数值计算方法试卷五 A（闭卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

(1) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & -8 & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$________.

(2) 对于方程组 $\begin{cases}2x_1-5x_2=1\\ 10x_1-4x_2=3\end{cases}$, Jacobi 迭代法的迭代矩阵是 $G_J=$______________.

(3) $\sqrt[3]{x^*}$ 的相对误差约是 x^* 的相对误差的_____ 倍.

(4) 求方程 $x=f(x)$ 根的牛顿迭代格式是_____________________.

(5) 设 $f(x)=x^3+x-1$，则差商 $f[0,1,2,3]$=__________.

(6) 设 $n\times n$ 矩阵 G 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵 G 的谱半径 $\rho(G)=$___________.

(7) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 则条件数 $Cond_\infty(A)$_________.

(8) 为了提高数值计算精度, 当正数 x 充分大时, 应将 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 改写为_______.

(9) n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为______次.

(10) 拟合三点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$ 的水平直线是_____________.

二. (15 分) 证明：方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+x_2-2x_3=1\end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解不收敛.

三. (15 分) 定义内积

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

试在 $H_1=Span\{1,x\}$ 中寻求对于 $f(x)=\sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $p(x)$.

四. (15 分) 给定数据表

x	-2	-1	0	1	2

y	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

试用三次多项式以最小二乘法拟合所给数据.

五. (15 分) 依据如下函数值表

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	9	23	3

建立不超过三次的拉格朗日插值多项式.

六. (10 分) 用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

数值计算方法试卷五 A 参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

(1) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ __13_____.

(2) 对于方程组 $\begin{cases} 2x_1-5x_2=1 \\ 10x_1-4x_2=3 \end{cases}$, Jacobi 迭代法的迭代矩阵是 $G_J=\underline{\begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ 2.5 & 0 \end{bmatrix}}$ 。

(3) $\sqrt[3]{x^*}$ 的相对误差约是 x^* 的相对误差的__1/3___ 倍.

(4) 求方程 $x=f(x)$ 根的牛顿迭代格式是 $\underline{x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n-f(x_n)}{1+f'(x_n)}}$ 。

(5) 设 $f(x)=x^3+x-1$，则差商 $f[0,1,2,3]$=___1_____。

(6) 设 $n\times n$ 矩阵 G 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则矩阵 G 的谱半径 $\rho(G)$ =_$\underline{\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|}$ 。

(7) 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则条件数 $Cond_\infty(A)$ ____6_____。

(8) 为了提高数值计算精度，当正数 x 充分大时，应将 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 改写为

$\underline{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$ 。

(9) n 个求积节点的插值型求积公式的代数精确度至少为 $\underline{n-1}$ 次.

(10) 拟合三点 $(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$，$(x_3, f(x_3))$ 的水平直线是 $\underline{y=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f(x_i)}$ 。

二. (15 分) 证明: 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

使用 Jacobi 迭代法求解不收敛.

证明 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$G_J = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$ （5 分）

G_J 的特征多项式为

$$\det(\lambda I - G_J) = \begin{vmatrix} \lambda & -0.5 & 0.5 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -0.5 & -0.5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1.25)$$ （5 分）

G_J 的特征值为 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = \sqrt{1.25}\, i$，$\lambda_3 = -\sqrt{1.25}\, i$，故 $\rho(G_J) = \sqrt{1.25} > 1$，因而 Jacobi 迭代法不收敛。 （5 分）

三. (15 分) 定义内积

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

试在 $H_1 = Span\{1, x\}$ 中寻求对于 $f(x) = \sqrt{x}$ 的最佳平方逼近元素 $p(x)$.

解 $\varphi_0(x) \equiv 1$，$\varphi_1(x) \equiv x$

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 dx = 1，\quad (\varphi_1, \varphi_0) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\left(\varphi_1,\varphi_1\right)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3},\quad \left(\varphi_0,f\right)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$$

$$\left(\varphi_1,f\right)=\int_0^1 x\sqrt{x}dx=\frac{2}{5}$$ （5 分）

法方程为

$$\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\\ 2/5\end{bmatrix}$$ （5 分）

解得 $c_0=\frac{4}{15}$，$c_1=\frac{12}{15}$。所求的最佳平方逼近元素为

$$p(x)=\frac{4}{15}+\frac{12}{15}x,\quad 0\le x\le 1$$ （5 分）

四. (15 分) 给定数据表

试用三次多项式以最小二乘法拟合所给数据.

解 $y(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & -8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\end{bmatrix},\quad A^TA=\begin{bmatrix}5 & 0 & 10 & 0\\ 0 & 10 & 0 & 34\\ 10 & 0 & 34 & 0\\ 0 & 34 & 0 & 130\end{bmatrix}$$

$$A^Ty=(2.9,4.2,7,14.4)^T$$ （8 分）

法方程

$$A^TAc=A^Ty$$ （2 分）

的解为 $c_0=0.4086$，$c_1=0.39167$，$c_2=0.0857$，$c_3=0.00833$ （3 分）

得到三次多项式

$$y(x)=0.4086+0.39167x+0.0857x^2+0.00833x^3$$

误差平方和为 $\sigma_3=0.000194$ （2 分）

五. (15 分) 依据如下函数值表建立不超过三次的牛顿插值多项式.

解 插值基函数

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x$$

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x$$ （8 分）

拉格朗日插值多项式为

$$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3}f(x_i)l_i(x)=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$ （7 分）

六. (10 分) 用矩阵的直接三角分解法解方程组

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$$

解 设

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&1\\1&2&4&3\\0&1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$ （4 分）

由矩阵乘法可求出 u_{ij} 和 l_{ij}

$$\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$ （2 分）

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\&1&0&1\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$ （2 分）

解下三角方程组

$$\begin{bmatrix}1&&&\\0&1&&\\1&2&1&\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\17\\7\end{bmatrix}$$

有 $y_1=5$，$y_2=3$，$y_3=6$，$y_4=4$。再解上三角方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ & 1 & 0 & 1\\ & & 2 & 1\\ & & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\6\\4\end{bmatrix}$$

得原方程组的解为 $x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=2$，$x_4=2$。（2 分）