Departamento de Física
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Mecánica de Fluidos

Mecánica de Fluídos: Guía 1

Amaro A. Díaz Concha

Pregunta 1: Un cubo de hielo flota en un vaso de agua. Cuando el hielo se derrite, ¿qué nivel de agua tiene?
Solución:
Cuando un hielo que flota en un vaso de agua se derrite, el nivel del agua se reduce, ya que el hielo es menos denso que el agua, y por ende ocupa más volumen que la dicha agua, con lo cual, al derretirse, volviéndose agua, ocupará menos volumen que cuando estaba vuelto hielo.

Pregunta 2: Cierto fluido tiene un campo de velocidades de la forma

$$\vec{u} = \frac{1}{r(x+r)}[(x+ar)\hat{x} + (y+br)\hat{y} + (z+cr)\hat{z}] \tag{1}$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Encuentre las condiciones para las constantes a, b y c de modo que el fluido sea **incompresible**.
Solución:
Recordemos que la ecuación de continuidad en el contexto de mecánica de fluidos es la siguiente

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \tag{2}$$

En lo cual, si un fluido fuera incompresible, entonces su densidad se mantendría constante, con lo cual, si $\rho = C^{te}$ entonces, su derivada parcial con respecto al tiempo sería cero

$$\begin{aligned} \cancel{\partial_t \rho}^0 + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \rho \nabla \cdot (\vec{u}) &= \\ \nabla \cdot (\vec{u}) &= \end{aligned}$$

Con lo cual, se concluye que para un fluido incompresible, la divergencia de su campo de velocidades deberá ser cero

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3}$$

Ahora bien, si se tiene el siguiente campo de velocidades

$$\vec{u} = \frac{1}{r(x+r)}[(x+ar)\hat{x} + (y+br)\hat{y} + (z+cr)\hat{z}], \tag{4}$$

Para calcular la divergencia del campo vectorial $\vec{u}$ usaremos la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (f\vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f(\nabla \cdot \vec{v}) \tag{5}$$

En lo cual, el campo escalar f corresponde al factor

$$f = \frac{1}{r(x+r)} \tag{6}$$

y el campo vectorial corresponde al otro factor dado por

$$\vec{v} = (x + ar)\hat{x} + (y + br)\hat{y} + (z + cr)\hat{z} \tag{7}$$

Con lo cual, solo nos queda calcular el gradiente del factor f y la divergencia de $\vec{v}$.

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \partial_x \left(\frac{1}{r(x+r)} \right) \hat{x} + \partial_y \left(\frac{1}{r(x+r)} \right) \hat{y} + \partial_z \left(\frac{1}{r(x+r)} \right) \hat{z} \\
&= \frac{-1}{[r(x+r)]^2} \partial_x [(r(x+r))] \hat{x} + \frac{-1}{[r(x+r)]^2} \partial_y [r(x+r)] \hat{y} + \frac{-1}{[r(x+r)]^2} \partial_z [r(r+x)] \hat{z} \\
&= \frac{-1}{[r(x+r)]^2} \left\{ \partial_x [r(x+r)] \hat{x} + \partial_y [r(x+r)] \hat{y} + \partial_y [r(x+r)] \hat{z} \right\} \\
&= \frac{-1}{[r(x+r)]^2} \left\{ (x+r) \left(\frac{x}{r} + 1 \right) \hat{x} + \left(\frac{y}{r}(x+r) + y \right) \hat{y} + \left(\frac{z}{r}(x+r) + z \right) \hat{z} \right\}
\end{aligned}$$

Ahora nos queda calcular la divergencia del campo vectorial $\vec{v}$, como sigue

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{v} &= 3 + \frac{ax}{r} + \frac{by}{r} + \frac{cz}{r} \\
&= 3 + \frac{ax + by + cz}{r}
\end{aligned}$$

