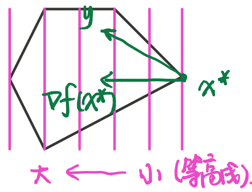
lec25.



$\nabla f^T(x^*)(y-x) \geq 0.$

线性规划的解在边界上.

等价变换.

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ → $x^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d \\ \text{s.t.} \quad & Gx + S = h \\ & Ax = b \\ & S \geq 0 \end{aligned} \quad \overset{x^+, x^- \geq 0,\ x^+ - x^- = x}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \min \quad & c^T x^+ - c^T x^- + d \\ \text{s.t.} \quad & Gx^+ - Gx^- + S = h \\ & Ax^+ - Ax^- = b \\ & S \geq 0,\ x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0. \end{aligned}$$

$$x^* \rightleftarrows (x^*)^+、(x^*)^-$$

$c^T x^* + d = c^T (x^*)^+ - c^T (x^*)^- + d$. (2个方向等价性).

例: 食谱问题

选择食谱, 使得 m 种营养元素分别不小于 $b_1, \cdots, b_m$.

有 n 种食物, 单位食物营养为 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$, $\forall j = 1, \cdots, n$.

目标: 单位食物价格 c_j, 找出总价最小的食谱.

设食物量分别为 $x_1, \cdots, x_n$.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^m c_{ij} x_j \geq b_j,\ i = 1, \cdots, m \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, n. \end{aligned}$$

$$\min \quad [c_1, \cdots, c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq 0.$$

例: 线性分数规划 (linear fractional programing).

$$(P_0) \quad \begin{aligned} \min \quad & \underline{f_0(x)} \\ \text{s.t.} \quad & Gx \leq h \\ & Ax = b. \end{aligned}$$

线性分数函数. (凸 ×, 拟凸 √) $f_0(x) = \dfrac{c^T x + d}{e^T x + f}$

$\text{dom} f_0 = \{x \mid e^T x + f > 0\}$.

不是标准的凸问题, 需要转化.

$$\Rightarrow (P_1) \quad \min \quad c^Ty+dz$$
$$\text{s.t.} \quad Gy-hz\le 0, \quad e^Tx+fz=1$$
$$Ay-bz=0, \quad z\geqslant 0 \quad (z>0 \text{ 等价}).$$

证明: (1) 若 x 在 p_0 可行, $y=\dfrac{x}{e^Tx+f}$, $z=\dfrac{1}{e^Tx+f}$.

$$\begin{cases} Gx\le h \\ Ax=b \\ e^Tx+f>0. \end{cases} \qquad Gy-hz=\frac{Gx-h}{e^Tx+f}\le 0. \qquad e^Tx+fz=\frac{e^Tx+f}{e^Tx+f}=1$$

$$Ay-bz=\frac{Ax-b}{e^Tx+f}=0. \qquad z\geqslant 0.$$

$$c^Ty+dz=\frac{c^Tx+d}{e^Tx+f}=f_0(x)$$

(2) 若 y, z 在 p_1 中可行, 若 $z>0$, 则 $x=\dfrac{y}{z}$, 则 x 在 p_0 中可行且两问题目标函数值相同

lec26.

(3) 若 y, z 在 p_1 中可行, 若 $z=0$, 设 x_0 为 p_0 的可行解

则 $x=x_0+ty$ 对 p_0 可行, $\forall t\geqslant 0$.

$$Gy\le 0, \quad Ay=0, \quad e^Ty=1$$

$$Gx=\underbrace{Gx_0}_{\le h}+\underbrace{Gy}_{\le 0.}\le h$$

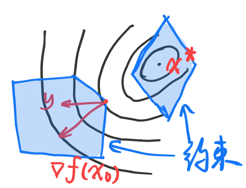
$$Ax=Ax_0+tAh=b.$$

$$e^Tx+f=\underbrace{e^Tx_0+f}_{\geqslant 0}+\underbrace{t}_{\geqslant 0}\underbrace{e^Ty}_{=1}>0$$

$$f_0(x)=f_0(x_0+ty)=\frac{c^Tx_0+c^Tty+d}{e^Tx_0+e^Tty+f}\ \overset{t\to\infty}{=\!=}\ c^Ty.$$

二次规划. Quadratic Programming

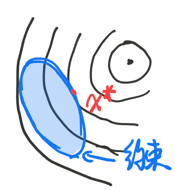
$$\min \quad \frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r \quad (凸) \quad P\in S_+^n$$
$$\text{s.t.} \quad \left.\begin{aligned} Qx&\le h \\ Ax&=b \end{aligned}\right\} \ (仿射)$$



最优点可能在边界
可能在约束内部

二次约束二次规划. Quadratically constrained quadratic programming (QCQP)

$$\min \quad \frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r. \quad P\in S_+^n$$
$$\text{s.t.} \quad \frac{1}{2}x^TP_ix+q_i^Tx+r_i\le 0, \quad P_i\in S_+^n, \ i=1,\cdots,m$$
$$Ax=b$$



例：带噪声的测量系统. $b = Ax + e$.

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2.$$

$$= \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2$$

$$= \arg\min_{x} \ x^T \underbrace{A^T A}_{S_+^n} x - 2b^T A x + b^T b \quad (\text{无约束QP})$$

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

例：若x稀疏.

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_0 \underline{\|x\|_0} \quad \text{非凸.}$$

$$= \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_1 \|x\| \quad (L_1 - \text{Regularized least squares}).$$

$$x = x^+ - x^-$$

$$= \arg\min_{x} \|b - Ax^+ + Ax^-\|_2^2 + \underbrace{\lambda_1 \|x^+ - x^-\|}_{\lambda_1 \cdot 1^T x^+ + \lambda_1 1^T \cdot x^-}$$

$$\text{s.t. } x^+, x^- \geq 0.$$

例：L2 - Regularized least square (岭回归). X中元素幅度类似

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda_2 \|x\|_2^2. \quad \text{二次项系数：} (A^T A + \lambda_2 I) \succeq 0$$

$$= \arg\min_{x} \|b - Ax\|_2^2.$$

$$\text{s.t. } \|x\|^2 \leq \theta, \ \theta \geq 0. \quad (\text{QCQP})$$