Apuntes de Introducción a las partículas elementales y Teoría Cuantica de Campos

Amaro A. Díaz Concha y Fernanda C. Mella Alvarez

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

”Todos los hombres por naturaleza desean saber”

— *Aristóteles de Estagira*

Prefacio

Este apunte está basado en las clases de ***Dr. Julio Oliva*** con el apoyo de diversas fuentes literarias las cuales estarán especificadas en la bibliografía.
Se compilarán los conocimientos necesarios y ejercicios resueltos para poder afrontar exitosamente cursos introductorios de **Partículas elementales** y **Teoría cuántica de campos**. Estos contenidos se dividirán en dos tomos los cuales serán los dos cursos dictados por el profesor, los cuales además, estarán divididos cada uno en 3 capítulos.
Además y como apoyo a la imaginación y los ejercicios se añadirá a cada ejercicis diversas interpretaciones que ayuden a relacionar la matemática expresada con fenómenos físicos.

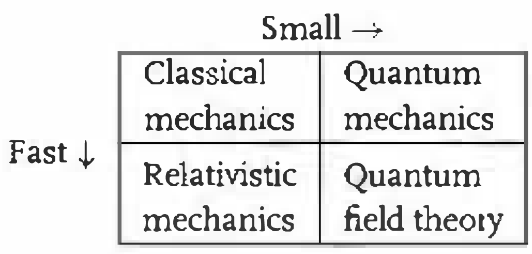
Cualquier consulta, notificación de error o posible aporte hacia este apunte debe enviarse al correo electrónico de cualquiera de los autores de este apunte, **amdiaz2022@udec.cl** ó **fmella2022@udec.cl**.

Índice general

Capítulo 1

Nociones Previas

En el estudio de partículas elementales, notamos que experimentalmente se observan efectos tanto cuanticos como relativistas fenomenologicamente. Por lo que para trabajar con ellas se deberá tener en cuenta tanto la mécanica cuántica como la relatividad especial. La teoría con la que más nos acomodará trabajar será la **Teoría Cuantica de Campos (QFT)** pues tomará ambos efectos en consideración y nos permitirá estudiar eventos que sucedan a velocidades comparables con la velocidad de la luz c en regiones pequeñas.



Pero ¿Qué es QFT? ENtenderemos la Teoría cuantica de campos como la cuantización de un campo clásico. De manera que incluyamos técnicas de mécanica cuántica (no relativista) al tomar los grados de libertad de un campo clásico y traducirlos tal que actue como operadores sobre un espacio de Hilbert. Por lo tanto en QFT serán operadores dependientes del espacio y el tiempo.

Es por esto que para poder estudiar QFT se deberán tener nociones tanto de mécanica clásica como cuántica. En este apunte, no se considerarán los efectos del campo gravitacional. Como las interacciones a estudiar ocurren en regiones pequeñas, el efecto gravitacional será considerado despreciable.

1.1. Mécanica Clásica

Desde la mécanica racional, es importante que nosotros tengamos claro conceptos como el significado de una acción S, el Lagrangiano L y más adelante conceptos de simetría y otros.

En esta primera sección, se disutirá la derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange, su utilidad; además de simentrías en transformaciones con sus cantidades conservadas asociadas.

1.1.1. Derivación de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sabemos de la mécanica lagrangiana que las ecuaciones de Euler-Lagrange nos servirán para derivar las ecuaciones de movimiento del sistema. Utilizando el principio de invarianza de Hamilton, estas ecuaciones se podrán derivar a partir de la acción $S[q(t)]$. Así, sea la acción $S[q(t)]$, donde $q(t)$ son las coordenadas generalizadas del sistema.

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \tag{1.1.1}$$

Ahora, ¿Cómo cambia S si $q(t)$ cambia un poco?

Sea $q(t)$ una función dependiente del tiempo, bien definida en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$. Donde los puntos $q(t_1)$ y $q(t_2)$ estarán fijos, de manera que aunque $q(t)$ cambie su valor en t_1 y t_2 no cambiara. Así, como se muestra en la figura [**citar**], si consideramos todos los caminos que puede tomar $q(t)$, diferenciados por una diferencia infinitesimal $\delta q = \Phi(t)$ que a su vez será dependiente del tiempo, se podrá variar la acción.

[foto clasica de la invarianza d la acción]

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q(t) + \phi(t)] - S[q(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t) + \phi(t), \frac{d}{dt}(q + \Phi)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \qquad (1.1.2) \\ & \qquad (1.1.3) \end{aligned}$$

Además, considerando que:

$$f(x + \epsilon_1, y + \epsilon_2) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\epsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\epsilon_2 + \mathcal{O}(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_1, \epsilon_2) \tag{1.1.4}$$

Por lo tanto, introduciendo (1.1.4) con $f(x + \epsilon_1, y + \epsilon_2) = L(q(t) + \phi(t), \frac{d}{dt}(q + \Phi))$ en (1.1.2).

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\Phi}{dt} \right) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\Phi}{dt} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{d}{dt}\left(\Phi \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Phi \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\Phi \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \\ &= 0 + + \int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right). \end{aligned}$$

Si se asume que el princiío de acción es estacionario $\delta S = 0$. Entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) = 0 \tag{1.1.5}$$

Finalmente, considerando a $f(t)$ arbitraria, en (1.1.5) el integrando de la integral deberá ser igual a cero. Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \tag{1.1.6}$$

Que será la ecuación de Euler-Lagrange. Así, a partir de un Lagrangiano $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ se podrán derivar las ecuaciones de movimiento del sistema.

Es importante destacar que las ecuaciones de Euler-Lagrange podrán traducirse para Teoría Clásica de Campos. Donde, en teoría de campos, trabajamos con una **densidad lagrangiana** $\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha, x^\mu)$, con ϕ^α son los campos (dependientes del espacio-tiempo x^μ) y $\partial_\mu\phi^\alpha = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\mu}$ son sus derivadas. Así, considerando la acción:

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha, x^\mu). \tag{1.1.7}$$

Así, al igual que para las ecuaciones de Euler-Lagrange, al extremizar la acción $\delta S = 0$, se obtendrán las ecuaciones de campo que describirán la dinámica del sistema.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right) = 0. \tag{1.1.8}$$

Esto se revisará a mayor detalle en la sección (tanto) de Teoría Clásica de Campos.

1.1.2. Cantidades conservadas

Aunque las ecuaciones de Euler-Lagrange describirán la dinámica de un sistema bajo un marco referencial. Solamente usar el marco de la mécanica racional quedará corto en el estudio de partículas elementales. Pues existirán interacciones o decaimientos, como el decaimiento beta [referenciar a cuando se hable de el más adelante], que no conservarán el número de partículas. Es por esto, que será importante preguntarnos: ¿Qué cantidades se conservan y cuando se conservarán?

Estudiemos estas preguntas suponiendo que tenemos una partícula en presencia de una energía potencial $U(x)$. El lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \tag{1.1.9}$$

Nos llevará a las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

A lo cual multiplicamos por $\frac{dX}{dt}$

$$m\frac{dX}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{dX}{dt}\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

Ahora, sacamos la derivada temporal hacia fuera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)\right) = 0$$

La combinación

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E \tag{1.1.10}$$

En lo cual E corresponde a la energía del sistema. E es una constante independiente del tiempo. En general diremos que una cantidad $Q = a(x, \dot{(x)})$ es conservada si

$$\frac{d}{dt}Q\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0 \tag{1.1.11}$$

En el contexto de la mecánica cláscia en el que estamos interesados en encontrar $x(t)$, las cantidades conservadas con extremadamente útiles. Las cantidades conservadas tambíen se llaman integrales de movimiento. Si un sistema tiene un número suficientemente alto de integrales de movimiento, entonces podemos encontrar las historias de los grados de libertad sin integrar .

$$q_i = q_i(t) \quad i = 1, \dots, N \tag{1.1.12}$$

El **Teorema de Noether**, nos dice que bajo una simetria de un Lagrangiano L implicará la existencia de una corriente conservada $j^\mu(x)$. Tal que:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{1.1.13}$$

Inicialmente, este teorema podremos asociarlo a una transformación infinitesimal que diremos que es una simetría si el funcional de la acción es invariante / cuasi-invariante. Así, esta transformación tendrá asociada una **cantidad conservada**.

Ejemplos de transformaciones infinitesimales, la transformación infinitesimal tendrá una forma bien precisa, dado lo siguiente.
Transformación: traslación temporal. Sea una coordenada $q(t)$ que depende del tiempo, a la cual haremos una tralación al futoro en a seg. $q(t-a)$, notemos que a puede ser cualquier número, digamos que a es infinitesimal, con lo cual lo llamaremos ϵ, ahora, tomando la serie de Taylor a $q(t-\epsilon$ tenemos lo siguiente:

$$q(t-\epsilon) = q(t) - \epsilon\frac{dq}{dt} + O(\epsilon^2) \tag{1.1.14}$$

Para lo cual el tèrmino de $O(\epsilon^2)$ puede ser despreciado ya que será muy pequeño, ahora sigamos

$$q(t-\epsilon) - q(t) = -\epsilon\frac{dq}{dt} = \delta q \tag{1.1.15}$$

A δq lo llamaremos traslación temporal
Trasformación: Traslación espacial Sea un vector posición $r(t)$ el cual es situado con respecto a un eje coordenado cartesiano al cual lo trasladaremos espacialmente en un vector a con lo cual la posición luego de la traslación será $\vec{r}(t) + \vec{a}$, ahora bien, supongamos que el vector $\vec{a}$ es infinitesimal, con lo cual la llamaremos $\vec{\epsilon}$, asì, la traslacion temporal infinitesimal estará dado por

$$(r\vec{(t)} + \vec{\epsilon}) - r\vec{(t)} = \vec{\epsilon} = \delta\vec{r} \tag{1.1.16}$$

En lo cual $\delta\vec{r}$ es llamada traslación espacial.
Transfomación: Rotación espacial.
Sabemos que en una rotación espacial una cantidad conservada sería el momento angular. Ahora, definamos una rotación.

$$x\prime = \cos\theta x - \sin\theta y \tag{1.1.17}$$
$$y\prime = \sin\theta x + \cos\theta y \tag{1.1.18}$$

Ahora, en el caso que la rotación fuera infinitesimal, llamaremos $\theta = \epsilon$, con lo cual la rotación definida quedaría dada por

$$x\prime = x - \epsilon y \rightarrow \delta x = x\prime - x = -\epsilon y \tag{1.1.19}$$
$$y\prime = \epsilon x + y \rightarrow \delta y = y\prime - y = \epsilon x \tag{1.1.20}$$

con lo cual obtenemos que

$$\delta x = -\epsilon y \tag{1.1.21}$$
$$\delta y = \epsilon x \tag{1.1.22}$$
$$\delta z = 0 \tag{1.1.23}$$

Así la rotación espacial según el vector posicion $\vec{r}$ sería

$$\delta\vec{r} = \vec{r} \times \delta\hat{\phi} \tag{1.1.24}$$

Acordar que el producto vectorial solo tiene sentido en 3 y 7 dimensiones.
Ahora hablemos de la acción

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \tag{1.1.25}$$

Ahora, se define la acciòn quasi-invariante como:

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int dt \frac{dB}{dt} \tag{1.1.26}$$

B es una función que depende del tiempo.
Encontraremos que, en el caso que $B = 0$ decimos que la acción es invariante, desarollando obtenemos

$$\delta S = \int dt \left(\partial_q L \delta q + \partial_{\dot{q}} L \frac{d}{dt} \delta q \right) \tag{1.1.27}$$

$$= \int dt \left(\partial_q L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L \right) \delta q + \int dt \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}} L \ \delta q \right) \tag{1.1.28}$$

Usando la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\delta S = \int dt \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}} L \ \delta q \right) = \int dt \frac{dB}{dt} \tag{1.1.29}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}} L \delta q - B \right) = 0 \tag{1.1.30}$$

si usted es capaz de encontrar una transformación que deja la accioón quasi-invariante, entonces la siguente cantidad encontrará que es constante

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.1.31}$$

en lo cual la constante no dependerá del tiempo. Ahora veamos que sucede cuando usamos una traslación temporal.
Traslación temporal:

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m \dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \tag{1.1.32}$$

Ahora bien, la variación de la acción de define por

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] \tag{1.1.33}$$

$$= \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \left(q - \epsilon \frac{dq}{dt} \right) \right)^2 - U(q) - \epsilon \dot{q} \right] - \int dt \left[\frac{m \dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \tag{1.1.34}$$

$$= \int dt \left[\frac{m}{2} (\dot{q}^2 - 2 \epsilon \dot{q} \ddot{q}) - U(q) + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] - \int dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right] \tag{1.1.35}$$

$$= \int dt \left[-m \epsilon \dot{q} \ddot{q} + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] \tag{1.1.36}$$

$$= \int dt \frac{d}{dt} \left[\epsilon \left(-\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \right] \tag{1.1.37}$$

Con lo cual hemos encontrado nuestra función B para esta traslación en particular. Tal que

$$B = \epsilon \left(-\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \tag{1.1.38}$$

Notese que en este caso nunca usamos la ecuación de movimiento para encontrar cuánto vale B en el caso de esta traslación. Ahora que sabemos cual es el valo de la función B, entonces podemos calcular cúal es la cantidad conservada segùn lo obtenido anteriormente.

$$\partial \dot{q} L = m \dot{q} \tag{1.1.39}$$

Así, la cantidad conservada está dada por

$$C^{te} = m\dot{q}(-\epsilon\dot{q}) - \epsilon\left(-\frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q)\right) \tag{1.1.40}$$

De lo cual podemos identificar a la energía del sistema, con lo cual

$$C^{te} = -\epsilon\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q)\right) = -\epsilon E \tag{1.1.41}$$

Asì, la conservaciòn d la energía emerge como la aplicación del teorema de Noether a la quasi-invariancia bajo transformaciones temporales.
Acción de la partícula libre: Sabemos que la acción de la partícula libre está dada por

$$S = \int dt \frac{m}{2}|\frac{d\vec{r}}{dt}|^2 \tag{1.1.42}$$

Ahora bien, si usamos la convención de Einstein

$$S = \int dt \frac{m}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} \quad , x^i = (x^1, x^2, x^3) \tag{1.1.43}$$

Ahora usaremos traslaciones espaciales.
Traslaciones espaciales:

$$\delta x^i = \epsilon^i \quad , \quad \delta\vec{r} = \vec{\epsilon} \tag{1.1.44}$$

Ahora lo aplicamos a la variación de la acción:

$$S[x+\delta x] = \int dt \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(x^i + \epsilon^i)\frac{d}{dt}(x^i + \epsilon^i) \tag{1.1.45}$$

$$= \int dt \frac{m}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} = S[x] \tag{1.1.46}$$

Con lo cual

$$\delta S = S[x+\delta x] - S[x] = 0 = \int dt \frac{d}{dt}0 \tag{1.1.47}$$

Para un grado de libertad :

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.1.48}$$

Para varios grados de libertad obtenemos

$$\partial_{\dot{q}_i} L \delta q_i - B = C^{te} \tag{1.1.49}$$

Y para traslaciones espaciales

$$\partial_{\dot{x}^k} L \delta x^k - B = C^{te} \tag{1.1.50}$$

Ahora, si tenemos un lagrangeano para varios grados de libertad $L = L(x^i, \dot{x}^i)$ se obtiene lo siguiente

$$\partial_{\dot{x}^k} L = \partial_{\dot{x}^k}(\frac{1}{2}m x^i x^i) \tag{1.1.51}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\partial\dot{x}^i}{\partial\dot{x}^k x^i + x^i \partial\dot{x}^k}\right) \tag{1.1.52}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\delta^i_k \dot{x}^i + \dot{x}^i \delta^i_k\right) \tag{1.1.53}$$

$$= m\dot{x}^k \tag{1.1.54}$$

En lo cual notamos que solo sobrevive ese términos por las deltas de Kronecker.
Ahora, la cantidad conservada está dada por:

$$m\dot{x}^k \epsilon^k - B = C^{te} \tag{1.1.55}$$

En lo cual, como sabemos, en una transformación traslación $B = 0$ Con lo cual, podemos concluir que:

$$m\dot{x^k}\epsilon^k = C^{te} \tag{1.1.56}$$

por lo tanto, de igual forma se cumplirá:

$$m\dot{x^k} = \tilde{C}^{te} \tag{1.1.57}$$

y así, en transformaciones espaciales la cantidad conservada será el momento lineal

$$m\vec{v} = \vec{p} \tag{1.1.58}$$

1.2. Tercera clase

Si tenemos en cuenta el lagrangeano para una partícula libre no relativista, como sigue

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \tag{1.2.1}$$

Para el cual, si introducimos una variación infinitesimal, en específico, una transformación espacial, de la siguiente manera

$$\delta S = S[\vec{r} + \delta\vec{r}] - S[\vec{r}] = 0 \tag{1.2.2}$$

en lo cual $\delta\vec{r} = \vec{\epsilon}$ se le llamará a la traslación espacial, tendremos que por el teorema de Noether, el siguiente término se mantendrá constante

$$c^{te} = \partial_{\dot{\vec{r}}}L \cdot \delta\vec{r} - \cancel{B} \tag{1.2.3}$$

$$= \partial_{\dot{x}}L\delta x + \partial_{\dot{y}}l\delta y + \partial_{z}L\delta z \tag{1.2.4}$$

Ahora bien, usaremos la siguiene notación para las coordenadas $\partial_{\dot{\vec{r}}}L \to \partial_{\dot{x^k}}L$ en lo cual $x^k = (x, y, z)$. Ahora bien, el término constante lo podemos escribir como

$$c^{te} = \partial_{\dot{x^k}}L\epsilon^k \tag{1.2.5}$$

Lo cual si tomamos la derivada del lagrangeano para una partícula libre no relativista

$$\partial_{\dot{x^k}}L = \frac{1}{2}\partial_{\dot{x^k}} \tag{1.2.6}$$

$$= \frac{1}{2}m(\delta^i_k\dot{x^i} + \dot{x^i}\delta^i_k) \tag{1.2.7}$$

$$= m\dot{x^k} \tag{1.2.8}$$

Así y por tanto, se concluye que el término que, por teorema de Noether se conserva, es el siguiente

$$c^{te} = m\dot{x^k}\epsilon^k \tag{1.2.9}$$

Lo cual, en términos simples, nos dice que para toda coordenada x^k, el momento lineal se conserva para transformaciones espaciales, lo que viene siendo la primera ley de newton.

$$c^{te} = mv_x \tag{1.2.10}$$

Para la partícula libre no relativista, nuevamente, tenemos este lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \tag{1.2.11}$$

En lo cual tenemos que, la energía $E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ será invariante bajo transformaciones temporales y que, el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ será invariante bajo transformaciones espaciales. Con ello, podemos formular la relación de dispersión no relativista, la cual está dada por

$$E = \frac{|\vec{p}|}{2m} \tag{1.2.12}$$

1.2.1. Relatividad especial:

1. Todos los observadores inerciales son equivalentes, mediante experimentos físicos no puedo dar cuenta si estoy en movimiento rectilíneo uniforme o no, experimento del tren.
2. Todos los observadores inerciales están de acuerdo en que la luz en el vació se mueve a una rapidez constante, $c = 300000[\text{km/s}]$.
3. Principio de homogeneidad del espacio-tiempo: todos los puntos e instantes son equivalentes, las leyes que rigen la física serán las mismas aquí y en la quebrá del ají .
4. Isotropía del espacio tiempo: todas las direcciones son equivalentes.

Notar que la relatividad de los observadores no inerciales lleva a la gravitación, lo mismo sucede con la suposición que los rayos de luz no necesariamente viajan en línea recta, nuevamente nos llevará a la gravitación.
Landau volumen II, teoría clásica de campos, primeras 5 páginas del capítulo
Los principios 1 y 4 implican que, si tenemos dos eventos, que ocurren en instantes diferentes en el espacio tiempo. Sean dos observadores, K y $\bar{K}$ para los cuales, los dos eventos tendrán etiquetas distintas, es decir:

- Con respecto al sistema K los eventos tendrán coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2).
- Con respecto al sistema $\bar{K}$ los eventos tendrán coordenadas $(\bar{t_1}, \bar{x_1}, \bar{y_1}, \bar{z_1})$ y $(\bar{t_2}, \bar{x_2}, \bar{y_2}, \bar{z_2})$

Ahora, dichos eventos podrán ser observados en diferente orden de sucesos, o no, dependiendo se su relación entre sí en su causalidad, si existe causalidad entre uno y otro, entonces su ordena estará fijo, segunda ley de la termodinámica, pero en caso que no hay causalidad entre sí, dichos eventos podrán ser observados en orden distintos dependiendo del observador.
Invariacia del intervalo: Consecuencia del principio de la relatividad especial, formulación de la métrica de minkwosky

$$c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 = c^2(\bar{t_2}-\bar{t_1})^2-(\bar{x_2}-\bar{x_1})^2-(\bar{y_2}-\bar{y_1})^2-(\bar{z_2}-\bar{z_1})^2 \quad (1.2.13)$$

La conservación del interalo entre eventos P y Q tiene consecuencias dramáticas. ¿Y entonces qué? Primero asumiremos que P y Q están infinitesimalmente cerca, esto significa que

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + dt \\ x_2 &= x_1 + dx \\ y_2 &= y_1 + dy \\ z_2 &= z_1 + dz \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \bar{t_2} &= \bar{t_1} + \bar{dt} \\ \bar{x_2} &= \bar{x_1} + \bar{dx} \\ \bar{y_2} &= \bar{y_1} + \bar{dy} \\ \bar{z_2} &= \bar{z_1} + \bar{dz} \end{aligned}$$

La conservación del intervalo implica que:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \quad (1.2.14)$$

Ahora nos preguntamos, si nos damos las coordenadas con cachirulo, o sea, con respecto al observador inercial, ¿cómo se podrán escribir en función de las coordenadas sin cachirulo? Para ello nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciale parciales con 10 componentes, lo cual puede sonar feo, pero es la forma de obtener las transformaciones de lorentz en todas las dimensiones

$$\begin{aligned} &c^2\left(\partial_t\bar{t}dt + \partial_x\bar{t}dx + \bar{t}_y dy + \bar{t}_z dz\right) \\ &-\left(\partial_t\bar{x}dt + \partial_x\bar{x}dx + \partial_y\bar{x}dy + \partial_z\bar{x}dz\right)\ldots \end{aligned}$$

Existen 10 transformaciones parametrizadas por 10 parámetros continuos, relativistas

- 1 Traslación temporal.
- 2 Traslaciones espaciales.
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo).
- 3 Boosts.

Traslación temporal

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + a\\ \bar{x} &= x\\ \bar{y} &= y\\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

Traslación espacial en x

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t\\ \bar{x} &= x + h_x\\ \bar{y} &= y\\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

y así con todas las coordenadas.
Ahora bien, las rotaciones en el espacio serán, rotaciones en un plano (x, y) que es equivalente a una rotación alrededor del eje z,

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t\\ \bar{x} &= \cos\alpha x - \sin\alpha y\\ \bar{y} &= \sin\alpha x + \cos\alpha y\\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

$\alpha \in [0, 2\pi]$.
Lo que implica que, nuestro intervalo invariante será

$$\begin{aligned}c^d t^2 - (\cos\alpha dx - \sin\alpha dy)^2 - (\sin\alpha dx + \cos\alpha dy)^2 - dz^2\\ = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\end{aligned}$$

O sea, las rotaciones nos dejan invariante el invervalo (métrica de minkowsky) En rotación en el plano (y, z) le llamaremos $\theta \in [0, 2\pi]$ y en rotaciones en el plano (z, x) llamaremos al ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$.
Boost a lo largo del eje x:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{q - v^2/c^2}}\\ \bar{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\\ \bar{y} &= y\\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

Tarea: probar que deja el intervalo invariante
Boost a lo largo del eje y:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{t - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - {v_y}^2/c^2}}\\ \bar{x} &= x\\ \bar{y} &= \frac{y - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - {v_y}^2/c^2}}\end{aligned}$$

Tarea: boost a lo largo del eje z y tomamos c $\rightarrow \infty$ sakurai de cuantica

1.3. Cuarta clase

Entonces, en la última clase, los principios de la relatividad especial, implican la invariancia del intervalo. La conservación del intervalo implica que:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \tag{1.3.1}$$

Hay 10 tipos de transformaciones continuas que preservan el intervalo, las cuales son

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Las rotaciones espaciales son del tipo

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + a, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \tag{1.3.2}$$

Las rotacione son del tipo

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{x} &= \cos\theta x - \sin\theta y \\ \tilde{y} &= \sin\theta x + \cos\theta y \\ \tilde{z} &= z \end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje x

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - v_x x/c^2}{\sqrt{q - v_x^2/c^2}} \\ \tilde{x} &= \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= z \end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje y, boost a lo largo del eje z.
Vimos que en el límite no relativista $c \to \infty$

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} \tag{1.3.3}$$

Lo cual corresponde al conocido boost de Galileo, el cual describe la posición mediante la velocidad relativa entre dos observadores inerciales (velocidad constante).
Asumamos que la partícula se mueve

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{v}, \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Con lo cual tenemos $\tilde{v}$ vs v, a lo cual

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} - V\frac{\cancel{dt}}{\cancel{d\tilde{t}}}$$

Con lo cual la composición de velocidades en el límite no relativista es

$$\tilde{v} = v - V \tag{1.3.4}$$

Lo cual no es compatible con la unicidad del valor de la rapidez de la luz en el vacío. Con lo cual es necesario encontrar una composición de velocidades que cumpla con los postulados de la relatividad especial. Para ello

$$d\tilde{x} = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$d\tilde{t} = \frac{dt - v/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Con lo cual

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{dx - V dt}{dt - V/c^2 dx} \cdot \frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - V/c^2 \frac{dx}{dt}}$$

Así, la suma de velocidades relativista está dado por

$$\tilde{v_x} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \tag{1.3.5}$$

Ahora veamos el caso en el cual $v_x = c$

$$\tilde{v_x} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2} c} = \frac{c - V}{\frac{c-V}{c}} = c$$

$$i\bar{h}\partial_t \Phi = -\frac{\bar{h}^2}{2m}\nabla^2\Phi \tag{1.3.6}$$

En lo cual, el término $\frac{-\bar{h}^2}{2m}\nabla^2\Phi = \frac{p^2}{2m}\nabla^2\Phi$ Con lo cual, la relación de dispersión queda tal que:

$$E = mc^2\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2c^2}}$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} + \frac{1}{4}\frac{p^4}{m^4c^4}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{4m^3c^2}$$

Quedó de tarea el probar la invariancia de la acción ante composición de velocidades

1.4. Quinta clase

$$S_{NR}[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \tag{1.4.1}$$

Corresponde a la acción de la partícula libre no relativista, ahora bien, para una partícula relativista se tiene lo siguiente

$$S_{REL}[x(t)] = -mc^2\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{1.4.2}$$

Ahora con dos observadores inerciales K y $\tilde{K}$, para lo cual K tiene coordenadas (x, y) y además $\tilde{K}$ tiene coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{t})$, se simplifican mucho los cáculos asumiendo que el eje x está alineado con el movimiento relativo del sistema de referencia $\tilde{K}$. Ahora resulta ser que la acción $S[x(t)]$ es invariante bajo boost. (no entendí la letra).

$$\tilde{t} = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

En donde,

1. V es la velocidad relativa de $\tilde{K}$ con respecto a K
2. $v(t) = \frac{dx}{dt}$ velocidad de la partícula según K
3. $\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt}$ velocidad de la partícula según $\tilde{K}$

Además se encuentra que $S_{REL}[x(t)]$ es cuasi-invariante bajo transfomaciones temporales

$$\delta_{TT} x = -\epsilon \frac{dx}{dt} \tag{1.4.3}$$

Lo que implica la conservación de energía relativista, que forma

$$E = \frac{-mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.4.4}$$

Además $S_{REL}[x(t)]$ es invariante bajo transformaciones espaciales

$$\delta_{TE} x = a \tag{1.4.5}$$

Se conserva el momentum lineal relativista

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.4.6}$$

Estas dos relaciones implicarán la relación de dispersión relativista.

$$E = \sqrt{p^2 m^2 + m^2 c^4} \tag{1.4.7}$$

¿ Cuál es la cantidad conservada del boost, que depende explícitamente del tiempo.

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial y} + \cdots = 0 \tag{1.4.8}$$

Obsevarmos que si $p = 0 \rightarrow E = mc^2$. Queremos hacer cuántica la relatividad especial con la relación de dispersión relativista.

$$E^2 = p^2 c^2 + c^2 p^4 \tag{1.4.9}$$

1.4.1. Ecuación de Klein Gordon

Mediante la promoción de el momento, posición y energía a operadores como lo es en la mecánica cuántica podremos encontrar una ecuación a partir de la relación de dispersión relativista.
Argumento eurístico que lleva a la ecuación de Schödinger.

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$
$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Efecto fotoeléctrico

$$E = \hbar \omega \tag{1.4.10}$$

Difracción de electrones

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad , \quad \text{relación de Broflie} \tag{1.4.11}$$

en el cual el monento es el siguiente

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.4.12}$$

Se tiene la siguiente función de onda plana

$$\Psi = Ae^{-i(\omega t - kx)} \quad , \quad k = \frac{\omega}{\lambda} \tag{1.4.13}$$

Con esta, tenemos que encontrar operadores tal que

$$\begin{aligned} \hat{E}\Psi &= \hbar\omega\Psi \rightarrow p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}\Psi &= \frac{h}{\lambda}\Psi \rightarrow E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Así, finalmente tenemos la relacion de dispersión relativista y además los operadores energía y momento, lo cual si lo reemplazamos en dicha relación de dispersión queda como sigue

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \\ -\hbar\partial_t^2\Psi &= -c\hbar^2\partial_x^2\Psi + m^2c^4\Psi \quad , \quad /\frac{1}{\hbar^2c^2} \\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi + \frac{m^2c^2}{h^2}\Psi = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual, hemos llegado a la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0} \tag{1.4.14}$$

La cual corresponde a la ecuación de Klein-Gordon ¿ Podemos demostrar la constancia de una cantidad definida positiva? Con $c = 1$ y $\hbar = 1$. En cuyo caso, $c = 1$ significa que se mueve a la rapidez de la luz, y para rapideces menores sería en factor de por ejemplo un 80 % o $c = 0{,}8$.

$$\begin{aligned} \Psi^*\partial_t^2\Psi - \Psi^*\partial_x^2 - m^2\Psi^*\Psi &= 0 \\ \Psi\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_x^2\Psi^* + m^2\Psi\Psi^* &= 0 \\ \Psi^*\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_t^2\Psi^*\Psi\partial_x^2\Psi^* - \Psi^*\partial_x^2\Psi &= 0 \\ \partial_t\left(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*\right) + \partial_x\left(\Psi\partial_x\Psi^* - \partial_x\Psi\right) &= 0 \end{aligned}$$

Luego, de ello definimos la siguiente densidad de probabilidad asociada a la ecuación de Klein-Gordon.

$$\rho = \Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^* \tag{1.4.15}$$

La cual no es definido positiva, a diferencia de la densidad de probabilidad asociada a la ecuación de Schrödinger, dada por $\rho_{SSHR} = \Psi^*\Psi > 0$, si bien la cantidad ρ es conservada, no admite una interpretación probabilística debido a su posible valor negativo. Más aún $\rho^* = -\rho \rightarrow \rho$ es puramente imaginario, lo cual probabilísticamente, no tiene ningún sentido.
También es posible definir $\tilde{\rho} = i\rho$ en donde $\rho \in \Re$ pero su signo no está definido, con lo cual tampoco es posible interpretarla probabilísticamente.

Se define la **corriente de la función de onda**,

$$j = \Psi\partial_x\Psi^* - \Psi^*\partial_x\Psi \tag{1.4.16}$$

La cual denotará, en un flujo, cuánta de la función de onda se escapa de la frontera del volumen en la cual esta es definida. Así, similarmente al caso electromagnético, pero con ondas, podemos escribir una ecuación de continuidad para ondas, la cual está dada por la siguiente expresión,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V dV\rho\right) + \int_{\partial V}\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.4.17}$$

La cual es la ecuación de continuidad de la función de onda, y en la cual, mientras la función no se ."escape" del volumen, la densidad de probabilidad $\rho_{SSHR} = \Psi^*\Psi > 0$ será conservada.
a- signo relativo entre Ψ^* y Ψ. En ρ, viene de la segudna derivada temporal ¿ Existe una ecuación de primer orden con respecto al tiempo y primer orden en el espacio relativista? Propongamos tal ecuación

$$\alpha\partial_t\Psi + \beta\partial_x\Psi = 0, \quad / \quad (\alpha\partial_t\Psi + \beta\partial_x\Psi)$$
$$\alpha^2\partial_t^2\Psi + \alpha\beta\partial_t\partial_x\Psi + \beta\alpha\partial_x\partial_t + \beta^2\partial_x^2\Psi = 0$$

versus la forma funcionald de $E = h\omega$ h barra, t $\lambda = \frac{h}{mv}$,

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi = 0$$

Por lo tanto, $\alpha^2 = 1$ y $\beta^2 = -1$ así

$$\alpha\partial_t\Psi + \vec{\beta}\cdot\vec{\nabla}\Psi = 0$$
$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3 m\} = \beta_i$$
$$\alpha^2 = 1, \quad \beta_i\beta_j = -\delta_{ij}$$
$$\alpha\beta_i + \beta_i\alpha = 0 \quad , \quad \forall i = 1,2,3$$

Así,$\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ serán matrices, pero ¿ De cuánto por cuánto ?
Básicamente las beta pegarán como operador matricial a las funciones de onda las cuales serán vectores así saldrán cuatro fuciones de onda.
Existe un teorema que implica de las cuatro componentes de matrices son al menos de 4x4, las cuales son llamadas matrices de Dirac.

$$\Psi = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(\vec{x}) \tag{1.4.18}$$

Ecuación de Dirac, permite hacer una máquina de movimiento perpertuo, pero Dirac hizo un parche en vez de decir que los niveles de energía estuvieran disponibles, se asume que todos están ocupados. lo que nos permite predecir una partícula con la misma masa del electrón pero con carga opuesta, o sea, lo positrones. Pero toda esta interpretación es inesesaria, ya que el E no es la energía, directamente, ya que la energía es el autoestado del Hamintoniano,lo que no debe ir directamente o no siempre en la función de onda. ¿ Donde está el mar de Dirac?, lo otro que puede ocurrir es que si estas partículas fueran neutrinos, lo neutrinos no tienen carga eléctrica, donde están los anti-neutrinos, jaja xd

1.5. Sexta clase

Volvemos a relatividad especial, en donde definiremos las transformaciones de Lorentz a través de funciones hiperbólicas.

$$\tilde{t} = \frac{t - V/c^2 x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Ahora, si definimos V de la siguiente forma

$$V = c\tanh\xi \tag{1.5.1}$$

Tal que este cumple con la siguiente relación

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - \tanh^2\xi$$
$$= \frac{1}{\cosh^2\xi}$$

Con lo cual, recordando las propiedades que cumplen las funciones hiperbólicas

$$\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1 \tag{1.5.2}$$

$$1 - \tanh^2\xi = \frac{1}{\cosh^2\xi} \tag{1.5.3}$$

Tal que, podemos escribir las transformaciones de Lorentz como

$$\begin{aligned}
c\tilde{t} &= \cosh\xi ct - \sinh\xi x \\
\tilde{x} &= \cosh\xi x - \sinh\xi ct \\
\tilde{z} &= z \\
\tilde{y} &= y
\end{aligned}$$

En lo cual, $\sinh\xi$ será la rapidity.
Ahora, escribamos esto en notación tensorial de la siguiente forma

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\} \tag{1.5.4}$$

Lo cual representa las coordenadas de un evento en el espacio tiempo plano (Minkowsky).
Aplicamos las transformaciones en forma matricial

$$\tilde{x}^\mu = \{\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\} = \{c\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} \tag{1.5.5}$$

Tal que,

$$\begin{pmatrix} c\tilde{t} \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.5.6}$$

La matriz se representa como un tensor de rango 2 Λ^μ_ν de transformacion para el tensor de posiciones x^μ tal que, la regla de transformación para la posición dentro del espacio tiempo plano de Minkowsky es la contracción de este Λ^μ_ν con la posición,

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.5.7}$$

en donde los índices ν estarán contraidos y por tanto, sumados.
Pensamos ahora, en una transformación más general y preguntémonos ¿ Qué nos dice la invariancia del intervalo con respecto de Λ^μ_ν?

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{x}} &= \Theta\vec{x} \\
||\tilde{\vec{x}}||^2 &= ||\vec{x}||^2 \\
\tilde{\vec{x}}^T\tilde{\vec{x}} &= \vec{x}^T\vec{x} \\
(\Theta\vec{x})^T(\Theta\vec{x}) &= \vec{x}^T\vec{x} \\
\vec{x}^T\Theta^T\Theta\vec{x} &= \vec{x}^T\vec{x}
\end{aligned}$$

En donde, si las matrices Θ se definen como ortogonales, o sea, $\Theta^T\Theta = I$, entocnes se tiene

$$\begin{aligned}
ds^2 &= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\
&= c^2d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{z}^2
\end{aligned}$$

Para lo cual

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Donde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ la cual corresponde a la métrica de Minkowsky, ahora, expandamos la suma de la métrica ds^2, primero sumamos la suma, valga la redundancia, en el índice ν.