Con lo cual, reemplazamos en la identidad

$$\begin{aligned}
\nabla f \cdot v + f(\nabla \cdot \vec{v}) &= \nabla f \cdot \vec{v} + \frac{1}{r(r+x)} \left(3 + \frac{ax + by + cz}{r} \right) \\
&= \left[\frac{-1}{[r(x+r)]^2} \left\{ (x+r) \left(\frac{x}{r} + 1 \right) \hat{x} + \left(\frac{y}{r}(x+r) + y \right) \hat{y} + \left(\frac{z}{r}(x+r) + z \right) \hat{z} \right\} \right] \cdot \ldots \\
&\quad \left[(x + ar)\hat{x} + (y + br)\hat{y} + (z + cr)\hat{z} \right] + \frac{1}{r(r+x)} \left(3 + \frac{ax + by + cz}{r} \right) \\
&= \frac{-1}{[r(x+r)]^2} \left[(x+r) \left(\frac{x}{r} + 1 \right) (x + ar) + \left(\frac{y}{r}(x+r) + y \right) (y + br) + \left(\frac{z}{r}(x+r) + z \right) (z + cr) \right] + \ldots \\
&\quad \frac{1}{r(x+r)} \left(3 + \frac{ax + by + cz}{r} \right)
\end{aligned}$$

Ahora que se tiene una expresión para la divergencia del campo de velocidades, la igualaremos a cero, tal que cumpla con la propiedad de fluido incompresible

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{-1}{[r(x+r)]^2}\left[(x+r)\left(\frac{x}{r}+1\right)(x+ar)+\left(\frac{y}{r}(x+r)+y\right)(y+br)\ldots\right.$$
$$+\left(\frac{z}{r}(x+r)+z\right)(z+cr)+\frac{r(x+r)}{[r(x+r)]^2}\left(3+\frac{ar+by+cz}{r}\right)=$$
$$(x+r)\left(\frac{x}{r}+1\right)(x+ar)+\left(\frac{y}{r}(x+r)+y\right)(y+br)\ldots$$
$$+\left(\frac{z}{r}(x+r)+z\right)(z+cr)-r(x+r)\left(\frac{3r+ax+by+cz}{r}\right)=$$
$$\frac{(x+r)^2(x+ar)}{r}+\frac{[y(x+r)+yr](y+br)}{r}+\frac{[z(x+r)+zr](z+cr)}{r}+\ldots$$
$$-r(x+r)\left(\frac{3r+ax+by+cz}{r}\right)=$$
$$(x+r)^2(x+ar)+(yx+2yr)(y+br)+(zx+2zr)(z+cr)+r(x+r)(3r+ax+by+cz)=$$
$$(x+r)[(x+a)(x+ar)-r(3r+ax+by+cz)]+(x+2r)[y(y+br)+z(z+cr)]=$$
$$(x+r)[x^2+xar+ax++ar-3r^2-xar-byr+czr]+(x+2r)[y^2+ybr+z^2+crz]=0$$
$$(x+r)[x^2+ax+a^2r]$$

Pregunta 3:
Calcule las componentes del tensor de tensiones en coordenadas cartesianas para dos fluidos distintos cuyos campos de velocidades son $\vec{u} = \omega\vec{z}$ y $\vec{u} = \lambda\vec{r}$- Interprete los resultados considerando las componentes de este tensor. ¿Son estos campos compatibles con la condición de incompresibilidad?
Solución:

Pregunta 4: Un tanque rectangular de altura h, largo a y ancho b, se maitnene con la tapa superior abierta. Este tanque se llena con agua un cuarto de su volumen. Luego, empieza a rotar hasta alcanzar un estado estacionario, con una velocidad angular ω con respecto a un eje vertical que coincide con una de las aristas del cubo. Demuestre para que el agua no rebalse, entonces

$$\omega \leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{cg}{a^2+b^2}} \tag{8}$$

donde g es la aceleración de gravedad.
Solución:
Lo primero que podemos notar, es que nos dicen que el tanque está un cuarto de lleno, osea, que su volumen inicial es de

$$V_0 = \frac{1}{4}abh \tag{9}$$

Ahora, un cubo que rota con una velocidad angular ω sufrirá el efecto de las fuerzas centrífuga, la cual empuja el contenido hacia fuera en dirección radial y la fuerza gravitatoria que apuntará hacia el eje z en negativo, tal que, según la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\partial_t u + (u\cdot\nabla)u\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2 u + \rho(\omega^2 r\hat{r} - g\hat{z}) \tag{10}$$

Pero en este caso nos dicen que el fluido se encuentra en estado estacionario, con lo cual $\vec{u} = 0$, así, la ecuación se reduce a lo siguiente

$$\nabla p = \rho(\omega^2 r\hat{r} - g\hat{z}) \tag{11}$$

Con lo cual, integraremos con respecto al gradiente de la presión, lo cual, a modo de convenencia por la dirección de las fuerzas externas, haremos en coordenadas cilíndricas, recordemos que el gradiente en cilíndricas es el siguiente

$$\nabla\phi = \partial_r\phi\hat{r} + \frac{1}{r}\partial_\theta\phi\hat{\theta} + \partial_z\phi\hat{z} \tag{12}$$

Pero en este caso, como no hay fuerzas externas en la dirección azimutal, entonces solo necesitaremos el gradiente en dirección r y z

$$\nabla p =_r p\hat{r} + \partial_z p\hat{z} \tag{13}$$

Con lo cual tenemos el siguiente sistema

$$\partial_r p = \rho\omega^2 r \quad , \quad \partial_z p = -\rho g \tag{14}$$

Integrando en el término de r obtenemos

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + f(z)$$

Ahora derivamos este término parcialmente con respecto a z e igualamos

$$\partial_z p = f'(z) = -\rho g$$

integrando esto último obtenemos que p es igual a

$$p(r, z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C \tag{15}$$

Ahora, como el líquido está estado estacionario, entonces la presión será constante, así, podemos depejar z, tal que

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + \frac{C - p}{\rho g} \tag{16}$$

Al último término constante le llamaremos la altura inicial z_0, con lo cual, la altura está dada por el siguiente paraboloide

$$z(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + z_0 \tag{17}$$

Ahora, aplicamos esto a un tanque rectangular de lados a y b, con lo que el radio del paraboloide será $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ahora, para dicho radio, que será cuando el agua llegue al borde del cubo, tendremos que aplicar la conservación de masas, o sea que la nueva función de altura debe conservar el volumen de agua inicial que se tiene, tal que

$$\int_A z(r)dA = \frac{1}{4}abh \tag{18}$$

Con lo cual, integramos

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + z_0\right] dxdy = \frac{\omega^2}{6g}(a^3 b + ab^3) + z_0 ab$$

Resolviendo para z_0 podemos despejar la altura inicial en términos de a y b tal que, integrando

$$z_0 = \frac{h}{4} - \frac{\omega^2}{6g}(a^2 + b^2) \tag{19}$$

Reemplazamos la altura inicial en la expresión de la altura en función del radio, pero esta vez evaluada para la cual la altura es máxima, o sea, para el radio iguala $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$z_{máx} = \frac{\omega^2}{3g}(a^2 + b^2) + \frac{h}{4}$$

Ahora imponemos la condición que $z_{máx} \leq h$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{3g}(a^2 + b^2) + \frac{h}{4} &\leq h \\
\frac{\omega^2}{3g}(a^2 + b^2) &\leq \frac{3h}{4} \\
\omega^2 &\leq \frac{9}{4}\frac{hg}{(a^2 + b^2)} \\
\omega &\leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{hg}{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que la condición que deberá seguir la velocidad angular para que el bote no derrame el agua es la siguiente

$$\omega \leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{hg}{a^2 + b^2}} \tag{20}$$

Pregunta 5: Un fluido en estado estacionario fluye alrededor de una esfera fija de radio a ubicada en el origen, de modo que el campo de velocidades del fluido es

$$\vec{u} = -u_0\left(1 + \frac{a^3}{r^5}\right)\hat{x} + 3u_0\frac{a^3}{r^5}x\vec{r} \tag{21}$$

donde u_0 es la rapidez del fluido muy lejos de la esfera.
Encuentre la aceleración del fluido en un punto $\vec{r} = b\hat{x}$, con $b \geq a$. Encuentre el valor de b para el cual la aceleración es máxima.
Solución:
Primero, para calcular la aceleración haremos uso de la derivada material, y como en este caso la velocidad no depende explícitamente del tiempo, entonces la derivada material corresponde a

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \vec{a} \tag{22}$$

Con lo cual, queda calcular el producto punto entre el campo de velocidades $\vec{u}$

Pregunta 6: A partir de la ecuación de movimiento de un fluido incompresible en ausencia de fuerzas de volumen, encuentre una expresión para la presión estática p, asumiento que el flujo es estacionario y con velocidad $u = \vec{\omega} \times \vec{r}$, con $\vec{\omega}$ un vector constante.
Solución:

Como condiciones tenemos que, el flujo será estacionario $\partial_t \vec{u} = \vec{0}$ e incompresible $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, con $\vec{f} = \vec{0}$, con lo cual, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a lo siguiente

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \tag{23}$$

Ahora, el enunciado nos dice que el campo de las velocidades está dado por $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ con $\vec{\omega}$ un vector constante, entonces

$$\nabla^2 \vec{u} = 0 \tag{24}$$

ya que el vector posición será sero con respecto a derivadas de segundo orden, con lo cual, la ecuación de Navier-Stokes se reducirá aún más, como sigue

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p \tag{25}$$

Como $\vec{\omega}$ es un vector constante, siempre podemos adecuar nuestro eje coordenado tal que esté alineado con este, en este caso, alinearemos el eje z con la dirección de $\vec{\omega}$ tal que $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. Así, con $\vec{r}$ el vector posición en coordenadas cartesianas

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega y \hat{x} + \omega x \hat{y} \tag{26}$$

Así, podemos calcular el término conectivo ($(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$) de la ecuación de Navier-Stokes, tal que

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} &= \left(-y\omega\partial_x + x\omega\partial_y\right)(-y\omega\hat{x} + x\omega\hat{y}) \\ &= -x\omega^2\hat{x} - y\omega^2\hat{y} \\ &= -\omega^2\vec{r} \end{aligned}$$

en donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ es la componente radial en coordenadas cilíndricas. Ahora reemplamos lo obtenido en la ecuación de Navier-Stokes,

$$\rho\omega^r\hat{r} = \nabla p$$

ahora solo nos queda integrar el gradiente de p, lo cual haremos en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \partial_r p &= \rho\omega^2 r \\ &= \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + p_0 \end{aligned}$$

Con lo cual hemos encontrado una expresión para la presión estática en un fluido en rotación

$$p(r) = \left(\frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + p_0\right)\hat{r} \tag{27}$$

Pregunta 7: La densidad de un flujo estacionario está dado por $\rho = kx_1x_2$, donde k es una constante. Determine la velocidad para la cual el flujo es incompresible, y encuentre una ecuación para las líneas de flujo.

Solución:

Tenemos como condiciones que el flujo debe ser incompresible y estacionario, con lo cual, primero, la derivada material de la densidad deberá ser cero y además la derivada parcial de la densidad con respecto al tiempo deberá ser cero, lo que nos deja como condición que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \vec{u} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{28}$$

Con lo cual solo nos queda calcular el gradiente y posterior producto punto

$$\begin{aligned}(u_1\hat{x_1} + u_2\hat{x_2} + u_3\hat{x_3}) \cdot (kx_2\hat{x_1} + kx_1\hat{x_2}) &= 0\\ ku_1x_2 + ku_2x_1 &=\\ u_1 &= -\frac{x_1}{x_2}u_2\end{aligned}$$

La cual cumple como condición para el campo de velocidades.

Pregunta 8: Derive y escriba la ecuación de conservación de masas en coordenadas cartesianas cilíndricas y esféricas.
Solución:

Pregunta 9: Demuestre que un fluido incompresible satiface la siguiente ecuación

$$\partial_t\rho + \vec{u} \cdot \nabla\rho = 0 \tag{29}$$

donde $\vec{u}$ es la velocidad de flujo. Escriba la ecuación en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
Solución:

Pregunta 10: Demuestre que para un flujo bidimensional $\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y}$ incompresible, necesariamente y es suficiente que exista una finción $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$u_x = \partial_y\psi \quad , \quad u_y = \partial_x = -\partial_x\psi \tag{30}$$

La función ψ se conoce como función de flujo. Para poder probar suficiencia, use el teorema de Stokes.
Solución:
Pregunta 11: Demuestre que para un flujo bidimensional $\vec{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y}$ compresible pero estacionario, necesariamente y es suficiente que exista una función $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$u_x = \frac{\rho_0}{\rho}\partial_y\psi \quad , \quad u_y = -\frac{\rho_0}{\rho}\partial_x\psi \tag{31}$$

Solución:

Pregunta 12: