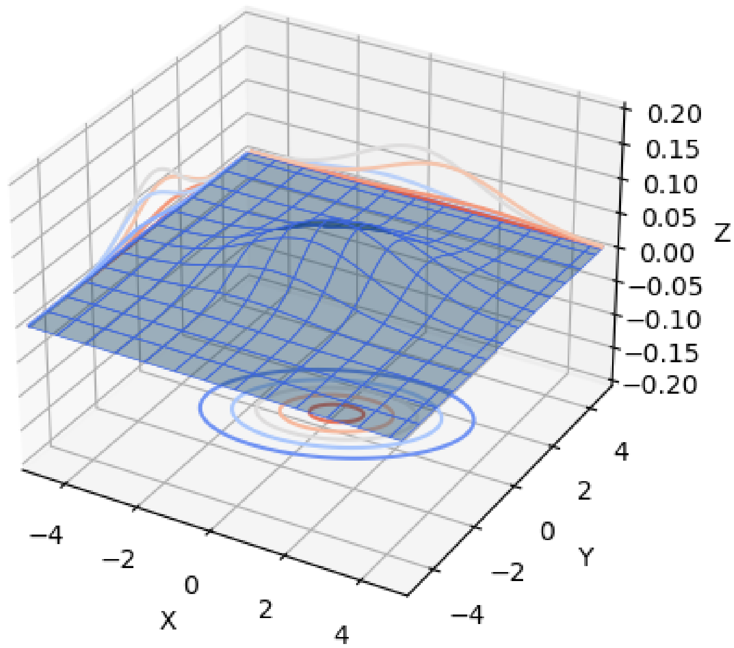


Figure 3.1: Figura 3


0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
1
2
3
4
5



4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
−0.20
Z
−4
−2
0
2
4
X
−4
−2
0
2
4
Y

Listing 3.2 Exploring functions to generate random variables with a Gaussian distribution.py

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

fig, ax = plt.subplots(1, 1)
mean, var, skew, kurt = norm.stats(moments='mvsk')

x = np.linspace(norm.ppf(0.01), norm.ppf(0.99), 100)
ax.plot(
    x,
    norm.pdf(x),
    'r-',
    lw=5,
    alpha=0.6,

    label='norm pdf'
)
rv = norm()
ax.plot(x, rv.pdf(x), 'k-', lw=2, label='frozen pdf')
vals = norm.ppf([0.001, 0.5, 0.999])

np.allclose([0.001, 0.5, 0.999], norm.cdf(vals))

r = norm.rvs(size=50000)

ax.hist(r, density=True, bins='auto', histtype='stepfilled', alpha=0.2)
ax.set_xlim([x[0], x[-1]])
ax.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```

Listing 3.3 Revising multivariate Gaussian.py

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5);


fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]

pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.1, 0.5], [[3.0, 0.3], [0.75, 1.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
# plt.show()


ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,

    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')


ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'