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\nu=0}^{3} \left(\eta_{\mu 0} dx^\mu dx^0 + \eta_{\mu 1} dx^\mu dx^1 + \eta_{\mu 2} dx^\mu dx^2 + \eta_{\mu 3} dx^\mu dx^3 \right) \\ &= \eta_{00}(dx^0)^2 + \eta_{11}(dx^1)^2 + \eta_{22}(dx^2)^2 + \eta_{33}(dx^3)^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \end{aligned}$$

Por tanto

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$$

Pero queremos que

$$\begin{aligned} \tilde{x}^\mu &= \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \to d\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha \\ \tilde{x}^\nu &= \Lambda^\nu_\beta x^\beta \to d\tilde{x}^\nu = \Lambda^\nu_\beta dx^\beta \end{aligned}$$

Con lo cual, obtenemos que

$$\begin{aligned} \eta_{\cancel{\mu}_\alpha \cancel{\nu}_\alpha} dx^{\cancel{\mu}^\alpha} dx^{\cancel{\nu}^\beta} &= \eta_{\mu\nu} \left(\Lambda^\nu_\alpha dx^\alpha\right) \left(\Lambda^\nu_\beta dx^\beta\right) \\ \left(\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha \Lambda^\nu_\beta - \eta_{\alpha\beta}\right) dx^\alpha dx^\beta &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.8}$$

tenemos que Λ será una transformación de Lorenz si ocurre lo anterior

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta &= \eta_{\alpha\beta} \\ \Lambda^T \eta \Lambda &= \eta \end{aligned}$$

versus

$$\Theta^T I \Theta = I$$

En lo cual se usa la siguiente propiedad

$$\xi^T C \xi = C$$

Siendo c una matriz antisimétrica con respecto a la diagonal y además diagonal nula.

Definición: Diremos que un arreglo denotado por A^α es un vector contravariante de Lorentz si bajo una transoformación de Lorentz:

$$\tilde{A}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta \tag{1.5.9}$$

Las coordenadas x^μ definen un vector contravariante, ahora, un vector contravariante sería el 4-momenta.
Ahora, se tiene un observador $\tilde{K}$ el cual se mueve a una velocidad constante V con respecto a un observador K, ambos observadores son inerciales.
¿ Dados E y P, cómo encontramos $\tilde{E}$ y $\tilde{P}$?

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad P = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

versus sus tildas

$$\tilde{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} \quad , \quad \tilde{P} = \frac{m\tilde{v}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}}$$

Ahora, aplicamos la transformación para la velocidad $\tilde{v}$ tal que

$$
\begin{aligned}
\tilde{E} &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}\right)^2}} \\
&= \frac{c\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)mc^2}{\sqrt{c^2\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)^2-(v-V)^2}} \\
&= \frac{c(1-\frac{vV}{c^2})mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{mvV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\frac{V\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
\frac{\tilde{E}}{c} &= \frac{\frac{E}{c}-\frac{V}{c}P}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Versus

$$
c\tilde{t} = \frac{ct-\frac{V}{c}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
$$

Tarea,

$$
\tilde{p} = \frac{m\tilde{v}}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} = \frac{p-\frac{V}{c}\left(\frac{E}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
$$

versus

$$
\tilde{x} = \frac{x-\frac{V}{c}(c\tilde{t})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
$$

Definición: 4-momenta o cuadrivector de momentum , se define como

$$
p^\mu = \left(\frac{E}{c},\vec{p}\right) \quad , \quad \tilde{p}^\mu = \left(\frac{\tilde{E}}{c},\tilde{\vec{p}}\right) \tag{1.5.10}
$$

y además

$$
\tilde{p}^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \tag{1.5.11}
$$

El cuadrimoemento es un vector contravariante de Lorentz.

1.6. Septima clase

La energía relativista está dada por lo siguiente

$$
E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.6.1}
$$

y a su vez el cuadrimomento

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.6.2}$$

lo cual, junto a transformaciones de Lorentz, dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
\tilde{x} &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
\tilde{v} &= \frac{v - V}{\sqrt{1-\frac{vV}{c^2}}}
\end{aligned}$$

En donde, $\frac{E}{c}$ y p transforman como los componentes de un cuadri-vector

$$\begin{aligned}
p^\mu &= (p^0, \vec{p}) \\
p^\mu &= \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que, el cadrimomento transforma siguiendo la siguiente regla de transformación

$$\tilde{p}^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \tag{1.6.3}$$

Además, siguiendo la convención de la métrica $(1, -1, -1, -1)$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu &= \eta_{00}p^0p^0 + \eta_{11}p^1p^1 \\
&= (+1)\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + (-1)\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 \\
&= \frac{m^2c^2 - m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
&= m^2c^2
\end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\eta_{\mu\nu}\tilde{p}^\mu\tilde{p}^\nu = m^2c^2$$

Por lo tanto, como la constracción da como resultado un escalar, entonces se puede concluir que el cuadrimomento corresponde a un invariante de Lorentz, esto significa que todos los observadores inverciales observarán la misma cantidad a lo largo de la transformación entre ellos, siendo su valor el dicho $\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = m^2c^2$. En el caso de partículas sin masa, como lo fotones y gluones, esta relación sigue la siguiente regla

$$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$$

1.6.1. Efecto Compton

Inserte dibujo de Julio del efecto compton.

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1-\cos\theta)\lambda' = \lambda + \lambda_c(1-\cos\theta)$$

Pero ahora ¿en qué dirección sale disparado el fotón?, no lo sabemos ya que θ es una variable aleatoria. En las variables aleatorias continuas no tiene sentido preguntarse cuál es la probabilidad en que la variable tome un valor en particular, sin embargo, si es correcto el preguntarse la probabilidad en un invtervalo.

$$\theta = \int p(\theta) d\theta$$

Ahora vamos a demostrar que la conservación de el cuadri-momentum lleva justo al efecto Compton.
Pensemos en este proceso como un choque de partículas.
Inicialmente hay un electrón, un fotón y se asume que el electrón está en reposo.
Digamos que el fotón incide en el eje z con cierta energía, pensemos en este proceso como uno en el cual se conserva el cuadri-monento[1].

$$p^{\mu}_{TI} = p^{\mu}_{EI} + p^{\mu}_{\gamma} \tag{1.6.4}$$

El del electrón es facil ya que

$$p^{\mu}_{EI} = \left(\frac{mc^2}{c}, \vec{0}\right)$$

Si tengo un fotón de color λ, y de frecuencia ω, entonces

$$p^{\mu}_{\gamma} = \left(\frac{E_{\gamma}}{c}, 0, 0, \#\right)$$

Ahora necesito un número tal que se cumpla la relación para las partículas sin masa, como lo es el fotón, por lo tanto,

$$p^{\mu}_{\gamma} = \left(\frac{E_{\gamma}}{c}, 0, 0, \frac{E_{\gamma}}{c}\right)$$

Recordando que la energía de un fotón es $E_{\gamma} = \hbar\omega$, pero ¿de dónde sale esto?, pues, de experinmentos. Entonces, podemos escribir que, el cuadri-momentum inicial como sigue,

$$p^{\mu}_{TI} = \left(mc + \frac{E_{\gamma}}{c}, 0, 0\frac{E_{\gamma}}{c}\right)$$

En donde se han sumado los momenta.
Al final, luego del choque, pasará lo siguiente.(inserte dibujo de Julio posterior al choque en el cual se observa la dirección aleatoria en la cual el fotón sale volando, ángulo de dispersión).
El fotón sadrá en una direción con ángulo α y el fotón saldrá en un ángulo θ, el cual daremos como conocido, ahora la pregunta es, dado un θ conocido, cuál es el color del fotón?

$$p^{\mu}_{FT} = p^{\mu}_{EF} + p^{\mu}_{\gamma} \tag{1.6.5}$$

La velocidad de un electrón es una variable aleatoria como también lo es su energía, pero estas están relacionadas con el ángulo.

$$p^{\mu}_{\gamma'} = \left(\frac{E_{\gamma'}}{c}, 0, \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta, \frac{E_{\gamma'}}{c}\cos\theta\right)$$

Lo cual se cumple ya que, cumpliendo con la relación, se tiene que

$$\left(\frac{E_{\gamma'}}{c}\right)^2 - |\vec{p}_{\gamma}|^2 = 0$$

Ahora para la energía final del electrón, tendremos que

$$p^{\mu}_{EF} = \left(\frac{E_{ef}}{c}, \vec{p}_{ef}\right)$$

Y a su vez, usando la relación de dispersión,

$$p^{\mu}_{EF} = \left(\frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}_{ef}|^2c^2}, \vec{p}_{ef}\right)$$

[1]Notese que si se tiene un sistema invariante ante transformaciones espaciales, entonces los cuadri-momentos pueden ser sumados.

Con lo cual solo queda sumar los momenta para obtener el momentum final

$$p^{\mu}_{TF} = \left(\frac{E_{\gamma'}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}_{ef}|^2c^2}, (p)^x_{ef}, (p)^y_{ef} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta, (p)^z_{ef} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\right)$$

Este scattering es completamente elástico, lo cual nos indica que el electrón no tiene energía interna, ya que si tuviera energína interna estaría cuantizada y dicha energía debería ser considerada en el choque ya que parte de la energía del choque iría hacia la estructura interna del elctrón, lo que hasta ahora no se ha probado existe, aunque no sabemos.

$$p^{\mu}_{TI} = p^{\mu}_{TF}$$

Haremos esto índice por índice del cuadri-momento

$$\begin{aligned}
p^0_{TI} &= p^0_{TF} & &\to mc + \frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^2 + |\vec{p_{ef}}|^2c^2} \\
p^1_{TI} &= p^1_{TF} & &\to 0 = (p)^x_{ef} \\
p^2_{TI} &= p^2_{TF} & &\to 0 = (p^y)_{eff} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta \\
p^3_{TI} &= p^3_{TF} & &\to (p^z)_{ef} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\cos\theta
\end{aligned}$$

Ahora, podemos notar inmediatamente que $(p^x)_{ef} = 0$, con lo cual nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
mc + \frac{E_\gamma}{c} &= \frac{E_{\gamma'}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\left(-\frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{E_\gamma}{c} - \frac{E_\gamma}{c}\cos\theta\right)^2\right)} \\
mc^2 + E_\gamma &= E_{\gamma'} + \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\frac{E^2_{\gamma'}}{c^2}\sin\theta^2 + \frac{E^2_\gamma}{c} + \frac{E^2_{\gamma'}}{c^2}\cos\theta *^2 - \frac{2E_\gamma E_{\gamma'}}{c^2}\cos\theta\right)} \\
mc^2 + E_\gamma &= E_{\gamma'} + \sqrt{m^2c^4 + E^2_{\gamma'} + E^2_\gamma - 2E_\gamma E_{\gamma'}\cos\theta}
\end{aligned}$$

Despues de resolver el sistema de ecuaciones se encuentra que la energía inicial del fotón es,

$$E_\gamma = \hbar\omega = \frac{\hbar c 2\pi}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}$$

y luego, la energía final estaría dada por

$$E_{\gamma'} = \hbar\omega' = \frac{\hbar c 2\pi}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda'}$$

Con lo cual, de todo esto concluimos lo siguiente

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{1.6.6}$$

A lo cual, podemos llamar $\lambda_c = \frac{h}{mc}$, la longitud de compton del electrón.

1.7. Clase 8 (Inicios del grupo de lorentz)

Al estudiar las transformaciones de Lorentz, se podrá considerar simplemente un boost a lo largo del eje x. Tal que esta transformación afecta a las etiquetas espacio tiempo de la forma:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.7.1}$$

«“‘¡HEAD Ahora usaremos que $\boxed{c = 1}$, un boost a lo largo del eje x sería

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.2}$$

Lo cual se traduce con

$$\gamma := \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$
$$\beta := \frac{V}{c}$$

Lo cual, con $c = 1$ queda como

$$\tilde{t} = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}$$
$$\tilde{y} = y$$
$$\tilde{z} = z$$

La transformación del tipo

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

que dejan invariante el intervalo =======

»”’Tal que dejan invariante el intervalo ’”»¿refs/remotes/origin/main

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$$

Y cumplirán

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\alpha\beta}$$

¿Cuál es la forma más general que puede tomar Λ^μ_ν tal que deje invariante el intervalo?
La matriz Lambda puede tener 6 familias de transformaciones diferentes, las cuales son:

«“‘¡HEAD

- ’ $\Lambda^\mu_\nu \to \Lambda_{\mu_{\text{boost a lo largo del eje x}\nu}}(v)$
- ’ $\Lambda_{\text{boost a lo largo del eje y}}(v)$
- ’ $\Lambda_{\text{boost a lo largo del eje z}}(v)$ =======
- ’ $\Lambda^\mu_\nu \to \Lambda_{\text{boost a lo largo del eje x}}(v)$
- ’ $\Lambda^\mu_\nu \to \Lambda_{\text{boost a lo largo del eje y}}(v)$
- ’ $\Lambda^\mu_\nu \to \Lambda_{\text{boost a lo largo del eje z}}(v)$ ’”»¿refs/remotes/origin/main
- $\Lambda^\nu_\mu \to$ Rotación en el plano (x,y) (θ)
- $\Lambda^\mu_\nu \to$ Rotación en el plano (y,z) (θ)
- $\Lambda^\mu_\nu \to$ Rotación en el plano (z,x) (θ)

Tal que cada uno de estos Λ esta asociado a diferentes parámetros. Veamos cada uno de ellos:

1.7.1. Inversión temporal:

Definiendo la transformación a lo largo del eje temporal como:

$$\tilde{t} = -t \quad , \tilde{x} = +x \quad , \tilde{y} = y \quad , \tilde{y} = y \quad , \tilde{z} = z$$

Tal que la matriz asociada a la transformación tiene la forma:

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7.3}$$

Y dejará al intervalo invariante.

$$d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

1.7.2. Transformaciones de paridad:

Definiendo la transformación de paridad como:

$$\tilde{t} = t \quad , \tilde{x} = -x \quad , \tilde{y} = -y \quad , \tilde{z} = -z$$

Tal que la matriz asociada a la transformación tiene la forma:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es interesante preguntarse ”¿Qué sentido físico tienen este tipo de transformaciones?¿ ”¿Con que otras nociones físicas puedo conectar esta transformación?”.

Tal y como dice su nombre, veremos que esta transformación tendrá que ver con la paridad a lo largo de los ejes espaciales. Así, será como si dibujasemos un espejo transversalmente a lo largo de los ejes temporales tal y como en [referencia a dibujo oliva].

Vemos que la interacción electromagnética si será invariante bajo transformaciones de inversión temporal y transformación de paridad. En cambio la interacción débil **no será invariante bajo transformaciones de paridad**, pero si lo será bajo boosts y rotaciones.

Esto se ve reflejado cuando analizamos el caso del decaimiento de ^{60}Co, el cual será mediado por la interacción débil, especificamente por el bosón Z.

Ejemplo: (insertar dibujo de Julio)

Observamos acá que en el lado izquierdo la dirección del spin $\vec{s}$ coincide con la que se dirigen las partículas ejectadas. En cambio, en el lado derecho, el spin va hacía el otro lado. Esto último no se ha observado en la naturaleza, pues solo se ha visto que la dirección del spin coincida con la que se dirigen las partículas ejectadas. Por tanto, la interacción débil rompe la símetria CPT.

1.7.3. Campo escalar bajo transformaciones de Lorentz

El campo relativista más simple posible será el campo escalar. Pues teniendo a dos observadores inerciales tales que la velocidad de $\tilde{K}$ con respecto a K es V. En un punto p, tal que su posición respecto a K y $\tilde{K}$ sea x^μ y $\tilde{x}^\mu$ respectivamente. Vemos que ϕ será un campo escalar si al evaluarlo con cada observador se cumple:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) = \phi(x)$$

Lo que significa que independiente del observado desde el que se mida, el campo escalar debe ser el mismo. Ahora, si consideramos las interacciones entre partículas y los campos que las median notamos que el campo de Higgs será un campo escalar de Lorentz. En cambio el potencial eléctrico, que es un campo escalar usual, no lo será.

Podremos reescribir 1.7.3 como:

$$\begin{aligned}(\hat{\phi})(x^\mu) &= 1\phi(x^\mu)\\ &= e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}\phi^{x^\mu}\end{aligned}$$

Con $J_{\alpha\beta} = 0$.
Por otro lado, se tiene que para la posición $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ la derivada con respecto al observador K y $\tilde{K}$ están dadas por:

$$\lll\lll< HEAD\partial_\mu\phi = \{\partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi\} ======= \partial_\mu\phi = \{\partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi\} \ggg\ggg> refs/remotes/origin/main$$

$$\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi} = \left\{\partial_{\tilde{t}\tilde{\phi}}, \partial_{\tilde{x}}\tilde{\phi}, \partial_{\tilde{y}}\tilde{\phi}, \partial_{\tilde{y}}\tilde{\phi}, \partial_{\tilde{z}}\tilde{\phi}\right\}$$

Comparando a $\partial_\mu\phi$ y $\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi}$ considerando $\tilde{t} = \tilde{t}(t, x)$, continuamos desarrollando las expresiones:

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \partial_{\tilde{t}}t\partial_t\tilde{\phi}(\tilde{t}(t,x), \tilde{x})(t,x) + \partial_{\tilde{t}}x\partial_x\tilde{\phi}(\tilde{t}(t,x), \tilde{x}(t,x))\\ &= \partial_{\tilde{t}}t\partial_t\phi + \partial_{\tilde{t}}x\partial_x\phi\end{aligned}$$

Ahora, considerando la dependencia de $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\alpha)$

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \partial_{\tilde{\mu}}x^\alpha\partial_\alpha\tilde{\phi}(\tilde{x})\\ &= \partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu)\\ &= \partial_{\tilde{\mu}}x^\alpha\partial_\alpha\phi(x)\end{aligned}$$

Por otro lado si consideramos a $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ y multiplicamos por $\left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu$

$$\begin{aligned}\left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu\tilde{x}^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu\\ &= \delta^\gamma_\nu x^\nu\\ &= x^\gamma\end{aligned}$$

Por lo tanto $x^\gamma = \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu\tilde{x}^\mu$ con lo cual, ahora si podemos encontrar como transforma el cuadri-gradiente

$$\partial_{\tilde{\xi}}x^\gamma = \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu\partial_{\tilde{\xi}}\tilde{x}^\mu$$
$$\left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu\delta^\mu_\xi$$

Por lo tanto

$$\partial_{\tilde{x}^i} x^\gamma = \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\xi \tag{1.7.4}$$

Ahora si, $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ e introducimos 1.7.4 en **??** obtenemos:

$$\partial_{\tilde{\mu}} \tilde{\phi} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha_\nu \partial_\alpha \phi$$

Que será como transforma el cuadri-gradiente de un escalar de Lorentz. Este será un conjunto de cuatro números qué transforman entre ellos de manera lineal homogénea, pero no definen un cuadri-vector contravariante ni covariante. Estos se definen como:

Cuadri-vector contravariante:

$$\tilde{A}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta \tag{1.7.5}$$

Cuadri-vector covariante:

$$\lll\lll< HEAD \tilde{B}_\alpha = \left(\Lambda^{-1}\right)^\beta_\alpha B_\beta ======= \tilde{B}_\alpha = \left(\alpha^{-1}\right)^\beta_\alpha B_\beta \ggg\ggg> refs/remotes/origin/main \tag{1.7.6}$$

1.8. Nociones de Grupos

$$G = \{a, b, \dots\}$$
$$\star : G \times G \to G$$

El cual cumplirá con las siguientes propiedades

- $g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3$
- Existe una identidad e perteneciente a G tal que $e \star g_i = g_i \star e = g_i \forall g_i \in G$
- $\forall g \in G$ existe un $g^{-1} \in G$ tal que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$

Tomemos por ejemplo el grupo $G = U(1)$ Multiplicación $g(\xi) = e^{i\xi}$ números $\xi \in [0, 2\pi)$
El otro grupo será el grupo SO(2), con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ el cual es el grupo de rotaciones y corresponde a una multiplicación matricial

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.8.1}$$

Grupos ortogonales: los cuales se denotan por $G = O(N)$ las cuales son matrices ortogonales de $N \times N$ tal que:

$$O^T O = I \tag{1.8.2}$$

$$\begin{aligned} g_1 \in O(N) \quad y \quad g_2 \in O(N) \; g_3 &= g_1 g_2 \in O(N) \\ g_3 &= g_1 g_2 \in O(N) \\ g_3^T g_3 &= (g_1 g_2)^T (g_1 g_2) \\ &= g_2^T g_1^T g_1 g_2 \\ &= g_2^T I g_2 \\ &= I \end{aligned}$$

Tarea, mostrar si $g \in O(N)$ tal que $g^{-1} \in O(N)$ Será que la 2 esfera será un grupo manifold? no, pero sera que una 3 esfera será un grupo? si
Grupos unitarios:
Se define el grupo ver videos de curvas elípticas

$\cdot$	g_1	g_2	g_3
g_1			
g_2			
g_3			

1.9. novena clase

$$g = \{g_1, g_2, \dots\}$$

grupo infinito numerable, el cual cumple con las siguiente propiedades

$$\begin{aligned}
&\cdot : g \times g \to g \\
&(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \\
&\exists e \in g / e \cdot g = g \cdot e \quad , \forall g \\
&\forall g \in g \quad , \exists g^{-1} \in g / g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e
\end{aligned}$$

los grupos también pueden ser continos, como por ejemplo $z^\dagger z = 1$ al cual se le llama el grupo $u(1) = g$, que se define por $z = e^{i\alpha}$ con $\alpha \in \mathfrak{r}$, con la multiplicación de números complejos.
otro ejemplo sería el grupo $o(n) = g$ tal que, el grupo de define con matrices de $n \times n$

$$g \in o / o^t o = i$$

grupo el cual se define sobre la multiplicación matricial

$$\tilde{\theta}_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \theta_{n\times n} & \theta_{n\times n} \\ \theta_{n\times n} & \theta_{n\times n} \end{pmatrix}$$

los grupos están definidos por como se hablan sus elementos, lo cual se escribe mediante una tabla de multiplicación

representación trivial unidimensional

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad g_3 = 1, \quad \dots$$

es infiel, representación trivial 2d

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representación de un grupo:

$$\text{matriz de algún tamaño} m(g_i) \leftarrow g_i \in g$$

tal que

$$m(g_1)m(g_2) = m(g_1 \cdot g_2)$$

representación proyectiva de un grupo:

$$\begin{gathered}
\text{matriz de} n \times n m(g_i) \leftarrow g_i \in g \\
m(g_i)m(g_j) = \omega(g_1, g_j)m(g_i \cdot g_j)
\end{gathered}$$

en lo cual, $\omega(g_i, g_j)$ corresponde a una fase, número complejo de módulo 1.

$$m(g_i) \leftarrow g \in g$$
$$m(g_i)) = \begin{pmatrix} m(g_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $m(g_i)$ una matriz no nueva. ahora

$$\text{matrices de} n \times n \; m(g_i) \longleftarrow g_i \in g$$
$$\tilde{m}(g_i) = a \; m(g_i) \; a$$
$$\text{con ca cualquier matriz invertible de } n \times n$$
$$\begin{aligned} \tilde{m}(g_i)\tilde{m}(g_j) &= (a \; m(g_i) \; a^{-1})(a \; m(g_j) \; a^{-1}) \\ &= a \; m(g_i)m(g_j) \; a^{-1} \\ &= a \; m(g_i \cdot g_j) \; a^{-1} \\ &= \tilde{m}(g_i \cdot g_j) \end{aligned}$$

cuando esto pasa decimos que las matrices $m(g_i)$ forman una representación que es conjugada a la representación formada por las matrices $\tilde{m}(g_i)$ y en consecuencia las identificamos como

$$m(g_i) \; \tilde{m}(g_i)$$

volvamos que $o(3)$

$$\begin{aligned} o^t o &= i \\ det(o^t o) = 1 \rightarrow det(o)^1 &= 1 \\ \det(o) &= \pm 1 \end{aligned}$$

este subconjunto de matrices tabién forman un grupo, al cual se le denota como so(3).
ahora, el grupo u(2)

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= i \\ det(u^\dagger u) &= 1 \\ det(u^\dagger)det(u) &= 1 \\ det(u)^* det(u) &= 1 \\ |det(u)|^2 = 1 \rightarrow det(u) = e^{i\beta} \quad &, \beta \in \mathfrak{r} \end{aligned}$$

si fijamos $\det\{u\} = 1 \quad (\beta = 0)$ todas las matrices unitarias también forman un subconjunto de u(2), el cual es llamado su(2).
más acerca de su(2).
su(2) es una tres esfera , pero, qué significa esto?
tres esfera (s^3)

$$s^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathfrak{r}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

es un mapeo 1 a 1 entre elementos de su(2) y puntos arriba de la tres esfera.
la matriz unitaria de 2×2 más general puede esribirse en términos de 4 números reales tal que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, donde

$$g(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x + y & z + iw \\ -z + iw & x - iy \end{pmatrix}$$

en lo cual

$$\begin{aligned} det(g) &= x^2 + y^2 - (-z + iw)(z + iw) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ahora, veamos cuánto es $g \cdot g^\dagger$,

$$\begin{aligned} g \cdot g^\dagger &= \begin{pmatrix} x - iy & -z - iw \\ z - iw & x + iw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy & z + iw \\ -z + iw & x - iy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 & (x - iy)(z + iw) + (-z - iw)(x - iy) \\ (z - iw)(x + iy) + (x + iy)(-z + iw) & z^2 + w^2 + x^2 + y^2 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

una forma de parametrizar la s^3 es:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sin^2\theta \\ z^2 + w^2 &= \cos^2\theta \\ x &= \cos\phi \sin\theta \\ y &= \sin\phi \sin\theta \\ z &= \cos\psi \cos\theta \\ w &= \sin\psi \cos\theta \end{aligned}$$

- s^3 es un grupo manifold
- es el grupo manifold de su(2)
- los grupos que son supfericies, se llaman grupos de lie

todo esto no es posible hacerlo con la 2-esfera
ejemplo de grupo contínuo que tiene dos partes "desconectadas "

$$\mathfrak{c} = \{(x, y) \in \mathfrak{r}^2 / y^2 = x^3 + bx^2 + cx + d$$

todos los elementos de su(2) pueden escribirse de la siguiente manera

$$g = e^{i\lambda_a t_a} = e^{i\lambda_1 t_1 + i\lambda_2 t_2 + i\lambda_3 t_3}$$

donde los t_a son 3 matrices de 2×2 hermíticas y de traza nula y los $\lambda_a = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son 3 parámatros reales. para calcular el determinante de la exponencial de una matriz es

$$\begin{aligned} det(g) &= det(e^{i\lambda_a t_a}) \\ &= e^{tr(i\lambda_a t_a)} \\ &= e^{i\lambda_a tr(t_a)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^\dagger \cdot g &= \left(e^{i\lambda_a t_a}\right)^\dagger \left(e^{i\lambda_b t_b}\right) \\ &= e^{-\lambda_a t_a^+} e^{i\lambda_b t_b} \\ &= e^{-i\lambda_a t_a^+ + i\lambda_{\cancel{b}}{}^a t_{\cancel{b}}{}^a} \\ &= e^{-i\lambda_a (t_a^+ - t_a^+)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

la regla de multiplicación de grupo implica que los generadores satisfacen lo siguiente

$$[t_a, t_b] = f_{abc} t_c$$

para su(2) es posible elegir una base tal que

$$[t_1, t_2] = it_3 \quad , \quad [t_2, t_3] = it_1$$
$$[t_3, t_1] = it_2$$

las matrices t_a definen la base de un espacio vectorial, que junto a la operaci´on de conmutación definen un álgebra, tal álgebra es llamado álgebra de lie.

1.10. Décima clase

Los grupos de Lie son superficies que no pueden tener componentes desconectados. El elemento identidad corresponderá a un punto en alguna de las piezas. Tal pieza define un subgrupo del grupo completo. En los grupos los elementos conectados a al identidad pueden ser escritos de la forma:
Me puedo imaginar que la primera superfice tiene curvas coordenadas, lo cual en una superfice bidimensionar tiene dos familias de curvas coordenadas, entonces a cada punto le doy dos números. Para lo cual podemos dividir el espacio en parámetros α lo cual podrá describir un punto en la superficie y por tanto, un punto en el espacio. Como lo puede ser, por ejemplo, el punto

$$g = g(\alpha_A)$$

Pensando en grupo clásicos, los g serán matrices de algún tamaño, tal que el elemento g puede ser escrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(\alpha_A) &= e^{i(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_n T_n)} \\ g(\alpha_A) &= e^{i(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots + \lambda_n T_n)} \\ &= e^{i\lambda_A T_A} \end{aligned}$$

Notemos que, esta forma exponencial solo es válida para lo elementos de la superficie del grupo conectada a la identidad.
Para lo cual

- Λ_A, números reales, (los alpha que llamó el profe)
- T_A matrices generadoras del álgrebra

Yo puedo tomar un elemento del grupo y multiplicarlo con otro, lo cual por la propiedad de clausura, debe dar otro elemento del grupo

$$g(\lambda_A) g(\beta_B) = g(\gamma_C = \gamma_C(\lambda_A, \beta_B))$$

Lo cual será según la tabla de multiplicación del grupo de Lie, lo cual, a diferencia de los grupos discretos, corresponde a un conjunto de funciones γ y el como se relacionan con los parámetros reales α_A y β_B, a las cuales les llamaremos constantes de estructura.

$$[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C$$

Lo cual se denote como, álgebra de LIe asociada al grupo de Lie.
¿ Qué forma toma $[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C$ para el grupo de Lorentz?
Dada una representación del álgebra, es decir un conjunto de N matrices T_A con $A = 1, \ldots, N$ tal que $[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C$, podremos encontrar una representación del grupo, exponiendo tales matrices. Si los λ_A so infinitesimales, entonces expando a primer orden la exponencial

$$g(\lambda_A) = I + i\lambda_A T_A + O\lambda^2 \tag{1.10.1}$$

Para hacer teoría de campos, nos basta saber la estructura del álgebra del grupo de Lorentz.
Vamos al grupo de Lorentz entonces.
Los grupos en física actúan sobre objetos físicos. Voy a definir un objeto físicos transformado, como la acción del elemento del grupo, actuando sobre el objeto físico no transformado

$$\tilde{\Phi}^I = g^I{}_J(\lambda_A)\Phi^I$$

en donde los índices I y J van desde 1 hasta la dimensión de la representación, por ejemplo en caso que sean matrices de 2×2 entonces toma dos valores, y así.
En caso que los parámetros λ_A estén conectados en el espacio que tenga la identidad, entonces. Una transformación infinitesimal actuará:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^I &= (I + i\lambda_A T_A)^I{}_K \Phi^J \\ &= I^I{}_J \Phi^I + i\lambda_A (T_A)^I{}_J \Phi^I \\ &= \Phi^I + i\lambda_A (T_A)^I{}_J \Phi^J\end{aligned}$$

Lo cual, si restamos el transformado con el elemento original, tenemos

$$\delta\Phi^I := \tilde{\Phi}^i - \Phi^I = i\lambda_A (T_A)^I{}_J \Phi^I$$

Con lo cual, la manera en la cual todo lo elemetos cercanos a la identidad actúan sobre el resto del grupo

$$\boxed{\delta\Phi^I = i\lambda_A (T_A)^I{}_J \Phi^J} \tag{1.10.2}$$

El grupo SU(2) ya lo definios,

$$U \in SU(2), \text{if } U^\dagger U = I \; \& det(U) = 1$$

Lo cual,

$$\begin{aligned}[T_A, T_B] &= i\epsilon_{ABC}T_C \\ [T_1, T_2] &= iT_3 \\ [T_2, T_3] &= iT_1 \\ [T_2, T_3] &= iT_1 \\ [T_3, T_1] &= iT_2\end{aligned}$$

Ahora tenemos las representación.
Representación trivial: La cual se usar para representar a los objetos sin rotación

$$(T_1) = 0, \quad (T_2) = 0, \quad (T_3) = 0$$

Representación de spin 1/2: Representación fundamental de $su(2)$

$$T_1 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representación de spin 1

$$T_1 = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lo cual

$$\begin{aligned}
T_1T_2 - T_2T_2 &= 1/2\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= 1/2\left[\begin{pmatrix} i & 0-i & \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}\right] \\
&= 1/2\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \\
& iT_3
\end{aligned}$$

Lie algebra in particle physcics A. Georgi.
Ahora, otra representación de matrices de 3×3

$$T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{\text{spin } 1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} T_2^{\text{spin } 1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} T_3^{\text{spin } 1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las irreps de $su(2)$ están clasificadas y están etiquetadas por un semi entero, $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ y son matrices de $(2s+1)\times(2s+1)$. Para cada valor de s hay una única irrep.
Representación conjugada:

$$\begin{aligned}
(T_AT_B - T_BT_A)^* &= (i\epsilon_{ABC}T_C)^* \\
T_A^*T_B^* - T_B^*T_A^* &= -i\epsilon_{ABC}T_C^* \\
(-T_A^*)(-T_B^*) - (T_B^*)(T_A^*) &= \epsilon_{ABC}(-T_C^*)
\end{aligned}$$

Por tanto, las matrices

$$\tilde{T_A} = -T_A^*$$

Y por tanto

$$\left[\tilde{T_A}, \tilde{T_B} = i\epsilon_{ABC}\tilde{T_C}\right]$$

La representación de spin 1/2 se le llama **2**, la cual está relacionada con la representación conjugada, de forma que ambas son equivalentes, la cual está dada por

Representación conjugada (antifundamental)

$$\tilde{T_1} = 1/2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{T_2} = 1/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{T_3} = 1/2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Representación la cual se denota por $\bar{textbf2}$. Ahora, si bien las representaciones son equivalentes via conjugación, estas no describen la misma física.

$$\bar{\mathbf{2}} \equiv \mathbf{2}$$

TAREA, encontrar la siguiente matriz A.

$$\tilde{T_1} = A^{-1}T_1A$$
$$\tilde{T_2} = A^{-1}T_2A$$
$$\tilde{T_3} = A^{-1}T_3A$$

Volvamos al grupo de Lorentz.

$$\tilde{X}^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu}X^\nu$$
$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_{\ \alpha}\Lambda^\nu_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

Para transformaciones de Lorentz infinitesimales

$$\Lambda^\alpha_{\ \beta} = \delta^\alpha_{\ \beta} + \omega^\alpha_{\ \beta}$$

Con lo cual, tenemos lo siguiente

$$\eta_{\mu\nu}\left(\delta^\nu_{\ \alpha} + \omega^\mu_{\ \alpha}\right)\left(\delta^\nu_{\ \beta} + \omega^\nu_{\ \beta}\right) = \eta_{\alpha\beta}$$
$$\eta_{\mu\nu}\delta^\mu_{\ \alpha}\delta^\nu_{\ \beta} + \eta_{\mu\nu}\omega^\mu_{\ \alpha}\delta^\alpha_{\ \beta} + \eta_{\mu\nu}\delta\ \alpha^\mu\omega^\nu_{\ \beta} + O(\omega^2) = \eta_{\alpha\beta}$$
$$\eta_{\mu\beta}\omega^\mu_{\ \alpha} + \eta\alpha\nu\omega^\nu_{\ \beta} = 0\text{Definición} \quad \omega_{\beta\alpha} + \omega_{\alpha\beta} = 0$$
$$\boxed{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\mu &= \left(\delta^\mu_{\ \nu} + \omega^\mu_{\ \nu}\right)X^\nu \\ &= \delta^\mu_{\ \nu}X^\nu + \omega^\mu_{\ \nu}X^\nu \\ &= X^\mu + \omega^\mu_{\ \nu}X^\nu\end{aligned}$$

Y asi se obtiene que

$$\delta X^\mu := \tilde{X}^\mu - X^\mu = \omega^\mu_{\ \nu}X^\nu$$

Desarollamos esta definición

$$\begin{aligned}
\delta X^{\mu} &= \omega^{\mu}_{\ \nu} X^{\nu} \\
&= i\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\ \nu} X^{\nu} \\
\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\ \nu} = \#\left(\delta^{\mu}_{\nu} - \delta^{\beta}_{\ \nu}\eta^{\alpha\mu}\right) \\
&= i\frac{\#}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\beta\nu} - \delta^{\beta}_{\nu}\eta^{\alpha\nu}\right) X^{\nu} \\
&= \#\omega^{\mu}_{\nu} X^{\nu} = \omega^{\mu}_{\nu} X^{\nu}, \quad \# = -i \\
&= \#\omega^{\mu}_{\nu} X^{\nu} = \omega^{\mu}_{\nu} X^{\nu}, \quad \# = -i \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\ \nu} X^{\nu}
\end{aligned}$$

Donde

$$\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\nu}_{\ \nu} = i\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\beta\mu} - \delta^{\beta}_{\ \nu}\eta^{\alpha\nu}\right)$$

1.11. Onceaba clase

Estudiamos el decaimiento beta pero no hablamos de la vida media del neutrón, a lo cual, el 66 % decaerán dentro de 11 minutos eso define la vida media de una partícula, pero aún no tenemos la física para gatillar dicho proceso pero, ese proceso, pero si sabemos que ese proceso debe conservar la energía y momento relativista y pudimos, usando la conservación de dichas cantidades encontrar que hay una restricción de las partículas involucradas, si me olvido de la existencia del neutrino, no conserva la masa, pero bueno, Pauli postuló la existencia de una partícula extra que no estaba dentro de la reacción y la existencia de la partícula extra da un rango de energías posibles para el electrón.
Ahora haremos un pequeño desvío, supogan que se tiene un conjunto de objetos

$$G = \{a, b, c, \dots\} \tag{1.11.1}$$

Para lo cual se tiene una ley de composición interna como sigue

$$\star : G \times G \longrightarrow G \tag{1.11.2}$$

Entonces me puedo armar una tabla de multiplicación en donde

$\star$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

En lo cual, si dentro de la tabla de multiplicación aparecen solo elementos del grupo, entonces diremos que G, con la regla de multiplicación $\star$ define un grupo si se satisfacen las siguientes propiedades

