lec39.

敏感性分析

$$\begin{aligned}&\min\ f_0(x)\\ &\text{s.t. } f_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m\\ &\qquad h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p.\end{aligned} \quad\longrightarrow\quad \begin{aligned}&\min\ f_0(x).\\ &\text{s.t. } f_i(x)\le u_i,\ i=1,\cdots,m.\\ &\qquad h_i(x)=w_i,\ i=1,\cdots,p\end{aligned}$$

(原问题). (干扰问题). $p^*(u,w)$. $p^*(0,0)=p^*$.

性质1：若原问题为凸问题，则 $p^*(u,w)$ 为 (u,w) 的凸函数.

证明：$p^*(u,w)=\inf\limits_x \{f_0(x) \mid \underbrace{f_i(x)\le u_i,\ i=1,\cdots,m,\ h_i(x)=w_i,\ i=1,\cdots,p}_{D}\}$

$= \inf\limits_x \underline{g(x,u,w)}.$

$g(x,u,w)\triangleq f_0(x)$, $\text{dom}\, g=\text{dom} f_0 \cap D$. 凸集. $\begin{cases} f_i(x)-u_i\le 0\\ h_i(x)-w_i=0.\end{cases}$

$g(x,u,w)$ 为 (x,u,w) 的凸函数.

$f(x,y)$ 对 x 是凸的. 则 $\sup\limits_{y\in D} f(x,y)$ 对 (x,y) 是凸的.

性质2：若原问题为凸，对偶间隙为零，λ^*, ν^* 为原问题对偶问题对偶最优解.

$$p^*(u,w)\ge p^*(0,0)-(\lambda^*)^T u-(\nu^*)^T w$$

证明：设 $\tilde{x}$ 为干扰问题的最优解

$f_i(\tilde{x})\le u_i,\ i=1,\cdots,m$, $h_i(\tilde{x})=w_i$ $i=1,\cdots,p$.

$$\begin{aligned} p^*(0,0)&=g^*(\lambda^*,\nu^*).\\ &\le f_0(\tilde{x})+\sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(\tilde{x})+\sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(\tilde{x}).\\ &\le f_0(\tilde{x})+(\lambda^*)^T u+(\nu^*)^T w.\\ &= p^*(u,w)+(\lambda^*)^T u+(\nu^*)^T w.\end{aligned}$$

1). 若 λ_i^* 很大，且加紧第 i 项不等式约束 $u_i<0$，则 $p^*(u,w)$ 急剧增加

2). 若 ν_i^* 很大正值，使 $w_i<0$；或 ν_i^* 绝对值很大负值，使 $w_i>0$，则 $p^*(u,w)$ 急剧增加

3). 若 λ_i^* 很小，且 $u_i>0$，则 $p^*(u,w)$ 下降不大.

4). 若 ν_i^* 很小正值，使 $w_i>0$，或 ν_i^* 绝对值很小负值，使 $w_i<0$，则 $p^*(u,w)$ 下降不大

lec40.

性质3: (局部敏感性) 若原问题为凸, 对偶间隙为零, 且 $p^*(u,w)$ 在 $(u,w)=(0,0)$ 处可微.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}, \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial w_i}$$

$$p^*(u,w) = p^*(0,0) - (\lambda^*)^T u - (\nu^*)^T w.$$

例: Boolen LP 问题.

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t.}\ \ Ax \le b \\ \qquad x_i \in \{0,1\},\ i=1,\cdots,n \end{cases} \xrightarrow{\text{LP 松弛}} \begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t.}\ \ Ax \le b \\ \qquad 0 \le x_i \le 1\ \ i=1,\cdots,n. \end{cases}$$

Boolen LP 等价问题

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t.}\ \ Ax \le b \\ \qquad x_i(x_i-1)=0,\ i=1,\cdots,n \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(x,\lambda,\nu) = c^T x + \lambda^T(Ax-b) + \sum_{i=1}^n \nu_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n \nu_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \nu_i x_i^2 + (c + A^T\lambda - \nu)^T x - \lambda^T b.$$

$$\Rightarrow g(\lambda,\nu) = \inf_x L(x,\lambda,\nu) = \begin{cases} -\lambda^T b - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n (c_i + a_i^T\lambda - \nu_i)^2/\nu_i, & \nu \ge 0. \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{(D).}\quad \max\ -\lambda^T b - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n (c_i + a_i^T\lambda - \nu_i)^2/\nu_i$$

$$\text{s.t.}\quad \lambda \ge 0,\ \nu \ge 0.$$

$$\max_{\lambda,\nu} f(\lambda,\nu) = \max_{\lambda} \max_{\nu} f(\lambda,\nu)$$

对任意 λ $\quad \max\limits_{\nu \ge 0} -\lambda^T b \boxed{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \underbrace{(c_i + a_i^T\lambda - \nu_i)^2/\nu_i}_{\beta_i}}$

$$= \begin{cases} c_i + a_i^T\lambda, & c_i + a_i^T\lambda \le 0 \\ & c_i + a_i^T\lambda > 0. \end{cases}$$

$$= \min\{0, c_i + a_i^T\lambda\}$$

$$\Leftrightarrow \max_{\lambda}\ -\lambda^T b + \sum_{i=1}^n \min\{0, c_i + a_i^T\lambda\}$$

$$\text{s.t.}\quad \lambda \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \max_{\lambda}\ -\lambda^T b + 1^T \cdot w.$$

$$\text{s.t.}\quad \lambda \ge 0,\ w_i \le a_i^T\lambda + c_i,\ w_i \le 0.$$

Lagrange Relaxation
拉格朗日松弛

$$\Rightarrow L(x,u,v,w) = c^Tx + u^T(Ax-b) - v^Tx + w^T(x-1).$$

$$= (c + A^Tu - v + w)^Tx - b^Tu - 1^T \cdot w$$

$$\Rightarrow \max \quad -b^Tu - 1^T \cdot u.$$

$$\text{s.t.} \quad \left.\begin{aligned} & c^T + Au - v + w = 0. \\ & u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} & c^T + Au + w \geq 0. \\ & u \geq 0,\ w \geq 0. \end{aligned}$$

松弛问题的对偶问题.

例: 带等式约束的可微的优化问题.

$$\begin{aligned} & \min f_0(x). \\ & \text{s.t. } Ax - b = 0. \end{aligned} \longrightarrow \min f_0(x) + \frac{\alpha}{2}\|Ax-b\|_2^2 \Rightarrow \tilde{x}$$

$$\nabla f_0(\tilde{x}) + \frac{\alpha}{2}A^T(A\tilde{x}-b) = 0.$$

$$\min.\ f_0(x) + \alpha(A\tilde{x}-b)^T(Ax-b).$$

$$\Rightarrow L(x,v) = f_0(x) + v^T(Ax-b)$$

下课了……