

Apuntes de Introducción a las partículas elementales y Teoría Cuántica de Campos

Amaro A. Díaz Concha y Fernanda C. Mella Alvarez

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

”Todos los hombres por naturaleza desean saber”

— *Aristóteles de Estagira*

Prefacio

Este punte está basado en las clases de **Dr. Julio Oliva** con el apoyo de diversas fuentes literarias las cuales estarán especificadas en la bibliografía.

Se compilarán los conocimientos necesarios y ejercicios resueltos para poder afrontar exitosamente cursos de mecánica clásica. Estos contenidos se dividirán en dos tomos los cuales representarán los dos cursos impartidos por el profesor.

Además y como apoyo a la imaginación y los ejercicios se han incluido diversos códigos realizados por el autor los cuales simulan las situaciones físicas con las cuales se está trabajando.

Cualquier consulta, notificación de error o posible aporte hacia este apunte debe enviarse al correo electrónico del autor **amdiaz2022@udec.cl**.

Contents

Introducción	ii
1 Nociones Previas	2
1.1 Primera clase	2
1.1.1 Derivación de las Ecuaciones de Euler-Lagrange	2
1.1.2 Preguntas clase 1	3
1.2 Segunda clase	5
1.2.1 Preguntas clase 2	9
1.3 Tercera clase	12
1.3.1 Preguntas clase 3	15
1.4 Cuarta clase	16
1.4.1 Preguntas clase 4	18
1.5 Quinta clase	19
1.5.1 Preguntas quinta clase	22

Chapter 1

Nociones Previas

En el estudio de partículas elementales, notamos que experimentalmente se observan efectos tanto cuanticos como relativistas fenomenologicamente. Por lo que para trabajar con ellas se deberá tener en cuenta tanto la mecánica cuántica como la relatividad especial. La teoría con la que más nos acomodará trabajar será la **Teoría Cuántica de Campos (QFT)** pues tomará ambos efectos en consideración y nos permitirá estudiar eventos que sucedan a velocidades comparables con la velocidad de la luz c en regiones pequeñas.

	Small \rightarrow	
Fast \downarrow	Classical mechanics	Quantum mechanics
	Relativistic mechanics	Quantum field theory

Es por esto que para poder estudiar QFT se deberán tener nociones tanto de mecánica clásica como cuántica. En este apunte, no se considerarán los efectos del campo gravitacional. Como las interacciones a estudiar ocurren en regiones pequeñas, el efecto gravitacional será considerado despreciable.

1.1 Primera clase

1.1.1 Derivación de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sea la acción $S[q(t)]$, donde $q(t)$ son las coordenadas generalizadas del sistema.

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (1.1)$$

Ahora, ¿Cómo cambia S si $q(t)$ cambia un poco?

Sea $q(t)$ una función dependiente del tiempo, bien definida en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$. Donde los puntos $q(t_1)$ y $q(t_2)$ estarán fijos, de manera que aunque $q(t)$ cambie su valor en t_1 y t_2 no cambiara. Así, como se muestra en la figura [citar], si consideramos todos los caminos que puede tomar $q(t)$, diferenciados por una diferencia infinitesimal $\delta q = \Phi(t)$ que a su vez será dependiente del tiempo, se podrá variar la acción.

[foto clasica de la invarianza d la acción]

$$\begin{aligned}\delta S &= S[q(t) + \phi(t)] - S[q(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t) + \phi(t), \frac{d}{dt}(q + \Phi)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t))\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$(1.3)$$

Además, considerando que:

$$f(x + \epsilon_1, y + \epsilon_2) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \epsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \epsilon_2 + \mathcal{O}(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_1, \epsilon_2)\tag{1.4}$$

Por lo tanto, introduciendo (1.4) con $f(x + \epsilon_1, y + \epsilon_2) = L(q(t) + \phi(t), \frac{d}{dt}(q + \Phi))$ en (1.2).

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q} \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\Phi}{dt} \right) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\Phi}{dt} \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \Phi + \frac{d}{dt} \left(\Phi \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Phi \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\Phi \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \\ &= 0 + \int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right).\end{aligned}$$

Si se asume que el principio de acción es estacionario $\delta S = 0$. Entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) = 0\tag{1.5}$$

Finalmente, considerando a $f(t)$ arbitraria, en (1.5) el integrando de la integral deberá ser igual a cero. Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0\tag{1.6}$$

1.1.2 Preguntas clase 1

Pregunta 1

Escriba la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, incluyendo las contribuciones cinéticas tanto del protón como del electrón, además de la energía potencial de la interacción.

Solución:

Pregunta 2

Argumente que la formulación standard de la mecánica cuántica no-relativista considera un número fijo de partículas y no permite describir transiciones entre estados con número distinto de partículas.

Solución:

Pregunta 3

Describa el efecto Compton y diga por qué razón el resultado clásico es distinto al observado. Calcule la longitud de Compton del electrón.

Solución:

Pregunta 4

Describa el decaimiento beta ¿Cuál es la vida media de un neutrón? ¿Cómo interpreta tal número?

Solución:

Pregunta 5

Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange, argumentando claramente cada uno de sus pasos. Explique porqué nunca es necesario preguntarse si la variación δ conmuta o no con la derivada temporal $\frac{d}{dt}$. Encuentre las ecuaciones de Euler-Lagrange para un Lagrangiano que dependa de un número arbitrario de coordenadas generalizadas $q_i(t)$ con $i = 1, \dots, N$.

