Inlämningsuppgift 3: Matematisk modellering

Magnus Tomsic, mtomsic@kth.se
William Carlstedt, wcar@kth.se

1. Inledning

Denna uppgift går ut på att lösa matematiska problem med hjälp av Mathematica och skriva en kort rapport direkt i en egen Notebook. Rapporten skall, för varje uppgift, beskriva: problemet, figur, ange namn på variabler, lösningen till problemet inklusive resonemang och sedan diskutera resultatet.

Plagiering är inte tillåten, och källor måste anges när ni referera till annat material. Lämna in både en pdf-fil och notebook-filen i Canvas. Pdf-filen behövs för plagiatkontroll, då *.nb inte är accepeterad i URKUND.

2. Problem

Lös nedanstående problem. Problemets lösning och resultat *ska innehålla visualisering* där det är relevant.
Tänk på följande:
1. Använd lämpliga stilar från meny Format->Style, i notebooken.
2. När ni skriver formler i text-celler, använd matematisk stil (se datorövning 1).
3. Glöm inte att ange namn och enhet för axlarna i grafer.

1. Trafikflöde

Den här uppgiften går ut på och visa hur man kan använda linjära ekvationssystem för att studera trafikflödet genom ett trafiksystem. Trafiksystemet består av gator och korsningar där gatorna möts. Varje gata har ett visst flöde, som mäts i fordon per tidenhet. Vi ska beräkna trafikflödet för alla gatorna i trafiksystemet, givet flödet in till trafiksystemet. Vi gör ett viktigt antagande: *Trafikflödet bevaras i varje korsning.* Det betyder att ett fordon som når en korsning måste fortsätta genom trafiksystemet. Ett positivt värde på flödet flyter i pilens riktning och ett negativt flöde flyter i motsatt riktning.

Exempel (ej relaterat till figuren nedan):
Om flödet in till en fyrvägs korsning är y_1 fordon/tidsenhet respektive 30 fordon/tidsenhet och flödet ut från korsningen är y_2 fordon/tidsenhet respektive 50 fordon/tidsenhet, så gäller det att $y_1 + 30 = y_2 + 50$ i korsningen. Efter förenkling får vi $y_1 - y_2 = 20$. Varje korsning ger alltså en linjär ekvation i okända flöden y_1 och y_2. Om man löser ekvationssystemet så kan man bestämma flödet genom trafiksystemet.

Uppgift

a) Är vårt antagande om att flödet bevaras giltigt? När kan antagandet vara felaktigt?

Fordonen kanske svänger och tar en annan väg ut. Då kommer flödet ut och in en riktning inte nödvändigtvis vara lika.

b) Vilka andra förenklingar har vi antagit?

1. Att fordonen inte kraschar med varandra
2. Att alla fordon åker samma hastighet
3. Att ingen av fordonen stannar
4. Att inga av fordonen svänger och tar en annan väg ut

Studera vägssystemet i figur 1. Siffrorna anger trafikflödena i fordon per timme. Alla vägar är enkelriktade och trafiken följer pilarnas riktning.

c) Ställ upp ekvationssystemet.

$w+x = 190+241 = 431$
$x+y = 150+105 = 255$
$y+z = 110+230 = 340$
$w+z = 280+236 = 516$

d) Bestäm trafikflödet för vägsystemet.

```
In[1]:= Solve[{w + x == 431, x + y == 255, y + z == 340, w + z == 516}, {x, y, z, w}]

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[1]= {{y → 255 - x, z → 85 + x, w → 431 - x}}
```

Frågan har oändligt mycket svar.

e) Trafikflödet för en av *x, y, z* eller *w* begränsas till 100 eller färre fordon per timme på grund av vägarbete. Vad blir trafikflödet för de andra vägarna?

Om x = 100

```
In[2]:= Solve[{w + 100 == 431, 100 + y == 255, y + z == 340, w + z == 516}, {y, z, w}]
Out[2]= {{y → 155, z → 185, w → 331}}
```

Om y = 100

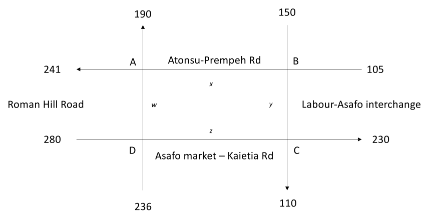
```
In[3]:= Solve[{w + x == 431, x + 100 == 255, 100 + z == 340, w + z == 516}, {x, z, w}]
Out[3]= {{x → 155, z → 240, w → 276}}
```

Om z = 100

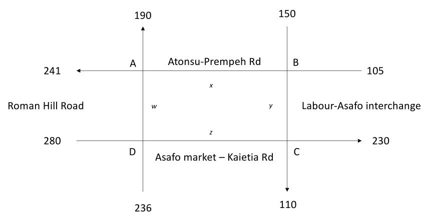
```
In[4]:= Solve[{w + x == 431, x + y == 255, y + 100 == 340, w + 100 == 516}, {x, y, w}]
Out[4]= {{x → 15, y → 240, w → 416}}
```

