数值计算方法试卷一 A（闭卷）

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 以下误差限公式不正确的是（　　）

A． $\varepsilon\left(x_1-x_2\right)=\varepsilon\left(x_1\right)-\varepsilon\left(x_2\right)$　　B. $\varepsilon\left(x_1+x_2\right)=\varepsilon\left(x_1\right)+\varepsilon\left(x_2\right)$

C． $\varepsilon\left(x_1x_2\right)=\left|x_2\right|\varepsilon\left(x_1\right)+\left|x_1\right|\varepsilon\left(x_2\right)$　　D. $\varepsilon\left(x^2\right)=2\left|x\right|\varepsilon\left(x\right)$

2. 步长为 h 的等距节点的插值型求积公式，当 $n=2$ 时的牛顿－科茨求积公式为（　　）

A． $\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]$

B． $\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{3}\left[f\left(a\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]$

C． $\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{3}\left[f\left(a\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right]$

D． $\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{4}\left[f\left(a\right)+f\left(a+\frac{b-a}{4}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(a+3\frac{b-a}{4}\right)\right]$

3. 通过点 $\left(x_0,y_0\right),\left(x_1,y_1\right)$ 的拉格朗日插值基函数 $l_0\left(x\right),l_1\left(x\right)$ 满足（　　）

A． $l_0\left(x_0\right)=0$，$l_1\left(x_1\right)=0$　　B． $l_0\left(x_0\right)=0$，$l_1\left(x_1\right)=1$

C． $l_0\left(x_0\right)=1$，$l_1\left(x_1\right)=1$　　D． $l_0\left(x_0\right)=1$，$l_1\left(x_1\right)=1$

4. 用二分法求方程 $f\left(x\right)=0$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上的根，若给定误差限 ε，则计算二分次数的公式是 $n\geq$（　　）

A． $\frac{\ln(b-a)+\ln\varepsilon}{\ln 2}+1$　　B． $\frac{\ln(b-a)+\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$

C． $\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}+1$　　D． $\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$

5. 若用列主元消去法求解下列线性方程组，其主元必定在系数矩阵主对角线上的方程组是（　　）

A． $\begin{cases}10x_1-x_2+4x_3=0\\2x_1-5x_2+x_3=2\\x_1-x_2+6x_3=-1\end{cases}$　　B． $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=1\\-x_1-5x_2+2x_3=0\\x_1+2x_2+6x_3=-1\end{cases}$

C． $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0\\-x_1-5x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+6x_3=0\end{cases}$　　D． $\begin{cases}10x_1-x_2+4x_3=0\\2x_1-5x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}$

二、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 数 x^* ＝2.1972246…的六位有效数字的近似数的绝对误差限是__________。

7. 已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x_1=2$ 和 $x_2=5$ 处的函数值分别是 12 和 18，已知 $f'(5)\approx 2$，则 $f'(2)\approx$ __________

8．过 n 对不同数据 $(x_i,y_i), i=1,2,\cdots,n$，的拟合直线 $y=a_1x+a_0$，那么 a_1,a_0 满足的法方程组是__________

9. 已知函数 $f(x)$ 的函数值 $f(0), f(2), f(3), f(5), f(6)$，以及均差如下

$$f(0)=0,\ f(0,2)=4,\ f(0,2,3)=5,\ f(0,2,3,5)=1,\ f(0,2,3,5,6)=0$$

那么由这些数据构造的牛顿插值多项式的最高次幂的系数是__________

10．解初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \left(x\in[a,b]\right)$ 的龙格－库塔法就是求出公式

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=hf\left(\zeta_k, y(\zeta_k)\right), \zeta_k\in[x_k,x_{k+1}], k=0,1,2,\cdots,n-1$$

中的平均斜率 $f\left(\zeta_k, y(\zeta_k)\right)$，其中 h, x_k 分别是 n 等分 $[a,b]$ 的步长合节点。若用 x_k 点处的斜率近似平均斜率 $f\left(\zeta_k, y(\zeta_k)\right)$，得到初值问题的数值解的近似公式

$y(x_{k+1})\approx y_{k+1}=y_k+$____________________

三、 计算题（每小题 12 分，共 60 分）

11. 用高斯－赛德尔迭代法求解线性方程组 $\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3-x_4=-4 \\ -x_1+10x_2-x_3-x_4=12 \\ -x_1-x_2+5x_3-x_4=8 \\ -x_1-x_2-x_3+10x_4=34 \end{cases}$，已知 $X_0=(0,0,0,0)^T$，求 X_1,计算过程中保留 4 位有效数字，要求写出迭代格式。

12．已知数值表

x	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	0.47943	0.56464	0.64422

试用二次插值计算 $f(0.57681)$ 的近似值，计算过程保留五位小数。（要写出二次插值多项式）

13. 用牛顿法求方程 $x^3-3x-1=0$ 在 $[1,2]$ 之间的近似根，计算保留 6 位有效数字。要求 $|x_n-x_{n-1}|\le 0.00005$，取 1 和 2 作为初始值。

14. 用欧拉法解初值问题 $\begin{cases} y'=-x+y^2 \\ y(0)=2 \end{cases}$ 在 $[0,1.5]$ 上的数值解，取 $h=0.5$，计算过程保留 5 位小数。（要求写出迭代公式）

四．证明题（本题 10 分）

15. 证明求积公式 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{4h}{3}\left[2f(-h)-f(0)+2f(h)\right]$ 具有三次代数精度，其中 h 是正常数。

数值计算方法试卷一 A 参考答案

一、选择题

1. A　2. B　3. D　4. D　5. B

二、填空题

6. 0.5×10^{-5}　**7.** 2　8. $\begin{cases} na_2+a_1\sum_i x_i=\sum_i y_i \\ a_0\sum_i x_i+a_1\sum_i x_i^2=\sum_i x_i y_i \end{cases}$　**9.** 1

10. $hf\left(x_k,y(x_k)\right)$ 或 $hf\left(x_k,y_k\right)$

三、计算题

11.迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=0.2x_2^{(k)}+0.2x_3^{(k)}+0.2x_4^{(k)}-0.8 \\ x_2^{(k+1)}=0.1x_1^{(k+1)}+0.1x_3^{(k)}+0.1x_4^{(k)}+1.2 \\ x_3^{(k+1)}=0.2x_1^{(k+1)}+0.2x_2^{(k+1)}+0.2x_4^{(k)}+1.6 \\ x_4^{(k+1)}=0.1x_1^{(k+1)}+0.1x_2^{(k+1)}+0.1x_3^{(k+1)}+3.4 \end{cases},\quad k=0,1,2,\cdots$$ （5 分）

因为 $X_0=(0,0,0,0)^T$，即 $x_1^{(0)}=0$，$x_2^{(0)}=0$，$x_3^{(0)}=0$，$x_4^{(0)}=0$，代入迭代格式求 $X_1^{(1)}$，

$$x_1^{(0)}=0.2\times 0+0.2\times 0+0.2\times 0-0.8=-0.8$$ （7 分）

将 $x_1^{(1)}=-0.8$，$x_2^{(0)}=0$，$x_3^{(0)}=0$，$x_4^{(0)}=0$ 代入迭代式，求 $x_2^{(1)}$，

$$x_2^{(1)}=0.1\times(-0.8)+0.1\times0+0.1\times0+1.2=1.12$$ （9 分）

将 $x_1^{(1)}=-0.8$，$x_2^{(1)}=1.12$，$x_3^{(0)}=0$，$x_4^{(0)}=0$，求 $x_3^{(1)}$，

$$x_3^{(1)}=0.2\times(-0.8)+0.2\times1.12+0.2\times0+1.6=1.664$$ （11 分）

将 $x_1^{(1)}=-0.8$，$x_2^{(1)}=1.12$，$x_3^{(1)}=1.664$，$x_4^{(0)}=0$，求 $x_4^{(1)}$，

$$x_4^{(1)}=0.1\times(-0.8)+0.1\times1.12+0.1\times1.1664+3.4=3.549$$ （13 分）

于是，得到

$$X_1=(-0.8,1.12,1.664,3.549)^T$$ （15 分）

12． 过 $(0.5,0.447943)$，$(0.6,0.56464)$，$(0.7,0.64422)$ 作二次插值多项式

$$P_2(x)=\frac{(x-0.6)(x-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}\times0.47943+\frac{(x-0.5)(x-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}\times0.56464$$

$$+\frac{(x-0.5)(x-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}\times0.64422$$ （5 分）