Solución: Sea la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\dot{q}^i, q^i, t) \quad (1.7)$$

Para lo cual $q^i(t)$, $i = 1, \dots, N$ son las coordenadas generalizadas las cuales están bien definidas en el intervalo de $t \in [t_1, t_2]$ en los cuales se tiene que las condiciones de borde homogéneas (shell) tal que, aunque la función pueda cambiar dentro del intervalo (t_1, t_2) los valores en los extremos t_1 y t_2 no cambiarán. Así, consideraremos una variación del camino infinitesimal del camino que tomará, la cual denotaremos por $\delta q^i = \Phi^i(t)$ que al igual que las coordenadas, será dependiente del tiempo, la variación de la acción ante esta variación infinitesimal de camino es denotada por

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q^i(t) + \Phi^i(t)] - S[q^i(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L \left[q^i(t) + \Phi^i(t), \frac{d}{dt} (q^i(t) + \Phi^i(t)), t \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i, t) \end{aligned}$$

Ahora, se tiene la siguiente dependencia en el Lagrangiano $L[q^i(t) + \Phi^i(t), \frac{d}{dt}(q^i(t) + \Phi^i(t)), t]$ para lo cual se tomará una serie de Taylor con respecto al origen como sigue

$$L \left[q^i + \Phi^i, \frac{d}{dt} (q^i + \Phi^i) \right] = L + \partial_{q^i} L \Phi^i + \partial_{\dot{q}^i} L \dot{\Phi}^i + \mathcal{O}(\Phi^{i2}, \dot{\Phi}^{i2}, \Phi^i, \dot{\Phi}^i)$$

Con lo cual, si introducimos (??) sin tomar en cuenta los términos de $\mathcal{O}(\Phi^{i2}, \dot{\Phi}^{i2}, \Phi^i, \dot{\Phi}^i)$ se tiene lo siguiente

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L + \partial_{q^i} L \Phi^i + \partial_{\dot{q}^i} L \dot{\Phi}^i \right) - \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)$$

Ahora, usando regla de Leibniz en el tercer término en la primera integral, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i) &= \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i + \partial_{\dot{q}^i} L \dot{\Phi}^i \\ \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i) - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \Phi^i &= \partial_{\dot{q}^i} L \dot{\Phi}^i \end{aligned}$$

Con lo cual, introduciendo (??) en el desarrollo, obtenemos lo que sigue

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L + \partial_{q^i} L \Phi^i + \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i) - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \Phi^i \right] - \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L - L + \partial_{q^i} L \Phi^i - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \Phi^i \right] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i) \end{aligned}$$

Notese que el último término será igual a cero ya que este está evaluado en los extremos, veamos que, por el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i) = [\partial_{\dot{q}^i} L \Phi^i]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Ya que, como sabemos $\Phi^i(t_1) = \Phi^i(t_2) = 0$ son las condiciones de borde impuestas, así sigue que

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\partial_{q^i} L + \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \right) \Phi^i$$

Luego, se sume que el principio de acción es estacionario, con lo cual $S\delta \stackrel{!}{=} 0$ con lo cual se obtiene

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\partial_{q^i} L - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \right) \Phi^i$$

Ahora, como se ha realizado para un intervalo de tiempos cualesquiera, entonces el integrando será cero para todo tiempo, lo cual es

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\partial_{q^i} L - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \right] \Phi^i \\ &= \partial_{q^i} L - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) \end{aligned}$$

En donde se ha obviado el caso trivial en el cual $\Phi^i = 0$ ya que esta es una función arbitraria.

Con lo cual, finalmente se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange para $q^i(t)$, $i = 1, \dots, N$ las cuales están dadas por

$$\boxed{\partial_{q^i} L - \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}^i} L) = 0} \quad (1.8)$$

1.2 Segunda clase

En la última clase repasamos algo de física de mecánica clásica y vimos una introducción algo general de la necesidad de encontrar un marco conceptual algo más general de la mecánica clásica ya que necesitamos describir un proceso que ocurre en la naturaleza en el cual el estado inicial no es el mismo que el final. Supongamos que tienen una partícula en presencia de una energía potencial $U(x)$ a lo cual, la 2da ley de Newton nos dice lo siguiente:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - \frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

A lo cual multiplicamos por $\frac{dX}{dt}$

$$m \frac{dX}{dt} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = - \frac{dX}{dt} \frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

Ahora, sacamos la derivada temporal hacia fuera

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) &= - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x} \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

La combinación

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = E \quad (1.9)$$

En lo cual E corresponde a la energía del sistema. E es una constante, con lo cual no depende del tiempo. En general diremos que una cantidad $Q = a(x, \dot{x})$ es conservada si

$$\frac{d}{dt}Q\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0 \quad (1.10)$$

En el contexto de la mecánica clásica en el que estamos interesados en encontrar $x(t)$, las cantidades conservadas son extremadamente útiles. Las cantidades conservadas también se llaman integrales de movimiento. Si un sistema tiene un número suficientemente alto de integrales de movimiento, entonces podemos encontrar las historias de los grados de libertad sin integrar.

$$q_i = q_i(t) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.11)$$

Teorema de Noether: Si el funcional de la acción es quasi-invariante bajo una transformación infinitesimal, entonces existirá una cantidad conservada asociada a la transformación.

Ejemplos de transformaciones infinitesimales, la transformación infinitesimal tendrá una forma bien precisa, dado lo siguiente.

Transformación: traslación temporal. Sea una coordenada $q(t)$ que depende del tiempo, a la cual haremos una traslación al futuro en a seg. $q(t-a)$, notemos que a puede ser cualquier número, digamos que a es infinitesimal, con lo cual lo llamaremos ϵ , ahora, tomando la serie de Taylor a $q(t-\epsilon)$ tenemos lo siguiente:

$$q(t-\epsilon) = q(t) - \epsilon \frac{dq}{dt} + O(\epsilon^2) \quad (1.12)$$

Para lo cual el término de $O(\epsilon^2)$ puede ser despreciado ya que será muy pequeño, ahora sigamos

$$q(t-\epsilon) - q(t) = -\epsilon \frac{dq}{dt} = \delta q \quad (1.13)$$

A δq lo llamaremos traslación temporal

Transformación: Traslación espacial Sea un vector posición $r(t)$ el cual es situado con respecto a un eje coordenado cartesiano al cual lo trasladaremos espacialmente en un vector a con lo cual la posición luego de la traslación será $\vec{r}(t) + \vec{a}$, ahora bien, supongamos que el vector \vec{a} es infinitesimal, con lo cual la llamaremos $\vec{\epsilon}$, así, la traslación temporal infinitesimal estará dado por

$$(\vec{r}(t) + \vec{\epsilon}) - \vec{r}(t) = \vec{\epsilon} = \delta \vec{r} \quad (1.14)$$

En lo cual $\delta \vec{r}$ es llamada traslación espacial.

