Ejercicios de Introducción a las partículas elementales y Teoría Cuantica de Campos

Amaro A. Díaz Concha y Fernanda C. Mella Alvarez

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Índice general

Capítulo 1

Parte primera

1.1. Preguntas clase 1

1.1.1. Pregunta 1

Escriba la ecuación de Schödinger para el àtomo de hidrógeno, incluyendo las contribuciones cinéticas tanto del protón como del electrón, además de la energía potencial de la interacción.

Solución:

1.1.2. Pregunta 2

Argumente que la formulación standard de la mecácnia cuántica no-relativista considera un número fijo de partículas y no permite describir transiciónes entre estados con número distinto de partículas.

Solución:

1.1.3. Pregunta 3

Describa el efecto Compton y diga por qué razón el resultado clásico es distinto al observado. Calcule la longitud de Compton del electrón.

Solución:

1.1.4. Pregunta 4

Describa el decaimiento beta ¿Cuál es la vida media de un neutrón? ¿Cómo interpreta tal número?

Solución:

1.1.5. Pregunta 5

Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange, argumentando cláramente cada uno de sus pasos. Explique porqué nunca es necesario preguntarse si la variación δ conmuta o no con la derivada temporal $\frac{d}{dt}$. Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano que dependec de un número arbitrario de coordenadas generalizadas $q_i(t)$ con $i = 1, \ldots, N$.

Solución: Sea la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\dot{q}^i, q^i, t) \tag{1.1}$$

Para lo cual $q^i(t) \quad ,i = 1,\dots,N$ son las coordenadas generalizadas las cuales están bien definidas en el intervalo de $t \in [t_1, t_2]$ en los cuales se tiene que las condiciones de borde homogéneas (shell) tal que, aunque las funcion pueda cambiar dentro del intervalo (t_1, t_2) los valores en los extremos t_1 y t_2 no cambiará. Así, consideraremos una variacion del camino infinitesimal del camino que tomará, la cual denotaremos por $\delta q^i = \Phi^i(t)$ que al igual que las coordenadas, será dependiente del tiempo, la variación de la acción ante esta variacion infinitesimal de camino es denotada por

$$\begin{aligned}\delta S &= S[q^i(t) + \Phi^i(t)] - S[q^i(t)]\\ &= \int_{t_1}^{t_2} L\left[q^i(t) + \Phi^i(t), \frac{d}{dt}\left(q^i(t) + \Phi^i(t)\right), t\right] - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i, t)\end{aligned}$$

Ahora, se tiene la siguiente dependencia en el Lagrangiano $L\left[q^i(t) + \Phi^i(t), \frac{d}{dt}\left(q^i(t) + \Phi^i(t)\right), t\right]$ para lo cual se tomará una serie de Taylor con respecto al origen como sigue

$$L\left[q^i + \Phi^i, \frac{d}{dt}\left(q^i + \Phi^i\right)\right] = L + \partial_{q^i} L\ \Phi^i + \partial_{\dot{q}^i} L\ \dot{\Phi} + \mathcal{O}({\Phi^i}^2, {\dot{\Phi}^i}^2, \Phi^i, \dot{\Phi}^i) \tag{1.2}$$

$$\tag{1.3}$$

Con lo cual, si introducimos (1.2) sin tomar en cuenta los términos de $\mathcal{O}({\Phi^i}^2, {\dot{\Phi}^i}^2, \Phi^i, \dot{Phi}^i)$ se tiene lo siguiente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L + \partial_{q^i} L\ \Phi^i + \partial_{\dot{q}^i} L\ \dot{\Phi}\right) - \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

Ahora, usando regla de Leibniz en el tercer término en la primera integral, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i\right) &= \frac{d}{dt}\partial_{\dot{q}^i}\Phi^i + \partial_{\dot{q}^i}(L)\ \dot{\Phi}^i \\ \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i) - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L)\ \Phi^i &= \partial_{\dot{q}^i}\dot{\Phi}^i\end{aligned} \tag{1.4}$$

Con lo cual, introduciendo (1.4) en el desarollo, obtenemos lo que sigue

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L + \partial_{q^i} L\ \Phi^i + \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i) - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L)\ \Phi^i\right] - \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)\\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L - L + \partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L)\Phi^i\right] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i)\end{aligned}$$

Notese que el ùltimo término será igual a cero ya que este está evaluado en los los extremos, veamos que, por el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i) = \left[\partial_{\dot{q}^i} L\ \Phi^i\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Ya que, como sabemos $\Phi^i(t_1) = \Phi^i(t_2) = 0$ son las condiciones de borde impuestas, así sigue que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\partial_{q^i} L + \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L)\right)\Phi^i$$

Luego, se sume que el princpio de acción es estacionaro, con lo cual $S\delta \stackrel{!}{=} 0$ con lo cual se obtiene

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\partial_{q^i} L - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L)\right)\Phi^i$$

Ahora, como se ha realizado para un intervalo de tiempos cualesquiera, entonces el integrando será cero para todo tiempo, lo cual es

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\partial_{q^i} L - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L)\right]\Phi^i \\ &= \partial_{q^i} L - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L) \end{aligned}$$

En donde se ha obviado el caso trivial en el cual $\Phi^i = 0$ ya que esta es una función arbitraria.
Con lo cual, finalmente se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange para $q^i(t) \quad , i = 1, \ldots, N$ las cuale están dadas por

$$\boxed{\partial_{q^i} L - \frac{d}{dt}(\partial_{\dot{q}^i} L) = 0} \tag{1.5}$$

1.2. Ejercicios clase 2

1.2.1. Pregunta 1

Manipulando la segunda ley de Newton para una partícula en presencia de una energía potencial $U(x(t))$, muestre que la energía es conservada.