)
plt.show()
```

4 Tarea 2

Sea $Y_{\delta,h}(t)$ una caminata aleatoria. Demuestre que para δ y h pequeño tenemos

$$E\exp[i\lambda Y_{\delta,h}(t)] \approx \exp\left[-\frac{t\lambda^2h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4h^4}{12\delta}\right]$$

Demostración:

Considere una caminata aleatoria que comienza en 0 con saltos h y $-h$ igualmente probables en los momentos δ, 2 δ,..., donde h y δ son números positivos. Más precisamente, sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos. variables con

$$P\left[X_i = h\right] = P\left[X_i = -h\right] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

Sea $Y_{\delta,h}(0) = 0$ y pongamos

$$Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Para $t > 0$, defina $Y_{\delta,h}(t)$ mediante linealización, es decir, para $n\delta < t < (n+1)\delta$, defina

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta}Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta}Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Calculemos la función característica de $Y_{\delta,h}(t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo y sea $t = n\delta$ así, $n = t/\delta$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right] &= \prod_{j=1}^{n} Ee^{i\lambda X_j}, \text{ por ser variables independientes,} && (4.1)\\
&= (Ee^{i\lambda X_j})^n, \text{ por ser idénticamente distribuidas,} && (4.2)\\
&= \frac{1}{2}(e^{i\lambda h} + e^{-i\lambda h})^n, && (4.3)\\
&= (\cos(\lambda h))^n, && (4.4)\\
&= (\cos(\lambda h))^{t/\delta}, && (4.5)
\end{aligned}$$

$$(4.6)$$

Por otro lado, sea $u = [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \Rightarrow \ln(u) = \frac{1}{\delta}\ln[\cos(\lambda h)]$.

Usando la expansión de Taylor de $\cos(x)$ se tiene que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(\lambda h)) &\approx \ln\left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}\right] && (4.7)\\
&\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!}\right)^2 && (4.8)\\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^4 h^4}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^4 h^4}{4} - \frac{\lambda^6 h^6}{24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{24}\right) && (4.9)\\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} + \frac{\lambda^4 h^4}{24} - \frac{\lambda^4 h^4}{8} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} && (4.10)\\
&= -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12} - \frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} && (4.11)
\end{aligned}$$

para una h pequeña, se satisface que,

$$-\frac{\lambda^6 h^6}{(2)24^2} + \frac{\lambda^8 h^8}{48} \approx 0$$

Por lo tanto, $\ln(\cos(\lambda h)) \approx -\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}$.\ Así, para δ y h pequeña, se tiene que $\ln u \approx \frac{1}{\delta}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}\right)$.\ Entonces

$$u \approx \exp\left[\frac{1}{\delta}\left(-\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{12}\right)\right] \tag{4.12}$$

Entonces por la ecuación (Equation 4.6),

$$E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}(t)\right] \approx \exp\left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta} - \frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right] \tag{4.13}$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta\to 0} E\left[\exp\left(i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right)\right] = \lim_{\delta\to 0} \exp\left[-t\left(\left[\frac{h^2}{\delta}\right]\left(\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^4 h^2}{24}\right)\right)\right],$$

Asumamos que $\delta \to 0$, $h \to 0$ pero $h^2/\delta \to \infty$. Entonces $\lim_{\delta\to 0} Y_{\delta,h}(t)$ no existe. Por otro lado, consideremos la siguiente renormalización,

$$E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)+\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right] = E\left[\exp(i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right))\exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)\right] \tag{4.14}$$

$$= \exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)E\exp\left[i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)\right] \tag{4.15}$$

$$\approx \exp\left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta}\right)\exp\left[-\frac{t\lambda^2 h^2}{2\delta}-\frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right] \tag{4.16}$$

$$= \exp\left(-\frac{t\lambda^4 h^4}{12\delta}\right) \tag{4.17}$$

Así, si $\delta, h \to 0$ de tal manera que $h^2/\delta \to \infty$ y $h^4/\delta \to 0$, entonces

$$\lim_{\delta\to 0} E\left[\exp\left(i\lambda Y_{n,\delta}\left(t\right)+\frac{th^2\lambda^2}{2}\right)\right] = \lim_{\delta\to 0}\exp\left(\frac{\left(\lambda h\right)^4}{24\delta}\right) = 1$$

5 Tarea 3

Exercise 5.1. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E\left[e^{it\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}\right] && (5.1)\\
&= E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}-\frac{it\mu}{\sigma}\right)}\right] && (5.2)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E\left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma}\right)}\right] && (5.3)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx && (5.4)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx && (5.5)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx && (5.6)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2-2itx\sigma}{\sigma^2}} dx && (5.7)\\
& && (5.8)
\end{aligned}$$

Observemos que,

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} &= \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} && (5.9)\\
&= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} && (5.10)\\
&= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma}\left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma^2}\right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} && (5.11)\\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} && (5.12)\\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} && (5.13)\\
&= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2. && (5.14)\\
& && (5.15)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (Equation 5.15) en (Equation 5.8), resulta

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2\right]} dx && (5.16)\\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma} - \frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx && (5.17)\\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx && (5.18)\\
& && (5.19)
\end{aligned}
$$

Sea $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right) \implies du = \frac{1}{\sigma}dx$, sustituyendo esto en (Equation 5.19), resulta

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du && (5.20)\\
&& (5.21)
\end{aligned}
$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0,1)$, entonces

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dx = 1.
$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.21), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{5.22}$$

$$\tag{5.23}$$

Por otro lado, consideremos $Z \sim N(0,1)$, entonces

$$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Entonces $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t)$, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

□

Exercise 5.2. Si $Y \sim N(0,1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$.

Proof. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) &= E\left[e^{it(\sigma Y+\mu)}\right] && (5.24)\\
&= E\left[e^{it\sigma Y + it\mu}\right] && (5.25)\\
&= e^{it\mu} E\left[e^{it\sigma Y}\right] && (5.26)\\
&= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy && (5.27)\\
&= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy. && (5.28)
\end{aligned}$$

$$\tag{5.29}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
y^2 - 2yit\sigma &= (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 && (5.30)\\
&= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2. && (5.31)
\end{aligned}$$

$$\tag{5.32}$$

Sustituyendo, (Equation 5.32) en (Equation 5.29) resulta

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) &= e^{it\mu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y-it\sigma)^2+t^2\sigma^2)}dy && (5.33)\\
&= e^{it\mu}e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2}dy && (5.34)\\
& && (5.35)
\end{aligned}$$

Tomando $u = y - it\sigma \Longrightarrow du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

entonces $U \sim N(0,1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2}dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (Equation 5.35), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y+\mu}(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu,\sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y+\mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu,\sigma)$$

□

Exercise 5.3. Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Proof. Por definición, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] && (5.36)\\
&= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} && (5.37)\\
&= E[e^{itX}]E[e^{itY}] && (5.38)\\
&= \varphi_X(t)\varphi_Y(t). && (5.39)\\
& && (5.40)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z, esta dada por,

$$
\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\\
&= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}+it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\\
&= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}e^{it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\\
&= \varphi_X(t)\varphi_Y(t),
\end{aligned}
$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (Equation 5.40) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

□

Exercise 5.4 (Ejercicio 4:)**.** Si X, Y son variables aleatorias normales entonces X, Y son independientes si y solo si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Proof. Primero recordemos que

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Como X, Y son independientes, sabemos que

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (5.41)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X}(x)\, f_{y}(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (5.42)\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X}(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_{y}(y)\,\mathrm{d}y\right) && (5.43)\\
&= E(X)\,E(Y) && (5.44)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 5.1 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea X una variable aleatoria con esperanza $\mu = E(X)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Proof. Sea $Y = |X-\mu|$, observemos que Y es positiva, así por la desigualdad de Markov y dado que $\mathcal{P}[|X-\mu| \geq \epsilon] = \mathcal{P}\left[|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2\right]$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}[|X-\mu| \geq \epsilon] &= \mathcal{P}\left[|X-\mu|^2 \geq \epsilon^2\right] && (5.45)\\
&\leq \frac{E\left[(X-\mu)^2\right]}{\epsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}[X]}{\epsilon^2} && (5.46)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 5.2 (Ley de los grandes números)**.** *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ procesos de ensayos independientes, con esperanza finita $\mu = E(X_j)$ y varianza finita $\sigma^2 = Var(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.*

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \to 0$$

Proof. Observemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left[\frac{S_n}{n}-\mu\right] &= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(S_n) && (5.47)\\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i)\,,\ \text{por ser iid} && (5.48)\\
&= \frac{\sigma^2}{n} && (5.49)
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 5.1,

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\epsilon\right]\leq\frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

así, tomando el limite cuando $n\to\infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon}\to 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\epsilon\right]\to 0$$

□

Theorem 5.3 (Teorema del Limite Central). *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una secuencia de v.a.i.id con media* a *y varianza* b^2*. Entonces para doo* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*, con* $\alpha<\beta$*, entonces*

$$\mathcal{P}\left(\lim_{M\to\infty}\alpha\leq\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{M}X_i-Ma}{\sqrt{M}b}\leq\beta\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}\mathrm{d}x$$

Proof. Definamos a

$$S_M=\sum_{i=1}^{M}\left[X_i-a\right],$$

y

$$Y_M=\frac{S_M}{\sqrt{M}b}.$$

Sea φ_{Y_M} la función generadora de momentos de Y_M y φ la función generadora de momentos de la distribución normal estándar, demostraremos que $\varphi_{Y_M}\to\varphi$.

Por definición,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{Y_M}(t) &= E\left[\exp\left(t\frac{S_M}{\sqrt{M}b}\right)\right] && (5.50)\\
&= \varphi_{S_M}\left(\frac{t}{\sqrt{M}b}\right) && (5.51)\\
&= \left[\varphi_{(X_1-a)}\left(\frac{t}{\sqrt{M}b}\right)\right]^M \quad \text{ya que, las } X_i \text{ son i.i.d} && (5.52)\\
&= \left[E\left[\exp\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)\right]\right]^M && (5.53)
\end{aligned}
$$

Recordando la serie de Taylor

$$
\begin{aligned}
\varphi_{Y_M}(t) &= \left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E\left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)^i\right]}{i!}\right]^M && (5.54)\\
&= \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}\right)^2 E\left[(X_1-a)^2\right]+\epsilon(3)\right]^M && (5.55)\\
&= \left[1+\frac{1}{M}\frac{t^2}{2}+\epsilon(3)\right]^M, && (5.56)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty}\frac{E\left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}}(X_1-a)\right)^i\right]}{i!}, \qquad (5.57)
$$

Ahora sea $s=\dfrac{t}{b\sqrt{M}}$, así,

$$
\epsilon(3)=\sum_{i=3}^{\infty}\frac{E\left[(X_1-a)^i\right]s^i}{i!}
$$

Además observemos que, cuando $t\to 0$, $s\to 0$.

Así, de lo anterior, si φ_1 existe, se cumple que,

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E\left[(X_1 - a)^i\right] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, \text{ cuando, } s \rightarrow 0.$$

Por otro lado,

$$\varphi_{Y_M}(t) = \left[1 + \frac{1}{M}\left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3)\right]\right]^M,$$

y $s \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

Entonces $\epsilon(3)\, s^{-2} = M\epsilon(3)\, b^2 t^{-2} \rightarrow 0$. Dado que b, t estan fijas, se cumple que

$$M\epsilon(3) \rightarrow 0, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \rightarrow \frac{t^2}{2}, \text{ cuando, } M \rightarrow \infty$$

esto implica que,

$$\left[1 + \frac{1}{M}\left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3)\right]\right]^M \rightarrow \exp\left(t^2/2\right), M \rightarrow \infty$$

De aqui se concluye que,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M(t) = \exp\left(t^2/2\right) = \varphi(t)$$

la cual es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$$

que es equivalente a,

$$F_M(b) - F_M(a) \rightarrow F_N(b) - F_N(a)$$

$$\mathcal{P}\left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i - Ma}{\sqrt{M} b} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$$

$\square$

Theorem 5.4. *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de v.a.i.i.d con media* a. *Entonces*

$$\mathcal{P}\left[\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i = a\right] = 1.$$

Proof. Esto es similar a decir que

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i \overset{\text{c.s}}{=} a$$

Sin perdida de generalidad, diremos que $X_i \geq 0, \forall i$. Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n|\leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Por la desigualdad de Chebyshev

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[\left|\frac{Q_n - E\left[Q_n\right]}{n}\right| \geq \epsilon\right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Var}\left(Q_n\right)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}\left(Y_i\right) && (5.58)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left(Y_n^2\right)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2 n^2}\int_0^n x^2 \mathrm{d}F && (5.59)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\epsilon^2}\int_0^n x\mathrm{d}F < \infty, && (5.60)
\end{aligned}$$

donde F es la función de distribución de X_i. Luego

$$E\left[X_1\right] = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x\mathrm{d}F = \lim_{n\to\infty}E\left[Y_n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{E\left[Q_n\right]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P}\left[\limsup\left(\left|\frac{Q_n - E\left[Q_n\right]}{n}\right| \geq \epsilon\right)\right] = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{n} = E\left[X_1\right], \text{c.s}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[X_i \neq Y_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{P}\left[X_i > n\right]$$

como $E\left[X_i\right] < \infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}\left[X_i > n\right] \leq E\left[X_1\right] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}\left[\limsup\left[X_i \neq Y_i\right]\right] = 0, \forall i$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i, \text{c.s} && (5.61) \\ &\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} X_i \to E\left[X_1\right] = \mu. \text{ c.s} && (5.62) \end{aligned}$$

$\square$

6 Tarea 4

Exercise 6.1. Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0, T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0, T]$.

Proof.
Veamos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.
Propiedad C1 (Que comience en 0).
Se tiene que, $V(0) = \frac{1}{c} W(c^2 \cdot 0) = 0$.

Propiedad C2 (Incrementos Independientes).
Sean $s < t < u < v$, por definición de V, se tiene que,

$$E[(V(t) - V(s))\,(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))\,(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Dado que W tiene incrementos independientes, se cumple que,

$$\frac{1}{c^2} E\left[(W(c^2 t) - W(c^2 s))\,(W(c^2 v) - W(c^2 u))\right] = \frac{1}{c^2} E\left[(W(c^2 t) - W(c^2 s))\right] E\left[(W(c^2 v) - W(c^2 u))\right] \quad (6.1)$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

Propiedad C3 (Incrementos estacionarios).
Sea $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c}\left[W(c^2 t) - W(c^2 s)\right]$$

Por las propiedades de la definicion del movimiento Browniano.

$$E[V(t)-V(s)] = \frac{1}{c}E\left[W(c^2t)-W(c^2s)\right] = 0 \tag{6.2}$$

$$\mathrm{Var}[V(t)-V(s)] = \frac{1}{c^2}\mathrm{Var}\left[W(c^2t)-W(c^2s)\right] = \frac{1}{c^2}\left(c^2(t-s)\right) = t-s \tag{6.3}$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

Con todo lo anterior se concluye que, V es un movimiento browniano.

□

Exercise 6.2. Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

Listing 6.1 `Browniano escalado, con c=1/5.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)
T = 1
n= 100
dt = 1 / (n - 1)
dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n - 1)
w = np.concatenate(([0],dw.cumsum()))

time = np.linspace(0,T, n)
c = 0.2  # 1/5
c_time = c**2 * time
c_w = c**(-1) * w

fig, browniano_escalado = plt.subplots(2)
browniano_escalado[0].plot(time, w)
browniano_escalado[1].plot(c_time, c_w)
browniano_escalado[0].set_title('Movimiento browniano')
browniano_escalado[1].set_title('Moviemiento browniano escalado')
plt.show()
```

Exercise 6.3. Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número

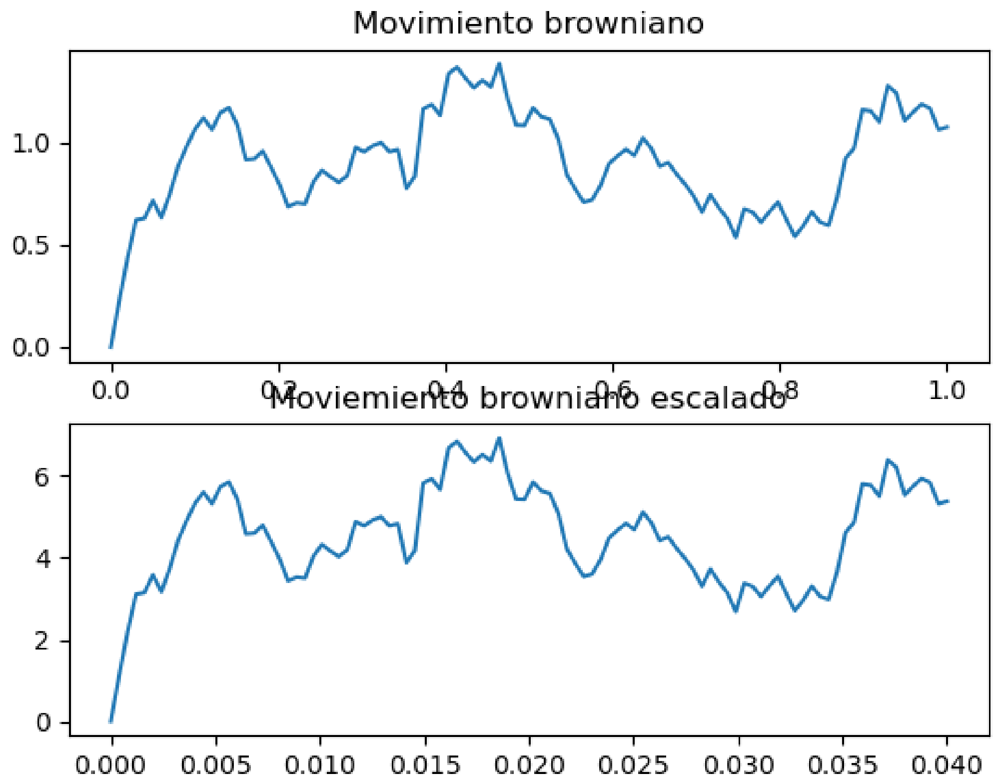


Figure 6.1: Figura 1

de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de una refinamiento con $2N$ incrementos.