所以

$$f(0.57681)\approx P_2(0.57681)=\frac{(0.57681-0.6)(0.57681-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}\times0.47943$$

$$+\frac{(0.57681-0.5)(0.57681-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}\times0.56464$$

$$+\frac{(0.57681-0.5)(0.57681-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}\times0.64422$$ （9 分）

$$=\frac{0.00286}{0.2\times0.1}\times0.47943-\frac{0.00946}{0.1\times0.1}\times0.56464-\frac{0.00178}{0.2\times0.1}\times0.64422$$

$$=0.06856+0.53428-0.05738=0.54546$$ （15 分）

13. $f(x)=x^3-3x-1$，$f(1)=-3<0$，$f(2)=1>0$

$f'(x)=3x^2-3$，$f''(x)=12x$，$f(2)=24>0$，故取 $x=2$ 作初始值 （3 分）

迭代公式为

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3-3x_{n-1}-1}{3x_{n-1}^2-3}\ (\text{或}\frac{2x_{n-1}^3+1}{3(x_{n-1}^2-1)}),\quad n=1,2,\cdots$$ （6 分）

$x_0=2$， $x_1=\dfrac{2\times 3^3+1}{3\times\left(2^2-1\right)}=1.88889$， $x_2=\dfrac{2\times 1.88889^3+1}{3\times\left(1.88889^2-1\right)}=1.87945$

$\left|x_2-x_1\right|=0.00944$

$x_3=\dfrac{2\times 1.87945^3+1}{3\times\left(1.87945^2-1\right)}=1.87939$ ， $\left|x_3-x_2\right|=0.00006$ （11 分）

$x_2=\dfrac{2\times 1.87939^3+1}{3\times\left(1.87939^2-1\right)}=1.87939$ ， $\left|x_4-x_3\right|=0.00001$

方程的根 $x^*\approx 1.87939$ （15 分）

14. 欧拉法的公式为

$y\left(x_k\right)\approx y_k=y_{k-1}+hf\left(x_{k-1},y_{k-1}\right)=y_{k-1}+h\left(-x_{k-1}+y_{k-1}^2\right)$， $k=1,2,3,4$ （4 分）

已知 $x_0=0$， $y_0=2$

$y(0.5)\approx y_1=2+0.5\times\left(-0+2^2\right)=4$ （8 分）

$y(1)\approx y_2=4+0.5\times\left(-0.5+4^2\right)=11.75$ （12 分）

$y(1.5)\approx y_3=11.75+0.5\times\left(-1+11.75^2\right)=80.28125$ （15 分）

注：不写公式扣 4 分

四、证明题（本题 10 分）

15. （1）当 $f(x)=1$ 时，左边 $=4h=\dfrac{4h}{3}\left[2-1+2\right]=$ 右边 （2 分）

（2）当 $f(x)=x$ 时，左边 $=0=\dfrac{4h}{3}\left[2\times(-h)-1\times 0+2\times h\right]=$ 右边 （4 分）

（3）当 $f(x)=x^2$ 时，左边 $=\dfrac{16h^3}{3}=\dfrac{4h}{3}\left[2\times(-h)^2-1\times 0+2\times h^2\right]=$ 右边

（4）当 $f(x)=x^3$ 时，左边 $=0=\dfrac{4h}{3}\left[2\times(-h)^3-0+2\times h^3\right]=$ 右边

（5）当 $f(x)=x^4$ 时，左边 $=\dfrac{64h^5}{5}$，

右边 $=\dfrac{4h}{3}\left[2\times(-h)^4-0+2\times h^4\right]=\dfrac{16h^5}{3}\neq$ 左边 （8 分）

所以，该求积公式具有三次代数精度。 （10 分）