保持函数凸性的操作

函数的组合

$h: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$f: h\circ g \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$

$f(x) = h(g(x)). \quad \mathrm{dom} f = \{x \in \mathrm{dom}\, g \mid g(x) \in \mathrm{dom} f\}$

$\boxed{\text{一维}}$ $k=n=1,\ \mathrm{dom}\, g = \mathrm{dom}\, h = \mathrm{dom} f = \mathbb{R}.$ , $h, g$ 为二阶可微

$f$ 为凸 $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0.$

$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f''(x) = \underbrace{h''(g(x))}_{\geq 0} g'(x)^2 + \underbrace{h'(g(x))}_{\geq 0.} \cdot \underbrace{g''(x)}_{g''(x) \geq 0.} \geq 0.$$

$\Rightarrow$ ① $h$ 为凸、不降、$g$ 为凸、则 $f$ 为凸

② $h$ 为凸、不增、$g$ 为凹，则 $f$ 为凸.

③ $h$ 为凹，不降、$g$ 为凹，则 $f$ 为凹.

④ $h$ 为凹，不增、$g$ 为凸，则 $f$ 为凹.

$\boxed{\text{高维}}$ $n, k \geq 1$ $\underbrace{\mathrm{dom}\, g,\ \mathrm{dom}\, h,\ \mathrm{dom} f \neq \mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R}^k \cdot \mathbb{R}^n}_{\text{扩展.}}$ , $h, g$ 均不二阶可微.

$h(x) = -\log x \quad \mathrm{dom}\, h = \mathbb{R}_{++}$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} -\log x & x > 0. \\ +\infty & x \leq 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$. ① $h$ 为凸，$\tilde{h}$ 不降，$g$ 为凸，则 $f$ 为凸.

② $h$ 为凸，$\tilde{h}$ 不增，$g$ 为凹，则 $f$ 为凸.

③ $h$ 为凹，$\tilde{h}$ 不降，$g$ 为凹，则 $f$ 为凹.

④ $h$ 为凹，$\tilde{h}$ 不增，$g$ 为凸，则 $f$ 为凹.

证明. $\forall x, y \in \mathrm{dom} f \quad 0 \leq \theta \leq 1$

$g$ 为凸，故 $\mathrm{dom}\, g$ 为凸. $\theta x + (1-\theta) y \in \mathrm{dom}\, g.$

$g(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta g(x) + (1-\theta) g(y).$

$h$ 为凸，故 $\mathrm{dom}\, h$ 为凸. $\theta g(x) + (1-\theta) g(y) \in \mathrm{dom}\, h$

$$h(\theta g(x) + (1-\theta) g(y)) \leq \theta \underbrace{h(g(x))}_{f(x)} + (1-\theta) \underbrace{h(g(y))}_{f(y).}$$

$f(\theta x+(1-\theta)y)=h(\underbrace{g(\theta x+(1-\theta)y)}_{\text{不一定在 dom}f\text{中}})$.

证明: $g(\theta x+(1-\theta)y)\in \mathrm{dom}\, h$

反证: $g(\theta x+(1-\theta)y)\notin \mathrm{dom}\, h$

$\tilde{h}$ 不降, $\tilde{h}(\underbrace{g(\theta x+(1-\theta)y)}_{+\infty})\le \tilde{h}(\theta g(x)+(1-\theta)g(y))$, 则 $\tilde{h}=+\infty$.

$\Rightarrow f(\theta x+(1-\theta)y)\le h(\theta g(x)+(1-\theta)g(y))\le \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$.

例: 若 $g$ 为凸, $\exp\{g(x)\}$ 为凸.

$h(x)=\exp(z)$. 凸, 单增.

若 $g$ 为凹, $g>0$, $\log\{g(x)\}$ 为凹.

$h(z)=\log(z)$. $\tilde{h}(z)=\begin{cases}\log(z) & z>0\\ -\infty & z\le 0.\end{cases}$

若 $g$ 为凹, $g>0$, $\frac{1}{g(x)}$ 为凸.

$h(z)=\frac{1}{z}$ $\tilde{h}(z)=\begin{cases}\frac{1}{z} & z>0\\ +\infty & z\le 0.\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}\text{若 } g \text{ 为凸}, g\ge 0, p\ge 0, g^p(x) \text{ 为凸}.\\ h(z)=z^p\end{array}\right\}$ 有问题 ORZ

函数的透视.

透视函数: $P:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ $\mathrm{dom}\,P\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_{++}$ $P(z,t)=\frac{z}{t}$.

函数的透视: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}$., $g(x,t)=tf(\frac{x}{t})$.

$\mathrm{dom}\, g=\{(x,t)\mid t>0, \frac{x}{t}\in\mathrm{dom} f\}$.

$f$ 为凸, $g$ 为凸; $f$ 为凹, $g$ 为凹.

例: 欧几里得范数的平方. $f(x)=x^Tx$, $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}^n$

$g(x,t)=t\left(\frac{x}{t}\right)^T\left(\frac{x}{t}\right)=\frac{x^Tx}{t}$ joint convex

例: 负对数 $f(x)=-\log x$, $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}_{++}$

$g(x,t)=t(-\log\frac{x}{t})=t\log\frac{t}{x}$, $\mathrm{dom}\, g=\mathbb{R}^2_{++}$.

$u,v\in\mathbb{R}^n_{++}$

$g(u,v)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{u_i\log\frac{u_i}{v_i}}_{g_i(u_i,v_i)}$ 凸. (凸是非负加权和).

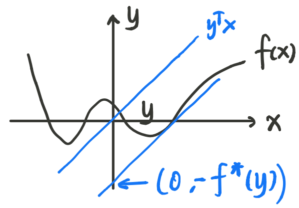
$D_{KL}(u,v) \triangleq \sum_{i=1}^{n}(u_i \log \frac{u_i}{v_i} - u_i + v_i)$. 凸函数. KL Divergence.

Bregman Divergence $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为凸, $D_B(u,v) \triangleq f(u) - f(v) - \nabla f(v)(u-v)$ (无法保持凸性).

函数的共轭 (Conjugate).

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f^*: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} (y^T x - f(x))$$




① $f(x)$ 若可微, 则 $f^*(y)$ 对应的 $x$ 必是 $f'(x) = y$ 的一点. $(y - f'(x) = 0)$.

② 函数的共轭一定是凸函数.