Transformación: Rotación espacial.

Sabemos que en una rotación espacial una cantidad conservada sería el momento angular. Ahora, definamos una rotación.

$$x' = \cos \theta x - \sin \theta y \quad (1.15)$$

$$y' = \sin \theta x + \cos \theta y \quad (1.16)$$

Ahora, en el caso que la rotación fuera infinitesimal, llamaremos $\theta = \epsilon$, con lo cual la rotación definida quedaría dada por

$$x' = x - \epsilon y \rightarrow \delta x = x' - x = -\epsilon y \quad (1.17)$$

$$y' = \epsilon x + y \rightarrow \delta y = y' - y = \epsilon x \quad (1.18)$$

con lo cual obtenemos que

$$\delta x = -\epsilon y \quad (1.19)$$

$$\delta y = \epsilon x \quad (1.20)$$

$$\delta z = 0 \quad (1.21)$$

Así la rotación espacial según el vector posición \vec{r} sería

$$\delta\vec{r} = \vec{r} \times \delta\hat{\phi} \quad (1.22)$$

Acordar que el producto vectorial solo tiene sentido en 3 y 7 dimensiones.

Ahora hablemos de la acción

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \quad (1.23)$$

Ahora, se define la acción quasi-invariante como:

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int dt \frac{dB}{dt} \quad (1.24)$$

B es una función que depende del tiempo.

Encontraremos que, en el caso que $B = 0$ decimos que la acción es invariante, desarrollando obtenemos

$$\delta S = \int dt \left(\partial_q L \delta q + \partial_{\dot{q}} L \frac{d}{dt} \delta q \right) \quad (1.25)$$

$$= \int dt \left(\partial_q L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L \right) \delta q + \int dt \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} L \delta q) \quad (1.26)$$

Usando la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\delta S = \int dt \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} L \delta q) = \int dt \frac{dB}{dt} \quad (1.27)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} (\partial_{\dot{q}} L \delta q - B) = 0 \quad (1.28)$$

si usted es capaz de encontrar una transformación que deja la acción quasi-invariante, entonces la siguiente cantidad encontrará que es constante

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \quad (1.29)$$

en lo cual la constante no dependerá del tiempo. Ahora veamos que sucede cuando usamos una traslación temporal.

Traslación temporal:

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \quad (1.30)$$

Ahora bien, la variación de la acción se define por

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] \quad (1.31)$$

$$= \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \left(q - \epsilon \frac{dq}{dt} \right) \right)^2 - U(q) - \epsilon \dot{q} \right] - \int dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \quad (1.32)$$

$$= \int dt \left[\frac{m}{2} (\dot{q}^2 - 2\epsilon \dot{q}\ddot{q}) - U(q) + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] - \int dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right] \quad (1.33)$$

$$= \int dt [-m\epsilon \dot{q}\ddot{q} + \epsilon \dot{q} \partial_t U] \quad (1.34)$$

$$= \int dt \frac{d}{dt} \left[\epsilon \left(-\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \right] \quad (1.35)$$

Con lo cual hemos encontrado nuestra función B para esta traslación en particular. Tal que

$$B = \epsilon \left(-\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \quad (1.36)$$

Notese que en este caso nunca usamos la ecuación de movimiento para encontrar cuánto vale B en el caso de esta traslación. Ahora que sabemos cual es el valor de la función B, entonces podemos calcular cuál es la cantidad conservada según lo obtenido anteriormente.

$$\partial \dot{q} L = m\dot{q} \quad (1.37)$$

Así, la cantidad conservada está dada por

$$C^{te} = m\dot{q}(-\epsilon\dot{q}) - \epsilon \left(-\frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q) \right) \quad (1.38)$$

De lo cual podemos identificar a la energía del sistema, con lo cual

$$C^{te} = -\epsilon \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) \right) = -\epsilon E \quad (1.39)$$

Así, la conservación de la energía emerge como la aplicación del teorema de Noether a la quasi-invariancia bajo transformaciones temporales.

Acción de la partícula libre: Sabemos que la acción de la partícula libre está dada por

$$S = \int dt \frac{m}{2} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \quad (1.40)$$

Ahora bien, si usamos la convención de Einstein

$$S = \int dt \frac{m}{2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt}, \quad x^i = (x^1, x^2, x^3) \quad (1.41)$$

Ahora usaremos traslaciones espaciales.

Traslaciones espaciales:

$$\delta x^i = \epsilon^i, \quad \delta \vec{r} = \vec{\epsilon} \quad (1.42)$$

Ahora lo aplicamos a la variación de la acción:

$$S[x + \delta x] = \int dt \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (x^i + \epsilon^i) \frac{d}{dt} (x^i + \epsilon^i) \quad (1.43)$$

$$= \int dt \frac{m}{2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} = S[x] \quad (1.44)$$

Con lo cual

$$\delta S = S[x + \delta x] - S[x] = 0 = \int dt \frac{d}{dt} 0 \quad (1.45)$$

Para un grado de libertad :

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \quad (1.46)$$

Para varios grados de libertad obtenemos

$$\partial_{\dot{q}_i} L \delta q_i - B = C^{te} \quad (1.47)$$

Y para traslaciones espaciales

$$\partial_{\dot{x}^k} L \delta x^k - B = C^{te} \quad (1.48)$$

Ahora, si tenemos un lagrangeano para varios grados de libertad $L = L(x^i, \dot{x}^i)$ se obtiene lo siguiente

$$\partial_{\dot{x}^k} L = \partial_{x^k} \left(\frac{1}{2} m x^i x^i \right) \quad (1.49)$$

$$= \frac{m}{2} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k \dot{x}^i + x^i \partial x^k} \right) \quad (1.50)$$

$$= \frac{m}{2} \left(\delta_k^i \dot{x}^i + x^i \delta_k^i \right) \quad (1.51)$$

$$= m \dot{x}^k \quad (1.52)$$

En lo cual notamos que solo sobrevive ese términos por las deltas de Kronecker.

