Tarea 2, QFT 3 2025. Fecha de entrega: 2 de julio

Problema 1: El grupo y álgebra de Poincare

Estudie y escriba un informe de las secciones 2.3 y 2.4 del libro de Quantum Field Theory V1 de Steven Weinberg, (página 55 a 62). (Material complementario de apoyo Minuto 31:48 de https://www.youtube.com/watch?v=seabT438nr0)

Problema 2: Matriz de conjugación de carga

Recuerde que el congujado de carga ($\psi^{(c)}$) de un spinor ψ se define como $\psi^{(c)} = C\psi^*$, donde la matriz C es llamada la matriz de conjugación de carga y satisface

$$C\gamma^\mu C = -\left(\gamma^\mu\right)^* \ \wedge \ C^\dagger C = I \ . \tag{1}$$

En la base de Majorana $C = I$, mientras que en la base de Weyl $C = i\gamma^2$.

1) Muestre que bajo una transformación de Lorentz $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, el spinor conjugado de carga transforma como

$$\psi^{(c)}\left(x\right) \to \tilde{\psi}^{(c)}\left(\tilde{x}\right) = D\left[\Lambda\right]\psi^c\left(x\right) \ , \tag{2}$$

donde $D\left[\Lambda\right] = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}$ y $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right]$.

2) Muestre que si el spinor $\psi\left(x\right)$ satisface la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético de background $A_\mu\left(x\right)$

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi\left(x\right) = 0 \ , \tag{3}$$

entonces el spinor conjugado de carga $\psi^{(c)}\left(x\right)$ satisface

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi^{(c)}\left(x\right) = 0 \ . \tag{4}$$

Problema 3: Paridad

3.1) (Hecho en clases) Demuestre, expandiendo a primer orden en la transformación de Lorentz, que

$$D\left[\Lambda\right]^{-1}\gamma^\mu D\left[\Lambda\right] = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{5}$$

3.2) Asuma que esta expresión es válida para cualquier transformación que deje invariante el intervalo, incluso para aquellas no conectadas a la identidad. Considere la transformación de paridad

$$\left(x^0, \vec{x}\right) \to \left(x^0, -\vec{x}\right) \ , \tag{6}$$

que se implementa con la matrix

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{7}$$

Demuestre que

$$P\left[\Lambda\right]^{-1}\gamma^{\mu}P\left[\Lambda\right] = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} \ , \tag{8}$$

con $P\left[\Lambda\right] = \gamma^0$ para una base arbitraria.

3.3) Considere una transformación de paridad actuando sobre un spinor

$$\psi\left(x\right) \to \tilde{\psi}\left(t,\vec{x}\right) = P\left[\Lambda\right]\psi\left(t,-\vec{x}\right) \ . \tag{9}$$

Argumente que esta transformación intercambia spinores quirales derechos con izquierdos.

3.4) Demuestre que si $\psi\left(t,\vec{x}\right)$ satisface la ecuación de Dirac, entonces el spinor transformado de paridad $\tilde{\psi}\left(t,\vec{x}\right) = \gamma^0\psi\left(t,-\vec{x}\right)$ también satisface la misma ecuación de Dirac.