- $e \in G /\ e \star a = a$
- $\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G /\ a \star a^{-1} = e$
- $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

Cuando yo escribo una tabla de multiplicación yo asumo que el grupo está compuesto por una cantidad numerable, sin embargo, existen grupos para los cuales no es el caso, dichos grupos reciben el nombre de **grupos continuos**. Los cuales son grupos en donde los elementos están etiquetados por elementos que viven

en el continuo $a(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, en este caso, α_n vive en un continuo.
Ejemplo:

$$a = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a(\alpha_1)$$

Para lo cual α_1 vive en el continuo de $\alpha_1 \in [0, 2\pi)$, ahora

$$b(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Los cuales también son infinitos y

$$c(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & 0 & -\sin\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & 0 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Entonces, el punto que se quiere hacer es el siguiente, con el siguiente conjunto de matrices

$$\{a(\alpha_1), b(\alpha_2), c(\alpha_3)\}$$

Las cuales corresponden a matrices infinitas, pero qué tan grande es este infinito, bueno, tantos como puntos hay en el intervalo $(0, 2\pi)^3$ ya que cada de estos elementos van de $(0, 2\pi)$, este conjunto define un grupo bajo la multplicación matricial (grupo continuo). Para lo cual no se puede escribir una tabla de multplicación, tendría que ser un gradiente pero encima es tridimensional, con lo cual está dificil, sin embargo, definimos un elemento g tal que

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)g(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = g(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

Lo cual, además debemos escribir como

$$g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta}) = g(\vec{\gamma}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}))$$

El cómo estos parámetros γ se obtienen a través de α y β es donde está contenida la tabla de multiplicación.
Teorema: Las matrices ortogonales de $M \times M$ forman un grupo.

$$G = \{O_{M\times M}/O * TO = I\}$$

Demostración:

- $I \in G$ so porque $I^T I = I$
- $O \in G \Rightarrow O^T O = I$ si la matriz O satisface esto, entonces ${O^{-1}}^T O^{-1} = I \Rightarrow O^{-1} \in G$
- Asociatividad se hereda de la asociatividad de la multiplicación matricial

Anteriormente nos dimos cuenta que las transformaciones de Lorentz están dadas todas las matrices que satisfacen la siguiente propiedad

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{1.11.3}$$

O sea, las matrices que definen una transformación de Lorentz preservan el espacio de Minkowsky.
Un ejemplo parecido es

$$A^T_{2n\times 2n} J A = J \tag{1.11.4}$$

Lo cual define al grupo simpléctico cuando las matrices J son de la siguiente forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & M_{n\times n} \\ -M_{n\times n} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11.5}$$

Las matrices simplécticas aparecen en mecánica clásica cuando uno estudia las transformaciones canónicas en la formulación Hamiltoniana. Nuestro foco en este curso estará claramente en el grupo de Lorentz.
Grupo de Lorentz:
La composición de dos transformaciones de Lorentz son una transformación de Lorentz también, recordemos que dentro de las transoformaciones de Lorentz están los Boosts, las rotaciones y las transformaciones entre dos observadores relativos.
Una parte de estas transformaciones de Lorentz están definidas en el compacto (cerrado y acotado) $(0, 2\pi)$, las cuales son las rotaciones y que las rotaciones entre ellas forman un subgrupo compacto. Luego, como se mencionó, dentro del grupo de Lorentz también están los boosts, pero los boosts están caracterizados por una rapidez v que puede ser $-c < v < c$ lo cual como intervalo de los reales, es acotado, pero no cerrado ya que los bordes del intervalo no están incluidos, con lo cual los boosts definen el sector no compacto del grupo de Lorentz.
Recordemos que un boost a lo largo del eje x puede ser escrito con funciones hiperbólicas como,

$$t' = \cosh\xi t - \sinh\xi x$$
$$x' = \sinh\xi t + \sinh\xi x$$

$$\boxed{\tanh\xi = \frac{v}{c}}$$

Notemos que las funciones hiperbólicas son perdiódicas, pero esta periocidicada corresponde a una periodicidad compleja, con lo cual no tienen en el eje real. Entonces el hecho que no sean periódicas implica que no puedo hacer el mismo tratamiento que para las rotaciones con seno y coseno.
Por lo tanto, **el grupo de Lorentz es no compacto**.
Una forma de visualizar esto sería de la siguiente forma, imaginar 3 circunferencias, que definen el sector compacto del grupo de Lorentz, y además imaginar 3 rectas que van desde $-c$ hasta c la elección de un punto en cada circunferencia y uno por cada recta, nos da un elemento del grupo de Lorentz, esto nos visualiza el cómo el grupo de Lorentz tiene una parte no compacta que corresponde a los boosts, los cuales pueden estar dados en cualquier dirección. Entocnes por ejemplo, esta elección de puntos definen un elemento del grupo de Lorentz, no necesariamente único, ya que una misma elección pueden dar a un mismo punto del grupo de Lorentz [2]. **Grupo:** Pensemos en el grupo más simple Z(2) el cual tiene una tabla de multplicación como sigue

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

Podemos encontrar, a través de distintos objetos, dicha tabla de multiplicación, pensemos primero con matrices de distinto tamaño. Distintas elecciones las cuales, bajo producto matricial me definen la tabla de multplicación del grupo definen las **representaciones del grupo**. El grupo de SU(2) por ejemplo tiene una sola representacion de dimensión 2. Hay una representación la cual es la más aburrida pero útil, la cual corresponde a al representacion trivial.

- $a \to I_{M\times M}$
- $b \to I_{M\times M}$

[2] Las traslaciones unidas al grupo de Lorentz dan origen al grupo de Poincaré, como una extensión del grupo de Lorentz O(1,3)

Cuando el mapeo o representacion no es uno a uno, entonces no es inyectiva, o no fiel.

Representacion trivial

$\star$	$I_{M\times M}$	$I_{M\times M}$
$I_{M\times M}$		
$I_{M\times M}$		

Para lo cual podemos comprobar que se satisface la tabla de multplicación del grupo, pero obviamente esta representacion, si bien existe, es súper fome. Lo importante a recalcar es que bajo la representacion se debe satisfacer la tabla de multiplicación.

Capítulo 2

Teoría Clásica de Campos

2.1. Noción de Campo

A algún punto del espacio se le asocia un campo eléctrico y un campo magnético y además, otro observador inercial también le asocia un campo eléctrico y magnético a cada punto del espacio pero desde su punto de vista. Notemos que, bajo transformaciones de Lorentz el campo eléctrico y magnético se mezclan. La dinámica de la evolución temporal de los campos están dadas por las ecuaciones de Maxwell, escribámoslas en el vacío[1].

$$
\begin{aligned}
D_i E^i &= 0 \\
D_i B^i &= 0 \\
\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} D_j E_k &= -\partial_t B^i \\
\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} D_j B_k &= \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E^i
\end{aligned}
$$

Hay una forma trivial para resolver la 2da y 3ra ecuación, $\exists \phi, \vec{A}$ tal que, los campos eléctrico y magnético en función de los potenciales son

$$
\begin{aligned}
B^i &= \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} D_j A_k \\
E^i &= -g^{ij} \partial_j \phi - \partial_t A^i
\end{aligned}
$$

Respecto de ϕ y de $\vec{A}$, la ley de Gauss magnética y la ley de Faraday son identidades (ya están resueltas), y las otras dos ecuaciones, la ley de Gauss y ley de Ampère-Maxwell son ecuaciones, ùltimas las cuales me permitirán encontrar ϕ y $\vec{A}$ para resolver las otras dos identidades.
Ahora, sean dos observadores inerciales K y $\tilde{K}$ para los cuales, cada uno puede observar un potencial eléctrico y magnético en un mismo punto del espacio respecto a cada uno de ellos, $\phi(t, \vec{x})$ y $\vec{A}(t, \vec{x})$ con respecto al observador K y $\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{\vec{x}})$ y $\tilde{\vec{A}}(\tilde{t}, \tilde{\vec{x}})$ con respecto al observador inercial $\tilde{K}$. Ahora, cómo puedo transformar a los potenciales desde un observador inercial al otro?, ya sabemos como transforman las etiquetas, sea t o x, la respuesta la da lo siguiente.

$$A^\mu = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{\phi, \vec{A}\} \tag{2.1.1}$$

El cual corresponde a un cuadri-vector y se le llama cuadri-potencial electromagnético, el cual transforma como

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \tag{2.1.2}$$

El cuadri-potencial transforma en la representación vecorial del grupo de Lorentz. Notemos que el cuadri-potencial tiene dos etiquetas, el μ que es el que da sus componentes y x que es una componente espacio

[1] D_j corresponde a la derivada covariante definida por $D_j A^k = \partial_j A^k - \Gamma^l_{jk} A_l$ con Γ^l_{jk} los símbolos de Christoffel

tiempo, y la transformación de Lorentz transforma sobre los dos índices. Supongamos que queremos ver el cómo transforma el cuadri-potencial pero con la misma etiqueta de espacio tiempo a cada lado, para ello

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}\tilde{x}) \quad \text{cambiamos de letra}$$
$$\tilde{A}^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$$

Definición: El conjunto de campos $\Phi_A(x)$ transformará en un representación del grupo de Lorentz sí y sólo si el conjunto de campos que mide un observador K que mide con la etiqueta $\Lambda^{-1}x$ se relacionan con otro con etiqueta x se la siguiente forma

$$\tilde{\Phi}_A(x) = [D(\Lambda)]_{AB}\, \Phi_B(\Lambda^{-1}x) \tag{2.1.3}$$

En lo cual la matriz D corresponde a una representación del grupo de Lorentz tal que

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1, \Lambda_2) \tag{2.1.4}$$

Ello nos asegura que la tabla de multiplicación si se realice con las matrices D. Defino un objeto que transforma bajo una representación. Esto corresponde a una abstracción de lo que se estaba haciendo arriba, entonces ahora, como existe una representación trivial hacemos lo siguiente.
Definición de campo escalar: Se define como un único número que bajo transformaciones de Lorentz transforma así

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{2.1.5}$$

El campo escalar aparece cuando los índices B tienen un solo valor y las matrices D les asocio la matriz identidad, o sea, la representacion trivial. Y ello es lo mismo a

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \tag{2.1.6}$$

Debido a los argumentos expuestos arriba. Primero se estudiará la teoría cuántica de campos escalares para no convolucionar de una las complicaciones que suponen los campos vectoriales.
Antes de estudiar la teoría cuántica de este campo escalar, primero se tendrá que estudiar la teoría clásica de dicho campo escalar para posteriormente cuantizarlo.
Notemos que en (2.1.5) Λ es una tranformación de Lorentz arbitraria, en particular, finita. Algo que será útil dado del teorema de Noether es que, la invariancia de la acción bajo una transformación tiene asociada una cantidad conservada a la dinámica. La acción que se construirá para el campo escalar será invariante bajo transformaciones de Lorentz, si la dinámica del campo escalar es invariante bajo transformaciones de Lorentz esto significa que si se realiza un experimento con este campo escalar va a concluir cierto conjunto de ecuaciones para la dinámica de este campo, ecuaciones las cuales serán las mismas para cualquier observador inercial.
¿Cómo transforma el campo escalar bajo una transformación de Lorentz infinitesimal?

$$\tilde{A} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Tal que, la transformación infinitesimal diferirá de la transformación identidad por muy poco

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \cancel{O(\omega^2)}$$

En donde ω^μ_ν es una matriz con entradas pequeñas, ahora el profesor nos invita a repetir el siguiente cálculo con las 6 transformaciones de Lorentz independientes

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual es una rotación del plano x-y, de forma explícita sería

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t\\ \tilde{x} &= \cos\theta x - \sin\theta y\\ \tilde{y} &= \sin\theta x + \cos\theta y\\ \tilde{z} &= z\end{aligned}$$

Asumimos que el ángulo θ es pequeño, con lo cual, aproximando hasta los términos de θ^2 el coseno y el seno son

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1\\ \sin\theta &= \theta\end{aligned}$$

Con lo cual, la transformación de Lorentz queda tal que

$$\Lambda = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\theta & 0\\ 0 & \theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Cuando uno tiene una matriz A que difiere de la identidad por una matriz pequeña ξ entonces la inversa está dada tal que

$$\begin{aligned}A &= I + \xi\\ A^{-1} &= I - \xi\end{aligned}$$

Por lo tanto el campo escalar bajo una transformación infinitesimal será

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi((I-\omega)x)\\ &= \phi(x - \omega x)\\ &= \phi(x) - (\omega x)^{\mu}\partial_{\mu}\phi\end{aligned}$$

Recordar que

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{h}\cdot\nabla f \tag{2.1.7}$$

Así, la transformación infinitesimal del campo escalar

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \tilde{\phi}(x) - \phi(x)\\ &= \omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\nu}\phi\end{aligned}$$

Así

$$\boxed{\delta\phi = -\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi} \tag{2.1.8}$$

La cual es la transformación infinitesimal de Lorentz, lo cual será de utilidad para encontrar cantidades conservadas bajo transformaciones de Lorentz.

2.2. Doceaba clase

Se estudió acerca del grupo de Lorentz y representaciones matriciales, matrices las cuales puden ser de infinito por infinito en el caso de operadores diferenciales y que además esto nos da una tabla de composición. Entonces, las transformaciones de Lorentz están representadas por una matriz Λ en la cual hay 3 boosts y 3 rotaciones, sabemos como actúan sobre x^{μ} y $^{\mu}$

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\\ \tilde{p}^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu}p^{\nu}\end{aligned}$$

Con

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

Esto me asegura que bajo la transformacion de Lorentz se preserve el intervalo. Desde el punto de vista matricial se puede escribir lo siguiente

$$\begin{aligned}
\Lambda^T\eta\Lambda &= \eta, \quad /det() \\
det(\Lambda^T\eta\Lambda) &= \det(\eta) \\
det(\Lambda^T)\cancel{\eta}det(\Lambda) &= \cancel{det(\eta)} \\
\det(\Lambda)^2 &= 1 \\
\det(\Lambda) &= \pm 1
\end{aligned}$$

Las matrices que satisfacen $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$ forman un grupo (el grupo de Lorentz).

$$\begin{aligned}
SO(1,3) &\subset O(1,3) \\
SO(1,3) &= \{\Lambda \in O(1,3)/det(\Lambda) = 1\}
\end{aligned}$$

El grupo SO(1,3) recibe el nombre del grupo de Lorentz propio. Nosotros sabemos que las matrices deben satisfacer lo siguiente

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\nu\mu}$$

Lo cual con, $\mu = t$ y $\nu = t$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\alpha}_{t}\Lambda^{\beta}_{t}\eta_{\alpha\beta} &= +1 \\
\Lambda^{t}_{t}\Lambda^{t}_{t}\eta_{tt} + \Lambda^{x}_{t}\Lambda^{x}_{t}\eta_{xx} + \Lambda_{yt}\Lambda^{y}_{t}\eta_{yy} + \Lambda^{z}_{t}\Lambda^{z}_{t}\eta_{zz} &= \\
\left(\Lambda^{t}_{t}\right)^2 - (\Lambda^{x}_{t})^2 - (\Lambda^{y}_{t})^2 - (\Lambda^{z}_{t})^2 &= \\
\left(\Lambda^{t}_{t}\right)^2 - \left(\Lambda^{i}_{t}\right)^2 &= \\
\left(\Lambda^{t}_{t}\right)^t &= 1 + (\Lambda_{it})^2
\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que

$$|\Lambda^{t}_{t}| \geq 1 \tag{2.2.1}$$

Esto nos da una segunda serparación del grupo de Lorentz que con $|\Lambda^{t}_{t}| \geq 1$ se llaman **ortocronas** y las que cumplen que $|\Lambda^{t}_{t}| \leq -1$ se llaman **no ortocronas**. Ahora si yo me quedo en los propios ortocronos, eso se denota por $SO^{\uparrow}(1,3)$.
Ejemplos de transformaciones de Lorentz en distintos sectoresd del grupo de Lorentz, una transformación de Lorentz que vive en el sector ortocrono imporopio, denotado por $L^{\uparrow}_{-}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o en forma más explícita

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= t \\
\tilde{x} &= -x \\
\tilde{y} &= y \\
\tilde{z} &= z
\end{aligned}$$

Por relaciones de paridad, el determinante de esta matriz es -1 y $\Lambda^{t}_{t} = 1$ pero en el sector impropio ya que el determinante será -1 y esto representa una reflexión con respecto al plano y-z, o sea, para un punto x, su

medición con respecto al observador inercial $\tilde{K}$ será de $-x$.
Otra transformación

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformación la cual pertenece al sector impropio no-ortocrono, y recibe el nombre de inversión tempora.
Los principio de la relatividad especial llevan la invariancia del intevalo, pero el intervalo resulta ser invariante bajo rotaciones, boosts, traslaciones espacio-temporales y además, paridad e invesión temporal.
Las primeras 3 son simetrías de las teorías relativistas o de la naturaleza[2]. Algo que se puede demostrar es que las teorías relativistas son invariantes bajo $\mathcal{CPT}$[3], ello quiere decir que si tengo una teoría relativista, incluso la interacción débil y estudio su imagen especular, estudio con el operador inversión temporal y cambio todas las partículas por anti-partículas, el proceso ocurre de la misma manera, esto corresponde a un teorema.
Ejemplo de violación de paridad: Supongamos que tenemos un átomo de cobalto 60 (^{60}Co), que tiene 27 protones y 33 neutrones, algo que sucede en la naturaleza es que tomamos este átomo que tiene cierto spin, este átomo decae ya que los neutrones decaen y emiten un neutrón, un electrón y un antineutrino electrónico y el átomo que me queda tendrá un protón más con lo cual será un átomo de Níquel 60 (^{60}Ni) y este tiene 28 protones y 32 neutrones. El punto clave es el siguiente, los electrones preferentemente salen alineados con el spin, tienen una dirección preferencial de decaimiento[4]. Se pone un espejo, tal que la imagen especular del átomo será que, para un movimiento horario, en la imagen especular se mueve en sentido antihorario, con lo cual el spin en la imagen especular será hacia abajo, en cambio, una dirección paralela al espejo será en la misma dirección, con lo cual en la imagen especular, lo electrones salen opuestos al spin, a diferencia de en la original, lo cual nos indica que el proceso y su imagen ocurren de forman distintas y la mecánica que lleva a este experimento, es la interacción débil. Así, el proceso de decaimiento

$$^{60}Co \longrightarrow^{60} Ni \tag{2.2.2}$$

No ocurre de la misma forma que su imagen especular.

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_\theta \tag{2.2.3}$$

Ahora, en los fenómenos del campo electromagnético esto no pasa, y en fenómenos de la fuera nuclear fuerte tampoco pasa[5].
Volvamos al campo escalar, la tarea será escribir una ecuación dinámica tal que sea invariante bajo transformaciones de Lorentz, recordemos que tenemos un observador K que le asigna a un punto coordenadas x^μ y un observador $\tilde{K}$ le asigna coordenadas $\tilde{x}^\mu$ al mismo punto, a este punto del espacio se le asigna un número, tal que para ambos observadores el número sea el mismo, o sea

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \tag{2.2.4}$$

Que no es tautológico, considera la representación trivial del grupo de Lorentz, y recordar además que

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

Lo cual será equivalente, ahora se pregunta ¿cómo cambia el campo escalar bajo una transformación de Lorentz infinitesimal? Ahora viene la pregunta de ¿Porque se quiere realizar eso? ya que se quiere encontrar la cantidad conservada.

$$\Lambda = I\omega$$

[2]Se pensaba que las leyes de la física eran invariantes ante paridad pero a mediados de los 50 se descubrió que la fuerza de interacción débil no es especular ante paridad.
[3]$\mathcal{CPT}$:= Conjugación de carga, Paridad, Time reversal
[4]Resultado experimental obtenido por Chien-Shiung Wu (Inserte nombre en carácteres Chinos), física China nacionalizada estadounidense, en 1956 en colaboración con el Grupo de baja Temperatura del Instituto Nacional de Estándares.
[5]Esto está explicado en el libro Griffiths Introduction Elementary Particle Physics.

y además

$$\Lambda^{-1} = I - \omega$$

Esto quiere decir que

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$$
$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \omega^{\mu}_{\nu}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x) &= \phi((\delta^{\mu}_{\nu} - \omega^{\mu}_{\nu})x^{\nu}) \\ &= \phi(x^{\mu} - \omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}) \\ &= \phi(x^{\mu}) - \omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi + \cancel{O(\omega^2)}\end{aligned}$$

Ahora definimos la variación bajo una transformación de Lorentz

$$\delta_L\phi = -\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi \tag{2.2.5}$$

Además tenemos que

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

Ahora si aplicamos la transformación infinitesimal entonces

$$\left(\delta^{\mu}_{\alpha} + \omega^{\mu}_{\alpha}\right)\left(\delta^{\nu}_{\beta} + \omega^{\nu}_{\beta}\right)\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$$

Si esto lo expando tengo que

$$\eta^{\omega}_{\alpha\nu}{}^{\nu}_{\beta} + \eta_{\mu\beta}\omega^{\mu}_{\alpha} = 0$$

Definición:

$$\boxed{\eta_{\alpha\nu}\omega^{\nu}_{\beta} := \omega_{\alpha\beta}} \tag{2.2.6}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} &= 0 \\ \omega_{\alpha\beta} &= -\omega_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

Lo que dice que el tensor $\omega_{\alpha\beta}$ es antisimétrico bajo intercambio de índices, y además tiene 6 elementos independientes. Lo que finalmente corresponde a los 3 boosts y a las 3 rotaciones. Ahora bien, se puede definir también el tensor ω con los índices arriba como

$$\omega^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\omega_{\mu\nu} \tag{2.2.7}$$

Lo que nos permite escribir la transformación infinitesimal como

$$\begin{aligned}\delta_L\phi &= -\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi \\ &= -\omega^{\mu\nu}x_{\nu}\partial_{\mu}\phi\end{aligned}$$

Tener cuidado con definir coordenadas con el índice abajo en espacio-tiempo curvos ya que esto no existe[6] (no se puede). Tener cuidado con definir coordenadas con el índice abajo en espacio-tiempo curvos ya que esto no existe (no se puede). Ahora, se mostró que $\omega_{\mu\nu}$ era antisimétrico y ahora se mostrará que sucede con el tensor $\omega^{\mu\nu}$ esta vez con los índices arriba.

$$= -\left[\frac{1}{2}\left(\omega^{\mu\nu} - \omega^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\left(\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu}\right)\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(x_{\nu}\partial_{\mu} - x_{\mu}\partial_{\nu}\right)\phi + \frac{1}{2}\left(x_{\nu}\partial_{\mu} + x_{\mu}\partial_{\nu}\right)\phi\right]$$

[6] $x_{\nu} = \eta_{\nu\alpha}x^{\alpha}$ Esto nunca lo haga en espacio tiempo curvo (forbidden)

En donde se ha efectuado una suma por cero, o sea, la expresión enterior es exáctamente igual a esta

$$= \frac{1}{4}\left(-\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu}\right)\left(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu\right)\phi$$

Esto ya que, el término opuesto antisimétrico (segundo término) en ìndices contraìdos con un tensor simétrico tiene traza cero y además el primer término corresponde a factores antisimétricos en resta, con lo cual quedan sumados. Finalmente, se tiene que la transformación infinitesimal de lorentz sobre un campo escalar es.

$$\delta_L \phi = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi$$

Donde $L_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$ y estos operadores diferenciales $L_{\mu\nu}$ son generadores del grupo de Lorentz. Como ejercicio se pide calcular el siguiente conmutador actuando sobre un campo escalar ϕ.

$$\left[L_{\mu\mu}, L_{\alpha\beta}\right]\phi = L_{\mu\nu}\left(L_{\alpha\beta}\phi\right) - L_{\alpha\beta}\left(L_{\mu\nu}\phi\right) \tag{2.2.8}$$

Lo que debería resultar algo como lo siguiente

$$\left[L_{\mu\mu}, L_{\alpha\beta}\right]\phi = (\eta L - \eta L + \eta L - \eta L)\phi \tag{2.2.9}$$

Lo cual con los índices y sin actuar sobre ϕ definen el álgebra de Lorentz.
El campo escalar transforma bajo una transformación finita de la siguiente manera

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

Y la transformación infinitesimal de un campo escalar bajo una transoformación de Lorentz está dada por

$$\delta_L \phi = -\omega^{\mu\nu} x^\nu \partial_\mu \phi$$

pero, también puede ser escrita de la siguiente manera

$$\delta_L \phi = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}\phi$$

Las cuales son dos versiones distintas de una transformación infinitesimal de Lorentz actuando sobre un campo escalar ϕ. La elección del tensor $\omega^{\mu\nu}$ me dirá si estoy haciendo una rotación o un boost. ¿Ahora cómo será la acción del campo escalar ϕ?

$$\begin{aligned} \delta I &= I\left[\phi + \delta_L \phi\right] - I[\phi] \\ &= \int dt \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

Si logramos encontrar que la acción es quasi-inviariante bajo transformación es de Lorentz, entonces encontraremos la cantidad conservada.
Además debemos implementar la invariancia bajo traslaciones espaciacio-temporales $x^\mu \to x = x^\mu - a^\mu$. Necesitaremos que la acción del campo escalar sea también cuasi-invariante bajo traslaciones espacio-temporales. Si se tiene un observador K y $\tilde{K}$ a una distancia a^μ los cuales asignan una etiqueta x^μ y $\tilde{x}^\mu$ respectivamente, entonces

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu + a^\mu$$

¿Como actúa esta transformación espacio-temporal sobre un campo escalar?
Las traslaciones también forman un grupo, el cual corresponde a un grupo abeliano y las únicas representaciones irreducibles de un grupo abeliano son funcionales. Bajo una traslación espacio-temporal $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$[7] o sea, tenemos la misma ley de transformación para Lorentz y para traslaciones espacio-temporales.
Un campo escalar bajo traslaciones espacio-temporales $\tilde{x}^\mu = x^\mu - a^\mu$ transforma como

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \phi(x) \\ &= \phi(\tilde{x} + a) \\ \tilde{\phi}(X) &= \phi(x + a) \end{aligned}$$

[7]Para A^μ en Lorentz $\tilde{A}^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ y para traslaciones espacio-temporales $\tilde{A}^\mu(x) = A^\mu(x + a)$

En donde solo se cambió la letra, ahora ¿Cómo es esto de forma infinitesimal?, recordemos que

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{h}\cdot\vec{h}\cdot\nabla f$$

Por lo tanto, queda como

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + a^{\mu}\partial_{\mu}\phi + \cancel{O(a^2)} \tag{2.2.10}$$

Y finalmente

$$\delta_T\phi = \tilde{\phi}(x) - \phi(x) = a^{\mu}\partial_{\mu}\phi \tag{2.2.11}$$

En resument

- Transformación infinitesimal bajo Lorentz $\delta_L\phi = -\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi$
- Transformación infinitesimal espacio-temporal $\delta_T\phi = a^{\mu}\partial_{\mu}$

Se busca escribir una acción para el campo escapar que sea quasi-invariante bajo $\delta_L\phi$ (equivalencia de los observadores inerciales) , bajo $\delta_T\phi$ (homogeneidad del espacio-tiempo) , lineal y de 2do orden (cuantizar la teoría).

2.3. Decimotercera clase

A cada punto del espacio-tiempo se le asigna un número real, y esa asignación dependerá de como de elige el sistema de referencia

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$$

Lo que corresponde a un campo escalar de Lorentz. Comprobamos también que bajo traslaciones espacio-tiemporales también

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \phi(x)\\ \tilde{x}^{\mu} &= x^{\mu} - a^{\mu}\end{aligned}$$

Con lo cual se encontraron las transformaciones infinitesimales:

$$\begin{aligned}\delta_L\phi &= -\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\\ \delta_T\phi &= a^{\mu}\partial_{\mu}\end{aligned}$$

Supongamos un universo de 2+1 dimensiones, tal que el campo escalar $\phi(t,x,y)$ tendrá una asignación para cada coordenada x e y, y además dependiendo del tiempo este punto se podrá estar moviendo lo cual significa que tendrá una energía y momento lineal o angular al moverse. Todo ello se le asociará al campo.
En el caso del campo electromagnético, tiene energía, la cual está dada por

$$\text{Energía} \sim \int d^3x\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) \tag{2.3.1}$$

Para lo cual, al integrando se le llama densidad de energía $|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2$.
Además, el campo electromagnético tiene momento lineal y angular, último el cual se calculará más adelante, el momento linal total está dado por

$$\text{Momento lineal} \sim \int d^3x\vec{E}\times\vec{B} \tag{2.3.2}$$

En este caso, al integrando del momento lineal total se le llama vector de Poynting $\vec{E}\times\vec{B}$. Lo que se necesita es tener expresiones parecidas a estas pero para el campo escalar. Recordemos que la energía es la cantidad conservada bajo traslaciones temporales y ya tenemos como condicion que la acción sea quasi-invariante bajo traslaciones espacio-temporales con lo cual podré calcular una cantidad conservada con respecto a traslaciones temporales y ello será la energía del campo escalar.
Cuando encontremos $I[\phi]$, invariante bajo transformaciones espacio temporales $\delta_T\phi$ y bajo Lorentz $\delta_L\phi$,

podremos calcular via teorema de Noether la energía, el momento lineal y el momento angular del campo escalar. Téngase la siguiente acción

$$I[\phi] = \int dt \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_y \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_z \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right)$$

Como $L = \int d^3x \mathfrak{L}$ entoces a $\mathfrak{L}$ se le llama la densidad Lagrangeana, posteriormente, abusando de la notación, se le llama simplemente Lagrangeano a $\mathfrak{L}$. En el caso propuesto arriba, la densidad Lagrangeana corresponde a

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

Útil es la siguiente nemotecnia

$$\mathfrak{L} = (\partial_t \phi)^2 - |\nabla \phi|^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \tag{2.3.3}$$

Pero, ¿Porqué esta acción?, se demostrará que la siguiente acción cumple con las siguientes propiedades

- $\delta_T I = 0$.
- $\delta_L I = 0$.
- Ecuación dinámica es de 2do orden y lineales[8].
- Dado este sistema, seremos capaces de encontrar el espectro del Hamiltoniano cuántico.

Es decir, el sistema tendrá un Hamiltoniano y podremos encontrar los autovalores de dicho Lagrangeano.

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \tag{2.3.4}$$

Ahora tenemos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi \\ &= \eta^{tt} (\partial_t \phi)^2 + \eta^{xx} (\partial_x \phi)^2 + \eta^{yy} (\partial_y \phi)^2 + \eta^{zz} (\partial_z \phi)^2 \end{aligned}$$

Antes de calcular las ecuaciones de campo, demostraremos que esta acción cumple con los principios de la Relatividad Especial, o sea, es invariante bajo traslaciones espacio-temporales, entonces.
Teorema: La acción

$$I[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \tag{2.3.5}$$

Es quasi-invariante bajo traslaciones espacio-temporales

$$\delta_T \phi = a^\mu \partial_\mu \phi \tag{2.3.6}$$

Demostración: Calculamos como varía la acción bajo una traslación espacio temporal

$$\begin{aligned} \delta_T I &= I[\phi + \delta_T \phi] - I[\phi] \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu (\phi + \delta_T \phi) \partial^\mu (\phi + \delta_T \phi) - \frac{m^2}{2} (\phi + \delta_T \phi)^2 \right) - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \\ &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu (\phi + a^\alpha \partial_\alpha \phi) \partial^\mu \left(\phi + a^\beta \partial_\beta \phi\right) - \frac{m^2}{2} (\phi + a^\rho \partial_\rho \phi)^2 \right) - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \end{aligned}$$

[8]Las teoría más interesantes presentan una no-linealidad, sin embargo esta se estudia como una perturbación sobre la linealidad

Recordemos que a es una cantidad infinitesimal y constante, con lo cual puede salir de las derivadas y además todos los términos de $O(a^2)$ son descartados

$$\begin{aligned}\delta_T I &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\left(a^\alpha\partial_\alpha\phi\right)\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\left(a^\beta\partial_\beta\phi\right) - \frac{m^2}{2}\left(\phi^2 + 2\phi a^\rho\partial_\rho\phi\right) - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2\right] \\ &= \int d^4x\left[a^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi a^\alpha\partial_\alpha\phi\right]\end{aligned}$$

En donde se ha usado que $A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu$ esto gracias que la métrica es simétrica. Ahora necesitamos escribir esta cantidad en función de una derivada total, esto lo haremos de la siguiente forma

- $\partial_\mu\partial_\alpha\phi\partial^\mu\phi = \partial_\alpha\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi = \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)$
- $\phi\partial_\alpha\phi = \frac{1}{2}\frac{\partial\phi^2}{\partial x^\alpha}$

Usando esto, se obtiene

$$\delta_T I = \int d^4x\partial_\alpha\left[a^\alpha\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right)\right]$$

Donde se ha encontrado que la acción es quasi-invariante,

$$\begin{aligned}\delta_T I &= \int_{t_1}^{t_2}\int d^3x\partial_\alpha A^\alpha \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int d^3x\partial_t A^t + \partial_x A^x + \partial_y A^y + \partial_z A^z\end{aligned}$$

Pero se escribe como $\nabla\cdot\vec{A}$, con $\vec{A}$ con el índice arriba

$$\delta_T I = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\int d^3x A^t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{A}$$

Para un volumen V de todo el espacio tiempo, como una bola de radio infinito, con lo cual su superficie frontera ∂V será una superficie esférica de radio infinito, o sea una 2-esfera de radio infinito (S^2_∞). Ahora, el término de intregral superficial, o término de borde, se anula si $\phi\to 0$ cuando $|\vec{x}|\to\infty$. Con lo cual,

$$\delta_T I = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}B^t$$

Ahora, es necesario que se realice lo mismo pero asociado a una transformación de Lorentz, lo que dará el mismo resultado, con otro B claramente. Ahora, cuando la acción es quasi-invariante puedo decir que la acción es compatible con los principios de la Relatividad Especial.
Como se vió del repaso de mecánica clásica, cuando una acción es dejada quasi-invariante por una transformación infinitesimal dada, durante la evolución temporal del sistema existirá una cantidad conservada, esto, en este caso, nos llevará a 4 cantidades conservadas, una será la energía y las otras corresponderán a los momenta lineales.
Ahora quiero calcular las cantidades conservadas en esta situación, los ingredientes que se necestian son que, primero, la cantidad conservada del teorema de Noether es

$$Q = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q - B$$

Esto en mecánica clásica, ahora es necesario trasladar esta definición a campos. Y para ello es necesario encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos. Para ello para un $\delta\phi$ arbitrario que sera cero en los extremos y además $\delta\phi \to 0$ cuando $|\vec{x}| \to \infty$.

$$\begin{aligned}
\delta I &= I[\phi + \delta\phi] - I[\phi] = 0 \\
&= \int d^4x \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \delta\phi - m^2 \phi \delta\phi\right) \\
&= \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\partial^\mu \phi \delta\phi\right) - \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi\right) \delta\phi\right]
\end{aligned}$$

Ahora se impone que $\delta I \stackrel{!}{=} 0$ entonces

$$0 = \int d^4x \left(\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi\right)$$

Como la integral está en un volumen arbitrario entonces necesariamente el integrando debe ser cero y se llega a la siguiente ecuación

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \tag{2.3.7}$$

La cual corresponde a la ecuación de Klein-Gordon, también en forma vectorial

$$\partial_t^2 \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 \tag{2.3.8}$$

La cual es la ecuación dinámica para un campo escalar clásico ϕ, aún nada cuántico. Ahora se puede hacer la siguiente pregunta, ¿ Cómo varía la acción bajo una traslación espacio-temporal ON-SHELL[9]?, esto será

$$\delta_T I = \int d^4x \partial_\mu \left(\partial^\mu \phi \delta_T \phi\right)$$

Pero ya se sabe que bajo una traslación espacio-temporaL se encontro que la acción cambia como

$$\delta_T I = \int d^4x \partial_\mu C^\mu$$

Por tanto estos dos términos deben ser iguales, y así se concluye que

$$\partial_\mu \left(\partial^\mu \phi \delta_T \phi - C^\mu\right) = 0$$

Y a la cantidad de la izquierda le llamaeros j^μ

$$\begin{aligned}
j^\mu &= \partial^\mu \phi a^\alpha \partial_\alpha \phi - a^\mu \left(\frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2\right) \\
&= a^\alpha \left[\partial^\mu \phi \partial_\alpha \phi - \frac{\delta^\mu_\alpha}{2} \left(\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - m^2 \phi^2\right)\right]
\end{aligned}$$

A esta cantidad T^μ_αse le llama tensor de energía-monento, ahora, j^μ debe cumplir que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= 0 \\
\partial_t j^t + \nabla \cdot \vec{j} &= 0
\end{aligned}$$

La cual corresponde a una ecuación de continuidad, y si la integro en el espacio se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_V d^3x j^t + \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \int_V d^3x j^t + \int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j} &=
\end{aligned}$$

[9]ON-SHELL significa que es cuando las ecuaciones de campo son satisfechas

Ahora si, $\int_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0$ entonces, la carga (j^t) se conserva

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

Estoy es muy similar al caso electromagnético.
Volviendo al campo escalar

$$\delta_T I = \int dt \frac{dB}{dt}$$

Implican la existencia de 4 corrientes conservadas que dan origen a 4 cantidades conservadas. las cuales serán las componentes cero de las 4 corrientes, compiladas en el tensor energía momento T^μ_α

- μ:= Es el índice de corriente
- α:= Es cuál transformación estamos haciendo

Ahora, la cantidad se calcula como

$$Q_{(\alpha)} = \int d^3x T^t_\alpha$$

$Q_{(\alpha)}$ son cuatro cantidades conservadas asociadas a elegir $a^\alpha = (1,0,0,0)$ o $a^\alpha = (0,1,0,0)$, la energía

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x T^t_t \\ &= \int d^3x \partial^t \phi \partial_t \phi - \frac{\delta^t_t}{2} \left(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) \end{aligned}$$

recordando que

- $\partial^t \phi \partial_t \phi = \dot{\phi}^2$
- $\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi = \dot{\phi}^2 - |\nabla \phi|^2$

se tiene que, también con $\delta^t_t = 1$

$$\boxed{E = \int d^3x \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right)} \tag{2.3.9}$$

La cual corresponde a la energía del campo escalar y emergío como cantidad asociada a traslaciones temporales para un campo escalar ϕ. Si m^2 es positivo, entonces la energía será mayor o igual a cero $E \geq 0$ y es cero $E = 0$ si solo sí el campo es cero $\phi = 0$.
La configuración de menor energía se llama el vacío de la teoría. En este caso el vacío de la teoría es único y corresponde a $\phi = 0$. Ahora si se me ocurre actuar con una transformación infinitesimal de Lorentz sobre el vacío de la teoría

$$\begin{aligned} \delta_L \phi_{Vac} &= -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi_{Vac} = 0 \\ \delta_T \phi_{Vac} &= a^\mu \partial_\mu \phi = 0 \end{aligned}$$

La configuración de vacío respeta las simetrías de la teoría.
Ahora, si para la carga conservada se eligen los índices α espaciales, se tiene que esto dará como resultado a los momenta lineal del campo

$$P^i = \int d^3x T^{ti}$$

en donde t es el índice de cantidad conservada e i es el índice que nos dice que estamos haciendo traslaciones espaciales.

$$P^i = \int d^3x \dot{\phi} \partial^i \phi = - \int d^3 \dot{\phi} \nabla \phi$$

Puesto que estas son las 3 cantidades conservadas asociadas a traslaciones espaciales identificamos estas cantidades con el momento lineal del campo.

2.4. Decimocuarta clase

Se estudiaron las propiedades de la Relatividad Especial lo que nos llevó a estudiar la estructura del grupo de Lorentz. Con ello se está en posición de estudiar Teoría Clásica de Campos y es importante tener en mente hacia dónde se va con ello. El primer punto en Teoría Clásica de Campos es el cuantizar el campo electromagnético. Pero ¿Qué significa el cuantizar el campo electromagnético? ¿Cómo interactúan los fotones con la materia? Antes de ello, es importante el cuantizar un campo algo más simple que el campo electromagnético, que corresponde al campo escalar.

Para ello, se piensa en un observador K y un observador $\tilde{K}$ los cuales le dan etiquetas al espacio tiempo de $x^\mu = (t, \vec{x})$ y $\tilde{x}^\mu = (\tilde{t}, \tilde{\vec{x}})$ respectivamente, cuya transformación entre sí es conocida y corresponde a las transformaciones de Lorentz. Ahora, los observadores también pueden observar un campo eléctrico y magnético, cuyas etiquetas serán $\vec{E}, \vec{B}$ y $\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}$ respectivamente. Pero, ¿cómo encontramos la regla de transformación entre los campos eléctrico y magnético según cada observador?

Según K:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
\nabla \times \vec{B} &= \partial_t \vec{E}
\end{aligned}$$

Según $\tilde{K}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\vec{E}} &= 0 \\
\tilde{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} &= -\partial_{\tilde{t}} \tilde{\vec{B}} \\
\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\vec{B}} &= 0 \\
\tilde{\nabla} \times \tilde{\vec{B}} &= \partial_{\tilde{t}} \tilde{\vec{E}}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Maxwell vienen de un principio de acción:

$$I_{\text{Maxwell}} = k \int dt L = k \int dt \int d^3x \mathfrak{L} \tag{2.4.1}$$

donde la densidad lagrangiana es

$$\mathfrak{L} = |\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 \tag{2.4.2}$$

¿Cuál es la acción invariante de Lorentz y de traslaciones espacio-temporales para un campo escalar? Un campo escalar de Lorentz es una asignación de un número a cada punto del espacio-tiempo de forma que:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$$

El observador K:

$$\phi(x^\mu) = \phi(t, \vec{x}) = \phi_{\vec{x}}(t)$$

una función que depende del tiempo a cada punto del espacio, lo que nos lleva a pensar en los grados de libertad que puede poseer dicha cantidad. El campo escalar tiene tantos grados de libertad como puntos hay en el espacio, o sea, infinitos.

La teoría clásica de campos describe un conjunto infinito de grados de libertad. ¿Cuánto vale el lagrangiano que lleva a las ecuaciones de Klein-Gordon?

$$I_{\text{KG}}[\phi(t, \vec{x})] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \mathfrak{L}_{\text{KG}} \tag{2.4.3}$$

Si bien no lo es, cuando se refiere al lagrangiano en teoría de campos, en verdad se está refiriendo a la densidad lagrangiana. Ahora, si tomo una variación infinitesimal en la acción de Klein-Gordon:

$$I[\phi+\delta\phi]-I[\phi]:=\delta I\stackrel{!}{=}0$$

Se busca que de esa condición se obtenga la ecuación de Klein-Gordon ($c=\hbar=1$):

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi=0 \tag{2.4.4}$$

(Klein-Gordon sin masa, con signatura (+,-,-,-)). Fijamos condiciones de borde:

$$\begin{aligned}\delta\phi(t_2,\vec{x})=0\\ \delta\phi(t_1,\vec{x})=0\end{aligned}$$

El lagrangiano de Klein-Gordon es:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{2.4.5}$$

La acción:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x\left[\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right] \tag{2.4.6}$$

Variamos la acción:

$$\begin{aligned}\delta I&=I[\phi+\delta\phi]-I[\phi]\\
&=\int dt\int d^3x\left[\frac{1}{2}(\partial_t\phi+\partial_t\delta\phi)^2-\frac{1}{2}|\nabla\phi+\nabla\delta\phi|^2\right]-\frac{1}{2}\int dt\int d^3x\left((\partial_t\phi)^2-|\nabla\phi|^2\right)\\
&=\int dt\int d^3x\left[\partial_t\phi\partial_t\delta\phi-\nabla\phi\cdot\nabla\delta\phi\right]+\mathcal{O}(\delta\phi^2)\\
&=\int dt\int d^3x\left[\partial_t(\partial_t\phi\delta\phi)-(\partial_t^2\phi)\delta\phi-\nabla\cdot(\nabla\phi\delta\phi)+(\nabla^2\phi)\delta\phi\right]\\
&=\left[\int d^3x\partial_t\phi\delta\phi\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x(\partial_t^2\phi-\nabla^2\phi)\delta\phi\end{aligned}$$

El primer término se anula por condiciones de borde temporales. Considerando condiciones de borde espaciales $\delta\phi\to 0$ cuando $|\vec{x}|\to\infty$:

$$\delta I=-\int_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x(\partial_t^2\phi-\nabla^2\phi)\delta\phi=0$$

Como $\delta\phi$ es arbitrario:

$$\partial_t^2\phi-\nabla^2\phi=0$$

Queda de tarea variar la acción de Klein-Gordon con masa:

$$\mathfrak{L}=\frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-\frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{2.4.7}$$

¿Qué ganamos al haber encontrado un principio de acción? Podemos asociar nociones de:

- Energía
- Momento lineal
- Momento angular

vía teorema de Noether.

Teorema de Noether para campo escalar: La acción:

$$\begin{aligned} I &= \int dt \int d^3x \mathfrak{L}(\partial_t\phi, \nabla\phi, \phi) \\ &= \int d^4x \mathfrak{L}(\partial_\mu\phi, \phi) \end{aligned}$$

Supongamos que existe una variación infinitesimal $\delta\phi$ tal que:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \partial_\mu B^\mu \\ \partial_\mu B^\mu &= \partial_t B^t + \nabla \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

La variación de la acción es:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right)\delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) \right] \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de movimiento y la quasi-invariancia:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - B^\mu \right) = 0 \tag{2.4.8}$$

Esto da una corriente conservada:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - B^\mu, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{2.4.9}$$

Integrando en el espacio:

$$\begin{aligned} \int d^3x \partial_t j^t + \int d^3x \nabla \cdot \vec{j} &= 0 \\ \frac{dQ}{dt} + \oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{j} &= 0 \end{aligned}$$

donde $Q = \int d^3x j^t$. Si el flujo en el infinito es cero, Q se conserva.

2.5. Decimoquinta clase

Hola

2.6. Decimosexta clase

Existen también simetrías que solo actúan sobre los campos y que también permiten construir catidades conservadas, estas son llamadas simetrías internas.
Veamos un ejemplo: Shift simetry, de un campo escalar sin masa

$$I = \int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{2.6.1}$$

La cual está dada por

$$\phi(x) \to \tilde{\phi(x)} = \phi(x) + c, \quad \delta\phi = \tilde{\phi}(x) - \phi(x) = c \tag{2.6.2}$$

Con lo cual, la variación de la acción está dada por

$$\begin{aligned}\delta I &= I[\phi + \delta\phi] - I[\phi] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4 \left[\partial_\mu \partial^\mu \phi + \partial_\mu \partial^\mu c - \partial_\mu \partial^\mu \phi\right] \qquad\qquad = 0\end{aligned}$$

¿ Cuál es la cantidad conservada asociada a esta transformación?, se calcula via teorema de Noether

$$j^\mu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi - B^\mu$$

En este caso $B^\mu = 0$, por tanto

$$\begin{aligned}j^\mu &= c\partial^\mu \phi \\ Q = \int^3 dx j^t &= \int d^3 x \dot{\phi}\end{aligned}$$

Modelo O(2)

$$I[\phi_1, \phi_2] = \int d^4 x \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{m_1^2}{2}\phi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{m_2^2}{2}\phi_2^2$$

Si calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, estos campos no se ven entre ellos

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_1 - m_1^2 \phi_1 = 0 \\ \partial_t^2 \phi_2 - \nabla^2 \phi_2 - m_2^2 \phi_2 = 0\end{aligned}$$

En el Lagrangeano no hay términos de interacción (cruzados), con lo cual las ecuaciones de movimiento están desacopladas, pero pasa algo interesante, si las masas son iguales, la acción es invariante bajo la siguiente transoformación interna finita:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) \to \tilde{\phi_1}(x) &= \cos\alpha\phi_1 - \sin\alpha\phi_2(x) \\ \phi_2(x) \to \tilde{\phi_2}(x) &= \sin\alpha\phi_1(x) + \cos\alpha\phi_2(x)\end{aligned}$$

Calculamos la acción

$$I[\tilde{\phi_2}, \tilde{\phi_1}] = \int d^4 x \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\cos\alpha\phi_1 - \sin\alpha\phi_2\right)\partial^\mu\left(\cos\alpha\phi_1 - \sin\alpha\phi_2\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\sin\alpha\phi_1 + \cos\alpha\phi_2\right)\partial^\mu\left(\sin\alpha\phi_1 + \cos\alpha\phi_2\right) - \frac{1}{2}m^2\left((\cos\right.$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned}\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2) &= \phi_A, \text{con} A = 1, 2 \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 &= |\vec{\phi}|^2\end{aligned}$$

Lo cual, en la acción

$$I[\tilde{\phi_1}, \tilde{\phi_2}] = I[\phi_1, \phi_2]$$

Esta simetría da indicios o es la simetría menos que rota protones y neutrones que se llama la simetría de iso-spin, que da origen a que el protón y neutron tengan casi la misma masa.
α en este caso será finito, pero ¿ Qué pasa si alpha es infinitesimal?

$$\begin{aligned}\tilde{\phi_1} = \phi_1 - \epsilon\phi_2 \Rightarrow \delta\phi_1 = -\epsilon\phi_2 \\ \tilde{\phi_2} = \epsilon\phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \delta\phi_2 = \epsilon\phi_1\end{aligned}$$

Ahora, la variación de la acción bajo esta transformación infinitesimal

$$\begin{aligned}
\delta I &= [\phi_1 + \delta\phi_1, \phi_2 + \delta\phi_2] - I[\phi_1, \phi_2] \\
&= \int d^4x \left[\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \delta\phi_1 - m^2 \phi_1 \delta\phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \delta\phi_2 - m^2 \phi_2 \delta\phi_2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B^\mu = 0$ la acción es invariante. Por lo tanto ,la corriente conservada será

$$\begin{aligned}
j^\mu &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} \delta\phi_1 + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} \delta\phi_2 \\
&= \partial^\mu \text{No alcance, me distraje}
\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

2.7. Decimoseptima clase

Cuando cuantizemos, el campo escalar es un campo de spin cero.
El campo escalar transforma en la representación trivial del grupo de Poincaré
Bajo Lorentz: Como el observador K le asigna un punto a el espacio tiempo llamado $\phi(x)$, el campo escalar, y el como un observador $\tilde{K}$ le asigna al mismo punto la etiqueta $\tilde{\phi}(\tilde{x})$ a lo cual yo puedo escribir

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \phi(x), \quad \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\
\tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \phi(\Lambda^\mu_\nu \tilde{x}) \\
\tilde{\phi}(x) &= \phi(\Lambda^{-1} x) \\
\tilde{\phi}(x) &= \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}} \phi(\Lambda^{-1} x)\right), \quad \text{con } (J_{\mu\nu})_{1\times 1} = 0 \\
[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= \eta J - \eta J
\end{aligned}$$

Y este conmutador es un generador del Álgebra de Lorentz.
Matrices las cuales corresponden a la representación trivial.
La transformfación infinitesimal ($\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$ las cuales corresponden a 6 matrices de 1x1) sólo contiene la acción del operador de momento angular orbital:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(x) &= 1\phi(\Lambda^{-1} x) = \phi((\delta^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu) x^\nu) \\
&= \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) \\
&= \phi(x^\mu) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi
\end{aligned}$$

Ahora podemos escribir la variación

$$\begin{aligned}
\delta_L \phi(x) = \tilde{\phi}(x) - \phi(x) &= -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi \\
&= +\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\mu} \phi
\end{aligned}$$

Con $L_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$ el cual es el operador de momento angular orbital. Ahora veremos que dichas expresiones son en verdad iguales.
Demostración:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \phi &= -\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi \\
&= -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi
\end{aligned}$$

Esto mediante el intercambio de índices en el primer término recordando que el tensor ω^μ_μ es antisimétrico. Ahora, el conmutador de $L_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
[L_{\rho\sigma}, L_{\tau\nu}]\,\phi &= [x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho, x_\tau\partial_\nu - x_\nu\partial_\tau]\,\phi \\
&= (x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)\,(x_\tau\partial_\nu - x_\nu\partial_\tau)\,\phi \\
&= \eta_{\sigma\tau}L_{\rho\nu}\phi - \eta_{\rho\tau}L_{\sigma\nu}\phi + \eta_{\rho\nu}L_{\sigma\tau}\phi - \eta_{\sigma\nu}L_{\rho\tau}\phi
\end{aligned}$$

Con lo cual, el conmutador de los operadores momento orbital es

$$[L_{\rho\sigma}, L_{\tau\nu}] = \eta_{\sigma\tau}L_{\rho\nu} - \eta_{\rho\tau}L_{\sigma\nu} + \eta_{\rho\nu}L_{\sigma\tau} - \eta_{\sigma\nu}L_{\rho\tau} \tag{2.7.1}$$

Ahora, por los índices, $[L_{01}, L_{12}]$ sería el conmutador del generador de boosts a lo largo del eje x L_{01} con el generador de rotaciones en el plano (x,y) L_{12}, se procede a calcular el conmutador

$$[L_{01}, L_{12}] = \eta_{11}L_{02} = L_{02}$$

Lo que nos da un boost a lo largo del eje y, notemos que, en la transformación finita $e^{\frac{1}{2}\omega^{01}L_{01}}$, en donde ω^{01} es un boost a lo largo del eje x

$$\begin{aligned}
[\Lambda^\mu_\nu] &= \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0 \\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{, Infinitesimalmente} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^0_1 = -\omega^{01} \\
&= \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu
\end{aligned}$$

Un operador diferencial es una matriz de infinito por infinito. Se da el ejemplo de cálculo numérico o discreto en el cual existen operadores de matrices infinitas que al multiplicar, generan o actúan como la derivada de la función o los datos discretos.
Los campos escalares son usados para describir el campo de Higgs (fundamental).
Los piones (π^0, π^+) también se describen con campos escalares (no fundamentales).
Spinores de Dirac: Los spinores de dirac son un arreglo de 4 números completos que "Sienteniüna transformación de Lorentz de la siguiente forma:

$$\tilde{\Psi}_a(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{ab}\Psi_b\left(\Lambda^{-1}x\right) \tag{2.7.2}$$

2.8. Decimooctaba clase

Campo de Dirac:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$
$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + O(\omega^2)$$

Ψ es un espinor de dirac si cumple con la siguiente condición

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{ab}\Psi_b(x) \tag{2.8.1}$$

En lo cual a son las filas y b las columnas . Los 6 generadores S's son matrices de 4×4, tal que:

$$(S_{\mu\nu})_{ab} = \frac{1}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]_{ab} = \frac{1}{4}\left((\gamma_\mu)_{ac}(\gamma_\nu)_{cb} - (\gamma_\nu) - ac\,(\gamma_\mu)_{cb}\right) \tag{2.8.2}$$

y las matrices de Dirac satisfacen el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} 1_\mu \left(\gamma_\mu\right)_{ac} \left(\gamma_\nu\right)_{cb} + \left(\gamma_\nu\right)_{ac} \left(\gamma_\mu\right)_{cb} \qquad = 2\eta_{\mu\nu}\delta_{ab}$$

¿Cuántos conjuntos de 4 matrices γ_μ existen?
En dimensión 3+1, módulo conjugación existe solo un conjunto de matrices de Dirac.

$$\gamma_\mu = A\Gamma_\mu A^{-1}$$

Nos referimos a distintos conjuntos de matries de Dirac como distintas bases y no distintas representaciones.
Base Chiral base de Weyl:

$$\gamma^\mu = \left(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\right) = \left(\gamma^0, \gamma^i\right)$$

$$\gamma^o = \begin{pmatrix} O_{2\times 2} & 1_{2\times 2} \\ 1_{2\times 2} & O_{2\times 2} \end{pmatrix} \quad , \gamma^i = \begin{pmatrix} O_{2\times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & O_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - \eta^{\rho\mu} S^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} S^{\rho\mu} - \eta^{\sigma\mu} S^{\rho\nu}$$

En donde σ son las matrices de Pauli,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, el campo

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\mu A_\nu(x)$$

Dará origen, en su cuantización al fotón

$$\tilde{A}_\mu(x) = \Lambda^\nu_\mu A_\nu(\Lambda^{-1}x)$$

Y en cambio, el campo de Dirac, dará origen a los electrones, neutrinos etc(buscar bien)

$$\tilde{\Psi}_a(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{ab} \Psi_b(\Lambda^{-1}x)$$

En cambio, el campo escalar transforma en la representación trivial del grupo de Lorentz.
Definición general:
Diremos que un campo $\Phi_A(x)$ transforma en una representación dada del grupo de Lorentz si bajo la transformación de Lorentz $\tilde{x}^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$\tilde{\Phi}_A(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}\right)_{AB} \Phi_B(x) \tag{2.8.3}$$

si se cumple que

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = \eta J \eta J + \eta J - \eta J \tag{2.8.4}$$

Entonces, si el campo se relaciona mediante transformación con la forma vista (la exponencial), es entonces un campo relativista.
Recordar escribir con los índices. Ninguna partícula del modelo estándar se escapa de una representación de este tipo, ya que todas las partículas que hemos observado vienen de la cuantización de un campo que

transforma en una representación del grupo de Lorentz. Libro de RG (Hawking Anellies).
Campo escalar

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}\right) 1 \times 1 \phi(x)$$

Los 6 $J_{\mu\nu} = 0$, la cual corresponde a la representación trivial.
N campos escalares

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}\right)_{ij} \phi_i(x), \quad i = 1, \dots N$$

En donde $J\mu\nu^{N\times N} = O_{N\times N}$.
Campo Spinorial de Dirac:

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{ab} \Psi_b(x)$$

Para lo cual hay 6 $S_{\mu\nu}$ de 4×4, con $S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ y $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}1_\mu$. Los $S_{\mu\nu}$ forman la representación

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{2.8.5}$$

Campo electromagnético: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}\right)^\mu_\nu A^\nu(x)$$

Consideremos que Λ es un generador que difiere de la identidad por infinitésimo

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^{\alpha\beta}\left(J_{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\omega^\mu_\nu &= \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left(J_{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left(\eta_{\beta\nu}\delta^\nu_\alpha - \eta_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta\right) \\
&= \frac{1}{2}\omega^\mu_\nu + \frac{1}{2}\omega^{\beta\alpha}\eta_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta
\end{aligned}$$

Calculemos estas matrices

$$\begin{aligned}
\left(J_{01}\right)^\mu_\nu &= \begin{pmatrix} \left(J_{01}\right)^0_0 & \left(J_{01}\right)^0_1 & \left(J_{01}\right)^0_2 & \left(J_{01}\right)^0_3 \\ \left(J_{01}\right)^1_0 & \left(J_{01}\right)^1_1 & \left(J_{01}\right)^1_2 & \left(J_{01}\right)^1_3 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{pmatrix} \\
&= \eta_{0\nu}\delta^\mu_1 - \eta_\nu\delta^\mu_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Rotaciones:

$$S_{Rot} = \begin{pmatrix} e^{i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} & O_{2\times 2} \\ O_{2\times 2} & e^{i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.8.6}$$

Tal que la transformación infinitesimal

$$\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\varphi^k \begin{cases} \omega_{12} = -\varphi^3 \\ \omega_{23} = -\varphi^1 \\ \omega_{31} = -\varphi^2 \end{cases} \tag{2.8.7}$$

Boosts:

$$S_{Boost} = \begin{pmatrix} e^{\vec{x}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} & O_{2\times 2} \\ O_{2\times 2} & e^{-\vec{x}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.8.8}$$

A lo cual, la transformación infinitesimal ω será

$$\omega_{0i} = -\chi_i \begin{cases} \omega_{01} = -\chi_1 \\ \omega_{02} = -\chi_2 \\ \quad _{03} = -\chi_3 \end{cases} \tag{2.8.9}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\tilde{x}) \\ \tilde{\Psi}_2(\tilde{x}) \\ \tilde{\Psi}_3(\tilde{x}) \\ \tilde{\Psi}_4(\tilde{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} & O \\ 0 & e^{i\vec{\varphi}\frac{\vec{\sigma}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las matrices

$$\left(e_{Rot}^{i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} e_{Boosts}^{\vec{\chi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\right)_{(1/2,0)} \mid \left(e_{Rot}^{i\vec{\varphi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}, e_{Boosts}^{-\vec{\chi}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}}\right)_{(0,1/2)} \tag{2.8.10}$$

2.9. Decimonovena clase

Se habló acerca de spinores de Dirac, los cuales relacionan un campo medido por dos obvseradores tal que

$$\tilde{\Psi}_a(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)\Psi(\Lambda^{-1}x)$$

En donde

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right]$$

En donde el conmutador da $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2\eta_{\mu\nu}I_4$ **En la base chiral o base de Weyl:** Con $\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\varphi^k$

$$\left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}{}_{Rot}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & O_{2\times 2} \\ O_{2\times 2} & e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \end{pmatrix}$$

Cuando elijo ω tal que esta transformación de Lorentz implementa un boost , con

$$\left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}{}_{Boost}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}} & O_{2\times 2} \\ O_{2\times 2} & e^{-\frac{1}{2}\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}} \end{pmatrix}$$

En donde $\omega_{0i} = -\chi_i$.
Cuando se realiza una rotación en el plano (x,y) en 2π se tiene lo siguiente

$$\left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{Rot(x,y)2\pi} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es algo como, el spinor, cuando cambiamos de observador, devuelve menos el spinor

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = -\Psi_a(x)\Psi_a(x)$$

Lo que es algo como una cinta de Moebius, la cual solo tiene una única superficie.
Podemos pensar los coeficientes de la exponencial como los coeficientes de un grupo actuando sobre el spinor, tal que $\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$ son lo componentes del espacio vectorial con su base respectiva.
En general, los spinores $\Psi_a(x)$ son números complejos. Los $\Psi(x)$ son variales de Grassman complejas. Para convencernos de esto, cuantizaremos la teoría de Dirac y luego tomaremos el límite clásico.
Un spinor de Dirac está compuesto por dos spinores de dos componentes que no se mezclan entre ellos bajo una transformación de Lorentz.

$$\Psi_a(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$$

Y veremos que los $\Psi_a(x)$ transforman en la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ del álgebra de Lorentz. En donde $u(x)$ es llamado spinor izquierdo y $v(x)$ es llamado spinor derecho.
Las rotaciones están implementadas por matrices unitarias.

$$\left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)^{\dagger}_{Rot}\left(e^{+\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{Rot} = I \tag{2.9.1}$$

Hagamos el cálculo

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e^{\frac{-i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\vec{\sigma}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \\
&= I_4
\end{aligned}$$

Las matrices que implementan lo boosts no son unitarias.
¿Tensión con la mecánica cuántica?
Pues la unitaridad es fundamental en mecánica cuántica para que no se pierda la movilidad.
No hay tensión pues veremos que la representación del grupo de Lorentz que actúa sobre $\mathfrak{H}(\varphi)$ el espacio de Hilbert del sistema cuántico spinor de Dircac, espacio de infinita dimensión.
Los grupos no compactos no tienen representaciones unitarias finito dimensionales.

$$g(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3) \tag{2.9.2}$$

En donde φ son las rotaciones en donde cada φ vive entre $0 \leq \varphi < 2\pi$ y χ es la rapidity, con $-\infty < \chi_1 < \infty$ la cual cumple con la relación $v_x = c\tanh\chi_1$, con $-c < v_x < c$ Notemos que esta velocidad corresponde a la velocidad relativa entre dos observadores incerciales, con lo cual no hay observadores que viajan a la velocidad de la luz.
El grupo de las rotaciones es $SO(3)$, tal que $SO(3)S^3/Z_2$. Ahora el álgebra

$$so(3)\ su(2) \to SU(2) = S^3$$

Lo cual sí correpsonde a una 3-esfera. $U \in SU(2)$ tal que

$$U = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$$

Con,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

y las matrices U son unitarias, con lo cual $UU^\dagger = 1$. Sea $O_{ij} \in SO(3)$, tal que

$$O_{ij} = \frac{1}{2}tr\left(A^\dagger\sigma_i A\sigma_j\right)$$

En donde $A \in SU(2)$. Notemos que si en U yo tomo cada número con su negativo, aparezco en el punto opuesto de la 3-esfera, punto el cual es llamado la antípoda.
¿ Cómo evoluciona el campo de Dirac en el tiempo?
Con ello la pregunta se refiere a ¿ Cuál es el principio de acción cuasi-invariante bajo:

- Rotaciones (Isotropía del espacio)
- Boosts (Equivalencia de los observadores inerciales)
- Traslaciones espaciotemporales (Homogeneidad del espacio-tiempo)

Para el campo de Dirac?
Bajo Lorentz:

$$\tilde{\Psi}_a(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{ab}\Psi_b(\Lambda^{-1}x)$$

Bajo una traslación espacio-temporal $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu - a^\mu$

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x})\Psi_b(x) \to \tilde{\Psi}_a(x) = \Psi_a(x+a)$$

Notemos que esto es 4 veces la transformación bajo traslación para un campo escalar en la representación trivial del grupo de Lorentz.
El grupo de Poincaré = Lorentz y Traslaciones espacio-temporales. LLámele los generadores $P_{\mu\nu}$ y P_μ respectivamente, tal que

$$\begin{aligned}
[J, J] &= \eta J - \eta J + \eta J - \eta J \\
[J, P] &= \eta P - \eta P \\
[P_\mu, P_\nu] &= 0
\end{aligned}$$

Campo escalar: Bajo Lorentz $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}}\phi(x), \text{ Con } J_{\mu\nu} = O_{1\times 1} \Rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \Rightarrow \tilde{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1})$$

Traslaciones $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = e^{\frac{1}{2}\varepsilon^\mu P_\mu}\phi(x), \text{ Con } P_\mu = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \Rightarrow \tilde{\phi}(x) = \phi(x-a)$$

Campo de Dirac: Bajo Lorenz $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\mu x^\nu$

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\right)_{ab}\Psi_b(x)$$

Traslaciones $^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\varepsilon^\mu P_\mu}\right)_{ab}\Psi_b(x)$$

Campo vectorial: $A^\mu(x) = \left(\phi, \vec{A}\right)$. Bajo Lorentz $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\mu x^\nu$

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}\right)^\mu_{\ \nu} A^\nu(x)$$

Con,

$$(J_{\alpha\beta})^\mu_{\ \nu} = \eta_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta - \eta_{\mu\beta}\delta^\mu_\alpha$$

Traslaciones $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha P_\alpha}\right)^\mu_{\ \nu} A^\nu(x) \Rightarrow \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)$$

2.10. Vigesima clase

Este es un curso de teoría de campos relativista, con lo cual queremos definir una acción invariante ante el grupo de Poincaré. Con lo cual, la acción del campo escalar está dada por

$$I[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{4}\partial_\mu \phi \partial^\mu - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right) \tag{2.10.1}$$

Tal que

$$\delta_{Tras}\phi = -a^\mu \partial_\mu \phi \tag{2.10.2}$$
$$\delta_{Rot}\phi = -\omega^\mu_{\ \nu} x^\nu \partial_\mu \phi \tag{2.10.3}$$

Ahora, para un campo escalar complejo, la acción está dada por

$$I[\varphi, \varphi*] = \int d^4x \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi * - m^2 \varphi\varphi* \right) \tag{2.10.4}$$

Tal que

$$\delta_{Tras}\varphi = -a^\mu \partial_\mu \varphi \tag{2.10.5}$$
$$\delta_{Tras}\varphi* = -a^\mu \partial_\mu \varphi* \tag{2.10.6}$$
$$\delta_{Lorentz}\varphi = -\omega^\mu_{\ \nu} x^\nu \partial_\mu \varphi \tag{2.10.7}$$
$$\delta_{Lorentz}\varphi* = -\omega^\mu_{\ \nu} x^\nu \partial_\mu \varphi * \delta_{U(1)}\varphi \qquad = i\alpha\varphi \text{infinitesimal} \leftarrow \varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x) = e^{i\alpha}\varphi(x) \tag{2.10.8}$$
$$\delta_{U(1)}\varphi* = -i\alpha\varphi* \qquad \varphi*(x) \to \tilde{\varphi}*(x) = e^{-i\alpha}\varphi(x) \tag{2.10.9}$$

Transformacion interna.
Teorema de Coleman-Mandula (Ver paper para revisar los postulados) $\Rightarrow$ Las simetrías internas conmutan con las simetrías del espacio-tiempo.
Campo de Dirac:

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}} \right)_{ab} \Psi_b(x)$$

En lo cual, los objetos $S_{\mu\nu}$ cumplen con lo siguiente

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right], \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} I_{n\times n} \\ \tilde{x}^\mu &= \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu = \left(\delta^\mu_{\ \nu} + \omega^\mu_{\ \nu} + O(\omega^2) x^\nu \right) \\ \tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) &= \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}} \right)_{ab} \Psi_b(\Lambda^{-1}\tilde{x}) \end{aligned}$$

Lo cual podemos escribir también como

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_a(x) &= \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}} \right)_{ab} \Psi_b(\Lambda^{-1}x) \\ \tilde{\Psi}_a(x) &= \left(\delta_{ab} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\left(S_{\mu\nu}\right)_{ab} \right) \left(\Psi_b(x) - \omega^\alpha_{\ \beta} x^\beta \partial_\alpha \Psi_b \right) \\ &= \Psi_a(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\left(S_{\mu\nu}\right)_{ab}\Psi_b(x) - \omega^\alpha_\beta x^\beta \partial_\alpha \Psi_a(x) + O(\omega^2) \\ &= \Psi_a(x) + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\left(S_{\mu\nu}\right)_{ab}\Psi_b(x) + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\Psi_a(x) \end{aligned}$$

Con lo cual, la transoformación de Lorentz infinitesimal actuando sobre el campo spinorial es

$$\delta_{Lorentz}\Psi_a(x) = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left[\left(S_{\alpha\beta}\right)_{ab} + \delta_{ab}L_{\alpha\beta} \right]\Psi_b(x) \tag{2.10.10}$$

Lo cual representa la transoformación de Lorentz actuando sobre un campo con spín no trivial, donde $L_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha$. Recordemos que por teoría de grupos

$$(R_a \otimes I_b + I_a \otimes R_b)\vec{v} \tag{2.10.11}$$

La traslación espacio-temporal $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ actúa sobre el campo de Dirac de la siguiente forma

$$\tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) = \Psi_a(x) = \left(e^{\epsilon^\mu P_\mu}\right)_{ab} \Psi_b(x) \tag{2.10.12}$$

Con $(P_\mu)_{ab} = 0$ entonces $= \delta_{ab}\Psi_b(x) = \Psi_a$. Ahora

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_a(\tilde{x}) &= \Psi_a\left(\tilde{x}^\mu - \epsilon^\mu\right) \\ &= \Psi_a(x^\mu - \epsilon^\mu) = \Psi_a(x) - \epsilon^\mu \frac{\Psi_a}{\partial x^\mu} + O(\epsilon^2) \\ \Rightarrow 6\delta_{Trans}\Psi_a(x) = \tilde{\Psi}_a(x) - \Psi_a(x) = -\epsilon^\mu_\mu \Psi_a(x) \end{aligned}$$

Conjugado de Dirac: Es una acción sobre el campo spinorial tal que

$$\Psi \to \Box \to \bar{\Psi}$$

Y se define el conjugado de Dirac del campo spinorial Ψ como

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0 \tag{2.10.13}$$

En la base quiral o base de Weil:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ I_2 & O_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10.14}$$

Pero, qúe es $\Psi^\dagger$?, pensemos a Ψ como una matriz columna, tal que

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}$$

Ahora, el dagado será el traspuesto complejo conjugado

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger \gamma^0 &= (\Psi_1 * (x), \Psi_2 * (x), \Psi_3 * (x), \Psi_4 * (x)) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\Psi_3 * (x), \Psi_4 * (x), \Psi_1 * (x), \Psi_2 * (x)) \\ \bar{\Psi}_1(x)?\Psi_3 * (x), \quad \bar{\Psi}_2(x) = \Psi_4 * \\ \bar{\Psi}_3(x) = \Psi_1 * (x), \quad \bar{\Psi}_4(x) = \Psi_2 * (x) \end{aligned}$$

Pero porqué definimos todo esto?, recordemos que para un campo escalar complejo que el término de masa está dado por $\varphi * (x)\varphi(x)$ este es un número real e invariante de Lorentz, pero si quisiéramos hacer lo mismo pero para campos spinoriales, el hacer $\Psi^\dagger(x)\Psi(x)$ no es invariante de Lorentz, pero sí lo será $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$, el cuál si será invariante de Lorentz y por ende será nuestro término de masa.

textbfLa acción invariante de Poincaré para el campo de Dirac es la siguiente

$$\boxed{I[\Psi,\bar{\Psi}] = \int d^4x \bar{\Psi}(x)\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\Psi(x)} \tag{2.10.15}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta_{\bar{\Psi}} I = 0 = I[\Psi,\bar{\Psi}+\delta\bar{\Psi}] - I[\Psi,\bar{\Psi}] = \int d^4x \left(\bar{\Psi}+\delta\bar{\Psi}\right)(i\not{} - m) - \int d^4x \bar{\Psi}\left(i\not{\partial} - m\right)\Psi \tag{2.10.16}$$

Ahora, luego de realizar la distributividad, tenemos que

$$\delta_{\bar{\Psi}} = \int d^4x \delta\bar{\Psi}\left(i\not{\partial} - m\right)\Psi \Rightarrow \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - mI_4\right)\Psi = 0$$

Con lo cual, hemos llegado a la ecuación de Dirac

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - mI_4)\Psi = 0} \tag{2.10.17}$$

Claim: $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$ es un escalar de Lorentz.
Transformación finita: $\Psi(x) \to \tilde{\Psi}_a(x) = D[\Lambda]_{ab}\Psi_b(\Lambda^{-1}x)$ Con

$$\begin{aligned} D[\Lambda]_{ab} &= \left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}\right)_{ab} \\ \to \tilde{\Psi}(x) &= D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x) \end{aligned}$$

Dado esto, ¿ Cómo transforma bajo transformaciones de Lorentz el conjugado de Dirac de un spinor?

$$\Psi^\dagger(x)\gamma^0 =: \bar{\Psi}(x) \to \tilde{\bar{\Psi}}(x)$$

Pero queremos escribi el $\tilde{\bar{\Psi}}$ en términos de $\bar{\Psi}$, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\Psi}} &= \tilde{\Psi}(x)^\dagger\gamma^0 = \left(D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x)\right)^\dagger\gamma^0 \\ &= \Psi^\dagger({}^{-1}x)\gamma^0\gamma^0 D^\dagger[\Lambda^{-1}x]\gamma^0, \quad \left(\gamma^0\right)^2 = 1 \\ &= \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^0 D^\dagger[\Lambda]\gamma^0, \quad \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x) = \Psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)\gamma^0 \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\tilde{\bar{\Psi}}(x) = \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^0 D^\dagger[\Lambda]\gamma^0 \tag{2.10.18}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\Psi}}\tilde{\Psi} &= \left(\bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^0 D^\dagger[\Lambda]\gamma^0\right)\left(D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x)\right) \\ &= \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\left(\gamma^0 D^\dagger[\Lambda]\gamma^0 D[\Lambda]\right)\Psi(\Lambda^{-1}) \end{aligned}$$

Pero, $\gamma^0 D^\dagger[\Lambda]\gamma^0 D[\Lambda] = I_4$

$$= \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\Psi(\Lambda^{-1}x)$$

Como un escalar

$$\tilde{F}(x) = F({}^{-1}x)$$

Necesitamos mostrar que

$$\gamma^0 D^\dagger[\Lambda]\gamma^0 D[\Lambda] = I_4 \tag{2.10.19}$$

Calculamos,

$$
\begin{aligned}
D^\dagger[\Lambda]\gamma^0 D[\Lambda] = \left(e^{\frac{1}{2}\omega\cdot S}\right)^\dagger \gamma^0 \left(e^{\frac{1}{2}\omega\cdot S}\right) \\
&= e^{\frac{1}{2}\omega\cdot S^\dagger}\gamma^0 e^{\frac{1}{2}\omega\cdot S} \\
&= \left(I + \frac{1}{2}\omega\cdot S^\dagger\right)\gamma^0\left(I + \frac{1}{2}\omega\cdot S\right) \\
&= \left(I + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta} S^\dagger_{\alpha\beta}\right)\gamma^0\left(I + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}\right) \\
&= \gamma^0 + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta} S^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 + \gamma^0\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu} + O(\omega^2)
\end{aligned}
$$

Así, como **TAREA**

$$
\gamma^\dagger_\mu \gamma^0 = \gamma^0\gamma_\mu
$$

Entonces, calculamos

$$
\begin{aligned}
S^\dagger_{\alpha\beta}\gamma^0 &= \frac{1}{4}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]^\dagger \gamma^0 \\
&= \frac{1}{4}\left(\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha - \gamma^\dagger_\alpha\gamma^\dagger_\beta\right)\gamma^0 \\
&= \gamma^0\frac{1}{4}\left(\gamma_\beta\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma_\beta\right) \\
&= \gamma^0\frac{1}{4}\left[\gamma_\beta, \gamma_\alpha\right] \\
&= -\gamma^0\frac{1}{4}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] \\
&= -\gamma^0 S_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

Con lo cual, hemos demotrado que el término cuadrático, de masa, es un invariante de Lorentz.

2.11. Vigesima primera

Se mostró que la siguiente combinación para un espinor de Dirac transforma como un escalar de Lorentz.

$$
\tilde{\Phi}(x) = \bar{\Psi}(x)\Psi(x) = \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\Psi(\Lambda^{-1})
$$

En donde el conjugado de Dirac por un espinor está definido por lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\bar{P}si(x)\Psi(x) &= \Psi^\dagger\gamma^0\Psi(x) \\
&= (\Psi_1*, \Psi_2*, \Psi_3*, \Psi_4*)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, con la siguiente transformación

$$
= I + \omega
$$

en su versión infinitesimal

$$
\delta\Phi(x) = -\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \Phi(x)
$$

Tal que, la variación de la acción bajo dicha transformación infinitesimal está dada por lo siguiente

$$\begin{aligned} I[\Psi,\bar{\Psi}] &= \int d^4x \cdots - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= \int d^4x \cdots - m\Phi(x) \\ \delta_{Lorentz} I &= \int d^4x \cdots - m\delta\Phi(x) \\ &= \int d^4x \cdots + m\omega^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}\partial_{\mu}\Phi(x) \\ &= \int d^4x \cdots - \partial_{\mu}\left(m\omega^{\mu}_{\ \nu}\Phi\right) - m\omega^{\mu}_{\ \nu}\partial_{\mu}x^{\nu}\Phi \end{aligned}$$

Con lo cual al haber términos de borde hemos encontrado que la acción es Quasi-invariante bajo transformaciones de Lorentz.

$$I[\Psi,\bar{\Psi}] = \int d^4x \bar{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi$$

Que dará origen a la ecuación de Dirac.
Afirmación: $\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ transforma como un vector de Lorentz, es decir, bajo $\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu}$.

$$\bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x) = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^{\nu}\Psi(\Lambda^{-1}x)$$

recuerdo de cómo transforma bajo Lorentz el cuadri-potencial electormagnético

$$\tilde{A}^{\mu}(\tilde{x}) = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}A^{\mu}(x) \Rightarrow \tilde{A}^{\mu}(x)\Lambda^{\mu}_{\ \nu}A^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$$

Demostración: Sabemos que, bajo una transformación de Lorentz:

$$\tilde{\Psi}(x) = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}\Psi(\Lambda^{-1}x) = D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x)$$

para esto se debe cumplir lo siguiente

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}], \quad \text{Donde} \quad \{\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\} = 2\eta_{\alpha\beta}1_4$$

Desarollamos la expresión

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x) = \tilde{\Psi}^{\dagger}\gamma^0 &= \left(D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}\right)^{\dagger}\gamma^0 \\ &= \Psi(\Lambda^{-1}x)^{\dagger}D^{\dagger}[\Lambda x]\gamma^0 \\ &= \Psi^{\dagger}(\Lambda^{-1}x)\gamma^0\gamma^0D^{\dagger}[\Lambda]\gamma^0 \\ \tilde{\bar{\Psi}} &= \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^0D^{\dagger}[\Lambda]\gamma^0 \end{aligned}$$

Ahora como $\{\gamma^0,\gamma^0\} = 2\eta^{00}1_4$ entonces

$$\begin{aligned} \left(\gamma^0\right)^2 + \left(\gamma^0\right)^2 &= 2\ 1_4 \Rightarrow l(\gamma^0)^2 = 1_4 \\ \gamma^0D^{\dagger}[\Lambda]\gamma^0 &= \gamma^0\left(e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}\right)^{\dagger}\gamma^0 \\ &= \gamma^0 e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S^{\dagger}_{\alpha\beta}}\gamma^0, \quad S_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}] \\ &= \gamma^0\left(I + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{4}[\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}]^{\dagger} + O(\omega^2)\right)\gamma^0 \\ &= I + \frac{1}{8}\omega^{\alpha\beta}\gamma^0\left(\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha}\right)^{\dagger}\gamma^0 \\ &= I + \frac{1}{8}\omega^{\alpha\beta}\gamma^0\left(\gamma^{\dagger}_{\beta}\gamma^{\dagger}_{\alpha} - \gamma^{\dagger}_{\alpha}\gamma^{\dagger}_{\beta}\right)\gamma^0 \end{aligned}$$

Término 1: $\gamma^0\gamma^\dagger_\beta\gamma^\dagger_\alpha = \gamma^{00}\gamma_\beta\gamma_\alpha = \gamma_\alpha\gamma_\beta$, en donde se ha usado que $\gamma^0\gamma_\alpha = \gamma^\dagger_\alpha\gamma^0$.
Término 2:

$$\gamma^0\gamma^\dagger_\alpha\gamma^{\beta\gamma^0=\gamma^0\gamma^0\gamma_\alpha\gamma_\beta=\gamma_\alpha\gamma_\beta}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
\gamma^0 D[\alpha]^\dagger\gamma^0 &= I + \frac{1}{8}\omega^{\alpha\beta}\left(\gamma_\beta\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma_\beta\right) + O(\omega^2) \\
&= I - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\frac{1}{4}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right) \\
&= I - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta} \\
&= e^{\frac{-1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}} \\
&= D[\Lambda^{-1}] \\
&= D[\Lambda]^{-1}
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$\tilde{\Psi}(x) = D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}) \tag{2.11.1}$$

$$\bar{\tilde{\Psi}}(x) = \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)D[\Lambda^{-1}] \tag{2.11.2}$$

y luego

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi = \bar{\tilde{\Psi}}(x)\gamma^\mu\tilde{\Psi}(x) &= \left(\bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)D[\Lambda]^{-1}\right)\gamma^\mu\left(D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x)\right) \\
&= \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\left(D[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu D[\Lambda]\right)\gamma(\Lambda^{-1}x)
\end{aligned}$$

En donde el término entre paréntesis debe ser tal que $\left(D[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu D[\Lambda]\right) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$. Así,
Afirmación:

$$D[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu D[\Lambda] = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
D[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu D[\Lambda] &= e^{\frac{-1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}\gamma^\mu e^{\frac{1}{2}\omega^{\tau\sigma}S_\tau}, \quad \text{A 1er orden} \\
&= \left(I - \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu\left(I + \frac{1}{2}\omega^{\tau\sigma}S_{\tau\sigma}\right) \\
&= \gamma^\mu - \frac{1}{2}\omega^\beta S_{\alpha\beta}\gamma^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\cancel{\tau}\alpha\cancel{\sigma}\beta}\gamma^\mu S_{\cancel{\tau}\alpha\cancel{\sigma}\beta} + O(\omega^2) \\
&= \gamma^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left(\gamma^\mu S_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}\gamma^\mu\right) \\
&= \gamma^\mu + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}[\gamma^\mu, S_{\alpha\beta}]
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el segundo término

$$\begin{aligned}\frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}[\gamma^\mu, S_{\alpha\beta}] &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{8}[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha], \quad \text{con}\gamma^\mu\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\gamma^\mu = 2S^\mu_\alpha \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{4}[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta] \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{4}\left[\gamma^\mu, \frac{1}{2}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha + \frac{1}{2}\cancel{(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)}\right)\right] \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{4}\left(\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu\right), \quad \gamma^\mu\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\gamma^\mu = 2\delta^\mu_\alpha \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{4}\left(\left(2\delta^\mu_\alpha\gamma_\alpha\gamma^\mu\right)\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu\right) \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{4}\left(2\delta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\beta - \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu\right) \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{4}\left(2\delta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\alpha\left(2\delta^\mu_\beta - \cancel{\gamma_\beta\gamma^\mu}\right) - \cancel{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu}\right) \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\alpha\delta^\mu_\beta\right) \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}\left(\delta^\mu_\alpha\eta_{\beta\sigma} - \eta_{\alpha\sigma}\delta^\mu_\beta\right)\gamma^\sigma \\ &= \frac{\omega^{\alpha\beta}}{2}\left(J_{\alpha\beta}\right)^\mu_{\ \sigma}\gamma^\sigma\end{aligned}$$

Generadores de Lorentz en la representación vectorial

$$\left(J_{\alpha\beta}\right)^\mu_{\ \sigma} = \delta^\mu_\alpha\eta_{\beta\sigma} - \eta_{\alpha\sigma}\delta^\mu_\beta$$

Así,

$$D[\Lambda]^{-1}\gamma^\mu D^[\Lambda] = \left(\delta^\mu_\sigma + \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left(J_{\alpha\beta}\right)^\mu_{\ \sigma} + O(\omega^2)\right)\gamma^\sigma$$

Y por tanto

$$\boxed{D[\Lambda]^1\gamma^\mu D[\Lambda] = \Lambda^\mu_{\ \nu}\gamma^\sigma} \tag{2.11.3}$$

Tarea: Demostrar que $\bar{\Psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x)$ es un escalar de Lorentz.

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x\bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi = \int d^4x\mathfrak{L}(x) \tag{2.11.4}$$

Hemos argumentado que $\mathfrak{L}(x)$ es un escalar de Lorentz

$$\tilde{\mathfrak{L}}(x) = \mathfrak{L}(\Lambda^{-1}x) \Rightarrow \delta Lorentz\mathfrak{L} = -\omega^\alpha_{\ \beta}x^\beta\partial_\alpha\mathfrak{L}$$

$$\begin{aligned}\delta_{Lorentz}I &= \int d^4x\delta\mathfrak{L}(x) \\ &= \int d^4x\omega^\alpha_{\ \beta}x^\beta\partial_\alpha\mathfrak{L} \\ &= \int d^4x\partial_\alpha\left(-\omega^\alpha_{\ \beta}x^\eta\mathfrak{L}\right) + \omega^\alpha\cancel{\partial_\alpha x^\beta\mathfrak{L}}^0 \quad = \int d^4x\partial_\alpha B^\alpha, \quad \text{donde}B^\alpha = -\omega^\alpha_{\ \beta}x^\beta\mathfrak{L}\end{aligned}$$

La acción de Dirac es quasi-invairante bajo transformaciones de Lorentz y entonces via teorema de Noether habrá 6 corrientes conservadas.

$$j^\mu = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu campo}\delta campo - B^\mu$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0\frac{d}{dt}\int d^3j^0 + \int d^3x\nabla\cdot j^i = 0$$

2.12. Vigesima segunda clase

Sabemos que

$$\begin{aligned}\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) = D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1})\\ \Psi^\dagger(x)\gamma^0 =: \bar{\Psi}(x) \to \tilde{\bar{\Psi}}(x) = \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)D^{-1}[\Lambda]\\ D[\Lambda] = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}\end{aligned}$$

de lo cual se concluyó que

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(x)\Psi(x), &\quad \text{es un escalar de Lorentz}\\ \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x), &\quad \text{es un vector de Lorentz}\end{aligned}$$

El primero corresponde al término de masa y el segundo es una corriente vectorial.
Con estos ingredientes demostramos que la acción de Dirac es quasi-invariante bajo Lorentz:

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi(x)$$

Todo los observadores inerciales estarán de acuerdo en cuál es la ecuación dinámica para un spinor de Dirac.

$$\delta_{\bar{\Psi}} I = 0 \Rightarrow \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi(x) = 0, \quad \text{Ecuación de Dirac}$$

Ahora, la ecuación para la variación con Ψ

$$\begin{aligned}\delta_\Psi I &= I[\Psi + \delta\Psi, \bar{\Psi}] - I[\Psi, \bar{\Psi}]\\ &= \int d^4x \left(\bar{\Psi} i\gamma^\mu\partial_\mu\delta\Psi - m\bar{\Psi}\delta\Psi\right)\\ &= \int d^4x \left(\partial_\mu\left(\bar{\Psi} i^\mu\delta\Psi\right) - \partial_\mu\bar{\Psi} i\gamma^\mu\delta\Psi - m\bar{\Psi}\delta\Psi\right)\\ &= \cancel{B.T.} - \int d^4x \left(i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi}\right)\delta\Psi = 0\end{aligned}$$

Con lo cual, hemos obtenido

$$i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \tag{2.12.1}$$

Afirmación: La ecuación obtenida al calcular es el conjudado de Dirac de la ecuación de Dirac.
Demostración:
Recuerdo:

$$I[\varphi, \varphi*] = \int d^4x \left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi* - m^2\varphi\varphi*\right)$$

En donde φ es un campo escalar complejo, el cual cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}\delta_\varphi I = 0 \Rightarrow \Box\varphi* + m^2\varphi* = 0\\ \delta_{\varphi*} I0 \Rightarrow \Box\varphi + m^2\varphi = 0\end{aligned}$$

Comencemos ocn la ecuación de Dirac, tal que

$$\begin{aligned}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi = 0, &\quad /()^\dagger\\ -i\partial_\mu\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger} - m\Psi^\dagger = 0&\\ i\partial_\mu\left(\Psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\right) + m\Psi^\dagger\gamma^0 = 0, &\quad \text{pero } \gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu\\ i\partial_\mu\left(\Psi^\dagger\gamma^0\right)\gamma^\mu + m\Psi^\dagger\gamma^0 = 0&\\ i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0&\end{aligned}$$

En donde hemos obtenido la misma ecuación que antes, con lo cual bajo un espacio de Hilbert, podemos definir

$$\begin{aligned}\hat{H}\left|\vec{k}\right\rangle &= \sqrt{\vec{k}^2+m^2}\left|\vec{k}\right\rangle \\ \hat{\vec{p}}\left|\vec{h}\right\rangle &= \vec{k}\left|\vec{h}\right\rangle\end{aligned}$$

Notemos que el que haya un vector dentro de un ket es puramente notación para la ecuación de onda.
Ahora bien, el término de masa que se encuentra en la ecuación de Dirac corresponde a la masa de los quantos que mide el campo en particular, masa la cual puede ser medida por ejemplo con el efecto de Compton.

$$i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Psi = 0 \tag{2.12.2}$$

$$\lambda_F = \lambda_I + \frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right) \tag{2.12.3}$$

Entonces, cuando veamos una acción sin términos cuadrados, podemos concluir que el quanta del campo no tendrá masa, como por ejemplo la acción de Maxwell.

$$\begin{aligned}I_{Max}[A_\mu] &= \int d^4x - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi \\ &= \frac{-1}{4}d^4x\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\end{aligned}$$

Entonces el segundo término será un término de interacción de los campos, pero no de masa, y que finalmente,

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \to \nabla\cdot\vec{E} = \rho \\ &= e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi \to \nabla\times\vec{B} = \partial_t\vec{E} + \vec{J}\end{aligned}$$

Afirmación: Cada componente del spinor de Dirac satisface la ecuación de Klein-Gordon.

$$\left(i\gamma^\mu\partial_- m\right)\Psi = i\gamma^0\partial_t\Psi + i\gamma^1\partial_x\Psi + i\gamma^2\Psi_y + i\gamma^3\partial_z\Psi - m\Psi = 0$$

$$i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_t\Psi_1\\\partial_x\Psi_2\\\partial_y\Psi_3\\\partial_z\Psi_4\end{pmatrix} + \cdots - m\begin{pmatrix}\Psi_1\\\Psi_2\\\Psi_3\\\Psi_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Lo cual son cuatro ecuaciones difereciales lineales acopladas

$$\begin{aligned}i\partial_t\Psi_3 + \cdots - m\Psi_1 &= 0 \\ i\partial_t\Psi_4 + \cdots - m\Psi_2 &= 0 \\ i\partial_t\Psi_1 + \cdots - m\Psi_3 &= 0 \\ i\partial_t\Psi_2 + \cdots - m\Psi_4 &= 0\end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi &= 0, \quad /\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right) \\ \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi\right) &= 0 \\ \gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\partial_\mu\Psi + m^2\Psi &= 0 \\ \left(\frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu\right)\right)\partial_\nu\partial_\mu\Psi + m^2\Psi &= 0 \\ \frac{1}{2}2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu\Psi + m^2\Psi &= 0 \\ \Box\Psi + m^2\Psi &= 0\end{aligned}$$

A lo cual tendremos que, los Ψ que sean soluciones a la ecuación de Dirac serán soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, pero no viceversa.
Spinores quiarales: $\{\gamma^\mu, \gamma^n u\} = 2\eta^{\mu\nu} 1_4$.
En la base quiral:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

En la base de Majorana:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1_{Maj} = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^2_{Maj} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3_{Maj} = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}$$

En donde σ son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pero existe una matriz $A_{4\times 4}$ invertible que

$$\gamma^\mu_{Maj} = A\gamma^\mu_{Quiral} A^{-1}$$

En la base quiral: $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ dan origen al a transformación de Lorentz de la forma

$$e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}} = D[\Lambda_{ROT}] = \begin{pmatrix} e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} \end{pmatrix}$$
$$D[\Lambda_{Boost}] = \begin{pmatrix} e^{\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}/2} & 0 \\ 0 & e^{-\vec{\chi}\cdot/2} \end{pmatrix}$$

En donde $\vec{\chi}$ sabe acerca de la rapidez y dirección del boost, tal que

$$\tilde{\Psi}(x) = D[\Lambda_{Boost}]\Psi(\Lambda^{-1})$$

Existen campos de dos componentes que sienten las transformaciones de Lorentz, tales campos se llaman spinores de Weyl.
En la base quiral:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$$

En donde u_+ es el spinor de Weyl izquierdo y u_- es el spinor de Weyl derecho.
¿Cómo transforma bajo boosts y bajo rotacione un spinor de Weyl izquierdo?

$$\begin{aligned}\text{Rot:} \quad & u_+(x) \to \tilde{u}_+(x) = e^{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2} u_+(^{-1}x) \\ \text{Boosts:} \quad & u_+(x) \to \tilde{u}_+(x) = e^{\vec{\chi}\cdot/2} u_+(\Lambda^{-1}x)\end{aligned}$$

Pero como sería para Weyl derecho?
$u_+(x)$ transforma en la representación $(1/2, 0)$? , y lo mismo para u_-?
¿Cómo transforma la acción de Dirac en términos de spinores izquierdos y derechos?

$$\mathfrak{L} = \bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi = iu_-^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu u_+ + iu_-^\dagger i + iu_+^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu u_+ - m\left(u_+^\dagger u_- + u_-^\dagger u_+\right) = 0$$

En donde $\sigma^0 = 1$ y el resto son las matrices de Pauli.
Si $m = 0$, las ecuaciónes de Euler-Lagrange para u_- y u_+ son

$$\begin{aligned} i\sigma^\mu\partial_\mu u_- &= 0 \\ i\sigma^\mu\partial_\mu u_+ &= 0 \end{aligned}$$

Las cuales son llamadas las ecuaciones de Weyl.
Estas ecuaciones definen de manera consistente la evolución temporal de Fermiones quirales

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_+(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_-(x) \end{pmatrix}$$

Ahora, la física no puede depender de la base, con lo cual es necesario además definir todo esto para una base genérica.

2.13. Vigésima tercera clase

En la base quiral tenemos que

$$^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] \\ D[\Lambda] &= e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}} \\ D[\Lambda] &= \begin{pmatrix} \# & 0 \\ 0 & \# \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tal que, los spinores transforman como

$$\Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) = D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}), \quad \text{o sea}$$

$$\begin{pmatrix} \# & 0 \\ 0 & \# \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

Símbolo de Weyl:

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}, \quad u_+ \text{ y } u_- \text{ son spinores de 2 componentes}$$

Así, la densidad Lagrangeana de Dirac está dada por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi, \quad \bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma^0 \\
&= iu_-^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_+ iu_+^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_+ - m\left(u_+^\dagger u_- + u_-^\dagger u_+\right) \\
&\rightarrow \ I = I\left[u_-, u_-^\dagger, u_+, u_+^\dagger\right]
\end{aligned}$$

En donde tenemos que pensar esto como el campo escalar complejo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi * - m^2 \varphi \varphi * \\
& I[Re[\varphi], Im[]], \quad I[\varphi, \varphi *]
\end{aligned}$$

Volviendo a la densidad Lagrangeana de Dirac, debemos recordar lo siguiente

$$\Psi^\dagger \Psi = u_+^\dagger u_+ + u_-^\dagger u_- = \left(u_+^\dagger, u_-^\dagger\right)\begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Psi}\Psi = \left(u_+^\dagger, u_-^\dagger\right)\begin{pmatrix} & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$$

La invariancia de Lorentz requiere que la presencia de un término de masa necesariamente contenga tanto u_+ como u_-.
El término de masa invariante de Lorentz no es complatible con fijar $u_+ = 0$ o $u_- = 0$.
Un spinor de Dirac es llamado spinor quiral si en la base de Weyl toma la forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o,} \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_- \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } m = 0 \rightarrow & \delta_{u_+} I = 0 \Leftrightarrow \delta_{u_+^\dagger} = 0 \\
& \delta_{u_-} I = 0 \Leftrightarrow \delta_{u_-^\dagger} I = 0
\end{aligned}$$

Recordar que en este contexto las matrices de Pauli no tienen 4 componentes, si no que su primer componente es la matriz 1,

$$\begin{aligned}
\sigma^\mu_{2\times 2} &= \left(1, \sigma^i\right) \\
\bar{\sigma}^\mu_{2\times 2} &= \left(1, -\sigma^\mu\right)
\end{aligned}$$

Lo que finalmente nos lleva a las ecuaciones de Weyl, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned}
i\bar{\sigma}^m u \partial_\mu u_+ &= 0 \\
i\sigma^\mu \partial_\mu u_- &= 0
\end{aligned}$$

El spinor de Dirac transfoma en la representación:

$$(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$$

del grupo de Lorentz

- u_+ transforma en la $(1/2,0)$, $e^{\frac{\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}}{2}}$
- u_- transforma en la $(0,1/2)$, $e^{\frac{-\vec{\chi}\cdot\vec{\sigma}}{2}}$

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu &= A\gamma^\mu_{Weyl}A^{-1} \\
\rightarrow S^{Weyl}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}[\gamma^{Weyl}_\alpha, \gamma^{Weyl}_\beta], \quad S_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}AS_{\alpha\beta}A^{-1} \\
D[\Lambda] &= e^{\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}} \\
&= Ae^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S^{Weyl}_{\alpha\beta}}A^{-1} = AD[\Lambda]A^{-1}
\end{aligned}$$

¿Cómo caracterizamos un spinor quiral en una base genérica?, para ello definimos la siguiente matriz

$$\begin{aligned}
\gamma^5 &:= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
\left(\gamma^5\right)^2 &= 1,
\end{aligned}$$

Demostración: recordemos que satisfacen el álgebra de Clifford, $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu}1_4$ tal que, en la signatura $(+,-,-,-)$

$$\begin{aligned}
\left(\gamma^5\right)^2 &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^3 \\
&= \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 \\
&= -\gamma^3\gamma^3 \\
&= +1
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 \\
\{\gamma^5, \gamma^0\} &= \gamma^5\gamma^0 + \gamma^0\gamma^5 \\
&= -i\left(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= -i\left(-\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^1\gamma^2\gamma^3\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tarea: hacer lo mismo anti-conmutador, pero con γ^1.
Tarea: En la base quiral

$$\gamma^5\begin{pmatrix}0\\0\\u_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u_-\end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix}I & 0\\0 & -I\end{pmatrix},$$

$$\gamma^5\begin{pmatrix}u_+\\0\\0\end{pmatrix}) = +1\begin{pmatrix}u_+\\0\\0\end{pmatrix}$$

- Los spinores quirales son auto-spinores de γ^5
- Los spinores de Dirac izquierdos tienen autovalor +1
- Los spinores de Dirac derechos tienen autovalo -1

Proyectore P_+ y P_-

$$P_+0\frac{1}{2}\left(I+\gamma^5\right) =_{In\ Weyl} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$P_- = \frac{1}{2}\left(I-\gamma^5\right) =_{In\ Weyl} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demostrar: que

$$P_+P_- = 0$$
$$P_+^2 = P_+, \quad P_-^2 = P_-$$

en una base arbitraria. **En la base quiral:**

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_+ \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = P_- \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

En una base genérica:

$$\Psi_\pm = P_\pm \Psi$$

En donde $\Psi_\pm$ son spinores quirales en una base genérica.
Base de Majorana:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \\ \sigma^2 & \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}$$
$$^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En donde γ^μ cumple con el Álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}1_4, \quad \gamma^\mu_{Maj} = A\gamma^m u_{Weyl}A^{-1}$$
$$\left(\gamma^\mu_{Maj}\right)* = -\gamma^\mu_{Maj} \Rightarrow S^{Maj}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma^{Maj}_\mu, \gamma^{Maj}_\nu\right], \quad \text{Son reales}$$
$$\left(S^{Maj}_{\mu\nu}\right)* = \frac{1}{4}\left(\left(\gamma^{Maj}_\mu\right)*\left(\gamma^{Maj}_\nu\right)* - \left(\gamma^{Maj}_\nu\right)*\left(\gamma^{Maj}_\mu\right)*\right) = S^{Maj}_{\mu\nu}$$

En la base de Majorana $S_{\alpha\beta}$ son reales, por tanto

$$D[\Lambda] = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}$$
$$\rightarrow \text{Son reales}$$

En general un spinor de Dirac tiene componentes complejos, pero en la base de Majorana se puede pedir de forma invariante de Lorentz que el spinor sea real

$$\Psi * (x) = \Psi(x) \tag{2.13.1}$$

Los spinores que satisfacen esta condición de realidad son llamados spinores de Majorana [10].
Matriz de conjugación de Carga: La matriz de conjugación de carga será una operación que al aplicar a un spinor nos devuelve otro spinor tal que

$$\begin{aligned} \Psi \longrightarrow \text{Conj. de cagra} \longrightarrow \Psi^{(c)} \\ \Psi^{(c)}(x) = C\Psi * (x),\ \text{Con C := Matriz de conjugación de carga,} \\ \text{tal que} \rightarrow C^{\dagger}C = I \quad \text{y,} \\ C^{\dagger}\gamma^{\mu}C = -(\gamma^{\mu}) * \end{aligned}$$

Ahora, la matriz de conjugación de carga en las bases de Majorana y Weyl es

$$C_{Maj} = I$$
$$C_{Weyl} = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

En la base de Majorana un spinor de Majorana satisface que, en una base genérica, un spinor de Majorana será igual a su conjugado de carga.

$$\Psi^{(c)} = C\Psi * (x) = \Psi(x) \tag{2.13.2}$$

Lo que se llama, condición de realidad en una base genérica.
¿ Cómo luce un spinor de Majorana en la base de Weyl?

$$\begin{pmatrix} u_+(x) \\ u_-(x) \end{pmatrix} = \Psi(x) = C\Psi * (x) = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u *_+ (x) \\ u_- * (x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 u *_(x) \\ -i\sigma^2 u *_+ (x) \end{pmatrix}$$

Con lo cual tenemos la siguiente condición

$$u_+(x) = i\sigma^2 u_- * (x)$$
$$u_-(x) = -i\sigma^2 u_+ * (x)\Psi(x) = \begin{pmatrix} u_+(x) \\ -i\sigma^2 u *_+ (x) \end{pmatrix}$$

En donde $\Psi(x)$ es un spinor de Majorana en la base de Weyl.
En dimensión 4 (3+1) no existen lo spinores de Majorana-Weyl.
Si $\Psi(x)$ satisface la ecuación de Dirac, entonces $\Psi^{(c)}$ tambíen satisface la ecuación de Dirac.
La ecuación de Dirac en presencia en presencia de un campo $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ electromagnético es:

$$\left(i\gamma^{\nu}\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.13.3}$$
$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_\mu - m + e\gamma^{\mu}A_\mu\right)\Psi(x) = \tag{2.13.4}$$

Entonces, la antipartícula, carga opuesta, tambíen satisface la ecuación de conjuado de carga de Dirac, o sea,

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_\mu - m - e\gamma^{\mu}A_\mu\right)\Psi^{(c)}(x) = 0 \tag{2.13.5}$$

[10] Tambíen es posible pedir que un spinor sea spinor de Majorana-Weyl, sin embargo, en dimensión 4, es imposible

2.14. Vigesima cuarta clase

Existen las siguientes partículas fundamentales en la naturaleza

- Boson de Higgs
- Dentro de los Leptones tenemos: Neutrinos $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\zeta$
- Electrón (e), muón (μ), tauón (ζ)
- Quarks: up, down, strange, charged, bottom, tor
- Dentro de los Gluones (Que existen 8, grupo $\mathfrak{SU}(3)$ y median la interacción fuerte); W^+, W^-, Z^0(Median la interacción débil), Fotones (γ median la interacción electrogmagnética), Gravitones

¿Ahora, qué pasa con partículas como el protón o neutrón?

- Protón: up, up, down
- Neutrón: down, down, up
- Piones (π^0, π^+, π^-): quark, anti-quark

Luego, todo el primer listado será multiplicado por 2, ya que cada partícula fundamental cuenta con su respectiva anti-partícula.
Dentro de esta lista existe la siguiente clasificacion

- (qqq) Hadrones (p,n,...)
- (qq) Mesones ($\pi^0, \pi^+, \pi^+, \pi^-, \rho, \dots$)

Es imporante notar que si quisiéramos detectar partículas como por ejemplo, el electrón, necesitaríamos un acelerador de partículas que pueda alcanzar los $1[MeV]$, lo cual es muy caro.
La próxima clase mostraremos los que es el Lagrangiano del modelo estándar. Que algunos comparan como muy feo con las ecuaciones de Einstein por ejemplo, pero esto está hecho con muy mala pata, porque si descomponemos las ecuaciones de campo de Einstein estas también son feas, veamos.

$$G_{\mu\nu} = 0 \tag{2.14.1}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.14.2}$$

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta} \tag{2.14.3}$$

$$R^\alpha_{\beta\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\delta\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\beta} \tag{2.14.4}$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left[\partial_\delta g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\delta\sigma} - \partial_\alpha g_{\delta\beta}\right] \tag{2.14.5}$$

2.14.1. Formulación covariante del Electromagnetismo

Recordemos que las ecuaciones de Maxwell Pueden ser escritas como

$$\nabla \cdot E = 0 \tag{2.14.6}$$

$$\nabla \times B = +\partial_t E \tag{2.14.7}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{2.14.8}$$

$$\nabla \times E = -\partial_t B \tag{2.14.9}$$

Las cuales son las ecuaciones de Maxwell en el vacío sin carga, lo que implica que, bajo un potencial vectorial

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(t, \vec{x})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0, \text{ Si } \vec{A} \in C^2$$

Ahora, en la Ley de Faraday

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\partial_t \nabla \times A \\ \nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) &= 0, \quad \text{Notemos que el paréntesis es el potencial escalar} \\ \vec{E} + \partial_t \vec{A} &= -\nabla \phi(t, \vec{x}) \\ \vec{E} &= -\nabla \phi - \partial_t \vec{A} \end{aligned}$$

Las ecuaciones 1 y 2 nos dicen cuánto vale $\phi(t, \vec{x})$ y $\vec{A}(t, \vec{x})$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \ \nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t A) &= 0 \\ -\nabla^2 \phi - \partial_t \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \\ \nabla^2 \phi + \partial_t \nabla \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times A) &= \partial_t (-\nabla \phi - \partial_t \vec{A}) \\ \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} &= -\partial_t \nabla \phi - \partial_t^2 \vec{A} \end{aligned}$$

Las mismas ecuaciones pueden obtenerse introduciendo un cuadri-vector (en la sigmatura $-+++$)

$$A_\mu(t, \vec{x}) = (A_0(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})) = (-\phi(t, \vec{x}), \vec{A}(t, \vec{x})) \tag{2.14.10}$$

Lo que corresponde al cuadri-potencial electromagnético, y bajo un boost de Lorentz, transforma se la siguiente forma

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu A_\nu(x) \tag{2.14.11}$$

Pero ¿Cuál es la motivación para obtene una formulación con otras letras del Electromagnetismo?, sabemos que, en el lenguaje del Cálculo multivariable los operadores dan cuenta de una invariancia ante rotaciones y que si se quisiera, podemos expresar las ecuaciones de Maxwell por componentes, donde aún exista dicha invariancia ante rotaciones, pero no está de forma clara, está escondida, lo mismo pasa cuando queremos encontrar una invariancia ante boosts de Lorentz,la forma de cálculo multivariable no deja claro si es invariante ante boosts de Lorentz, con lo cual es necesario expresarlo en función de cuadr-vectores.
Definimos el tensor de Faraday:

$$F_{\mu\nu} := \partial \mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.14.12}$$

Para lo cual, la componente t, x, por ejemplo

$$\begin{aligned} F_{tx} &= \partial_t A_x - \partial_x A_t \\ &= \partial_t A_x + \partial_x \phi = -E_x \end{aligned}$$

Ahora la componente xy

$$F_{xy} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z$$

Componente zx

$$F_{zx} = \partial_z A_x - \partial_x A_x = B_y$$

El tensor de Faraday completo se ve como

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14.13}$$

Notemos que este arrelo matricial corresponde a cuando el tensor de Faraday tiene los índices abajo $F_{\mu\nu}$, y cuando tenga los índices arriba $F^{\mu\nu}$o mezclados $F^{\mu}_{\ \nu}$

$$F^{\mu}_{\ \nu} := \eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & & 0B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14.14}$$

A lo cual, la ley de Gauss Magnética y la Ley de Ampère-Maxwell son equivalentes a:

$$\partial_\mu F^{\mu}_{\ \nu} = 0 \tag{2.14.15}$$

Nos podemos convencer de esto mediante, si hacemos $\nu = t$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu F^{\mu}_{\ t} &= \partial_t F^{t}_{\ t} + \partial_x F^{x}_{\ t} + \partial_y F^{y}_{\ t} + \partial_z F^{z}_{\ t} \\ &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0 = \nabla \cdot E \end{aligned}$$

En donde se ha recuperado la Ley de Gauss en el vacío sin cargas, luego, podemos seguir con $\nu = x$

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu F^{\nu}_{\ x} &= \partial_y F^{t}_{\ x} + \partial_x F^{x}_{\ x} + \partial_y F^{y}_{\ x} + \partial_z F^{z}_{\ x} \\ &= \partial_t E_x - \partial_y B_z + \partial_z B_y \\ \partial_t \vec{E} &= \nabla \times \vec{B} \end{aligned}$$

Lo que nos regresa la Ley de Ampère-Maxwell.
Ahora, en electroestática y dinámica se trabaja con los potenciales electroestáticos y potencial vectorial, los cuale tienen cierta ambigüedad en su definición, ya que, estos no son únicos, si no que pueden ser transformados a conveniencia del usuario para su aplicación, esto se debe a lo siguiente

2.14.2. Invariancia de Gauge

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu \left(A_\nu + \partial_\nu \xi\right) - \partial_\nu \left(A_\nu + \partial_\mu \xi\right) \\ &= \partial_{A\nu} - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \xi - \partial_\nu \partial_\mu \xi \\ &= \partial_\nu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Los cuadripotenciales $A_\mu(x^\mu)$ y $A_\mu(x^\nu) + \partial_\mu \xi$ llevan al mismo tensor de Faraday y por tanto, llevan a los mismos campos eléctricos y magnéticos.
Establecemos una relación de equivalencia entre cuadri-potenciales que difieren por una tranformación de Gauge

$$A_\mu(x^\mu) \sim \tilde{\tilde{A}}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi \tag{2.14.16}$$

Podemos definir además las clases de equivalencia, que corresponde a las órbitas de Gauge, y moverse por dichas órbitas de Gauge implican un cambio en la transformación, o sea, cambiamos el representante de la clase de equivalencia.
Supongamos que

$$\xi = e^{-\alpha(t^2 - x^2)}$$

Para lo cual,

$$\begin{aligned} \partial_t \xi &= e^{-\alpha(t^2-x^2)}\left(-2\alpha t\right) \\ \partial_x \xi &= e^{-\alpha(t^2-x^2)}(2\alpha x) \end{aligned}$$

Lo que nos dará

$$\tilde{\tilde{A}}_\mu A_\mu^{Coulomb} + \left(-2\alpha + e^{-\alpha(t^2-x^2)}, 2\alpha x e^{-\alpha(t^2-x^2)}, 0, 0\right) \tag{2.14.17}$$

Con lo cual

$$\tilde{\tilde{A}}_t = -\frac{q}{t} - 2\alpha t e^{-\alpha(t^2-x^2)} \tag{2.14.18}$$

$$\tilde{\tilde{A}}_x = 2\alpha x e^{-\alpha(t^2-x^2)} \tag{2.14.19}$$

2.15. Vigésimo quinta clase

Nos convencimos que de las ecuaciones de Maxwell podemos obtener una forma covariante de la Ley de Gauss de la forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

En lo cual, el tensor de Faraday viene de Fábrica con los indices abajo, lo que tiene fuertes implicancias físicas, se sugiere indagar en esto para poder tener mejor noción de su construcción.
Ahora, necesitamos encontrar un principio de acción para el campo A_μ, o sea, para el cuadri-potencial electromagnético.

$$I[A_\mu] = \int dt \int d^3x \mathfrak{L} = \int dt L$$

Algo muy imporante de notar es el cómo transforma el tensor de Faraday cuando se aplica una transformación entre observadores inerciales, el tensor de Faraday transforma de la siguiente forma

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta} \tag{2.15.1}$$

También es importante notar el cómo transforman las ecuaciones de Maxwell ante una transformación de Lorentz en su forma diferencial o vectorial. Pero ambos observadores inerciales ven la misma ecuación dinámica

$$\frac{\tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\mu} = 0$$

ya que, recordemos que el campo fundamental no es $F_{\mu\nu}$ sino A_μ la cual transforma como

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \Lambda_\mu^\alpha A_\alpha(x)$$

y que el principio de acción sea invariante bajo dicha transformación además de devolver la ecuación dinámica buscada. Proponemos una densidad Lagrangeana de la siguiente forma

$$\mathfrak{L} = c_1 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\alpha\rho}$$

Y podemos hacer el ejercicio de escribir dicha densidad Lagrangeana en términos de los campos eléctrico y magnético de forma explícita, lo que sería de la forma

$$\mathfrak{L} = c_1 \left(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2\right) + c_2 \left(\vec{E} \cdot \vec{B}\right)$$

Cuando calculamos las ecuaciones de movimiento nos daremos cuenta que el segundo término $(E \cdot B)$, no contribuye, ya que, es un término de borde.

2.15.1. Principio de acción de Maxwell

A lo cual podemos convencernos que el siguiente principio de acción es el buscado

$$I[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) \tag{2.15.2}$$

Variamos la acción tal que, asumiendo que la transformación infinitesimal tiene las puntas amarradas $\delta A_\mu(t_1 \wedge t_2, \vec{x}) = 0$ y además $\delta A_\mu \ |\vec{x}| \overrightarrow{\rightarrow} \infty \ 0$

$$\begin{aligned}
\delta I = 0 &= I[A_\mu + \delta A_\mu] - I[A_\mu] \\
&= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} \left[\partial_\mu \left(A_\nu + \delta A_\nu \right) - \partial_\nu \left(A_\mu + \delta A_\mu \right) \right] \left[\partial^\mu \left(A^\nu + \delta A^\nu \right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \delta A^\mu \right) \right] \right) - I \\
&= \int d^4x - F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \\
&= \int d^4x \partial_\mu \left(-F^{\mu\nu} \delta A_\nu \right) + \partial_\mu \left(F^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu \\
&= B.T \ + \int d^4x \partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A_\nu = 0 \ \Rightarrow \ \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0
\end{aligned}$$

El **Principio de acción de Maxwell**

$$I[A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \tag{2.15.3}$$

Es invariante bajo:
Transformaciones de Lorentz: Rotaciones, Boost, $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha$.

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\alpha_\nu A_\alpha(x)$$

Cuya carga conservada es del tipo

$$Q = \int d^3x j^t, \quad j^\mu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \delta A_\nu - B^\mu$$

Transformaciones de Poincaré, Traslaciones temporales y espaciales, $\tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \phi(x) \\
\tilde{\psi}(\tilde{x}) &= \psi(x) \\
\tilde{A}_\mu(\tilde{x}) &= A_\mu(x)
\end{aligned}$$

A lo cual, calculamos la traslación espacio temporal

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\mu(x) &= A_\mu(x - a) \\
&= A_\mu(x) - a^\alpha \partial_\alpha A_\mu \\
&\Rightarrow \delta A_\mu = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha A_\mu
\end{aligned}$$

y de ello encontramos que la corriente conservada será el tensor densidad energía momento (bajo traslaciones espacio-temporales).

$$j^\mu = -\epsilon^\nu T^\mu_\nu \tag{2.15.4}$$

en donde el tensor densidad de energía momento es el siguiente, que es análogo a la energía clásica.

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{2.15.5}$$

El cual cumple con que tiene divergencia nula, ya que es una corriente conservada

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \tag{2.15.6}$$

Y el tensor energía momento, al estar compuesto por tensores de Faraday, transforma como

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Lambda^\alpha{}_\nu A^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}(x) \tag{2.15.7}$$

2.15.2. Hacia teorías de Gauge no-abelianas

Las cuales describen los Gluones, $w^{\pm}, z^0$.
Supongamos que tenemos un grupo $g(x)$, como por ejemplo el grupo $SU(N)$, el cual está caracterizado por su tabla de multiplicación o de Cayley. El grupo actúa sobre un fermión como

$$\tilde{\psi}(x) = g(x)\psi(x) \tag{2.15.8}$$

Que no es nada más que un grupo actuando sobre una matriz columna, pero la transformación no actúa sobre los x^μ sino que actúa directamente sobre los campos, lo que corresponde a una transformación interna, los campos se mezclan entre sí.
Ahora veamos como transforman las derivadas parciales de ψ

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x^\mu} &= \partial_\mu\left(g(x)\psi(x)\right)\\ &= g(x)\partial_\mu\psi(x) + \partial_\mu g(x)\psi(x)\end{aligned}$$

Pero esto no es una transformación homogénea, con lo cual es necesario definir una derivada que me permita que la transformación es homogénea[11].
Así, definimos la siguiente derivada covariante

$$\begin{aligned}D_\mu\psi(x) &:= \partial_\mu\psi(x) + A_\mu(x)\psi(x)\\ D_\mu\tilde{\psi}(x) &:= \partial_\mu\tilde{\psi}(x) + \tilde{A}_\mu(x)\tilde{\psi}(x)\end{aligned}$$

$$D_\mu\tilde{\psi}(x) = g(x)D_\mu\psi(x)$$

Con lo cual podemos desarrollar lo siguiente

$$\begin{aligned}\partial_\mu\tilde{\psi} + \tilde{A}_\mu\tilde{\psi} &= g\partial_\mu\psi + gA_\mu\psi\\ \partial_\mu g\psi + g\partial_\mu\psi + \tilde{A}_\mu g\psi &= g\partial_\mu\psi + gA_\mu\psi\\ \tilde{A}_\mu g &= gA_\mu - \partial_\mu g\\ \tilde{A}_\mu gg^{-1} &= gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu gg^{-1}\end{aligned}$$

Fórmula de Manuel Cartán

La ley de transfomación de la conexión de Gauge (campo de Gauge) es:

$$\tilde{A}_\mu(x) = gA_\mu(x)g^{-1} - \partial_\mu gg^{-1} \tag{2.15.9}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu gg^{-1} &= \partial_\mu\left(exp(\lambda_a(x)T_a)\right)\ exp(-\lambda_a(x)T_a)\\ &= exp(\lambda_a(x)T_a)\partial_\mu(\lambda_b(x))T_b exp(-\lambda_c(x)T_c)\end{aligned}$$

La expresión

$$\tilde{A}_\mu(x) = gA_\mu(x)g^{-1} - \partial_\mu gg^{-1} \tag{2.15.10}$$

En donde $A_\mu(x)$ es una combinación lineal de generadores

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T_a \tag{2.15.11}$$

En donde $A_\mu(x)$ esto puede ser el grupo $SU(3)$ el cual cuenta con 8 generadores y da cuenta de los 8 gluones. Si el grupo es abeliano $U(1)$ hay un solo $A_\mu(x)$ y puede ser escrito como $g = g^{i\xi(x)}$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu(x) &= A_\mu - \partial_\mu(e^{i\xi})e^{i\xi}\\ &= A_\mu - i\partial_\mu\xi\\ &= A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad \alpha = -i\xi\\ &= \tilde{A}_\mu(x)\end{aligned}$$

[11] Similar a esto es cuando se define la derivada coraviante para un espacio curvo usando los símbolos de Christoffel $\Gamma^l_{\mu\nu}$

2.16. Vigésimo sexta clase

De una forma abstracta supondremos que,

$$g \in SU(N) \Rightarrow g^\dagger g = I \wedge det(g) = 1 \tag{2.16.1}$$

Y asumimos que en cada punto del espacio tiempo, hay un elemento del grupo. Todos los elementos que están conectados con la identidad pueden ser escritos como

$$g(x) = e^{e\lambda_a(x)T_a}, \quad \text{suma en a} \tag{2.16.2}$$

En el grupo $SU(N)$ se tiene que $a = 1, \ldots, N^2 - 1$ y los parámetros $\lambda_a(x) \in \mathbb{R}$ y las matrices T_a son hermíticas y sin traza o que es consecuencia directa de las propiedades que cumple g. El punto x corresponde a una etiqueta en el espacio tiempo, tal que, a cada punto del espacio tiempo[12] En el conexto de Grand Unified Theories se usa el grupo de $SU(5)$. Al considerar el espacio-tiempose piensa como, en cada punto, el grupo será una línea que por ejemplo, en el caso de $SU(2)$ las línea, que son llamadas fibras, serían 3-esferas[13] tal que a cada punto del espacio se le asocia una copia completa del grupo hacia una dirección abstracta.

Asumamos que existe un campo

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) = g(x)\varphi(x) \tag{2.16.3}$$

La que no corresponde a una transformación del espacio-tiempo. Es una transformación interna local. Los

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ . \\ . \\ \varphi_N(x) \end{pmatrix}$$

En donde el índice N cuentan spinores y no índices spinoriales[14]. Recordemos que conocemos una simetría interna global:

$$I[\phi_1, \phi_2] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial\phi_2)^2 - \frac{m^2}{2} \left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \right) \tag{2.16.4}$$

y es invariante bajo la transformación

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\phi_1}(x) \\ \tilde{\phi_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \tag{2.16.5}$$

Una transformación local, sí es simetría de la acción

$$\tilde{\varphi}(x) = g(\theta)\varphi(x) \tag{2.16.6}$$

Sin embargo, la siguiente transfomración no será simetría de la acción

$$g(\theta) = g(\theta(x)) \tag{2.16.7}$$

Ya que, al la transformación depender del punto, entonces surge un problema con las derivadas y así ya no es simetría de la acción.
Otro ejemplo de una teoría con simetría interna global:

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4\bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right) \Psi \tag{2.16.8}$$

[12]En este contexto se habla del espacio-tiempo plano de Minkowsky.
[13]Esto es llamado la Teoría de Fibrados.
[14]Similar a como en teoría de campos clásica se usa la notación ϕ_a

La cual será invariante bajo la siguiente transformación

$$\Psi \to \tilde{\Psi}(x) = e^{i\alpha}\Psi(x)$$
$$\bar{\Psi} \to \bar{\tilde{\Psi}} = \bar{\Psi}e^{-i\alpha}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Pero, en el caso que el parámetro α dependiera del punto en el espacio, o sea, $\alpha(x)$, entonces ya no sería una simetría de la acción,

$$\Psi \to \tilde{\Psi}(x) = e^{i\alpha(x)}\Psi(x)$$
$$\bar{\Psi} \to \bar{\tilde{\Psi}}(x)0\bar{\Psi}(x)e^{i\alpha(x)}$$

Supongamos que tenemos una teoría de campos con simetría interna global:

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) = g\varphi(x) \tag{2.16.9}$$

¿ Es posible Gaugear esta simetría?
¿ Es posible modificar la teoría tal que ahora

$$\varphi(x) \longrightarrow \tilde{\varphi}(x) = g(x)\varphi(x)$$

sea una invariancia de la acción nueva?
Concentrémonos en el campo de Dirac, el cual en la acción tiene dos términos:

- El término de masa:

$$\begin{aligned} m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \to m\bar{\tilde{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(x) &= \bar{\Psi}(x)e^{i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}\Psi(x) \\ &= m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \end{aligned}$$

  Con lo cual, el término de masa es invariante bajo la transformación interna local.

- Término cinético:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) \to \bar{\tilde{\Psi}}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\Psi}(x) &= \bar{\Psi}(x)e^{i\alpha(x)}i\gamma^\mu\partial_\mu\left(e^{i\alpha(x)}\Psi(x)\right) \\ &= \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha(x)}i\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha(x)}i\gamma^\mu i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\Psi(x) \\ &= \bar{\Psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi(x) - \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\alpha(x)\Psi(x) \end{aligned}$$

  En donde claramente sobra un término y no es simetría de la acción bajo una transformación interna local.

Si logramos definir una nueva noción de derivada, que llamaremos derivada covariante y denotaremos por

$$D_\mu\Psi \tag{2.16.10}$$

Tal que, bajo la transformación local

$$D_\mu\Psi(x) \to (D_\mu\Psi(x))' = e^{i\alpha(x)}(D_\mu\Psi(x)) \tag{2.16.11}$$

Seríamos sumamente felices, pues el nuevo término cinético sería invariante bajo la transformación interna local.

$$\bar{\Psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\Psi(x) \to \bar{\tilde{\Psi}}(x)i\gamma^\mu\left(D_\mu\Psi(x)\right)' = \bar{\Psi}(x)e^{-i\alpha(x)}i\gamma^\mu e^{i\alpha(x)}D_\mu\Psi(x) = \bar{\Psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu\Psi(x) \tag{2.16.12}$$

¿ Qué costo hay que pagar para poder definir $D_\mu\Psi(x)$?
Hay que introducir otro campo.

2.16.1. Introducción de la derivada covariante para el campo de Dirac

Se define la derivada covariante como

$$D_\mu \Psi(x) := \partial_\mu \Psi(x) - ieA_\mu(x)\Psi(x) = [\partial_\mu - ieA_\mu(x)]\,\Psi(x) \tag{2.16.13}$$

Pero ¿ A qué corresponderá el campo $A_\mu(x)$?
Para implementar

$$(D_\mu \Psi(x))' = e^{i\alpha(x)}\,(D_\mu \Psi(x))$$

Necesitamos que $A_\mu(x)$ transforme bajo la transformaciñon interna local.

$$e^{i\alpha(x)}\,(D_\mu \Psi) = (D_\mu \Psi)'\,,$$

Usando la definición de la derivada covariante

$$\begin{aligned} &= (\partial_\mu \Psi - ieA_\mu \Psi)' \\ &= \partial_\mu \Psi' - ieA'_\mu \Psi' \\ e^{i\alpha(x)}\partial_\mu \Psi - ie e^{i\alpha} A_\mu \Psi &= \partial_\mu \left(e^{i\alpha(x)}\Psi\right) - ieA'_\mu e^{i\alpha(x)}\Psi \\ iee^{i\alpha(x)}\left[A'_\mu(x) - A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)\right]\Psi(x) &= 0 \Rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\left(\frac{\alpha(x)}{e}\right) \end{aligned}$$

Y esto podemos identificarlo como la trasformación del 4-potencial electromagnético bajo una transformación de Gauge.
En resumen, la acción de Dirac modificada

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x\,\left(\bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi\right) \tag{2.16.14}$$

En donde,

$$D_\mu \Psi := \partial_\mu \Psi - ieA_\mu \Psi \tag{2.16.15}$$

y que básicamente y de forma expandida será

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x\,\left(\bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi\right) + e\int d^4x \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu(x)$$

En donde el primer término corresponde a la acción de Dirac libre y el segundo término consta de

- $e :=$ La constante de acoplamiento.
- $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi :=$ La corriente vectorial.
- $A_\mu(x) :=$ Es el campo de Gauge.

Esta nueva acción es invarinte bajo la acción del grupo $U(1)$ local,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\to \Psi(x)' = e^{i\alpha(x)}\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\to \bar{\Psi}(x)' = \Psi(x)e^{-i\alpha(x)} \\ A_\mu(x) &\to A_\mu(x)' = A_\mu(x) + \partial_\mu\left(\frac{\alpha(x)}{e}\right) \end{aligned}$$

También existe una convención en la cual, la constante e diferente al número de Euler, estará presente en la exponencial, como por ejemplo

$$\Psi(x) \to \Psi(x)' = e^{ie\beta(x)}\Psi(x)$$

Esto cuando la física del campo lo requiera.
Ahora, cómo podemos saber el cómo se comporta dinánicamente el campo A_μ?, porque en la acció de Dirac modificada este actúa como un campo de background. Así, queremos agregar un término dinámico para el campo de Gauge, tal que la acción siga siendo invariante de Gauge.
Si usamos $F_{\mu\nu}$ tendremos asegurada la invariancia de Gauge, pero **solo para teorías de Gauge abelianas**.

2.16.2. Acción de la electrodinica quántica (QED)

La acción de la electrodinámica cuántica, que aún no es cuántica pero la llamaremos así, está dada por,

$$I[,\bar{\Psi},A_\mu] = \int d^4x\bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\Psi - \frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.16.16}$$

O sea,

$$I_{QED}[\Psi,\bar{\Psi}] = I_{Free-Dirac}[\Psi,\bar{\Psi}] + I_{Maxwell}[A_\mu] + I_{Int}[\Psi,\bar{\Psi},A_\mu] \tag{2.16.17}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene que

$$\delta_{\bar{\Psi}}I = 0 \Rightarrow \left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.16.18}$$

$$\delta_{A_\mu}I = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi \tag{2.16.19}$$

en donde podemos recordar que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{2.16.20}$$

genera las ecuaciones de Gauss y Ampére-Maxwell

Capítulo 3

Teoría cuántica de campos

3.1. Vigésima séptima clase

Se tiene que, para la convención de la métrica en $(+,-,-,-)$, el Lagrangeano del campo escalar real está dado por;

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu - \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) \tag{3.1.1}$$

Que para un campo escalar complejo;

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - V(\varphi, \varphi^*) \tag{3.1.2}$$

en donde el potencial debe ser $V(\varphi, \varphi^*) \in \mathbb{R}$.
Recordemos también que, para un campo espinorial, el Lagrangeano de Dirac está dado por;

$$\mathfrak{L} = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi \tag{3.1.3}$$

en donde;

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_4 \tag{3.1.4}$$

Y $\bar{\psi}$ es llamado el conjugado de Dirac.
Si se tiene un campo de Guage A_μ en $U(1)$, el Lagrangeano asociado a dicho campo de gauge está dado por;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.1.5}$$

En comparación, si se tiene un campo de Gauge no abeliano, A^a_μ en $SU(N)$, el Lagrangeano está dado por;

$$\mathfrak{L} = \sum_{a=1}^{N^2-1}\left(-\frac{1}{4}F^{(a)}_{\mu\nu}F^{(a)\mu\nu}\right) \tag{3.1.6}$$

En donde $F^{(a)}_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday generalizado (o Field Strength), el cual cuenta con índices que transforman en el espacio-tiempo de Minkowsky y otro que transforma según el grupo $SU(N)$ al cual está asociado;

$$F^{(a)}_\mu = \partial_\mu A^{(a)}_\nu - \partial_\nu A^{(a)}_\mu - f_{bca}A^{(b)}_\mu A^{(c)}_\nu \tag{3.1.7}$$

Los elementos del grupo estarán dados por;

$$g = e^{-i\lambda_a(x)T_a} \tag{3.1.8}$$

en donde T_a son los generadores del grupo;

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \tag{3.1.9}$$

Las constantes f_{abc} son llamadas constantes de estructura. Para $SU(N)$ siempre existe una base T_a tal que;

$$tr(T_aT_b) = \delta_{ab} \tag{3.1.10}$$

3.1.1. Propiedades comunes

Son invariantes bajo traslaciones espacio-temporales

Por lo tanto, al ser invariantes bajo transformaciones espacio temporales, siempre existirá un tensor de densidad de energía momento T^{μ}_{ν};

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\to \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \\ \Phi_A(x) &\to \tilde{\Phi}_A(\tilde{x}) = \Phi_A(x) \\ \tilde{\Phi}_A &= \Phi_A(x-a) \end{aligned}$$

Tal que, como ya se ha hecho muchas veces, por serie de Taylor se obtiene;

$$\delta\Phi_A = -a^{\mu}\partial_{\mu}\Phi_A \tag{3.1.11}$$

Son invariantes bajo rotaciones y boosts

A lo cual, tiene sentido asignarle a una configuración de campo un momento angular $\vec{J}$;

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\to \tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \\ \Lambda^{\mu}_{\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \\ \Phi_A(x) &\to \tilde{\Phi}_A(\tilde{x}) = D[\Lambda]_{AB}\Phi_B(x) \\ \tilde{\Phi}_A(x) &= D[\Lambda]_{AB}\Phi_B(\Lambda^{-1}x) \end{aligned}$$

Para el campo escalar real

$$A = 1, \quad D[\Lambda] = 1, \quad \forall\Lambda \tag{3.1.12}$$

Para el campo escalar complejo

$$A = 1,2, \quad D[\Lambda] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall\Lambda \tag{3.1.13}$$

Para el campo de Dirac

$$A = 1,2,3,4, \quad D[\Lambda] = e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}} \tag{3.1.14}$$

en donde;

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\right] \tag{3.1.15}$$

Para el campo de Gauge SU(N)

$$A = 0,1,2,3, \quad D[\Lambda] = \Lambda^{\mu}_{\nu} = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}} \tag{3.1.16}$$

en donde;

$$(J_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}\eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\eta_{\alpha\nu} \tag{3.1.17}$$

Y el campo de Gauge;

$$A^{(a)}_{\mu}(x) \to \tilde{A}^{(a)}_{\mu}(x) = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}A^{(a)}_{\nu}(\Lambda^{-1}x) \tag{3.1.18}$$

Rompimiento espontáneo del la simetría:

La acción tiene más simetría que la **solución de enería mínima**[1].

Mecanismo de Higgs

Podemos obtener **Bosones de Gauge masivos**[2] haciendo uso del rompimiento espontáneo de la simetría. ¿No es suficiente incluir un término de masa explícito en la acción?

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \tag{3.1.19}$$

Sin embargo, esta teoría no es predictiva, es decir, no es renormalizable.

Campo escalar complejo

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^2, \quad \mu^2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda > 0 \tag{3.1.20}$$

Simetría $U(1)$ global;

$$\begin{aligned} \varphi &\to \tilde{\varphi}(x) = e^{-i\alpha}\varphi(x) \\ \varphi^* &\to \tilde{\varphi^*}(x) = \varphi^* e^{i\alpha} \end{aligned}$$

A lo cual notemos que cuando se tiene un término del tipo $\varphi^*\varphi$ las fases desaparecen, con lo cual, es una simetría global.
La energía, que está asociada a la cantidad conservada a través de traslaciones temporales, o también, la cantidad 00 del tensor de densidad de energía momento, está dada por;

$$E = \int d^3x \left[\partial_t \varphi^* \partial_t \varphi + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^2\right] \tag{3.1.21}$$

Cuando $\mu^2 > 0$ la configuración de menor energía es cuando;

$$\varphi_{VAC}(x) = 0 \ \wedge \ \varphi^*_{VAC}(x) = 0$$

Notar que se usó la palabra configuración, como ejercicio **calcular las ecuaciones de Euler Lagrange** y comprobar que dicha configuración cumple con ella. Notemos que, los campos transforman como;

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= e^{-i\alpha}\varphi_{VAC}(x) = 0 \\ \tilde{\varphi^*}(x) &= \varphi^*_{VAC} e^{i\alpha} = 0 \end{aligned}$$

De lo cual, se dice que, el vacío es invariante $U(1)$ global, tal como la acción.

Para $\mu^2 < 0$ vale la pena sumarle una constante a la acción y escribir;

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \lambda \left(\varphi^* \varphi - \nu^2\right)^2 \\ &= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + 2\lambda\nu^2 \varphi^* \varphi - \lambda \left(\varphi^* \varphi\right)^2 - \lambda \nu^4 \end{aligned}$$

Es invariante $U(1)$ global;

$$E = \int d^3x \left[\partial_t \varphi^* \partial_t \varphi + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \lambda \left(\varphi^* \varphi - \nu^2\right)^2\right] \tag{3.1.22}$$

[1] Se acostumbra llamar a la solución de enegía mínima como el vacío de la teoría.
[2] Se observan en la naturaleza.

En donde, φ_{VAC} es tal que $\varphi^*_{VAC}\varphi_{VAC} = \nu^2$.
Ahora, un vacío posible es;

$$\varphi(x) = \nu + 0i \tag{3.1.23}$$

Sin embargo, este vacío no es invariante bajo la simetría $U(1)$ global de la acción, pues;

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{VAC}(x) &= e^{-i\alpha}\varphi_{VAC}(x) \\ &= (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\nu + 0i) \\ &\cos\alpha\nu - i\sin\alpha \neq \nu + 0i = \varphi_{VAC}(x)\end{aligned}$$

Esto es el quiebre espontáneo de la simetría: La configuración de menor energía tiene menos simetría que la acción. Esto puede ser pensado como en física estadística, cuando la temperatura sobre una temporatura crítica, el parámetro de orden es cero $<\hat{n}>=0$, pero, bajo la temperatura crítica, este es diferente a cero $<\hat{n}>\neq 0$.

3.1.2. Teorema de Goldstone

Por cada simetría continua espontáneamente rota, aparece una partícula sin masa, esta partícula es llamada **Bosón de Goldstone**.
Consideramos el escalar complejo con simetría $U(1)$ global espontáneamente rota;

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - \lambda\left(\varphi^*\varphi - \nu^2\right)^2 \tag{3.1.24}$$

φ es un campo complejo;

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}e^{i\phi(x)} \tag{3.1.25}$$

Tal que las derivadas de este campo y su complejo conjugado serán;

$$\partial_\mu\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu e^{i\phi(x)} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi(x)e^{i\phi(x)} \tag{3.1.26}$$

$$\partial_\mu\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\rho e^{-i\phi(x)} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi(x)e^{-i\phi(x)} \tag{3.1.27}$$

Con lo cual, el Lagrangeano es tal que;

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \left(\frac{\partial_\mu\rho}{\sqrt{2}} + \frac{i\rho}{\sqrt{2}}\partial_\mu\phi(x)\right)\left(\frac{\partial^\mu\rho}{\sqrt{2}} - \frac{i\rho\partial^\mu\phi(x)}{\sqrt{2}}\right) - \lambda\left(\frac{\rho^2}{2} - \nu^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{\rho^2}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \lambda\left(\frac{\rho^2}{2} - \nu^2\right)^2\end{aligned}$$

Este corresponde al potencial de sombrero Mexicano, si tuvieramos un proyecto para experimentos, y no tenemos un súper gigante presupuesto, solo podríamos detectar un pedacito de esta teoría.
Por ello nos interesa ¿cómo luce esta teoría cerca del vacío?

$$\varphi(x) = \nu + \delta\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}e^{i\phi(x)} \Rightarrow \rho(x) = \sqrt{2}\nu + h(x), \quad h(x) \ll 1 \tag{3.1.28}$$

Por lo tanto, cerca del vacío;

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\nu + h(x)\right)^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2}\nu + h(x)\right)^2}{2} - \nu^2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \nu^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + c\sqrt{2}\nu h(x)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{h^2(x)}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\lambda}{2}\left(\sqrt{2}\nu h(x) + \frac{h^2(x)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu + \nu^2\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \lambda\nu^2h^2(x) + h(\partial\phi)^2 + h^2(\partial\phi)^2 + O(h^3)\end{aligned}$$

Ahora si;

$$\phi(x) = \frac{\xi(x)}{\sqrt{2}\nu} \Rightarrow \mathfrak{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \lambda \nu^2 h^2 + \dots \tag{3.1.29}$$

En donde el primer término es el hermano menor del campo de Higgs, el segundo es el campo de Goldstone y el resto serán términos de interacción.

3.2. Vigésimo octava clase

3.2.1. Quiebre espontáneo de simetría

Cuyo Lagrangeano es dado por;

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - \lambda \left(\varphi^* \varphi - \nu^2\right)^2 \tag{3.2.1}$$

Cuya simetría $U(1)$ es;

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = e^{i\alpha}\varphi, \quad \varphi^* \to \tilde{\varphi^*} = \varphi e^{i\alpha} \tag{3.2.2}$$

Recordemos que la energía asociada a la acción, o la componente 00 del tensor de densidad de energía-momento, está dada por;

$$E = \int d^3x \left(\partial_t \varphi^* \partial_t \varphi + \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \lambda \left(\varphi^* \varphi - \nu^2\right)^2\right) \tag{3.2.3}$$

Ahora, con $E \geq 0$ y $E = 0$, junto con $\varphi = C^{te}$, tal que;

$$\begin{aligned} \varphi^* \varphi &= \nu^2 \\ \varphi_{VAC} &= \nu \\ \tilde{\varphi}_{VAC} &= e^{i\alpha}\varphi_{VAC} \\ &= e^{-i\alpha}\nu \\ &= \cos\alpha\nu - \sin\alpha\nu \\ &\neq \nu = \varphi_{VAC} \end{aligned}$$

Por lo tanto;

$$\tilde{\varphi}_{VAC} \neq \varphi_{VAC} \tag{3.2.4}$$

Decimos que el vacío tiene menos simetría que la teoría; lo que corresponde a SSB (Spontaneous Symmetry Breaking) .
El potencial asociado a SSB es el potencial de sombrero Mexicano;

$$V(\varphi, \varphi^*) = \lambda \left(\varphi^* \varphi - \nu^2\right)^2 \tag{3.2.5}$$

HACER GRÁFICO DE ESTE POTENCIAL EN PYTHON.
Consideramos el campo complejo como (Teorema de Goldstone);

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} e^{i\xi(X)/\nu} \tag{3.2.6}$$

En donde la función $\rho(x)$;

$$\rho(x) = \sqrt{2}\nu + h(x), \quad h(x) \leftarrow \text{ Chico} \tag{3.2.7}$$

Cuando $h(x)$ es chico y despreciamos los términos de interacción;

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h(x) \partial^\mu h(x) - \lambda \nu^2 h^2(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu \xi(x) \partial^\mu \xi(x) \tag{3.2.8}$$

- El campo escalar $h(x)$ es un campo escalar con masa, o sea, campo de Higgs.

- Campo escalar sin masa $\xi(x)$, el cual es llamado el bosón de Goldstone.

Queremos dar cuenta de manera predictiva de la existencia de campos vectoriales masivos para describir la interacción débil;

$$\boxed{"A_\mu"}$$

Está prohibido el hacer lo siguiente;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \tag{3.2.9}$$

Ya que esta teoría acoplada a electrones no es renormalizable.

3.2.2. Modelo de Higgs abeliano

Se tiene la siguiente transformación de gauge;

$$A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu X(x) \tag{3.2.10}$$

Transfomación la cual deja invariante al tensor de Farday;

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu -_\nu A_\mu \tag{3.2.11}$$

La acción de Maxwell está dada por;

$$I_{Max} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.2.12}$$

La cual, al cuantizarse dará cuenta de los dos grados de libertad que corresponden a las dos polarizaciones del fotón que viaja a la rapidez de la luz, y esto implica que **los fotones tienen masa cero**.

Acoplamos Maxwell a un campo escalar complejo

Introducimos una derivada covariante de la forma;

$$_\mu\varphi \to D_\mu\varphi := \partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi \tag{3.2.13}$$

$$\partial_\mu\varphi^* \to (D_\mu\varphi)^* := \partial_\mu\varphi^* - ieA_\mu\varphi^* \tag{3.2.14}$$

Con lo cual, el Lagrangeano queda;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - V(\varphi^*\varphi) \tag{3.2.15}$$

Esta teoría es invariante bajo la siguiente transformación;

$$\begin{aligned} A_\mu \to \tilde{A}_\mu &= A_\mu + \partial_\mu X(x) \\ \varphi \to \tilde{\varphi}(x) &= e^{-i\alpha X(x)}\varphi(x) \\ \varphi^* \to (\varphi(x))^{*\,\prime} &= \varphi^*(x)e^{ieX(x)} \end{aligned}$$

Ahora, la derivada covariante;

$$\begin{aligned} (\tilde{D_{\mu\varphi}}) &= (\partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi)' \\ &= \partial_\mu\varphi' + ieA'_\mu\varphi' \\ &= \partial_\mu\left(e^{-ieX(x)}\varphi(x)\right) + ie\left(A_\mu + \partial_\mu X\right)e^{-ieX(x)}\varphi(x) \\ &= e^{ieX(x)}\left(\partial_\mu\varphi + ieA_\mu\varphi\right) \\ &= e^{-ieX(x)}\left(D_\mu\varphi\right) \end{aligned}$$

Queda de **tarea** calcular lo siguiente;

$$\left((D_\mu\varphi)^*\right)' = (D_\mu\varphi)^* e^{ieX(x)} \tag{3.2.16}$$

Así, el Lagrangenano bajo una transformación de gauge es;

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu\prime} + \left((D_\mu\varphi)^*\right)'(D_\mu\varphi)' - V(\varphi,\varphi^*) \\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^* e^{ieX(x)}e^{ieX(x)}e^{-ieX(x)}(D_\mu\varphi) - V(\varphi^*\varphi) \\
&= \mathfrak{L}
\end{aligned}$$

Ahora el potencial es tal que rompe la simetría global;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - \lambda\left(\varphi^*\varphi - \nu^2\right)^2 \tag{3.2.17}$$

Cuya energía está dada por;

$$E = \int d^3\left[|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2 + f(A_\mu,\varphi) + \partial_t\varphi^*\partial_t\varphi + \nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi + \lambda\left(\varphi^*\varphi - \nu^2\right)^2\right] \tag{3.2.18}$$

Para lo cual la energía siempre será positiva, $E \geq 0$, y será $E = 0$ si $A_\mu = 0$ y además $\varphi^*\varphi = \nu^2$, con $\varphi = C^{te}$, o sea;

$$\begin{aligned}
A_\mu^{VAC} &= 0 \\
\varphi_{VAC} &= \nu
\end{aligned}$$

Y además φ tiene un valor de expectación en el vacío V.E.V [3]
¿Cómo conduce esta teoría acoplada al campo $U(1)$ cuando estamos cerca del vacío?

$$\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu \\
\varphi &\rightarrow \varphi' = e^{-i\alpha}\varphi \\
\varphi^* &\rightarrow \varphi^{*\prime} = \varphi^* e^{i\alpha}
\end{aligned}$$

El campo complejo φ será de la siguiente forma,

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}e^{i\phi(x)} \tag{3.2.19}$$

Lo cual aplicamos en las transformaciones;

$$\begin{aligned}
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu X(x) \\
\varphi &\rightarrow' = e^{-ieX(x)} \\
\varphi &\rightarrow * = \varphi \\
\varphi &\rightarrow \varphi'^* = \varphi^* e^{ieX(x)}
\end{aligned}$$

En donde se ha usado la invariancia de $U(1)$ local. Tal que el campo φ está dado por;

$$\varphi = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \tag{3.2.20}$$

Lo que corresponde a una transformación de gauge con;

$$X(x) = -\frac{\phi(x)}{e} \tag{3.2.21}$$

[3] Con sus siglas en inglés Vacuum Expectation Value

Ahora, el Lagrangeano está dado por;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \rho - ieA_\mu \rho\right)\left(\partial^\mu \rho + ieA^\mu \rho\right) - \frac{\lambda}{4}\left(\frac{\rho^2}{2} - \nu^2\right)^2 \tag{3.2.22}$$

El campo de gauge se comío al bosón de Goldstone.

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{e^2}{2}\rho^2 A_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{16}\left(\rho^2 - \nu^2\right)^2 \tag{3.2.23}$$

Expandamos aldededor del vacío dejando términos hasta antes de cuadráticos en los campos;

$$\rho_{VAC} = \sqrt{2}\nu$$
$$\rho(x) = \rho_{VAC} + h(x)$$

Con lo cual;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{e^2}{2}\left(\sqrt{2}\nu + h(x)\right)^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{16}\left[\left(\sqrt{2}\nu + h(x)\right)^2 - 2\nu^2\right]^2 \tag{3.2.24}$$

Ahora expandimos hasta el término cuártico;

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h + e^2\nu^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda\nu^2}{2}h^2(x) + e^2\sqrt{2}h(x)A_\mu A^\mu - \lambda\frac{\sqrt{2}}{4}\nu h(x)^3 + O(4) \tag{3.2.25}$$

Todos los parámetros en esta teoría dependen solo de 3 constantes, e, ν, λ. Lo que puede significar que hay más simetrías asociadas a la acción del sistema.
Contemos los grados de libertad;

- Inicialmente: 2 polarizaciones del fotón + 2 campos escalares reales.
- Final: 3 grados de libertad campo vectorial masivo + 1 escalar real.

Grados de libertad de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$
$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu X(x)$$
$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$$

Para lo cual tenemos la siguiente trasformada de Fourier;

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^4 e^{ik_\alpha x^\alpha}\tilde{A}^\mu(k) \tag{3.2.26}$$

Aplicamos la transformdada de Fourier a última ecuación;

$$\int \frac{d^4}{(2\pi)^n}e^{ik_\alpha x^\alpha}\left[\left(-ik_\alpha\right)\left(-ik^\alpha\right)\tilde{A}^\nu(k) - \left(-ik_\alpha\right)\left(-ik^\nu\right)\tilde{A}^\alpha(k)\right] = 0$$
$$-k_\alpha k^\alpha \tilde{A}^\nu + k_\alpha k^\nu \tilde{A}^\alpha(k) = 0$$

3.3. Vigésima novena clase

3.3.1. Mecanismo de Higgs no abeliano

El grupo de Gauge del modelo estándar es;

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_y \tag{3.3.1}$$

En donde;

- c : Color.
- L : Left.
- Y : Hypercarga.

Teoría de Gauge para SU(N)

Sea un campo spinorial;

$$\psi \to \psi' = U(c)\psi, \quad U^\dagger U = I, \quad det(U) = \pm 1 \tag{3.3.2}$$

Asumamos que $U(x)$ vive en la representación fundamental de $SU(N)$ y ψ transforma en la representación fundamental de $SU(N)$.

- $SU(2)$:
$$U(x) = e^{i\alpha_A(x)T_A} \tag{3.3.3}$$
con $T_A = \frac{\sigma_A}{2}$ y $A = 1, 2, 3$.
- $SU(3)$:
$$U(x) = e^{-i\alpha_A(x)T_A} \tag{3.3.4}$$
con $T_A = \frac{\lambda_A}{2}$ y $A = 1, \dots, 8$, λ_A son las matrices de Gellmann.

En el caso de $SU(2)$;

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= \bar{\psi}_1 i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 \\ &= \bar{\Psi}_1 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi} = \left(\psi_1^\dagger \gamma^0, \psi_2^\dagger \gamma^0]\right) &= (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger)\gamma^0 \\ &= \left(\psi_1^\dagger \gamma^0, \gamma_2^\dagger \gamma^0\right) \begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_1 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Los índices spinoriales están escondidos.
Se introduce, además un campo de gauge no abeliano que permitirá que los campos spinoriales se hablen;

$$\begin{aligned}\partial_\mu \Psi \to D_\mu \Psi &= \partial_\mu \Psi + i g_{YM} A_\mu \Psi \\ A_\mu = A_\mu^A T_A &\overset{SU(2)}{=} A_\mu^A \frac{\sigma_A}{2}\end{aligned}$$

Con A_μ una conexión de gauge, o también llamado campo de Gauge no abeliano, y g_{YM} es la constante de acoplamiento de Yang-Mills.
En $SU(2)$ el doblete transforma como;

$$\begin{aligned}\Psi' &= e^{-i\alpha_A(x)\frac{\sigma_A}{2}}\Psi, \quad \text{finita} \\ &= \left(I - i\alpha_A(x)\frac{\sigma_A}{2}\right)\Psi, \quad \text{infinitesimal}\end{aligned}$$

$$\Psi' - \Psi = \delta\Psi = -i\alpha_A(x)\frac{A}{2}\Psi$$

$$\Rightarrow \delta\Psi = \left[i\frac{\alpha_1(x)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - i\frac{\alpha_2(x)}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} i\frac{\alpha_3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\frac{\alpha_2}{2} & i\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{i\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} & i\frac{\alpha_3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual;

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_1 &= -\frac{i\alpha_3}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\left(i\alpha_1 + \alpha_2\right)\psi_2 \\
\delta\psi_2 &= \frac{1}{2}\left(-i\alpha_1 + \alpha_2\right)\psi_1 + \frac{i\alpha_3}{2}\psi_2
\end{aligned}
$$

Necesitamos imponer que bajo la transformación local;

$$
\Psi\Psi' = U(x)\Psi \tag{3.3.5}
$$

La derivada covariante transforme;

$$
\left(D_\mu\Psi\right) \to \left(D_\mu\Psi\right)' = U(x)\left(D_\mu\Psi\right) \tag{3.3.6}
$$

Pues en este caso;

$$
\mathfrak{L}' = \bar{\Psi}' i\gamma^\mu \left(D_\mu\Psi\right)'
$$

Pero, ¿Cómo transforma $\bar{\Psi}'$?;

$$
\begin{aligned}
\bar{\Psi}' &= \left(\Psi^\dagger\gamma^0\right) \\
&= \left(U\Psi\right)^\dagger\gamma^0 \\
&= \Psi^\dagger U^\dagger\gamma^0 \\
&= \Psi^\dagger\gamma^0 U^\dagger \\
&= \bar{\Psi}U^\dagger \\
&= \bar{\Psi}U^{-1}
\end{aligned}
$$

con lo cual seguimos;

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\Psi}U^{-1}(x) i\gamma^\mu\left(D_\mu\Psi\right) \\
&= \Psi i\gamma^\mu D_\mu\Psi
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la acción es invariante de Gauge.
Se le llama acoplamiento minimal a;

$$
\partial_\mu\Psi \to D_\mu\Psi := \partial_\mu\Psi + ig_{YM}A_\mu\Psi \tag{3.3.7}
$$

Imponemos;

$$
\begin{aligned}
\left(D_\mu\Psi\right)' &= U(x)\left(D_\mu\Psi\right) \\
\left(\partial_\mu\Psi + ig_{YM}\Psi\right)' &= U\left(\partial_\mu\Psi + ig_{YM}A_\mu\Psi\right) \\
\partial_\mu\Psi' + ig_{YM}A'_\mu\Psi' &= U\partial_\mu\Psi + ig_{YM}UA_\mu\Psi \\
\partial_\mu U\Psi + U\partial_\mu\Psi + ig_{YM}A'_\mu U\Psi &= U\partial_\mu\Psi + ig_{YM}UA_\mu\Psi
\end{aligned}
$$

Esto debe ser válido para todo Ψ.

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu U + ig_{YM}A'_\mu U &= ig_{YM}A_\mu \\
A'_\mu U &= UA_\mu - \frac{i}{g_{YM}}\partial_\mu U \\
A'_\mu &= UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g_{YM}}\partial_\mu U U^{-1}
\end{aligned}
$$

Lo que es similar a como uno encuentra las derivadas covariantes asociadas a cómo transforman las conexiones de un manifold.
Las conexiones transforman como;

$$
\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} = \partial_\alpha\tilde{x}^\mu\partial_{\tilde{\nu}}x^\beta\partial_{\tilde{\lambda}}x^\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \left(\partial^2_{\tilde{x}\tilde{x}}x\partial_x\tilde{x}\right) \tag{3.3.8}
$$

De lo cual se define una derivada covariante como;

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\tilde{\mu}} A_{\tilde{\beta}}) &:= \partial_{\tilde{\mu}} x^{\alpha} \partial_{\tilde{\beta}} x^{\delta} \nabla_{\alpha} A_{\delta} \\
\nabla_{\alpha} A_{\delta} &:= \partial_{\mu} A_{\delta} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\delta} A_{\sigma}
\end{aligned}
$$

La conexión de gauge transforma en la adjunta del grupo global.
Consideramos la transformación de A_μ, bajo el grupo global;

$$
\begin{aligned}
U(x) = U, \quad U^{-1} = U^{\dagger} = e^{i\alpha_A T_A} \\
A'_{\mu} &= U A_{\mu} U^{-1} \\
&= e^{-i\alpha_A T_A} A_{\mu} e^{i\alpha_B T_B} \\
&= (I - i\alpha_A T_A)\, A_{\mu}\, (I + i\alpha_B T_B)
\end{aligned}
$$

Ahora si hacemos Taylor a primer orden en los alpha;

$$
\begin{aligned}
A'_{\mu} &= A_{\mu} - i\alpha_A T_A A_{\mu} + A_{\mu} i\alpha_A T_A + \mathcal{O}(\alpha^2) \\
A'_{\mu} - A_{\mu} = \delta A_{\mu} &= -i\alpha_A \left[T_A, A_{\mu}\right] \\
&= -i\alpha_A \left[T_A, A^B_{\mu} T_B\right] \\
&= -i\alpha_A A^B_{\mu} \left[T_A, T_B\right] \\
&= -i\alpha_A A^B_{\mu} \left(i f_{ABC} T_C\right) \\
\delta A_{\mu} = \delta A^C_{\mu} T_C &= -i\alpha_A A^B_{\mu} i f_{ABC} T_C \\
\delta A^C_{\mu} &= -i\alpha_A A^B_{\mu} i f_{ABC} \\
\delta A^C_{=} - i\alpha_A \left(T_A\right) A^B_{\mu} \\
(T_A)_{CB} = i f_{ABC}
\end{aligned}
$$

Notemos que;

$$
(T_A)_{CB}(T_D)_{BE} - (T_D)_{CB}(T_A)_{BE} = i f_{ADP}(T_P)_{CE} \tag{3.3.9}
$$

con lo cual, $(T_A)_{CB} = i f_{ABC}$ forman una representación del álgebra.

$$
[T_A, T_B] = i f_{ABC} T_C \tag{3.3.10}
$$

¿Cómo se acopla un doblete de escalares de $SU(2)$ a la conexión de gauge?

$$
\vec{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.3.11}
$$

Con $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son campos escalares complejos. Asumamos que transforman en la representación fundamental de $SU(2)$.
Bajo $SU(2)$ local;

$$
\begin{aligned}
\vec{\Phi}(x) \to \vec{\Phi}(x)' = U\vec{\Phi}(x) \\
\to U = e^{-i\alpha_A(x)\frac{\sigma_A}{2}}
\end{aligned}
$$

Con lo cual, la densidad Lagrangeana;

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \partial_{\mu}\varphi_1^* \partial^{\mu}\varphi_1 + \partial_{\mu}\varphi_2^* \partial^{\mu}\varphi_2 \\
&= \partial_{\mu}\vec{\Phi}^{\dagger}\partial^{\mu}\vec{\Phi} = \partial_{\mu}\left(\varphi_1^*, \varphi_2^*\right)\partial^{\mu} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, se tienen las siguientes derivadas covariantes;

$$
\partial_{\mu}
$$

3.4. Trigésima clase

Tenemos el doblete de campo escalar;

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \tag{3.4.1}$$

En donde, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}$, tal que;

$$\vec{\Phi}(x) \to \vec{\Phi}(x)' = U(x)\Phi(x), \quad U(x) \in SU(2) \text{ Fundamental} \tag{3.4.2}$$

Se define la derivada covairante como;

$$D_\mu \vec{\Phi} = \partial_\mu \vec{\Phi} + g_{YM} A_\mu^A T_A \vec{\Phi} \tag{3.4.3}$$

En donde las matrices $T_A = \frac{\sigma_A}{2}$ Si:

$$A_\mu A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g_{YM}} \partial_\mu U U^{-1} \tag{3.4.4}$$

Entonces;

$$D_\mu \vec{\Phi} \to \left(D_\mu \vec{\Phi}\right)' = U \left(D_\mu \vec{\Phi}\right) \tag{3.4.5}$$

Ahora para;

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^\dagger &= \partial_\mu \Phi^\dagger - i g_{YM} \Phi^\dagger A_\mu^A T_A \\ (D_\mu \Phi)^\dagger \to (D_\mu \Phi)^{\dagger\,\prime} &= (D_\mu \Phi)\, U^{-1} \end{aligned}$$

Luego, el Lagrangeano;

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) \\ &= \left(\partial_\mu \Phi^\dagger - i g_{YM} A_\mu\right)(\partial^\mu \Phi + i g_{YM} A^\mu \Phi) \\ &= \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + i g_{YM} \left[\partial_\mu \Phi^\dagger A^\mu \Phi - \Phi^\dagger A_\mu \partial^\mu \Phi\right] + g_{YM}^2 \Phi^\dagger A_\mu A^\mu \Phi \end{aligned}$$

El primer término del Lagrangeano es del tipo, $\partial_\mu \varphi_1^* \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^* \partial^\mu \varphi_2$. Luego, el segundo término es algo más complicado.

3.4.1. Field strengh no-abeliano:

Hacemos la cuenta del conmutador de las derivadas covariantes sobre un Φ;

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\, \Phi &= D_\mu (D_\nu \Phi) - D_\nu (D_\mu \Phi) \\ &= \partial_\mu (D_\nu \Phi) + i g_{YM} A_\mu D_\nu \Phi - (\nu \leftrightarrow \mu) \\ &= \partial_\mu (\partial_\nu \Phi + i g_{YM} A_\nu \Phi) + i g_{YM} A_\mu (\partial_\nu \Phi + i g_{YM} A_\nu \Phi) - (\nu \leftrightarrow \mu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \Phi + i g_{YM} \partial_\mu A_\nu \Phi + i g_{YM} A_\nu \partial_\mu \Phi + i g_{YM} A_\mu \partial_\nu \Phi - g_{YM}^2 A_\mu A_\nu \Phi \\ &- \partial_\nu \partial_\mu \Phi - i g_{YM} \partial_\nu A_\mu \Phi - i g_{YM} A_\mu \partial_\nu \Phi - i g_{YM} A_\nu \partial_\mu \Phi + g_{YM}^2 A_\nu A_\mu \Phi \end{aligned}$$

Con lo cual , después de cancelar los términos;

$$[D_\mu, D_\nu]\, \Phi = i g_{YM} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g_{YM} (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\right) \Phi$$

El tensor de Field strengh está dado por;

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + i g_{YM} [A_\mu, A_\nu] \tag{3.4.6}$$

Tal que el conmutador de las derivadas covariantes;

$$[D_\mu, D_\nu]\,\Phi = ig_{YM} F_{\mu\nu}\Phi, \quad A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g_{YM}}\partial_\mu U U^{-1} \tag{3.4.7}$$

Y el tensor de Field strengh;

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_{A'_\mu} + ig_{YM}\left[A'_\mu, A'_\nu\right] = UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{3.4.8}$$

Con lo cual, el conmutador de derivadas covariantes actuando sobre el doblete transforman como;

$$\begin{aligned}
([D_\mu, D_\nu]\,\Phi)' &= +ig_{YM}F'_{\mu\nu}\Phi \\
U\,[D_\mu, D_\nu]\,\Phi &= ig_{YM}F'_\mu U\Phi \\
Uig_{YM}F_\mu\Phi &= ig_{YM}F_{\mu\nu}U\Phi
\end{aligned}$$

Si Φ es arbitrario;

$$UF_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}U^1, \quad /U^{-1}F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{3.4.9}$$

¿ Cómo construyo la acción de Yang-Mills que dará la dinámica a A_μ?

$$I_{YM}[A^A_\mu] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right) \tag{3.4.10}$$

Lo que, bajo la transformació del grupo $SU(N)$;

$$\begin{aligned}
I_{YM}[A] &= -\frac{1}{2}\int d^4x tr\left(F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x tr\left(UF_{\mu\nu}U^{-1}UF^{\mu\nu}U^{-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \\
I_{YM}[A]
\end{aligned}$$

Si escribimos el Field strengh tensor en función de los generadores del grupo;

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^C_\nu T_C - \partial_\nu A^C_\mu T_C + ig_{YM}\left[A^A_\mu T_A, A^B_\nu T_B\right] \\
&= \partial_\mu A^C_\nu T_C - \partial_\nu A^C_\mu T_C + ig_{YM}A^A_\mu A^B_\nu\left[T_A, T_B\right] \\
&= \left(\partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - g_{YM}f_{ABC}A^A_\mu A^B_\nu\right)T_C = F_{\mu\nu}T_C
\end{aligned}$$

Con lo cual podemos escribir;

$$F^C_{\mu\nu} = \partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - g_{YM}f_{ABC}A^A_\mu A^B_\nu \tag{3.4.11}$$

¿ Como luce la acción de Yang-Mills en términos de las componentes de $F_{\mu\nu}$, es decir, en términos de los $F^C_{\mu\nu}$?

$$\begin{aligned}
I\left[A^A_\mu\right] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\; tr\left(F^A_{\mu\nu}T_A F^{\mu\nu}_B T_B\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_B\; tr\left(T_A T_B\right)
\end{aligned}$$

Ahora;

$$\begin{aligned}
SU(2),\ T_A = \frac{\sigma_A}{2} &\Rightarrow tr\left(T_A T_B\right) = \frac{\delta_{AB}}{2} \\
SU(3),\ T_A = \frac{\lambda_A}{2} &\Rightarrow tr\left(T_A T_B\right) = \frac{\delta_{AB}}{2}
\end{aligned}$$

Es decir, en $SU(2)$ y en $SU(3)$ tenemos que;

$$I[A^A_\mu] = -\frac{1}{4}\int d^4x \left[F_{(1)\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(1)} + F_{(2)\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(2)} + F_{(3)\mu\nu}F^{\mu\nu}_{(3)} + \dots\right] \tag{3.4.12}$$

Para $SU(2)$;

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^{(1)}_\nu - \partial_\nu A^{(1)}_\nu - g_{YM} e_{AB1} A^A_\mu A^B_\nu \\ &= \partial_\mu A^{(1)}_\nu - \partial_\nu A^{(1)}_\nu - g_{YM}\,(-1)\, A^{(3)}_\mu A^{(2)}_\nu - g_{YM}\,(+1)\, A^{(2)}_\mu A^{(3)}_\nu \end{aligned}$$

Recordemos que, el grupo de Gauge del modelo estándar;

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_\gamma \tag{3.4.13}$$

En donde;

- $SU(3)$ es el sector de QCD.
- $SU(2) \times U(1)$ es el sector electrodébil.

3.4.2. QCD

En el modelo estándar, los quark son las partículas fundamentales que sienten la interacción fuerte. Cada quark transforma en la representación fundamental de $SU(3)$. Tal que la acción de QCD será;

$$\begin{aligned} I_{QCD} &= I_{YM}(SU(3)) + I_{\text{Dirac}}\,(\partial \to D) \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x F^A_{\mu\nu} F_{A\mu\nu} + \int d^4\bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi \\ D_\mu\Psi &= \partial_\mu\Psi + ig_s\mathbb{A}\Psi, \text{Yang-Mills} \to \text{Strong}, \quad \mathbb{A}_\mu = A^A_\nu T_A = A^A_\mu \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_b \\ u_r \\ u_g \end{pmatrix}, \quad \text{3 colores} \tag{3.4.14}$$

Existen en la naturaleza 6 quarks: up, down, strange, charmed, bottom, up. Cada uno de ellos está descrito por un spinor de Dirac

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6 \tag{3.4.15}$$

Y se dice que los quak vienen en 6 sabores=flavor.

$$I_{QCD} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{A\mu\nu}F^{A\mu\nu} + \int d^4x \sum_{j=1}^{6} \bar{\Psi}_j i\gamma^\mu \left(\mathbb{I}_3\partial_\mu + ig_s A^B_\mu \frac{\lambda}{2}\right)\Psi_j \tag{3.4.16}$$

De esta acción, debiera ser posible obtener la masa del protón y el neutrón, ya que estos son estados discretizados de quarks, esto y más efectos cuánticos, sin embargo, nadie sabe hacerlo analíticamenDe esta acción, debiera ser posible obtener la masa del protón y el neutrón, ya que estos son estados discretizados de quarks, esto y más efectos cuánticos, sin embargo, nadie sabe hacerlo analíticamente.

3.5. Trigésima primera clase

Se observa en la naturaleza que la interacción electromagnética es mediada por campos vectoriales sin masa, cuyos quanta son los fotones.

$$m_\gamma < \text{algo} \tag{3.5.1}$$

Se oberva en la naturaleza que la interacción débil es mediada por campos vectoriales con masa, dos de ellos con carga eléctrica y uno neutro:

$$m_{z^0} \approx 91[\text{GeV}] \tag{3.5.2}$$
$$m_{W^\pm} \approx 80[\text{GeV}] \tag{3.5.3}$$

La descripcción conjunta de estas dos afirmaciones recive el nombre de sector electrodébil.
Podríamos argumentar que el sector electrodébil está compuesto por dos teorías de Gauge, una para $U(1)_{EM}$ y una segunda teoría de Gauge para $SU(2)_{Weak}$[4] más mecanismo de Higgs en este segundo sector.
Esta propuesta lleva a una partícula sin masa y 3 partículas masivas neutras, y con la misma masa.
Esto está constantemente en tensió con la afirmación en la cual necesitamos dos partículas con la misma masa y cargadas, más una neutra y con maasa distinta.

3.5.1. Doblete de Higgs

El modelo que describe apropiadamente las dos afimaciones está basado en el grupo;

$$U(1) \times SU(2) \tag{3.5.4}$$

Notar que el $U(1)$ que se menciona, no es el del electromagnetismo.

- $U(1)$: Hypercarga.
- $SU(2)$: Left.

Más mecanismo de Higgs para $SU(2)_L$. El modelo final [5], luego de qiebre espontáneo de la simetría tiene invariancia;

$$U(1)_{EM} \rightarrow \text{ Fotón} \tag{3.5.5}$$

más $w^\pm_\mu$ campos vectoriales cargados y un campo z^0 neutro.
Consideremos una teoría de Gauge para;

$$SU(2)_L \times U(1) \tag{3.5.6}$$

y un campo de Higgs en la fundamental de $SU(2)$ con Hypercarga 1/2. Los campos son;

$$SU(2) \quad W_\mu = W^A_\mu T_A, \quad T_A \ : \text{ Generadores de } SU(2),\ A = 1,2,3. \tag{3.5.7}$$

y el otro campo;

$$U(1)_Y \quad B_\mu \tag{3.5.8}$$

Con un doblete de Higgs;

$$H(x) = \begin{pmatrix} H^+(x) \\ H^o(X) \end{pmatrix}, \quad H^{+0}(x) \in \mathbb{C} \tag{3.5.9}$$

E introducimos los números cuánticos en el modelo estádar del campo de Higgs:

$$(1, 2, 1/2) \tag{3.5.10}$$

Para la cual (1) correpsonde a la transformación trivial de $SU(3)_c$, o sea que;

$$g(x) = e^{-i\alpha^A(x)\mathbb{T}_A}, \quad [\mathbb{T}_A, \mathbb{T}_B] = if_{ABC}\mathbb{T}_C \tag{3.5.11}$$

Con lo cual, el doblete de Higgs no sentírá $SU(3)_c$ o que sería como si, al transformar en $SU(3)_c$, al campo de Higgs le pega con una identidad.

[4]Recordemos que en $SU(2)$ hay tantos campos de Gauge como hay generadores.
[5]En el modelo, el grupo $U(1)$ tendrá un generador que es combinación lineal del generador de $U(1)_{Hy}$ con el tercer generador de $SU(2)$.

El 2, en los números cuánticos de Higgs trasnforma en la representación fundamental de $SU(2)_L$. El campo de Higgs se hablará con el campo de Gauge por medio de la derivada covariante. La cual está dada por;

$$D_\mu = \partial_\mu H + ig_{SU(3)_c} C^a_\mu \mathbb{T}_a H + ig_{SU(2)_L} W^A_\mu \frac{\sigma_A}{2} H + ig_{U(1)_Y} \frac{1}{2} B_\mu H, \quad A = 1, 2, 3 \tag{3.5.12}$$

En donde $\mathbb{T}_a$ son los 8 generadores de $SU(3)_c$ que en la representación trivial, la que siente Higgs, son;

$$\mathbb{T}_a = 0 \tag{3.5.13}$$

Con lo cual la derivada covariante del campo de Higgs es;

$$D_\mu H = \partial_\mu H + igW^A_\mu \frac{\sigma_A}{2} H + ig' \frac{1}{2} B_\mu H \tag{3.5.14}$$

Queda de tarea demostrar que en efecto, esta derivada es covariante, es decir;

- Bajo

$$H(x) \to \tilde{H}(x) = U(x)H(x)$$

  y hago;

$$\begin{aligned} W_\mu \to \tilde{W}_\mu = U(x)W_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu U(x)U^{-1}(x) \\ B_\mu \to \tilde{B}_\mu = B_\mu \end{aligned}$$

  Entonces;

$$D_\mu H \to \tilde{D_\mu} H = U(x) D_\mu H \tag{3.5.15}$$

- Bajo;

$$\begin{aligned} H(x) \to \tilde{H}(x) = e^{i\alpha_A \frac{g'}{2}} \\ W_\mu \to \tilde{W}_\mu = W_\mu \\ B_\mu \to \tilde{B}_\mu = B_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned}$$

  Entonces;

$$D_\mu H \to \tilde{D_\mu} H = e^{i\alpha_A \frac{g'}{2}} D_\mu H \tag{3.5.16}$$

Ahora tomamos la transformación del doblete de Higgs bajo $U(1)_y$ tal que;

$$\begin{aligned} D_\mu \tilde{H} &= \partial_\mu \tilde{H} + ig_{YM} W_\mu \tilde{H} + i\frac{1}{2} g_y \tilde{B}_\mu \tilde{H} \\ &= \partial_\mu \left(e^{-\frac{i}{2}\alpha(x)} \tilde{H} \right) + i\frac{1}{2} g_y \left(B_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \right) \left(e^{-\frac{i}{2}\alpha(x)} H \right) + ig_{YM} W_\mu e^{-\frac{i}{2} g_y \alpha(x)} H \\ &= -i\frac{g_y}{2} e^{-\frac{i}{2}} \partial_\mu \alpha(x) + e^{-\frac{i}{2}\alpha(x)} \partial_\mu H + i\frac{1}{2} g_y B_\mu e^{-i\frac{g_y}{2}\alpha(x)} H + i\frac{1}{2} g_y \partial_\mu \alpha(x) e^{-i\frac{g_y}{2}\alpha(x)} H + ig_{YM} W_\mu e^{-i\frac{g_y}{2}\alpha(x)} H \\ &= e^{-i\frac{g_y}{2}\alpha(x)} \left(\partial_\mu H + ig_{YM} W_\mu H + i\frac{g_y}{2} B_\mu \right) \\ &= e^{-i\frac{g_y}{2}\alpha(x)} D_\mu H \end{aligned}$$

El hermítico conjugado de la derivada covariante transforma como;

$$\begin{aligned} (D_\mu H)^\dagger &= \partial_\mu H^\dagger - ig_{YM} H^\dagger W_\mu - i\frac{g_y}{2} B_\mu H^\dagger \\ (D_\mu H)^\dagger \to (D_\mu H)^{\dagger\,\prime} &= \left(\partial_\mu H^\dagger - ig_{YM} H^\dagger W_\mu + i\frac{g_y}{2} B_\mu H^\dagger \right)' \\ &= D_\mu H^\dagger e^{i\frac{g_y}{2}\alpha(x)} \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos escribir la acción de Yang-Mills para un campo de Guauge $SU(2)$ acoplado a un doblete en la representación fundamental de $SU(2)$, y con una hypercarga de $+\frac{1}{2}$, con un potencial de Higgs;

$$I_{YM} = \int d^4x \; -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A + (D_\mu H)^\dagger D_\mu H - \lambda \left(H^\dagger H\right)^2 + \mu^2 H^\dagger H \tag{3.5.17}$$

En donde podemos notar que, como la conexión de Yang-Mills la hemos escalar o por su constante de acoplamiento g_{YM}, entonces

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4g^2_{YM}}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A \to -\frac{1}{4}F^A_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_A \tag{3.5.18}$$

En donde el tensor de Faraday generalizado, o de field strenght;

$$F^C_{\mu\nu} = \partial_\mu A^C_\nu - \partial_\nu A^C_\mu - g_{YM}e_{ABC}A^A_\mu A^B_\nu \tag{3.5.19}$$

Similarmente, el tensor asociado al campo B_μ es;

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{3.5.20}$$

3.6. Trigésima segunda clase

Teoría de Gauge para;

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \tag{3.6.1}$$

Con un campo de Higgs que transforma en la fundamental de $SU(2)$; dicho campo de Higgs es un doblete de campos escalares complejos;

$$H = \begin{pmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{pmatrix} \tag{3.6.2}$$

Al cual se le asocian 3 números cuánticos;

- **1** : Transforma en la representación trivial de $SU(3)_C$, o sea que los gluones no interactúan con el Higgs.
- **2** Transfomra en la representación fundamental de $SU(2)_L$.
- 1/2 : Está asociado con la hypercarga y el grupo $U(1)_Y$

Bajo esto, a la transformación bajo el grupo de $U(1)_Y$ se le asocia el campo de Gauge B_μ, tal que su término término cinétio está dado por;

$$B_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{3.6.3}$$

Además, a la transformación del grupo $SU(2)_L$ se le asocia el campo de Gauge que depende de los generadores de la representación fundamental del grupo;

$$W_\mu = W^A_\mu T_A, \quad T_A : \text{generadores de } SU(2)_L \tag{3.6.4}$$

El campo de Higgs, se habla con los campos de Gauge via la derivada covariante;

$$D_\mu H = \partial_\mu H + ig_{YM}W^A_\mu \frac{\sigma_A}{2}H + ig_y\frac{1}{2}B_\mu H \tag{3.6.5}$$

A lo cual, la conexión asociada a $U(1)_y$ transforma como;

$$B_\mu \to \tilde{B}_\mu = B_\mu + \partial_\mu \alpha(x) \tag{3.6.6}$$

Y el doblete de Higgs transforma como;

$$H(x) \to \tilde{H}(x) = e^{-i\frac{g_y}{2}\alpha(x)}H(x) \tag{3.6.7}$$

transformación que deja invariante la conexión asociada al grupo de $SU(2)_L$;

$$W_\mu^A \to \tilde{W}_\mu^A = W_\mu^A(x) \tag{3.6.8}$$

Tal que, la derivada covariante, transformando bajo el grupo $U(1)_y$;

$$\tilde{D_\mu H} := \partial_\mu \tilde{H} + i g_{YM} \tilde{W}_\mu^A \frac{\sigma_A}{2} \tilde{H} + i g_y \frac{1}{2} \tilde{B}_\mu \tilde{H} = e^{-i g_y \frac{1}{2}\alpha(x)} \left(D_\mu H\right) \tag{3.6.9}$$

Luego, la transformación bajo la representación fundamental del grupo $SU(2)_L$, la conexión B_μ no se ve afectada bajo esta transformación;

$$B_\mu \to \tilde{B}_\mu(x) = B_\mu(x) \tag{3.6.10}$$

El campo de Higgs en doblete;

$$H(x) \to \tilde{H}(x) = U(x)H(x) \tag{3.6.11}$$

La conexión asociada a $SU(2)$ transforma como;

$$\mathbb{W}_\mu \to= \tilde{\mathbb{W}}_\mu(x) = U(x)\mathbb{W}_\mu(x)U^1(x) + \frac{i}{g_{YM}} \partial_\mu U(x) U^{-1}(x). \tag{3.6.12}$$

Tal que la derivada covariante transforma, bajo $SU(2)_L$ en su representación fundamental;

$$\tilde{D_\mu H} = U(x)\left(D_\mu H\right) \tag{3.6.13}$$

3.6.1. Lagrangeano en el sector electrodébil sin fermiones

El Lagrangeano del sector electrodébil del modelo estándar, bajo la convención $(+,-,-,-)$ es (fin feriomes);

$$\mathfrak{L} = \left(D_\mu H\right)^\dagger \left(D_\mu H\right) - \frac{1}{2} tr\left(\mathbb{W}_{\mu\nu}\mathbb{W}_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - V(H) \tag{3.6.14}$$

Con el potencial de Higgs;

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda \left(H^\dagger H\right)^2 \tag{3.6.15}$$

En donde la derivada covariate está dad por;

$$D_\mu H = \partial_\mu H + i\frac{g_{YM}}{2}\mathbb{W} + i g_y \frac{1}{2} B_\mu H \tag{3.6.16}$$

Y si hermítico conjugado;

$$\left(D_\mu H\right)^\dagger = \partial_\mu H^\dagger - i g_Y W_\mu^A H^\dagger \frac{\sigma_A}{2} - i g_y \frac{1}{2} H^\dagger B_\mu \tag{3.6.17}$$

Con lo cual esta teoría es invariante local bajo;

$$SU(2)_L \times U(1)_y \tag{3.6.18}$$

En $SU(2)_L$;

$$\begin{aligned}\tilde{H}^\dagger \tilde{H} &= \left(U(x)H\right)^\dagger \left(U(x)H\right)\\ &= H^\dagger U^\dagger U H = H^\dagger H\end{aligned}$$

y en $U(1)_y$;

$$\tilde{H}^\dagger \tilde{H} = \left(e^{-i\alpha(x)\frac{g_y}{2}} H\right)^\dagger \left(e^{-i\alpha(x)\frac{g_y}{2}} H\right) = H^\dagger H$$

3.6.2. Mecanismo de Higgs

Para una función;

$$f(x) = -\mu^2 x + \lambda x^2 \tag{3.6.19}$$

tal que su derivada es;

$$f'(x) = -\mu^2 + 2\lambda x \tag{3.6.20}$$

Tal que el x mínimo estará dado por;

$$x_{min} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{3.6.21}$$

En el caso abelian o el potencial es del tipo sombrero mexicano;

$$V(\phi,\phi^*) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda\left(\phi^*\phi\right)^2 \tag{3.6.22}$$

Con $\phi = \nu$ y $\phi^*\phi = \nu^2$ El mínimo del potencial de Higgs no-abeliano está en;

$$H^\dagger H = \frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{3.6.23}$$

Los vacíos posibles de la teoría, que minimizan el potecial de Higgs, serán configuraciones de H constantes, tal que, un H tal es;

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \text{con } \nu = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{3.6.24}$$

Así, término por sus componentes;

$$\begin{aligned} H^\dagger H &= \frac{1}{2}(0\ ,\ \nu)\begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\nu^2}{\lambda} \end{aligned}$$

Lo que concuerda con el resultado obtenido anteriormente.
H está definido por 4 números reales y se puede parametrizar en general, de la siguiente forma;

$$\begin{pmatrix} H^+(x) \\ H^0(x) \end{pmatrix} = H = e^{i\xi^A(x)\frac{\sigma_A}{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad \text{4 campos.} \tag{3.6.25}$$

Ahora podemos transformar nuestro Higgs, pero bajo la paramtrización;

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= e^{i\xi^A(x)\frac{\sigma_A}{2}} H(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gaugear away,

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h(x) \end{pmatrix} = H(x), \quad h(x) \in \mathbb{R} \tag{3.6.26}$$

Luego, construimos la derivada covariante con este Higgs;

$$\begin{aligned} D_\mu H &= \left(\partial_\mu + ig_{YM}\frac{\sigma^A}{2}W_\mu^A + ig_y\frac{1}{2}B - \mu\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h(x) \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\partial_\mu + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} g_{YM}W_\mu^3 + g_yB_\mu & g\left(W_\mu^1 - iW_\mu^2\right) \\ g_{YM}\left(W_\mu^1 + iW_\mu^2\right) & -g_{YM}W_\mu^3 + g_yB_\mu \end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu + h(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Queda de tarea expandir la expresión.
A su vez, el término cinético de Higgs es;

$$
\begin{aligned}
(D_\mu H)^\dagger (D_\mu H) &= \frac{1}{2}\partial_\mu h(x)\partial^\mu h(x) + \frac{g_{YM}^2}{8}\left[W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}\right]\left(1 + \frac{h^2(x)}{\nu}\right)^2 \\
&+ \frac{\nu^2}{8}\left(g_{YM} W_\mu^3 - g_y B_m u\right)\left(g_{YM} W^{3\mu} - B^\mu\right)\left(1 + \frac{h(x)}{\nu}\right)^2
\end{aligned}
$$

Ahora definimos;

$$
z_\mu^0 = \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu, \quad \theta : \text{Weak mixing angle} \tag{3.6.27}
$$

$$
A_\mu = \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu, \quad \tan\theta = \frac{g_y}{g_{YM}} \tag{3.6.28}
$$

El que tenía la pinta de ser el campo de Gauge de electrodinámica, o sea, B_μ es en verdad el campo A_μ que es combinación de este, junto con el tercer campo de Gauge W_μ^3. Con lo cual, podemos obtener finalmente;

$$
(D_\mu H)^\dagger (D_\mu H) = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{g_{YM}^2}{8}\left[W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}\right]\left(1 + \frac{2h(x)}{\nu} + \frac{h^2(x)}{\nu^2}\right) + \frac{1}{8}\frac{\nu^2 g_{YM}^2}{\cos^2\theta} z_\mu^0 z^{0\theta} \tag{3.6.29}
$$

Con lo cual hemos encontrado dos campos vectoriales masivos iguales y otro más con masa diferente, que era lo que buscabamos;

$$
\begin{aligned}
m_{W^\pm} &= \frac{g\nu}{2} \\
m_z &= \frac{g\nu}{2\cos\theta}
\end{aligned}
$$

tal que;

$$
m_{z^0} > m_{W^\pm} \tag{3.6.30}
$$

Hola

3.7. Trigésima tercera clase

Introducimos la constante de plank reducida;

$$
h \sim 10^{-34}[J \cdot s] \tag{3.7.1}
$$

En un sistema físico de n grados de libertar;

$$
q_i = q_i(t), \quad i = 1, \dots, n \tag{3.7.2}
$$

Cuyas ecuaciones de movimiento estarán dadas por las ecuacione de Euler-Lagrange;

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.7.3}
$$

En donde se introcuce la función Lagrangana, la cual dependerá de las coordenadas y su derivada total con respecto al tiempo;

$$
L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) \tag{3.7.4}
$$

Además, por una transformacion de Legengre es posible bajarle en un grado a las ecuaciones de movimiento, introduciendo el Hamintoniano;

$$
H = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i - L \tag{3.7.5}
$$

En donde la cantidad o variable p_i es llamada el momento canónico conjugado a q_i, dado por;

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i) \tag{3.7.6}$$

Lo que, como se mencionó, se obtiene el Hamiltoniano;

$$H = H(q_i, p_i) \tag{3.7.7}$$

La dinámica en el espacio de fase está controlada por las ecuaciones de Hamilton;

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3.7.8}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{3.7.9}$$

Se introduce además el llamado, çorchete de Poisson", que, para dos funciones $F(q_i, p_i), G(q_i, p_i) \in \mathbb{R}$, que está dado por;

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} \tag{3.7.10}$$

El cual cumple con las siguientes propiedades;

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \tag{3.7.11}$$

$$\{\alpha F_1 + \beta F_2, G\} = \alpha\{F_1, G\} + \beta\{F_2, G\} \tag{3.7.12}$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} \equiv 0 \tag{3.7.13}$$

Las funciones definidas sobre el espacio de fase forman un espacio vectorial sobre los reales, y junto al corchete de Poisson dotan a este conjunto de la estructura de un álgebra de Lie.
Téngase ahora la deivad total de una función $F(q_i, p_i, t)$ con respecto al tiempo;

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial dt} \tag{3.7.14}$$

El cual podemos agrupar de tal forma que;

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} - \{H, F\}\end{aligned}$$

Ahora, si imponemos que la función no depende explícitamente del tiempo, entonces $F(q_i, p_i)$.Podemos escribir una derivada o evolución temporal discreta para esta expresión tal que;

$$F(q_i(t + \Delta t), p_i(t + \Delta t)) = f(q_i(t), p_i(t)) + \{-\Delta t\, H, F\} \tag{3.7.15}$$

La evolución temporal ess implementada por el Hamiltoniano via el corchete de Poisson;

$$\delta F = -\Delta t\{H, F\} \tag{3.7.16}$$

3.7.1. Teorema de Poisson

Sean F y G cantidades conservadas;

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dG}{dt} = 0 \tag{3.7.17}$$

y $\{F, G\}$ también es una cantidad conservada.
Si F es conservada y no depende explícitamente de t;

$$\{H, F\} = 0 \tag{3.7.18}$$

En donde el corchete de Poisson de las dos funciones está dado por;

$$\{F;G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} \tag{3.7.19}$$

Notemos que si calculamos el corchete de Poisson del Hamiltoniano con la coordenada generalizada;

$$\begin{aligned}\{H, q_i\} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}\cancel{\frac{\partial q_i}{p_i}} - \frac{\partial q_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= -\dot{q}_i = \{q_j, H\}\end{aligned}$$

Y además con respecto al momento canónico;

$$\begin{aligned}\{H, p_i\} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial p_i}{p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i = \{p_i, H\}\end{aligned}$$

Y finalmente, calculamos el conmutador entre la coordenada generalizada y el momento canónico;

$$\begin{aligned}\{q_j, p_k\} &= \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial p_i} \\ &= \delta_{jk}\end{aligned}$$

Lo que nos deja las siguientes relaciones;

$$\{q_j, p_k\} = \delta jk \tag{3.7.20}$$
$$\{q_j, q_k\} = 0 \tag{3.7.21}$$
$$\{p_j, p_k\} = 0 \tag{3.7.22}$$

3.7.2. Cuantización canónica

Promovemos las variables a operadores de la siguiente forma;

$$q_i \to \hat{q}_i \tag{3.7.23}$$
$$p_i \to \hat{p}_i \tag{3.7.24}$$
$$\{,\} \to \frac{1}{i\hbar}[,] \tag{3.7.25}$$

Estos operadores actúan sobre un espacio vectorial (sobre $\mathbb{C}$) (Completo), que es un espacio de Hilbert. Además, el estado del sistema cuántico será un rayo en el espacio de Hilbert;

$$e^{i\alpha}\left|\psi\right\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.7.26}$$

Lo cual llamaremos un rayo en el espacio de Hilbert.
Dado un sistema físico ¿como caracterizamos su espacio de Hilbert asociado?
Dado que el espacio de Hilbert es un espacio vectorial, nos gustaría encontrar un base en tal espacio.
Podemos conseguir una base si logramos encontrar el conjunto completo de autovectores de un operador hermítico (tales estados resultan ser ortogonales)

$$\hat{A}^{\dagger} = \hat{A} \tag{3.7.27}$$

El siguiente Hamiltoniano es necesario sabérselo de memoria y tenerlo en el corazón;

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{3.7.28}$$

que corresponde al Hamiltoniano del oscilador armónico simple. Necesitamos promover sus variables a operadores tal que;

$$p \rightarrow \hat{p} \tag{3.7.29}$$

$$q \rightarrow \hat{q} \tag{3.7.30}$$

$$\{,\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[,] \tag{3.7.31}$$

Además, como el corchete de Poisson entre la coordenada generalizada y el momento canónico corresponde a la identidad, entonces;

$$\{q, p\} = 1 \rightarrow \hat{\mathbb{1}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{q}, \hat{p}] \tag{3.7.32}$$

Por lo tanto nos queda la siguiente relación de conmutación;

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \tag{3.7.33}$$

Supongamos que el espacio vectorial sobre el que actúan estos operadores, es el espacio de las funciones de la variable clásica q, que son de cuadrado integrables.

$$\text{Hilbert} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(q)|^2 dq < \infty \right\} \quad , |f(q)|^2 = f^*(q) f(q) \tag{3.7.34}$$

¿Cómo actúan los operadores $\hat{q}$ y $\hat{p}$ sobre la función $f(q)$?

$$\begin{aligned}
\hat{q} f(q) &= q f(q) \\
\hat{p} f(q) &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) f(q) \\
[\hat{q}, \hat{p}]\, f(q) &= \hat{q}(\hat{p} f(q)) - \hat{p}(\hat{q} f(q)) \\
&= q\left(-i\hbar \frac{\partial f(q)}{\partial q}\right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right)(q f(q)) \\
&= -i\hbar q \frac{\partial f}{\partial q} + i h \hbar f(q) + i\hbar q \frac{\partial f(q)}{\partial q} \\
&= i\hbar f(q)
\end{aligned}$$

Por lo tanto hemos obtenido la siguiente relación de conmutación;

$$[\hat{q}, \hat{p}]\, f(q) = i\hbar f(q) \tag{3.7.35}$$

y además recuperamos la relación anteriormente derivada, $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$

3.7.3. Oscilador armónico en mecánica cuántica

Promovemos las variables del Hamiltoniano del oscilador armónico hacia operadores;

$$\begin{aligned}
H\bar{H} &= \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \hat{q}^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \mathbb{1}
\end{aligned}$$

Con lo cual nos queda el siguiente operador;

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{3.7.36}$$

Con lo cual en la ecuación de Schrodinger, entonces;

$$i\hbar \frac{\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi(q, t) \tag{3.7.37}$$

Ahora, la probabilidad que la función de onda esté en una cierta coordenada generalizada;

$$P(q_1 < q < q_2) = \int_{q_1}^{q_2} \psi^* \psi dq$$

Luego, la función de onda, si resolvemos la ecuación diferencial de primer orden;

$$\psi(q,t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\phi(q) \tag{3.7.38}$$

Con lo cual esto se convierte en un problema de autovalores;

$$\begin{aligned} \hat{H}\phi(q) &= E\phi(q) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right)\phi(q) &= E\phi(q) \end{aligned}$$

Ahora si la energía es discreta, como se encuentra;

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3.7.39}$$

y la función será;

$$\phi_n(q) = C_l C_n H_n(C_2 q) e^{-C_3 q^2} \tag{3.7.40}$$

Por lo tanto, hemos encontrado una base del espacio de Hilbert;

$$\psi(q,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(q,t) \tag{3.7.41}$$

3.7.4. Método algebraico

$$\hat{q}, \hat{p} \to \hat{a}, \hat{a}^\dagger \tag{3.7.42}$$

En donde los operadores de creacion y aniquilación;

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\hat{p} \tag{3.7.43}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\hat{p} \tag{3.7.44}$$

¿Cómo se escribe el Hamiltoniano en función de los operadores de creación y aniquilación, $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$?

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.7.45}$$

En donde se han usado las siguientes relaciones de conmutación;

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1 \tag{3.7.46}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger\right] = \omega\hat{a}^\dagger \tag{3.7.47}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{a}\right] = -\omega\hat{a} \tag{3.7.48}$$

De lo que, como $\hat{H}\left|n\right\rangle = E_N\left|n\right\rangle$

$$\hat{H}\left(\hat{a}\left|n\right\rangle\right) = \left(E_n - \hbar\omega\right)\left(\hat{a}\left|n\right\rangle\right) \tag{3.7.49}$$

Y además;

$$\begin{aligned} \hat{a}\left|0\right\rangle &= 0 \\ \hat{H}\left|0\right\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega\left|0\right\rangle \\ \hat{H}\left(\hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle\right) &= \hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle\right) \end{aligned}$$

3.7.5. Campo escalar

Tenemos el siguiente principio de acción para un campo escalar;

$$I = \int d^4x \, \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \tag{3.7.50}$$

De lo cual las ecuaciones de movimiento son las siguientes;

$$\Box\phi + m^2\phi = 0 \tag{3.7.51}$$

En donde la función ϕ es un campo escalar que depende de la coordenada espacial y del tiempo, $\phi = \phi(t, \vec{x})$.
La transformada de Fourier para la función ϕ está dada por;

$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{h}e^{+i\vec{k}\cdot x}\tilde{\phi}(t, \vec{k}) \tag{3.7.52}$$

Lo cual lo reemplazamos en la ecuación de movimiento para ϕ;

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot x}\tilde{\phi}(t, \vec{k})\right) - \nabla^2\left(\int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot x}\tilde{\phi}(t, \vec{k})\right) + m^2\left(\left(\int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot x}\tilde{\phi}(t, \vec{k})\right)\right) = 0$$

Lo que nos deja con

$$\int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}(t, \vec{k}) + \omega_{\vec{k}}^2\tilde{\phi}(t, \vec{k})\right]e^{i\vec{k}\cdot x} = 0$$

Con $\omega_{\vec{k}}^2 = |\vec{k}|^2 + m^2$. A lo cual hemos obtenido infinitos osciladores armónicos para nuestro sistema, así;

$$\begin{aligned} \hat{H}\left(\hat{a}_{\vec{k}}\left|0\right>\right) &= \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}\left(\hat{a}^\dagger\left|0\right>\right) \\ \left|p\right>\left(\hat{a}_{\vec{k}}\left|0\right>\right) &= \vec{k}\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger\left|0\right>\right) \end{aligned}$$

3.8. Trigésima cuarta clase

Necesitamos cuantizar el campo escalar, con lo cual, recordando , la acción del campo escalar es del tipo;

$$I = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \tag{3.8.1}$$

en donde necesitamos encontrar el espectro de los operadores, en particular del operador Hamiltoniano.
Para las coordenadas generalizadas $q_i(t)$ con $i = 1, \ldots, N$ los campo escalares $\phi(t, \vec{x})$, en donde $\phi_{\vec{x}}(t)$.
Hay tantos grados de libertad mecánicos como puntos hay en $\mathbb{R}^3$, con lo cual son ∞. Pero desde el punto de vista de la teoría de campos, hay solo un grado de libertad para cada punto.
¿Cuál es el operador Hamiltoniano del campo escalar?, dada la densidad Lagrangeana del campo escalar ;

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{3.8.2}$$

En donde podemos definir la densidad de momenta canónicos;

$$\phi = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{\phi}} \Rightarrow \dot{\phi} = \pi \tag{3.8.3}$$

Con lo cual, aplicando una transformada de Lengendre, podemos definir la densidad Hamiltoniana clásico

$$\mathcal{H} = \phi\dot{\phi} - \mathfrak{L} \tag{3.8.4}$$

En donde, luego de trabajar el álgebra, la densidad Hamiltoniana para el campo escalar clásico está dada por;

$$\mathfrak{H} = \frac{\phi^2}{2} + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{3.8.5}$$

Con lo cual, el Hamitoniano será la integral de la densiddad Hamiltoniana en todo el espacio;

$$H = \int d^3x\mathfrak{H} \tag{3.8.6}$$

3.8.1. Cuantización canónica en el cuadro de Schrödinger

Elevamos las siguientes cantidades físicas a operadores;

$$q(t) \longrightarrow \hat{q} \tag{3.8.7}$$

$$\phi_{\vec{x}}(t) \longrightarrow \hat{\phi}(\vec{x}) \tag{3.8.8}$$

$$\pi_{\vec{y}}(t) \rightarrow \hat{\pi}(\vec{y}) \tag{3.8.9}$$

Tal que estos operadores satisfacen la llamada **Álgebra canónica**, cuyos generadores satisfacen la siguiente regla de conmutación;

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})\right] = i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.8.10}$$

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})\right] = 0 \tag{3.8.11}$$

$$[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = 0 \tag{3.8.12}$$

Esta regla de comutación no está definida por derivada funcional, como podría ser aparente por la delta de Dirac, esta aparece como análoga de la delta de Kronecker cuando nos pasamos a operadores continuos.
El operador Hamiltoniano está dado por;

$$\hat{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\hat{\phi}|^2 + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}^2\right) \tag{3.8.13}$$

¿Para este operador Hamiltoniano se cumplirá algo como $\hat{H}\left|\Psi\right\rangle = E\left|\Psi\right\rangle$?, defimos los operadores

$$\begin{matrix} \hat{\pi}(\vec{x}) & & \hat{a}_{\vec{k}} \\ & \Rightarrow & \\ \hat{\phi}(\vec{x}) & & \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} \end{matrix} \tag{3.8.14}$$

En donde $\hat{a}_{\vec{h}} \in \mathbb{R}^3$, tal que, los operadores $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ en función de los nuevos, se definen como;

$$\hat{\phi}(\vec{x}) := \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \tag{3.8.15}$$

$$\hat{\phi}(\vec{y}) := \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{2}}\left(\hat{a}_{\vec{l}}e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}} - \hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}e^{-i\vec{l}\cdot\vec{x}}\right) \tag{3.8.16}$$

En donde se ha definido;

$$\omega_{\vec{k}} := \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2} \tag{3.8.17}$$

¿Cómo se escribe $\hat{a}_{\vec{h}}$ en térmimos de $\hat{\phi}(\vec{x})$ y $\hat{\pi}(\vec{y})$?, para ello necesitaremos el siguiente resultado;

$$\int d^n\vec{A}e^{i\vec{A}\cdot\vec{B}} = (2\pi)^n\,\delta^{(n)}(\vec{B}) \tag{3.8.18}$$

Con lo cual, desarrollamos;

$$\begin{aligned}
\int d^3\vec{x}\hat{\phi}(\vec{x})e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} &= \int d^3x \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{i(\vec{h}+\vec{p})\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}e^{-i(\vec{h}-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right) \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{h}+\vec{p}) + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{h}-\vec{p})\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{-p}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right) \\
&\Rightarrow \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}} = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\int d^3\vec{x}\hat{\phi}(\vec{x})e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}} \\
\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}} &= \frac{1}{(-i)}\sqrt{\frac{2}{\omega_{\vec{p}}}}\int d^3\vec{x}\hat{\pi}(\vec{x})e^{i\vec{P}\cdot\vec{x}}
\end{aligned}$$

Afirmación: Dada la relación entre el par $\hat{\phi}(\vec{x})$ y $\hat{\pi}(\vec{y})$ con $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$;

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}(\vec{x}),\hat{\pi}(\vec{y})\right] &= i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) & & \left[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{l}}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{h}-\vec{l}) \\
\left[\hat{\phi}(\vec{x}),\hat{\phi}(\vec{y})\right] &= 0 & \Rightarrow \quad & \left[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}_{\vec{l}}\right] = 0 \\
\left[\hat{\pi}(\vec{x}),\hat{\pi}(\vec{y})\right] &= 0 & & \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{l}}\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.8.19}$$

Lo que establece la relación entre el Álgebra Canónica con el Álgebra de osciladores bosónicos. Calculelos el primer conmutador del Álgebra canónica, pero escrito en función de los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$;

$$\begin{aligned}
\left[\hat{\phi}(\vec{x}),\hat{\phi}(\vec{y})\right] &= \left[\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right), \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{2\omega_{\vec{k}}}{2}}\left(\hat{a}_{\vec{l}}e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{l}}e^{-i\vec{l}\cdot\vec{x}}\right)\right] \\
1\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}\sqrt{\tfrac{\omega_{\vec{l}}}{2}}(-i)&\left(-\left[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{l}}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\vec{l}\cdot\vec{y}} + \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}},\hat{a}_{\vec{l}}\right]e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\vec{l}\cdot\vec{y}}\right) = \int \frac{d^3\hat{k}}{(2\pi)^6}\frac{d^3}{} \\
&= \frac{i}{2}\int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{l}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + \frac{i}{2}\int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{l}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}$$

Afirmación:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right) \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \frac{(2\pi)^3}{2}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k})\right)
\end{aligned}$$

Asumamos que existe $|0\rangle$ tal que;

$$\hat{a}_{\vec{k}}\,|0\rangle = 0, \quad \forall\vec{k} \tag{3.8.20}$$

Por lo tanto;

$$\hat{H}\,|0\rangle = \left(\int \frac{d^3\vec{k}}{2}\omega_{\vec{k}}\delta^{(3)}(\vec{0})\right)|0\rangle \tag{3.8.21}$$

en donde, el término bajo paréntesis será llamado E_0.
E_0 es divergente por razones distintas:

- $\delta^{(3)}(\vec{0})$ es llamada una divergencia **infrared**
- $\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dhk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = 4\pi\int_0^{\Delta_{\mu\nu}} d|\vec{k}||\vec{k}|^2\sqrt{|\vec{k}|^2+m^2} \sim \Delta^4_{\mu\nu}$

En donde, en el segundo punto hemos hecho el siguiente cambio de coordenadas;

$$k_x = |\vec{k}| \sinh k_\theta \cosh k_\phi, \qquad 0 \leq k_\theta \leq \pi \tag{3.8.22}$$
$$k_y = |\vec{k}| \sinh h_\theta \sinh k_\phi, \qquad 0 \leq h_\phi \leq 2\pi \tag{3.8.23}$$
$$h_z = |\vec{k}| \cosh k_\theta, \qquad 0 \leq |\vec{k}| < +\infty \tag{3.8.24}$$

Y $\Delta_{\mu\nu}$ es el cutoff ultravioleta.
Ahora haremos la siguiente operación de ordenamiento al operador Hamiltoniano;

$$\begin{aligned} :\hat{H}: &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\left(:\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}: + :\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}:\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}\right) \end{aligned}$$

Con lo cual el nuevo Hamiltoniano estará definido por;

$$:\hat{H}:= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} \longrightarrow \hat{H} \tag{3.8.25}$$

3.9. Trigésima quinta clase

Afirmación

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3h}{(2\pi)^2}\omega_k\left(a^\dagger_k a_k + a_k a^\dagger_k\right) \end{aligned}$$

Ahora, los momenta canómico;

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^2}(-i)\sqrt{\frac{\omega_l}{2}}\left(a_l e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}} - a_l e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}\right)$$

Calculemos el Hamiltonian por términos;

Primer término

El primer término corresponde al de

$$T_1 = \int d^3x \frac{\pi^2}{2}, \quad \omega_l = \sqrt{|\vec{l}|^2 + m^2}$$

Con lo cual, calculamos;

$$\begin{aligned} T-1 &= \int \frac{d^3x d^3k_1 d^3k_2}{2(2\pi)^6}\frac{(-1)}{2}\sqrt{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}\left(a_{k_1}e^{ik_1\cdot x} - a^\dagger_{k_1}e^{-ik_1\cdot x}\right)\left(a_{k_2}e^{ik_2\cdot x} - a^\dagger_{k_2}e^{-ik_2\cdot x}\right) \\ &= \int \frac{d^3x d^3k_1 d^3k_2}{4(2\pi)^6}(-1)\sqrt{\omega_{k_1}\omega_{k_2}}\left(a_{k_1}a_{k_2}e^{i(k_1+k_2)\cdot x} + a^\dagger_{k_1}a^\dagger_{k_2}e^{-i(k_1+k_2)\cdot x} - a^\dagger_{k_1}a_{k_2}e^{-i(k_1-k_2)\cdot x} - a_{k_1}a_{k_2}e^{i(k_1-k_2)\cdot x}\right) \\ &= \int \frac{d^3x d^3k_1 d^3k_2}{2(2\pi)^6}(-1)\left(\omega_{k_1}a_{k_1}a_{-k_1} + \omega_{k_1}a^\dagger_{k_1}a^\dagger_{-k_1} - a^\dagger_{k_1}a_{k_1}\omega_{k_1} - a_{k_1}a^\dagger_{k_1}\omega_{k_1}\right) \end{aligned}$$

Esto gracia a la propiedad de la integral de las exponenciales que nos dan una delta de dirac a la 3 tanto de argumento $k_1 + k_2$ como en $k_1 - k_2$.

Segundo término

El segundo término del Hamiltoniano está dado por;

$$T_2 = \int d^3x |\nabla\phi|^2$$

De lo cual calculamos el término;

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \nabla\left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a_k e^{ik\cdot x} + a_k^\dagger e^{-ik\cdot x}\right)\right) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(ika_k e^{ik\cdot x} - ike^{-ik\cdot x}\right)\end{aligned}$$

Operador Hamiltoniano

Con lo cual, el Hamiltoniano quedará tal que;

$$\begin{aligned}\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4}\frac{1}{\omega_k}\left[\left(-\omega_k^2 + k^2 + m^2\right)\left(a_k a_{-k} + a_k^\dagger a_{-k}^\dagger\right) + \left(\omega_k^2 + k^2 + m^2\right)\left(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k\right)\right] \\ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\omega_k\left(a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k\right)\end{aligned}$$

A lo cual, si aplicamos el operador de ordenamiento; $: H :$, tenemos;

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k a_k^\dagger a_k \tag{3.9.1}$$

Operador momento lineal

Tenemos que, el Lagrangeano para el campo escalar es;

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{3.9.2}$$

Bajo una transformación espacio-temporal;

$$\begin{aligned}x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + a^\mu \quad \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \\ \delta\phi = -a^\mu\partial_\mu\phi, \quad j^\mu = \partial^\mu\left(-a^\nu\partial_\nu\phi\right) = -(-a^\mu\mathfrak{L}) \\ \delta\mathfrak{L} = a^\mu\partial_\mu\mathfrak{L} \\ j^\mu = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi - B^\mu\end{aligned}$$

Tal que, el tensor de densidad de Energía-Momento;

$$T^\mu_\nu = \partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{\delta^\mu_\nu}{2}\left(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi m^2\phi^2\right) \tag{3.9.3}$$

Para transiciones espaciales la cantidad asociada será;

$$(\vec{P})_i = \int d^3x T^0_i = \int d^3x \partial^t\phi\partial_i\phi$$

Con lo cual

$$\vec{P} = \int d^3x \dot{\phi}\nabla\phi \tag{3.9.4}$$

Lo que también puede ser escrito como;

$$\vec{P} = \int d^3x \pi\nabla\phi \tag{3.9.5}$$

Lo que, si promovemos a operadores que cumplen con el Álgebra canónica, entonces;

$$\hat{P} = \int d^3\vec{x}\hat{\pi}(\vec{x})\nabla\hat{\phi}(\vec{x}) \tag{3.9.6}$$

Ahora, queda de tarea en escribir el operador momento lineal como;

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\vec{a}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}} \tag{3.9.7}$$

Además que el operador Hamiltoniano estaba dado por;

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{l}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}\hat{a}_{\vec{l}} \tag{3.9.8}$$

Ahora uno se puede preguntar, tiene el estado cero una energía y un momento lineal bien definido?

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}}\left|0\right\rangle &= 0, \quad \forall\vec{k} \\ \hat{H}\left|0\right\rangle &= 0\left|0\right\rangle \end{aligned}$$

Con lo cual $\left|0\right\rangle$ tiene una energía bien definida $E_0 = 0$. Además, como;

$$\hat{\vec{P}}\left|0\right\rangle = \vec{0}\left|0\right\rangle \tag{3.9.9}$$

El estado $\left|0\right\rangle$ tiene un momento lineal bien definido. Luego, podemos definir el estado de momento lineal;

$$\left|\vec{P}\right\rangle := \hat{a}^{\dagger}_{\vec{P}}\left|0\right\rangle \tag{3.9.10}$$

Ahora hacemos actual este estado al operador Hamiltoniano;

$$\begin{aligned} \hat{H}\left|\vec{P}\right\rangle &= \left(\int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{l}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}\hat{a}_{\vec{l}}\right)\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{P}}\left|0\right\rangle\right) \\ &= \int d^3\vec{l}\omega_{\vec{l}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}\delta^{(3)}(\vec{P}-\vec{l})\left|0\right\rangle \\ &= \omega_{\vec{P}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{P}}\left|0\right\rangle \\ &= \omega_{\vec{P}}\left|\vec{P}\right\rangle \end{aligned}$$

Con lo cual, el operador Hamiltoniano actuando sobre el estado momento lineal es;

$$\hat{H}\left|\vec{P}\right\rangle = \omega_{\vec{P}}\left|\vec{P}\right\rangle = \sqrt{|\vec{P}|^2+m^2}\left|\vec{P}\right\rangle \tag{3.9.11}$$

Ahora ¿Qué pasa si hacemos actual el operador momento lineal sobre el estado de una partícula?

$$\begin{aligned} \hat{\vec{P}}\left|\vec{P}\right\rangle &= \left(\int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}\vec{l}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}\hat{a}_{\vec{l}}\right)\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\left|0\right\rangle\right) \\ &= \int d^4\vec{l}\,\vec{l}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{l}}\delta^{(3)}(\vec{l}-\vec{p})\left|0\right\rangle \\ &= \vec{p}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\left|0\right\rangle \\ &= \vec{p}\left|\vec{p}\right\rangle \end{aligned}$$

Con lo cual;

$$\hat{\vec{P}}\left|\vec{p}\right\rangle = \vec{p}\left|\vec{p}\right\rangle, \quad \hat{H}\left|\vec{p}\right\rangle = \sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}\left|\vec{p}\right\rangle \tag{3.9.12}$$

Con lo cual, $\left|\vec{p}\right\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\left|0\right\rangle$ es una partívula estad de una partícula (one particle state), a la partícula $\left|\vec{p}\right\rangle$ le llamaremos **mesón**

3.10. Trigésima séptima clase

3.10.1. Teoría con interacciones de dimensión 4

Campo escalar complejo

El Lagrangeano del campo escalar complejo está dado por;

$$\mathfrak{L} = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - m^2 \psi \psi^* \tag{3.10.1}$$

En donde el campo escalar complejo es;

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 + i\phi_2\right), \quad \psi \to \psi' = e^{-i\alpha}\psi \tag{3.10.2}$$

Con el complejo conjugado;

$$\psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 - i\phi_2\right) \tag{3.10.3}$$

Tal que, estos campos escalares ϕ siguen la regla de transformación;

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}' = O \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad O \in O(2)$$

Con lo cual, el Lagrangeano con el campo escalar real explícito es;

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{m^2}{2}\left(\phi_1^2 + \phi_2^2\right) \tag{3.10.4}$$

Recordemos que el Hamiltoniano y el momenta canónico están definidos por;

$$\begin{aligned} H &= \sum_A p_A \dot{q}_A - L \\ p_A &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \end{aligned}$$

Por tanto, la densidad Hamiltoniana estará dada por;

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\psi}^*}\dot{\psi}^* - \mathfrak{L} \tag{3.10.5}$$

Calculamos las derivadas parciales;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}\left(\dot{\psi}\dot{\psi}^* - \nabla\psi \cdot \nabla\psi^*\right) &= \dot{\psi}^* =: \pi_\psi \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\psi}^*} &= \dot{\psi} =: \pi_{\psi^*} \end{aligned}$$

Lo que reemplazamos en la densidad Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{\psi}^*\dot{\psi} + \dot{\psi}\dot{\psi}^* - \left(\dot{\psi}\dot{\psi}^* - \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* - m^2\psi^*\psi\right) \\ &= \dot{\psi}^*\dot{\psi} + \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + m^2\psi^*\psi \end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido la densidad Hamiltoniana asociada al campo escalar complejo libre.

Cuantización canónica

$$q_A \hat{q}_A$$
$$p_A \longrightarrow \hat{p}_A$$

Tal que cumplen con el álgebra canónica

$$[\hat{q}_A, \hat{p}_B] = i\hbar\delta_{AB}$$
$$[\hat{q}_A, \hat{q}_B]0$$
$$[\hat{p}_A, \hat{p}_B] = 0$$

Y luego los campos escalares serán;

$$\psi \longrightarrow \hat{\psi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{h}}}}\left(\hat{b}_{\vec{h}}e^{i\vec{h}\cdot\vec{x}} + \hat{c}^\dagger_{\vec{h}}e^{-i\vec{h}}\cdot\vec{x}\right)$$
$$\psi^* \longrightarrow \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = \text{Completar}$$
$$\pi_\psi \longrightarrow \hat{\pi}_\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\vec{l}}}{2}}\left(\hat{b}_{\vec{l}}e^{-i\vec{l}\cdot\vec{x}} - \hat{c}^\dagger_{\vec{l}}e^{i\vec{l}\cdot\vec{x}}\right)$$
$$\phi_{\psi^*} \longrightarrow \hat{\pi}^\dagger(\vec{x}) = \text{Completar}$$

Tal que;

$$\left[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\pi}_\psi(\vec{y})\right] = i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left[\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(\vec{y})\right] = i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left[\hat{b}_{\vec{h}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{l}}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{h}-\vec{l})$$
$$\left[\hat{c}_{\vec{h}}, \hat{c}^\dagger_{\vec{l}}\right] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{h}-\vec{l})$$

A lo cual, es necesario promover la densidad Hamiltoniana a un operador de densidad Hamiltoniana;

$$\mathcal{H} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}} \tag{3.10.6}$$

Y así;

$$:\hat{H} := \int d^3x : \hat{\mathcal{H}} := \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{l}}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{l}}\hat{b}_{\vec{l}} + \hat{c}^\dagger_{\vec{l}}\hat{c}_{\vec{l}}\right) \tag{3.10.7}$$

En donde;

$$\omega_{\vec{l}} = \sqrt{|\vec{l}|^2 + M^2} \tag{3.10.8}$$

Que luego podremos escribir como;

$$:\hat{H} := \int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{h}}\hat{a}^\dagger_{\vec{h}}\hat{a}_{\vec{h}} \tag{3.10.9}$$
$$\hat{\vec{p}}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{h}}|0\rangle\right) = \vec{h}\left(a^\dagger_{\vec{h}}|0\rangle\right) \tag{3.10.10}$$
$$\hat{H}\left(a^\dagger_{\vec{h}}|0\rangle\right) = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}\left(a^\dagger_{\vec{h}}|0\rangle\right) \tag{3.10.11}$$

Asumamos que existe el estado $|0;0\rangle$

$$\hat{b}_{\vec{h}}|0;0\rangle = 0|e_1\rangle + 0|e_2\rangle + \dots$$
$$\hat{c}_{\vec{h}}|0;0\rangle = 0\forall\vec{h}\hat{H}|0;0\rangle = 0|0;0\rangle$$

Luego, definimos

$$\left|\vec{k};0\right\rangle := \hat{b}^\dagger_{\vec{h}}\left|0;0\right\rangle$$
$$\left|0;\vec{h}\right\rangle := \hat{c}^\dagger_{\vec{h}}\left|0;0\right\rangle$$
$$\hat{H}\left|\vec{h};0\right\rangle = |\vec{h}|^2 + m^2\left|\vec{h};0\right\rangle$$
$$\hat{H}\left|0;\vec{k}\right\rangle = \sqrt{|\vec{h}|^2 + m^2}\left|0;\vec{h}\right\rangle$$
$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3\vec{h}}{(2\pi)^2}\vec{h}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{h}}\hat{b}_{\vec{h}} + \hat{c}^\dagger_{\vec{h}}\hat{c}_{\vec{h}}\right)$$
$$\hat{p}\left|\vec{h};0\right\rangle = \vec{h}\left|\vec{h};0\right\rangle$$
$$\hat{\vec{p}}\left|0;\vec{h}\right\rangle = \vec{h}\left|0;\vec{h}\right\rangle$$

Para el campo escalar complejo, el momento lineal no remueve la degeneración del Hamiltoniano, necesitamos otro operador.

Con lo cual, cocinamos el siguiente operador;

$$\hat{Q} := \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3}\left(\hat{b}^\dagger_{\vec{l}}\hat{b}_{\vec{l}} - \hat{c}^\dagger_{\vec{l}}\hat{c}_{\vec{l}}\right) \tag{3.10.12}$$

La cual, actuando sobre el estado;

$$\hat{Q}\left|\vec{h};0\right\rangle = (+1)\left|\vec{h};0\right\rangle$$
$$\hat{Q}\left|0;\vec{h}\right\rangle = (-1)\left|0;\vec{h}\right\rangle$$

El conjunto $\{\hat{H},\hat{\vec{P}},\hat{Q}\}$ distingue todos los estados del tipo $\left|\vec{h};0\right\rangle$; $|0;|h\rangle\rangle$ **Tarea:** Calcular o mostrar lo siguiente;

$$\left[\hat{H},\hat{Q}\right] = 0 \tag{3.10.13}$$

El operador $\hat{Q}$ es el operador asociado a la cantidad conservada de la acción clásica debido a la invariancia asociada a $U(1)$.
Tendremos una carga conservada debido a teorema de Noether dada por;

$$Q = \int d^3x j^0, \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Y la corriente conservada estará dada por;

$$j^\mu = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\partial_\mu\psi^*}\delta\psi^* - B^\mu$$
$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi \Rightarrow \delta\psi = -i\alpha\psi$$
$$\psi^* \longrightarrow \psi^{*\prime} = e^{i\alpha}\psi \Rightarrow \delta\psi^* = i\alpha\psi^*$$

3.10.2. Campos interactuantes:

$$I\left[\phi,\psi,\psi^*\right] = I_{libre}\left[\phi\right] + L_{libre}\left[\psi,\psi^*\right] + I_{interacción}\left[\phi,\psi,\psi^*\right] \tag{3.10.14}$$

Lo que, si lo escribimos de forma explícita será;

$$I = \int d^4x\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \int d^4x\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi - m^2\psi^*\psi + \int d^4x\left(-g\right)\psi^*\phi\psi \tag{3.10.15}$$

A este último término le llamaremos acomplamiento de Yukawa El término $I[\phi, \psi^*, \psi]$ es invairante de Poincaré, y los siguientes términos serán invariantes de $U(1)$

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-i\alpha 0}\phi$$
$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\alpha}\psi$$
$$\psi^* \longrightarrow \psi^{*\prime} = e^{i\alpha}\psi^*$$

El Hamiltoniano estará dado por;

$$H = \int d^3x\mathcal{H} = \int d^3x \left(\mathcal{H}_{Libre}(\phi) + \mathcal{H}_{Libre}(\psi, \psi^*) + \mathcal{H}_{Int}(\phi, \psi, \psi^*)\right) \tag{3.10.16}$$

El operador Hamiltoniano será;

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$$
$$\hat{H}_{int} = \int d^3x h\hat{g}(\vec{x})\hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})$$

El Hamiltoniano de interacción en el cuadro de Schrödinger

Cuadro de interacción

$$\hat{O}_I := e^{i\hat{H}_0 t}\hat{O}_s e^{-i\hat{H}_0 t}$$
$$|\psi\rangle_I := e^{i\hat{H}_0} |\psi\rangle_S$$
$$|\psi\rangle_S = e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_I$$

En donde;

$$i\hbar\frac{\partial |\psi\rangle_S}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle_S$$
$$i\partial \left(e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_I\right) = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}\right)\left(e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_I\right)$$
$$\hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_o t} |\psi\rangle_I + ie^{-i\hat{H}_0 t}\partial_t |\psi\rangle_I = \hat{H}_0 e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_I + \hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_I$$
$$i\partial |\psi\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{int} e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi\rangle_I$$

En donde al término $e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}_0 t}$ le llamaremos el hamiltoniano de interacción en el cuadro de interacción;

$$\imath\partial_t |\psi\rangle = \hat{H}_I |\psi\rangle \tag{3.10.17}$$

Definimos un operador de evolución;

$$|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I$$

Al cual le pediremos lo siguiente

$$\hat{U}(t_2, t_1)^\dagger \hat{U}(t_2, t_1) = I \tag{3.10.18}$$
$$\hat{U}(t_0, t_0) = I \tag{3.10.19}$$
$$\hat{U}(t_3, t_2)\hat{U}(t_2, t_1) = \hat{U}(t_3, t_1) \tag{3.10.20}$$
$$\hat{U}(t_1, t_2) = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) \tag{3.10.21}$$

Con lo cual;

$$i_t \left(\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I\right) = \hat{H}_I \left(\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I\right)$$
$$i\partial_t \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I = \hat{H}_I \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

Con lo cual;

$$i_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_I(t)\hat{U}(t, t_0) \tag{3.10.22}$$

A lo cual queremos llegar a la fórmula de Dyson