数值计算方法试卷四 A（闭卷）

一、选择题 （ 每小题 3 分，共 15 分）

1. x = 1.234, 有 3 位有效数字，则相对误差限 $\varepsilon_r \le$（　　）.

(A).0.5×10^{-1}；　(B). 0.5×10^{-2}；　(C). 0.5×10^{-3}；　(D). 0.1×10^{-2}.

2. 用紧凑格式对矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -3 & 12\end{bmatrix}$ 进行的三角分解，则 r_{22} =（　）

A．1　　　B．$\dfrac{1}{2}$

C．-1　　　D．-2

3. 过点(x_0,y_0), (x_1,y_1)，…，(x_5,y_5)的插值多项式P(x)是(　　)次的多项式。

(A). 6　　(B).5　　(C).4　　(D).3.

4. 设求方程 f（x）＝0 的根的单点弦法收敛，则它具有（ ）次收敛。

A．线性　　　B．平方

C．超线性　　　D．三次

5. 当 a (　　)时，线性方程组 $\begin{cases}10x_1 - x_2 - 3x_3 = 7.2\\ -x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 8.3\\ 2x_1 - 4x_2 + ax_3 = 9.2\end{cases}$ 的迭代解一定收敛.

(A) >=6　(B) =6　(C) <6　(D) >6.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 二阶均差 $f(x_0, x_1, x_2)$ = ________________________________.

2. 在区间 $[a,b]$ 上内插求积公式的系数 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 满足 $A_0 + A_1 + \cdots + A_n =$ ________.

3. 已知 n=3 时，科茨系数 $C_0^{(3)} = \dfrac{1}{8}, C_1^{(3)} = \dfrac{3}{8}, C_2^{(3)} = \dfrac{3}{8}$，那么 $C_3^{(3)} =$ ________.

4. 标准四阶龙格－库塔法的绝对稳定域的实区间为______________.

5. 高斯消去法能进行到底的充分必要条件为__________________________。

三、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

1. 写出梯形公式、辛卜生公式，并分别用来计算积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2. ⑴. 若用二分法求 f (x) = 0 在 [1,2]之间近似根，精确到 0.01，求二分的次数 n+1.

⑵. 设 $f(x) = x^3+x^2-11$, 若用牛顿法求解，请指出初值应取 1 还是 2,为什么？

3. 已知方程组 $\begin{bmatrix}8 & -3 & 2\\ 4 & 11 & -1\\ 6 & 3 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\ 33\\ 36\end{bmatrix}$

（1）　证明雅可比法收敛

（2） 写出雅可比迭代公式

（3） 取初值 $X^{(0)}=\left(0,0,0\right)^T$，求出 $X^{(1)}$

4. 已知微分方程

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取步长 h=0.1, 试用欧拉法求出满足已知微分方程和初始条件的函数 y 的前三个值。

5. 若 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$ 有二次代数精度，求A_0，A_1，A_2 。

四、证明题（本题 10 分）

设 $f(x)=(x-1)(x-2)$，证明对任意的 x 有：$f(1,2,x)=1$.

数值计算方法试卷四 A 参考答案

一. 选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1. B　2. A　3. B　4. A　5. D

二. 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $[f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)] / (x_0 - x_2)$　　2. b－a

3. 1 / 8.

4. [-2.78, 0]

5. 系数矩阵 A 的各阶顺序主子式不为零

三. 计算题（每小题 12 分，共 60 分）

1. 解 梯形公式 $\int_a^b f\left(x\right)dx \approx \dfrac{b-a}{2}\left[f\left(a\right)+f\left(b\right)\right]$

应用梯形公式得 $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \approx \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{1+0}+\dfrac{1}{1+1}]=0.75$

辛卜生公式为 $\int_a^b f\left(x\right)dx \approx \dfrac{b-a}{6}[f\left(a\right)+4f(\dfrac{a+b}{2})+f\left(b\right)]$

应用辛卜生公式得 $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx \approx \dfrac{1-0}{6}[f\left(0\right)+4f(\dfrac{1+0}{2})+f\left(1\right)]$

$$=\frac{1}{6}[1+4\times\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{1+1}]=\frac{47}{60}$$

2. ⑴.二分的次数：

n+1> = [ln (b – a) – ln ϵ]/ ln 2

= [ln 1 – ln 10^{-2}]/ ln 2

= 2 ln 10 / ln 2

= 6.6445

取 7.

⑵.若用牛顿法求解，

要求：$f(x_0)\,f''(x_0) > 0$,

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

$f''(x) = 6x + 2$,

可见：$f''(1) > 0$, $f''(2) > 0$.

而 $f(2) > 0$,

所以取 $x_0 = 2$.

3. 解 （1）因为 A 是严格对角占优矩阵，由定理知雅可比迭代法收敛。

（2）雅可比迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(m+1)} = \left(3x_2^{(m)} - 2x_3^{(m)} + 20\right)\big/8 \\ x_2^{(m+1)} = \left(-4x_1^{(m)} + x_3^{(m)} + 33\right)\big/11 \\ x_3^{(m+1)} = \left(-6x_1^{(m)} - 3x_2^{(m)} + 36\right)\big/12 \end{cases}$$

（3）初值 $X^{(0)} = \left(0,0,0\right)^T$，则 $X^{(1)} = \left(2.5,3,3\right)^T$

4. 自变量的值$x_0=0$　$x_1=0.1$　$x_2=0.2$　$x_3=0.3$

相应的y值 $y_0=1$，

$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)=1+0.1\times(0+1)=1.1$

$y_2=y_1+hf(x_1,y_1)=1.1+0.1\times(0.2+1.1)=1.22$

$y_3=1.22+0.1\times(0.2+1.22)=1.362$。

5. 分别令 $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$。得：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -A_0 \quad + A_2 = 0 \\ A_0 \quad + A_2 = 2/3 \end{cases}$$

所以$A_0 = 1/3$, $A_1 = 4/3$，$A_2 = 1/3$。

四．　证明题（共 **10** 分）

证明:$f(1, 2) = [f(1) - f(2)]/ (1 - 2)$

$= [0 - 0]/ (-1)$

$= 0$,

对任意的 x 有

$f(2, x) = [f(2) - f(x)]/ (2 - x)$

$= [0 - (x-1)(x-2)]/ (2 - x)$

$= (x-1)$,

所以 $f(1, 2, x) = [f(1, 2) - f(2, x)]/ (1 - x)$

$= [0 - (x-1)]/ (1 - x) = 1$