函数的组合. $f=h\circ g$

h为凸, $\tilde{h}$不降, g凸, 则f为凸.

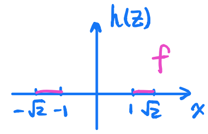
凸	增	凹	凸.
凹	降	凹	凹.
凹	增	凸	凹.

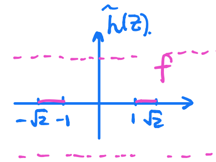
例: $\tilde{h}$的单调性.

$g(x)=x^2$ $\mathrm{dom}\, g=\mathbb{R}$ 凸.

$h(z)=0$ $\mathrm{dom}\, h=[1,2]$ 凸. 不增、不降

$$f=h(g(x))=\begin{cases}0 & x\in[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]\\ 不存在. & \end{cases}$$

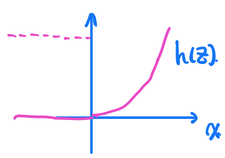




例: 若g为凸, $g\geq 0$, $p\geq 1$, 则 $g^p(x)$ 为凸.

$h(z)=z^p$ $\mathrm{dom}\, g=\mathbb{R}_+$ ×

$$h(z)=\begin{cases}z^p & z\in\mathbb{R}_+\\ 0 & z\in\mathbb{R}_{--}\end{cases}$$



函数的共轭.

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $f^*:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

$$f^*(y)=\sup_{x\in\mathrm{dom} f}\left(y^Tx-f(x)\right)$$

性质: ①若$f(x)$可微, 则$f^*(y)$对应的x必有$f'(x)=y$.

② $f^*(y)$ 关于y为凸.

例: $f(x)=ax+b$, $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}$.

$$f^*(y)=\sup_{x\in\mathrm{dom} f}\left(yx-(ax+b)\right)=\sup_{x\in\mathrm{dom} f}\left((\underbrace{y-a}_{=0})x-b\right)=\begin{cases}-b & y=a\\ +\infty & y\neq a.\end{cases}$$

例: $f(x)=-\log x$ $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}_{++}$

$$f^*(y)=\sup_{x>0}\left(yx+\log x\right)=\begin{cases}-1-\log(-y), & y<0.\\ +\infty & y\geq 0.\end{cases}$$

$$f'(x)=y\Rightarrow y+\frac{1}{x}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{y}$$

例: $f(x)=\frac{1}{2}x^TQx$, $Q\in S_{++}^n$, $\mathrm{dom}f=\mathbb{R}^n$

$$f^*(y)=\sup\left(y^Tx-\frac{1}{2}x^TQx\right)=y^TQ^{-1}y-\frac{1}{2}y^T\underbrace{(Q^{-1})^TQ}_{=I}Q^{-1}y=\frac{1}{2}y^TQ^{-1}y.$$

$$\frac{\partial\left(y^Tx-\frac{1}{2}x^TQx\right)}{\partial x}=y-Qx \Rightarrow x=Q^{-1}y.$$

$(a+bj)^*=(a-bj)$ $\quad (a-bj)^*=(a+bj)$

$f^{**}\overset{?}{=}f$ (反例: 若f不是凸函数, 则不成立).

若f非凸, $f^{**}\neq f$

若f凸, f闭函数, $f^{**}=f$

凸集与凸函数的关系.

α — sublevel set.

若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 定义其 α-sublevel set 为 $C_\alpha=\{x\in\mathrm{dom}f\mid f(x)\leq\alpha\}$.

凸函数的所有的 α-sublevel set 都是凸集

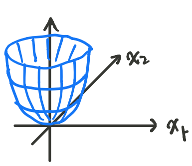
证明: $\forall x,y\in C_\alpha$, $f(x)\leq\alpha$, $f(y)\leq\alpha$., $x\in\mathrm{dom}f$, $y\in\mathrm{dom}f$

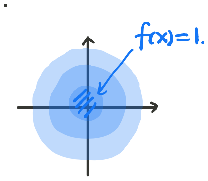
$$f(\theta x+(1-\theta)y)\leq\theta f(x)+(1-\theta)f(y)$$
$$\leq\theta\alpha+(1-\theta)\alpha=\alpha.$$

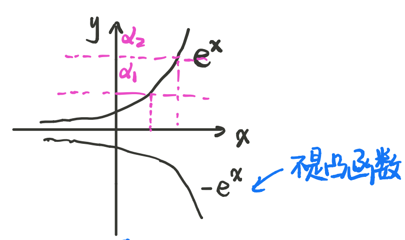
$\theta x+(1-\theta)y\in C_\alpha$.

若函数的 α-sublevel-set 都是凸集, 则f不一定是凸函数.

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad x\in\mathbb{R}^2$ $\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

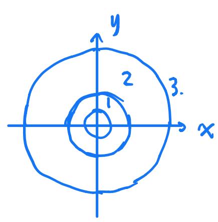


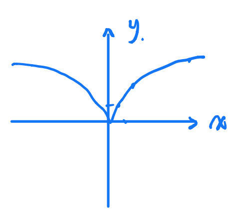




一维情况

例:





Quasi Convex function 拟凸函数.

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Quasi Convex $S_\alpha=\{x\in\mathrm{dom}f \mid f(x)\le\alpha\}$ 凸, $\forall\alpha$.

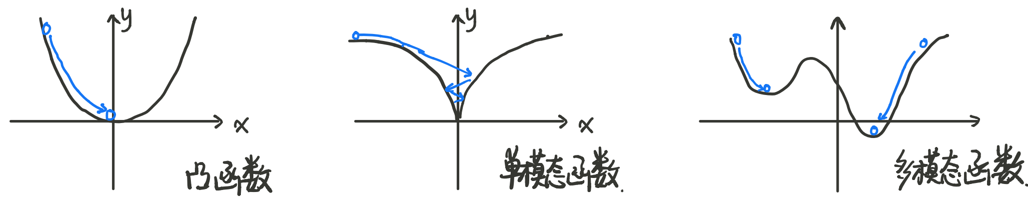
Quasi Concave $S'_\alpha=\{x\in\mathrm{dom}f \mid f(x)\ge\alpha\}$ 凸, $\forall\alpha$.

Quasi Linear $S''_\alpha=\{x\in\mathrm{dom}f \mid f(x)=\alpha\}$ 凸, $\forall\alpha$.

$y=e^x$ 同时满足3个性质.

凸 $\Rightarrow$ 拟凸. ,拟凸 $\not\Rightarrow$ 凸.

unimodal function. 单模态函数

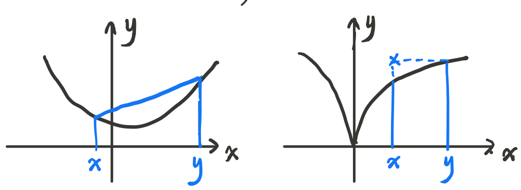


$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为凸,则$\mathrm{dom}f$为凸, $\forall x,y\in\mathrm{dom}f$, $0\le\theta\le1$.

$$\theta f(x)+(1-\theta)f(y)\ge f(\theta x+(1-\theta)y)$$

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为拟凸,则$\mathrm{dom}f$为凸, $\forall x,y\in\mathrm{dom}f$, $0\le\theta\le1$.

$$\max\{f(x),f(y)\}\ge f(\theta x+(1-\theta)y)$$



例: 向量的长度 $x\in\mathbb{R}^n$: X中最后一个非零元素的位置.

$$f(x)=\begin{cases}\max\{i,\ x_i\ne0\} & x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$\{f(x)\le\alpha\}\Rightarrow$ 对所有 $i=\lfloor\alpha\rfloor+1,\cdots,n$, $x_i=0$.

例: 线性分数函数 $f(x)=\dfrac{a^Tx+b}{c^Tx+d}$ $\mathrm{dom}f=\{x\mid c^Tx+d>0\}$ (不一定凸,但是拟凸)

$$S_\alpha=\{x\mid c^Tx+d>0,\ \frac{a^Tx+b}{c^Tx+d}\le\alpha\}.$$

$$=\{x\mid c^Tx+d>0,\ a^Tx+b\le\alpha(c^Tx+d)\}$$ 线性不等式 $\Rightarrow$ 多面体.