Listing 6.2 `Browniano refinado, con refinamiento 2N.py`

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(123456789)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)
    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t,t_half,W, W_refined
```

Exercise 6.4. En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

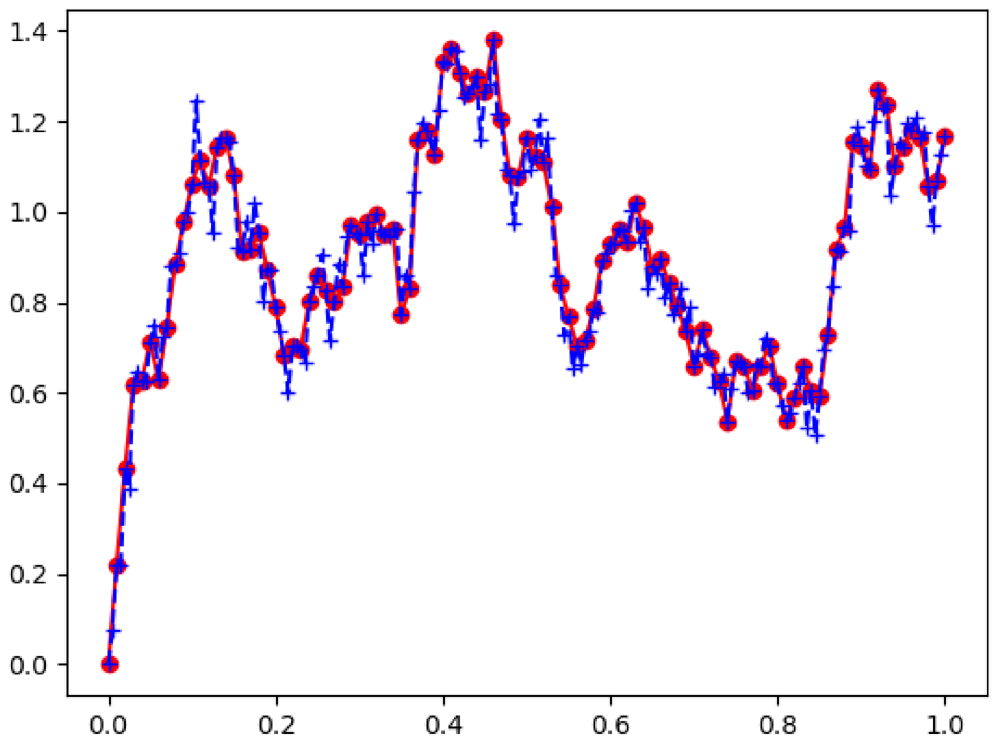


Figure 6.2: Figura 2

Listing 6.3 `Browniano refinado, con refinamiento 2N y 100 incrementos.py`

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import h_b_r as hbr

a, b, c, d = hbr.refined_brownian_2n(1, 100)

plt.plot(a, c, 'r-+')
plt.plot(
    b,
    d,
    'g*--',
    # alpha = transparecia

    )
plt.show()
```

7 Tarea 5

Exercise 7.1. Demuestre que el movimiento browniano satisface

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|.$$

Proof. Consideremos dos casos:
Si $t > s$.

$$\begin{aligned} E\left[|W(t) - W(s)|^2\right] &= E\left[(W(t) - W(s))^2\right] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

ya que, $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$.
Mientras que si $t \leq s$.

$$\begin{aligned} E\left[(W(t) - W(s))^2\right] &= E\left[(W(s) - W(t))^2\right] \\ &= s - t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E\left[|W(t) - W(s)|^2\right] = |t - s|$$

□

Exercise 7.2. Dados $W(t_i)$ y $W(t_{i+1})$, demuestre que la variable aleatoria

$$W(t_{i+\frac{1}{2}}) := \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t \xi}, \quad \xi \sim N(0, 1)$$

satisface las tres condiciones C1, C2, C3 de la definicion de movimiento Browniano.

Proof. (C1) Veamos que $W(0) = 0$, cuando $t = 0$.
Se tiene por definicion del proceso que,

$$W(0) = \frac{1}{2}(W(0) + W(0)) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta(0)\xi} = 0.$$

Por la propiedad C1 se satisface.

(C2) Que tenga incrementos estacionarios.
Notemos que

$$\begin{aligned} W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i) &= \frac{1}{2}\left[W(t_{i+1}) + W(t_i)\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi - \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_i)) \\ &= \frac{1}{2}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E\left[W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i)\right] &= E\left[\frac{1}{2}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]\right] + E\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] \\ &= \frac{1}{2}E\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E[\xi] \\ &= 0 \quad \text{ya que, } E[\xi] = 0 \text{ y } E\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] = 0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var\left[W(t_{i+\frac{1}{2}}) - W(t_i)\right] &= Var\left[\frac{1}{2}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] && (7.1) \\ &= Var\left[\frac{1}{2}\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]\right] + Var\left[\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] && (7.2) \\ &= \frac{1}{4}Var\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + \frac{1}{4}\delta t Var[\xi] && (7.3) \\ &= \frac{1}{4}\delta t + \frac{1}{4}\delta t \quad \text{ya que, } Var[\xi] = 1 \text{ y } Var\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] = \delta t && (7.4) \\ &= \frac{1}{2}\delta t. && (7.5) \end{aligned}$$

Además, sabemos que la combinación lineal de normales es una nornal.
Por lo tanto $W(t_{i+\frac{i}{2}}) - W(t_i) \sim N\left(0, \frac{\delta t}{2}\right)$, con esto C2 se cumple.

(C3) Que tenga incrementos independientes.
Para esta parte usaremos que dos variables aleatorias X y Y son independientes si y solo si

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

calculemos $E\left[\left(W\left(t_{i+1}\right) - W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)\left(W(t_{j+1}) - W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)\right)\right]$ y definamos a $\Delta W(t_i) := W(t_{i+1}) - W(t_i)$.
Por lo anterior se tiene que:

$$E\left[\left(\Delta W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\Delta W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)\right)\right] = E\left[\left(\frac{1}{2}\Delta W\left(t_i\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right)\left(\frac{1}{2}\Delta W\left(t_j\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right)\right],$$

donde $\Delta W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) = W(t_{i+1}) - W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right)$ y $\Delta W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right) = W(t_{j+1}) - W\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right)$.\ Desarrollando la parte derecha de la igualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right)\left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right)\right] &= E\Big[\frac{1}{4}\Delta W(t_i)\Delta W(t_j) + \frac{1}{4}\Delta W(t_i)\sqrt{\delta t}\xi \\
&\quad + \frac{1}{4}\Delta W(t_j)\sqrt{\delta t}\xi + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right)^2\Big] \\
\text{ya que, } \Delta W(t_i), \Delta W(t_j) \text{ son independientes} &= \frac{1}{4}E\left[\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_j)\right] + \frac{1}{4}E\left[\Delta W(t_i)\right]\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] + \frac{1}{4}E\,[\Delta W \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right] + E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j)\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t} \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] + E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j)\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] + \frac{\delta t}{4} \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] + E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_j) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t} \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i)\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] + E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right]\frac{1}{2}\sqrt{\delta t}E\left[\xi\right] \\
&= E\left[\frac{1}{2}\Delta W(t_i) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta t}\xi\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right] \\
&= E\left[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $E\left[\left(\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right)\left(\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right)\right] = E\left[\Delta W(t_{i+\frac{1}{2}})\right]E\left[\Delta W(t_{j+\frac{1}{2}})\right]$, con lo que se concluye que se satisface la propiedad C3. Con todo lo anterior se concluye que $W(t_{i+\frac{1}{2}})$ define un Movimiento Browniano.

$\square$

Exercise 7.3. Generalice la formula en el {Exercise 10.2} para el caso, dado $W(t_i), W(t_{i+1})$, y $\alpha \in (0,1)$ el valor

$$W(t_i + \alpha dt)$$

satisface las tres condiciones que define un movimiento Browniano.

Proof. Observemos que

$$t_{i+\alpha} = \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i,$$

y

$$W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) \sim \alpha\sqrt{dt}N(0,1)$$

Definamos a

$$W(t_{i+\alpha}) = W\left(t_i + \alpha\Delta t\right) := \left(1-\alpha\right)W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y.$$

donde Y será una v.a independiente de $W\left(t\right)$.
Dado que,

$$\begin{aligned} W(t_{i+\alpha}) - W(t_i) &= \left(1-\alpha\right)W(t_i) + \alpha W(t_{i+1}) + Y - W_i \\ &= \alpha\left(W_{i+1} - W(t_i)\right) + Y. \end{aligned}$$

Entonces,

$$E\left[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)\right] - E[\alpha\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)] = E\left[Y\right] \Longrightarrow E[Y] = 0,$$

y

$$Var\left[W(t_{i+\alpha}) - W(t_i)\right] = \alpha^2 dt + Var\left[Y\right],$$

Así,

$$Var\left[Y\right] = dt\left(\alpha - \alpha^2\right),$$

entonces $Y = \sqrt{\alpha\left(1-\alpha\right)dt}\xi, \xi \sim N\left(0,1\right)$.
Con esto se cumple $C1$.

$$W\left(0\right) = 0.$$

y por construcción análogamente que el ejercicio anterior se satisfacen las propiedades C2 y C3.

