Apuntes de Introducción a las partículas elementales y Teoría Cuantica de Campos

Amaro A. Díaz Concha y Fernanda C. Mella Alvarez

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

"Todos los hombres por naturaleza desean saber"

— *Aristóteles de Estagira*

Prefacio

Este apunte está basado en las clases de ***Dr. Julio Oliva*** con el apoyo de diversas fuentes literarias las cuales estarán especificadas en la bibliografía.
Se compilarán los conocimientos necesarios y ejercicios resueltos para poder afrontar exitosamente cursos introductorios de **Partículas elementales** y **Teoría cuántica de campos**. Estos contenidos se dividirán en dos tomos los cuales serán los dos cursos dictados por el profesor, los cuales además, estarán divididos cada uno en 3 capítulos.
Además y como apoyo a la imaginación y los ejercicios se añadirá a cada ejercicis diversas interpretaciones que ayuden a relacionar la matemática expresada con fenómenos físicos.

Cualquier consulta, notificación de error o posible aporte hacia este apunte debe enviarse al correo electrónico de cualquiera de los autores de este apunte, **amdiaz2022@udec.cl** ó **fmella2022@udec.cl**.

Índice general

Capítulo 1

Nociones Previas

En el estudio de partículas elementales, notamos que experimentalmente se observan efectos tanto cuanticos como relativistas fenomenologicamente. Por lo que para trabajar con ellas se deberá tener en cuenta tanto la mécanica cuántica como la relatividad especial. La teoría con la que más nos acomodará trabajar será la **Teoría Cuantica de Campos (QFT)** pues tomará ambos efectos en consideración y nos permitirá estudiar eventos que sucedan a velocidades comparables con la velocidad de la luz c en regiones pequeñas.

	Small →	
Fast ↓	Classical mechanics	Quantum mechanics
	Relativistic mechanics	Quantum field theory

Pero ¿Qué es QFT? ENtenderemos la Teoría cuantica de campos como la cuantización de un campo clásico. De manera que incluyamos técnicas de mécanica cuántica (no relativista) al tomar los grados de libertad de un campo clásico y traducirlos tal que actue como operadores sobre un espacio de Hilbert. Por lo tanto en QFT serán operadores dependientes del espacio y el tiempo.

Es por esto que para poder estudiar QFT se deberán tener nociones tanto de mécanica clásica como cuántica. En este apunte, no se considerarán los efectos del campo gravitacional. Como las interacciones a estudiar ocurren en regiones pequeñas, el efecto gravitacional será considerado despreciable.

1.1. Mécanica Clásica

Desde la mécanica racional, es importante que nosotros tengamos claro conceptos como el significado de una acción S, el Lagrangiano L y más adelante conceptos de simetría y otros.

En esta primera sección, se disutirá la derivación de las ecuaciones de Euler-Lagrange, su utilidad; además de simentrías en transformaciones con sus cantidades conservadas asociadas.

1.1.1. Derivación de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Sabemos de la mécanica lagrangiana que las ecuaciones de Euler-Lagrange nos servirán para derivar las ecuaciones de movimiento del sistema. Utilizando el principio de invarianza de Hamilton, estas ecuaciones se podrán derivar a partir de la acción $S[q(t)]$. Así, sea la acción $S[q(t)]$, donde $q(t)$ son las coordenadas generalizadas del sistema.

$$S[q(t)] = \int dt L(q,\dot{q}) \tag{1.1}$$

Ahora, ¿Cómo cambia S si $q(t)$ cambia un poco?

Sea $q(t)$ una función dependiente del tiempo, bien definida en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$. Donde los puntos $q(t_1)$ y $q(t_2)$ estarán fijos, de manera que aunque $q(t)$ cambie su valor en t_1 y t_2 no cambiara. Así, como se muestra en la figura [**citar**], si consideramos todos los caminos que puede tomar $q(t)$, diferenciados por una diferencia infinitesimal $\delta q = \Phi(t)$ que a su vez será dependiente del tiempo, se podrá variar la acción.

[foto clasica de la invarianza d la acción]

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[q(t)+\phi(t)] - S[q(t)] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t)+\phi(t), \frac{d}{dt}\left(q+\Phi\right)) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t),\dot{q}(t)) && (1.2) \\
& && (1.3)
\end{aligned}$$

Además, considerando que:

$$f(x+\epsilon_1, y+\epsilon_2) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\epsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\epsilon_2 + \mathcal{O}(\epsilon_1^2, \epsilon_2^2, \epsilon_1, \epsilon_2) \tag{1.4}$$

Por lo tanto, introduciendo (1.4) con $f(x+\epsilon_1, y+\epsilon_2) = L(q(t)+\phi(t), \frac{d}{dt}\left(q+\Phi\right))$ en (1.2).

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q(t),\dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\Phi}{dt} \right) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t),\dot{q}(t)) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\Phi}{dt} \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\Phi + \frac{d}{dt}\left(\Phi\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\Phi \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\Phi\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \int_{t_1}^{t_2} dt\Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \\
&= 0 + + \int_{t_1}^{t_2} dt\Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) \\
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Si se asume que el princiío de acción es estacionario $\delta S = 0$. Entonces:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\Phi \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) = 0 \tag{1.5}$$

Finalmente, considerando a $f(t)$ arbitraria, en (1.5) el integrando de la integral deberá ser igual a cero. Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{1.6}$$

Que será la ecuación de Euler-Lagrange. Así, a partir de un Lagrangiano $L(q(t),\dot{q}(t),t)$ se podrán derivar las ecuaciones de movimiento del sistema.

Es importante destacar que las ecuaciones de Euler-Lagrange podrán traducirse para Teoría Clásica de Campos. Donde, en teoría de campos, trabajamos con una **densidad lagrangiana** $\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha, x^\mu)$, con ϕ^α son los campos (dependientes del espacio-tiempo x^μ) y $\partial_\mu\phi^\alpha = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\mu}$ son sus derivadas. Así, considerando la acción:

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha, x^\mu). \tag{1.7}$$

Así, al igual que para las ecuaciones de Euler-Lagrange, al extremizar la acción $\delta S = 0$, se obtendrán las ecuaciones de campo que describirán la dinámica del sistema.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right) = 0. \tag{1.8}$$

Esto se revisará a mayor detalle en la sección (tanto) de Teoría Clásica de Campos.

1.1.2. Cantidades conservadas

Aunque las ecuaciones de Euler-Lagrange describirán la dinámica de un sistema bajo un marco referencial. Solamente usar el marco de la mécanica racional quedará corto en el estudio de partículas elementales. Pues existirán interacciones o decaimientos, como el decaimiento beta [referenciar a cuando se hable de el más adelante], que no conservarán el número de partículas. Es por esto, que será importante preguntarnos: ¿Qué cantidades se conservan y cuando se conservarán?

Estudiemos estas preguntas suponiendo que tenemos una partícula en presencia de una energía potencial $U(x)$. El lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \tag{1.9}$$

Nos llevará a las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

A lo cual multiplicamos por $\frac{dX}{dt}$

$$m\frac{dX}{dt}\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{dX}{dt}\frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

Ahora, sacamos la derivada temporal hacia fuera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)\right) = 0$$

La combinación

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E \tag{1.10}$$

En lo cual E corresponde a la energía del sistema. E es una constante independiente del tiempo. En general diremos que una cantidad $Q = a(x, \dot{(x)})$ es conservada si

$$\frac{d}{dt}Q\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0 \tag{1.11}$$

En el contexto de la mecánica cláscia en el que estamos interesados en encontrar $x(t)$, las cantidades conservadas con extremadamente útiles. Las cantidades conservadas tambíen se llaman integrales de movimiento. Si un sistema tiene un número suficientemente alto de integrales de movimiento, entonces podemos encontrar las historias de los grados de libertad sin integrar .

$$q_i = q_i(t) \quad i = 1, \ldots, N \tag{1.12}$$

El **Teorema de Noether**, nos dice que bajo una simetria de un Lagrangiano L implicará la existencia de una corriente conservada $j^\mu(x)$. Tal que:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{1.13}$$

Inicialmente, este teorema podremos asociarlo a una transformación infinitesimal que diremos que es una simetría si el funcional de la acción es invariante / cuasi-invariante. Así, esta transformación tendrá asociada una **cantidad conservada**.

Ejemplos de transformaciones infinitesimales, la transformación infinitesimal tendrá una forma bien precisa, dado lo siguiente.
Transformación: traslación temporal. Sea una coordenada $q(t)$ que depende del tiempo, a la cual haremos una tralación al futoro en a seg. $q(t-a)$, notemos que a puede ser cualquier número, digamos que a es infinitesimal, con lo cual lo llamaremos ϵ, ahora, tomando la serie de Taylor a $q(t-\epsilon$ tenemos lo siguiente:

$$q(t-\epsilon) = q(t) - \epsilon\frac{dq}{dt} + O(\epsilon^2) \tag{1.14}$$

Para lo cual el tèrmino de $O(\epsilon^2)$ puede ser despreciado ya que será muy pequeño, ahora sigamos

$$q(t-\epsilon) - q(t) = -\epsilon\frac{dq}{dt} = \delta q \tag{1.15}$$

A δq lo llamaremos traslación temporal
Trasformación: Traslación espacial Sea un vector posición $r(t)$ el cual es situado con respecto a un eje coordenado cartesiano al cual lo trasladaremos espacialmente en un vector a con lo cual la posición luego de la traslación será $\vec{r}(t) + \vec{a}$, ahora bien, supongamos que el vector $\vec{a}$ es infinitesimal, con lo cual la llamaremos $\vec{\epsilon}$, asì, la traslacion temporal infinitesimal estará dado por

$$(r\vec{(t)} + \vec{\epsilon}) - r\vec{(t)} = \vec{\epsilon} = \delta\vec{r} \tag{1.16}$$

En lo cual $\delta\vec{r}$ es llamada traslación espacial.
Transfomación: Rotación espacial.
Sabemos que en una rotación espacial una cantidad conservada sería el momento angular. Ahora, definamos una rotación.

$$x\prime = \cos\theta x - \sin\theta y \tag{1.17}$$
$$y\prime = \sin\theta x + \cos\theta y \tag{1.18}$$

Ahora, en el caso que la rotación fuera infinitesimal, llamaremos $\theta = \epsilon$, con lo cual la rotación definida quedaría dada por

$$x\prime = x - \epsilon y \rightarrow \delta x = x\prime - x = -\epsilon y \tag{1.19}$$
$$y\prime = \epsilon x + y \rightarrow \delta y = y\prime - y = \epsilon x \tag{1.20}$$

con lo cual obtenemos que

$$\delta x = -\epsilon y \tag{1.21}$$
$$\delta y = \epsilon x \tag{1.22}$$
$$\delta z = 0 \tag{1.23}$$

Así la rotación espacial según el vector posicion $\vec{r}$ sería

$$\delta\vec{r} = \vec{r} \times \delta\hat{\phi} \tag{1.24}$$

Acordar que el producto vectorial solo tiene sentido en 3 y 7 dimensiones.
Ahora hablemos de la acción

$$S[q(t)] = \int dt L(q, \dot{q}) \tag{1.25}$$

Ahora, se define la acciòn quasi-invariante como:

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int dt \frac{dB}{dt} \tag{1.26}$$

B es una función que depende del tiempo.
Encontraremos que, en el caso que $B = 0$ decimos que la acción es invariante, desarollando obtenemos

$$\delta S = \int dt \left(\partial_q L \delta q + \partial_{\dot{q}} L \frac{d}{dt} \delta q \right) \tag{1.27}$$

$$= \int dt \left(\partial_q L - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{q}} L \right) \delta q + \int dt \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}} L \ \delta q \right) \tag{1.28}$$

Usando la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\delta S = \int dt \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}} L \ \delta q \right) = \int dt \frac{dB}{dt} \tag{1.29}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\partial_{\dot{q}} L \delta q - B \right) = 0 \tag{1.30}$$

si usted es capaz de encontrar una transformación que deja la accioón quasi-invariante, entonces la siguente cantidad encontrará que es constante

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.31}$$

en lo cual la constante no dependerá del tiempo. Ahora veamos que sucede cuando usamos una traslación temporal.
Traslación temporal:

$$S[q(t)] = \int dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \tag{1.32}$$

Ahora bien, la variación de la acción de define por

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] \tag{1.33}$$

$$= \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \left(q - \epsilon \frac{dq}{dt} \right) \right)^2 - U(q) - \epsilon \dot{q} \right] - \int dt \left[\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \right] \tag{1.34}$$

$$= \int dt \left[\frac{m}{2} (\dot{q}^2 - 2\epsilon \dot{q}\ddot{q}) - U(q) + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] - \int dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - U(q) \right] \tag{1.35}$$

$$= \int dt \left[-m\epsilon \dot{q}\ddot{q} + \epsilon \dot{q} \partial_t U \right] \tag{1.36}$$

$$= \int dt \frac{d}{dt} \left[\epsilon \left(-\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \right] \tag{1.37}$$

Con lo cual hemos encontrado nuestra función B para esta traslación en particular. Tal que

$$B = \epsilon \left(-\frac{m}{2} \dot{q}^2 + U(q) \right) \tag{1.38}$$

Notese que en este caso nunca usamos la ecuación de movimiento para encontrar cuánto vale B en el caso de esta traslación. Ahora que sabemos cual es el valo de la función B, entonces podemos calcular cúal es la cantidad conservada segùn lo obtenido anteriormente.

$$\partial \dot{q} L = m\dot{q} \tag{1.39}$$

Así, la cantidad conservada está dada por

$$C^{te} = m\dot{q}(-\epsilon\dot{q}) - \epsilon\left(-\frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q)\right) \tag{1.40}$$

De lo cual podemos identificar a la energía del sistema, con lo cual

$$C^{te} = -\epsilon\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q)\right) = -\epsilon E \tag{1.41}$$

Asì, la conservaciòn d la energía emerge como la aplicación del teorema de Noether a la quasi-invariancia bajo transformaciones temporales.
Acción de la partícula libre: Sabemos que la acción de la partícula libre está dada por

$$S = \int dt \frac{m}{2}|\frac{d\vec{r}}{dt}|^2 \tag{1.42}$$

Ahora bien, si usamos la convención de Einstein

$$S = \int dt \frac{m}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} \quad , x^i = (x^1, x^2, x^3) \tag{1.43}$$

Ahora usaremos traslaciones espaciales.
Traslaciones espaciales:

$$\delta x^i = \epsilon^i \quad , \quad \delta\vec{r} = \vec{\epsilon} \tag{1.44}$$

Ahora lo aplicamos a la variación de la acción:

$$S[x + \delta x] = \int dt \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(x^i + \epsilon^i)\frac{d}{dt}(x^i + \epsilon^i) \tag{1.45}$$

$$= \int dt \frac{m}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt} = S[x] \tag{1.46}$$

Con lo cual

$$\delta S = S[x + \delta x] - S[x] = 0 = \int dt \frac{d}{dt} 0 \tag{1.47}$$

Para un grado de libertad :

$$\partial_{\dot{q}} L \delta q - B = C^{te} \tag{1.48}$$

Para varios grados de libertad obtenemos

$$\partial_{\dot{q}_i} L \delta q_i - B = C^{te} \tag{1.49}$$

Y para traslaciones espaciales

$$\partial_{\dot{x^k}} L \delta x^k - B = C^{te} \tag{1.50}$$

Ahora, si tenemos un lagrangeano para varios grados de libertad $L = L(x^i, \dot{x^i})$ se obtiene lo siguiente

$$\partial_{\dot{x^k}} L = \partial_{\dot{x^k}}(\frac{1}{2} m x^i x^i) \tag{1.51}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \dot{x^i}}{\partial \dot{x^k} x^i + x^i \partial \dot{x^k}}\right) \tag{1.52}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\delta^i_k \dot{x^i} + \dot{x^i}\delta^i_k\right) \tag{1.53}$$

$$= m\dot{x^k} \tag{1.54}$$

En lo cual notamos que solo sobrevive ese términos por las deltas de Kronecker.
Ahora, la cantidad conservada está dada por:

$$m\dot{x^k}\epsilon^k - B = C^{te} \tag{1.55}$$

En lo cual, como sabemos, en una transformación traslación $B = 0$ Con lo cual, podemos concluir que:

$$m\dot{x^k}\epsilon^k = C^{te} \tag{1.56}$$

por lo tanto, de igual forma se cumplirá:

$$m\dot{x^k} = \tilde{C}^{te} \tag{1.57}$$

y así, en transformaciones espaciales la cantidad conservada será el momento lineal

$$m\vec{v} = \vec{p} \tag{1.58}$$

1.2. Tercera clase

Si tenenmos en cuenta el lagrangeano para una partícula libre no relativista, como sigue

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \tag{1.59}$$

Para el cual, si introducimos una variación infinitesimal, en específico, una transformación espacial, de la siguiente manera

$$\delta S = S[\vec{r} + \delta\vec{r}] - S[\vec{r}] = 0 \tag{1.60}$$

en lo cual $\delta\vec{r} = \vec{\epsilon}$ se le llamará a la traslación espacial, tendremos que por el teorema de Noether, el siguiente término se mantendrá constante

$$c^{te} = \partial_{\dot{\vec{r}}}L \cdot \delta\vec{r} - \cancel{B} \tag{1.61}$$

$$= \partial_{\dot{x}}L\delta x + \partial_{\dot{y}}l\delta y + \partial_z L\delta z \tag{1.62}$$

Ahora bien, usaremos la siguiene notación para las coordenadas $\partial_{\dot{\vec{r}}}L \to \partial_{\dot{x^k}}L$ en lo cual $x^k = (x, y, z)$. Ahora bien, el término constante lo podemos escribir como

$$c^{te} = \partial_{\dot{x^k}}L\epsilon^k \tag{1.63}$$

Lo cual si tomamos la derivada del lagrangeano para una partícula libre no relativista

$$\partial_{\dot{x^k}}L = \frac{1}{2}\partial_{\dot{x^k}} \tag{1.64}$$

$$= \frac{1}{2}m(\delta^i_k\dot{x^i} + \dot{x^i}\delta^i_k) \tag{1.65}$$

$$= m\dot{x^k} \tag{1.66}$$

Así y por tanto, se concluye que el término que, por teorema de Noether se conserva, es el siguiente

$$c^{te} = m\dot{x^k}\epsilon^k \tag{1.67}$$

Lo cual, en términos simples, nos dice que para toda coordenada x^k, el momento lineal se conserva para transformaciones espaciales, lo que viene siendo la primera ley de newton.

$$c^{te} = mv_x \tag{1.68}$$

Para la partícula libre no relativista, nuevamente, tenemos este lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \tag{1.69}$$

En lo cual tenemos que, la energía $E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$ será invariante bajo transformaciones temporales y que, el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ será invariante bajo transformaciones espaciales. Con ello, podemos formular la relación de dispersión no relativista, la cual está dada por

$$E = \frac{|\vec{p}|}{2m} \tag{1.70}$$

Relatividad especial:

1. Todos los observadores inerciales son equivalentes, mediante experimentos físicos no puedo dar cuenta si estoy en movimiento rectilíneo uniforme o no, experimento del tren.
2. Todos los observadores inerciales están de acuerdo en que la luz en el vació se mueve a una rapidez constante, $c = 300000$[km/s].
3. Principio de homogeneidad del espacio-tiempo: todos los puntos e instantes son equivalentes, las leyes que rigen la física serán las mismas aquí y en la quebrá del ají .
4. Isotropía del espacio tiempo: todas las direcciones son equivalentes.

Notar que la relatividad de los observadores no inerciales lleva a la gravitación, lo mismo sucede con la suposición que los rayos de luz no necesariamente viajan en línea recta, nuevamente nos llevará a la gravitación. Notemos que cuando tenemos dos boost en diferentes direcciones, esto, no corresponde a un boost puro, si no que lleva consigo una rotación en el espacio- tiempo, este fenómeno es llamado como Precesión de Thomas.
Landau volumen II, teoría clásica de campos, primeras 5 páginas del capítulo
Los principios 1 y 4 implican que, si tenemos dos eventos, que ocurren en instantes diferentes en el espacio tiempo. Sean dos observadores, K y $\bar{K}$ para los cuales, los dos eventos tendrán etiquetas distintas, es decir

- Con respecto al sistema K los eventos tendrán coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y
$$(t_2, x_2, y_2, z_2)$$
- Con respecto al sistema $\bar{K}$ los eventos tendrán coordenadas $(\bar{t_1}, \bar{x_1}, \bar{y_1}, \bar{z_1})$ y $(\bar{t_2}, \bar{x_2}, \bar{y_2}, \bar{z_2})$

Ahora, dichos eventos podrán ser observados en diferente orden de sucesos, o no, dependiendo se su relación entre sí en su causalidad, si existe causalidad entre uno y otro, entonces su ordena estará fijo, segunda ley de la termodinámica, pero en caso que no hay causalidad entre sí, dichos eventos podrán ser observados en orden distintos dependiendo del observador.
Invariacia del intervalo: Consecuencia del principio de la relatividad especial, formulación de la métrica de minkwosky

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(\bar{t_2} - \bar{t_1})^2 - (\bar{x_2} - \bar{x_1})^2 - (\bar{y_2} - \bar{y_1})^2 - (\bar{z_2} - \bar{z_1})^2 \quad (1.71)$$

La conservación del interalo entre eventos P y Q tiene consecuencias dramáticas. ¿Y entonces qué? Primero asumiremos que P y Q están infinitesimalmente cerca, esto significa que

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + dt \\ x_2 &= x_1 + dx \\ y_2 &= y_1 + dy \\ z_2 &= z_1 + dz \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \bar{t_2} &= \bar{t_1} + \bar{dt} \\ \bar{x_2} &= \bar{x_1} + \bar{dx} \\ \bar{y_2} &= \bar{y_1} + \bar{dy} \\ \bar{z_2} &= \bar{z_1} + \bar{dz} \end{aligned}$$

La conservación del intervalo implica que:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \quad (1.72)$$

Ahora nos preguntamos, si nos damos las coordenadas con cachirulo, o sea, con respecto al observador inercial, ¿cómo se podrán escribir en función de las coordenadas sin cachirulo? Para ello nos encontramos con un sistema de ecuaciones diferenciale parciales con 10 componentes, lo cual puede sonar feo, pero es la forma de obtener las transformaciones de lorentz en todas las dimensiones

$$\begin{aligned} &c^2\left(\partial_t\bar{t}dt + \partial_x\bar{t}dx + \bar{t}_y dy + \bar{t}_z dz\right) \\ &-\left(\partial_t\bar{x}dt + \partial_x\bar{x}dx + \partial_y\bar{x}dy + \partial_z\bar{x}dz\right)\ldots \end{aligned}$$

Existen 10 transformaciones parametrizadas por 10 parámetros continuos, relativistas

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Traslación temporal

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + a \\ \bar{x} &= x, \quad \bar{y} &= y, \quad \bar{z} = z \end{aligned}$$

Traslación espacial en x

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t \\ \bar{x} &= x + h_x, \quad \bar{y} &= y, \quad \bar{z} = z \end{aligned}$$

y así con todas las coordenadas.
Ahora bien, las rotaciones en el espacio serán, rotaciones en un plano (x, y) que es equivalente a una rotación alrededor del eje z,

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t \\ \bar{x} &= \cos\alpha x - \sin\alpha y \\ \bar{y} &= \sin\alpha x + \cos\alpha y \\ \bar{z} &= z \end{aligned}$$

$\alpha \in [0, 2\pi]$.
Lo que implica que, nuestro intervalo invariante será

$$\begin{aligned} c^d t^2 - (\cos\alpha dx - \sin\alpha dy)^2 - (\sin\alpha dx + \cos\alpha dy)^2 - dz^2 \\ = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \end{aligned}$$

O sea, las rotaciones nos dejan invariante el invervalo (métrica de minkowsky) En rotación en el plano (y, z) le llamaremos $\theta \in [0, 2\pi]$ y en rotaciones en el plano (z, x) llamaremos al ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$.
Boost a lo largo del eje x:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t - v/c^2 x}{\sqrt{q - v^2/c^2}} \\ \bar{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \end{aligned}$$

Tarea: probar que deja el intervalo invariante
Boost a lo largo del eje y:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - {v_y}^2/c^2}} \\ \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= \frac{y - v_y/c^2 y}{\sqrt{1 - {v_y}^2/c^2}} \end{aligned}$$

Tarea: boost a lo largo del eje z y tomamos c $\rightarrow \infty$ sakurai de cuantica

1.3. Cuarta clase

Entonces, en la última clase, los principios de la relatividad especial, implican la invariancia del intervalo. La conservación del intervalo implica que:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\bar{t}^2 - d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2 - d\bar{z}^2 \tag{1.73}$$

Hay 10 tipos de transformaciones continuas que preservan el intervalo, las cuales son

- 1 Traslación temporal
- 2 Traslaciones espaciales
- 3 Rotaciones (las rotaciones son con el eje temporal fijo)
- 3 Boosts

Las rotaciones espaciales son del tipo

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x + a, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z \tag{1.74}$$

Las rotacione son del tipo

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= t \\
\tilde{x} &= \cos\theta x - \sin\theta y \\
\tilde{y} &= \sin\theta x + \cos\theta y \\
\tilde{z} &= z
\end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje x

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{t - v_x x/c^2}{\sqrt{q - v_x^2/c^2}} \\
\tilde{x} &= \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \\
\tilde{y} &= y \\
\tilde{z} &= z
\end{aligned}$$

Boost a lo largo del eje y, boost a lo largo del eje z.
Vimos que en el límite no relativista $c \rightarrow \infty$

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} \tag{1.75}$$

Lo cual corresponde al conocido boost de Galileo, el cual describe la posición mediante la velocidad relativa entre dos observadores inerciales (velocidad constante).
Asumamos que la partícula se mueve

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{v}, \quad \frac{dx}{dt} = v$$

Con lo cual tenemos $\tilde{v}$ vs v, a lo cual

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} - V\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt} - V\cancel{\frac{dt}{d\tilde{t}}}$$

Con lo cual la composición de velocidades en el límite no relativista es

$$\tilde{v} = v - V \tag{1.76}$$

Lo cual no es compatible con la unicidad del valor de la rapidez de la luz en el vacío. Con lo cual es necesario encontrar una composición de velocidades que cumpla con los postulados de la relatividad especial. Para ello

$$d\tilde{x} = \frac{dx - V dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$d\tilde{t} = \frac{dt - v/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Con lo cual

$$\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \frac{dx - V dt}{dt - V/c^2 dx} \cdot \frac{\frac{1}{dt}}{\frac{1}{dt}}$$
$$= \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - V/c^2 \frac{dx}{dt}}$$

Así, la suma de velocidades relativista está dado por

$$\tilde{v_x} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \tag{1.77}$$

Ahora veamos el caso en el cual $v_x = c$

$$\tilde{v_x} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2} c} = \frac{c - V}{\frac{c - V}{c}} = c$$
$$i\bar{h}\partial_t \Phi = -\frac{\bar{h}^2}{2m} \nabla^2 \Phi \tag{1.78}$$

En lo cual, el término $\frac{-\bar{h}^2}{2m}\nabla^2\Phi = \frac{p^2}{2m}\nabla^2\Phi$ Con lo cual, la relación de dispersión queda tal que:

$$E = mc^2 \sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2 c^2}}$$
$$= mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2 c^2} + \frac{1}{4}\frac{p^4}{m^4 c^4}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{4m^3 c^2}$$

Quedó de tarea el probar la invariancia de la acción ante composición de velocidades

1.4. Quinta clase

$$S_{NR}[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \tag{1.79}$$

Corresponde a la acción de la partícula libre no relativista, ahora bien, para una partícula relativista se tiene lo siguiente

$$S_{REL}[x(t)] = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{1.80}$$

Ahora con dos observadores inerciales K y $\tilde{K}$, para lo cual K tiene coordenadas (x, y) y además $\tilde{K}$ tiene coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{t})$, se simplifican mucho los cáculos asumiendo que el eje x está alineado con el movimiento relativo del sistema de referencia $\tilde{K}$. Ahora resulta ser que la acción $S[x(t)]$ es invariante bajo boost. (no entendí la letra).

$$\tilde{t} = \frac{t - x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

En donde,

1. V es la velocidad relativa de $\tilde{K}$ con respecto a K
2. $v(t) = \frac{dx}{dt}$ velocidad de la partícula según K
3. $\tilde{v}(t) = \frac{d\tilde{x}}{dt}$ velocidad de la partícula según $\tilde{K}$

Además se encuentra que $S_{REL}[x(t)]$ es cuasi-invariante bajo transfomaciones temporales

$$\delta_{TT}x = -\epsilon\frac{dx}{dt} \tag{1.81}$$

Lo que implica la conservación de energía relativista, que forma

$$E = \frac{-mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.82}$$

Además $S_{REL}[x(t)]$ es invariante bajo transformaciones espaciales

$$\delta_{TE}x = a \tag{1.83}$$

Se conserva el momentum lineal relativista

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.84}$$

Estas dos relaciones implicarán la relación de dispersión relativista.

$$E = \sqrt{p^2m^2 + m^2c^4} \tag{1.85}$$

¿ Cuál es la cantidad conservada del boost, que depende explícitamente del tiempo.

$$\frac{dQ}{dt} = 0\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial t}dt + \frac{\partial Q}{\partial y} + \cdots = 0 \tag{1.86}$$

Obsevarmos que si $p = 0 \to E = mc^2$. Queremos hacer cuántica la relatividad especial con la relación de dispersión relativista.

$$E^2 = p^2c^2 + c^2p^4 \tag{1.87}$$

Argumento eurístico que lleva a la ecuación de Schödinger

$$p \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$
$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Efecto fotoeléctrico

$$E = \hbar\omega \tag{1.88}$$

Difracción de electrones

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad , \quad \text{relación de Broflie} \tag{1.89}$$

en el cual el monento es el siguiente

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.90}$$

Se tiene la siguiente función de onda plana

$$\Psi = Ae^{-i(\omega t - kx)} \quad , \quad k = \frac{\omega}{\lambda} \tag{1.91}$$

Con esta, tenemos que encontrar operadores tal que

$$\hat{E}\Psi = \hbar\omega\Psi \rightarrow p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\hat{p}\Psi = \frac{h}{\lambda}\Psi \rightarrow E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

Así, finalmente tenemos la relacion de dispersión relativista y además los operadores energía y momento, lo cual si lo reemplazamos en dicha relación de dispersión queda como sigue

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$
$$-\hbar\partial_t^2\Psi = -c\hbar^2\partial_x^2\Psi + m^2c^4\Psi \quad , \quad / \frac{1}{\hbar^2c^2}$$
$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi + \frac{m^2c^2}{h^2}\Psi = 0$$

Con lo cual, hemos llegado a la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = 0} \tag{1.92}$$

La cual corresponde a la ecuación de Klein-Gordon ¿ Podemos demostrar la constancia de una cantidad definida positiva? con $c = 1$ y $\hbar = 1$. En este caso, $c = 1$ significa que se mueve a la rapidez de la luz, y para rapideces menores sería en factor de por ejemplo un 80 % o $c = 0{,}8$.

$$\Psi^*\partial_t^2\Psi - \Psi^*\partial_x^2 - m^2\Psi^*\Psi = 0$$
$$\Psi\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_x^2\Psi^* + m^2\Psi\Psi^* = 0$$
$$\Psi^*\partial_t^2\Psi^* - \Psi\partial_t^2\Psi^*\Psi\partial_x^2\Psi^* - \Psi^*\partial_x^2\Psi = 0$$
$$\partial_t\left(\Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^*\right) + \partial_x\left(\Psi\partial_x\Psi^* - \partial_x\Psi\right) = 0$$

Luego, de ello definimos lo siguiente

$$\rho = \Psi^*\partial_t\Psi - \Psi\partial_t\Psi^* \tag{1.93}$$

Lo cual no es definido positivo, a diferencia del $\rho_{SSHR} = \Psi^*Psi > 0$, si bien ρ es conservado, no admite una interpretación probabilística. Más aún $\rho^* = -\rho \rightarrow \rho$ es puramente imaginario.
$\tilde{\rho} = i\rho$ en donde $\rho \in \mathfrak{R}$ pero su signo no está definido.
Además se define la siquiente corriente de función de onda

$$j = \Psi\partial_x\Psi^* - \Psi^*\partial_x\Psi \tag{1.94}$$

La cual corresponde a una corriente de la función de onda, la cual denotará, en un flujo, cuánta de la función de onda se escapa de la frontera del volumen en la cual está definida. Así, similarmente al caso electromagnético, pero con ondas, podemos escribir una ecuación de continuidad para ondas, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V dV\rho\right) + \int_{\partial V}\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0 \tag{1.95}$$

La cual es la ecuación de continuidad de la función de onda, y en la cual, mientras la función no se .^{es}cape"del volumen, la densidad de probabilidad $\rho_{SSHR} = \Psi^*\Psi > 0$ será conservada.
a- signo relativo entre Ψ^* y Ψ. En ρ, viene de la segudna derivada temporal ¿ Existe una ecuación de primer orden con respecto al tiempo y primer orden en el espacio relativista? Propongamos tal ecuación

$$\alpha\partial_t\Psi + \beta\partial_x\Psi = 0, \quad / \quad (\alpha\partial_t\Psi + \beta\partial_x\Psi)$$
$$\alpha^2\partial_t^2\Psi + \alpha\beta\partial_t\partial_x\Psi + \beta\alpha\partial_x\partial_t + \beta^2\partial_x^2\Psi = 0$$

versus la forma funcionald de $E = h\omega$ h barra, t $\lambda = \frac{h}{mv}$,

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2\Psi - \partial_x^2\Psi = 0$$

Por lo tanto, $\alpha^2 = 1$ y $\beta^2 = -1$ así

$$\alpha\partial_t\Psi + \vec{\beta}\cdot\vec{\nabla}\Psi = 0$$
$$\vec{\beta} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3 m\} = \beta_i$$
$$\alpha^2 = 1, \quad \beta_i\beta_j = -\delta_{ij}$$
$$\alpha\beta_i + \beta_i\alpha = 0 \quad , \quad \forall i = 1, 2, 3$$

Así,$\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ serán matrices, pero ¿ De cuánto por cuánto ?
Básicamente las beta pegarán como operador matricial a las funciones de onda las cuales serán vectores así saldrán cuatro fuciones de onda.
Existe un teorema que implica de las cuatro componentes de matrices son al menos de 4x4, las cuales son llamadas matrices de Dirac.

$$\Psi = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\phi(\vec{x}) \tag{1.96}$$

Ecuación de Dirac, permite hacer una máquina de movimiento perpertuo, pero Dirac hizo un parche en vez de decir que los niveles de energía estuvieran disponibles, se asume que todos están ocupados. lo que nos permite predecir una partícula con la misma masa del electrón pero con carga opuesta, o sea, lo positrones. Pero toda esta interpretación es inesesaria, ya que el E no es la energía, directamente, ya que la energía es el autoestado del Hamintoniano,lo que no debe ir directamente o no siempre en la función de onda. ¿ Donde está el mar de Dirac?, lo otro que puede ocurrir es que si estas partículas fueran neutrinos, lo neutrinos no tienen carga eléctrica, donde están los anti-neutrinos, jaja xd

1.5. Sexta clase

Volvemos a relatividad especial

$$\tilde{t} = \frac{t - V/c^2 x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$
$$V = c\tanh\xi$$

Ahora, si definimos V así

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - \tanh^2\xi \qquad = \frac{1}{\cosh^2\xi}$$

Con lo cual recordemos las propiedades que cumplen las funciones trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh^2\xi - \sinh^2\xi = 1 \tag{1.97}$$
$$1 - \tanh^2\xi = \frac{1}{\cosh^2\xi} \tag{1.98}$$

Por lo tanto, podemos escribir nuestras transformaciones como lo siguiente

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{\tanh\xi}{c}x}{\frac{1}{\cosh\xi}}$$
$$c\tilde{t} = \cosh\xi ct - \sinh\xi x$$
$$\tilde{x} = \cosh\xi x - \sinh\xi ct$$
$$\tilde{z} = z$$
$$\tilde{y} = y$$

En lo cual, $\sinh \xi$ será la rapidity.
Ahora, escribamos esto en notación tensorial de la siguiente forma

$$x^{\mu} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{xt, x, y, z\} \tag{1.99}$$

Lo cual representa las coordenadas de un evento en el espacio tiempo plano (Minkowsky).
(Escribió la transformación en matrices, revisar como escribir las matrices)
Aplicamos las transformaciones en forma matricial

$$\tilde{x}^{\mu} = \{\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\} = \{c\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} \tag{1.100}$$

Ahora, la matriz de transformación se representa como un tensor Λ^{μ}_{ν} de transformacion para el tensor de posiciones x^{μ} tal que, la regla de transformación para la posición dentro del espacio tiempo plano de Minkowsky, es bajo la siguiente regla

$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.101}$$

en lo cual los índices ν están contraidos y por tanto, sumados.
Pensamos ahora, en una transformación más general y preguntémonos ¿ Qué nos dice la invariancia del intervalo con respecto de Λ^{μ}_{ν}?

$$\begin{aligned}
\tilde{\vec{x}} &= \Theta \vec{x} \\
||\tilde{\vec{x}}||^2 &= ||\vec{x}||^2 \\
\tilde{\vec{x}}^T \tilde{\vec{x}} &= \vec{x}^T \vec{x} \\
(\Theta \vec{x})^T (\Theta \vec{x}) &= \vec{x}^T \vec{x} \\
\vec{x}^T \Theta^T \Theta \vec{x} &= \vec{x}^T \vec{x}
\end{aligned}$$

En lo cual, las matrices Θ se definen como ortogonales, o sea que, $\Theta^T \Theta = I$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\
&= c^2 d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{z}^2
\end{aligned}$$

Para lo cual

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Donde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ la cual corresponde a la métrica de Minkowsky, ahora, expandamos la suma de la métrica ds^2, primero sumamos la suma, valga la redundancia, en el índice ν.

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{\nu=0}^{3} \left(\eta_{\mu 0} dx^{\mu} dx^0 + \eta_{\mu 1} dx^{\mu} dx^1 + \eta_{\mu 2} dx^{\mu} dx^2 + \eta_{\mu 3} dx^{\mu} dx^3 \right) \\
&= \eta_{00} (dx^0)^2 + \eta_{11} (dx^1)^2 + \eta_{22} (dx^2)^2 + \eta_{33} (dx^3)^2 \\
&= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2
\end{aligned}$$

Por tanto

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu}$$

Pero queremos que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \rightarrow d\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} dx^{\alpha} \\
\tilde{x}^{\nu} &= \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\beta} \rightarrow d\tilde{x}^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\beta}
\end{aligned}$$

Con lo cual, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\eta_{\cancel{\mu}_{\alpha} \cancel{\nu}_{\alpha}} dx^{\cancel{\mu}^{\alpha}} dx^{\cancel{\nu}^{\beta}} &= \eta_{\mu\nu} \left(\Lambda^{\nu}_{\alpha} dx^{\alpha} \right) \left(\Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\beta} \right) \\
\left(\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} - \eta_{\alpha\beta} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta} &= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{1.102}$$

tenemos que Λ será una transformación de Lorenz si ocurre lo anterior

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha}\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$
$$\Lambda^{T}\eta\Lambda = \eta$$

versus

$$\Theta^{T}I\Theta = I$$

En lo cual se usa la siguiente propiedad

$$\xi^{T}C\xi = C$$

Siendo c una matriz antisimétrica con respecto a la diagonal y además diagonal nula.
Definición: Diremos que un arreglo denotado por A^{α} es un vector contravariante de Lorentz si bajo una transoformación de Lorentz:

$$\tilde{A}^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}A^{\beta} \tag{1.103}$$

Las coordenadas x^{μ} definen un vector contravariante, ahora, un vector contravariante sería el 4-momenta.
Ahora, se tiene un observador $\tilde{K}$ el cual se mueve a una velocidad constante V con respecto a un observador K, ambos observadores son inerciales.
¿ Dados E y P, cómo encontramos $\tilde{E}$ y $\tilde{P}$?

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad P = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

versus sus tildas

$$\tilde{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} \quad , \quad \tilde{P} = \frac{m\tilde{v}}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}^2}{c^2}}}$$

Ahora, aplicamos la transformación para la velocidad $\tilde{v}$ tal que

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v-V}{1-\frac{vV}{c^2}}\right)^2}} \\
&= \frac{c\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)mc^2}{\sqrt{c^2\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)^2-(v-V)^2}} \\
&= \frac{c(1-\frac{vV}{c^2})mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mvV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}+\frac{v^2V^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
\frac{\tilde{E}}{c} &= \frac{\frac{E}{c}-\frac{V}{c}P}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

Versus

$$c\tilde{t} = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Tarea,

$$\tilde{p} = \frac{m\tilde{v}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}} = \frac{p - \frac{V}{c}\left(\frac{E}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

versus

$$\tilde{x} = \frac{x - \frac{V}{c}(c\tilde{t})}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Definición: 4-momenta o cuadrivector de momentum , de define como

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad , \quad \tilde{p}^\mu = \left(\frac{\tilde{E}}{c}, \tilde{\vec{p}}\right) \tag{1.104}$$

y además

$$\tilde{p}^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu \tag{1.105}$$

El cuadrimoemento es un vector contravariante de Lorentz.

1.6. Septima clase

La energía relativista está dada por lo siguiente

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.106}$$

y a su vez el cuadrimomento

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.107}$$

lo cual, junto a transformaciones de Lorentz, dadas por

$$\tilde{t} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$\tilde{v} = \frac{v - V}{\sqrt{1 - \frac{vV}{c^2}}}$$

En lo cual, $\frac{E}{c}$ y p transforman como los componentes de un cuadri-vector

$$p^\mu = (p^0, \vec{p})$$
$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Con lo cual tenemos que, el cadrimomento transforma siguiendo la siguiente regla de transformación

$$\tilde{p}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu} \tag{1.108}$$

Además, siguiendo la convención de la métrica $(1, -1, -1, -1)$ tenemos lo siguiente

$$\eta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = \eta_{00} p^0 p^0 + \eta_{11} p^1 p^1 \qquad = 1 \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 - \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$= \frac{m^2 c^2 - m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad = m^2 c^2$$

De la misma forma:

$$\eta_{\mu\nu} \tilde{p}^{\mu} \tilde{p}^{\nu} = m^2 c^2$$

Por lo tanto, como la constracción da como resultado un escalar, entonces se puede concluir que el cuadrimomento corresponde a un invariante de Lorentz, esto significa que todos los observadores inverciales observarán la misma cantidad a lo largo de la transformación entre ellos, siendo su valor el dicho $\eta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = m^2 c^2$. En el caso de partículas sin masa, como lo fotones y gluones, esta relación sigue la siguiente regla

$$\eta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} = 0$$

Inserte dibujo de Julio del efecto compton.

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

λ_c es constante?
Pero ahora, en qué dirección sale disparado el fotón?, no lo sabemos ya que θ es una variable aleatoria. En las variables aleatorias continuas no tiene sentido preguntarse cuál es la probabilidad en que la variable tome un valor en particular, sin embargo, si es correcto el preguntarse la probabilidad en un invtervalo.

$$\theta = \int p(\theta) d\theta$$

Ahora vamos a demostrar que la conservación de el cuadri-momentum lleva justo a compton. Al choque,vaya. Pensemos en este proceso como un choque.
Entonces, inicialmente hay un electrón y un fotón y asumamos que el electrón está quieto: Digamos que el fotón incide en el eje z con cierta energía, pensemos en este proceso como uno en el cual se conserva el cuadri-monento.
Notese que si tengo un sistema invariante ante transformaciones espaciales, entonces los cuadri-momentos pueden ser sumados.

$$p^{\mu}_{TI} = p^{\mu}_{EI} + p^{\mu}_{\gamma} \tag{1.109}$$

El del electrón es facil ya que

$$p^{\mu}_{EI} = \left(\frac{mc^2}{c}, \vec{0} \right)$$

Si tengo un fotón de color λ, y de frecuencia ω, entonces

$$p\mu_{\gamma} = \left(\frac{E_{\gamma}}{c}, 0, 0, \# \right)$$

Ahora necesito un número tal que se cumpla la relación para las partículas sin masa, como lo es el fotón, por lo tanto,

$$p^{\mu}_{\gamma} = \left(\frac{E_{\gamma}}{c}, 0, 0, \frac{E_{\gamma}}{c} \right)$$

recuerden entonces que $E_\gamma = \hbar\omega$, ¿de dónde sale?, pues, de experinmentos. Entonces podemos escribir que, el cadri-momentum inicial es lo siguiente

$$p^\mu_{TI} = \left(mc + \frac{E_\gamma}{c}, 0, 0\frac{E_\gamma}{c} \right)$$

En lo cual se han sumado los momenta.
Al final, luego del choque, pasará lo siguiente.(inserte dibujo de Julio posterior al choque en el cual se observa la dirección aleatoria en la cual el fotón sale volando, ángulo de dispersión).
EL fotón sadrá en una direción con ángulo α y el fotón saldrá en un ángulo θ, el cual daremos como conocido, ahora la pregunta es, dado un θ conocido, cuál es el color del fotón?

$$p^\mu_{FT} = p^\mu_{EF} + p^\mu_{gamma'} \tag{1.110}$$

La velocidad de un electrón es una variable aleatoria como también lo es su energía, pero estas están relacionadas con el ángulo.

$$p^\mu_{\gamma'} = \left(\frac{E_{\gamma'}}{c}, 0, \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta, \frac{E_{\gamma'}}{c}\cos\theta \right)$$

Lo cual se cumple ya que, cumpliendo con la relación, se tiene que

$$\left(\frac{E_{\gamma'}}{c} \right)^2 - |\vec{p}_\gamma|^2 = 0$$

Ahora para la energía final del electrón, tendremos que

$$p^\mu_{EF} = \left(\frac{E_{ef}}{c}, \vec{p}_{ef} \right)$$

Ahora, usando la relación de dispersión tenemos que

$$p^\mu_{ef} = \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}_{ef}|^2c^2}, \vec{p}_{ef}$$

Con lo cual ahora nos queda sumar los momenta para obtener el momentum final

$$p^\mu_{TF} = \left(\frac{E_{\gamma'}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}_{ef}|^2c^2}, (p)^x_{ef}, (p)^y_{ef} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta, (p)^z_{ef} + \frac{E_{\gamma'}}{c} \right)$$

Este scattering es completamente elástico, lo cual nos indica que el electrón no tiene energía interna, ya que si tuviera energína interna estaría cuantizada y dicha energía debería ser considerada en el choque ya que parte de la energía del choque iría hacia la estructura interna del elctrón, lo que, por ahora se ha probado que no, aunque no sabemos.

$$p^\mu_{TI} = p^\mu_{TF}$$

Haremos esto índice por índice del cuadri-momento

$$\begin{aligned}
p^0_{TI} = p^0_{TF} \to mc + \frac{E_\gamma}{c} &= \frac{E_{\gamma'}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^2 + |\vec{p_{ef}}|^2c^2} \\
p^1_{TI} = p^1_{TF} \to 0 &= (p)^x_{ef} \\
p^2_{TI} = p^2_{TF} \to 0 &= (p^y)_{eff} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta \\
p^3_{TI} = p^3_{TF} \to (p^z)_{ef} + \frac{E_{\gamma'}}{c}\cos\theta &
\end{aligned}$$

Ahora, podemos notar inmediatamente que $(p^x)_{ef} = 0$, con lo cual nos queda el siguiente sistema de ecuaciones.

$$mc + \frac{E_\gamma}{c} = \frac{E_{\gamma'}}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\left(-\frac{E_{\gamma'}}{c}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{E_\gamma}{c} - \frac{E_\gamma}{c}\cos\theta\right)^2\right)}$$

$$mc^2 + E_\gamma = E_{\gamma'} + \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\frac{E^2_{\gamma'}}{c^2}\sin\theta^2 + \frac{E^2_\gamma}{c} + \frac{E^2_{\gamma'}}{c^2}\cos\theta *^2 - \frac{2E_\gamma E_{\gamma'}}{c^2}\cos\theta\right)}$$

$$mc^2 + E_\gamma = E_{\gamma'} + \sqrt{m^2c^4 + E^2_{\gamma'} + E^2_\gamma - 2E_\gamma E_{\gamma'}\cos\theta}$$

Al profe le aburrió el álgebra, con lo cual, la energía inicial del fotón es

$$E_\gamma = \hbar\omega = \frac{\hbar c 2\pi}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}$$

y luego, la energía final estaría dada por

$$E_{\gamma'} = \hbar\omega' = \frac{\hbar c 2\pi}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda'}$$

Con lo cual, de todo esto concluimos lo siguiente

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \tag{1.111}$$

A lo cual, podemos llamar $\lambda_c = \frac{h}{mc}$, lo cual es llamada la longitud de compton del electrón.

1.7. Clase 8

Sabemos como las transformaciones de Lorentz, considerando por simplicidad, un boost a lo largo del eje x, sabemos como estas transformaciones afectan las etiquetas de los eventos en el espacio-tiempo, de la forma como sigue

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.112}$$

Ahora usaremos que $\boxed{c = 1}$, un boost a lo largo del eje x sería

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.113}$$

Lo cual se traduce con

$$\gamma := \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$
$$\beta := \frac{V}{c}$$

Lo cual, con $c = 1$ queda como

$$\tilde{t} = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}$$
$$\tilde{x} = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}$$
$$\tilde{y} = y$$
$$\tilde{z} = z$$

La transformación del tipo
$$\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$
que dejan invariante el intervalo
$$\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu}$$
Son tales que cumplen con lo siguiente
$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} \eta_{\alpha\beta}$$
¿Cuál es la forma más general que puede tomar Λ^{μ}_{ν} tal que deje invariante el intervalo?
Lambda puede tener 6 familias de transoformaciones diferentes, las cuales son

- $\Lambda^{\mu}_{\nu} \to \Lambda_{\mu_{\text{boost a lo largo del eje x}}\nu}(v)$
- $\Lambda_{\text{boost a lo largo del eje y}}(v)$
- $\Lambda_{\text{boost a lo largo del eje z}}(v)$
- $\Lambda^{\nu}_{\mu} \to$ Rotación en el plano (x,y) (θ)
- Rotación en el plano (y,z) (θ)
- Rotación en el plano (z,x) (θ)

Ahora veremos una transformación que deja invariante el intervalo pero no pertenece a ninguna familia de transformaciones.
Inversión temporal: Lo cual se define como
$$\Lambda^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.114}$$
En lo cual
$$\tilde{t} = -t \quad , \tilde{x} = +x \quad , \tilde{y} = y \quad , \tilde{y} = y \quad , \tilde{z} = z$$
Lo cual nos deja al intevalo como
$$d\tilde{t}^2 - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
Transformaciones de paridad:
$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
En lo cual
$$\tilde{t} = t \quad , \tilde{x} = -x \quad , \tilde{y} = -y \quad , \tilde{z} = -z$$
La interacción electromagnética es invariante bajo boosts y rotaciones de Lorentz, pero, por separado, son invariante bajo transformaciones de inversión temporal y transformación de paridad.
La interacción débil no es invariante de paridad, pero sí lo es bajo boosts y rotaciones.
Ejemplo: (insertar dibujo de Julio) Decaimiento de ^{60}Co Como consecuencia que los neutrinos solo sean izquierdos, se le asocia cierta quiralidad a la interacción débil y que finalmente significa que la interacción débil rompe la paridad. (Solo con la interacción débil).
El campo más simple: El campo relativista más simple posible. Se tienen dos observadores inerciales tales que la velocidad de $\tilde{K}$ con respecto a K es V. Se tiene un punto p, tal que con respecto a K y $\tilde{K}$ su posición será x^{μ} y $\tilde{x}^{\mu}$ respectivamente . Ahora se tiene un campo $\phi(p)$, tal que el campo con respecto a cada observador inercial es tal que:

- $\phi(p) = \phi(x^\mu)$
- $\tilde{p} = \tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu)$

Para lo cual, ϕ es un campo escalar (campo escalar de Lorentz) si:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) = \phi(x)$$

Notese que el intervalo es un campo escalar, a su vez lo es el campo de Higgs. ¿ Es el potencial eléctrico $\Phi(x^\mu)$ un campo escalar de Lorentz? la respuesta es no, ya que son parte de un tensor jaja. (flashbacks de clásica 2). En particular, el campo escalar del potencial eléctrico, es escalar de rotaciones.

$$\begin{aligned}\hat{\phi})(x^\mu) &= 1\phi(x^\mu)\\ &= e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}J_{\alpha\beta}}\phi^{x^\mu}\end{aligned}$$

Con $J_{\alpha\beta} = 0$ Se tiene que, para la posición $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ la derivada con respecto al observador K está dada por

$$\partial_\mu \phi = \{\partial_t\phi, \partial_x\phi, \partial_y\phi, \partial_z\phi\}$$

Y a su vez, la derivada con respecto al operador $\tilde{K}$ es

$$\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi} = \left\{\partial_{\tilde{t}\tilde{\phi}}, \partial_{\tilde{x}}\tilde{\phi}, \partial_{\tilde{y}}\tilde{\phi}, \partial_{\tilde{y}}\tilde{\phi}, \partial_{\tilde{z}}\tilde{\phi}\right\}$$

Ahora $\partial_\mu\phi$ vs $\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi}$, con $\tilde{t} = \tilde{t}(t, x)$, para ello hacemos regla de la cadena

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \partial_{\tilde{t}} t \partial_t \tilde{\phi}(\tilde{t}(t, x), \tilde{x})(t, x) + \partial_{\tilde{t}} x \partial_x \tilde{\phi}(\tilde{t}(t, x), \tilde{x}(t, x))\\ &= \partial_{\tilde{t}} t \partial_t \phi + \partial_{\tilde{t}} x \partial_x \phi\end{aligned}$$

Ahora, con $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\alpha)$

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \partial_{\tilde{\mu}} x^\alpha \partial_\alpha \tilde{\phi}(\tilde{x})\\ &= \partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi}(\tilde{x}^\mu) \qquad\qquad = \partial_{\tilde{\mu}} x^\alpha \partial_\alpha \phi(x)\end{aligned}$$

Pero $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ y multiplicamos por $\left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu$, lo cual es

$$\begin{aligned}\left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu \tilde{x}^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu\\ &= \delta^\gamma_\nu x^\nu\\ &= x^\gamma\end{aligned}$$

Por lo tanto $x^\gamma = \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu \tilde{x}^\mu$ con lo cual, ahora si podemos encontrar como transforma el cuadri-gradiente

$$\begin{aligned}\partial_{\tilde{\xi}} x^\gamma &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu \partial_{\tilde{\xi}}\tilde{x}^\mu\\ \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\mu \delta^\mu_\xi\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\partial_{\tilde{x}i} x^\gamma = \left(\Lambda^{-1}\right)^\gamma_\xi \tag{1.115}$$

Ahora si, $\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, entonces,

$$\partial_{\tilde{\mu}}\tilde{\phi} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha_\nu \partial_\alpha \phi$$

El cuadri-gradiente de un escalar de Lorentz es un conjunto de cuatro números qué transforman entre ellos de manera lineal homogénea, pero no definen un cuadri-vector contravariante.
Cuadri-vector contravariante:

$$\tilde{A}^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} A^{\beta} \tag{1.116}$$

Cuadri-vector covariante:

$$\tilde{B}_{\alpha} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}_{\alpha} B_{\beta} \tag{1.117}$$

Ahora hablemos de **Grupo:**

$$\begin{gathered} G = \{a, b, \dots\} \\ \star : G \times G \to G \end{gathered}$$

El cual cumplirá con las siguientes propiedades

- $g_1 \star (g_2 \star g_3) = (g_1 \star g_2) \star g_3$
- Existe una identidad e perteneciente a G tal que $e \star g_i = g_i \star e = g_i \forall g_i \in G$
- $\forall g \in G$ existe un $g^{-1} \in G$ tal que $g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e$

Tomemos por ejemplo el grupo $G = U(1)$ Multiplicación $g(\xi) = e^{i\xi}$ números $\xi \in [0, 2\pi)$
El otro grupo será el grupo SO(2), con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ el cual es el grupo de rotaciones y corresponde a una multiplicación matricial

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.118}$$

Grupos ortogonales: los cuales se denotan por $G = O(N)$ las cuales son matrices ortogonales de $N \times N$ tal que:

$$O^T O = I \tag{1.119}$$

$$\begin{aligned} g_1 \in O(N) \quad y \quad g_2 \in O(N) \; g_3 &= g_1 g_2 \in O(N) \\ g_3 &= g_1 g_2 \in O(N) \\ g_3^T g_3 &= (g_1 g_2)^T (g_1 g_2) \\ &= g_2^T g_1^T g_1 g_2 \\ &= g_2^T I g_2 \\ &= I \end{aligned}$$

Tarea, mostrar si $g \in O(N)$ tal que $g^{-1} \in O(N)$ Será que la 2 esfera será un grupo manifold? no, pero sera que una 3 esfera será un grupo? si
Grupos unitarios:
Se define el grupo ver videos de curvas elípticas

1.8. novena clase

$$g = \{g_1, g_2, \dots\}$$

grupo infinito numerable, el cual cumple con las siguiente propiedades

$$\begin{aligned} &\cdot : g \times g \to g \\ &(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \\ &\exists e \in g / e \cdot g = g \cdot e \quad , \forall g \\ &\forall g \in g \quad , \exists g^{-1} \in g / g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e \end{aligned}$$

$\cdot$	g_1	g_2	g_3
g_1			
g_2			
g_3			

los grupos también pueden ser continos, como por ejemplo $z^{\dagger}z = 1$ al cual se le llama el grupo $u(1) = g$, que se define por $z = e^{i\alpha}$ con $\alpha \in \mathfrak{r}$, con la multiplicación de números complejos.
otro ejemplo sería el grupo $o(n) = g$ tal que, el grupo de define con matrices de $n \times n$

$$g \in o/o^t o = i$$

grupo el cual se define sobre la multiplicación matricial

$$\tilde{\theta}_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} \theta_{n\times n} & \theta_{n\times n} \\ \theta_{n\times n} & \theta_{n\times n} \end{pmatrix}$$

los grupos están definidos por como se hablan sus elementos, lo cual se escribe mediante una tabla de multiplicación

representación trivial unidimensional

$$g_1 = 1, \quad g_2 = 1, \quad g_3 = 1, \quad \ldots$$

es infiel, representación trivial 2d

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representación de un grupo:

$$\text{matriz de algún tamaño} m(g_i) \leftarrow g_i \in g$$

tal que

$$m(g_1)m(g_2) = m(g_1 \cdot g_2)$$

representación proyectiva de un grupo:

$$\text{matriz de} n \times n m(g_i) \leftarrow g_i \in g$$
$$m(g_i)m(g_j) = \omega(g_1, g_j)m(g_i \cdot g_j)$$

en lo cual, $\omega(g_i, g_j)$ corresponde a una fase, número complejo de módulo 1.

$$m(g_i) \leftarrow g \in g$$
$$m(g_i)) = \begin{pmatrix} m(g_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $m(g_i)$ una matriz no nueva. ahora

$$\begin{aligned} \text{matrices de} n \times n \; m(g_i) &\longleftarrow g_i \in g \\ \tilde{m}(g_i) &= a \; m(g_i) \; a \\ \text{con ca cualquier matriz invertible de } n \times n \\ \tilde{m}(g_i)\tilde{m}(g_j) &= (a \; m(g_i) \; a^{-1})(a \; m(g_j) \; a^{-1}) \\ &= a \; m(g_i)m(g_j) \; a^{-1} \\ &= a \; m(g_i \cdot g_j) \; a^{-1} \\ &= \tilde{m}(g_i \cdot g_j) \end{aligned}$$

cuando esto pasa decimos que las matrices $m(g_i)$ forman una representación que es conjugada a la representación formada por las matrices $\tilde{m}(g_i)$ y en consecuencia las identificamos como

$$m(g_i)\ \tilde{m}(g_i)$$

volvamos que $o(3)$

$$\begin{aligned} o^t o &= i \\ det(o^t o) = 1 \rightarrow det(o)^1 &= 1 \\ \det(o) &= \pm 1 \end{aligned}$$

este subconjunto de matrices tabién forman un grupo, al cual se le denota como so(3).
ahora, el grupo u(2)

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= i \\ det(u^\dagger u) &= 1 \\ det(u^\dagger) det(u) &= 1 \\ det(u)^* det(u) &= 1 \\ |det(u)|^2 = 1 \rightarrow det(u) = e^{i\beta} \quad &, \beta \in \mathfrak{r} \end{aligned}$$

si fijamos $\det\{u\} = 1 \quad (\beta = 0)$ todas las matrices unitarias también forman un subconjunto de u(2), el cual es llamado su(2).
más acerca de su(2).
su(2) es una tres esfera , pero, qué significa esto?
tres esfera (s^3)

$$s^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathfrak{r}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

es un mapeo 1 a 1 entre elementos de su(2) y puntos arriba de la tres esfera.
la matriz unitaria de 2×2 más general puede esribirse en términos de 4 números reales tal que $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, donde

$$g(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x + y & z + iw \\ -z + iw & x - iy \end{pmatrix}$$

en lo cual

$$\begin{aligned} det(g) &= x^2 + y^2 - (-z + iw)(z + iw) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ahora, veamos cuánto es $g \cdot g^\dagger$,

$$\begin{aligned} g \cdot g^\dagger &= \begin{pmatrix} x - iy & -z - iw \\ z - iw & x + iw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy & z + iw \\ -z + iw & x - iy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 & (x - iy)(z + iw) + (-z - iw)(x - iy) \\ (z - iw)(x + iy) + (x + iy)(-z + iw) & z^2 + w^2 + x^2 + y^2 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

una forma de parametrizar la s^3 es:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \sin^2\theta \\
z^2 + w^2 &= \cos^2\theta \\
x &= \cos\phi \sin\theta \\
y &= \sin\phi \sin\theta \\
z &= \cos\psi \cos\theta \\
w &= \sin\psi \cos\theta
\end{aligned}
$$

- s^3 es un grupo manifold
- es el grupo manifold de su(2)
- los grupos que son supfericies, se llaman grupos de lie

todo esto no es posible hacerlo con la 2-esfera
ejemplo de grupo contínuo que tiene dos partes "desconectadas "

$$\mathfrak{c} = \{(x, y) \in \mathfrak{r}^2 / y^2 = x^3 + bx^2 + cx + d$$

todos los elementos de su(2) pueden escribirse de la siguiente manera

$$g = e^{i\lambda_a t_a} = e^{i\lambda_1 t_1 + i\lambda_2 t_2 + i\lambda_3 t_3}$$

donde los t_a son 3 matrices de 2×2 hermíticas y de traza nula y los $\lambda_a = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son 3 parámatros reales. para calcular el determinante de la exponencial de una matriz es

$$
\begin{aligned}
det(g) &= det(e^{i\lambda_a t_a}) \\
&= e^{tr(i\lambda_a t_a)} \\
&= e^{i\lambda_a tr(t_a)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g^\dagger \cdot g &= \left(e^{i\lambda_a t_a}\right)^\dagger \left(e^{i\lambda_b t_b}\right) \\
&= e^{-\lambda_a t_a^+} e^{i\lambda_b t_b} \\
&= e^{-i\lambda_a t_a^+ + i\lambda_{\cancel{b}}{}^a t_{\cancel{b}}{}^a} \\
&= e^{-i\lambda_a (t_a^+ - t_a^+)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

la regla de multiplicación de grupo implica que los generadores satisfacen lo siguiente

$$[t_a, t_b] = f_{abc} t_c$$

para su(2) es posible elegir una base tal que

$$
\begin{aligned}
[t_1, t_2] = it_3 \quad , \quad & [t_2, t_3] = it_1 \\
& [t_3, t_1] = it_2
\end{aligned}
$$

las matrices t_a definen la base de un espacio vectorial, que junto a la operaci´on de conmutación definen un álgebra, tal álgebra es llamado álgebra de lie.

1.9. Décima clase

Los grupos de Lie son superficies quee pueden tener componentes desconectados. El elemento identidad corresponderá a un punto en alguna de las piezas. Tal pieza define un subgrupo del grupo completo. En los grupos los elementos conectados a al identidad pueden ser escritos de la forma:
Me puedo imaginar que la primera superfice tiene curvas coordenadas, lo cual en una superfice bidimensionar tiene dos familias de curvas coordenadas, entonces a cada punto le doy dos números. Para lo cual podemos dividir el espacio en parámetros α lo cual podrá describir un punto en la superficie y por tanto, un punto en el espacio. Como lo puede ser, por ejemplo, el punto

$$g = g(\alpha_A)$$

Pensando en grupo clásicos, los g serán matrices de algún tamaño, tal que el elemento g puede ser escrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(\alpha_A) &= e^{i(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_n T_n)} \\ &= e^{i\lambda_A T_A} \end{aligned}$$

Notemos que, esta forma exponencial solo es válida para lo elementos de la superficie del grupo conectada a la identidad.
Para lo cual

- Λ_A, números reales, (los alpha que llamó el profe)
- T_A matrices generadoras del álgrebra

Yo puedo tomar un elemento del grupo y multiplicarlo con otro, lo cual por la propiedad de clausura, debe dar otro elemento del grupo

$$g(\lambda_A)g(\beta_B) = g(\gamma_C = \gamma_C(\lambda_A, \beta_B))$$

Lo cual será según la tabla de multiplicación del grupo de Lie, lo cual, a diferencia de los grupos discretos, corresponde a un conjunto de funciones γ y el como se relacionan con los parámetros reales α_A y β_B, a las cuales les llamaremos constantes de estructura.

$$[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C$$

Lo cual se denote como, álgebra de LIe asociada al grupo de Lie.
¿ Qué forma toma $[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C$ para el grupo de Lorentz?
Dada una representación del álgebra, es decir un conjunto de N matrices T_A con $A = 1, \ldots, N$ tal que $[T_A, T_B] = f_{ABC} T_C$, podremos encontrar una representación del grupo, exponiendo tales matrices. Si los λ_A so infinitesimales, entonces expando a primer orden la exponencial

$$g(\lambda_A) = I + i\lambda_A T_A + O\lambda^2 \tag{1.120}$$

Para hacer teoría de campos, nos basta saber la estructura del álgebra del grupo de Lorentz.
Vamos al grupo de Lorentz entonces.
Los grupos en física actúan sobre objetos físicos. Voy a definir un objeto físicos transformado, como la acción del elemento del grupo, actuando sobre el objeto físico no transformado

$$\tilde{\Phi}^I = g^I{}_J(\lambda_A)\Phi^I$$

en donde los índices I y J van desde 1 hasta la dimensión de la representación, por ejemplo en caso que sean matrices de 2×2 entonces toma dos valores, y así.
En caso que los parámetros λ_A estén conectados en el espacio que tenga la identidad, entonces. Una transformación infinitesimal actuará:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^I &= (I + i\lambda_A T_A)^I{}_K \Phi^J \\ &= I^I{}_J \Phi^I + i\lambda_A (T_A)^I{}_J \Phi^I \\ &= \Phi^I + i\lambda_A (T_A)^I{}_J \Phi^J \end{aligned}$$

Lo cual, si restamos el transformado con el elemento original, tenemos

$$\delta\Phi^I := \tilde{\Phi}^i - \Phi^I = i\lambda_A \left(T_A\right)^I{}_J \Phi^I$$

Con lo cual, la manera en la cual todo lo elemetos cercanos a la identidad actúan sobre el resto del grupo

$$\boxed{\delta\Phi^I = i\lambda_A \left(T_A\right)^I{}_J \Phi^J} \tag{1.121}$$

El grupo SU(2) ya lo definios,

$$U \in SU(2), \text{if } U^\dagger U = I \ \& det(U) = 1$$

Lo cual,

$$\begin{aligned}
[T_A, T_B] &= i\epsilon_{ABC} T_C \\
[T_1, T_2] &= iT_3 \\
[T_2, T_3] &= iT_1 \\
[T_2, T_3] &= iT_1 \\
[T_3, T_1] &= iT_2
\end{aligned}$$

Ahora tenemos las representación.
Representación trivial: La cual se usar para representar a los objetos sin rotación

$$(T_1) = 0, \quad (T_2) = 0, \quad (T_3) = 0$$

Representación de spin 1/2: Representación fundamental de $su(2)$

$$T_1 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T_2 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$T_3 = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representación de spin 1

$$T_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T_2 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$
$$T_3 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lo cual

$$
\begin{aligned}
T_1T_2 - T_2T_2 &= 1/2\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= 1/2\left[\begin{pmatrix} i & 0-i & \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & i \end{pmatrix}\right] \\
&= 1/2\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \\
& iT_3
\end{aligned}
$$

Lie algebra in particle physcics A. Georgi.
Ahora, otra representación de matrices de 3×3

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \begin{pmatrix} T_1^{\text{spin } 1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T_2 &= \begin{pmatrix} T_2^{\text{spin } 1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T_3 &= \begin{pmatrix} T_3^{\text{spin } 1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Las irreps de $su(2)$ están clasificadas y están etiquetadas por un semi entero, $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ y son matrices de $(2s+1) \times (2s+1)$. Para cada valor de s hay una única irrep.
Representación conjugada:

$$
\begin{aligned}
(T_AT_B - T_BT_A)^* &= (i\epsilon_{ABC}T_C)^* \\
T_A^*T_B^* - T_B^*T_A^* &= -i\epsilon_{ABC}T_C^* \\
(-T_A^*)(-T_B^*) - (T_B^*)(T_A^*) &= \epsilon_{ABC}(-T_C^*)
\end{aligned}
$$

Por tanto, las matrices

$$\tilde{T_A} = -T_A^*$$

Y por tanto

$$\left[\tilde{T_A}, \tilde{T_B} = i\epsilon_{ABC}\tilde{T_C}\right]$$

La representación de spin 1/2 se le llama **2**, la cual está relacionada con la representación conjugada, de forma que ambas son equivalentes, la cual está dada por

Representación conjugada (antifundamental)

$$
\begin{aligned}
\tilde{T_1} &= 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\tilde{T_2} &= 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
\tilde{T_3} &= 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Representación la cual se denota por $text\bar{b}f2$. Ahora, si bien las representaciones son equivalentes via conjugación, estas no describen la misma física.

$$\bar{\mathbf{2}} \equiv \mathbf{2}$$

TAREA, encontrar la siguiente matriz A.

$$
\begin{aligned}
\tilde{T_1} &= A^{-1} T_1 A \\
\tilde{T_2} &= A^{-1} T_2 A \\
\tilde{T_3} &= A^{-1} T_3 A
\end{aligned}
$$

Volvamos al grupo de Lorentz.

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}^\mu &= \Lambda^\mu_{\ \nu} X^\nu \\
\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_{\ \alpha} \Lambda^\nu_{\ \beta} &= \eta_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

Para transformaciones de Lorentz infinitesimales

$$\Lambda^\alpha_{\ \beta} = \delta^\alpha_{\ \beta} + \omega^\alpha_{\ \beta}$$

Con lo cual, tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu} \left(\delta^\nu_{\ \alpha} + \omega^\mu_{\ \alpha}\right) \left(\delta^\nu_{\ \beta} + \omega^\nu_{\ \beta}\right) &= \eta_{\alpha\beta} \\
\eta_{\mu\nu} \delta^\mu_{\ \alpha} \delta^\nu_{\ \beta} + \eta_{\mu\nu} \omega^\mu_{\ \alpha} \delta^\alpha_{\ \beta} + \eta_{\mu\nu} \delta\ \alpha^\mu \omega^\nu_{\ \beta} + O(\omega^2) &= \eta_{\alpha\beta} \\
\eta_{\mu\beta} \omega^\mu_{\ \alpha} + \eta \alpha \nu \omega^\nu_{\ \beta} &= 0 \text{Definición} \quad \omega_{\beta\alpha} + \omega_{\alpha\beta} = 0 \\
\boxed{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}}
\end{aligned}
$$

Con lo cual

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}^\mu &= \left(\delta^\mu_{\ \nu} + \omega^\mu_{\ \nu}\right) X^\nu \\
&= \delta^\mu_{\ \nu} X^\nu + \omega^\mu_{\ \nu} X^\nu \\
&= X^\mu + \omega^\mu_{\ \nu} X^\nu
\end{aligned}
$$

Y asi se obtiene que

$$\delta X^\mu := \tilde{X}^\mu - X^\mu = \omega^\mu_{\ \nu} X^\nu$$

Desarollamos esta definición

$$\begin{aligned}
\delta X^{\mu} &= \omega^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} \\
&= i\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} \\
\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \# \left(\delta^{\mu}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\nu}\eta^{\alpha\mu}\right) & \\
&= i\frac{\#}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\beta\nu} - \delta^{\beta}_{\nu}\eta^{\alpha\nu}\right) X^{\nu} \\
&= \#\omega^{\mu}_{\nu} X^{\nu} = \omega^{\mu}_{\nu} X^{\nu}, \quad \# = -i \\
&= \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}
\end{aligned}$$

Donde

$$\left(T^{\alpha\beta}\right)^{\nu}{}_{\nu} = i\left(\delta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\beta\mu} - \delta^{\beta}{}_{\nu}\eta^{\alpha\nu}\right)$$

1.10. Onceaba clase

Estudiamos el decaimiento beta pero no hablamos de la vida media del neutrón, a lo cual, el 66 % decaerán dentro de 11 minutos eso define la vida media de una partícula, pero aún no tenemos la física para gatillar dicho proceso pero, ese proceso, pero si sabemos que ese proceso debe conservar la energía y momento relativista y pudimos, usando la conservación de dichas cantidades encontrar que hay una restricción de las partículas involucradas, si me olvido de la existencia del neutrino, no conserva la masa, pero bueno, Pauli postuló la existencia de una partícula extra que no estaba dentro de la reacción y la existencia de la partícula extra da un rango de energías posibles para el electrón.
Ahora haremos un pequeño desvío, supogan que se tiene un conjunto de objetos

$$G = \{a, b, c, \dots\} \tag{1.122}$$

Para lo cual se tiene una ley de composición interna como sigue

$$\star : G \times G \longrightarrow G \tag{1.123}$$

Entonces me puedo armar una tabla de multiplicación en donde

$\star$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

En lo cual, si dentro de la tabla de multiplicación aparecen solo elementos del grupo, entonces diremos que G, con la regla de multiplicación $\star$ define un grupo si se satisfacen las siguientes propiedades

- $e \in G /\ e \star a = a$
- $\forall a \in G,\ \exists a^{-1} \in G /\ a \star a^{-1} = e$
- $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

Cuando yo escribo una tabla de multiplicación yo asumo que el grupo está compuesto por una cantidad numerable, sin embargo, existen grupos para los cuales no es el caso, dichos grupos reciben el nombre de **grupos continuos**. Los cuales son grupos en donde los elementos están etiquetados por elementos que viven

en el continuo $a(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, en este caso, α_n vive en un continuo.
Ejemplo:

$$a = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a(\alpha_1)$$

Para lo cual α_1 vive en el continuo de $\alpha_1 \in [0, 2\pi)$, ahora

$$b(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Los cuales también son infinitos y

$$c(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & 0 & -\sin\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha_3 & 0 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Entonces, el punto que se quiere hacer es el siguiente, con el siguiente conjunto de matrices

$$\{a(\alpha_1), b(\alpha_2), c(\alpha_3)\}$$

Las cuales corresponden a matrices infinitas, pero qué tan grande es este infinito, bueno, tantos como puntos hay en el intervalo $(0, 2\pi)^3$ ya que cada de estos elementos van de $(0, 2\pi)$, este conjunto define un grupo bajo la multplicación matricial (grupo continuo). Para lo cual no se puede escribir una tabla de multplicación, tendría que ser un gradiente pero encima es tridimensional, con lo cual está dificil, sin embargo, definimos un elemento g tal que

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) g(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = g(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

Lo cual, además debemos escribir como

$$g(\vec{\alpha}) g(\vec{\beta}) = g(\vec{\gamma}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}))$$

El cómo estos parámetros γ se obtienen a través de α y β es donde está contenida la tabla de multiplicación.
Teorema: Las matrices ortogonales de $M \times M$ forman un grupo.

$$G = \{O_{M\times M} / O * TO = I\}$$

Demostración:

- $I \in G$ so porque $I^T I = I$
- $O \in G \Rightarrow O^T O = I$ si la matriz O satisface esto, entonces ${O^{-1}}^T O^{-1} = I \Rightarrow O^{-1} \in G$
- Asociatividad se hereda de la asociatividad de la multiplicación matricial

Anteriormente nos dimos cuenta que las transformaciones de Lorentz están dadas todas las matrices que satisfacen la siguiente propiedad

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{1.124}$$

O sea, las matrices que definen una transformación de Lorentz preservan el espacio de Minkowsky.
Un ejemplo parecido es

$$A^T_{2n\times 2n} J A = J \tag{1.125}$$

Lo cual define al grupo simpléctico cuando las matrices J son de la siguiente forma

$$J = \begin{pmatrix} 0 & M_{n\times n} \\ -M_{n\times n} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.126}$$

Las matrices simplécticas aparecen en mecánica clásica cuando uno estudia las transformaciones canónicas en la formulación Hamiltoniana. Nuestro foco en este curso estará claramente en el grupo de Lorentz.
Grupo de Lorentz:
La composición de dos transformaciones de Lorentz son una transformación de Lorentz también, recordemos que dentro de las transoformaciones de Lorentz están los Boosts, las rotaciones y las transformaciones entre dos observadores relativos.
Una parte de estas transformaciones de Lorentz están definidas en el compacto (cerrado y acotado) $(0, 2\pi)$, las cuales son las rotaciones y que las rotaciones entre ellas forman un subgrupo compacto. Luego, como se mencionó, dentro del grupo de Lorentz también están los boosts, pero los boosts están caracterizados por una rapidez v que puede ser $-c < v < c$ lo cual como intervalo de los reales, es acotado, pero no cerrado ya que los bordes del intervalo no están incluidos, con lo cual los boosts definen el sector no compacto del grupo de Lorentz.
Recordemos que un boost a lo largo del eje x puede ser escrito con funciones hiperbólicas como,

$$\begin{aligned} t' &= \cosh\xi t - \sinh\xi x \\ x' &= \sinh\xi t + \sinh\xi x \end{aligned}$$

$$\boxed{\tanh\xi = \frac{v}{c}}$$

Notemos que las funciones hiperbólicas son perdiódicas, pero esta periocidicada corresponde a una periodicidad compleja, con lo cual no tienen en el eje real. Entonces el hecho que no sean periódicas implica que no puedo hacer el mismo tratamiento que para las rotaciones con seno y coseno.
Por lo tanto, **el grupo de Lorentz es no compacto**.
Una forma de visualizar esto sería de la siguiente forma, imaginar 3 circunferencias, que definen el sector compacto del grupo de Lorentz, y además imaginar 3 rectas que van desde $-c$ hasta c la elección de un punto en cada circunferencia y uno por cada recta, nos da un elemento del grupo de Lorentz, esto nos visualiza el cómo el grupo de Lorentz tiene una parte no compacta que corresponde a los boosts, los cuales pueden estar dados en cualquier dirección. Entocnes por ejemplo, esta elección de puntos definen un elemento del grupo de Lorentz, no necesariamente único, ya que una misma elección pueden dar a un mismo punto del grupo de Lorentz [1]. **Grupo:** Pensemos en el grupo más simple Z(2) el cual tiene una tabla de multplicación como sigue

$\star$	a	b
a	a	b
b	b	a

Podemos encontrar, a través de distintos objetos, dicha tabla de multiplicación, pensemos primero con matrices de distinto tamaño. Distintas elecciones las cuales, bajo producto matricial me definen la tabla de multplicación del grupo definen las **representaciones del grupo**. El grupo de SU(2) por ejemplo tiene una sola representacion de dimensión 2. Hay una representación la cual es la más aburrida pero útil, la cual corresponde a al representacion trivial.

- $a \to I_{M\times M}$
- $b \to I_{M\times M}$

[1]Las traslaciones unidas al grupo de Lorentz dan origen al grupo de Poincaré, como una extensión del grupo de Lorentz O(1,3)

Cuando el mapeo o representacion no es uno a uno, entonces no es inyectiva, o no fiel.
Representacion trivial

$\star$	$I_{M\times M}$	$I_{M\times M}$
$I_{M\times M}$		
$I_{M\times M}$		

Para lo cual podemos comprobar que se satisface la tabla de multplicación del grupo, pero obviamente esta representacion, si bien existe, es súper fome. Lo importante a recalcar es que bajo la representacion se debe satisfacer la tabla de multiplicación.
Bien, entonces vamos a definir la noción de campo:

1.10.1. Campo

A algún punto del espacio se le asocia un campo eléctrico y un campo magnético y además, otro observador inercial también le asocia un campo eléctrico y magnético a cada punto del espacio pero desde su punto de vista. Notemos que, bajo transformaciones de Lorentz el campo eléctrico y magnético se mezclan. La dinámica de la evolución temporal de los campos están dadas por las ecuaciones de Maxwell, escribámoslas en el vacío[2].

$$\begin{aligned}
D_i E^i &= 0\\
D_i B^i &= 0\\
\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} D_j E_k &= -\partial_t B^i\\
\frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} D_j B_k &= \mu_0 J^i + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E^i
\end{aligned}$$

Hay una forma trivial para resolver la 2da y 3ra ecuación, $\exists \phi, \vec{A}$ tal que, los campos eléctrico y magnético en función de los potenciales son

$$\begin{aligned}
B^i &= \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{g}} D_j A_k\\
E^i &= -g^{ij}\partial_j \phi - \partial_t A^i
\end{aligned}$$

Respecto de ϕ y de $\vec{A}$, la ley de Gauss magnética y la ley de Faraday son identidades (ya están resueltas), y las otras dos ecuaciones, la ley de Gauss y ley de Ampère-Maxwell son ecuaciones, ùltimas las cuales me permitirán encontrar ϕ y $\vec{A}$ para resolver las otras dos identidades.
Ahora, sean dos observadores inerciales K y $\tilde{K}$ para los cuales, cada uno puede observar un potencial eléctrico y magnético en un mismo punto del espacio respecto a cada uno de ellos, $\phi(t,\vec{x})$ y $\vec{A}(t,\vec{x})$ con respecto al observador K y $\tilde{\phi}(\tilde{t},\tilde{\vec{x}})$ y $\tilde{\vec{A}}(\tilde{t},\tilde{\vec{x}})$ con respecto al observador inercial $\tilde{K}$. Ahora, cómo puedo transformar a los potenciales desde un observador inercial al otro?, ya sabemos como transforman las etiquetas, sea t o x, la respuesta la da lo siguiente.

$$A^\mu = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{\phi, \vec{A}\} \tag{1.127}$$

El cual corresponde a un cuadri-vector y se le llama cuadri-potencial electromagnético, el cual transforma como

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \tag{1.128}$$

El cuadri-potencial transforma en la representación vecorial del grupo de Lorentz. Notemos que el cuadri-potencial tiene dos etiquetas, el μ que es el que da sus componentes y x que es una componente espacio

[2] D_j corresponde a la derivada covariante definida por $D_j A^k = \partial_j A^k - \Gamma^l_{jk} A_l$ con Γ^l_{jk} los símbolos de Christoffel

tiempo, y la transformación de Lorentz transforma sobre los dos índices. Supongamos que queremos ver el cómo transforma el cuadri-potencial pero con la misma etiqueta de espacio tiempo a cada lado, para ello

$$\tilde{A}^{\mu}(\tilde{x}) = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}\tilde{x}) \quad \text{cambiamos de letra}$$
$$\tilde{A}^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$$

Definición: El conjunto de campos $\Phi_A(x)$ transformará en un representación del grupo de Lorentz sí y sólo si el conjunto de campos que mide un observador K que mide con la etiqueta $\Lambda^{-1}x$ se relacionan con otro con etiqueta x se la siguiente forma

$$\tilde{\Phi}_A(x) = [D(\Lambda)]_{AB}\, \Phi_B(\Lambda^{-1}x) \tag{1.129}$$

En lo cual la matriz D corresponde a una representación del grupo de Lorentz tal que

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1, \Lambda_2) \tag{1.130}$$

Ello nos asegura que la tabla de multiplicación si se realice con las matrices D. Defino un objeto que transforma bajo una representación. Esto corresponde a una abstracción de lo que se estaba haciendo arriba, entonces ahora, como existe una representación trivial hacemos lo siguiente.
Definición de campo escalar: Se define como un único número que bajo transformaciones de Lorentz transforma así

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{1.131}$$

El campo escalar aparece cuando los índices B tienen un solo valor y las matrices D les asocio la matriz identidad, o sea, la representacion trivial. Y ello es lo mismo a

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x) \tag{1.132}$$

Debido a los argumentos expuestos arriba. Primero se estudiará la teoría cuántica de campos escalares para no convolucionar de una las complicaciones que suponen los campos vectoriales.
Antes de estudiar la teoría cuántica de este campo escalar, primero se tendrá que estudiar la teoría clásica de dicho campo escalar para posteriormente cuantizarlo.
Notemos que en (1.131) Λ es una tranformación de Lorentz arbitraria, en particular, finita. Algo que será útil dado del teorema de Noether es que, la invariancia de la acción bajo una transformación tiene asociada una cantidad conservada a la dinámica. La acción que se construirá para el campo escalar será invariante bajo transformaciones de Lorentz, si la dinámica del campo escalar es invariante bajo transformaciones de Lorentz esto significa que si se realiza un experimento con este campo escalar va a concluir cierto conjunto de ecuaciones para la dinámica de este campo, ecuaciones las cuales serán las mismas para cualquier observador inercial.
¿Cómo transforma el campo escalar bajo una transformación de Lorentz infinitesimal?

$$\tilde{A} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Tal que, la transformación infinitesimal diferirá de la transformación identidad por muy poco

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} + \cancel{O(\omega^2)}$$

En donde ω^{μ}_{ν} es una matriz con entradas pequeñas, ahora el profesor nos invita a repetir el siguiente cálculo con las 6 transformaciones de Lorentz independientes

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual es una rotación del plano x-y, de forma explícita sería

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t\\ \tilde{x} &= \cos\theta x - \sin\theta y\\ \tilde{y} &= \sin\theta x + \cos\theta y\\ \tilde{z} &= z\end{aligned}$$

Asumimos que el ángulo θ es pequeño, con lo cual, aproximando hasta los términos de θ^2 el coseno y el seno son

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1\\ \sin\theta &= \theta\end{aligned}$$

Con lo cual, la transformación de Lorentz queda tal que

$$\Lambda = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\theta & 0\\ 0 & \theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Cuando uno tiene una matriz A que difiere de la identidad por una matriz pequeña ξ entonces la inversa está dada tal que

$$\begin{aligned}A &= I + \xi\\ A^{-1} &= I - \xi\end{aligned}$$

Por lo tanto el campo escalar bajo una transformación infinitesimal será

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi((I-\omega)x)\\ &= \phi(x - \omega x)\\ &= \phi(x) - (\omega x)^{\mu}\partial_{\mu}\phi\end{aligned}$$

Recordar que

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{h}\cdot\nabla f \tag{1.133}$$

Así, la transformación infinitesimal del campo escalar

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \tilde{\phi}(x) - \phi(x)\\ &= \omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\nu}\phi\end{aligned}$$

Así

$$\boxed{\delta\phi = -\omega^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\phi} \tag{1.134}$$

La cual es la transformación infinitesimal de Lorentz, lo cual será de utilidad para encontrar cantidades conservadas bajo transformaciones de Lorentz.

1.11. Doceaba clase

Hola

1.12. Decimotercera clase

Wena