数值计算方法试卷二 A（闭卷）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知近似值 x_1， x_2，则$\square\left(x_1,x_2\right)=\left(\quad\right)$

A. $x_2\square\left(x_1\right)+x_1\square\left(x_2\right)$　　B. $\square\left(x_1\right)+\square\left(x_2\right)$

C. $x_1\square\left(x_1\right)+x_2\square\left(x_2\right)$　　D. $\square\left(x_1\right)\square\left(x_2\right)$

2. 已知求积公式$\int_1^2 f\left(x\right)dx\approx\frac{1}{6}f\left(1\right)+Af\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}f(2)$，则 $A=$（ ）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$，则化为 A 为对角阵的平面旋转变换角 $\theta=$（ ）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 设求方程 $f\left(x\right)=0$ 的根的切线法收敛，则它具有（ ）敛速。

A. 线性　　B. 超越性　　C. 平方　　D. 三次

5. 改进欧拉法的局部截断误差为（ ）

A. $O\left(h^5\right)$　B. $O\left(h^4\right)$　C. $O\left(h^3\right)$　D. $O\left(h^2\right)$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. π 的近似值 3.1428 是准确到__________近似值。

2. 满足 $f\left(x_a\right)=x_a$， $f\left(x_b\right)=x_b$， $f\left(x_c\right)=x_c$ 的拉格朗日插值余项为__________。

3. 用列主元法解方程组时，已知第 2 列主元为 $a_{42}^{(1)}$ 则 $\left|a_{42}^{(1)}\right|=$__________。

4．乘幂法师求实方阵___________ 的一种迭代方法。

5. 欧拉法的绝对稳定实区间为___________。

三、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

1. 用已知函数表

x	0	1	2
y	1	2	5

求抛物插值多项式，并求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的近似值。

2. 用紧凑格式解方程组 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. 已知方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 证明高斯－塞德尔法收敛；

(2)写出高斯－塞德尔法迭代公式；

(3) 取初始值 $X^{(0)}=(0,0,0)^T$，求出 $X^{(1)}$

4. 用 $n=4$ 复化辛卜公式计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$，并估计误差。

5. 用一般迭代法求方程 $[0,0.5]$ 内的根。

(1) 对方程同解变形，并检验压缩条件；

(2) 写出一般迭代法迭代公式；

(3) 选初始值 $x_0=0.5$，求出 x_1。

四、证明题（每小题 **5** 分，共 **10** 分）

1. 设 $x^*=Bx^*+b$，$\|B\|<1$

证明由公式 $x^{(m+1)}=Bx^{(m)}+b$，$m=0,1,\cdots$，得到的序列 $\{x^{(m)}\}$ 收敛于 x^*。

2. 证明计算 $\sqrt{\alpha}\ (\alpha>0)$ 的切线法迭代公式为

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{\alpha}{x_n}),\quad (n=0,1,\cdots)$$

数值计算方法试卷二 A 参考答案

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A 2. D 3. B 4. C 5. C

二、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 10^{-2} 2. $R(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_a)(x-x_b)(x-x_c)$

3. $\left|\alpha_{42}^{(1)}\right| = \max\limits_{i\ge 2}\left|\alpha_{i2}^{(1)}\right|$　　4.按规模最大的特征值与特征向量　　5. $\left[-2,0\right]$

三、　**计算题（每题 12 分，共 60 分）**

1. 作差商表：

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商
0	1		
1	2	1	
2	5	3	1

$$N_2\left(x\right)=1+\left(x-0\right)+\left(x-0\right)\left(x-1\right)=x^2+1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\approx N_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}=1.25$$

2. 解：（1）完成分解 $A=LR$

$r_{11}=4$，$r_{12}=-1$，$r_{13}=0$，

$l_{21}=\frac{1}{4}$，$l_{31}=0$，$r_{22}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$，$r_{23}=-1$，$l_{32}=\frac{4}{15}$，$r_{33}=\frac{56}{15}$

所以矩阵的三角分解 $A=LR$

$$A=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{4} & 1 & \\ 0 & -\frac{4}{15} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ & \frac{15}{4} & -1\\ & & \frac{56}{15}\end{bmatrix}$$

（2）解方程组 $LY=b$，$y_1=1$，$y_2=\frac{13}{4}$，$y_3=\frac{28}{15}$

（3）解方程组 $RX=Y$，$x_3=\frac{1}{2}$，$x_2=1$，$x_1=\frac{1}{2}$

所以 $X=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

3. （1）因为 A 严格对角占优矩阵，所以高斯－塞德尔迭代法收敛。

（2）高斯－塞德尔法迭代公式为：

$$\begin{cases}x_1^{(m+1)}=\frac{1}{2}\left(1-x_2^{(m)}\right)\\ x_2^{(m+1)}=\frac{1}{3}\left(-1-x_1^{(m+1)}-x_3^{(m)}\right)\\ x_3^{(m+1)}=\frac{1}{2}\left(1-x_2^{(m+1)}\right)\end{cases}$$

（3）取初值 $X^{(0)}=(0,0,0)^T$，计算得 $x_1^{(1)}=\dfrac{1}{2}$， $x_2^{(1)}=-\dfrac{1}{2}$， $x_3^{(1)}=\dfrac{3}{4}$

4. 用 $n=4$ 复化辛卜公式计算得：

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\approx\frac{1}{12}\left[1+2\times\frac{4}{6}+4\times\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}\right)+\frac{1}{2}\right]\approx 0.69325$$

因为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$， $f^{(4)}(x)=\dfrac{24}{(1+x)^5}$， $M_4=\max\left|f^{(4)}(x)\right|=24$

所以，$\left|R_4(f)\right|\le\dfrac{24}{2880\times 2^4}=\dfrac{1}{1920}$

5. （1）在 $[0,0.5]$ 上将方程同解变形为 $x=\dfrac{1}{4}(x^3+1)=\varphi(x)$

而 $\rho=\max\left|\varphi'(x)\right|=\max\left|\dfrac{3}{4}x^2\right|=\dfrac{3}{16}<1$

（2）一般迭代法公式为：$x_{n+1}=\dfrac{1}{4}(x_n^3+1), n=0,1,\cdots$

（3）由 $x_0=0.5$，计算得 $x_1\approx 0.28125$

四、 证明题（每小题 5 分，本题共 10 分）

1.证明 由公式 $x^{(m+1)}=Bx^{(m)}+b$ 和 $x^*=Bx^*+b$

两式相减得 $\left\|x^{(m)}-x^*\right\|\le\|B\|\left\|x^{(m-1)}-x^*\right\|\le\cdots\le\|B\|^m\left\|x^{(0)}-x^*\right\|$

所以有：$\left\|x^{(m)}-x^*\right\|\to 0, x^{(m)}\to x^*,(m\to\infty)$

2.证明 因为计算 $\sqrt{\alpha}\,(\alpha>0)$ 等同于求方程 $x^2-\alpha=0$ 的正根，

令 $f(x)=x^2-\alpha, f'(x)=2x$，代入切线法迭代公式得：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-\alpha}{2x_n}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{\alpha}{x_n})，\quad n=0,1,\cdots$$