0.1. Duodecimo primera clase

Se mostró que la siguiente combinación para un espinor de Dirac transforma como un escalar de Lorentz.

$$\tilde{\Phi}(x) = \bar{\Psi}(x)\Psi(x) = \bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\Psi(\Lambda^{-1})$$

En donde el conjugado de Dirac por un espinor está definido por lo siguiente

$$\begin{aligned} \bar{P}si(x)\Psi(x) &= \Psi^{\dagger}\gamma^{0}\Psi(x) \\ &= (\Psi_1*, \Psi_2*, \Psi_3*, \Psi_4*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con la siguiente transformación

$$= I + \omega$$

en su versión infinitesimal

$$\delta\Phi(x) = -\omega^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\Phi(x)$$

Tal que, la variación de la acción bajo dicha transformación infinitesimal está dada por lo siguiente

$$\begin{aligned} I[\Psi, \bar{\Psi}] &= \int d^4x \cdots - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= \int d^4x \cdots - m\Phi(x) \\ \delta_{Lorentz}I &= \int d^4x \cdots - m\delta\Phi(x) \\ &= \int d^4x \cdots + m\omega^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu}\partial_{\mu}\Phi(x) \\ &= \int d^4x \cdots - \partial_{\mu}\left(m\omega^{\mu}_{\ \nu}\Phi\right) - m\omega^{\mu}_{\ \nu}\partial_{\mu}x^{\nu}\Phi \end{aligned}$$

Con lo cual al haber términos de borde hemos encontrado que la acción es Quasi-invariante bajo transformaciones de Lorentz.

$$I[\Psi, \bar{\Psi}] = \int d^4x\bar{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\Psi$$

Que dará origen a la ecuación de Dirac.
Afirmación: $\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ transforma como un vector de Lorentz, es decir, bajo $\tilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu}$.

$$\bar{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x) = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\bar{\Psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^{\nu}\Psi(\Lambda^{-1}x)$$

recuerdo de cómo transforma bajo Lorentz el cuadri-potencial electormagnético

$$\tilde{A}^{\mu}(\tilde{x}) = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}A^{\mu}(x) \Rightarrow \tilde{A}^{\mu}(x)\Lambda^{\mu}_{\ \nu}A^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$$

Demostración: Sabemos que, bajo una transformación de Lorentz:

$$\tilde{\Psi}(x) = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}}\Psi(\Lambda^{-1}x) = D[\Lambda]\Psi(\Lambda^{-1}x)$$