lec 19.

Quiz:

证明：几何平均函数 $f(x)=(x_1\cdot\cdots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$, $x\in\mathbb{R}$，在 $\mathrm{dom}\,f=\mathbb{R}^n_{++}\cap\{\|R\|_2\le 1\}$ 上为凹 ?

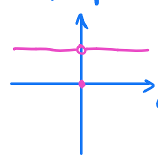
Quasi-convex function 拟凸函数

$S_\alpha=\{x\in\mathrm{dom}\,f \mid f(x)\le\alpha\}$, $\forall\alpha$ 为凸.

性质: $\mathrm{dom}\,f$ 为凸, 且对 $\forall x,y\in\mathrm{dom}\,f$, $0\le\theta\le 1$, $\max\{f(x),f(y)\}\ge f(\theta x+(1-\theta)y)$.

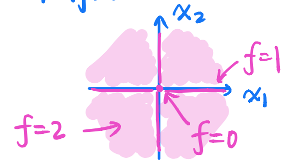
例: 向量的零范数. $x\in\mathbb{R}^n$ $f(x)=\|x\|_0$

n=1 一维情况.




非凸.
是拟凸.

n=2 二维情况

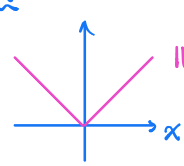



当 $\alpha=1.5$ 时
$S_\alpha$ 不是凸集 ⇒ 非拟凸

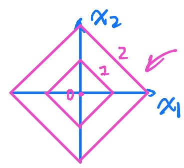
(近似) 1范数

$$\begin{aligned}\min\ & \|x\|_0\\ \text{s.t.}\ & x\in C\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\min\ & \|x\|_1\\ \text{s.t.}\ & x\in C\end{aligned}$$

n=1时




n=2时

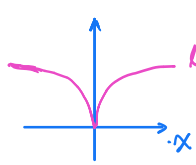



等高线

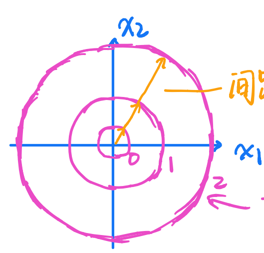
例:
$$\begin{aligned}\min\ & \log(x^Tx+1)\\ \text{s.t.}\ & x\in C\end{aligned}$$

拟凸.

n=1时.




n=2时




间距越来越大

等高线

lec 20.

可微拟凸函数一阶条件

凸 ⇔ $\mathrm{dom}\,f$ 为凸, $f(y)\ge f(x)+\nabla f^T(x)(y-x)$, $\forall x,y\in\mathrm{dom}\,f$.

拟凸 ⇔ $\mathrm{dom}\,f$ 为凸, $f(y)\le f(x)\Rightarrow\nabla f^T(x)(y-x)\le 0$, $\forall x,y\in\mathrm{dom}\,f$.

证明: (⇒) $x, y \in \mathrm{dom} f$, $0 \le \theta \le 1$.

$$\max\{f(x), f(y)\} \ge f(\theta x + (1-\theta)y).$$

设 $f(y) \le f(x)$, 则 $f(x) \ge f(\theta x + (1-\theta)y)$.

$$f(\theta x + (1-\theta)y) - f(x) \le 0.$$

$$\Longleftrightarrow f(\theta x + (1-\theta)y) - f(\theta x + (1-\theta)x) \le 0.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(\theta x + (1-\theta)y) - f(\theta x + (1-\theta)x)}{(1-\theta)(y-x)} (1-\theta)(y-x) \le 0.$$

(证明有误, 见lec21).

$$\overset{\theta \to 1_-}{\Longleftrightarrow} f'(x)(y-x) \le 0.$$

(⇐) $\forall x, y \in \mathrm{dom} f$ 均有 $f(y) \le f(x)$, 则 $\nabla f^T(x)(y-x) \le 0$.

$$\max\{f(y), f(x)\} - f(\theta x + (1-\theta)y)$$

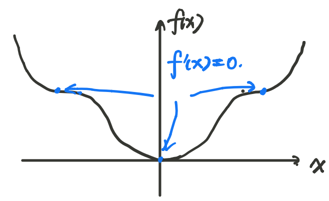
$$= f(x) - f(\theta x + (1-\theta)y)$$

$$= \frac{f(\theta x + (1-\theta)x) - f(\theta x + (1-\theta)y)}{(1-\theta)(x-y)} (1-\theta)(x-y)$$

$$\overset{\theta \to 1_-}{=\!=} f'(x)(x-y) \ge 0$$

凸 ⟺ 若 $\nabla f^T(x) = 0$, 则 $\forall y$, $f(y) \ge f(x)$ (最优值点)

拟凸 ⟺ 若 $\nabla f^T(x) = 0$, 则 $\forall y$, $f(y) \le f(x)$ ⇒ $0 \le 0$ (没有意义)



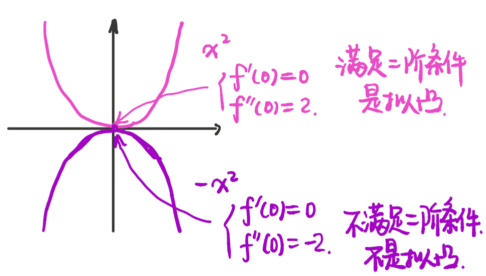

凸 ×, 拟凸 ✓.

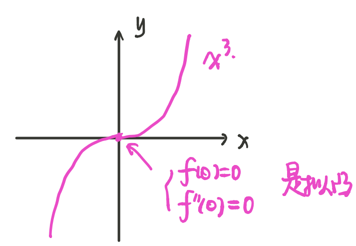
二阶条件(拟凸).

凸: $\mathrm{dom} f$ 为凸, 且 $\nabla^2 f(x) \succeq 0$, $\forall x \in \mathrm{dom} f$.

拟凸: $\mathrm{dom} f$ 为拟凸, 且 $\underbrace{y^T \nabla f(x)}_{\text{常量}} \ge 0 \Rightarrow \underbrace{y^T \nabla^2 f(x) y}_{\text{常量}} \ge 0$ (关键点: H阵是半正定的).

$n=1$ 时 $y f'(x) \ge 0 \Rightarrow y^2 f''(x) \ge 0$
$$\begin{cases} y = 0 & 0 \ge 0 \\ f'(x) = 0, y \ne 0, & \Rightarrow f''(x) \ge 0. \end{cases}$$



log concave： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 log concave，若 $f(x)>0, \forall x \in \mathrm{dom}\, f$ 且 $\log f$ 为凹函数.

log convex： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 log convex，若 $f(x)>0, \forall x \in \mathrm{dom}\, f$ 且 $\log f$ 为凸函数.

若 $f$ 为 log convex，则 $f$ 为 convex

$f = e^{\log f}$ 为凸， 令 $h(x) = e^x$，$g(x) = \log f$，用复合函数的凸性判断.

若 $f$ 为 concave，$f>0$，则 $\log f$ 为 log concave

$f = \log f$ 为凹.