$\square$

Exercise 7.4. Suponga que $X \sim N(0,1)$, sabemos que $E[X] = 0$ y $E(X^2) = 1$.
Además de la definción, el pésimo-momento satisface

$$E[X^p] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp(-x^2/2)dx.$$

Usando esta relación, demuestre que $E[X^3] = 0$ y $E[X^4] = 3$. Entonces deduce que un incremento Browniano $\delta W_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ satisface que $E[\delta W t_i^3] = 0$ y $E[\delta W t_i^4] = 3\delta t^2$.
Entonces encuentre una expresion para $E[X^p]$ para un entero positivo p

Proof. De la definición del p-esimo momento se tiene para $p = 4$, que

$$E\left[X^4\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

resolviendo esta integral por el método integración por partes, se tiene que $E\left[X^4\right] = uv - \int vdu$, donde $u = x^3 \Longrightarrow du = 3x^2dx$ y $dv = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$, calculemos primero v,

$$\begin{aligned}
v &= \int x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \qquad \text{sea } y = -\frac{x^2}{2} \Longrightarrow dy = -xdx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(y)dy \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(y) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo todo lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned}
E\left[X^4\right] &= -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)3x^2dx \\
&= -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 3E[X^2],
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$-x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x\to-\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto, dado que $E[X^2] = 1$, se concluye que

$$E\left[X^4\right] = 3.$$

Procediendo de igual manera que el caso anterior, se tiene que:

$$E\left[X^3\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

tomando $u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx$ y dv, v igual al caso anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
E\left[X^3\right] &= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -2x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + 2E[X] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

usando el hecho que $E[X] = 0$ y

$$-x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \lim_{x\to-\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$E\left[X^3\right] = 0.$$

De manera general se tiene que,

$$\begin{aligned}
E\left[X^p\right] &= -x^{p-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -(p-1)x^{p-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= 0 + (p-1)E[X^{p-2}] \\
&= (p-1)E[X^{p-2}].
\end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que $\delta W_i \sim N\left(0, \delta t\right)$, donde $\delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces

$$Z = \frac{\delta W_i}{\sqrt{\delta t}} \sim N\left(0, 1\right),$$

que por lo visto anteriormente, para $p = 4$.

$$E\left[Z^4\right] = 3 \Longrightarrow E[(\delta W_i)^4] = E[Z^4](\delta t)^2 = 3(\delta t)^2$$

y para $p = 3$, resulta

$$E[Z^3] = 0 \Longrightarrow E[(\delta W_i)^3] = E[Z^3](\delta t)^{3/2} = 0.$$

$\square$

Exercise 7.5. Suponga que $X \sim N(0,1)$. Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$E[\exp(a+bX)] = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Por lo tanto deduzca que

$$E[\exp(t + \frac{1}{4}W_t)] = \exp\left(\frac{32}{33}t\right).$$

Proof. Se tiene que

$$E\left[\exp\left(a+bX\right)\right] = \exp\left(a\right) E\left[\exp\left(bX\right)\right],$$

observemos que $bX \sim N\left(0, b^2\right)$ además, $E\left[\exp\left(bX\right)\right]$ es la función generadora de momentos cuando $t = 1$

$$M_{bX}\left(1\right) = E\left[\exp\left(bX\right)\right] = \exp\left(\frac{b^2}{2}\right),$$

sustituyendo, resulta

$$E\left[\exp\left(a+bX\right)\right] = \exp\left(a\right)\exp\left(\frac{b^2}{2}\right) = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Ahora calculemos $E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right]$, se tiene que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\left(W_t - W_0\right)\right)\right],$$

entonces consideremos a $\dfrac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}$, observemos que, $\dfrac{W_t - W_0}{\sqrt{t}} \sim N\left(0,1\right)$, por lo tanto, podemos usar la fórmula anterior con $a = t$ y $b = \dfrac{1}{4}\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\left(W_t - W_0\right)\right)\right] &= E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}\sqrt{t}\left(\frac{W_t - W_0}{\sqrt{t}}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}t\right)\right) \\
&= \exp\left(t + \frac{1}{32}t\right) \\
&= \exp\left(\frac{33}{32}t\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que,

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = \exp\left(\frac{33}{32}t\right).$$

□

8

Exercise 8.1. Cree un scrip para muestrear 10000 rutas del proceso $u(t, W_t)$ definido en el ejercicio Exercise 7.5. Graficar 10 rutas de muestra y la media de 10000 rutas de muestra de este proceso $u(t, W_t)$.

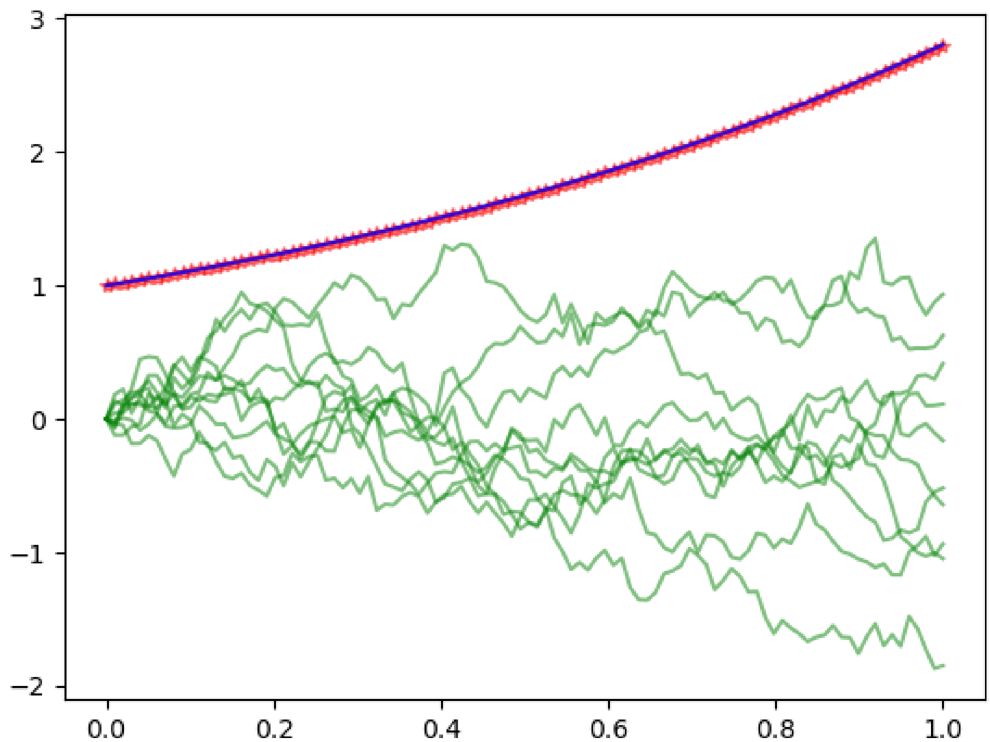


Figure 8.1: Figura 1

Exercise 8.2. Siguiendo las ideas para llenar un camino browniano en puntos $t_{i+\frac{1}{2}} := t_i + \frac{1}{2}\delta t$. Haga una función de Python para llenar un camino browniano dada una fracción $\alpha \in (0, 1)$ para llenar en los puntos $t_{i+\alpha} := t_i + \alpha\delta t$

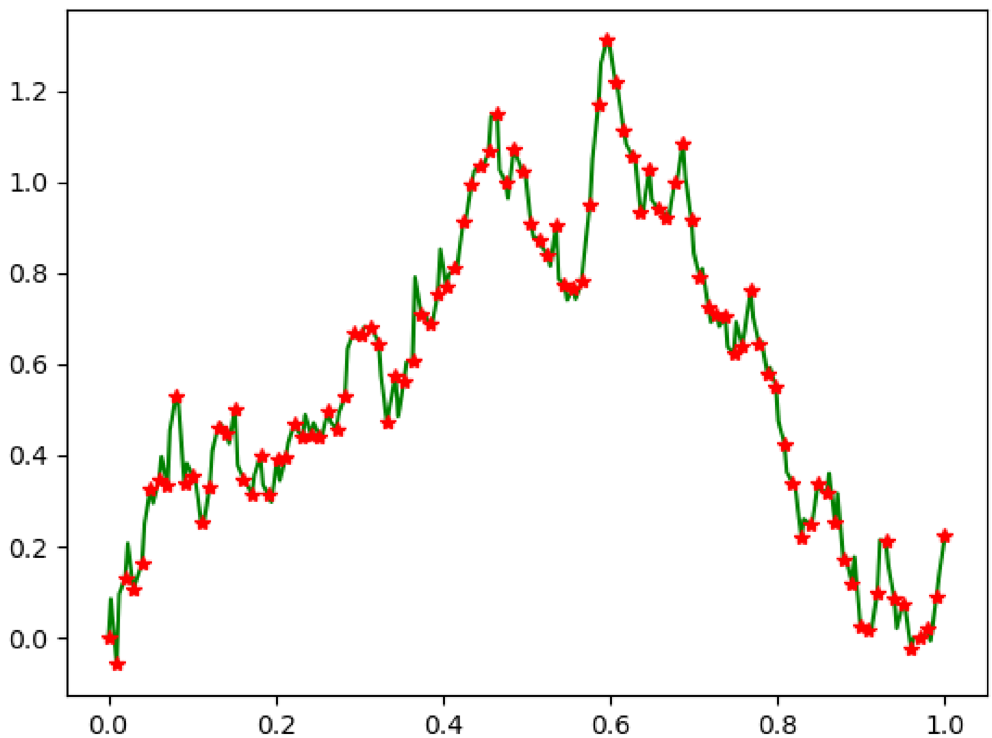


Figure 8.2: Figura 2

Listing 8.1 `simulación ejercicio 7-5.py`

Solution

```
import numpy as np
import aux_functions as aux
import matplotlib.pyplot as plt

def b_function(t, a, w):
    y = np.exp(t+ a * w)
    return y


n_samples = 10000
n = 100
t_initial = 0
t_final = 1

mean = np.zeros(n)
for i in range(n_samples):
    time, b_w = aux.strong_brownian(t_final,n)
    y = b_function(time,0.25, b_w)
    if i < 10:
        plt.plot(time,b_w,'g-',alpha = 0.5)
    mean += y

mean = (n_samples)**(-1) * mean
time = np.linspace(0,t_final, n_)

y = [np.exp(33 / 32 * t) for t in time]
plt.plot(time, mean, 'r-*', alpha = 0.5)
plt.plot(time, y,'b-',alpha = 0.8)
plt.show()
```

Listing 8.2 `simulación para llenar un camino browniano con alpha=0,3.py`

Solution

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import aux_functions as aux


t_final = 1
n = 100
delta_t = 1/(n - 1)
alpha = 0.3

prng = np.random.RandomState(123456789)

time, w = aux.strong_brownian(1,n)

y = np.sqrt(delta_t *(alpha - alpha ** 2)) * prng.standard_normal(n - 1)

w_ = np.roll(w, -1)

w_alpha = alpha * w_ + (1 - alpha) * w
w_alpha = np.delete(w_alpha, -1)
w_alpha += y
w_ref = np.zeros(2* n -1)

w_ref[0::2] = w
w_ref[1::2] = w_alpha

time_ref = np.zeros(2 * n - 1)

for i in range(2 * n - 1):
    if i % 2 == 0:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)]
    else:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)] + alpha * delta_t

plt.plot(time_ref,w_ref,'g-')
plt.plot(time, w,'ro')
plt.show()
```

9 Tarea 7

Exercise 9.1. Sea $W(t)$ un Movimiento Browniano y Z_i una colección de variables aleatorias i.i.d, con distribución $N\left(0, \frac{\delta t}{4}\right)$.
Pruebe que la suma

$$\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right),$$

tiene valor esperado igual a cero y una varianza de $O(\delta t)$.

Proof. Sin perdida de generalidad dado como estan definidas Z_i y $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ podemos suponer que son variables aleatorias independientes para cada $i = 1, \ldots, L$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] &= \sum_{i=0}^{L} \mathbb{E}\left[Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{L} \mathbb{E}(Z_i)\mathbb{E}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) \\
&= 0 \quad \text{ya que, por hipótesis, } \mathbb{E}(Z_i) = 0 \text{ y } \mathbb{E}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] = 0.$$

Ahora calculemos la varianza; sabemos que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, sustituyendo resulta

$$\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] \quad \text{usando el hecho que tiene valor esp}
\end{aligned}$$

Por el Teorema multinomial, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right]^2 + 2\sum_{i\neq j}^{L} Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1})\right.\\
&= \sum_{i=0}^{L}\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right]^2 + 2\sum_{i\neq j}^{L}\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1}\right.
\end{aligned}
$$

Dado que $i \neq j$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $i < j$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1})-W(t_j))\right] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}_j\right]\}\\
&= \mathbb{E}\{[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))Z_j]\mathbb{E}\left[(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}_j\right]\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_i(W(t_{i+1})-W(t_i))\right]^2 &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\left[Z_i^2(W(t_{i+1})-W(t_i))^2|\mathcal{F}_i\right]\}\\
&= \mathbb{E}\{Z_i^2\mathbb{E}\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))^2|\mathcal{F}_i\right]\}\\
&= \mathbb{E}[Z_i^2](t_{i+1}-t_i)\\
&= \frac{\delta t}{4}(t_{i+1}-t_i),
\end{aligned}
$$

sustituyendo todo lo anterior, resulta

$$
\begin{aligned}
Var\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)\right] &= \sum_{i=0}^{L}\frac{\delta t}{4}(t_{i+1}-t_i)\\
&= \frac{\delta t}{4}(t_{L+1}-t_0).
\end{aligned}
$$

Para un L suficientemente grande podemos considerar que, dado un $\varepsilon > 0$, tal que, $(t_{L+1}-t_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, así

$$
Var\left[\sum_{i=0}^{L} Z_i\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)\right] \leq \varepsilon\delta t.
$$

Por lo tanto, con esto se concluye que, la varianza es de orden δt.

$\square$

Exercise 9.2. La regla del punto medio de la integral de Riemann de una función $h \in C^2([a,b])$ sobre una partición de L puntos del intervalo $[a,b]$ está dada por,

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} h\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)\delta t.$$

Use la relación

$$W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \underbrace{Z_i}_{i.i.d. \sim N(0, \delta t/4)},$$

y el ejercicio anterior para demostrar que la regla del punto medio de la integral de Riemann implica que

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2.$$

Proof. Sea $\Delta_L = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0,T]$. De la regla del punto medio, aplicada para $h(t) = W(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)dW(t) &= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} \left[\frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + Z_i\right](W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} \frac{1}{2}\left(W(t_{i+1})^2 - W(t_i)^2\right) + \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \frac{1}{2}\left(W(T)^2 - W(0)^2\right) + \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \frac{1}{2}W(T)^2 + \lim_{\delta t \to 0,\, L \to \infty} \sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)).
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior solo nos faltaria demostrar que,

$$\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \to 0 \text{ en } L^2$$

es decir,

$$\lim_{\|\Delta_L\| \to 0} E\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] = 0$$

Del ejercicio anterior, sabemos que

$$E\left[\left(\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2\right] = O(\delta t) \leq \varepsilon \|\Delta_L\|,$$

así, tomando el limite cuando $\|\Delta_L\| \to$ se tiene que,

$$\sum_{i=0}^{L} Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \to 0 \text{ en } L^2,$$

por lo tanto, sustituyendo este último resultado, se concluye que

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2$$

□

Exercise 9.3. Usando la aproximación de la suma de Riemann

$$\int_0^T h(t)dW(t) \sim \sum_{i=0}^{L} h(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)), \tag{9.1}$$

argumente que,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] = \frac{T^3}{3}.$$

Por tanto, enuncie la isometría de Itô y deduzca que esta isometría es válida para el caso $h(t) = t$.

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. De la aproximación de la suma de Riemann, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T tdW(t) &\sim \sum_{i=0}^{L} t_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ \Longrightarrow \left(\int_0^T tdW(t)\right)^2 &\sim \left(\sum_{i=0}^{L} t_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2, \end{aligned}$$

del Teorema Multinomial, se sigue que

$$\left(\sum_{i=0}^{L} t_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))\right)^2 = \sum_{i=0}^{L} t_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2\sum_{i\neq j} t_i t_j (W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

de las relaciones anteriores se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] &\sim \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} t_i^2(W(t_{i+1})-W(t_i))^2 + 2\sum_{i\neq j} t_i t_j (W(t_{i+1})-W(t_i))(W(t_{j+1})-W(t_j))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{L} t_i^2 \mathbb{E}(W(t_{i+1})-W(t_i))^2 + 2\sum_{i\neq j} t_i t_j \mathbb{E}\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))(W(t_{j+1})-W(t_j))\right] \\
&= \sum_{i=0}^{L} t_i^2 (t_{i+1}-t_i),
\end{aligned}
$$

además, observemos que,

$$
\lim_{L\to 0} \sum_{i=0}^{L} t_i^2(t_{i+1}-t_i) = \int_0^T t^2 dt = \frac{T}{3}
$$

entonces, de esto último se concluye que,

$$
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] = \frac{T}{3}.
$$

Por otro lado, de la isometría de Itô, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T tdW(t)\right)\left(\int_0^T tdW(t)\right)\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}(t^2)dt \\
&= \int_0^T t^2 dt \\
&= \frac{T}{3}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la isometría de Itô se cumple para $h(t) = t$

$\square$

Exercise 9.4. Escriba una función de Python para calcular la integral de Itô del movimiento Browniano $W(t)$ sobre $[0, T]$.

Listing 9.1 `calculando la integral de Itô del movimiento Browniano W(t).py`

Solution

```
import numpy as np

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n

    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()

        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w



def f(x, t):
    y = x
    return y



def fB(partition, x, t):
    y = 0
    for i in range(len(partition) - 1):

        if partition[i] <= t < partition[i + 1]:
            y = f(x, t)
    return y


def ito_n(n, t):
    time, w = strong_brownian(t, n)
    integral = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1):