Solución:

1.2.2. Pregunta 2

Deduzla la transformación infinitesimal que representa una traslación en el tiempo actuando sobre un grado de libertad $q(t)$.

Solución:

1.2.3. Pregunta 3

Deduzla la transformación infinitesimal que representa una traslación espacial del grado de libertad $\vec{r}(t)$.

Solución:

1.2.4. Pregunta 4

Deduzca la transformación infinitesimal que representa una rotación en el plano (x, y), actuando sobre la posición de una partícula $\vec{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

Solución:

1.2.5. Pregunta 5

Demuestre, explicando cada paso, que una transformación infinitesimal que deja quasi-invariante la acción de un conjunto de grados de libertad q_A con $A = 1, \ldots, N$, permite construir una cantidad conservada Q. Construya tal cantidad conservada para los siguientes casos

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)\right] \quad \text{invariancia bajo traslaciones temporales}$$

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}\right] \quad \text{invariancia bajo traslaciones espaciales}$$

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} - U(|\vec{r}|)\right] \quad \text{invariancia bajo rotaciones en el plano } (x, y)$$

Extienda el último caso a al invariancia bajo rotaciones generales, cuya acción finita está dada por $\vec{r}_{\text{transformado}} = O\vec{r}$ con O una matriz ortogonal de determinante 1.

Solución: Para resolver este problema usaremos el teorema de Noether, el cual nos dice que una transformación infinitesimal deja la acción quasi-invariante, entones podemos construir una cantidad conservada Q como veremos a continuación para los siguientes casos.

Traslación temporal: Se nos pide encontrar la cantidad conservada ante la invariancia sobre traslaciones temporales de la siguiente acción, dada por

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - U(q)\right]$$

tenemos que la traslación temporal infinitesimal está dada por $\delta q = \epsilon\dot{q}$ en lo cual ϵ es un término arbitrario y muy pequeño, ahora, para encontrar que la acción es invariante bajo dicha transforación es necesario variar la acción, esto será como sigue

$$\begin{aligned}\delta S[q(t)] &= S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ L[q(t) + \delta q(t), \frac{d}{dt}(q(t) + \delta q(t))] - L[q(t), \dot{q}(t)]\end{aligned}$$

Para lo cual, luego de tomar una serie de Taylor en dos dimensiones, nótese en el enunciado, que en la acción dada no es dependiente explícitamente del tiempo, con lo cual el término extra dependiente del tiempo en la serie de Taylor multivariable se neglecta, así se llega a que la variación de la acción, cuando el Lagrangiano es independiente explícitamente del tiempo, está dada por

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(\partial_q L\ \delta q + \partial_{\dot{q}L\ \delta\dot{q}}) \tag{1.6}$$

Con lo cual solo queda calcular los términos involucrados en la variación del Lagrangiano, tal que

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,[-\partial_q U\ \epsilon\dot{q} + m\dot{q}\epsilon] = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{dB}{dt} \tag{1.7}$$

Con lo cual es necesario expresar la variación del Lagrangiano como la derivada total de un cantidad, tal que

$$\frac{d}{dt}(-U(q)\epsilon + mq\epsilon) = \frac{dB}{dt} \tag{1.8}$$

Con lo cual hemos encontrado la cantidad B la cual es

$$B = -U(q)\epsilon + mq\epsilon \tag{1.9}$$

Así, por teorema de Noether, podemos construir una canidad conservada Q, cuya expresión es

$$\partial_{\dot{q}}L\ \delta q - B = Q$$

1.2.6. Pregunta 6

Partícula conforme: Calcule la cantidad conservada asociada a la transformación de simetría $\delta x(t) = \frac{\epsilon}{2}x(t) - \epsilon t\frac{dx(t)}{dt}$, para la acción de la partícula conforme

$$I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{\alpha}{x^2}\right). \tag{1.10}$$

Considerando la cantidad conservada asociada esta simetría, además de la conservación de la energía, encuentre la trayectoria de la partícula $x(t)$ de forma alebraica.