Om w = 100

```
In[5]:= Solve[{100 + x == 431, x + y == 255, y + z == 340, 100 + z == 516}, {x, y, z}]
Out[5]= {{x → 331, y → -76, z → 416}}
```

In[6]:= {


}

Out[6]= {


}

figur 1. Diagram av vägsystem i Kumasi, Ghana (efter Adu et al. [2014])

2. Kaniner

Leonardo av Pisa, även känd som Fibonacci (circa 1170-1250) skapade en av de äldsta matematiska modellerna av förökning. Han modellerade förökning av kaniner. Genom att modellera kaninpar kunde han undvika att ta hänsyn till individuella kaniner av olika kön. Modellen beskriver förökningen av kaniner från månad $n = 1$ där p_n är antal kaniner vid månad n. När en kanin föds, så är den en unge under en månad och sedan förökar sig kaninparen varje månad. Antal kaniner kan då beskrivs av en differensekvation:

$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$

där vi antar att vi har bara ett kaninpar vid månad $n = 1$, dvs intialvärdena är $p_1 = 1$ och $p_2 = 1$. Vilket betyder att $p_3 = 2$, $p_4 = 3$ och $p_5 = 5$..

a) Beräkna talföljden och rita en graf över den. Anpassa en lämplig funktion till punkterna och rita den i grafen.

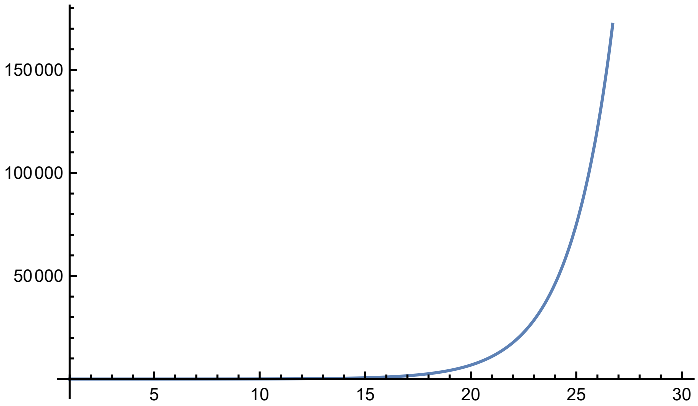
Talföljd: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

In[7]:=
```
f[n_] = FindSequenceFunction[{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89}, n]
```

Out[7]=
```
Fibonacci[n]
```

In[8]:=
```
Plot[Fibonacci[n], {n, 1, 30}]
```

Out[8]=



b) Undersök talföljden och diskutera tillväxtakten, det vill säga tidsderivatan.

In[9]:=
```
D[Fibonacci[n], n]
```

Out[9]=

$$\frac{\text{GoldenRatio}^{-n}\left(\text{GoldenRatio}^{2n}\,\text{Log}[\text{GoldenRatio}]+\text{Cos}[n\,\pi]\,\text{Log}[\text{GoldenRatio}]+\pi\,\text{Sin}[n\,\pi]\right)}{\sqrt{5}}$$

In[10]:=

$$\text{s}[\text{t\_}] := \frac{\text{GoldenRatio}^{-t}\left(\text{GoldenRatio}^{2t}\,\text{Log}[\text{GoldenRatio}]+\text{Cos}[t\,\pi]\,\text{Log}[\text{GoldenRatio}]+\pi\,\text{Sin}[t\,\pi]\right)}{\sqrt{5}};$$

c) Exponentialfunktionen är lösning till differentialekvationen $\frac{dx}{dt} = r\,x$ där r är tillväxt / populationsenhet, där vi antar att x är populationen. För att hantera att en viss plats bara kan ge mat till en viss mängd kaniner så kan man lägga till en korrektionsfaktor. Då får man logistiska tillväxtekvationen: $\frac{dx}{dt} = r\,x\left[\frac{K-x}{K}\right]$. När populationen närmar sig K så minskar populationsökningen till noll. Ekvationen kan lösas med hjälp av följande kommando:

In[11]:=
```
DSolve[{x'[t] == r x[t] (k - x[t]) / k, x[0] == x0}, x[t], t]
```

Solve: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

Out[11]=

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{e^{r\,t}\,k\,x0}{k - x0 + e^{r\,t}\,x0}\right\}\right\}$$

Bortse från felmeddelandet. Tilldela resultatet ovan till en funktion (jämför hur ni använde Solve i förra inlämningsuppgiften). Bestäm värdet på x0 och r baserade på vad ni kom fram till i uppgift a) och b) . Rita sedan en graf över funktionen med Plot och använd sedan Manipulate för att variera värdet på k. Bestäm giltighetsområdet för Fibonaccis modell som funktion av värdet på k.

In[12]:=

$$\text{g}[\text{t\_}] := \frac{e^{r\,t}\,k\,x0}{k - x0 + e^{r\,t}\,x0};$$

In[13]:=
```
k = 10;
x0 = 10;
r = 10;
DiscretePlot[{s[t], Fibonacci[t], g[t]}, {t, 0, 10}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[16]=