        integral[i] = fB(time, w[i], time[i]) * (w[i + 1] - w[i])
    ito = integral.sum()
    return w, ito
```

10 Tarea 8

Exercise 10.1. Use la aproximación de la suma de Riemann la ecuación (Equation 9.1). Muestra la propiedad de linealidad de la integral estocástica. Es decir,

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$, de la aproximación de la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), se satisface que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dW_t &\sim \sum_{i=0}^{L} (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{L} \alpha f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \sum_{i=0}^{L} \beta g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{L} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \beta \sum_{i=0}^{L} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))
\end{aligned}$$

observemos que,

$$\alpha \sum_{i=0}^{L} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \text{ es la aproximacion de la suma de Riemann de; } \alpha \int_0^T f(t) dW_t,$$

análogamente se tiene para $\beta \sum_{i=0}^{L} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$, por lo tanto de aquí se sigue que, tomando el limite cuando $L \to \infty$, resulta

$$\alpha \lim_{L\to\infty} \sum_{i=0}^{L} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \alpha \int_0^T f(t) dW_t$$

y

$$\beta \lim_{L\to\infty} \sum_{i=0}^{L} g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

entonces de estas dos últimas relaciones, se concluye que:

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

$\square$

Exercise 10.2. Escriba con detalle la demostración del siguiente Teorema, también incluya la demostración del Lema 5.18 del Mao.

Theorem 10.1 (6.1 del Mao)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, sea* ρ, τ *dos tiempos de paro tales que* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$*. Entonces*

$$\mathbb{E}\left(\int_\rho^\tau f(s)dW_s \mid \mathcal{F}_\rho\right) = 0, \tag{10.1}$$

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_\rho^\tau f(s)dW_s\right|^2 \mid \mathcal{F}_\rho\right) = \mathbb{E}\left(\int_\rho^\tau |f(s)|^2\, ds \mid \mathcal{F}_\rho\right). \tag{10.2}$$

Antes de la demostración del teorema Theorem 10.1, veamos el siguiente Lema.

Lemma 10.1 (5.18 del Mao)**.** *Sea* $f \in \mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R})$ *y sea* τ *un tiempo de paro tal que* $0 \leq \tau \leq T$*. Entonces*

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) = I(\tau),$$

donde $\{I(t)\}_{0\leq t\leq t}$ *es la integral indefinida de* f *dada por la Definición 5.11.*

Proof. La definición 5.11 del Mao, nos dice que,

$$I(t) = \int_0^t f(s)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

Por otro lado, de la definición 5.15 del Mao, también se tiene que

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) = \int_0^T \mathbb{I}_{[0,\tau]} f(s)dW(s)$$

así, por las dos definiciones anteriores se cumple que,

$$\int_0^\tau f(s)dW(s) = I(\tau)$$

□

Del Teorema 6.1. El Teorema de paro de la martingala de Doob, nos dice que:

$$E(I(\tau)|\mathcal{F}_\rho) = I(\rho) \tag{10.3}$$

Además la definición 5.15, nos dice que para ρ otro tiempo de paro, tal que $0 \leq \rho \leq \tau$, se cumple que

$$\int_\rho^\tau f(s)dW(s) = \int_0^\tau f(s)dW(s) - \int_0^\rho f(s)dW(s).$$

Entonces, aplicando la igualdad anterior, el Lema Lemma 10.1 y el Teorema de paro de la martingala de Doob, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_\rho^\tau f(s)dW_s \Big| \mathcal{F}_\rho\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\int_0^\tau f(s)dW(s) - \int_0^\rho f(s)dW(s)\right)\Big|\mathcal{F}_\rho\right) \\
&= \mathbb{E}(I(\tau) - I(\rho)|\mathcal{F}_\rho) \\
&= \mathbb{E}(I(\tau)|\mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}(I(\rho)|\mathcal{F}_\rho) \\
&= I(\rho) - I(\rho) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De aquí, se concluye que la primera relación del teorema Theorem 10.1 se satisface.
Por otro lado, nuevamente por el Teorema de paro de Doob, se tiene que

$$E(I^2(\tau) - \langle I, I\rangle_\tau|\mathcal{F}_\rho) = I^2(\rho) - \langle I, I\rangle_\rho, \tag{10.4}$$

y además, del Teorema 5.14 del Mao, se tiene que

$$\langle I, I\rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

De estos dos hechos anteriores, resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2|\mathcal{F}_\rho) &= \mathbb{E}(I^2(\tau) - 2I(\rho)I(\tau) + I^2(\rho)|\mathcal{F}_\rho) \\
&= \mathbb{E}(I^2(\tau)|\mathcal{F}_\rho) - 2I(\rho)\mathbb{E}(I(\tau)|\mathcal{F}_\rho) + I^2(\rho) \\
&= \mathbb{E}(I^2(\tau)|\mathcal{F}_\rho) - 2I(\rho)^2 + I^2(\rho) \\
&= \mathbb{E}(I^2(\tau)|\mathcal{F}_\rho) - I^2(\rho) \\
&= \mathbb{E}(\langle I, I\rangle_\tau - \langle I, I\rangle_\rho|\mathcal{F}_\rho) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^\tau |f(s)|^2 ds - \int_0^\rho |f(s)|^2 ds|\mathcal{F}_\rho\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_\rho^\tau |f(s)|^2 ds|\mathcal{F}_\rho\right).
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_\rho^\tau f(s)dW_s\right|^2 \mid \mathcal{F}_\rho\right) = \mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2|\mathcal{F}_\rho),$$

se sigue que la segunda relación del teorema Theorem 10.1 se satisface.

□

Exercise 10.3. Usando la aproximación de la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), la isometría de Itô y la identidad $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ pruebe que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)\right] = \int_0^T \mathbb{E}[f(t)g(t)]dt.$$

Proof. Sea $a = \int_0^T g(t)dW_t$ y $b = \int_0^T f(t)dW_t$, entonces de la identidad $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} 4\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right) &= \left(\int_0^T g(t)dW_t + \int_0^T f(t)dW_t\right)^2 - \left(\int_0^T g(t)dW_t - \int_0^T f(t)dW_t\right)^2 \\ &= \left(\int_0^T (g(t)+f(t))dW_t\right)^2 - \left(\int_0^T (g(t)-f(t))dW_t\right)^2, \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)\right] &= \mathbb{E}\left(\int_0^T (g(t)+f(t))dW_t\right)^2 - \mathbb{E}\left(\int_0^T (g(t)-f(t))dW_t\right)^2 \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}(g(t)+f(t))^2 dt\right) - \left(\int_0^T \mathbb{E}(g(t)-f(t))^2 dt\right) \quad \text{esto se sigu} \\ &= \left(\int_0^T (\mathbb{E}[(g(t)+f(t))^2] - \mathbb{E}[(g(t)-f(t))^2])dt\right) \\ &= \left(\int_0^T \mathbb{E}[(g(t)+f(t))^2 - (g(t)-f(t))^2]dt\right) \quad \text{usando nuevamente q} \\ &= 4\left(\int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)]dt\right) \end{aligned}$$

De aquí, se concluye que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g(t)dW_t\right)\left(\int_0^T f(t)dW_t\right)\right] = \left(\int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)]dt\right)$$

□

Exercise 10.4. Usando la suma de Riemann ecuación (Equation 9.1), deduzca que,

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3}W(T)^3 - \int_0^T W(t)dt.$$

Proof. Sea $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$ una partición del intervalo $[0, T]$. Primero, observemos que,

$$3W(t_i)^2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = W(t_{i+1})^3 - \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - 3\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i) - W(t_{i-1})^3,$$

entonces de la ecuación (Equation 9.1) y la relación anterior, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)^2 dW(t) &\sim \sum_{i=0}^{L} W(t_i)^2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}[W(t_{i+1})^3 - W(t_{i-1})^3] - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - \sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3}(W(T)^3 - W(t_0)^3) - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - \sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3}W(T)^3 - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 - \sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^2 W(t_i).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3 \to 0$ en L^2.
En efecto, calculemos la media de la variación cuadrática. Del Teorema Multinomial, resulta

$$\frac{1}{9}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\right)^2\right] = \frac{1}{9}\sum_{i=0}^{L}\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^6\right] + \frac{2}{9}\sum_{i\neq j}^{L}\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\left(W(t_{j+1}) - W\right.\right.$$

notemos que, como $i \neq j$, sin perdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\middle|\mathcal{F}_j\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\middle|\mathcal{F}_j\right]\right\} \\
&= \mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\right]\mathbb{E}\left[\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right]
\end{aligned}$$

dado que de la tarea 5 se demostro que, $\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\right] = 0$, de la última igualdad ses concluye que,

$$\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right] = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{9}\sum_{i=0}^{L}\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right)^3\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^3\right] = 0.$$

Por otro lado, también de la tarea 5, sabemos que

$$\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^6\right]=15\left(t_{i+1}-t_i\right)^3,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9}\sum_{i=0}^{L}E\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^6\right] &= \frac{5}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(t_{i+1}-t_i\right)^3\\
&\leq \frac{5}{3}\|\Delta_L\|^2\sum_{i=0}^{L}\left(t_{i+1}-t_i\right)\\
&\leq \frac{5}{3}\|\Delta_L\|^2 L\to 0,\quad \text{cuando, } \|\Delta_L\|\to 0.
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior se concluye que,

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^3\to 0.$$

Ahora veamos que,

$$\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2W(t_i)\to\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right)\ \text{ en } L^2$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2W(t_i)-\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(\sum_{i=0}^{L}W(t_i)\Big[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-(t_{i+1}\\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{i=0}^{L}W(t_i)^2\Big[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-(t_{i+1}\\
&= \sum_{i=0}^{L}\mathbb{E}\Big[W(t_i)^2\Big[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-(t_{i+1}
\end{aligned}$$

para $i<j$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[W(t_i)W(t_j)\Big(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\Big)\Big(\left(W(t_{j+1})-W(t_j)\right)^2-\left(t_{j+1}-t_j\right)\Big)\Big] &= \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\Big[W(t_i)W(t_j\\
&= \mathbb{E}\Big\{W(t_i)W(t_j)\Big(\\
&= \mathbb{E}\Big\{W(t_i)W(t_j)\Big(\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{L} W(t_i)W(t_j)\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]\left[\left(W(t_{j+1})-W(t_j)\right)^2-\left(t_{j+1}-t_j\right)\right]=0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right)^2\right]\middle|\mathcal{F}_i\right\} \\
&= \mathbb{E}\,\{\mathbb{E}\,[W(t_i)^2\,(\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4-2\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right) \\
&= \mathbb{E}\,\{\mathbb{E}\,[W(t_i)^2\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4-2W(t_i)^2\,(W(t_{i+1})-W \\
&= \mathbb{E}\,\{\mathbb{E}\left[W(t_i)^2\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4\middle|\mathcal{F}_i\right]-2\mathbb{E}\,[W(t_i)^2\,(W(t \\
&= \mathbb{E}\,\{W(t_i)^2\mathbb{E}\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^4|\mathcal{F}_i\right]-2W(t_i)^2\mathbb{E}\,[(W(t_{i-} \\
&= \mathbb{E}\,\{W(t_i)^2 3(t_{i+1}-t_i)^2-2W(t_i)^2(t_{i+1}-t_i)^2+W(t_i)^2\,(t_{i+} \\
&= 3t_i(t_{i+1}-t_i)^2-2t_i(t_{i+1}-t_i)^2+t_i(t_{i+1}-t_i)^2 \\
&= 2t_i(t_{i+1}-t_i)^2,
\end{aligned}$$

de esta última igualdad se sigue que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{L} W(t_i)^2\left[\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2-\left(t_{i+1}-t_i\right)\right]^2\right] &= \sum_{i=0}^{L} 2t_i(t_{i+1}-t_i)^2 \\
&\leq 2L\|\Delta_L\|\sum_{i=0}^{L} t_{i+1}-t_i \\
&= 2\|\Delta_L\|L^2 \to 0, \qquad \text{cuando } \|\Delta_L\|\to 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2 W(t_i) \to \sum_{i=0}^{L} W(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right).$$

Así, sustituyendo todo lo anterior, resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)^2 dW(t) &= \lim_{L\to\infty}\frac{1}{3}W(T)^3-\lim_{L\to\infty}\sum_{i=0}^{L}\left(W(t_{i+1})-W(t_i)\right)^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3}W(T)^3-\int_0^T W(t)dt
\end{aligned}$$

$\square$

Exercise 10.5. Verifique que la isometría de Itô, dada por

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T h(t)dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t)^2 dt\right], \tag{10.5}$$

se tiene cuando $h(t) := 1$.

Proof. Del ejercicio Exercise 11.1 con $h(t) = 1$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T h(t)dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T 1dW(t)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T 1dW_t\right)\left(\int_0^T 1dW_t\right)\right] \\
&= \int_0^T \mathbb{E}[1]dt \\
&= \int_0^T dt \\
&= T.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T h(t)^2 dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T 1^2 dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T dt\right] \\
&= \mathbb{E}[T] \\
&= T
\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T dt\right],$$

y con esto se concluye que, para $h(t) = 1$ se satisface que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T h(t)dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T h(t)^2 dt\right].$$

□

11 Tarea 9

El siguiente código calcula la aproximación de la Integral de Ito. Con $T = 1$, $L = 2^13$ correspondiente al error de $\mathcal{O}(10^{-3})$

```
import numpy as np
T = 1.0
L = 2**13
dt = T / L
dW = np.sqrt(dt) * np.random.normal(size=L)
W = np.zeros(L + 1)
W[1 :] = np.cumsum(dW)
ito_integral = np.sum(np.multiply(W[0: -1], dW))
err = np.abs(ito_integral - 0.5 * (W[-1] ** 2 - T))
```

Adapta este código para la Integral de Stratonovich correspondiente y evalue el error.

Escoja un integrando y computacionalmente verifique la Isometría de Ito de la Ecuación (Equation 10.5).

Exercise 11.1. Sea τ un tiempo de paro. Prueba que $W(t+\tau) - W(\tau)$ es un movimiento browniano.

Proof. Definamos a,

$$W_\tau(t) = W(t+\tau) - W(\tau),$$

Claramente $W_\tau(0) = 0$, ya que:

$$W_\tau(0) = W(\tau) - W(\tau) = 0.$$

Sea $s \leq t$, observemos que

$$\begin{aligned}
W_\tau(t) - W_\tau(s) &= W(t+\tau) - W(\tau) - [W(s+\tau) - W(\tau)] \\
&= W(t+\tau) - W(s+\tau),
\end{aligned}$$

Listing 11.1 `Aproximando la integral de Stratonovich.py`

Solution.

```
import numpy as np

def bw(t, n):
    dt = t / (n - 1)
    dw = np.sqrt(dt) * np.random.standard_normal(n - 1)
    w = np.zeros(n)
    w[1:] = dw.cumsum()
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

t_f = 1
n_p = 2** 13
t, wt = bw(t_f, n_p)
y = 0.5 * np.sqrt(t[1] - t[0]) * np.random.standard_normal(n_p)
stratonovich = [(0.5 * (wt[i + 1] + wt[i]) + y[i])* (wt[i + 1] - wt[i]) for i in range(n_p
stratonovich = np.array(stratonovich).sum()
print(np.abs(stratonovich - 0.5 * wt[-1] ** 2))
```

dado que $W(t+\tau) - W(s+\tau) \sim N(0, t-s)$ entonces de la última igualdad se sigue que

$$W_\tau(t) - W_\tau(s) \sim N(0, t-s).$$

De aquí se concluye que $W_\tau(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios.
Por lo tanto, con todo lo anterior se concluye que $W_\tau(t)$ es un Movimiento Browniano.

$\square$

Exercise 11.2. Sea $W_1(t), W_2(t)$ movimientos brownianos independientes con punto inicial $(W_1(0), W_2(0)) \neq (0,0)$.
Defina $X_t := \ln\left(W_1^2(t) + W_2^2(t)\right)$.

(a) Demuestre que X_t es una martingala local.
(b) Demuestre que $E|X_t| < \infty$ para cada $t > 0$.
(c) Demuestre que X_t no es una martingala.

Proof. (a) Consideremos a,

$$\tau_n = \inf_t \{X_t = n\}$$

Dado que X_t no es acotada, se tiene que,

$$\tau_n \to \infty, \text{ cuando } n \to \infty, \forall n.$$

Ahora probaremos que $X_{\min\{t,\tau_n\}}$ es una martingala.
Primero veamos que es adaptado a la filtración:
Si $\tau_n \geq t$ lo tenemos por construcción, ya que, en este caso

$$X_{\min\{t,\tau_n\}} = X_t,$$

y X_t si es adaptado con respecto a la filtración. Ahora si $\tau_n < t$, tenemos que,

$$X_{\min\{t,\tau_n\}} = X_{\tau_n} = n.$$

Además, observemos que,

$$\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} = n\right] \subset [\tau_n < t],$$

y dado que τ_n es tiempo de paro, se cumple que $[\tau_n < t] \in \mathcal{F}_t$. Por lo tanto, de la última relación se sigue que, $X_{\min\{t,\tau_n\}}$ es adaptado a la filtración.
Ahora solo nos queda probar que es una martingala. Sea $s < t$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
E\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} 1_{[t<\tau_n]} \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[X_{\min\{t,\tau_n\}} 1_{[\tau_n \leq t]} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[X_t 1_{[t<\tau_n]} \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq t]} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[X_s 1_{[s<\tau_n]} \mid \mathcal{F}_s\right] + E\left[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s 1_{[s<\tau_n]} + X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]} \\
&= X_{\min\{s,\tau_n\}},
\end{aligned}$$

y con esto se concluye que $X_{\min\{t,\tau_n\}}$ es una martingala.

(b) Observemos que, como $X_t = \ln\left(W_1^2(t) + W_2^2(t)\right)$, entonces

$$\exp(X_t) = W_1^2(t) + W_2^2(t).$$

Asi,

$$\begin{aligned}
E\left[\exp(X_t)\right] &= E\left[W_1^2(t)\right] + E\left[W_2^2(t)\right] \\
&= 2t,
\end{aligned}$$

dado que, $X_t \geq 0, \forall t$ y $X_t \leq \exp(X_t)$, entonces

$$E[X_t] \leq 2t < \infty, \forall t$$

(c) Primero recordemos lo siguiente:
Si X_t es martingala entonces $E[X_t]$ es constante, entonces este resultado nos diría que si $E[X_t]$

no es constante, X_t no es martingala.
Dado lo anterior, supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$E\left[X_t\right] = c, \forall t \Longrightarrow E\left[\ln\left(W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right)\right)\right] = c.$$

Así,

$$\int_0^\infty \ln\left(W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right)\right) \mathrm{d}\mathcal{P} = c,$$

de aquí se tendría que la integral es finita. Entonces

$$X_t \to 0, t \to \infty, \text{ c.s.}$$

De esto último y de la continuidad de la exponencial, se concluye que

$$W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right) \to 1, t \to \infty, \text{c.s}$$

Pero de lo demostrado del inciso anterior, sabemos que,

$$E\left[W_1^2\left(t\right) + W_2^2\left(t\right)\right] = 2t,$$

la cual converge a infinito, cuando $t \to \infty$. Así, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $E\left[X_t\right]$ no es constante, y se siguiría que X_t no puede ser martingala.

$\square$

Listing 11.2 `simulacion de la isometria de Ito con h(t)=t.py`

Solution

```
import numpy as np
import aux_functions as aux

n = 500
n2 = 500
time=1
integral1 = time**3/3

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w


E_If = 0
for j in range(n2):
   I_fn = 0
   t,w = strong_brownian(time, n)
   for i in range(n-1):
      I_fi= t[i]*(w[i+1]-w[i])
      I_fn += I_fi
   I_f = I_fn ** 2
   E_If += I_f

print(n2 ** (-1) * E_If)
print(integral1)
```

12

Considere la ecuación diferencial estocástica lineal con ruido multiplicativo.

$$\mathrm{d}Y\left(t\right)=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)Y\left(t\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W\left(t\right) \tag{12.1}$$

Usando la función

$$u\left(t,x\right)=y_{0}\exp\left(\mu t+\sigma x\right),$$

y la diferencial

$$dS(t)=dW(t)$$

Aplique la Fórmula de Ito a la función

$$du(t,S_{t}).$$

Use esta relación para demostrar que

$$Y\left(t\right)=Y\left(0\right)\exp\left(\mu t+\sigma W\left(t\right)\right), \tag{12.2}$$

resuelve (Equation 12.1). Es decir,

$$dY(t)=du(t,S_{t})=\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)u(t,S_{t})dt+\sigma u(t,S_{t})dW_{t}$$

Solution. Consideremos

$$u\left(t,x\right)=y_{0}\exp\left(\mu t+\sigma x\right)$$

calculando las derivadas parciales, resulta

$$\begin{aligned}\partial_{t}u&=\mu u\\ \partial_{x}u&=\sigma u\\ \partial_{xx}&=\sigma^{2}u.\end{aligned}$$

Además sabemos que,

$$\mathrm{d}S_{t}=\mathrm{d}W_{t}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u\left(t, Y_t\right) &= \mu u \mathrm{d}t + \sigma u \mathrm{dY}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 u \left(\mathrm{dY}_t\right)^2 \\
&= \mu u \mathrm{d}t + \sigma u \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\sigma^2 u \mathrm{d}t \\
&= \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{udt} + \ \mathrm{ud}W_t,
\end{aligned}
$$

así,

$$
\begin{aligned}
Y_t &= u\left(t, Y_t\right) \\
&= Y\left(0\right) \exp\left(\mu t + \sigma W_t\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, Y_t resuelve (Equation 12.1).

Use el hecho de que la relación en la ecuación en (Equation 12.2) resulve la ecuación (Equation 12.1), para confirmar que

$$
Y\left(t\right) = Y\left(0\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W\left(t\right)\right),
$$

resuelve,

$$
\mathrm{d}Y\left(t\right) = \mu Y\left(t\right) \mathrm{d}t + \sigma Y\left(t\right) \mathrm{d}W\left(t\right)
$$

Solution. Consideremos

$$
u\left(t, x\right) = y_0 \exp\left(q_1 t + q_2 x\right)
$$

calculando las parciales, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\partial_t u &= q_1 u \\
\partial_x u &= q_2 u \\
\partial_{xx} &= q_2^2 u
\end{aligned}
$$

nuevamente, usando que,

$$
\mathrm{d}S_t = \mathrm{d}W_t
$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u\left(t, Y_t\right) &= q_1 u \mathrm{d}t + q_2 u \mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2} q_2^2 u \left(\mathrm{d}Y_t\right)^2 \\
&= q_1 u \mathrm{d}t + q_2 u \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2} q_2^2 u \mathrm{d}t \\
&= \left(q_1 + \frac{1}{2} q_2^2\right) u \mathrm{d}t + q_2 u \mathrm{d}W_t,
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
q_2 &= \sigma \\
q_1 + \frac{1}{2}\sigma^2 &= \mu \Longrightarrow q_1 = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2,
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de lo anterior se sigue que,

$$Y_t = Y\left(0\right) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$\mathrm{d}S\left(t\right) = \left(a_1 \mathrm{S}\left(t\right) + a_2\right) \mathrm{d}t + g\left(S\left(t\right)\right) \mathrm{d}W\left(t\right),$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier función global de Lipschitz con crecimiento lineal, y a_1, a_2 son dos constantes diferentes de cero. Use la forma integral de la ecuación diferencial estocástica, la propiedad de martingala de la integral de Ito y la notación

$$m\left(t\right) = E\left[X_t\right],$$

para deducir que

$$m\left(t\right) - m\left(0\right) = a_1 \int_0^t m\left(s\right) \mathrm{d}s + a_2 t$$

Usando que $m\left(t\right)$ es la solución

$$\frac{\mathrm{d}m\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = a_1 m\left(t\right) + a_2, m\left(0\right) = E\left[X_0\right]$$

Finalmente, muestre que

$$E\left[X\left(t\right)\right] = -\frac{a_2}{a_1} + \left(E\left[X\left(0\right)\right] + \frac{a_2}{a_1}\right) \exp\left(a_1 t\right)$$

Solution. De la formula Integral, se tiene que

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S(0) + \int_0^t (a_1 \mathrm{S}(t) + a_2)\,\mathrm{d}t + \int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s) \\
&= S(0) + a_1 \int_0^t \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t + \int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s),
\end{aligned}
$$

calculando esperanza, resulta

$$
m(t) = m(0) + a_1 \int_0^t m(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t + \int_0^t E[g(S(s))]\,\mathrm{d}B(s)
$$

entonces

$$
m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t + E\left[\int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}B(s)\right]
$$

Dado que, g es de lipschitz y de crecimiento lineal, y además $S \in L^2_{\mathrm{ad}}$, se sigue que, $g(S) \in L^2_{\mathrm{ad}}(\Omega_a^b)$, por lo tanto existe una constante c tal que

$$
E\left[\int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s)\right] = c, \ \forall t
$$

Por otro lado, sabemos que

$$
\int_0^t g(S(s))\,\mathrm{d}W(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n g(S(t_{i-1}))(B_i - B_{i-1}),
$$

además, para cada i

$$
\begin{aligned}
E[g(S(t_{i-1}))(B_i - B_{i-1})] &= E[E[g(S(t_{i-1}))(B_i - B_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}]] \\
&= E[g(S(t_{i-1}))\,E[(B_i - B_{i-1}) \mid \mathcal{F}_{i-1}]] \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, de los hechos anteriores, se tiene que

$$
m(t) - m(0) = a_1 \int_0^t m(t)\,\mathrm{d}t + a_2 t,
$$

ahora, considere su forma diferencial.

$$
\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = a_1 m(t) + a_2,
$$

la cual es una ecuación diferencial lineal. Ahora resolveremos esta ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} - a_1 m(t) = a_2,$$

definamos

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\int -a_1 \mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-a_1 t}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[um(t)\right] &= a_2 u \\ u(t)\, m(t) &= a_2 \int u(t)\, \mathrm{d}t \\ m(t) &= \frac{a_2}{u(t)} \int u(t)\, \mathrm{d}t \\ &= a_2 e^{a_1 t} \int e^{-a_1 t} \mathrm{d}t \\ &= -a_2 e^{a_1 t}\left[-\frac{1}{a_1} e^{-a_1 t} + C\right] \\ m(t) &= -\frac{a_2}{a_1} - C a_2 e^{a_1 t}, \end{aligned}$$

de la condición inicial se tiene que,.

$$\begin{aligned} m(0) &= -\frac{a_2}{a_1} - C a_2 \\ \Rightarrow C &= -\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} m(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E\left[X_t\right] = -\frac{a_2}{a_1} - \left[-\frac{a_2}{a_1} - E\left[X_0\right]\right] \exp\left(a_1 t\right)$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$\mathrm{d}S(t) = \left(\alpha(t)\, \mathrm{S}(t)\right) \mathrm{d}t + \beta(t)\, S(t)\, \mathrm{d}W(t), \quad S(0) = s_0,$$

con s_0 constante y funciones α, β integrables. Use la formula de Ito con la fórmula

$$u(t, x) = \ln\left(\frac{x}{S_0}\right),$$

para deducir que

$$S\left(t\right)=S\left(0\right)\exp\left(\int_0^t\left[\alpha\left(s\right)-\frac{1}{2}\beta^2\left(s\right)\right]\mathrm{d}s+\int_0^t\beta\left(s\right)\mathrm{d}W\left(s\right)\right)$$

Solution. Calculemos las parciales de u.

$$\begin{aligned}u_t&=0\\u_x&=\frac{1}{x}\\u_{xx}&=-\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u\left(t,S_t\right)&=\alpha\left(t\right)\mathrm{d}t+\beta\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right)-\frac{1}{2S_t^2}\left(dS_t\right)^2\\&=\alpha\left(t\right)\mathrm{d}t+\beta\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right)-\frac{1}{2S_t^2}\beta^2S_t^2\mathrm{d}t\\&=\left[\alpha\left(t\right)-\frac{\beta^2\left(t\right)}{2}\right]\mathrm{d}t+\beta\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right),\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)&=\int_0^t\left[\alpha\left(t\right)-\frac{\beta^2\left(t\right)}{2}\right]\mathrm{d}t+\int_0^t\beta\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right)\\S_t&=S_0\exp\left(\int_0^t\left[\alpha\left(t\right)-\frac{\beta^2\left(t\right)}{2}\right]\mathrm{d}t+\int_0^t\beta\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal.

$$\mathrm{d}S\left(t\right)=\left(\alpha\left(t\right)\mathrm{S}\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\beta\left(t\right)S\left(t\right)\mathrm{d}W\left(t\right),S\left(0\right)=s_0,$$

con constantes s_0 y funciones α,β integrables. Considere

$$\begin{aligned}\alpha\left(t\right)&=\sin\left(t\right)\\\beta\left(t\right)&=\frac{t}{1+t}\\s_0&=1,\end{aligned}$$

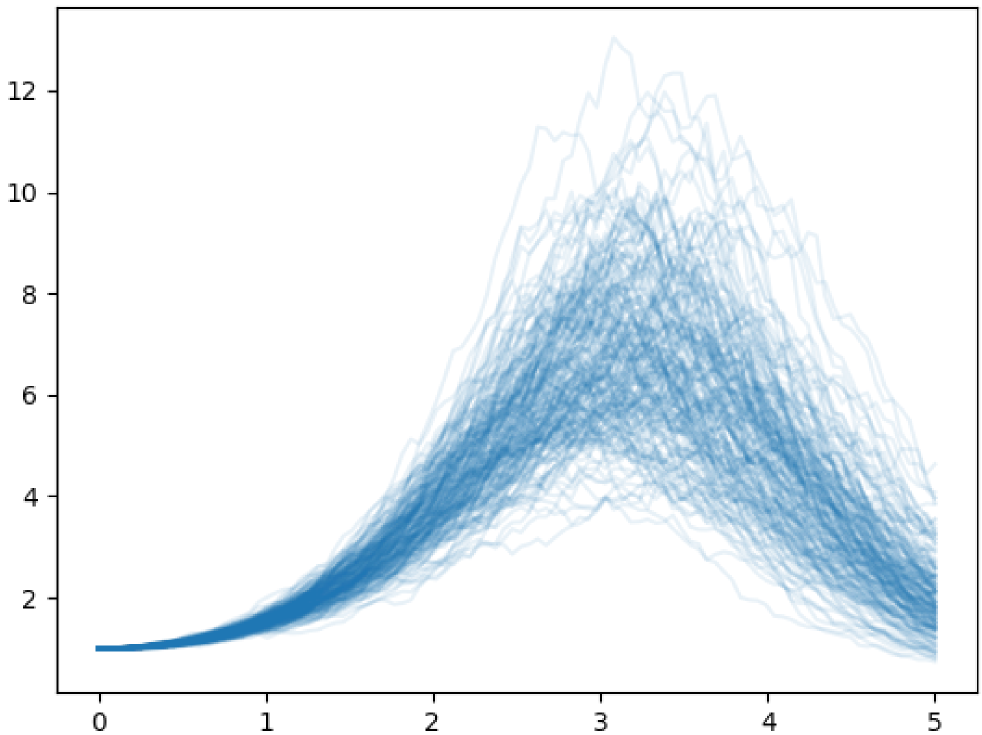
sobre el intervalo $[0,5]$.

Usando el acercamiento apropiado, la salida del código reproduce 200 realizaciones de la solución con el proceso de Euler-Maruyama.

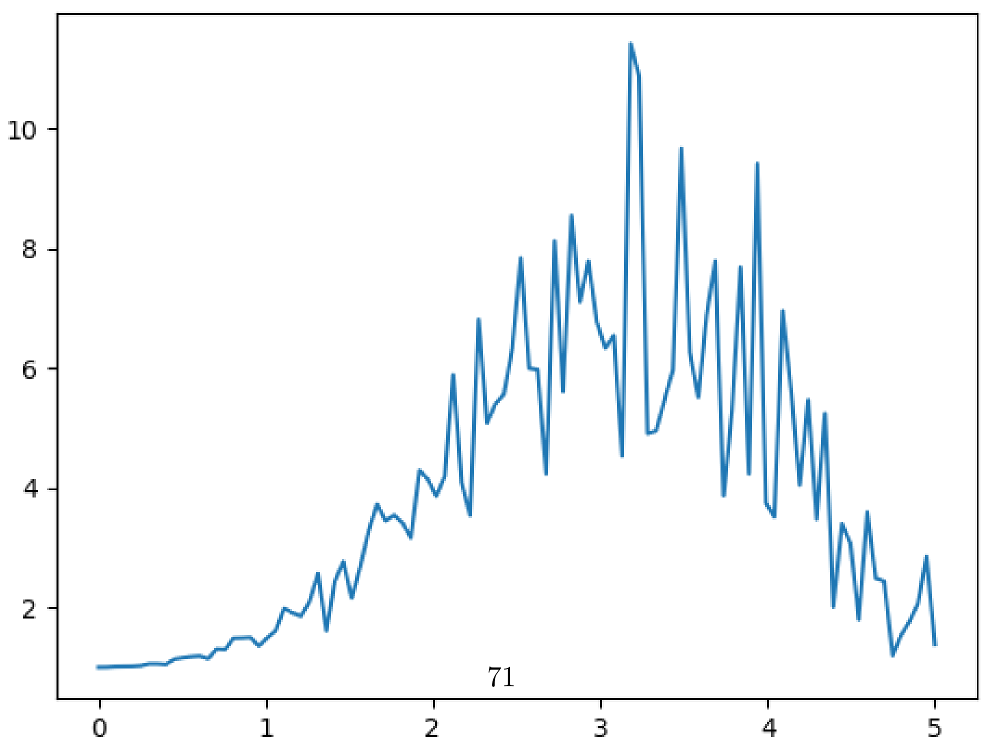
Adapta el código para obtener la media de la solución de 1000 realizaciones y comparalo con la media de la solución de la forma diferencial, usando los mismos parámetros. Ilustra la diferencia con un log-plot de

$$\ln \left| S\left(t\right) - \tilde{S}\left(t\right) \right|,$$

donde S es la solución de Euler y $\tilde{S}$ es la solución de la diferencial.



12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5



10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5

Listing 12.1 `comparacion de Euler-Maruyama con la version analitica.py`

Solution

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w


def alpha(t):
    y = np.sin(t)
    return y
def beta(t):
    y = t / (1.0 + t)
    return y

def drift(t, x):
    a = alpha(t) * x
    return a

def diffusion(t, x):
    b = beta(t) * x
    return b

samples = 200
sigma = 2 ** (-2)

n_p = 100
T = 5.0
x_0 = 1.0

def get_em_solution(x_0, T, N, sigma):
    x_t = np.zeros(N)
    x_t[0] = x_0
    dt = T / N
    t, W = strong_brownian(T, N)
    for i in np.arange(N - 1):
        w_inc = W[i + 1] - W[i]
        f = drift(t[i], x_t[i])
        g = diffusion(t[i], x_t[i])
        x_t[i + 1] = x_t[i] + f * dt + sigma * g * w_inc  # Importante la sigma.
    return t, x_t

fig, ax = plt.subplots()
df = []
for k in np.arange(samples):
```

References

Knuth, Donald E. 1984. "Literate Programming." *Comput. J.* 27 (2): 97–111. https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97.