Solución: Para encontrar la cantidad conservada es necesario variar la acción con respecto a al transformaciñon de simetría infinitesimal $\delta x(t) = \frac{\epsilon}{2}x(t) - \epsilon t\frac{dx(t)}{dt}$, para lo cual, tenemos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}\right)^2 - \frac{\alpha}{x^2} \tag{1.11}$$

Ahora, para ver si la acción es invariante o quasi-invariante, variamos la acción y por tanto, el Lagrangiano, la variación de la accion es la siguiente

$$\begin{aligned}\delta I[x(t)] &= I[x(t) + \delta x(t)] - I[x(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(L[x(t) + \delta x(x)] - L[x(t)]\right)\end{aligned}$$

Lo cual, como ya sabemos, luego de una serie de Taylor se reduce a

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\partial_x L\ \delta x + \partial_{\dot{x}} L\ \delta\dot{x}\right)$$

Ahora, sabemos la expresión para el Lagrangiano y para la transformación de simetría, con lo cual solo queda calcular las derivadas parciales que aparecen el la variación y el álgebra subsiguiente

$$\begin{aligned}\delta I[x(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{2\alpha}{x^3}\left(\frac{\epsilon}{2}x - \epsilon t\dot{x}\right) - m\dot{x}\left(\frac{\epsilon}{2}\dot{x} + \epsilon t\ddot{x}\right)\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\epsilon\left[\frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\alpha t\dot{x}}{x^3} - \frac{m\dot{x}^2}{2} - mt\dot{x}\ddot{x}\right]\end{aligned}$$

Ahora, para usar el teorema de Noether, que nos dice que, una cantidad conservada B será tal que

$$\delta I[(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\delta L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dB}{dt} \tag{1.12}$$

Para ello, es necesario dejar a la expresión anterior como una derivada total, con lo cual notamos que el primer término de la integral corresponde a

$$\frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\alpha t\dot{x}}{x^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t}{x^2}\right)$$

Y además el segundo término es tal que

$$-\frac{m\dot{x}^2}{2} - mt\dot{x}\ddot{x} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mt\dot{x}^2}{2}\right)$$

Con lo cual es posible reescribir la variación del Lagrangiano tal que

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha t}{x^2} - \frac{mt\dot{x}^2}{2}\right) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dB}{dt}$$

Con lo cual tenemos que, la cantidad conservada B es igual a

$$\boxed{B = \frac{\alpha t}{x^2} - \frac{mt\dot{x}^2}{2}} \tag{1.13}$$

Por tanto, la acción será quasi-invariante con un término de borde B. Ahora, para interpretar esta cantidad conservada B y encontrar mediante ella las ecuaciones de movimiento, tendremos en cuenta lo siguiente, B es muy parecido a la energía del sistema, de hecho, la energía del sistema en este caso estará dada por

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha}{x^2}$$

Con lo cual manipularemos alegebraicamente la expresión de la cantidad conservada B para meterlo en la energía E

$$B = \frac{\alpha t}{x^2} - \frac{mt\dot{x}^2}{2} \quad , \quad / \cdot \frac{1}{t}$$
$$\frac{B}{t} = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{m\dot{x}^2}{2}$$
$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{B}{t}$$

Así, tenemos una expresión para la energía cinética en términos de la energía potencial y la constante del movimiento B, así reemplazamos esto en E

$$E = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{B}{t} + \frac{\alpha}{x^2}$$
$$E + \frac{B}{t} = \frac{2\alpha}{x^2}$$
$$\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}} = x^2$$
$$\sqrt{\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}}} = x$$

Con lo cual hemos obtenido las ecuaciones de movimiento a partir de una cantidad conservada B y la energía E y está dada por

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}}} \quad , \quad \forall t > 0} \tag{1.14}$$

1.2.7. Pregunta 7

Lagrangiano para la partícula cargada en el campo electromagnetico. En este ejercicio utilice notación de índices, y la convención de Einstein. Considere una partícula cargada eléctricamente, de carga q, en presencia de un campo electromagnetico externo descrito por los potenciales $\phi(t, \vec{x})$ y $\vec{A}(t, \vec{x})$. Recuerde que el campo eléctrico y el campo magnético se obtienen a partir de estos potenciales mediante las siguientes expresiones

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A} \to E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \to B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j}$$

La partícula está descrita por el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2}|\vec{v}|^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}\dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi(t, x) + qA_i(t, x)\frac{dx_i}{dt}.$$

Muestre que el Lagrangiano lleva a la expresión corrrecta para la fuerza de Lorentz, es decir

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.15}$$

Asumiendo que los potenciales no dependen del tiempo, muestre que la acción es invariante bajo traslaciones temporales

$$\delta x^i = \epsilon \dot{x}^i \tag{1.16}$$

y calcule la energía como cantidad conservada en el sistema.
Finalmente, para potenciales generales que dependen tanto de t, como de $\vec{x}$, muestre que el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}(t, \vec{x})\right)^2 + q\phi(t, \vec{x}) \tag{1.17}$$

Discuta la diferencia entre H, y la energía calculada en el paso anterior.

Solución: Para mostrar que dicho Lagrangiano lleva a la fuerza de Lorentz, usaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para $x^i \quad , \quad i = 1, \ldots, N$ coordenadas, las cuales está dadas por

$$\partial_{x^i} L - \frac{d}{dt} \partial \dot{x}^i L = 0 \tag{1.18}$$

Con lo cual, calculemos dichos términos

$$\begin{aligned} \partial_{x^i} L &= \partial_{x^i} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi + qA_i \dot{x}^i \right) \\ &= -q \partial_{x^i} \phi + q \partial_{x^i} A_j \dot{x}^j \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{x}^i} L &= \partial_{\dot{x}^i} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi + qA_i \dot{x}^i \right) \\ &= m\dot{x}^i + qA_i \end{aligned}$$

Ahora este último término lo diferenciamos en el tiempo tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x}^i} L &= \frac{d}{dt} \left(m\dot{x}^i + qA_i \right) \\ &= m\ddot{x} + q \left(\partial_t A_i + \partial_{x^j} A_i \dot{x}^j \right) \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en las ecuaciones de Euler-Lagrange como sigue

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\partial_{x^i} \phi + q \partial_{x^j} A_i \dot{x}^j - q \partial_t A_i - \partial_{x^j} A_i \dot{x}^j \\ &= q \left(-\partial_{x^i} \phi - \partial_t A_i \right) + q \left(\partial_{x^i} A_j - \partial_{x^j} A_i \right) \dot{x}^j \\ &= qE_i + q\epsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k \end{aligned}$$

Con lo cual, esto puede ser escrito de la siguiente forma

$$qE_i + q\epsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.19}$$

Con lo cual hemos confirmado que el Lagrangiano para una partícula inmersa en un campo electromagnético, este llevará a las ecuaciones de movimiento que es la fuerza de Lorentz.
Para la siguiente parte se asumirá que los potenciales ϕ y A_i son independientes del tiempo.
Se tiene la acción

$$S[x^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L[\dot{x}^i, x^i, t] \tag{1.20}$$

Luego se tiene la siguiente transformación infinitesimal. La cual corresponde a una traslación temporal

$$\delta x^i = \epsilon \dot{x}^i \tag{1.21}$$

Ahora, para mostrar que la acción es invariante, variamos la acción

$$\delta S[x^i(t)] = S[x^i(t) + \delta x^i(t)] - S[x^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L \left[\frac{d}{dt} (x^i(t) + \delta x^i(t), x^i(t) + \delta x^i(t), t \right] - L[\dot{x}^i, x^i, t] \right) \tag{1.22}$$

Ahora, tomando una serie de Taylor, obtenemos que la variación del Lagrangiano es igual a

$$\delta L = \partial_{x^i} L \; \delta x^i + \partial_{\dot{x}^i} L \; \delta \dot{x}^i \tag{1.23}$$

Con lo cual calculamos esta expresión usando la transformación dada y el Lagrangiano para una partícula sumida en un campo electromagnético.

$$\begin{aligned} \delta L &= \left(-q \partial_{x^i} \phi + q \partial_{x^i} A_i \dot{x}^i \right) \epsilon \dot{x}^i + \left(m\dot{x}^i + qA_i \right) \epsilon \ddot{x}^i \\ &= -q\epsilon \dot{x}^i \partial_{x^i} \phi + q\epsilon (\dot{x}^i)^2 \partial_{x^i} A_i + \epsilon m \dot{x}^i \ddot{x}^i + q\epsilon A_i \ddot{x}^i \end{aligned}$$

Ahora bien, el Lagrangiano es independiente del tiempo podemos escribir lo siguiente

$$\delta L = \epsilon \left(\partial_{x^i} L \, \dot{x} + \partial_{\dot{x}^i} L \, \ddot{x}^i + \cancel{\partial_t L}^0 \right) = \epsilon \, D_t L$$

Con lo cual, la cantidad B será

$$B = \epsilon L = \epsilon \left(\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi + qA_i \dot{x} \right)$$

y por tanto, mediante el teorema de Noether podemos encontrar una cantidad conservada Q la cual está dada por lo que sigue

$$\partial_{\dot{x}^i} L \, \delta x^i - B = Q$$

reemplazando el valor que encontramos para la cantidad B y la traslación temporal, se obtiene

$$\partial_{\dot{x}^i} L \, \epsilon \dot{x}^i - \epsilon L = Q \tag{1.24}$$

Ahora desarollamos esta expresión para encontrar la cantidad Q conservada

$$\begin{aligned} \epsilon \left(m\dot{x}^i \dot{x}^i + qA_i \dot{x}^i - \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i + q\phi - qA_i \dot{x}^i \right) &= Q \\ \epsilon \left(\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i + q\phi \right) &= Q \\ \epsilon E &= Q \end{aligned}$$

Con lo cual, hemos identificado la cantidad conservada Q como la energía del sistema y por tanto, la energía de una partícula sumida en un campo electromagnético cuyos potenciales son idependientes del tiempo es conservada ante traslaciones espaciales.
Ahora para el cálculo del Hamiltoniano tenemos que, la definición del Hamiltoniano involucra una transformación de Legendre, lo que se representa de la siguiente forma

$$H(p_i, x^i, t) = p_i \dot{x}^i - L(\dot{x}^i, x^i, t) \tag{1.25}$$

En lo cual, p_i son los momenta generalizados, cuya expresión está dada por

$$p_i = \partial_{\dot{x}^i} L$$

con lo cual, solo queda calcular, los momenta están dados por

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{x}^i} L = m\dot{x}^i + qA_i &= p_i \\ \dot{x}^i &= \frac{p_i}{m} - \frac{q}{m} A_i \end{aligned}$$

Con lo cual, reescribimos el Lagrangiano usando los momenta

$$L = \left(\frac{p_i}{2m} - \frac{q}{2m} A_i \right)^2 - q\phi + qA_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{q}{m} A_i \right)$$

Con lo cual, solo queda calcular el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= p_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{q}{m} A_i \right) - \frac{1}{2m} \left(p_i - qA_i \right)^2 + q\phi - qA_i \left(\frac{p_i}{m} - \frac{q}{m} A_i \right) \\ &= \frac{p_i^2}{m} - \frac{qp_i A_i}{m} - \frac{p_i^2}{2m} + \frac{qp_i A_i}{m} - \frac{q^2 A_i^2}{2m} + q\phi - \frac{qp_i A_i}{m} + \frac{qA_i^2}{m} \\ &= \frac{p_i^2}{2m} - \frac{qp_i A_i}{m} + \frac{q^2 A_i^2}{2m} + q\phi \\ &= \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\phi \end{aligned}$$

Con lo cual el Hamiltoniano para una particula sumida en un campo electromagnético está dado por

$$H(p_i, x^i, t) = \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\phi \tag{1.26}$$

Ahora, la diferencia entre la energía y el Hamiltoniano recae en que, el Hamiltoniano incluye términos cinéticos, el potencial magnético, y la energía no, lo que permite que la enegía sea una cantidad conservada en traslaciones temporales, o sea, la energía se conserva en el tiempo.

1.3. Preguntas clase 3

1.3.1. Pregunta 1

Deduzca la relación de dispersión de la partícula libre no-relativista.
Solución:

1.3.2. Pregunta 2

Enuncie y explique los principios de la Relatividad Especial.

Solución:

1.3.3. Pregunta 3

Siga la discusión que aparece en Landau y Lifshitz V2, acerca de cómo los principios de la Relatividad Especial implican la invariancia del intervalo.

Solución:

1.3.4. Pregunta 4

Escriba las siguietes transformaciones de manera explícita: Traslación temporal, traslació espacial en x, traslación espacial en y, traslación espacial en z, rotación en el plano (x, y), rotación en el plano (z, x), boost a lo largo del eje x, boost a lo largo del eje y, boost a lo largo del eje z. Dé una interpretación clara de cada una de las transformaciones y muestre que el intervalo es invariante.

Solución:

1.4. Preguntas clase 4

Pregunta 1

Demuestre que la acción

$$S[x(t)] = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{1.27}$$

reproduce la acción de la partícula libre no-relativista, módulo una constante aditiva.

Solución: Para volver a la acción de la partícula libre no-relativista, se define a la velocidad como $v = \frac{dx}{dt}$ y además se considera a $\frac{v^2}{c^2}$, o sea, estamos condiserando a la velocidad de la luz como muy grande. Así, tomando la expansión el Taylor alrededor del origen, para v obtenemos lo siguiente:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$$

Considerando que $\mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$ es muy pequeño, entonces

$$\begin{aligned} S[x(t)] &\approx -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \\ &\approx -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\ v^2 \\ &\approx -mc^2 (t_2 - t_1) + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\ v^2 \end{aligned}$$

Así se obtiene que, la acción para la partícula no-relativista, derivada de la acción $S[x(t)]$ se divide en dos contribuciones, la energía cinética clásica de la partícula y una constante aditiva, ahora, el segundo término de la acción obtenida

$$\frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt\ v^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} v^2 \tag{1.28}$$

Corresponde a la dicha acción de la partícula libre no relativista

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} v^2 \tag{1.29}$$

en lo cual su término de dentro, corresponde al Lagrangiano para la partícula libre no-relativista

$$L_{no-rel} = \frac{m}{2} v^2 \tag{1.30}$$

1.4.1. Pregunta 2

Muestre que la acción de una particula relativista es invariante bajo boost.

Solución:

Considerando a la acción de la particula relativista (1.31) y a las transformaciones de un Boost a lo largo de x (1.32) y (1.33). Vamos a construir una acción $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})]$ y demostrar que finalmente $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] = S[x(t)]$.

$$S[x(t)] = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{1.31}$$

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.32}$$

$$\tilde{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.33}$$

Vamos a construir una acción $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})]$ y demostrar que finalmente $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] = S[x(t)]$.

Por lo tanto, a partir de (1.32) y (1.33):

$$\begin{aligned} d\tilde{t} &= \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} dx \\ &= \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$
\begin{aligned}
d\tilde{x} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t}dt + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}dx \\
&= -\frac{vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt + \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

Dividiendo (1.35) sobre (1.34):

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} &= \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} \\
&= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}
\end{aligned} \tag{1.36}
$$

Así, considerando nuestra acción $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})]$ y reemplazando (1.34) y (1.36).

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= -mc^2 \int d\tilde{t}\sqrt{a - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\right)^2} \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= -mc^2 \int \left[\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}\right)^2} \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= -mc^2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cancel{\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \cdot \frac{\sqrt{c^2\left[\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt} - v\right)^2\right]}}{c\cancel{\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}} \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= -mc^2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \sqrt{1 - \cancel{\frac{2v}{c^2}\frac{dx}{dt}} + \frac{v^4}{c^4}\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \cancel{\frac{2v}{c^2}\frac{dx}{dt}} - \frac{v^2}{c^2}} \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= -mc^2 \int \frac{dt}{\cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \cdot \sqrt{\cancel{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)} \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= -mc^2 \int dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= S[x(t)]
\end{aligned}
$$

Así la acción será invariante bajo un boost a lo largo del eje x. Para demostrar esto para los tres ejes espaciales (en 3D), solo hay que seguir el analogo a este desarrollo para un boost a lo largo de y y z.

1.4.2. Pregunta 3

Muestre que la acción anterior es invariante bajo traslaciones temporales, y muestre que el teorema de Noether implica que tal invariancia es la responsable de la conservación de la energía relativa, dada por

$$
E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.37}
$$

Solución:

1.4.3. Pregunta 4

Muestre que la acción anterior es invariante bajo traslaciones espaciales, y muestre que el teorema de Noether implica que tal invariancia es la responsable de la conservación del momento lineal relativista, dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.38}$$

Solución:

Considerando una traslación espacial unidimensional a lo largo del eje x:

$$\tilde{x} = x + \epsilon \tag{1.39}$$
$$\tilde{y} = y \tag{1.40}$$
$$\tilde{z} = z \tag{1.41}$$
$$\tilde{t} = t \tag{1.42}$$
$$\tag{1.43}$$

Considerando los diferenciales de tiempo $dt = d\tilde{t}$ y espaciales:

$$d\tilde{x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} dx \tag{1.44}$$
$$= dx \tag{1.45}$$

Deducimos que la velocidad:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} \tag{1.46}$$

Así, veamos la variación de la acción:

$$\delta S = \tilde{S}[x(t) + \epsilon] - S[x(t)] \tag{1.47}$$
$$= -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt}(x(t) + \epsilon) \right)^2} + mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx}{dt}} \tag{1.48}$$
$$= -mc^2 \int dt \left[mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx}{dt}} - mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx}{dt}} \right] \tag{1.49}$$
$$= 0 \tag{1.50}$$
$$\tag{1.51}$$

Por lo tanto, para una acción bajo transformaciones espaciales es invariante $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] = S[x(t)]$. Y su cantidad de contorno $B = 0$. Por otro lado, si quisieramos obtener la cantidad conservada para este tipo de transformaciones deberemos aplicar:

$$\partial_{\dot{x}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.52}$$

Si consideramos $\dot{x} = dx/dt$ y aplicamos (1.52):

$$\partial_{\dot{x}}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}}{c^2}}\right) = cte \tag{1.53}$$

$$\frac{-mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}}{c^2}}}\cdot\frac{-2\dot{x}}{2} = cte \tag{1.54}$$

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = cte \tag{1.55}$$

La cual será la definición del momentum lineal relativista, considerando $v = \dot{x}$:

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.56}$$

1.4.4. Pregunta 5

A partir de las expresiones anteriores, muestre la relación de dispersión relativista

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{1.57}$$

Solución:

1.4.5. Pregunta 6

Imagine que un estudiante que ya pasó por mecánica clásica, le pregunta ¿qué siginfica la expresión $E = mc^2$ y de donde viene? ¿ Qué respondería ?

Solución:

Significaría la relación de dispersión de una partícula que no se esta moviendo o tiene un momentum $|p| = 0$. O mejor traducido, la energía asociada a una partícula relativista que esta en reposo para algún observador inercial. Como un sistema de referencia lagrangiano pero eso es de fluidos.

1.5. Preguntas clase 5

1.5.1. Pregunta 1

Usando la relación de Plank $E = \hbar\omega$ y la relación de Broglie $p = \frac{h}{\lambda}$, defina operadores que actuando sobre una onda plana $\psi = Ae^{-i\omega t + ikx}$, implementen las relaciones anteriores de autovalores.
Usando el mapeo de operadores que acaba de deducir, muestre la relación de dispersión no-relativista para una partícula libre, lleva a la ecuación Schrödinger.
Considere la ecuación de Schrödinger para una partícula en tres dimensiones, y muestre que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0.$$

donde $\rho = \psi^*\psi$. Encuentre la expresión para $\vec{j}$. Escriba la forma integral de tal ecuación.
Usando la relación de dispersión relativista, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, repita el procedimiento anterior e interprete su resultado, Considerando la ecuación de Klein-Gordon, muestre que las ondas planas $\psi = Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t + i\frac{E}{\hbar}x}$ lleva a dos familias de ecuaciones, con energía E tanto positiva como negativa. Dibuje tal espectro y discuta

si tal espectro es o no sensato para un sistema físico.
Considere la ecuación de primer orden

$$\alpha\partial_t\psi + \beta_1\partial_{x^1}\psi + \beta_2\partial_{x^2}\psi + \beta_3\partial_{x_3}\psi + m\psi = 0$$
$$\alpha\partial_t\psi + \beta_i\partial_i\psi + m\psi = 0$$

Actue sobre esta ecuación con el operador $(\alpha\partial_t + \beta_j\partial_j - m)$ y muestre que se recupera la ecuación de Klein-Gordon, siempre y cuando

$$\alpha^2 = 1$$
$$\alpha\beta_i + \beta_i\alpha = 0$$
$$\beta_i\beta_j = -\delta_{ij}$$

¿ Es posible realizar estas últimas ecuaciones asumiendo que los cuatro objetos α y β_i son números?

Solución: Para resolver la primera parte del problema, necesitamos operadores que actuando sobre la función de onda plana, dada por

$$\psi(x,t) = Ae^{-i\omega t + ikx}$$

Nos deje las siguientes relaciones, primero, para la relacion de Plank, el operador que actúa sobre la función de onda plana será

$$\hat{E} = i\hbar\partial_t$$

Comprobemoslo:

$$\begin{aligned}\hat{E}\{\psi(x,t)\} &= i\hbar\partial_t\left(Ae^{i\omega t + ikx}\right)\\ &= i\hbar\cdot(-i\omega)Ae^{i\omega t + ikx}\\ &= \hbar\omega\psi(x,t)\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que $\hat{E}\{\psi\} = \hbar\omega\psi$. Ahora para el caso de la relación de Broglie, el operador estará dado por los siguiente

$$\hat{p} = -i\hbar\partial_x$$

Comprobemoslo:

$$\begin{aligned}\hat{p}\{\psi\} &= -i\hbar\partial_x\left(Ae^{-i\omega t + ikx}\right)\\ &= -i\hbar\cdot(ik)\,\psi\\ &= \hbar\frac{2\pi}{\lambda}\\ &= \frac{h}{\lambda}\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que $\hat{p}\{\psi\} = \frac{h}{\lambda}\psi$.
La relación de dispersión con potencial clásica corresponde a la siguiente expresión

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1.58}$$

Con lo cual, primero obtendremos el operador momenta al cuadrado, el cual será, para $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ en lo cual, como en este caso generalizaremos a una función de onda en 3d ∂_x pasa a ser el operador gradiente, con lo cual

$$\hat{p}^2 = \hbar\nabla^2$$

Con lo cual, por ahora, tendremos que la relación de dispersión puede ser escrita de la siguiente manera

$$E = \frac{-\hbar}{2m}\nabla^2 + V(x)$$

Ahora nos queda aplicar el operador Energía, el cual está dado por $\hat{E} = i\hbar\partial_t$ lo que en la relación de dipersión es tal que

$$i\hbar\partial_t = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(x)$$

El cual es el operador de la ecuación de Schrödinger, ahora veamos como actúa sobre una función de onda $\Psi(\vec{x}, t)$:

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi + V(x)\Psi = i\hbar\partial_t\Psi \tag{1.59}$$

La cual es la archi-conocida ecuación de Schrödinger para una partícula cuántica bajo un potencial $V(x)$. Para la siguiente parte del ejercicio nos dan una ecuación de continuidad

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

En lo cual $\rho = \psi^*\psi$ corresponde a la densidad de probabilidad de la función de onda ψ, notese que ψ^* corresponde al conjugado de la función de onda, ahora, para obtener una expresión para $\vec{j}$ tendremos que, primero, buscar una forma de relacionar la ecuación de Schrödinger, con lo cual, aprovechandonos que la densidad de probabilidad depende de ambas funciones de onda, usando regla de la cadena, la derivamos parcialmente en el tiempo t como sigue

$$\partial_t\rho = \psi\partial_l\psi^* + \psi^*\partial_l\psi$$

Ahora, en esta expresión tenemos una derivada parcial de la función de onda y onda conjugada con respecto al tiempo, ahora, esto también lo podemos obtener a partir de la ecuación de Schrödinger, tal que

$$\begin{aligned}\partial_t\psi &= \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi - \frac{i}{\hbar}V(x)\psi\\ \partial_t\psi^* &= -\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi^* + \frac{i}{\hbar}V(x)\psi^*\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en la derivada partial de ρ.

$$\begin{aligned}\partial_t\rho &= \psi^*\left(\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi - \frac{i}{\hbar}V(x)\psi\right) + \psi\left(-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi^* + \frac{i}{\hbar}V(x)\psi^*\right)\\ &= \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right)\\ &= \frac{i\hbar}{2m}\nabla\cdot\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)\end{aligned}$$

Con lo cual, es posible expresar $\vec{j}$ como

$$\nabla\cdot\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\nabla\cdot\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$$

Por tanto, la expresión para el vector $\vec{j}$ haciendo uso de la ecuación de continuidad y de Schrödinger es tal que:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) \tag{1.60}$$

Ahora tenemos en cuenta la relación de dispersión relativista,

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{1.61}$$

Para lo cual, podemos escribir lo siguiente

$$\hat{E}^2 = -\hbar^2\partial_t^2 \quad , \quad \hat{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2$$

Ahora, reemplazamos esto en la relación de dispersión relativista para encontrar lo siguiente

$$\begin{aligned}-\hbar^2\partial_t^2 &= -\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\\ \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} &= 0\end{aligned}$$

A este operador se le llama, operador de Klein-Gordon y su actuar sobre una función de onda da origen a la ecuación de Klein-Gordon, como sigue

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{1.62}$$

o tabíen puede ser escrito en función del d'Alambertiano $\Box$,

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{1.63}$$

Ahora consideramos una ecuación de ondas planas

$$\psi(\vec{x},t) = Ae^{-i\frac{E}{\hbar}t + i\frac{p}{\hbar}x}$$

Sobre la cual haremos actual el operador de Klein-Gordon, tal que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi &= 0\\
\frac{1}{c^2}\left(i\frac{E}{\hbar}\right)^2\psi - \left(i\frac{p}{\hbar}\right)^2\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi &=\\
\frac{-E^2}{\hbar^2c^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} &=\\
-E^2 + p^2c^2 + m^2c^4 &=\\
E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4\\
E &= \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}
\end{aligned}$$

Lo cual nos da lugar a dos familias de soluciones, las cuales son las siguientes

- $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ la cual es la relación de dispersión para partículas
- $E = -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ la cual es la relación de dispersión para antipartículas

Ahora nos dan la siguiente ecuación de primer orden

$$a\partial_t\psi + \beta_i\partial_i\psi + m\psi = 0 \tag{1.64}$$

Sobre el cual nos piden hacer actuar el operador $(\alpha\partial_t - \beta_j\partial_j + m)$, así lo hacemos actuar como sigue

$$\begin{aligned}
(\alpha\partial_t + \beta_j\partial_j - m)(\alpha\partial_t\psi + \beta_i\partial_i\psi + m\psi) &= 0\\
\alpha^2\partial_t^2\psi + \alpha\beta_i\partial_t\partial_i\psi + m\alpha\partial_t\psi + \beta_j\alpha\partial_j\partial_t\psi + \beta_j\beta_i\partial_j\partial_i\psi + m\beta_j\partial_j\psi - m\alpha\partial_t\psi - m\beta_i\partial_i\psi - m^2\psi &= 0
\end{aligned}$$

Ahora que se expandió la acción del operador sobre la ecuación, usaremos las condiciones impuestas, con las cuales la ecuación debiera reducirse a Klein-Gordon, de primeras impondremos que , $\alpha^2 = 1$, $\beta_i\beta_j = -\delta_{ij}$ y $\alpha\beta_i + \beta_i\alpha$

$$\begin{aligned}
\alpha^2\partial_t^2\psi + \alpha\beta_i\partial_t\partial_i\psi + \cancel{\alpha m\partial_t\psi} + \beta_j\alpha\partial_j\partial_t\psi - \delta_{ij}\partial_j\partial_i\psi + m\beta_j\partial_j\psi + \cancel{-m\alpha\partial_t\psi} - m\beta_i\partial_i\psi - m^2\psi &= 0\\
\alpha^2\partial_t^2\psi + (\alpha\beta_i + \beta_i\alpha)\,\partial_i\partial_t\psi - \partial_i^2\psi - m^2\psi &=\\
\partial_t^2\psi - \partial_i^2 - m^2\psi &=
\end{aligned}$$

Ahora, notamos que la ecuación, tras la acción del operador dado, se reduce a la ecuación de Klein-Gordon, la cual está dada por:

$$\boxed{\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0} \tag{1.65}$$

1.6. Preguntas clase 6

Demuestre que las transformaciones lineale homogéneas que dejan invariante el intervalo están caracterizadas por una matriz $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ tal que

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}{}^{\nu}_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{1.66}$$

donde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.
Demuestre que las matrices Λ que satisfacen la ecuación, forman un grupo (existe una identidad, el producto de dos de ellas da una de ellas, la inversa de Λ también deja invariante el intervalo).
Encuentre la matriz Λ para un boost a lo largo de eje x, un boost a lo largo del eje z, una rotación alrededor del eje y. Para cada una de estas matrices, expanda a primer orden en el parámetro y escriba Λ como $I + \omega$ donde I es la matriz identidad y ω es la matriz que depende del parámetro de la transformación a primer orden.
Demuestre que en efecto la energía y el momento lineal relativista E/c y $\vec{p}$, respectivamente, bajo boost transforman como las componentes de un cuadrivector, lo que lleva a la definición de cuadri-monentum.

$$p^{\mu} = (p^0, \vec{p}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{1.67}$$

Solución: