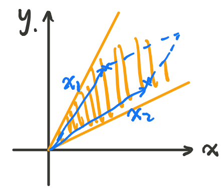
仿射集、凸集、凸锥

…组合…组合…组合

…包 …包 …包

K个点 $x_1,\cdots,x_k\in C$. 选取 $\theta_1,\cdots,\theta_k\in R$，构造 $\theta_1x_1+\cdots+\theta_kx_k$



仿射组合 $\theta_1+\cdots+\theta_k=1$

凸组合. $\theta_1+\cdots+\theta_k=1,\ \theta_1,\cdots,\theta_k\in[0,1]$

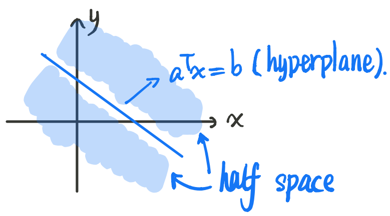
凸锥组合 $\theta_1,\cdots,\theta_k\geqslant 0$.

几种重要的凸集

	①仿射集	②凸集	③凸锥.
$\mathbb{R}^n$空间:	✓	✓	✓
$\mathbb{R}^n$空间的子空间:	✓	✓	✓
任意直线:	✓	✓	(过原点)
任意线段:	(点)	✓	(原点)
$\{x_0+\theta v\mid\theta\geqslant 0\}$: $x_0\in\mathbb{R}^n,\theta\in\mathbb{R},v\in\mathbb{R}^n$	$(v=\theta)$	✓	$(x_0=\theta)$

超平面与半空间.

$\{x\mid a^Tx=b\}$ $x,a\in\mathbb{R}^n,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ Hyperplane



超平面: ①√ ②√ ③过原点

半空间: ①不定 ②√ ③过原点

球和椭球.

球: $B(x_c,r)=\{x\mid \|x-x_c\|_2\leq r\}=\{x\mid \sqrt{(x-x_c)^T(x-x_c)}\leq r\}$ ①不定 ②√ ③不定

证明: $\forall x_1,x_2\in B$ $\|x_1-x_c\|_2\leq r$ $\|x_2-x_c\|_2\leq r$

$\forall\ 0\leq\theta\leq 1$ $\|\theta x_1+(1-\theta)x_2-x_c\|_2=\|\theta(x_1-x_c)+(1-\theta)(x_2-x_c)\|_2$

$\boxed{\|a+b\|\leq\|a\|+\|b\|.}$ $\leq\theta\|(x_1-x_c)\|_2+(1-\theta)\|x_2-x_c\|_2$

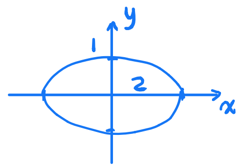
$\leq r.$

椭球：$\mathcal{E}(x_c, P) = \{x \mid (x-x_c)^T P^{-1} (x-x_c) \le 1\}$ $\quad P \in S_{++}^n$ （n×n对称正定矩阵）.

$P = r^2 I_n$ $\quad$ ②✓ $\quad \sqrt{eig(A^TA)}$ singular value. 奇异值.

例：$\mathcal{E} = \{x \mid x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x \le 1\}$

$= \{(x_1, x_2) \mid \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$



多面体. Poly

$$P = \left\{x \;\middle|\; \begin{array}{ll} a_j^T x \le b_j & j = 1, \cdots, m \\ a_j^T x = d_j & j = 1, \cdots, r \end{array}\right\}$$

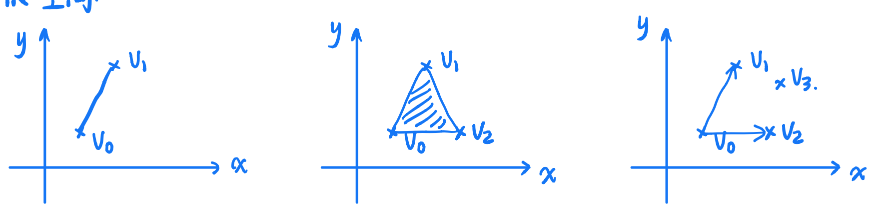
有界多面体 ②✓

单纯形 simplex

$\mathbb{R}^n$空间中选择 $v_0, \cdots, v_k$ 共k+1个点，$v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0$ 线性无关，则与上述点相关

的单纯形为 $C = \mathrm{Conv}\{v_0, \cdots, v_k\} = \{\theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \mid \theta \succeq 0, \ 1^T\theta = 1\}$

例：$\mathbb{R}^2$空间.



线段. $\qquad$ 三角形 $\qquad$ X

证明：simplex 是 polyhedron 的一种.

$x \in C \in \mathbb{R}^n$，C为complex $\Leftrightarrow x = \theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k$，$1^T\theta = 1$，$\theta \succeq 0$，

$v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0$ 线性无关

定义 $[\theta_1, \cdots, \theta_k]^T = y \qquad y \succeq 0, \ 1^T y \le 1$

$[v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_0] = B \in \mathbb{R}^{n \times k}$

$$\begin{aligned} x \in C \Leftrightarrow x &= \theta_0 v_0 + \cdots + \theta_k v_k \\ &= v_0 + \theta_1 (v_1 - v_0) + \cdots + \theta_k (v_k - v_0) \\ &= v_0 + By. \end{aligned}$$

rank(B) = k $\ (k \le n)$ $\qquad$ 非奇异值矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to k \times k \\ \to (n-k) \times k \end{array} \qquad AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = v_0 + By \iff Ax = Av_0 + ABy$

$$\iff \begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}v_0 + \begin{bmatrix}A_1B\\A_2B\end{bmatrix}y$$

$$\iff \begin{cases} A_1x = A_1v_0 + y \\ A_2x = A_2v_0 \end{cases}$$ ↖ 变量.

$$\iff \begin{cases} A_1x \succeq A_1v_0 \\ 1^TA_1x \le 1 + 1^TA\cdot v_0 \\ A_2x = A_2v_0. \end{cases}$$

	凸集	凸锥
对称矩阵集合. $S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T\}$		✓
对称半正定矩阵集合. $S^n_+ = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T, X \succeq 0\}$ 奇异值≥0.	✓	✓
对称正定矩阵集合. $S^n_{++} = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = X^T, X \succ 0\}$		✗

证明 S^n_+ 是 Convex Cone.

$\forall \theta_1, \theta_2 \ge 0$, $\forall A、B \in S^n_+$，证明 $\theta_1 A + \theta_2 B \in S^n_+$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^TAx \ge 0$, $x^TBx \ge 0$.

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^TAx + \theta_2 x^TBx \ge 0.$$

$n=1$ $S^n_+ = \mathbb{R}_+$ $S^n_{++} = \mathbb{R}_{++}$ $S^n = \mathbb{R}$. 正定矩阵集合不是凸锥因为不包含零矩阵