



Mecánica de Fluidos: Guía 1

Amaro A. Díaz Concha

Pregunta 1: Defina brevemente y explique las diferencias entre los tres estados comunes de la materia. Sólido, líquido y gaseoso. Muestre algunos ejemplos cotidianos que no puedan ser catalogados como uno de estos tres estados.

Solución:

La materia en estado sólido se define por tener una distancia igual entre todas sus moléculas y la fuerza de interacción entre dichas moléculas es predominantemente la fuerza nuclear fuerte. Estas moléculas no tienen libertad de movimiento, si no que están fijas en una posición, poseen una gran resistencia a deformarse y si llegan a tener movimiento, este sería con respecto a un punto fijo.

Los líquidos, similarmente a los sólidos,, también poseen una distancia relativamente fija entre sus partículas;; sin embargo, dichas partículas tendrán, en este caso, la libertad del movimiento, lo cual concede al estado líquido propiedades diferentes a los sólidos, como lo es el que los líquidos no son capaces de retener su forma, con lo que estos adaptan la forma de sus contenedores, las partículas cuando se mueven, lo hacen de forma agrupada.

Los gaseosos, por otra parte, poseen una mayor distancia entre sus moléculas, mucho mayor a las de los líquidos y además estas tienen movimiento libre no necesariamente en grupos, cuando un gas de coloca dentro de un contenedor, se escapa.

Pregunta 2: Busque información sobre tres estados exóticos de la materia y descríbalos brevemente.

Solución:

Pregunta 3: Explique las limitaciones de la hipótesis del continuo y cómo esta hipótesis permite definir la noción de campo. Explique, además, qué se entiende por el concepto de “campo de velocidades” en el contexto de la hipótesis del continuo.

Solución: La principal limitación de la hipótesis del continuo es cuando nos acercamos a niveles microscópicos, en los cuales la materia ya no puede ser idealizada como un continuo ya que se estaría ignorando las propiedades discretas de la materia, o sea, que a cierto nivel microscópico la materia deja de comportarse como un continuo y más como una “sopa” de moléculas las cuales tienen propiedades propias, como lo puede ser, velocidad propia y colisión con otras moléculas. Cuando es posible usar la hipótesis del continuo, como se mencionó, en situaciones lo suficientemente macroscópicas tales que las propiedades individuales de las moléculas sean despreciables, se puede definir un concepto de campo, al asignar propiedades físicas a una posición en el espacio y tiempo, esto es posible mediante el promedio estadístico, el cual puede asignar un valor a un elemento de fluido, cuyo tamaño debe ser mucho mayor al que posee la distancia intramolecular de la sustancia estudiada, pero, mucho menor a la escala del sistema. Cuando se supone continuidad en estas propiedades físicas, es posible asignarseles funciones matemáticas suaves, lo que permite usar herramientas del cálculo diferencial. A diferencia de los campos escalares, que se les asignan un valor a una cierta posición en el espacio y tiempo, existe un concepto llamado campos de velocidades, cuyas componentes

por posición en el espacio y tiempo, poseen magnitud, sentido y dirección, el campo de velocidades es una función vectorial que asigna a cada punto del espacio del medio continuo y en cada instante t , la velocidad promedio de todas las partículas que se encuentran en el elemento de fluido δV alrededor de dicha posición, su descripción es del tipo Euleriana, ya que el campo se define en coordenadas espaciales fijas, como lo es el concepto que conocemos de sistema de referencia no inercial.

Pregunta 4: Explique brevemente qué son las descripciones Euleriana y Lagrangia al describir el movimiento de fluidos, y ejemplifique estas descripciones con un experimento simple.

Solución: El concepto de descripción Euleriana se basa en realizar el estudio de un fluido mediante una posición fija en el espacio con respecto a los elementos de fluido, o sea, se está quieta mientras el fluido es quien se mueve y pasa a través del medidor. En el caso de la descripción Lagrangeana, es el elemento de fluido el cual se sigue y mide a lo largo de su trayectoria dentro del fluido, cambiando así, la posición de la medición a lo largo del tiempo, sin embargo, no el sujeto al cual se está midiendo. Un ejemplo de una descripción Euleriana sería, un termómetro de cocina midiendo la temperatura dentro de una olla con agua puesta al fuego a hervir, el termómetro se está quieto mientras que es el fluido (agua) quien se mueve, y para la descripción Lagrangeana se tienen la medición mediante localizadores a las corrientes de agua que transportan desechos a través del mar.

Pregunta 5: ¿Cuál es la diferencia entre un fluido estacionario y uno incompresible? Defina estos conceptos y utilice las descripciones Euleriana y Lagrangiana para explicarlos. **Solución**

Pregunta 6: Defina qué es una propiedad intensiva y extensiva de un fluido y muestre algunos ejemplos.

Solución Pregunta 7: Solución Pregunta 9: En un espacio tri-dimensional, se puede demostrar la siguiente relación entre el símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} y la delta de Kronecker δ_{ij} :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1)$$

Usando la relación (1), calcule las contracciones $\epsilon_{imn}\epsilon_{jmn}$ y $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

Solución: Usando la relación (1), podemos calcular lo siguiente, primero se intercambian los índices para dejar uno de los comunes, en este caso el índice m primero, como hacemos una permutación por dada Levi-Civita, entonces los menos se cancelan.

$$\begin{aligned} \epsilon_{imn}\epsilon_{mjn} &= \delta_{ij}\delta_{nn} - \delta_{in}\delta_{nj} \\ &= 3\delta_{ij} - \delta_{ij} \\ &= 2\delta_{ij} \end{aligned}$$

Ahora para el caso de $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= \delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kj} \\ &= 9 - \delta_{jj} \\ &= 9 - 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Con lo cual queda lista la pregunta 9.

Pregunta 10: Para calcular el producto cruz entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} o el rotor de \vec{A} con notación de índices, usamos el símbolo de Levi-Civita como sigue:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k \quad (2)$$

$$(\nabla \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_jA_k \quad (3)$$

Considerando las expresiones anteriores, prueba las siguientes relaciones, utilizando siempre la notación de índices:

$$(a) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (4)$$

$$(b) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \quad (5)$$

$$(c) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (6)$$

$$(d) \quad \nabla \times (\phi \vec{A}) = \phi(\nabla \times \vec{A}) + \nabla \phi \times \vec{A} \quad (7)$$

$$(e) \quad \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla \vec{A} \quad (8)$$

Solución: Usando las propiedades dadas y la notación de índices, reescribamos el lado izquierdo de las relaciones en notación de índices para trabajar con ellas

$$\begin{aligned} (a) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{A} \times (\epsilon_{ijk} B_i C_j \hat{e}_k) \\ &= \epsilon_{ijk} B_i C_j (\vec{A} \times \hat{e}_k) \\ &= \epsilon_{ijk} B_i C_j (\epsilon_{klm} A_l \hat{e}_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_l B_i C_j \hat{e}_m \end{aligned}$$

Recordando la propiedad para el símbolo de Levi-Civita, $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$, así:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm}) A_l B_i C_j \hat{e}_m \\ &= A_j B_m C_j \hat{e}_m - A_i B_i C_m \hat{e}_m \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (9)$$

Ahora con el ítem (b), cuya relación nos dice que

$$\begin{aligned} (b) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \\ &= (\epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k) \times \vec{C} \\ &= \epsilon_{ijk} A_i B_j (\hat{e}_k \times \vec{C}) \\ &= \epsilon_{ijk} A_i B_j (\epsilon_{klm} C_l \hat{e}_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_i B_j C_l \hat{e}_m \end{aligned}$$

De la misma forma, usamos la propiedad del símbolo de Levi-Civita usado en el ítem anterior:

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_i B_j C_l \hat{e}_m \\ &= A_l B_m C_l \hat{e}_m - A_m B_l C_l \hat{e}_m \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \end{aligned}$$

De lo cual se concluye que

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \quad (10)$$

Ahora se sigue con el ítem (c), cuya relación nos dice que:

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\
 &= \nabla \times (\epsilon_{ijk} \partial_i A_j \hat{e}_k) \\
 &= \epsilon_{lkm} \epsilon_{ijk} \partial_l (\partial_i A_j) \hat{e}_m \\
 &= (\delta_{lj} \delta_{mi} - \delta_{li} \delta_{mj}) \partial_l (\partial_i A_j) \hat{e}_m \\
 &= \delta_{lj} \delta_{mi} \partial_l (\partial_i A_j) \hat{e}_m - \delta_{li} \delta_{mj} \partial_l (\partial_i A_j) \hat{e}_m \\
 &= \partial_l \partial_m A_l \hat{e}_m - \partial_i \partial_i A_m \hat{e}_m \\
 &= \partial_m \partial_l A_l \hat{e}_m - \partial_i \partial_i A_m \hat{e}_m \\
 &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
 \end{aligned}$$

Con lo cual, se concluye que

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A} \quad (11)$$

Ahora seguimos con el ítem (d), el cual nos dice que:

$$\begin{aligned}
 (d) \nabla \times (\phi \vec{A}) &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\phi A_k) \hat{e}_i \\
 &= \epsilon_{ijk} A_k \partial_j \phi \hat{e}_i + \phi \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \hat{e}_i \\
 &= \phi \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \hat{e}_i + \epsilon_{ijk} A_k \partial_j \phi \hat{e}_i \\
 &= \phi (\nabla \times \vec{A}) + \nabla \phi \times \vec{A}
 \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que:

$$\nabla \times (\phi \vec{A}) = \phi (\nabla \times \vec{A}) + \nabla \phi \times \vec{A} \quad (12)$$

Luego, el ítem (e) nos dice la siguiente relación:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \partial_i (A_j B_k) \hat{e}_i$$

??

Pregunta 11: Calcule la contracción $A_i = C_{ijk} C_{jk}$ explícitamente, donde A_i , B_{jk} y C_{ijk} son las componentes de tres tensores en un espacio tri-dimensional de rangos 1,2 y 3 respectivamente.

Solución: Teniendo en cuenta la convención de suma de Einstein desarrollaremos los términos a la derecha de la contracción dada.

Pregunta 18: Verifique las siguientes identidades usando notación de índices

$$\begin{aligned}
 (a) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \\
 (b) \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) &= [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})\vec{C}] - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})]\vec{D} \\
 (c) \quad \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})
 \end{aligned}$$

La relación (a) nos dice lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k) \cdot (\epsilon_{lmn} C_l D_m \hat{e}_n) \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j \epsilon_{lmn} C_l D_m (\hat{e}_k \cdot \hat{e}_n) \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j \epsilon_{lmn} C_l D_m \delta_{kn} \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j \epsilon_{lmk} C_l D_m \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_i B_j C_l D_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_i B_j C_l D_m \\
&= A_l B_m C_l D_m - A_m B_l C_l D_m \\
&= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})
\end{aligned}$$

Por tanto se concluye que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}) \quad (13)$$

La relación (b) nos dice lo siguiente

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) &= (\epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k) \times (\epsilon_{lmn} C_l D_m \hat{e}_n) \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j \epsilon_{lmn} C_l D_m (\hat{e}_k \times \hat{e}_n) \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j \epsilon_{lmn} C_l D_m \epsilon_{knp} \hat{e}_p \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_l D_m \epsilon_{lmn} \epsilon_{knp} \hat{e}_p \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_l D_m (\delta_{lp} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mp}) \hat{e}_p \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_l D_m \delta_{lp} \delta_{mk} \hat{e}_p - \epsilon_{ijk} A_i B_j C_l D_m \delta_{lk} \delta_{mp} \hat{e}_p \\
&= \epsilon_{ijk} A_i B_j C_p D_k \hat{e}_p - \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k D_p \hat{e}_p \\
&= [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D}) \vec{C}] - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})] \vec{D}
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D}) \vec{C}] - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})] \vec{D} \quad (14)$$

La relación (c) nos dice lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \nabla \cdot (\epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k) \\
&= \partial_k (\epsilon_{ijk} A_i B_j) \\
&= \epsilon_{ijk} B_j \partial_k A_i + \epsilon_{ijk} A_i \partial_k B_j \\
&= \epsilon_{ijk} A_i \partial_k B_j - \epsilon_{jik} B_j \partial_k A_i \\
&= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})
\end{aligned}$$

De lo cual se concluye que:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (15)$$

Pregunta 22: Una aproximación a primer orden para materiales sólidos elásticos que relaciona el tensor de tensiones $\check{\sigma}$ con el tensor de deformaciones $\check{\eta}$ es:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\eta_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \eta_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (16)$$

donde E es el módulo de Young, ν es el coeficiente de Poisson y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Invierta la ecuación para encontrar η_{ij} como función de σ . Note que η_{kk} corresponde a la traza de $\check{\eta}$.

Solución:

Lo primero que se hará para encontrar $\check{\eta}$ en función de $\check{\sigma}$ será pasar el término constante al otro lado de la ecuación, tal que

$$\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} = \eta_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\eta_{kk}\delta_{ij}$$

Ahora es necesario encontrar la traza de $\check{\sigma}$ en función de la traza de $\check{\eta}$ con lo cual, contraemos los índices de la siguiente forma

$$\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \left[\eta_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\eta_{kk}\delta_{ij} \right] \delta_{ik}\delta_{jk}$$

Con lo cual, notemos que el término que ya existe de η_{kk} será invariante bajo contracciones de índices, con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E}\sigma_{kk} &= \eta_{kk} \left[1 + \frac{3\nu}{1-2\nu} \right] \\ &= \eta_{kk} \left[\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right] \\ \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk} &= \eta_{kk} \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en la expresión original para encontrar $\check{\eta}$ en función de $\check{\sigma}$ y de su traza σ_{kk} . Tal que

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} &= \eta_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right) \\ &= \eta_{ij} + \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \\ \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} &= \eta_{ij} \\ \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] &= \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que

$$\eta_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] \quad (17)$$

Pregunta 24: Demuestre, usando notación de índices, que la operación $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega}$ es asociativa, es decir, es equivalente a $\vec{u} \cdot \nabla\vec{\omega}$.

Solución:

Primero escribiremos el lado izquierdo en notación de índices

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} = 0$$

Pregunta 26: Escriba las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas. ¿Cuál es el rango del tensor resultante de cada operación?

1. El gradiente ∇p con p un campo escalar.
2. La divergencia $\nabla \cdot \vec{u}$ con \vec{u} un campo vectorial.

3. El gradiente vectorial $\nabla \vec{u}$ (notación equivalente $\nabla \otimes \vec{u}$).
4. El rotor $\nabla \times \vec{u}$.
5. La derivada convectiva $\vec{u} \cdot \nabla \vec{w}$, con \vec{u} y \vec{w} campos vectoriales.
6. La divergencia $\nabla \cdot \check{\sigma}$, con $\check{\sigma}$ un campo tensorial de rango 2.
7. El gradiente $\nabla \check{\sigma}$

Se calculará a continuación, el ítem (1) que corresponde al gradiente escalar en los 3 diferentes sistemas de coordenadas mencionados.

Coordenadas cartesianas: Escribir esta expresión en coordenadas cartesianas es bastante directo, ya que, sea un campo escalar p , asumiendo que no depende del tiempo, se tiene que

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} \quad (18)$$

o de una forma más compacta en notación de índices

$$\nabla p = \partial_i p \hat{e}_i \quad (19)$$

Coordenadas cilíndricas: En este caso, el cálculo no es tan directo como en cartesianas, con lo cual usaremos la definición de derivada material para obtenerlo. La derivada material, para un campo escalar independiente del tiempo se define de la siguiente manera

$$dp = d\vec{r} \cdot \nabla p \quad (20)$$

En donde $p(\vec{r})$ y \vec{r} es el vector posición en el sistema de coordenadas elegido. En este caso, las coordenadas cilíndricas se definen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

y el vector posición está dado por

$$\vec{r} = \rho(\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) + z \hat{z} \quad (21)$$

ahora bien, este puede ser escrito en función de los vectores unitarios asociados a cada coordenada (ρ, φ, z) tal que

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \\ &= \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\hat{\rho} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \quad (22)$$

y además para la coordenada φ

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\ &= \rho(-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) \end{aligned}$$

Pero este no es unitario, con lo cual

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \frac{\vec{\varphi}}{\|\vec{\varphi}\|} \\ &= (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y})\end{aligned}$$

y así

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \quad (23)$$

El restante corresponde a \hat{z} que al ser el mismo que en cartesianas es bastante directo, tal que

$$\hat{z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \quad (24)$$

De lo cual, notemos que el vector posición se escribe de la siguiente manera en función de los vectores unitarios

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (25)$$

Ahora es necesario encontrar el diferencial del campo escalar p al cual queremos encontrar el gradiente en coordenadas cilíndricas, el cual en términos generales está definido por

$$dp(\vec{r}) = \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial z} dz \quad (26)$$

Ahora el diferencial del vector posición está dado por

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial p(\rho \hat{\rho} + z \hat{z})}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p(\rho \hat{\rho} + z \hat{z})}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial p(\rho \hat{\rho} + z \hat{z})}{\partial z} dz \\ &= \hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\varphi} d\varphi + \hat{z} dz\end{aligned}$$

Ahora, obtenido esto, lo reemplazamos en la definición de derivada material

$$\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial z} dz = (\hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\varphi} d\varphi + \hat{z} dz) \cdot \nabla p$$

De lo cual, comparando término a término, ya que los diferenciales son linealmente independientes, obtenemos que

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} \quad (27)$$

El cual corresponde al operador gradiente en coordenadas cilíndricas para un campo escalar independiente del tiempo.

Coordenadas esféricas: Para realizar esta derivación en coordenadas esféricas es exactamente el mismo procedimiento. Las coordenadas esféricas se definen de la siguiente manera

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \rho \cos \theta\end{aligned}$$

Y el vector posición está dado por

$$\vec{r} = \rho(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \quad (28)$$

Ahora, se realiza el cálculo de los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \end{aligned}$$

Con ello, notemos que el vector posición puede ser descrito tan solo usando $\hat{\rho}$ de la siguiente manera

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} \quad (29)$$

Ahora calculamos el vector unitario asociado a la coordenada azimutal

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\ &= \rho(-\sin \theta \sin \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y}) \end{aligned}$$

De lo cual, claramente podemos notar que no es unitario, con lo cual

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \frac{\vec{\varphi}}{\|\vec{\varphi}\|} \\ &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \vec{\varphi} \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{\varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y} \quad (30)$$

Ahora, finalmente, obtendremos el vector unitario asociado a la coordenada polar

$$\begin{aligned} \vec{\theta} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \\ &= \rho(\cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}) \end{aligned}$$

Lo cual, claramente no es unitario, con lo cual

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{\vec{\theta}}{\|\vec{\theta}\|} \\ &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \end{aligned}$$

Ahora, calcularemos el diferencial del vector posición \vec{r} en coordenadas esféricas, el cual está dado por

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \frac{\partial(\rho \hat{\rho})}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial(\rho \hat{\rho})}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial(\rho \hat{\rho})}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\theta} d\theta + \rho \sin \theta \hat{\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Y en términos más generales, el diferencial de un campo escalar con respecto a coordenadas esféricas está dado por

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi \quad (31)$$

Ahora reemplazamos esto en la definición de derivada material independiente del tiempo como sigue

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi = (\hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\theta} + \rho \sin \theta \hat{\varphi} d\varphi) \cdot \nabla p$$

De lo cual, comparando término a término, ya que los diferenciales son linealmente independientes, obtenemos el gradiente de un campo escalar en coordenadas esféricas:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (32)$$

Ahora se realizará el ítem (3) en el cual se pide obtener el gradiente vectorial $\nabla \vec{u}$ de un campo vectorial \vec{u} en los 3 sistemas de coordenadas mencionados.

Coordenadas cartesianas: Como esta derivación no es tan directa como el gradiente de un campo escalar, seremos más meticulosos en los desarrollos. Primero expresamos el campo vectorial \vec{u} en función de los vectores unitarios, tal que

$$\vec{u}(\vec{r}) = u_x(\vec{r})\hat{x} + u_y(\vec{r})\hat{y} + u_z(\vec{r})\hat{z} \quad (33)$$

Ahora tomaremos el diferencial de dicho campo vectorial como sigue

$$d\vec{u}(\vec{r}) = dx \frac{\partial}{\partial x} (u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}) + dy \frac{\partial}{\partial y} (u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}) + dz \frac{\partial}{\partial z} (u_x \hat{x} + u_y \hat{y} + u_z \hat{z}) \quad (34)$$

Ahora, como en coordenadas cartesianas los vectores unitarios son independientes de las coordenadas nos ahorraremos muchos términos. Tomamos la derivada parcial y queda

$$d\vec{u}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \hat{z} \right) dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \hat{z} \right) dy + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{z} \right) dz \quad (35)$$

Y además, de una forma más simple se tiene el diferencial del vector posición en coordenadas cartesianas como sigue

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz \\ &= \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \end{aligned}$$

Con lo cual, todo esto se reemplazará en la definición para la derivada material de un campo vectorial \vec{u} independiente del tiempo.

$$d\vec{u}(\vec{r}) = d\vec{r} \cdot \nabla \vec{u} \quad (36)$$

En lo cual el término $\nabla \vec{u}$ es llamado "gradiente vectorial" cuya definición en coordenadas cartesianas obtendremos a continuación:

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \hat{z} \right) dx + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \hat{z} \right) dy + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{z} \right) dz = (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) \cdot \nabla \vec{u}$$

De lo cual se puede obtener, comparando término con término de los diferenciales ya que, estos son linealmente independientes, que el gradiente vectorial de un campo vectorial \vec{u} es:

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \hat{x} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \hat{x} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \hat{x} \hat{z} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \hat{y} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \hat{y} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \hat{y} \hat{z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \hat{z} \hat{x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \hat{z} \hat{y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{z} \hat{z} \quad (37)$$

O quizá de una forma más compacta

$$\nabla \vec{u}_{ij} = \partial_i u_j \quad (38)$$

Coordenadas cilíndricas: Ahora se realizará la misma derivación pero en coordenadas cilíndricas, las cuales se definen como sigue

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

Y el vector posición está dado por

$$\vec{r} = \rho(\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \quad (39)$$

ahora bien, este puede ser escrito en función de los vectores unitarios asociados a cada coordenada (ρ, φ, z) tal que

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \\ &= \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\hat{\rho} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \quad (40)$$

y además para la coordenada φ

$$\begin{aligned} \vec{\varphi} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\ &= \rho(-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) \end{aligned}$$

Pero este no es unitario, con lo cual

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \frac{\vec{\varphi}}{\|\vec{\varphi}\|} \\ &= (-\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}) \end{aligned}$$

y así

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \quad (41)$$

El restante corresponde a \hat{z} que al ser el mismo que en cartesianas es bastante directo, tal que

$$\hat{z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \quad (42)$$

De lo cual, notemos que el vector posición se escribe de la siguiente manera en función de los vectores unitarios

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (43)$$

Ahora bien, a diferencia del campo escalar, el campo vectorial también estará en función de los vectores unitarios, de la siguiente manera

$$\vec{u} = u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_z \hat{z} \quad (44)$$

Del cual necesitamos obtener su diferencial, con lo cual

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_z \hat{z}) + d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_z \hat{z}) + dz \frac{\partial}{\partial z} (u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_z \hat{z}) \\ &= d\rho \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \hat{z} \right) + d\varphi \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \hat{\rho} + u_\rho \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - u_\varphi \hat{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \hat{z} \right) + dz \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{z} \right) \end{aligned}$$

Obtenido esto, ahora necesitamos el diferencial del operador posición en coordenadas cilíndricas, el cual está dado por

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \hat{\rho} + z \hat{z}) + d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \hat{\rho} + z \hat{z}) + dz \frac{\partial}{\partial z} (\rho \hat{\rho} + z \hat{z}) \\ &= d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z} \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos esto en la definición de derivada material para un campo escalar

$$d\rho \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \hat{z} \right) + d\varphi \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \hat{\rho} + \left(u_\rho + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \hat{z} \right] + dz \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{z} \right) = (d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z}) \cdot \nabla u$$

De lo cual, comparando término con término debido a que los diferenciales son linealmente independientes entre sí, obtenemos el siguiente resultado

$$\nabla u = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \hat{z} + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \hat{\rho} + \left(u_\rho + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \hat{z} \right] + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \hat{z} \quad (45)$$

Coordenadas esféricas: Al igual que en coordenadas cilíndricas, debemos tener sumo cuidado con las dependencias coordenadas de los vectores unitarios, con lo cual empezamos con la definición de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \rho \cos \theta \end{aligned}$$

Y el vector posición está dado por

$$\vec{r} = \rho (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) \quad (46)$$

Ahora, se realiza el cálculo de los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \\ &= \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \end{aligned}$$

Con ello, notemos que el vector posición puede ser descrito tan solo usando $\hat{\rho}$ de la siguiente manera

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} \quad (47)$$

Ahora calculamos el vector unitario asociado a la coordenada azimutal

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \\ &= \rho (-\sin \theta \sin \varphi \hat{x} + \sin \theta \cos \varphi \hat{y}) \end{aligned}$$

De lo cual, claramente podemos notar que no es unitario, con lo cual

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \frac{\vec{\varphi}}{\|\vec{\varphi}\|} \\ &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \vec{\varphi}\end{aligned}$$

Así,

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \quad (48)$$

Ahora, finalmente, obtendremos el vector unitario asociado a la coordenada polar

$$\begin{aligned}\vec{\theta} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \\ &= \rho(\cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z})\end{aligned}$$

Lo cual, claramente no es unitario, con lo cual

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{\vec{\theta}}{\|\vec{\theta}\|} \\ &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}\end{aligned}$$

Ahora, calcularemos el diferencial del vector posición \vec{r} en coordenadas esféricas, el cual está dado por

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \frac{\partial(\rho\hat{\rho})}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial(\rho\hat{\rho})}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial(\rho\hat{\rho})}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\theta} + \rho \sin \theta \hat{\varphi} d\varphi\end{aligned}$$

Luego de esto, es necesario generalizar un campo vectorial en coordenadas esféricas, el cual estará dado por:

$$\vec{u} = u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_\theta \hat{\theta} \quad (49)$$

Antes de seguir recordemos unas propiedades importantes de los vectores unitarios en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} &= \hat{\varphi} \sin \theta, & \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta} &= \hat{\theta}, & \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} &= 0, & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} &= 0, & \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\sin \theta \hat{\rho} - \cos \theta \hat{\theta} \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \rho} &= 0, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\hat{\rho}, & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} &= \cos \theta \hat{\varphi}\end{aligned}$$

Y en términos más generales, el diferencial de un campo vectorial en coordenadas esféricas está dado por

$$\begin{aligned}d\vec{u} &= d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_\theta \hat{\theta}) + d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_\theta \hat{\theta}) + d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\rho \hat{\rho} + u_\varphi \hat{\varphi} + u_\theta \hat{\theta}) \\ &= d\rho \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \hat{\theta} \right) + d\varphi \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \hat{\rho} + u_\rho \sin \theta \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - u_\varphi (\sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{\theta}) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \hat{\theta} + u_\theta \cos \theta \hat{\varphi} \right) \dots \\ &\quad + d\theta \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \hat{\rho} + u_\rho \hat{\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \hat{\theta} - u_\theta \hat{\rho} \right)\end{aligned}$$

Obtenido esto, se reemplaza en la definición de derivada material para un campo vectorial

$$d\rho \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \hat{\theta} \right) + d\varphi \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} \hat{\rho} + u_\rho \sin \theta \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - u_\varphi (\sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{\theta}) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \hat{\theta} + u_\theta \cos \theta \hat{\varphi} \right) \dots$$

$$+ d\theta \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \hat{\rho} + u_\rho \hat{\theta} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \hat{\theta} - u_\theta \hat{\rho} \right) = (\hat{\rho} d\rho + \rho \hat{\theta} + \rho \sin \theta \hat{\varphi} d\varphi) \cdot \nabla \vec{u}$$

Así, se obtiene la definición para el gradiente vectorial en coordenadas esféricas

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \hat{\rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \hat{\rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \hat{\rho} \hat{\theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} - u_\varphi \sin \theta \right) \hat{\varphi} \hat{\rho} + \left(u_\rho \sin \theta + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\theta \cos \theta \right) \hat{\varphi} \hat{\varphi} + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\varphi \cos \theta \right) \hat{\varphi} \hat{\theta} \right] \dots$$

(50)

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - u_\theta \right) \hat{\theta} \hat{\rho} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \hat{\theta} \hat{\varphi} + \left(u_\rho + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \hat{\theta} \hat{\theta} \right]$$

(51)

Ahora realizaremos el ítem (7) el cual nos pide encontrar el gradiente de un tensor general de rango $\nabla \check{\sigma}$
Coordenadas cilíndricas: Como ya conocemos los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas, pasaremos a escribir la forma general de un tensor de rango dos y su respectivo diferencial total:

$$\check{\sigma} = u_{\rho\rho} \hat{\rho} \hat{\rho} + u_{\rho\varphi} \hat{\rho} \hat{\varphi} + u_{\rho z} \hat{\rho} \hat{z} + u_{\varphi\rho} \hat{\varphi} \hat{\rho} + u_{\varphi\varphi} \hat{\varphi} \hat{\varphi} + u_{\varphi z} \hat{\varphi} \hat{z} + u_{z\rho} \hat{z} \hat{\rho} + u_{z\varphi} \hat{z} \hat{\varphi} + u_{zz} \hat{z} \hat{z}$$

(52)

El cual tomaremos su diferencial total como sigue:

$$d\check{\sigma} = d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (u_{\rho\rho} \hat{\rho} \hat{\rho} + u_{\rho\varphi} \hat{\rho} \hat{\varphi} + u_{\rho z} \hat{\rho} \hat{z} + u_{\varphi\rho} \hat{\varphi} \hat{\rho} + u_{\varphi\varphi} \hat{\varphi} \hat{\varphi} + u_{\varphi z} \hat{\varphi} \hat{z} + u_{z\rho} \hat{z} \hat{\rho} + u_{z\varphi} \hat{z} \hat{\varphi} + u_{zz} \hat{z} \hat{z}) \dots$$

$$+ d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_{\rho\rho} \hat{\rho} \hat{\rho} + u_{\rho\varphi} \hat{\rho} \hat{\varphi} + u_{\rho z} \hat{\rho} \hat{z} + u_{\varphi\rho} \hat{\varphi} \hat{\rho} + u_{\varphi\varphi} \hat{\varphi} \hat{\varphi} + u_{\varphi z} \hat{\varphi} \hat{z} + u_{z\rho} \hat{z} \hat{\rho} + u_{z\varphi} \hat{z} \hat{\varphi} + u_{zz} \hat{z} \hat{z}) \dots$$

$$+ dz \frac{\partial}{\partial z} (u_{\rho\rho} \hat{\rho} \hat{\rho} + u_{\rho\varphi} \hat{\rho} \hat{\varphi} + u_{\rho z} \hat{\rho} \hat{z} + u_{\varphi\rho} \hat{\varphi} \hat{\rho} + u_{\varphi\varphi} \hat{\varphi} \hat{\varphi} + u_{\varphi z} \hat{\varphi} \hat{z} + u_{z\rho} \hat{z} \hat{\rho} + u_{z\varphi} \hat{z} \hat{\varphi} + u_{zz} \hat{z} \hat{z})$$

$$= d\rho \left(\frac{\partial u_{\rho\rho}}{\partial \rho} \hat{\rho} \hat{\rho} + \frac{\partial u_{\rho\varphi}}{\partial \rho} \hat{\rho} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_{\rho z}}{\partial \rho} \hat{\rho} \hat{z} + \frac{\partial u_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \hat{\varphi} \hat{\rho} + \frac{\partial u_{\varphi\varphi}}{\partial \rho} \hat{\varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_{\varphi z}}{\partial \rho} \hat{\varphi} \hat{z} + \frac{\partial u_{z\rho}}{\partial \rho} \hat{z} \hat{\rho} + \frac{\partial u_{z\varphi}}{\partial \rho} \hat{z} \hat{\varphi} + \frac{\partial u_{zz}}{\partial \rho} \hat{z} \hat{z} \right) \dots$$

+