Ahora, la cantidad conservada está dada por:

$$m \dot{x}^k \epsilon^k - B = C^{te} \quad (1.53)$$

En lo cual, como sabemos, en una transformación traslación $B = 0$ Con lo cual, podemos concluir que:

$$m\dot{x}^k \epsilon^k = C^{te} \quad (1.54)$$

por lo tanto, de igual forma se cumplirá:

$$m\dot{x}^k = \tilde{C}^{te} \quad (1.55)$$

y así, en transformaciones espaciales la cantidad conservada será el momento lineal

$$m\vec{v} = \vec{p} \quad (1.56)$$

1.2.1 Preguntas clase 2

Pregunta 1

Manipulando la segunda ley de Newton para una partícula en presencia de una energía potencial $U(x(t))$, muestre que la energía es conservada.

Solución:

Pregunta 2

Deduzca la transformación infinitesimal que representa una traslación en el tiempo actuando sobre un grado de libertad $q(t)$.

Solución:

Pregunta 3

Deduzca la transformación infinitesimal que representa una traslación espacial del grado de libertad $\vec{r}(t)$.

Solución:

Pregunta 4

Deduzca la transformación infinitesimal que representa una rotación en el plano (x, y) , actuando sobre la posición de una partícula $\vec{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$.

Solución:

Pregunta 5

Demuestre, explicando cada paso, que una transformación infinitesimal que deja quasi-invariante la acción de un conjunto de grados de libertad q_A con $A = 1, \dots, N$, permite construir una cantidad conservada Q . Construya tal cantidad conservada para los siguientes casos

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right] \quad \text{invariancia bajo traslaciones temporales}$$

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} \right] \quad \text{invariancia bajo traslaciones espaciales}$$

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - U(|\vec{r}|) \right] \quad \text{invariancia bajo rotaciones en el plano } (x, y)$$

Extienda el último caso a la invariancia bajo rotaciones generales, cuya acción finita está dada por $\vec{r}_{\text{transformado}} = O\vec{r}$ con O una matriz ortogonal de determinante 1.

Solución:

Pregunta 6

Partícula conforme: Calcule la cantidad conservada asociada a la transformación de simetría $\delta x(t) = \frac{\epsilon}{2}x(t) - \epsilon t \frac{dx(t)}{dt}$, para la acción de la partícula conforme

$$I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{\alpha}{x^2} \right). \quad (1.57)$$

Considerando la cantidad conservada asociada esta simetría, además de la conservación de la energía, encuentre la trayectoria de la partícula $x(t)$ de forma alebraica.

Solución: Para encontrar la cantidad conservada es necesario variar la acción con respecto a al transformaciñon de simetría infinitesimal $\delta x(t) = \frac{\epsilon}{2}x(t) - \epsilon t \frac{dx(t)}{dt}$, para lo cual, tenemos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x})^2 - \frac{\alpha}{x^2} \quad (1.58)$$

Ahora, para ver si la acción es invariante o quasi-invariante, variamos la acción y por tanto, el Lagrangiano, la variación de la accion es la siguiente

$$\begin{aligned} \delta I[x(t)] &= I[x(t) + \delta x(t)] - I[x(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt (L[x(t) + \delta x(x)] - L[x(t)]_{right}) \end{aligned}$$

Lo cual, como ya sabemos, luego de una serie de Taylor se reduce a

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt (\partial_x L \delta x + \partial_{\dot{x}} L \delta \dot{x})$$

Ahora, sabemos la expresión para el Lagrangiano y para la transformación de simetría, con lo cual solo queda calcular las derivadas parciales que aparecen en la variación y el álgebra subsiguiente

$$\begin{aligned} \delta I[x(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{2\alpha}{x^3} \left(\frac{\epsilon}{2}x - \epsilon t \dot{x} \right) - m \dot{x} \left(\frac{\epsilon}{2} \dot{x} + \epsilon t \ddot{x} \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \epsilon \left[\frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\alpha t \dot{x}}{x^3} - \frac{m \dot{x}^2}{2} - m t \dot{x} \ddot{x} \right] \end{aligned}$$

Ahora, para usar el teorema de Noether, que nos dice que, una cantidad conservada B será tal que

$$\delta I[(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dB}{dt} \quad (1.59)$$

Para ello, es necesario dejar a la expresión anterior como una derivada total, con lo cual notamos que el primer término de la integral corresponde a

$$\frac{\alpha}{x^2} - \frac{2\alpha t \dot{x}}{x^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha t}{x^2} \right)$$

Y además el segundo término es tal que

$$-\frac{m \dot{x}^2}{2} - m t \dot{x} \ddot{x} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{m t \dot{x}^2}{2} \right)$$

Con lo cual es posible reescribir la variación del Lagrangiano tal que

$$\delta I[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \epsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha t}{x^2} - \frac{m t \dot{x}^2}{2} \right) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dB}{dt}$$

Con lo cual tenemos que, la cantidad conservada B es igual a

$$B = \frac{\alpha t}{x^2} - \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (1.60)$$

Por tanto, la acción será quasi-invariante con un término de borde B . Ahora, para interpretar esta cantidad conservada B y encontrar mediante ella las ecuaciones de movimiento, tendremos en cuenta lo siguiente, B es muy parecido a la energía del sistema, de hecho, la energía del sistema en este caso estará dada por

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\alpha}{x^2}$$

Con lo cual manipularemos algebraicamente la expresión de la cantidad conservada B para meterlo en la energía E

$$\begin{aligned} B &= \frac{\alpha t}{x^2} - \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad , \quad / \cdot \frac{1}{t} \\ \frac{B}{t} &= \frac{\alpha}{x^2} - \frac{m\dot{x}^2}{2} \\ \frac{m\dot{x}^2}{2} &= \frac{\alpha}{x^2} - \frac{B}{t} \end{aligned}$$

Así, tenemos una expresión para la energía cinética en términos de la energía potencial y la constante del movimiento B , así reemplazamos esto en E

$$\begin{aligned} E &= \frac{\alpha}{x^2} - \frac{B}{t} + \frac{\alpha}{x^2} \\ E + \frac{B}{t} &= \frac{2\alpha}{x^2} \\ \frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}} &= x^2 \\ \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}}} &= x \end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido las ecuaciones de movimiento a partir de una cantidad conservada B y la energía E y está dada por

$$x(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{E + \frac{B}{t}}} \quad , \quad \forall t > 0 \quad (1.61)$$

Pregunta 7

Lagrangiano para la partícula cargada en el campo electromagnetico. En este ejercicio utilice notación de índices, y la convención de Einstein. Considere una partícula cargada eléctricamente, de carga q , en presencia de un campo electromagnetico externo descrito por los potenciales $\phi(t, \vec{x})$ y $\vec{A}(t, \vec{x})$. Recuerde que el campo eléctrico y el campo magnético se obtienen a partir de estos potenciales mediante las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi - \partial_t\vec{A} \rightarrow E_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \rightarrow B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \end{aligned}$$

La partícula está descrita por el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} |\vec{v}|^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi(t, x) + qA_i(t, x) \frac{dx_i}{dt}.$$

Muestre que el Lagrangiano lleva a la expresión correcta para la fuerza de Lorentz, es decir

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.62)$$

Asumiendo que los potenciales no dependen del tiempo, muestre que la acción es invariante bajo traslaciones temporales

$$\delta x^i = \epsilon \dot{x}^i \quad (1.63)$$

y calcule la energía como cantidad conservada en el sistema.

Finalmente, para potenciales generales que dependen tanto de t , como de \vec{x} , muestre que el Hamiltoniano toma la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A}(t, \vec{x}) \right)^2 + q\phi(t, \vec{x}) \quad (1.64)$$

Discuta la diferencia entre H , y la energía calculada en el paso anterior.

Solución: Para mostrar que dicho Lagrangiano lleva a la fuerza de Lorentz, usaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange para x^i , $i = 1, \dots, N$ coordenadas, las cuales está dadas por

$$\partial_{x^i} L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x}^i} L = 0 \quad (1.65)$$

Con lo cual, calculemos dichos términos

$$\begin{aligned} \partial_{x^i} L &= \partial_{x^i} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi + qA_i \dot{x}^i \right) \\ &= -q\partial_{x^i} \phi + q\partial_{x^i} A_j \dot{x}^j \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{x}^i} L &= \partial_{\dot{x}^i} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^i \dot{x}^i - q\phi + qA_i \dot{x}^i \right) \\ &= m\dot{x}^i + qA_i \end{aligned}$$

Ahora este último término lo diferenciamos en el tiempo tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \partial_{\dot{x}^i} L &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}^i + qA_i) \\ &= m\ddot{x}^i + q(\partial_t A_i + \partial_{x^j} A_i \dot{x}^j) \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en las ecuaciones de Euler-Lagrange como sigue

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^i &= -\partial_{x^i} \phi + q\partial_{x^j} A_i \dot{x}^j - q\partial_t A_i - \partial_{x^j} A_i \dot{x}^j \\ &= q(-\partial_{x^i} \phi - \partial_t A_i) + q(\partial_{x^i} A_j - \partial_{x^j} A_i) \dot{x}^j \\ &= qE_i + q\epsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k \end{aligned}$$

Con lo cual, esto puede ser escrito de la siguiente forma

$$qE_i + q\epsilon_{ijk} \dot{x}^j B^k = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.66)$$

Con lo cual hemos confirmado que el Lagrangiano para una partícula inmersa en un campo electromagnético, este llevará a las ecuaciones de movimiento que es la fuerza de Lorentz.

Para la siguiente parte se asumirá que los potenciales ϕ y A_i son independientes del tiempo.

1.3 Tercera clase

Si tenemos en cuenta el lagrangeano para una partícula libre no relativista, como sigue

$$L = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad (1.67)$$

Para el cual, si introducimos una variación infinitesimal, en específico, una transformación espacial, de la siguiente manera

$$\delta S = S[\vec{r} + \delta\vec{r}] - S[\vec{r}] = 0 \quad (1.68)$$

en lo cual $\delta\vec{r} = \vec{\epsilon}$ se le llamará a la traslación espacial, tendremos que por el teorema de Noether, el siguiente término se mantendrá constante

$$c^{te} = \partial_{\dot{\vec{r}}} L \cdot \delta\vec{r} - \mathcal{B} \quad (1.69)$$

$$= \partial_x L \delta x + \partial_y L \delta y + \partial_z L \delta z \quad (1.70)$$

Ahora bien, usaremos la siguiente notación para las coordenadas $\partial_{\dot{\vec{r}}} L \rightarrow \partial_{\dot{x}^k} L$ en lo cual $x^k = (x, y, z)$. Ahora bien, el término constante lo podemos escribir como

$$c^{te} = \partial_{\dot{x}^k} L \epsilon^k \quad (1.71)$$

Lo cual si tomamos la derivada del lagrangeano para una partícula libre no relativista

$$\partial_{\dot{x}^k} L = \frac{1}{2} \partial_{\dot{x}^k} \quad (1.72)$$

$$= \frac{1}{2} m (\delta_k^i \dot{x}^i + \dot{x}^i \delta_k^i) \quad (1.73)$$

$$= m \dot{x}^k \quad (1.74)$$

Así y por tanto, se concluye que el término que, por teorema de Noether se conserva, es el siguiente

$$c^{te} = m \dot{x}^k \epsilon^k \quad (1.75)$$

Lo cual, en términos simples, nos dice que para toda coordenada x^k , el momento lineal se conserva para transformaciones espaciales, lo que viene siendo la primera ley de Newton.

$$c^{te} = m v_x \quad (1.76)$$

Para la partícula libre no relativista, nuevamente, tenemos este lagrangeano

$$L = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad (1.77)$$

En lo cual tenemos que, la energía $E = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$ será invariante bajo transformaciones temporales y que, el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ será invariante bajo transformaciones espaciales. Con ello, podemos formular la relación de dispersión no relativista, la cual está dada por

$$E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \quad (1.78)$$

Relatividad especial:

1. Todos los observadores inerciales son equivalentes, mediante experimentos físicos no puedo dar cuenta si estoy en movimiento rectilíneo uniforme o no, experimento del tren.
2. Todos los observadores inerciales están de acuerdo en que la luz en el vacío se mueve a una rapidez constante, $c = 300000[\text{km/s}]$.
3. Principio de homogeneidad del espacio-tiempo: todos los puntos e instantes son equivalentes, las leyes que rigen la física serán las mismas aquí y en la quebrá del ají.
4. Isotropía del espacio tiempo: todas las direcciones son equivalentes.

Notar que la relatividad de los observadores no inerciales lleva a la gravitación, lo mismo sucede con la suposición que los rayos de luz no necesariamente viajan en línea recta, nuevamente nos llevará a la gravitación.

Notemos que cuando tenemos dos boost en diferentes direcciones, esto, no corresponde a un boost puro, si no que lleva consigo una rotación en el espacio- tiempo, este fenómeno es llamado como Precesión de Thomas.

Landau volumen II, teoría clásica de campos, primeras 5 páginas del capítulo

Los principios 1 y 4 implican que, si tenemos dos eventos, que ocurren en instantes diferentes en el espacio tiempo. Sean dos observadores, K y \bar{K} para los cuales, los dos eventos tendrán etiquetas distintas, es decir

- Con respecto al sistema K los eventos tendrán coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y

$$(t_2, x_2, y_2, z_2)$$

- Con respecto al sistema \bar{K} los eventos tendrán coordenadas $(\bar{t}_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ y $(\bar{t}_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$

Ahora, dichos eventos podrán ser observados en diferente orden de sucesos, o no, dependiendo de su relación entre sí en su causalidad, si existe causalidad entre uno y otro, entonces su ordena estará fijo, segunda ley de la termodinámica, pero en caso que no hay causalidad entre sí, dichos eventos podrán ser observados en orden distintos dependiendo del observador.

Invariación del intervalo: Consecuencia del principio de la relatividad especial, formulación de la métrica de Minkowski

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(\bar{t}_2 - \bar{t}_1)^2 - (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2 \quad (1.79)$$

La conservación del intervalo entre eventos P y Q tiene consecuencias dramáticas. ¿Y entonces qué? Primero asumiremos que P y Q están infinitesimalmente cerca, esto significa que

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + dt \\ x_2 &= x_1 + dx \\ y_2 &= y_1 + dy \\ z_2 &= z_1 + dz \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \bar{t}_2 &= \bar{t}_1 + d\bar{t} \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_1 + d\bar{x} \\ \bar{y}_2 &= \bar{y}_1 + d\bar{y} \\ \bar{z}_2 &= \bar{z}_1 + d\bar{z} \end{aligned}$$

La conservación del intervalo implica que:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \quad (1.80)$$

Ahora nos preguntamos, si nos damos las coordenadas con cachirulo, o sea, con respecto al observador inercial, ¿cómo se podrán escribir en función de las coordenadas sin cachirulo? Para ello nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con 10 componentes, lo cual puede sonar feo, pero es la forma de obtener las transformaciones de Lorentz en todas las dimensiones

$$\begin{aligned} &c^2 (\partial_t \bar{t} dt + \partial_x \bar{t} dx + \partial_y \bar{t} dy + \partial_z \bar{t} dz) \\ &- (\partial_t \bar{x} dt + \partial_x \bar{x} dx + \partial_y \bar{x} dy + \partial_z \bar{x} dz) \dots \end{aligned}$$

Existen 10 transformaciones parametrizadas por 10 parámetros continuos, relativistas

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales

- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Traslación temporal

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + a \\ \bar{x} &= x, \quad \bar{y} &= y, \quad \bar{z} &= z\end{aligned}$$

Traslación espacial en x

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t \\ \bar{x} &= x + h_x, \quad \bar{y} &= y, \quad \bar{z} &= z\end{aligned}$$

y así con todas las coordenadas.

Ahora bien, las rotaciones en el espacio serán, rotaciones en un plano (x, y) que es equivalente a una rotación alrededor del eje z ,

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t \\ \bar{x} &= \cos \alpha x - \sin \alpha y \\ \bar{y} &= \sin \alpha x + \cos \alpha y \\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

$\alpha \in [0, 2\pi]$.

Lo que implica que, nuestro intervalo invariante será

$$\begin{aligned}c^2 t^2 - (\cos \alpha dx - \sin \alpha dy)^2 - (\sin \alpha dx + \cos \alpha dy)^2 - dz^2 \\ = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\end{aligned}$$

O sea, las rotaciones nos dejan invariante el intervalo (métrica de minkowsky) En rotación en el plano (y, z) le llamaremos $\theta \in [0, 2\pi]$ y en rotaciones en el plano (z, x) llamaremos al ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$.

Boost a lo largo del eje x:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \bar{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

Tarea: probar que deja el intervalo invariante

Boost a lo largo del eje y:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{t - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - v_y^2/c^2}} \\ \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= \frac{y - v_y t}{\sqrt{1 - v_y^2/c^2}} \\ \bar{z} &= z\end{aligned}$$

Tarea: boost a lo largo del eje z y tomamos $c \rightarrow \infty$ sakurai de cuantica

1.3.1 Preguntas clase 3

Pregunta 1

Deduzca la relación de dispersión de la partícula libre no-relativista.

Solución:

Pregunta 2

Enuncie y explique los principios de la Relatividad Especial.

Solución:

Pregunta 3

Siga la discusión que aparece en Landau y Lifshitz V2, acerca de cómo los principios de la Relatividad Especial implican la invariancia del intervalo.

Solución:

Pregunta 4

Escriba las siguientes transformaciones de manera explícita: Traslación temporal, traslación espacial en x , traslación espacial en y , traslación espacial en z , rotación en el plano (x, y) , rotación en el plano (z, x) , boost a lo largo del eje x , boost a lo largo del eje y , boost a lo largo del eje z . Dé una interpretación clara de cada una de las transformaciones y muestre que el intervalo es invariante.

Solución:

1.4 Cuarta clase

Entonces, en la última clase, los principios de la relatividad especial, implican la invariancia del intervalo. La conservación del intervalo implica que:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 \quad (1.81)$$

Hay 10 tipos de transformaciones continuas que preservan el intervalo, las cuales son

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Las rotaciones espaciales son del tipo

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + a, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \quad (1.82)$$

Las rotaciones son del tipo

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t \\ \tilde{x} &= \cos \theta x - \sin \theta y \\ \tilde{y} &= \sin \theta x + \cos \theta y \\ \tilde{z} &= z \end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje x

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t - v_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \tilde{x} &= \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= z \end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje y, boost a lo largo del eje z.
Vimos que en el límite no relativista $c \rightarrow \infty$

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \quad (1.83)$$

Lo cual corresponde al conocido boost de Galileo, el cual describe la posición mediante la velocidad relativa entre dos observadores inerciales (velocidad constante).

Asumamos que la partícula se mueve

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{v}, \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Con lo cual tenemos \tilde{v} vs v , a lo cual

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} - V \frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} - V \frac{d}{d\tilde{t}}$$

Con lo cual la composición de velocidades en el límite no relativista es

$$\tilde{v} = v - V \quad (1.84)$$

Lo cual no es compatible con la unicidad del valor de la rapidez de la luz en el vacío. Con lo cual es necesario encontrar una composición de velocidades que cumpla con los postulados de la relatividad especial. Para ello

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ d\tilde{t} &= \frac{dt - v/c^2 dx}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{dx - V dt}{dt - V/c^2 dx} \cdot \frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{d\tilde{t}}} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - V/c^2 \frac{dx}{dt}} \end{aligned}$$

Así, la suma de velocidades relativista está dado por

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \quad (1.85)$$

Ahora veamos el caso en el cual $v_x = c$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2} c} = \frac{c - V}{\frac{c - V}{c}} = c \\ i\hbar \partial_t \Phi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi \end{aligned} \quad (1.86)$$

En lo cual, el término $\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi = \frac{p^2}{2m} \Phi$ Con lo cual, la relación de dispersión queda tal que:

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}} \\ &= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} + \frac{1}{4} \frac{p^4}{m^4 c^4} \right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{4m^3 c^2} \end{aligned}$$

Quedó de tarea el probar la invariancia de la acción ante composición de velocidades

1.4.1 Preguntas clase 4

Pregunta 1

Demuestre que la acción

$$S[x(t)] = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (1.87)$$

reproduce la acción de la partícula libre no-relativista, módulo una constante aditiva.

Solución: Para volver a la acción de la partícula libre no-relativista, se define a la velocidad como $v = \frac{dx}{dt}$ y además se considera a $\frac{v^2}{c^2}$, o sea, estamos considerando a la velocidad de la luz como muy grande. Así, tomando la expansión el Taylor alrededor del origen, para v obtenemos lo siguiente:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$$

Considerando que $\mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$ es muy pequeño, entonces

$$\begin{aligned} S[x(t)] &\approx -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \\ &\approx -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt v^2 \\ &\approx -mc^2(t_2 - t_1) + \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt v^2 \end{aligned}$$

Así se obtiene que, la acción para la partícula no-relativista, derivada de la acción $S[x(t)]$ se divide en dos contribuciones, la energía cinética clásica de la partícula y una constante aditiva, ahora, el segundo término de la acción obtenida

$$\frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt v^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} v^2 \quad (1.88)$$

Corresponde a la dicha acción de la partícula libre no relativista

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} v^2 \quad (1.89)$$

en lo cual su término de dentro, corresponde al Lagrangiano para la partícula libre no-relativista

$$L_{no-rel} = \frac{m}{2} v^2 \quad (1.90)$$

Pregunta 2

Muestre que la acción es invariante bajo boost

Solución:

Hola

Pregunta 3

Muestre que la acción anterior es invariante bajo traslaciones temporales, y muestre que el teorema de Noether implica que tal invariancia es la responsable de la conservación de la energía relativa, dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.91)$$

Solución:

Pregunta 4

Muestre que la acción anterior es invariante bajo traslaciones espaciales, y muestre que el teorema de Noether implica que tal invariancia es la responsable de la conservación del momento lineal relativista, dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.92)$$

Solución:

Pregunta 5

A partir de las expresiones anteriores, muestre la relación de dispersión relativista

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.93)$$

Solución:

Pregunta 6

Imagine que un estudiante que ya pasó por mecánica clásica, le pregunta ¿qué significa la expresión $E = mc^2$ y de donde viene? ¿Qué respondería?

Solución:

1.5 Quinta clase

$$S_{NR}[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \quad (1.94)$$

Corresponde a la acción de la partícula libre no relativista, ahora bien, para una partícula relativista se tiene lo siguiente

$$S_{REL}[x(t)] = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (1.95)$$

Ahora con dos observadores inerciales K y \tilde{K} , para lo cual K tiene coordenadas (x, y) y además \tilde{K} tiene coordenadas (\tilde{x}, \tilde{t}) , se simplifican mucho los cálculos asumiendo que el eje x está alineado con el movimiento

relativo del sistema de referencia \tilde{K} . Ahora resulta ser que la acción $S[x(t)]$ es invariante bajo boost. (no entendí la letra).

$$\tilde{t} = \frac{t - x \frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

En donde,

1. V es la velocidad relativa de \tilde{K} con respecto a K
2. $v(t) = \frac{dx}{dt}$ velocidad de la partícula según K
3. $\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}$ velocidad de la partícula según \tilde{K}

Además se encuentra que $S_{REL}[x(t)]$ es cuasi-invariante bajo transformaciones temporales

$$\delta_{TT}x = -\epsilon \frac{dx}{dt} \quad (1.96)$$

Lo que implica la conservación de energía relativista, que forma

$$E = \frac{-mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.97)$$

Además $S_{REL}[x(t)]$ es invariante bajo transformaciones espaciales

$$\delta_{TE}x = a \quad (1.98)$$

Se conserva el momentum lineal relativista

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.99)$$

Estas dos relaciones implicarán la relación de dispersión relativista.

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.100)$$

¿Cuál es la cantidad conservada del boost, que depende explícitamente del tiempo.

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \dots = 0 \quad (1.101)$$

Obsevamos que si $p = 0 \rightarrow E = mc^2$. Queremos hacer cuántica la relatividad especial con la relación de dispersión relativista.

$$E^2 = p^2 c^2 + c^2 p^4 \quad (1.102)$$

Argumento eurístico que lleva a la ecuación de Schödinger

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.103)$$

Efecto fotoeléctrico

$$E = \hbar \omega \quad (1.104)$$

Difracción de electrones

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad , \quad \text{relación de Broflie} \quad (1.105)$$

en el cual el momento es el siguiente

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.106)$$

Se tiene la siguiente función de onda plana

$$\Psi = Ae^{-i(\omega t - kx)} \quad , \quad k = \frac{\omega}{\lambda} \quad (1.107)$$

Con esta, tenemos que encontrar operadores tal que

$$\begin{aligned} \hat{E}\Psi &= \hbar\omega\Psi \rightarrow p = -\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}\Psi &= \frac{h}{\lambda}\Psi \rightarrow E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Así, finalmente tenemos la relación de dispersión relativista y además los operadores energía y momento, lo cual si lo reemplazamos en dicha relación de dispersión queda como sigue

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + m^2c^4 \\ -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi &= -c^2\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + m^2c^4\Psi \quad , \quad / \frac{1}{\hbar^2c^2} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual, hemos llegado a la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0} \quad (1.108)$$

La cual corresponde a la ecuación de Klein-Gordon ¿Podemos demostrar la constancia de una cantidad definida positiva? con $c = 1$ y $\hbar = 1$. En este caso, $c = 1$ significa que se mueve a la rapidez de la luz, y para rapidez menores sería en factor de por ejemplo un 80% o $c = 0.8$.

$$\begin{aligned} \Psi^*\partial_t^2\Psi - \Psi^*\partial_x^2\Psi - m^2\Psi^*\Psi &= 0 \\ \Psi\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_x^2\Psi^* + m^2\Psi\Psi^* &= 0 \\ \Psi^*\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_t^2\Psi^*\Psi\partial_x^2\Psi^* - \Psi^*\partial_x^2\Psi &= 0 \\ \partial_t(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*) + \partial_x(\Psi\partial_x\Psi^* - \Psi^*\partial_x\Psi) &= 0 \end{aligned}$$

Luego, de ello definimos lo siguiente

$$\rho = \Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^* \quad (1.109)$$

Lo cual no es definido positivo, a diferencia del $\rho_{SSH} = \Psi^*\Psi > 0$, si bien ρ es conservado, no admite una interpretación probabilística. Más aún $\rho^* = -\rho \rightarrow \rho$ es puramente imaginario.

$\tilde{\rho} = i\rho$ en donde $\rho \in \Re$ pero su signo no está definido.

Además se define la siguiente corriente de función de onda

$$j = \Psi\partial_x\Psi^* - \Psi^*\partial_x\Psi \quad (1.110)$$

La cual corresponde a una corriente de la función de onda, la cual denotará, en un flujo, cuánta de la función de onda se escapa de la frontera del volumen en la cual está definida. Así, similarmente al caso electromagnético, pero con ondas, podemos escribir una ecuación de continuidad para ondas, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V dV \rho \right) + \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.111)$$

La cual es la ecuación de continuidad de la función de onda, y en la cual, mientras la función no se "escape" del volumen, la densidad de probabilidad $\rho_{SSH} = \Psi^*\Psi > 0$ será conservada.

a- signo relativo entre Ψ^* y Ψ . En ρ , viene de la segunda derivada temporal ¿ Existe una ecuación de primer orden con respecto al tiempo y primer orden en el espacio relativista? Propongamos tal ecuación

$$\alpha \partial_t \Psi + \beta \partial_x \Psi = 0, \quad / \quad (\alpha \partial_t \Psi + \beta \partial_x \Psi)$$

$$\alpha^2 \partial_t^2 \Psi + \alpha \beta \partial_t \partial_x \Psi + \beta \alpha \partial_x \partial_t \Psi + \beta^2 \partial_x^2 \Psi = 0$$

versus la forma funcional de $E = \hbar \omega$ y $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi - \partial_x^2 \Psi = 0$$

Por lo tanto, $\alpha^2 = 1$ y $\beta^2 = -1$ así

$$\alpha \partial_t \Psi + \vec{\beta} \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0$$

$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \beta_i$$

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta_i \beta_j = -\delta_{ij}$$

$$\alpha \beta_i + \beta_i \alpha = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Así, $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ serán matrices, pero ¿ De cuánto por cuánto ?

Básicamente las β se pegarán como operador matricial a las funciones de onda las cuales serán vectores así saldrán cuatro funciones de onda.

Existe un teorema que implica de las cuatro componentes de matrices son al menos de 4x4, las cuales son llamadas matrices de Dirac.

$$\Psi = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \phi(\vec{x}) \quad (1.112)$$

Ecuación de Dirac, permite hacer una máquina de movimiento perpetuo, pero Dirac hizo un parche en vez de decir que los niveles de energía estuvieran disponibles, se asume que todos están ocupados. lo que nos permite predecir una partícula con la misma masa del electrón pero con carga opuesta, o sea, los positrones. Pero toda esta interpretación es innecesaria, ya que el E no es la energía, directamente, ya que la energía es el autoestado del Hamiltoniano, lo que no debe ir directamente o no siempre en la función de onda. ¿ Donde está el mar de Dirac?, lo otro que puede ocurrir es que si estas partículas fueran neutrinos, los neutrinos no tienen carga eléctrica, donde están los anti-neutrinos, ¡jaja xd

1.5.1 Preguntas quinta clase