Mécatro: Rapport d'automatique Groupe 7: Royer Jules, Simon Noah-Luc, Colin Matthieu, Bourderioux Armand

Contents

1	Introduction	2
2	Création du contrôleur théorique	3
3	Identification des paramètres physiques	12
4	Implémentation du contrôleur en Arduino	14

Introduction

Le but de la partie automatique du projet de mécatronique est de créer un contrôleur pour un robot "bolide" suiveur de ligne. Le contrôleur a d'abord été créé théoriquement dans le logiciel Matlab et testé sur un modèle de simulation Simulink, puis il a été implémenté informatiquement en Arduino afin d'être embarqué dans le robot.

Création du contrôleur théorique

Contrôle d'un mouvement rectiligne uniforme Le mouvement du bolide auquel nous nous intéressons est rectiligne uniforme le long de l'axe x du repère du laboratoire. Nous avons espoir qu'il approxime suffisamment la dynamique locale du robot par rapport à la courbe à suivre, on verra par la suite que cela est confirmé. En reprenant les notations et la modélisation du document 'Equations de la dynamique du Segway', les équations de la dynamique sous forme d'état sont (on négligera toutes les perturbations):

$$\begin{cases} \dot{p} = u \\ \dot{u} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\rho} k I^{+} - m_{b} dv^{2} \right) \\ \dot{\psi} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{lk}{2\rho} I^{-} + m_{b} duv \right) \\ \dot{I}^{+} = \frac{U^{+}}{L} - \frac{R}{L} I^{+} - \frac{2k}{L\rho} u \\ \dot{I}^{-} = \frac{U^{-}}{L} - \frac{R}{L} I^{-} - \frac{kl}{L\rho} v \\ \dot{y} = u \sin \psi \end{cases}$$

Les entrées sont U^+ , U^- .

Les sorties mesurées sont:

$$\begin{cases} \delta \phi^{+} = \delta \phi_{right} + \delta \phi_{left} = \frac{2}{\rho} p \\ \delta \phi^{-} = \delta \phi_{right} + \delta \phi_{left} = \frac{1}{\rho} \psi \\ c_{LF} = \frac{y}{\cos \psi} \approx y \end{cases}$$

Où on a défini:

- *p* la distance curviligne parcourue par le robot le long de sa trajectoire. Celle-ci doit figurer dans l'état pour mesurer les angles cumulés.
- *u* sa vitesse longitudinale.
- ψ l'angle entre l'axe horizontal x et la direction du robot.
- $I^+ = I_{right} + I_{left}$ la somme des courants des moteurs.
- $I^- = I_{right} I_{left}$ la différence des courants.
- $U^+ = U_{right} + U_{left}$ la somme des tensions aux bornes des moteurs.
- $U^- = U_{right} U_{left}$ la différence des tensions.
- $\beta = M + \frac{2I_y^w}{\rho^2}$
- $\gamma = I_{\psi} + m_b d^2$

- ϕ^+ la somme des angles des roues. Posons $\alpha = \frac{2}{\rho}$.
- ϕ^- la différence des angles des roues. Posons $\eta = \frac{1}{\rho}$.
- c_{LF} la mesure de l'écart entre le point A et la ligne (approximation en MRU horizontal).

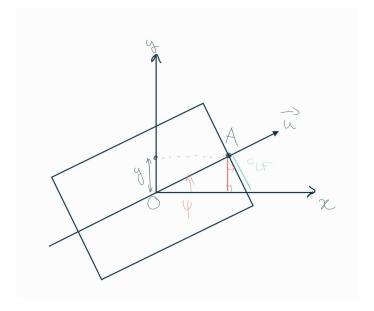


Figure 2.1: Ecart à la ligne dans l'hypothèse d'un faible angle.

Recherche des trajectoires d'équilibre Notre trajectoire d'équilibre du mouvement rectiligne uniforme est caractérisée par le système, avec u_0 la vitesse longiline de commande:

$$\begin{cases} u_0 = \overline{u} \\ 0 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\rho} k \overline{I^+} - m_b d \overline{v}^2 \right) \\ 0 = \overline{v} \\ 0 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{lk}{2\rho} I^- + m_b d \overline{u} \overline{v} \right) \\ 0 = \frac{\overline{U^+}}{L} - \frac{R}{L} \overline{I^+} - \frac{2k}{L\rho} \overline{u} \\ 0 = \overline{U^-} - \frac{R}{L} \overline{I^-} - \frac{kl}{L\rho} \overline{v} \\ 0 = \overline{u} \sin \overline{\psi} \end{cases}$$

Avec les sorties linéarisées:

$$\begin{cases} \delta \phi^{+} = \alpha \delta p \\ \delta \phi^{-} = \eta \delta \psi \\ \delta c_{LF} = \delta y \end{cases}$$

Ce qui donne comme trajectoire d'équilibre

$$\begin{cases} \underline{x} = \left(\overline{p} = u_0 t, \overline{u} = 0, \overline{\psi} = \psi_0 = 0, \overline{v} = 0, \overline{I^{\pm}} = 0, \overline{y} = 0\right) \\ \underline{e} = \left(\overline{U^+} = \frac{2k}{\rho} u_0, \overline{U^-} = 0\right) \end{cases}$$

Linéarisé autour de l'équilibre

$$\begin{cases} \delta \dot{p} = \delta u \\ \delta \dot{u} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\rho} k \delta I^{+} \\ \delta \dot{\psi} = \delta v \\ \delta \dot{v} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{lk}{2\rho} \delta I^{-} + m_{b} du_{0} \delta v \right) \\ \delta \dot{I}^{+} = \frac{\delta U^{+}}{L} - \frac{R}{L} \delta I^{+} - \frac{2k}{L\rho} \delta u \\ \delta \dot{I}^{-} = \frac{\delta U^{-}}{L} - \frac{R}{L} \delta I^{-} - \frac{kl}{L\rho} \delta v \\ \dot{y} = u_{0} \cos \psi_{0} \delta \psi + \delta u \sin \psi_{0} = u_{0} \delta \psi \end{cases}$$

Figure 2.2: Valeurs propres du système linéarisé.

Les valeurs propres obtenus sont négatives. Celles qui sont nulles sont dûes au fait que certaines variables d'état sont redondantes: p, y, donc le système est quand même stable.

Simplifications par perturbations singulières Les intensités de courant ont un transitoire bien plus rapide que ceux des grandeurs mécaniques (leurs valeurs propres $\frac{R}{I}$ sont bien supérieures aux autres).

On applique la méthode des perturbations singulières à:

$$\begin{cases} L\dot{I^+} = U^+ - RI^+ - \frac{2k}{\rho}u \\ L\dot{I^-} = U^- - RI^- - \frac{kl}{\rho}v \end{cases}$$

Avec $\varepsilon = L$ "très petit". En tout rigueur il faudrait introduire L_0 pour adimensionner ε .

On obtient:

$$\begin{cases} I^{+} = \frac{1}{R} \left(U^{+} - \frac{2k}{\rho} u \right) \\ I^{-} = \frac{1}{R} \left(U^{-} - \frac{kl}{\rho} v \right) \end{cases}$$

On vérifie la stabilité uniformément exponentielle de la branche d'équilibre avec :

$$\partial_{I^{\pm}} \begin{pmatrix} \frac{U^{+}}{L} - \frac{R}{L}I^{+} - \frac{2k}{L\rho}u \\ \frac{U^{-}}{L} - \frac{R}{L}I^{-} - \frac{kl}{L\rho}v \end{pmatrix} \Big|_{I^{\pm}=f(\underline{x},\underline{\rho})} = -\frac{R}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La branche a donc comme valeurs propres des réels négatifs, donc est ue-stable.

Système lent simplifié

$$\begin{cases} \delta \dot{p} = \delta u \\ \delta \dot{u} = \frac{1}{\beta} \frac{k}{\rho} \frac{1}{R} \left(\delta U^{+} - \frac{2k}{\rho} \delta u \right) \\ \delta \dot{\psi} = \delta v \\ \delta \dot{v} = \frac{1}{\gamma} m_{b} du_{0} \, \delta v + \underbrace{\frac{1}{\gamma} \frac{lk}{2\rho} \frac{1}{R}}_{b_{2}} \left(\delta U^{-} - \frac{lk}{\rho} \delta v \right) \\ \dot{y} = u_{0} \delta \psi \end{cases}$$

Découplage en sous-système "Sum" et "Dif" On peut séparer le système global en 2 sous-systèmes indépendants. Le premier, appelé "Sum", régit la dynamique du bolide en ligne droite:

Etat
$$\begin{cases} \delta \dot{p} = \delta u \\ \delta \dot{u} = Q \left(\delta U^+ - \frac{2k}{\rho} \delta u \right) \end{cases}$$
 Sorties
$$\begin{cases} \delta y_m^+ = \delta \phi^+ \end{cases}$$

Le second, appelé "Dif", régit la dynamique du bolide dans les virages:

Etat
$$\begin{cases} \delta \dot{\psi} = \delta v \\ \delta \dot{v} = b_1 \delta v + b_2 \left(\delta U^- - \frac{lk}{\rho} \delta v \right) \end{cases}$$
 Sorties
$$\begin{cases} \delta y_m^- = \delta \phi^- \\ \delta c_{LF} = \delta y \end{cases}$$

On obtient les valeurs propres suivantes:

Figure 2.3: Valeurs propres des sous-systèmes linéarisés. Environ égales aux plus lentes du linéarisé global.

Modélisation du contrôleur du sous-système "Sum" L'état étant de dimension 2, notre choix s'est porté sur un Proportionnel - Dérivé permettant de contrôler U^+ avec ϕ^+ :

$$\delta U^{+} = h_{1}(\delta \phi_{r}^{+} - \delta \phi^{+}) - h_{2}(\delta \dot{\phi}_{r}^{+} - \delta \dot{\phi}^{+}) = h_{1}\alpha(\delta p_{r} - \delta p) - h_{2}\alpha(\delta u_{r} - \delta u)$$

En Laplace:
$$\underline{U^{+}} = \frac{-h_{2}s + h_{1}}{1}(\underline{\phi_{r}^{+}} - \underline{\phi^{+}})$$

Pour ajuster le comportement de notre système en boucle fermée, nous imposons le polynôme caractéristique de $A^+ = \partial_{x^+} f$ où f^+ est la fonction de la dynamique de l'état \underline{x}^+ :

$$\chi_{A^+ \text{ désir\'e}} = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

Où l'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 sont à ajuster.

En boucle fermée:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{p} \\ \delta \dot{u} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q\alpha h_1 & +Q(\alpha h_2 - \frac{2k}{\rho}) \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}}_{A^+} \begin{pmatrix} \delta p \\ \delta u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q\alpha h_1 & -Q\alpha h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta p_r \\ \delta u_r \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{A^+} = s^2 - a_2 - a_1$$

Identification
$$\begin{cases} -a_2 = 2\xi\omega_0 \\ -a_1 = \omega_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\xi\omega_0}{-Q} + \frac{2k}{\rho} \right) \\ h_1 = \frac{\omega_0^2}{Q\alpha} \end{cases}$$

Modélisation du contrôleur du sous-système "Dif" Pour contrôler l'état de dimension 3, on a choisit un Proportionnel - Dérivé sur la différence des angles cumulés ϕ^- et un proportionnel sur l'écart à la ligne c_{LF} pour contrôler U^- :

$$\delta U^{-} = k_{1}(\delta \phi_{r}^{-} - \delta \phi^{-}) - k_{2}(\delta \dot{\phi}_{r}^{-} - \delta \dot{\phi}^{-}) + k_{5}(\delta c_{LFr} - \delta c_{LF}) = k_{1}\eta(\delta \psi_{r} - \delta \psi^{-}) - k_{2}\eta(\delta \dot{\psi}_{r} - \delta \dot{\psi}^{-}) + k_{5}(\delta y_{r} - \delta y)$$
En Laplace:
$$\underline{U^{-}} = \frac{-k_{2}s + k_{1}}{1}(\underline{\phi}_{r}^{-} - \underline{\phi}^{-}) + \frac{k_{5}}{1}(\underline{c_{LFr}} - \underline{c_{LF}})$$

Pour ajuster le comportement de notre système en boucle fermée, nous imposons:

$$\chi_{A^- \text{ désiré}} = s^3 + \sigma \sqrt{6}s^2 + \sigma^2 \sqrt{6}s + \sigma^3$$

En boucle fermée:

$$\begin{cases} \delta \dot{\psi} = \delta v \\ \delta \dot{v} = \underbrace{-k_1 b_2 \eta \delta}_{c_1} \psi + \underbrace{\left(b_1 + b_2 k_2 \eta - \frac{b_2 k l}{\rho}\right)}_{c_2} \delta v \underbrace{-b_2 k_5}_{c_3} \delta y \end{cases}$$

On a

$$A^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ u_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On identifie

$$\chi_{A^{-}} = s^{3} - c_{2}s - c_{1}s - u_{0}c_{3} = s^{3} + \sigma\sqrt{6}s^{2} + \sigma^{2}\sqrt{6}s + \sigma^{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_{1} = \frac{1}{b_{2}\eta}\sigma^{2}\sqrt{6} \\ k_{2} = \frac{1}{b_{2}\eta}\left(-\sigma\sqrt{6} - b_{1} + b_{2}\frac{kl}{\rho}\right) \\ k_{5} = \frac{\sigma^{3}}{u_{0}b_{2}} \end{cases}$$

Approximation des contrôleurs avec des dérivées filtrées L'utilisation de la dérivée filtrée vient du fait que les capteurs angulaires mesurent seulement les angles et nous avons besoin de leur dérivée pour le contrôleur. Une simple approximation par la tangente n'est pas suffisante car sensible au bruit de mesure.

Pour le sous-système "Sum", le contrôleur en dérivée filtrée s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \frac{\Delta \phi^+ - \eta}{\varepsilon} = n_s \left(\Delta \phi^+ - \eta \right) \text{ où } \Delta \phi^+ = \delta \phi_r^+ - \delta \phi^+ \text{ et } n_s = \frac{1}{\varepsilon} \\ \delta U^+ = h_1 (1 - T_{ds} n_s) \Delta \phi^+ + h_1 T_{ds} n_s \eta \text{ où } T_{ds} = \frac{h_2}{h_1} \end{cases}$$

De même pour le sous-système "Dif":

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \frac{\Delta \phi^- - \eta}{\varepsilon} = n_d \left(\Delta \phi^- - \eta \right) \text{ où } \Delta \phi^- = \delta \phi_r^- - \delta \phi^- \text{ et } n_d = \frac{1}{\varepsilon} \\ \delta U^- = k_1 (1 - T_{dd} n_d) \Delta \phi^- + k_1 T_{dd} n_d \eta + k_5 \Delta c_{LF} \text{ où } T_{dd} = \frac{k_2}{k_1} \text{ et } \Delta c_{LF} = \delta c_{LFr} - \delta c_{LF} \end{cases}$$

Réponses fréquentielles des systèmes fermés modélisés en Matlab Pour le système "Sum", nous ne voulions pas trop accélérer la dynamique, il ne nous semblait pas essentielle d'avoir une réponse extrêmement rapide pour atteindre la vitesse de consigne, par rapport au suivi de la ligne, géré par l'autre contrôleur. Ainsi nous avons pris $\omega_0 = |\lambda^+|$ valeur absolue de la valeur propre du système Sum, et l'amortissement $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, afin d'avoir en boucle fermée (avec $n_s = 150$):

Figure 2.4: Valeurs propres de "Sum" avec contrôleur PD, (gauche: contrôleur idéal, droite: dérivée filtrée). Leurs valeurs absolues sont sensiblement égales à celle en boucle ouverte. Celle du filtre est plus grande.

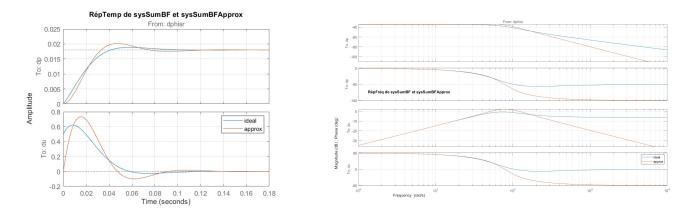


Figure 2.5: Réponses temporelles et fréquentielles du système "Sum" contrôlé (à un échelon de la somme des angles). Avec le contrôleur avec dérivée filtrée, la réponse oscille un peu et est en retard. La réponse sur u à une marge de phase de 180° et une marge de gain infinie ce qui est satisfaisant.

Pour le sous-système "Dif", nous avons accéléré la dynamique avec $\sigma = 15$ ($n_d = 150$).

		eigSysDifBFApprox :	=
eigSysDifBF =			
		-76.22 +	0i
-7.2474 +	6.8902i	-13.766 +	0i
-7.2474 -	6.8902i	-7.3037 +	5.6948i
-10 +	Oi	-7.3037 -	5.6948i

Figure 2.6: Valeurs propres de "Dif" avec contrôleur PD+P, (gauche: contrôleur idéal, droite: dérivée filtrée). Leurs valeurs absolues sont sensiblement égales à celles en boucle ouverte, ce qui montre que la dynamique n'a pas vraiment été accélérée, et celles du sous-système approché par la dérivée filtrée approximent assez bien celle du système théorique en boucle fermée. La valeur propre du filtre est 7 fois plus rapide que les autres.

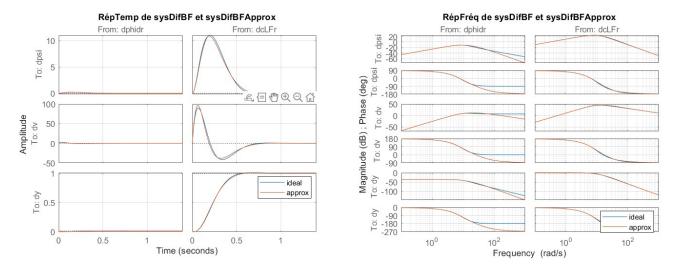


Figure 2.7: Réponses temporelles et fréquentielles du système "Dif" contrôlé. La réponse de y après un échelon sur cLF_r s'effectue sans oscillation ni dépassement en environ 0.6s ce qui est satisfaisant par rapport aux attentes de réactivité d'un bolide. L'échelon sur la différence des angles n'est pas vraiment notable. La marge de gain de la réponse de y à un échelon de ϕ_r^- est de 60dB, et celle en phase est infinie. Tandis que la marge de gain de la réponse de y à un échelon de cLF_r est de 16dB (satisfaisant) et celle en phase est nulle, ce qui n'est pas satisfaisant.

Etude sur le système de simulation Matlab Le fichier de Matlab s'intitule 'plant2MRUEBF.slx'.

Nous étudions la réponse en poursuite, ie le régime transitoire d'un état initial perturbé par un écart à la ligne de $\delta y = 3$ cm. La vitesse consigne est 0.3 m/s.

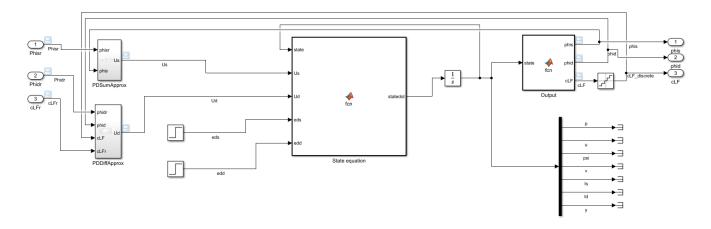
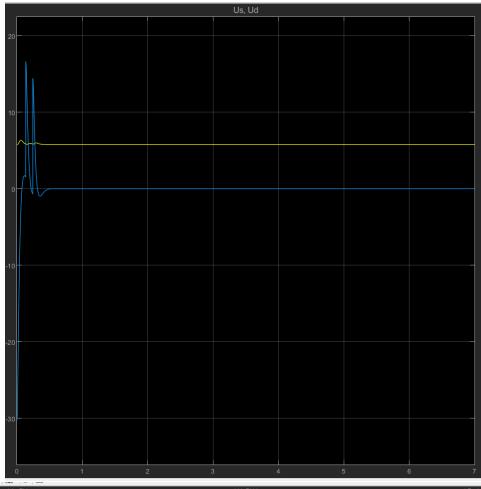


Figure 2.8: Schéma du modèle Matlab de simulation contrôlé. Les pertubations de tension sont mises à zéro. Un bloc de discrétisation est ajouté en fin de mesure du capteur de ligne cLF.



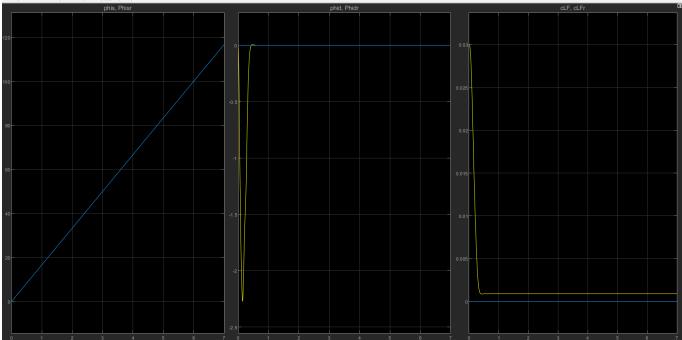


Figure 2.9: Tension aux bornes des moteurs (à gauche) et sorties mesurées (à droite), on note une oscillation notable de la différence des tension, est une valeur presque constante de leur somme de $\approx 6V$. On observe d'autre part une rapide décroissance de la mesure du capteur, sans oscillation, jusqu'à une position proche de la position d'équilibre, ce qui est satisfaisant. En considérant cet écart statique, nous nous sommes demandés si cela présentait un intérêt d'ajouter un terme intégral en c_{LF} pour l'annuler. Sachant que les mesures du capteur sont discrètes, nous avons préféré nous en passer, car l'erreur de l'ordre du mm est mesurée comme nulle sachant que la résolution du capteur est 0.09/7m >> 1mm.

Identification des paramètres physiques

Nous avons rassemblé toutes les valeurs numériques dans ce Google Sheet.

Estimation de la constante de couple k Les équations électriques à l'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} 0 = U - RI - k\Omega \\ \tau = kI \end{cases}$$

En se plaçant sans couple, donc sans courant, et en utilisant les courbes constructeurs, on calcule $k = \frac{U}{\Omega} V/(rad.s^-1)$.

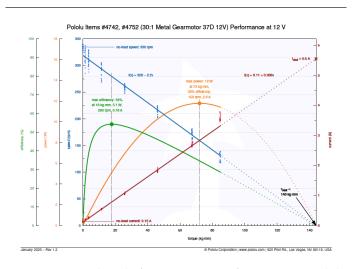


Figure 3.1: Courbes de fonctionnement fournies par Pololu.

Estimation des masses des pièces Toutes les pièces ont été pesées.

On a approximé la masse de l'arbre moteur et du rotor à la différence entre la masse pesée du moteur, et celle donnée par la CAO, car on a supposé que cette dernière correspondait uniquement à la structure extérieure du moteur, ie au stator.

Estimation des moments d'inertie Pour le moment d'inertie de l'unité roue + engrenage + rotor, notre première approche (et celle que nous avons gardée pour les simulations) a été d'approximer la géométrie du système à celle d'un disque, et d'utiliser la matrice d'inertie (cellule D34 du GSheet):

$$I_w(C_w) = \begin{pmatrix} m(\rho^2/4 + l_w^2/2) & 0 & 0\\ 0 & m(\rho^2/4 + l_w^2/2) & 0\\ 0 & 0 & m(R^2/4 + l^2/12) \end{pmatrix}$$

Comme autre approche, nous avons mesuré le temps de réponse de la vitesse angulaire de la roue à un échelon de 12V aux bornes du moteur. Nous avons mesuré la sommes des positions angulaires, que nous avons filtrée avec un filtre passe bas pour en obtenir une estimation de la dérivée, en supposant que cela ne fausse pas sensiblement le temps de réponse.

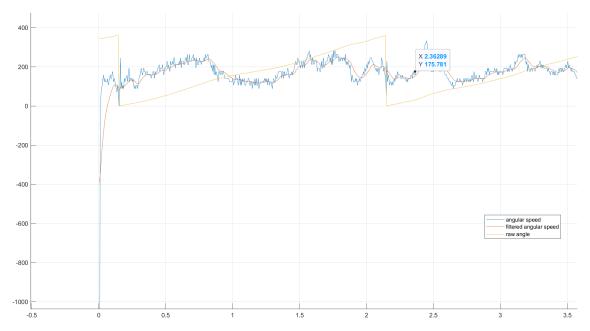


Figure 3.2: Vitesse angulaire (degrés/s) de la roue en fonction du temps (s).

Les données constructeurs fournissent en effet une relation linéaire entre la vitesse angulaire et le couple d'entrée.

$$\omega = a - b\tau$$

On a essayé d'exploiter le théorème du moment cinétique à l'unité roue+rotor:

$$I_w^y \dot{\omega} = \tau = \frac{a}{b} - \frac{\omega}{b}$$
$$\dot{\omega} + \frac{\omega}{T} = \frac{a}{T} \text{ où } T = I_w^y b$$
De solution: $\omega = a \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T} \right) \right)$

On trouve T comme l'abscisse de la courbe quand $y = a(1 - e^{-1}) \approx 0.63a$. Cependant l'asymptote mesurée vaut $a_{exp} = 200$ degrés. $s^{-1} = 3.5rad.s^{-1}$ ce qui est 10 fois plus lent que la valeur constructeur: $a_{th} = 320$ rpm $= 33.5rad.s^{-1}$

On trouve alors en abscisse de $\omega = 0.63 \cdot 200$ degrés. s^{-1} : T = 0.1s (cellule B56) puis $I_w^y = 44.2kg.m^2$ différent d'un ordre de grandeur de 10^5 des valeurs données par la CAO, ce qui est aberrant.

Enfin notre dernière approche a été la CAO, a l'aide de des estimations des masses (cellule F35). Les valeurs obtenues sont cette fois plus petite d'un facteur 100.

Il est suprenant et frustrant d'avoir tant de variance dans les mesures des paramètres.

Estimation des constantes électriques La résistance et l'inductance interne du moteur ont été trouvées sur Internet ici. Par manque de temps, nous n'avons pas comparé cela à des mesures sur notre bolide.

Implémentation du contrôleur en Arduino