数值计算方法试卷三 A（闭卷）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 以下误差公式不正确的是（　　）

A. $\Delta\left(x_1-x_2\right)\approx\Delta x_1-\Delta x_2$　　B. $\Delta\left(x_1+x_2\right)\approx\Delta x_1+\Delta x_2$

C. $\Delta\left(x_1x_2\right)\approx x_2\Delta x_1+x_1\Delta x_2$　　D. $\Delta(\frac{x_1}{x_2})\approx\Delta x_1-\Delta x_2$

2. 已知等距节点的插值型求积公式 $\int_2^5 f\left(x\right)dx\approx\sum_{k=0}^{3}A_k f\left(x_k\right)$，那么 $\sum_{k=0}^{3}A_k=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 辛卜生公式的余项为（　　）

A. $-\frac{\left(b-a\right)^3}{2\,880}f''\left(\eta\right)$　　B. $-\frac{\left(b-a\right)^3}{12}f''\left(\eta\right)$

C. $-\frac{\left(b-a\right)^5}{2\,880}f^{(4)}\left(\eta\right)$　　D. $-\frac{\left(b-a\right)^4}{2\,880}f^{(5)}\left(\eta\right)$

4. 用紧凑格式对矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -3 & 12\end{bmatrix}$ 进行的三角分解，则 $r_{22}=$（　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. –1　　D. –2

5. 用一般迭代法求方程 $f\left(x\right)=0$ 的根，将方程表示为同解方程 $x=\varphi\left(x\right)$ 的，则 $f\left(x\right)=0$ 的根是（　）

A. $y=x$ 与 $y=\varphi\left(x\right)$ 的交点　　B. $y=x$ 与与 x 轴的交点的横坐标的交点的横坐标

C. $y=x$ 与 $y=\varphi\left(x\right)$ 的交点的横坐标　　D. $y=\varphi\left(x\right)$ 与 x 轴的交点的横坐标

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 取 $x=3.142$ 作为 $x=3.141\,592\,654\cdots$ 的近似值，则 x 有________位有效数字.

2. 消元法的步骤包括________________.

3. 龙贝格积分法是将区间 $\left[a,b\right]$ ________________并进行适当组合而得出的积分近似值的求法。

4. 乘幂法可求出实方阵 A 的____________特征值及其相应的特征向量.

5. 欧拉法的绝对稳定实区间为__________。

三、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

1. 已知函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的一组数据：

x_i	0	1	2
y_i	1	0.5	0.2

求分段线性插值函数，并计算 $f(1.5)$ 的近似值.

2. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}$ 的谱半径.

3. 已知方程组

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

（1） 证明高斯－塞德尔法收敛；

（2） 写出高斯－塞德尔法迭代公式；

（3） 取初始值 $X^{(0)}=(0,0,0)^T$，求出 $X^{(1)}$。

4. $n=4$ 时，用复化梯形与复化辛卜生公式分别计算积分 $\int_0^1\dfrac{x}{x^2+4}dx$.

5. 用改进平方根法求解方程组 $\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\16\\30\end{bmatrix}$

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

证明向量 X 的范数满足不等式

（1） $\|X\|_\infty\le\|X\|_2\le\sqrt{n}\|x\|_\infty$ (2) $\dfrac{1}{n}\|X\|_1\le\|X\|_\infty\le\|X\|_1$

数值计算方法试卷三 A 参考答案

一. **单选题（每小题 3 分，共 15 分）**

1. D 2.C 3.C 4.A5. C

二. **填空题（每小题 3 分，共 15 分）**

1. 4
2. 消元和回代
3. 逐次分半

4. 按模最大

5. $\left[-2,0\right]$

三. 计算题（**每小题 12 分，共 60 分**）

1. 解 $x\in\left[0,1\right]$， $\tilde{L}\left(x\right)=\frac{x-1}{0-1}\times 1+\frac{x-0}{1-0}\times 0.5=1-0.5x$

$x\in\left[1,2\right]$，$\tilde{L}\left(x\right)=\frac{x-2}{1-2}\times 0.5+\frac{x-1}{2-1}\times 0.2=-0.3x+0.8$

所以分段线性插值函数为

$$\tilde{L}\left(x\right)=\begin{cases}1-0.5x & x\in\left[0,1\right]\\ 0.8-0.3x & x\in\left[1,2\right]\end{cases}$$ 10 分

$$\tilde{L}\left(1.5\right)=0.8-0.3\times 1.5=0.35$$ 12 分

2. 解 $$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-3\right)$$ 4 分

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3$ 8 分

所以谱半径 $\rho\left(A\right)=\max\left\{0,1,3\right\}=3$ 12 分

3. （1）因为 A 严格对角占优矩阵，所以高斯－塞德尔迭代法收敛。

（2）高斯－塞德尔法迭代公式为：

$$\begin{cases}x_1^{(m+1)}=\frac{1}{2}\left(1-x_2^{(m)}\right)\\ x_2^{(m+1)}=\frac{1}{3}\left(-1-x_1^{(m+1)}-x_3^{(m)}\right)\\ x_3^{(m+1)}=\frac{1}{2}\left(1-x_2^{(m+1)}\right)\end{cases}$$

（3）取初值 $X^{(0)}=\left(0,0,0\right)^T$，计算得 $x_1^{(1)}=\frac{1}{2}$， $x_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$， $x_3^{(1)}=\frac{3}{4}$

4. 解 $h=\frac{b-a}{4}=\frac{1}{4}=0.25$ 2 分

用复化梯形公式计算：

$$\int_0^1\frac{x}{x^2+4}dx\approx\frac{0.25}{2}\left[f\left(0\right)+2\left(f\left(0.25\right)+f\left(0.5\right)+f\left(0.75\right)\right)+f\left(1\right)\right]$$

＝0.110 892 27 7 分

用复化辛卜生公式计算得：

$$\int_0^1\frac{x}{x^2+4}dx\approx\frac{0.25}{3}\left[f\left(0\right)+4\left(f\left(0.25\right)+f\left(0.75\right)\right)+2f\left(0.5\right)+f\left(1\right)\right]$$

＝0.111 581 85 12 分

5. 解 由公式计算得

$$r_{11}=a_{11}=3, r_{12}=a_{12}=3, r_{13}=a_{13}=5;$$

$$l_{21}=\frac{a_{21}}{r_{11}}=\frac{3}{3}=1, l_{31}=\frac{a_{31}}{r_{11}}=\frac{5}{3}$$

$$r_{22}=a_{22}-l_{21}r_{21}=5-1\times 3=2, r_{23}=a_{23}-l_{21}r_{13}=9-1\times 5=4$$

$$l_{32}=\frac{r_{23}}{r_{22}}=\frac{4}{2}=2,\quad r_{33}=a_{33}-\left(l_{31}r_{13}+l_{32}r_{23}\right)=\frac{2}{3}$$ 4 分

再得 $y_1=10, y_2=6, y_3=\frac{4}{3}$ 8 分

得 $X=\left(1,-1,2\right)^T$ 12 分

四. 证明题（每小题 5 分，共 10 分）

证明（1）设 x_j 是向量 X 的分量，则 $\|X\|_\infty^2=\left[\max_i |x_i|\right]^2\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\le n\|X\|_\infty^2$，

所以由向量范数的概念可知，结论成立。 5 分

（2）由 $\|X\|_\infty=\left[\max_i |x_i|\right]\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\frac{1}{n}\|X\|_1$

$$\|X\|_\infty=\left[\max_i |x_i|\right]\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\|X\|_1$$

所以结论成立。 10 分