# Apuntes de Introducción a las partículas elementales y Teoría Cuantica de Campos

Amaro A. Díaz Concha y Fernanda C. Mella Alvarez

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

"Todos los hombres por naturaleza desean saber"

— *Aristóteles de Estagira*

# Prefacio

Este punte está basado en las clases de ***Dr. Julio Oliva*** con el apoyo de diversas fuentes literarias las cuales estarán especificadas en la bibliografía.
Se compilarán los conocimientos necesarios y ejercicios resueltos para poder afrontar exitosamente cursos de mecánica clásica. Estos contenidos se dividirán en dos tomos los cuales representarán los dos cursos impartidos por el profesor.
Además y como apoyo a la imaginación y los ejercicios se han incluido diversos códigos realizados por el autor los cuales simulan las situaciones físicas con las cuales se está trabajando.

Cualquier consulta, notificación de error o posible aporte hacia este apunte debe enviarse al correo electrónico del autor **amdiaz2022@udec.cl**.

# Índice general

# Capítulo 1

# Nociones Previas

En el estudio de partículas elementales, notamos que experimentalmente se observan efectos tanto cuanticos como relativistas fenomenologicamente. Por lo que para trabajar con ellas se deberá tener en cuenta tanto la mécanica cuántica como la relatividad especial. La teoría con la que más nos acomodará trabajar será la **Teoría Cuantica de Campos (QFT)** pues tomará ambos efectos en consideración y nos permitirá estudiar eventos que sucedan a velocidades comparables con la velocidad de la luz $c$ en regiones pequeñas.

| | Small → | |
|---|---|---|
| Fast ↓ | Classical mechanics | Quantum mechanics |
| | Relativistic mechanics | Quantum field theory |

Es por esto que para poder estudiar QFT se deberán tener nociones tanto de mécanica clásica como cuántica. En este apunte, no se considerarán los efectos del campo gravitacional. Como las interacciones a estudiar ocurren en regiones pequeñas, el efecto gravitacional será considerado despreciable.

## 1.1. Primera clase

### 1.1.1. Derivación de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea la acción $S[q(t)]$, donde $q(t)$ son las coordenadas generalizadas del sistema.

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \tag{1.1}$$

Ahora, ¿Cómo cambia $S$ si $q(t)$ cambia un poco?

Sea $q(t)$ una función dependiente del tiempo, bien definida en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$. Donde los puntos $q(t_1)$ y $q(t_2)$ estarán fijos, de manera que aunque $q(t)$ cambie su valor en $t_1$ y $t_2$ no cambiara. Así, como se muestra en la figura [**citar**], si consideramos todos los caminos que puede tomar $q(t)$, diferenciados por una diferencia infinitesimal $\delta q = \Phi(t)$ que a su vez será dependiente del tiempo, se podrá variar la acción.

[foto clasica de la invarianza d la acción]

$$\begin{aligned}\delta S &= S[q(t)+\phi(t)] - S[q(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dtL(q(t)+\phi(t), \frac{d}{dt}(q+\Phi)) - \int_{t_1}^{t_2} dtL(q(t),\dot{q}(t)) \quad (1.2) \\ & \quad (1.3)\end{aligned}$$

Además, considerando que:

$$f(x+\epsilon_1, y+\epsilon_2) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\epsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\epsilon_2 + \mathcal{O}(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_1, \epsilon_2) \quad (1.4)$$

Por lo tanto, introduciendo (**??**) con $f(x+\epsilon_1, y+\epsilon_2) = L(q(t)+\phi(t), \frac{d}{dt}(q+\Phi))$ en (**??**).

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(L(q(t),\dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\Phi}{dt}\right) - \int_{t_1}^{t_2} dtL(q(t),\dot{q}(t)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\Phi}{dt}\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{d}{dt}\left(\Phi\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\Phi\right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\left(\Phi\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \int_{t_1}^{t_2} dt\Phi\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \\ &= 0 + + \int_{t_1}^{t_2} dt\Phi\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\Phi\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right).\end{aligned}$$

Si se asume que el princiío de acción es estacionario $\delta S = 0$. Entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\Phi\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) = 0 \quad (1.5)$$

Finalmente, considerando a $f(t)$ arbitraria, en (**??**) el integrando de la integral deberá ser igual a cero. Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \quad (1.6)$$

## 1.2. Segunda clase

En la última clase repasamos algo de física de mecánica clásica y vimos una introducción algo general de la necesidad de encontrar un marco conceptual algo más general de la mecánica clásica ya que necesitamos describir un proceso que ocurre en la naturaleza en el cual el estado inicial no es el mismo que el final. Supongamos que tienen una partícula en presencia de una energía potencial $U(x)$ a lo cual, la 2da ley de Newton nos dice lo siguiente:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

A lo cual multiplicamos por $\frac{dX}{dt}$

$$m\frac{dX}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{dX}{dt}\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

Ahora, sacamos la derivada temporal hacia fuera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)\right) = 0$$

La combinación

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E \tag{1.7}$$

En lo cual $E$ corresponde a la energía del sistema. $E$ es una constante, con lo cual no depende del tiempo En general diremos que una cantidad $Q = a(x, \dot{(x})$ es conservada si

$$\frac{d}{dt}Q\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0 \tag{1.8}$$

En el contexto de la mecánica cláscia en el que estamos interesados en encontrar $x(t)$, las cantidades conservadas con extremadamente útiles. Las cantidades conservadas tambíen se llaman integrales de movimiento. Si un sistema tiene un número suficientemente alto de integrales de movimiento, entonces podemos encontrar las historias de los grados de libertad sin integrar .

$$q_i = q_i(t) \quad i = 1, \ldots, N \tag{1.9}$$

Teorema de Noether: Si el funcional de la acción es quasi-invariante bajo una transformacion infinisetimal, entonces existirá una cantidad conservada asociada a la transformación.
Ejemplos de transformaciones infinitesimales, la transformación infinitesimal tendrá una forma bien precisa, dado lo siguiente.
**Transformación: traslación temporal**. Sea una coordenada $q(t)$ que depende del tiempo, a la cual haremos una tralación al futoro en $a$ seg. $q(t-a)$, notemos que $a$ puede ser cualquier número, digamos que $a$ es infinitesimal, con lo cual lo llamaremos $\epsilon$, ahora, tomando la serie de Taylor a $q(t-\epsilon$ tenemos lo siguiente:

$$q(t-\epsilon) = q(t) - \epsilon\frac{dq}{dt} + O(\epsilon^2) \tag{1.10}$$

Para lo cual el tèrmino de $O(\epsilon^2)$ puede ser despreciado ya que será muy pequeño, ahora sigamos

$$q(t-\epsilon) - q(t) = -\epsilon\frac{dq}{dt} = \delta q \tag{1.11}$$

A $\delta q$ lo llamaremos traslación temporal
**Trasformación: Traslación espacial** Sea un vector posición $r(t)$ el cual es situado con respecto a un eje coordenado cartesiano al cual lo trasladaremos espacialmente en un vector $a$ con lo cual la posición luego de la traslación será $\vec{r}(t) + \vec{a}$, ahora bien, supongamos que el vector $\vec{a}$ es infinitesimal, con lo cual la llamaremos $\vec{\epsilon}$, asì, la traslacion temporal infinitesimal estará dado por

$$(r\vec{(t)} + \vec{\epsilon}) - r\vec{(t)} = \vec{\epsilon} = \delta\vec{r} \tag{1.12}$$

En lo cual $\delta\vec{r}$ es llamada traslación espacial.
**Transfomación: Rotación espacial.**
Sabemos que en una rotación espacial una cantidad conservada sería el momento angular. Ahora, definamos una rotación.

$$x\prime = \cos\theta x - \sin\theta y \tag{1.13}$$

$$y\prime = \sin\theta x + \cos\theta y \tag{1.14}$$

Ahora, en el caso que la rotación fuera infinitesimal, llamaremos $\theta = \epsilon$, con lo cual la rotación definida quedaría dada por

$$x\prime = x - \epsilon y \rightarrow \delta x = x\prime - x = -\epsilon y \tag{1.15}$$

$$y\prime = \epsilon x + y \rightarrow \delta y = y\prime - y = \epsilon x \tag{1.16}$$

con lo cual obtenemos que

$$\delta x = -\epsilon y \tag{1.17}$$

$$\delta y = \epsilon x \tag{1.18}$$

$$\delta z = 0 \tag{1.19}$$

Así la rotación espacial según el vector posicion $\vec{r}$ sería

$$\delta \vec{r} = \vec{r} \times \delta \hat{\phi} \tag{1.20}$$

Acordar que el producto vectorial solo tiene sentido en 3 y 7 dimensiones.
Ahora hablemos de la acción

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \tag{1.21}$$

Ahora, se define la acciòn quasi-invariante como:

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int dt \frac{dB}{dt} \tag{1.22}$$

B es una función que depende del tiempo.
Encontraremos que, en el caso que $B = 0$ decimos que la acción es invariante, desarollando obtenemos

$$\delta S = \int dt \left( \partial_q L \delta q + \partial_{\dot{q}} L \frac{d}{dt} \delta q \right) \tag{1.23}$$

$$= \int dt \left( \partial_q L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L \right) \delta q + \int dt \frac{d}{dt} \left( \partial_{\dot{q}} L \; \delta q \right) \tag{1.24}$$

Usando la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\delta S = \int dt \frac{d}{dt} \left( \partial_{\dot{q}} L \; \delta q \right) = \int dt \frac{dB}{dt} \tag{1.25}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \partial_{\dot{q}} L \delta q - B \right) = 0 \tag{1.26}$$

si usted es capaz de encontrar una transformación que deja la accioón quasi-invariante, entonces la siguente cantidad encontrará que es constante

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.27}$$

en lo cual la constante no dependerá del tiempo. Ahora veamos que sucede cuando usamos una traslación temporal.
**Traslación temporal:**

$$S[q(t)] = \int dt \left[ \frac{m \dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \tag{1.28}$$

Ahora bien, la variación de la acción de define por

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] \tag{1.29}$$

$$= \int dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d}{dt} \left( q - \epsilon \frac{dq}{dt} \right) \right)^2 - U(q) - \epsilon \dot{q} \right] - \int dt \left[ \frac{m \dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \tag{1.30}$$

$$= \int dt \left[ \frac{m}{2} (\dot{q}^2 - 2 \epsilon \dot{q} \ddot{q}) - U(q) + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] - \int dt \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right] \tag{1.31}$$

$$= \int dt \left[ -m \epsilon \dot{q} \ddot{q} + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] \tag{1.32}$$

$$= \int dt \frac{d}{dt} \left[ \epsilon \left( -\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \right] \tag{1.33}$$

Con lo cual hemos encontrado nuestra función $B$ para esta traslación en particular. Tal que

$$B = \epsilon \left( -\frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q) \right) \tag{1.34}$$

Notese que en este caso nunca usamos la ecuación de movimiento para encontrar cuánto vale $B$ en el caso de esta traslación. Ahora que sabemos cual es el valo de la función $B$, entonces podemos calcular cúal es la cantidad conservada segùn lo obtenido anteriormente.

$$\partial \dot{q} L = m\dot{q} \tag{1.35}$$

Así, la cantidad conservada está dada por

$$C^{te} = m\dot{q}(-\epsilon\dot{q}) - \epsilon \left( -\frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q) \right) \tag{1.36}$$

De lo cual podemos identificar a la energía del sistema, con lo cual

$$C^{te} = -\epsilon \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) \right) = -\epsilon E \tag{1.37}$$

Asì, la conservaciòn d la energía emerge como la aplicación del teorema de Noether a la quasi-invariancia bajo transformaciones temporales.
**Acción de la partícula libre:** Sabemos que la acción de la partícula libre está dada por

$$S = \int dt \frac{m}{2} |\frac{d\vec{r}}{dt}|^2 \tag{1.38}$$

Ahora bien, si usamos la convención de Einstein

$$S = \int dt \frac{m}{2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} \quad , x^i = (x^1, x^2, x^3) \tag{1.39}$$

Ahora usaremos traslaciones espaciales.
**Traslaciones espaciales:**

$$\delta x^i = \epsilon^i \quad , \quad \delta\vec{r} = \vec{\epsilon} \tag{1.40}$$

Ahora lo aplicamos a la variación de la acción:

$$S[x + \delta x] = \int dt \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(x^i + \epsilon^i) \frac{d}{dt}(x^i + \epsilon^i) \tag{1.41}$$

$$= \int dt \frac{m}{2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} = S[x] \tag{1.42}$$

Con lo cual

$$\delta S = S[x + \delta x] - S[x] = 0 = \int dt \frac{d}{dt} 0 \tag{1.43}$$

Para un grado de libertad :

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.44}$$

Para varios grados de libertad obtenemos

$$\partial_{\dot{q}_i} L \delta q_i - B = C^{te} \tag{1.45}$$

Y para traslaciones espaciales

$$\partial_{\dot{x^k}} L \delta x^k - B = C^{te} \tag{1.46}$$

Ahora, si tenemos un lagrangeano para varios grados de libertad $L = L(x^i, \dot{x^i})$ se obtiene lo siguiente

$$\partial_{\dot{x^k}} L = \partial_{\dot{x^k}} (\frac{1}{2} m x^i x^i) \tag{1.47}$$

$$= \frac{m}{2} \left( \frac{\partial \dot{x^i}}{\partial \dot{x^k} x^i + x^i \partial \dot{x^k}} \right) \tag{1.48}$$

$$= \frac{m}{2} \left( \delta_k^i \dot{x^i} + \dot{x^i} \delta_k^i \right) \tag{1.49}$$

$$= m\dot{x^k} \tag{1.50}$$

En lo cual notamos que solo sobrevive ese términos por las deltas de Kronecker.
Ahora, la cantidad conservada está dada por:

$$m\dot{x^k} \epsilon^k - B = C^{te} \tag{1.51}$$

En lo cual, como sabemos, en una transformación traslación $B = 0$ Con lo cual, podemos concluir que:

$$m\dot{x^k} \epsilon^k = C^{te} \tag{1.52}$$

por lo tanto, de igual forma se cumplirá:

$$m\dot{x^k} = \tilde{C}^{te} \tag{1.53}$$

y así, en transformaciones espaciales la cantidad conservada será el momento lineal

$$m\vec{v} = \vec{p} \tag{1.54}$$

### 1.2.1. Preguntas clase 2

**Pregunta 1**

Manipulando la segunda ley de Newton para una partícula en presencia de una energía potencial $U(x(t))$, muestre que la energía es conservada.

**Solución:**

**Pregunta 2**

Deduzla la transformación infinitesimal que representa una traslación en el tiempo actuando sobre un grado de libertad $q(t)$.

**Solución:**

**Pregunta 3**

Deduzla la transformación infinitesimal que representa una traslación espacial del grado de libertad $\vec{r}(t)$.

**Solución:**

**Pregunta 4**

Deduzca la transformación infinitesimal que representa una rotación en el plano $(x, y)$, actuando sobre la posición de una partícula $\vec{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

**Solución:**

**Pregunta 5**

Demuestre, explicando cada paso, que una transformación infinitesimal que deja quasi-invariante la acción de un conjunto de grados de libertad $q_A$ con $A = 1, \ldots, N$, permite construir una cantidad conservada $Q$. Construya tal cantidad conservada para los siguientes casos

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)\right] \quad \text{invariancia bajo traslaciones temporales}$$
$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}\right] \quad \text{invariancia bajo traslaciones espaciales}$$
$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} - U(|\vec{r}|)\right] \quad \text{invariancia bajo rotaciones en el plano } (x, y)$$

Extienda el último caso a al invariancia bajo rotaciones generales, cuya acción finita está dada por $\vec{r}_{\text{transformado}} = O\vec{r}$ con $O$ una matriz ortogonal de determinante 1.

**Solución:** Para resolver este problema usaremos el teorema de Noether, el cual nos dice que una transformación infinitesimal deja la acción quasi-invariante, entones podemos construir una cantidad conservada $Q$ como veremos a continuación para los siguientes casos.

**Traslación temporal:** Se nos pide encontrar la cantidad conservada ante la invariancia sobre traslaciones temporales de la siguiente acción, dada por

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)\right]$$

tenemos que la traslación temporal infinitesimal está dada por $\delta q = \epsilon\dot{q}$ en lo cual $\epsilon$ es un término arbitrario y muy pequeño, ahora, para encontrar que la acción es invariante bajo dicha transforación es necesario variar la acción, esto será como sigue

$$\begin{aligned}\delta S[q(t)] &= S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ L[q(t) + \delta q(t), \frac{d}{dt}(q(t) + \delta q(t))] - L[q(t), \dot{q}(t)]\end{aligned}$$

Para lo cual, luego de tomar una serie de Taylor en dos dimensiones, nótese en el enunciado, que en la acción dada no es dependiente explícitamente del tiempo, con lo cual el término extra dependiente del tiempo en la serie de Taylor multivariable se neglecta, así se llega a que la variación de la acción, cuando el Lagrangiano es independiente explícitamente del tiempo, está dada por

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(\partial_q L\ \delta q + \partial_{\dot{q}L\ \delta\dot{q}}) \tag{1.55}$$

Con lo cual solo queda calcular los términos involucrados en la variación del Lagrangiano, tal que

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,[-\partial_q U\ \epsilon\dot{q} + m\dot{q}\epsilon] = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{dB}{dt} \tag{1.56}$$

Con lo cual es necesario expresar la variación del Lagrangiano como la derivada total de un cantidad, tal que

$$\frac{d}{dt}(-U(q)\epsilon + mq\epsilon) = \frac{dB}{dt} \tag{1.57}$$

Con lo cual hemos encontrado la cantidad $B$ la cual es

$$B = -U(q)\epsilon + mq\epsilon \tag{1.58}$$

Así, por teorema de Noether, podemos construir una canidad conservada $Q$, cuya expresión es

$$\partial_{\dot{q}}L\ \delta q - B = Q$$

**Pregunta 6**

**Partícula conforme:** Calcule la cantidad conservada asociada a la transformación de simetría $\delta x(t) = \frac{\epsilon}{2}x(t) - \epsilon t\frac{dx(t)}{dt}$, para la acción de la partícula conforme

$$I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{\alpha}{x^2}\right). \tag{1.59}$$

Considerando la cantidad conservada asociada esta simetría, además de la conservación de la energía, encuentre la trayectoria de la partícula $x(t)$ de forma alebraica.

**Solución:** Para encontrar la cantidad conservada es necesario variar la acción con respecto a al transformaciñon de simetría infinitesimal $\delta x(t) = \frac{\epsilon}{2}x(t) - \epsilon t\frac{dx(t)}{dt}$, para lo cual, tenemos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 - \frac{\alpha}{x^2} \tag{1.60}$$

Ahora, para ver si la acción es invariante o quasi-invariante, variamos la acción y por tanto, el Lagrangiano, la variación de la accion es la siguiente

$$\begin{aligned}\delta I[x(t)] &= I[x(t) + \delta x(t)] - I[x(t)]\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,(L[x(t) + \delta x(x)] - L[x(t)])\end{aligned}$$

Lo cual, como ya sabemos, luego de una serie de Taylor se reduce a

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(\partial_x L\;\delta x + \partial_{\dot{x}} L\;\delta\dot{x})$$

Ahora, sabemos la expresión para el Lagrangiano y para la transformación de simetría, con lo cual solo queda calcular las derivadas parciales que aparecen el la variación y el álgebra subsiguiente

$$\begin{aligned}\delta I[x(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{2\alpha}{x^3}\left(\frac{\epsilon}{2}x - \epsilon t\dot{x}\right) - m\dot{x}\left(\frac{\epsilon}{2}\dot{x} + \epsilon t\ddot{x}\right)\right]\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\epsilon\left[\frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\alpha t\dot{x}}{x^3} - \frac{m\dot{x}^2}{2} - mt\dot{x}\ddot{x}\right]\end{aligned}$$

Ahora, para usar el teorema de Noether, que nos dice que, una cantidad conservada $B$ será tal que

$$\delta I[(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dB}{dt} \tag{1.61}$$

Para ello, es necesario dejar a la expresión anterior como una derivada total, con lo cual notamos que el primer término de la integral corresponde a

$$\frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\alpha t\dot{x}}{x^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t}{x^2}\right)$$

Y además el segundo término es tal que

$$-\frac{m\dot{x}^2}{2} - mt\dot{x}\ddot{x} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mt\dot{x}^2}{2}\right)$$

Con lo cual es posible reescribir la variación del Lagrangiano tal que

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t}{x^2} - \frac{mt\dot{x}^2}{2}\right) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dB}{dt}$$

Con lo cual tenemos que, la cantidad conservada $B$ es igual a

$$\boxed{B = \frac{\alpha t}{x^2} - \frac{mt\dot{x}^2}{2}} \tag{1.62}$$

Por tanto, la acción será quasi-invariante con un término de borde $B$. Ahora, para interpretar esta cantidad conservada $B$ y encontrar mediante ella las ecuaciones de movimiento, tendremos en cuenta lo siguiente, $B$ es muy parecido a la energía del sistema, de hecho, la energía del sistema en este caso estará dada por

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha}{x^2}$$

Con lo cual manipularemos alegebraicamente la expresión de la cantidad conservada $B$ para meterlo en la energía $E$

$$\begin{aligned} B = \frac{\alpha t}{x^2} - \frac{mt\dot{x}^2}{2} \quad , \quad / \cdot \frac{1}{t} \\ \frac{B}{t} = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{m\dot{x}^2}{2} \\ \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{B}{t} \end{aligned}$$

Así, tenemos una expresión para la energía cinética en términos de la energía potencial y la constante del movimiento $B$, así reemplazamos esto en $E$

$$\begin{aligned} E = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{B}{t} + \frac{\alpha}{x^2} \\ E + \frac{B}{t} = \frac{2\alpha}{x^2} \\ \frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}} = x^2 \\ \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}}} = x \end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido las ecuaciones de movimiento a partir de una cantidad conservada $B$ y la energía $E$ y está dada por

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}}} \quad , \quad \forall t > 0} \tag{1.63}$$

**Pregunta 7**

**Lagrangiano para la partícula cargada en el campo electromagnetico.** En este ejercicio utilice notación de índices, y la convención de Einstein. Considere una partícula cargada eléctricamente, de carga $q$, en presencia de un campo electromagnetico externo descrito por los potenciales $\phi(t, \vec{x})$ y $\vec{A}(t, \vec{x})$. Recuerde que el campo eléctrico y el campo magnético se obtienen a partir de estos potenciales mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A} \to E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \to B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \end{aligned}$$

La partícula está descrita por el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}|\vec{v}|^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i - q\phi(t, x) + qA_i(t, x)\frac{dx_i}{dt}.$$

Muestre que el Lagrangiano lleva a la expresión corrrecta para la fuerza de Lorentz, es decir

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.64}$$

Asumiendo que los potenciales no dependen del tiempo, muestre que la acción es invariante bajo traslaciones temporales

$$\delta x^i = \epsilon \dot{x}^i \tag{1.65}$$

y calcule la energía como cantidad conservada en el sistema.
Finalmente, para potenciales generales que dependen tanto de $t$, como de $\vec{x}$, muestre que el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(t,\vec{x})\right)^2 + q\phi(t,\vec{x}) \tag{1.66}$$

Discuta la diferencia entre $H$, y la energía calculada en el paso anterior.

**Solución:** Para mostrar que dicho Lagrangiano lleva a la fuerza de Lorentz, usaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para $x^i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$ coordenadas, las cuales está dadas por

$$\partial_{x^i} L - \frac{d}{dt}\partial \dot{x}^i L = 0 \tag{1.67}$$

Con lo cual, calculemos dichos términos

$$\begin{aligned} \partial_{x^i} L &= \partial_{x^i}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i - q\phi + qA_i\dot{x}^i\right) \\ &= -q\partial_{x^i}\phi + q\partial_{x^i}A_j\dot{x}^j \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{x}^i} L &= \partial_{\dot{x}^i}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i - q\phi + qA_i\dot{x}^i\right) \\ &= m\dot{x}^i + qA_i \end{aligned}$$

Ahora este último término lo diferenciamos en el tiempo tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}^i} L &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^i + qA_i\right) \\ &= m\ddot{x} + q\left(\partial_t A_i + \partial_{x^j} A_i \dot{x}^j\right) \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en las ecuaciones de Euler-Lagrange como sigue

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\partial_{x^i}\phi + q\partial_{x^j}A_i\dot{x}^j - q\partial_t A_i - \partial_{x^j}A_i\dot{x^j} \\ &= q\left(-\partial_{x^i}\phi - \partial_t A_i\right) + q\left(\partial_{x^i}A_j - \partial_{x^j}A_i\right)\dot{x^j} \\ &= qE_i + q\epsilon_{ijk}\dot{x}^j B^k \end{aligned}$$

Con lo cual, esto puede ser escrito de la siguiente forma

$$qE_i + q\epsilon_{ijk}\dot{x}^j B^k = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.68}$$

Con lo cual hemos confirmado que el Lagrangiano para una partícula inmersa en un campo electromagnético, este llevará a las ecuaciones de movimiento que es la fuerza de Lorentz.
Para la siguiente parte se asumirá que los potenciales $\phi$ y $A_i$ son independientes del tiempo.
Se tiene la acción

$$S[x^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L[\dot{x}^i, x^i, t] \tag{1.69}$$

Luego se tiene la siguiente transformación infinitesimal. La cual corresponde a una traslación temporal

$$\delta x^i = \epsilon \dot{x}^i \tag{1.70}$$

Ahora, para mostrar que la acción es invariante, variamos la acción

$$\delta S[x^i(t)] = S[x^i(t)+\delta x^i(t)] - S[x^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L\left[\frac{d}{dt}(x^i(t)+\delta x^i(t), x^i(t)+\delta x^i(t), t)\right] - L[\dot{x}^i, x^i, t]\right) \tag{1.71}$$

Ahora, tomando una serie de Taylor, obtenemos que la variación del Lagrangiano es igual a

$$\delta L = \partial_{x^i} L \; \delta x^i + \partial_{\dot{x}^i} L \; \delta \dot{x}^i \tag{1.72}$$

Con lo cual calculamos esta expresión usando la transformación dada y el Lagrangiano para una partícula sumida en un campo electromagnético.

$$\begin{aligned}\delta L &= \left(-q\partial_{x^i}\phi + q\partial_{x^i}A_i\dot{x}^i\right)\epsilon\dot{x}^i + \left(m\dot{x}^i + qA_i\right)\epsilon\ddot{x}^i \\ &= -q\epsilon\dot{x}^i\partial_{x^i}\phi + q\epsilon(\dot{x}^i)^2\partial_{x^i}A_i + \epsilon m\dot{x}^i\ddot{x}^i + q\epsilon A_i\ddot{x}^i\end{aligned}$$

Ahora bien, el Lagrangiano es independiente del tiempo podemos escribir lo siguiente

$$\delta L = \epsilon\left(\partial_{x^i} L \; \dot{x} + \partial_{\dot{x}^i} L \; \ddot{x}^i + \cancel{\partial_t L}^{\,0}\right) = \epsilon \; D_t L$$

Con lo cual, la cantidad B será

$$B = \epsilon L = \epsilon\left(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i - q\phi + qA_i\dot{x}\right)$$

y por tanto, mediante el teorema de Noether podemos encontrar una cantidad conservada Q la cual está dada por lo que sigue

$$\partial_{\dot{x}^i} L \; \delta x^i - B = Q$$

reemplazando el valor que encontramos para la cantidad $B$ y la traslación temporal, se obtiene

$$\partial_{\dot{x}^i} L \; \epsilon\dot{x}^i - \epsilon L = Q \tag{1.73}$$

Ahora desarollamos esta expresión para encontrar la cantidad Q conservada

$$\begin{aligned}\epsilon\left(m\dot{x}^i\dot{x}^i + qA_i\dot{x}^i - \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i + q\phi - qA_i\dot{x}^i\right) &= Q \\ \epsilon\left(\frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i + q\phi\right) &= Q \\ \epsilon E &= Q\end{aligned}$$

Con lo cual, hemos identificado la cantidad conservada $Q$ como la energía del sistema y por tanto, la energía de una partícula sumida en un campo electromagnético cuyos potenciales son idependientes del tiempo es conservada ante traslaciones espaciales.
Ahora para el cálculo del Hamiltoniano tenemos que, la definición del Hamiltoniano involucra una transformación de Legendre, lo que se representa de la siguiente forma

$$H(p_i, x^i, t) = p_i\dot{x}^i - L(\dot{x}^i, x^i, t) \tag{1.74}$$

En lo cual, $p_i$ son los momenta generalizados, cuya expresión está dada por

$$p_i = \partial_{\dot{x}^i} L$$

con lo cual, solo queda calcular, los momenta están dados por

$$\begin{aligned}\partial_{\dot{x}^i} L = m\dot{x}^i + qA_i &= p_i \\ \dot{x}^i &= \frac{p_i}{m} - \frac{q}{m}A_i\end{aligned}$$

Con lo cual, reescribimos el Lagrangiano usando los momenta

$$L = \left(\frac{p_i}{2m} - \frac{q}{2m}A_i\right)^2 - q\phi + qA_i\left(\frac{p_i}{m} - \frac{q}{m}A_i\right)$$

Con lo cual, solo queda calcular el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= p_i\left(\frac{p_i}{m}-\frac{q}{m}A_i\right)-\frac{1}{2m}\left(p_i-qA_i\right)^2+q\phi-qA_i\left(\frac{p_i}{m}-\frac{q}{m}A_i\right) \\ &= \frac{p_i^2}{m}-\frac{qp_iA_i}{m}-\frac{p_i^2}{2m}+\frac{qp_iA_i}{m}-\frac{q^2A_i^2}{2m}+q\phi-\frac{qp_iA_i}{m}+\frac{qA_i^2}{m} \\ &= \frac{p_i^2}{2m}-\frac{qp_iA_i}{m}+\frac{q^2A_i^2}{2m}+q\phi \\ &= \frac{(p_i-qA_i)^2}{2m}+q\phi \end{aligned}$$

Con lo cual el Hamiltoniano para una particula sumida en un campo electromagnético está dado por

$$H(p_i, x^i, t) = \frac{(p_i-qA_i)^2}{2m}+q\phi \tag{1.75}$$

Ahora, la diferencia entre la energía y el Hamiltoniano recae en que, el Hamiltoniano incluye términos cinéticos, el potencial magnético, y la energía no, lo que permite que la enegía sea una cantidad conservada en traslaciones temporales, o sea, la energía se conserva en el tiempo.

## 1.3. Tercera clase

Si tenenmos en cuenta el lagrangeano para una partícula libre no relativista, como sigue

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \tag{1.76}$$

Para el cual, si introducimos una variación infinitesimal, en específico, una transformación espacial, de la siguiente manera

$$\delta S = S[\vec{r}+\delta\vec{r}] - S[\vec{r}] = 0 \tag{1.77}$$

en lo cual $\delta\vec{r} = \vec{\epsilon}$ se le llamará a la traslación espacial, tendremos que por el teorema de Noether, el siguiente término se mantendrá constante

$$c^{te} = \partial_{\dot{\vec{r}}}L\cdot\delta\vec{r} - \cancel{B} \tag{1.78}$$

$$= \partial_{\dot{x}}L\delta x + \partial_{\dot{y}}l\delta y + \partial_z L\delta z \tag{1.79}$$

Ahora bien, usaremos la siguiene notación para las coordenadas $\partial_{\dot{\vec{r}}}L \to \partial_{\dot{x^k}}L$ en lo cual $x^k = (x, y, z)$. Ahora bien, el término constante lo podemos escribir como

$$c^{te} = \partial_{\dot{x^k}}L\epsilon^k \tag{1.80}$$

Lo cual si tomamos la derivada del lagrangeano para una partícula libre no relativista

$$\partial_{\dot{x^k}}L = \frac{1}{2}\partial_{\dot{x^k}} \tag{1.81}$$

$$= \frac{1}{2}m(\delta^i_k\dot{x^i}+\dot{x^i}\delta^i_k) \tag{1.82}$$

$$= m\dot{x^k} \tag{1.83}$$

Así y por tanto, se concluye que el término que, por teorema de Noether se conserva, es el siguiente

$$c^{te} = m\dot{x^k}\epsilon^k \tag{1.84}$$

Lo cual, en términos simples, nos dice que para toda coordenada $x^k$, el momento lineal se conserva para transformaciones espaciales, lo que viene siendo la primera ley de newton.

$$c^{te} = mv_x \tag{1.85}$$

Para la partícula libre no relativista, nuevamente, tenemos este lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \tag{1.86}$$

En lo cual tenemos que, la energía $E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ será invariante bajo transformaciones temporales y que, el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ será invariante bajo transformaciones espaciales. Con ello, podemos formular la relación de dispersión no relativista, la cual está dada por

$$E = \frac{|\vec{p}|}{2m} \tag{1.87}$$

## Relatividad especial:

1. Todos los observadores inerciales son equivalentes, mediante experimentos físicos no puedo dar cuenta si estoy en movimiento rectilíneo uniforme o no, experimento del tren.

2. Todos los observadores inerciales están de acuerdo en que la luz en el vació se mueve a una rapidez constante, $c = 300000[\text{km/s}]$.

3. Principio de homogeneidad del espacio-tiempo: todos los puntos e instantes son equivalentes, las leyes que rigen la física serán las mismas aquí y en la quebrá del ají .

4. Isotropía del espacio tiempo: todas las direcciones son equivalentes.

Notar que la relatividad de los observadores no inerciales lleva a la gravitación, lo mismo sucede con la suposición que los rayos de luz no necesariamente viajan en línea recta, nuevamente nos llevará a la gravitación. Notemos que cuando tenemos dos boost en diferentes direcciones, esto, no corresponde a un boost puro, si no que lleva consigo una rotación en el espacio- tiempo, este fenómeno es llamado como Precesión de Thomas.
**Landau volumen II, teoría clásica de campos, primeras 5 páginas del capítulo**
Los principios 1 y 4 implican que, si tenemos dos eventos, que ocurren en instantes diferentes en el espacio tiempo. Sean dos observadores, K y $\bar{K}$ para los cuales, los dos eventos tendrán etiquetas distintas, es decir

- Con respecto al sistema $K$ los eventos tendrán coordenadas $(t_1, x_1, y_1, z_1)$ y

$$(t_2, x_2, y_2, z_2)$$

- Con respecto al sistema $\bar{K}$ los eventos tendrán coordenadas $(\bar{t_1}, \bar{x_1}, \bar{y_1}, \bar{z_1})$ y $(\bar{t_2}, \bar{x_2}, \bar{y_2}, \bar{z_2})$

Ahora, dichos eventos podrán ser observados en diferente orden de sucesos, o no, dependiendo se su relación entre sí en su causalidad, si existe causalidad entre uno y otro, entonces su ordena estará fijo, segunda ley de la termodinámica, pero en caso que no hay causalidad entre sí, dichos eventos podrán ser observados en orden distintos dependiendo del observador.
**Invariacia del intervalo:** Consecuencia del principio de la relatividad especial, formulación de la métrica de minkwosky

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(\bar{t_2} - \bar{t_1})^2 - (\bar{x_2} - \bar{x_1})^2 - (\bar{y_2} - \bar{y_1})^2 - (\bar{z_2} - \bar{z_1})^2 \tag{1.88}$$

La conservación del interalo entre eventos P y Q tiene consecuencias dramáticas. ¿Y entonces qué? Primero asumiremos que P y Q están infinitesimalmente cerca, esto significa que

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + dt \\ x_2 &= x_1 + dx \\ y_2 &= y_1 + dy \\ z_2 &= z_1 + dz \end{aligned}$$

y además

$$\bar{t_2} = \bar{t_1} + \bar{dt}$$
$$\bar{x_2} = \bar{x_1} + \bar{dx}$$
$$\bar{y_2} = \bar{y_1} + \bar{dy}$$
$$\bar{z_2} = \bar{z_1} + \bar{dz}$$

La conservación del intervalo implica que:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \tag{1.89}$$

Ahora nos preguntamos, si nos damos las coordenadas con cachirulo, o sea, con respecto al observador inercial, ¿cómo se podrán escribir en función de las coordenadas sin cachirulo? Para ello nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciale parciales con 10 componentes, lo cual puede sonar feo, pero es la forma de obtener las transformaciones de lorentz en todas las dimensiones

$$c^2\left(\partial_t\bar{t}dt + \partial_x\bar{t}dx + \bar{t}_ydy + \bar{t}_zdz\right)$$
$$-\left(\partial_t\bar{x}dt + \partial_x\bar{x}dx + \partial_y\bar{x}dy + \partial_z\bar{x}dz\right)\dots$$

Existen 10 transformaciones parametrizadas por 10 parámetros continuos, relativistas

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Traslación temporal

$$\bar{t} = t + a$$
$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

Traslación espacial en x

$$\bar{t} = t$$
$$\bar{x} = x + h_x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

y así con todas las coordenadas.
Ahora bien, las rotaciones en el espacio serán, rotaciones en un plano $(x, y)$ que es equivalente a una rotación alrededor del eje $z$,

$$\bar{t} = t$$
$$\bar{x} = \cos\alpha x - \sin\alpha y$$
$$\bar{y} = \sin\alpha x + \cos\alpha y$$
$$\bar{z} = z$$

$\alpha \in [0, 2\pi]$.
Lo que implica que, nuestro intervalo invariante será

$$c^dt^2 - (\cos\alpha dx - \sin\alpha dy)^2 - (\sin\alpha dx + \cos\alpha dy)^2 - dz^2$$
$$= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

O sea, las rotaciones nos dejan invariante el invervalo (métrica de minkowsky) En rotación en el plano $(y, z)$ le llamaremos $\theta \in [0, 2\pi]$ y en rotaciones en el plano $(z, x)$ llamaremos al ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$.
Boost a lo largo del eje x:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{q - v^2/c^2}} \\
\bar{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
\bar{y} &= y \\
\bar{z} &= z
\end{aligned}$$

**Tarea: probar que deja el intervalo invariante**
Boost a lo largo del eje y:

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= \frac{t - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - {v_y}^2/c^2}} \\
\bar{x} &= x \\
\bar{y} &= \frac{y - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - {v_y}^2/c^2}}
\end{aligned}$$

**Tarea: boost a lo largo del eje z** y tomamos c $\to \infty$ sakurai de cuantica

### 1.3.1. Preguntas clase 3

**Pregunta 1**

Deduzca la relación de dispersión de la partícula libre no-relativista.
**Solución:**

**Pregunta 2**

Enuncie y explique los principios de la Relatividad Especial.

**Solución:**

**Pregunta 3**

Siga la discusión que aparece en Landau y Lifshitz V2, acerca de cómo los principios de la Relatividad Especial implican la invariancia del intervalo.

**Solución:**

**Pregunta 4**

Escriba las siguietes transformaciones de manera explícita: Traslación temporal, traslació espacial en $x$, traslación espacial en $y$, traslación espacial en $z$, rotación en el plano $(x, y)$, rotación en el plano $(z, x)$, boost a lo largo del eje $x$, boost a lo largo del eje $y$, boost a lo largo del eje $z$. Dé una interpretación clara de cada una de las transformaciones y muestre que el intervalo es invariante.

**Solución:**

## 1.4. Cuarta clase

Entonces, en la última clase, los principios de la relatividad especial, implican la invariancia del intervalo. La conservación del intervalo implica que:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \tag{1.90}$$

Hay 10 tipos de transformaciones continuas que preservan el intervalo, las cuales son

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Las rotaciones espaciales son del tipo

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + a, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \tag{1.91}$$

Las rotacione son del tipo

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= t \\
\tilde{x} &= \cos\theta x - \sin\theta y \\
\tilde{y} &= \sin\theta x + \cos\theta y \\
\tilde{z} &= z
\end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje x

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{t - v_x/c^2}{\sqrt{q - v^2/c^2}} \\
\tilde{x} &= \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
\tilde{y} &= y \\
\tilde{z} &= z
\end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje y, boost a lo largo del eje z.
Vimos que en el límite no relativista $c \to \infty$

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} \tag{1.92}$$

Lo cual corresponde al conocido boost de Galileo, el cual describe la posición mediante la velocidad relativa entre dos observadores inerciales (velocidad constante).
Asumamos que la partícula se mueve

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{v}, \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Con lo cual tenemos $\tilde{v}$ vs $v$, a lo cual

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} - V\frac{d\cancel{t}}{\cancel{d}\tilde{t}}$$

Con lo cual la composición de velocidades en el límite no relativista es

$$\tilde{v} = v - V \tag{1.93}$$

Lo cual no es compatible con la unicidad del valor de la rapidez de la luz en el vacío. Con lo cual es necesario encontrar una composición de velocidades que cumpla con los postulados de la relatividad especial. Para ello

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ d\tilde{t} &= \frac{dt - v/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} &= \frac{dx - V dt}{dt - V/c^2 dx} \cdot \frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - V/c^2 \frac{dx}{dt}} \end{aligned}$$

Así, la suma de velocidades relativista está dado por

$$\tilde{v_x} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \tag{1.94}$$

Ahora veamos el caso en el cual $v_x = c$

$$\tilde{v_x} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2} c} = \frac{c - V}{\frac{c - V}{c}} = c$$

$$i\bar{h}\partial_t \Phi = -\frac{\bar{h}^2}{2m} \nabla^2 \Phi \tag{1.95}$$

En lo cual, el término $\frac{-\bar{h}^2}{2m}\nabla^2\Phi = \frac{p^2}{2m}\nabla^2\Phi$ Con lo cual, la relación de dispersión queda tal que:

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}} \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2} + \frac{1}{4}\frac{p^4}{m^4c^4}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{4m^3c^2} \end{aligned}$$

Quedó de tarea el probar la invariancia de la acción ante composición de velocidades

### 1.4.1. Preguntas clase 4

#### Pregunta 1

Demuestre que la acción

$$S[x(t)] = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{1.96}$$

reproduce la acción de la partícula libre no-relativista, módulo una constante aditiva.

**Solución:** Para volver a la acción de la partícula libre no-relativista, se define a la velocidad como $v = \frac{dx}{dt}$ y además se considera a $\frac{v^2}{c^2}$, o sea, estamos condiserando a la velocidad de la luz como muy grande. Así, tomando la expansión el Taylor alrededor del origen, para $v$ obtenemos lo siguiente:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$$

Considerando que $\mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$ es muy pequeño, entonces

$$\begin{aligned} S[x(t)] &\approx -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \\ &\approx -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\ v^2 \\ &\approx -mc^2 (t_2 - t_1) + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\ v^2 \end{aligned}$$

Así se obtiene que, la acción para la partícula no-relativista, derivada de la acción $S[x(t)]$ se divide en dos contribuciones, la energía cinética clásica de la partícula y una constante aditiva, ahora, el segundo término de la acción obtenida

$$\frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\ v^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} v^2 \tag{1.97}$$

Corresponde a la dicha acción de la partícula libre no relativista

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} v^2 \tag{1.98}$$

en lo cual su término de dentro, corresponde al Lagrangiano para la partícula libre no-relativista

$$L_{no-rel} = \frac{m}{2} v^2 \tag{1.99}$$

**Pregunta 2**

Muestre que la acción es invariante bajo boost

**Solución:**
Hola

**Pregunta 3**

Muestre que la acción anterior es invariante bajo traslaciones temporales, y muestre que el teorema de Noether implica que tal invariancia es la responsable de la conservación de la energía relativa, dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.100}$$

**Solución:**

**Pregunta 4**

Muestre que la acción anterior es invariante bajo traslaciones espaciales, y muestre que el teorema de Noether implica que tal invariancia es la responsable de la conservación del momento lineal relativista, dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.101}$$

**Solución:**

**Pregunta 5**

A partir de las expresiones anteriores, muestre la relación de dispersión relativista

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{1.102}$$

**Solución:**

**Pregunta 6**

Imagine que un estudiante que ya pasó por mecánica clásica, le pregunta ¿qué siginfica la expresión $E = mc^2$ y de donde viene? ¿ Qué respondería ?

**Solución:**

## 1.5. Quinta clase

$$S_{NR}[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \tag{1.103}$$

Corresponde a la acción de la partícula libre no relativista, ahora bien, para una partícula relativista se tiene lo siguiente

$$S_{REL}[x(t)] = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} \tag{1.104}$$

Ahora con dos observadores inerciales $K$ y $\tilde{K}$, para lo cual $K$ tiene coordenadas $(x, y)$ y además $\tilde{K}$ tiene coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{t})$, se simplifican mucho los cáculos asumiendo que el eje $x$ está alineado con el movimiento relativo del sistema de referencia $\tilde{K}$. Ahora resulta ser que la acción $S[x(t)]$ es invariante bajo boost. (no entendí la letra).

$$\tilde{t} = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

En donde,

1. $V$ es la velocidad relativa de $\tilde{K}$ con respecto a $K$
2. $v(t) = \frac{dx}{dt}$ velocidad de la partícula según $K$
3. $\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt}$ velocidad de la partícula según $\tilde{K}$

Además se encuentra que $S_{REL}[x(t)]$ es cuasi-invariante bajo transfomaciones temporales

$$\delta_{TT} x = -\epsilon \frac{dx}{dt} \tag{1.105}$$

Lo que implica la conservación de energía relativista, que forma

$$E = \frac{-mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.106}$$

Además $S_{REL}[x(t)]$ es invariante bajo transformaciones espaciales

$$\delta_{TE} x = a \tag{1.107}$$

Se conserva el momentum lineal relativista

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.108}$$

Estas dos relaciones implicarán la relación de dispersión relativista.

$$E = \sqrt{p^2 m^2 + m^2 c^4} \tag{1.109}$$

¿ Cuál es la cantidad conservada del boost, que depende explícitamente del tiempo.

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial y} + \cdots = 0 \tag{1.110}$$

Obsevarmos que si $p = 0 \to E = mc^2$. Queremos hacer cuántica la relatividad especial con la relación de dispersión relativista.

$$E^2 = p^2 c^2 + c^2 p^4 \tag{1.111}$$

Argumento eurístico que lleva a la ecuación de Schödinger

$$\begin{aligned} p &\to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ E &\to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Efecto fotoeléctrico

$$E = \hbar \omega \tag{1.112}$$

Difracción de electrones

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad , \quad \text{relación de Broflie} \tag{1.113}$$

en el cual el monento es el siguiente

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.114}$$

Se tiene la siguiente función de onda plana

$$\Psi = Ae^{-i(\omega t - kx)} \quad , \quad k = \frac{\omega}{\lambda} \tag{1.115}$$

Con esta, tenemos que encontrar operadores tal que

$$\begin{aligned} \hat{E}\Psi = \hbar\omega\Psi &\to p = -\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}\Psi = \frac{h}{\lambda}\Psi &\to E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Así, finalmente tenemos la relacion de dispersión relativista y además los operadores energía y momento, lo cual si lo reemplazamos en dicha relación de dispersión queda como sigue

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ -\hbar \partial_t^2 \Psi &= -c\hbar^2 \partial_x^2 \Psi + m^2 c^4 \Psi \quad , \quad / \frac{1}{\hbar^2 c^2} \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi - \partial_x^2 \Psi + \frac{m^2 c^2}{h^2} \Psi = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual, hemos llegado a la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0} \tag{1.116}$$

La cual corresponde a la ecuación de Klein-Gordon ¿ Podemos demostrar la constancia de una cantidad definida positiva? con $c = 1$ y $\hbar = 1$. En este caso, $c = 1$ significa que se mueve a la rapidez de la luz, y para rapideces menores sería en factor de por ejemplo un 80 % o $c = 0{,}8$.

$$\begin{aligned}
\Psi^*\partial_t^2\Psi - \Psi^*\partial_x^2 - m^2\Psi^*\Psi = 0\\
\Psi\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_x^2\Psi^* + m^2\Psi\Psi^* = 0\\
\Psi^*\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_t^2\Psi^*\Psi\partial_x^2\Psi^* - \Psi^*\partial_x^2\Psi = 0\\
\partial_t\left(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*\right) + \partial_x\left(\Psi\partial_x\Psi^* - \partial_x\Psi\right) = 0
\end{aligned}$$

Luego, de ello definimos lo siguiente

$$\rho = \Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^* \tag{1.117}$$

Lo cual no es definido positivo, a diferencia del $\rho_{SSHR} = \Psi^*Psi > 0$, si bien $\rho$ es conservado, no admite una interpretación probabilística. Más aún $\rho^* = -\rho \to \rho$ es puramente imaginario.
$\tilde{\rho} = i\rho$ en donde $\rho \in \Re$ pero su signo no está definido.
Además se define la siquiente corriente de función de onda

$$j = \Psi\partial_x\Psi^* - \Psi^*\partial_x\Psi \tag{1.118}$$

La cual corresponde a una corriente de la función de onda, la cual denotará, en un flujo, cuánta de la función de onda se escapa de la frontera del volumen en la cual está definida. Así, similarmente al caso electromagnético, pero con ondas, podemos escribir una ecuación de continuidad para ondas, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V dV\rho\right) + \int_{\partial V}\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.119}$$

La cual es la ecuación de continuidad de la función de onda, y en la cual, mientras la función no se .$^{\text{es}}$cape"del volumen, la densidad de probabilidad $\rho_{SSHR} = \Psi^*\Psi > 0$ será conservada.
a- signo relativo entre $\Psi^*$ y $\Psi$. En $\rho$, viene de la segudna derivada temporal ¿ Existe una ecuación de primer orden con respecto al tiempo y primer orden en el espacio relativista? Propongamos tal ecuación

$$\begin{aligned}
\alpha\partial_t\Psi + \beta\partial_x\Psi = 0, \quad / \quad (\alpha\partial_t\Psi + \beta\partial_x\Psi)\\
\alpha^2\partial_t^2\Psi + \alpha\beta\partial_t\partial_x\Psi + \beta\alpha\partial_x\partial_t + \beta^2\partial_x^2\Psi = 0
\end{aligned}$$

versus la forma funcionald de $E = h\omega$ h barra, t $\lambda = \frac{h}{mv}$,

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi = 0$$

Por lo tanto, $\alpha^2 = 1$ y $\beta^2 = -1$ así

$$\begin{aligned}
\alpha\partial_t\Psi + \vec{\beta}\cdot\vec{\nabla}\Psi = 0\\
\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3 m\} = \beta_i\\
\alpha^2 = 1, \quad \beta_i\beta_j = -\delta_{ij}\\
\alpha\beta_i + \beta_i\alpha = 0 \quad , \quad \forall i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Así,$\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ serán matrices, pero ¿ De cuánto por cuánto ?
Básicamente las beta pegarán como operador matricial a las funciones de onda las cuales serán vectores así saldrán cuatro fuciones de onda.

Existe un teorema que implica de las cuatro componentes de matrices son al menos de 4x4, las cuales son llamadas matrices de Dirac.

$$\Psi = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(\vec{x}) \tag{1.120}$$

Ecuación de Dirac, permite hacer una máquina de movimiento perpertuo, pero Dirac hizo un parche en vez de decir que los niveles de energía estuvieran disponibles, se asume que todos están ocupados. lo que nos permite predecir una partícula con la misma masa del electrón pero con carga opuesta, o sea, lo positrones. Pero toda esta interpretación es inesesaria, ya que el $E$ no es la energía, directamente, ya que la energía es el autoestado del Hamintoniano,lo que no debe ir directamente o no siempre en la función de onda. ¿ Donde está el mar de Dirac?, lo otro que puede ocurrir es que si estas partículas fueran neutrinos, lo neutrinos no tienen carga eléctrica, donde están los anti-neutrinos, jaja xd

### 1.5.1. Preguntas quinta clase

## 1.6. Sexta clase

Volvemos a relatividad especial

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{t - V/c^2 x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
\tilde{x} &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\
V &= c \tanh \xi
\end{aligned}$$

Ahora, si definimos $V$ así

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - \tanh^2 \xi \qquad = \frac{1}{\cosh^2 \xi}$$

Con lo cual recordemos las propiedades que cumplen las funciones trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1 \tag{1.121}$$

$$1 - \tanh^2 \xi = \frac{1}{\cosh^2 \xi} \tag{1.122}$$

Por lo tanto, podemos escribir nuestras transformaciones como lo siguiente

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{t - \frac{\tanh \xi}{c} x}{\frac{1}{\cosh \xi}} \\
c\tilde{t} &= \cosh \xi ct - \sinh \xi x \\
\tilde{x} &= \cosh \xi x - \sinh \xi ct \\
\tilde{z} &= z \\
\tilde{y} &=
\end{aligned}$$

En lo cual, $\sinh \xi$ será la rapidity.
Ahora, escribamos esto en notación tensorial de la siguiente forma

$$x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{xt, x, y, z\} \tag{1.123}$$

Lo cual representa las coordenadas de un evento en el espacio tiempo plano (Minkowsky).
(Escribió la transformación en matrices, revisar como escribir las matrices)
Aplicamos las transformaciones en forma matricial

$$\tilde{x}^\mu = \{\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\} = \{c\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} \tag{1.124}$$

Ahora, la matriz de transformación se representa como un tensor $\Lambda^{\mu}_{\nu}$ de transformacion para el tensor de posiciones $x^{\mu}$ tal que, la regla de transformación para la posición dentro del espacio tiempo plano de Minkowsky, es bajo la siguiente regla

$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.125}$$

en lo cual los índices $\nu$ están contraidos y por tanto, sumados.
Pensamos ahora, en una transformación más general y preguntémonos ¿ Qué nos dice la invariancia del intervalo con respecto de $\Lambda^{\mu}_{\nu}$?

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{x}} &= \Theta \vec{x} \\
||\tilde{\vec{x}}||^2 &= ||\vec{x}||^2 \\
\tilde{\vec{x}}^T \tilde{\vec{x}} &= \vec{x}^T \vec{x} \\
(\Theta \vec{x})^T (\Theta \vec{x}) &= \vec{x}^T \vec{x} \\
\vec{x}^T \Theta^T \Theta \vec{x} &= \vec{x}^T \vec{x}
\end{aligned}$$

En lo cual, las matrices $\Theta$ se definen como ortogonales, o sea que, $\Theta^T \Theta = I$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\
&= c^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{z}^2
\end{aligned}$$

Para lo cual

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Donde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ la cual corresponde a la métrica de Minkowsky, ahora, expandamos la suma de la métrica $ds^2$, primero sumamos la suma, valga la redundancia, en el índice $\nu$.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{\nu=0}^{3} \left( \eta_{\mu 0} dx^{\mu} dx^0 + \eta_{\mu 1} dx^{\mu} dx^1 + \eta_{\mu 2} dx^{\mu} dx^2 + \eta_{\mu 3} dx^{\mu} dx^3 \right) \\
&= \eta_{00} (dx^0)^2 + \eta_{11} (dx^1)^2 + \eta_{22} (dx^2)^2 + \eta_{33} (dx^3)^2 \\
&= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2
\end{aligned}$$

Por tanto

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu}$$

Pero queremos que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \rightarrow d\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} dx^{\alpha} \\
\tilde{x}^{\nu} &= \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\beta} \rightarrow d\tilde{x}^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\beta}
\end{aligned}$$

Con lo cual, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\eta_{\cancel{\mu}_{\alpha} \cancel{\nu}_{\alpha}} dx^{\cancel{\mu}^{\alpha}} dx^{\cancel{\nu}^{\beta}} &= \eta_{\mu\nu} \left( \Lambda^{\nu}_{\alpha} dx^{\alpha} \right) \left( \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\beta} \right) \\
\left( \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} - \eta_{\alpha\beta} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta} &= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{1.126}$$

tenemos que $\Lambda$ será una transformación de Lorenz si ocurre lo anterior

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\mu}_{\alpha} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} &= \eta_{\alpha\beta} \\
\Lambda^T \eta \Lambda &= \eta
\end{aligned}$$

versus

$$\Theta^T I \Theta = I$$

En lo cual se usa la siguiente propiedad

$$\xi^T C \xi = C$$

Siendo c una matriz antisimétrica con respecto a la diagonal y además diagonal nula.
Definición: Diremos que un arreglo denotado por $A^\alpha$ es un vector contravariante de Lorentz si bajo una transoformación de Lorentz:

$$\tilde{A}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta \tag{1.127}$$

Las coordenadas $x^\mu$ definen un vector contravariante, ahora, un vector contravariante sería el 4-momenta.
Ahora, se tiene un observador $\tilde{K}$ el cual se mueve a una velocidad constante $V$ con respecto a un observador $K$, ambos observadores son inerciales.
¿ Dados $E$ y $P$, cómo encontramos $\tilde{E}$ y $\tilde{P}$ ?

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad P = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

versus sus tildas

$$\tilde{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} \quad , \quad \tilde{P} = \frac{m\tilde{v}}{\sqrt{1-frac\tilde{v}^2c^2}}$$

Ahora, aplicamos la transformación para la velocidad $\tilde{v}$ tal que

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}\right)^2}} \\
&= \frac{c\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)mc^2}{\sqrt{c^2\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)^2-(v-V)^2}} \\
&= \frac{c(1-\frac{vV}{c^2})mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mvV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
\frac{\tilde{E}}{c} &= \frac{\frac{E}{c}-\frac{V}{c}P}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Versus

$$c\tilde{t} = \frac{ct-\frac{V}{c}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Tarea,

$$\tilde{p} = \frac{m\tilde{v}}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} = \frac{p-\frac{V}{c}\left(\frac{E}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

versus

$$\tilde{x} = \frac{x - \frac{V}{c}(c\tilde{t})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Definición: 4-momenta o cuadrivector de momentum , de define como

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad , \quad \tilde{p}^\mu = \left(\frac{\tilde{E}}{c}, \tilde{\vec{p}}\right) \tag{1.128}$$

y además

$$\tilde{p}^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \tag{1.129}$$

El cuadrimoemento es un vector contravariante de Lorentz

### 1.6.1. Preguntas clase 6

Aquí las preguntas clase 6