lec 23.

优化问题

$$\min\ f_0(x)$$
$$\text{s.t.}\ f_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m.$$
$$h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p.$$

凸优化问题.

$$\min\ f_0(x) \quad (\text{凸})$$
$$\text{s.t.}\ f_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m \quad (\text{凸})$$
$$a_i^T x=b_i,\ i=1,\cdots,p. \quad (\text{仿射})$$

仿射函数.

$f_i(x)\le 0$, α-sublevel set 凸集

广义: { 目标函数: 凸. 约束: 凸集

例: $\min f_0(x)=x_1^2+x_2^2$
$\text{s.t.}\ f_1(x)=\dfrac{x_1}{1+x_2^2}\le 0$
$h_1(x)=(x_1+x_2)^2=0.$

狭义 × 广义 ✓ 等价 $\Longleftrightarrow$

$\min f_0(x)=x_1^2+x_2^2$
$\text{s.t.}\ f_1(x)=x_1\le 0$
$f_2(x)=x_1+x_2=0.$

例: $\min\ f_0(Fz+x_0)$
$\text{s.t.}\ f_i(Fz+x_0)\le 0,\ i=1,\cdots,m.$

例: $\min\ f_0(x).$
$\text{s.t.}\ s_i\le 0,\ i=1,\cdots,m.$
$f(x)-s_i=0,\ i=1,\cdots,m$
$a_i^T x=b_i,\ i=1,\cdots,p.$

松弛变量. slack variable.

Quasi convex optimization.

若 f_0 为凹, 则称为 non-convex optimization, 不称为 concave optimization.

极大化凹函数, 称为凸问题 (convex optimization)

重要性质: 局部最优 = 全局最优 (凸函数)

局部最优: $\exists R>0,\ f_0(x)=\inf\{f_0(z)\mid z\text{可行},\ x\text{可行},\ \|x-z\|_2\le R\}.$

证明: 设 x 不是全局最优, $\exists y$ 可行, $f_0(y)<f_0(x)$

因为 x 局部最优, $\|y-x\|_2>R.$

$z=(1-\theta)x+\theta y$, $\theta=\dfrac{R}{2\|y-x\|_2}\in[0,1].$

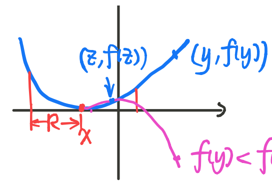
↑

z可行，且 $f_0(z) \le (1-\theta)f_0(x)+\theta f_0(y)$

$\|z-x\|_2 = \theta\|x-y\|_2 = \frac{R}{2} < R.$

$\therefore f_0(x) \le f_0(z).$ $f_0(y) < f_0(x) < f_0(z).$

$(1-\theta)f_0(x)+\theta f_0(y) < f(z).$



要满足只能是粉红线，此时不是凸函数了.

可微目标函数情况下的最优解

f_0 可微，则 f_0 凸 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{dom} f_0$ 为凸

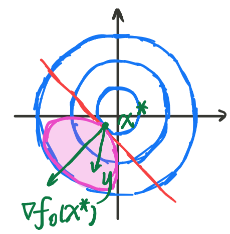
$f_0(y) \ge f_0(x) + \nabla f_0^T(x)(y-x)$, $\forall x, y \in \mathrm{dom} f$

设凸问题可行域

$$X_f = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} f_i(x) \le 0,\ i=1,\cdots,m \\ h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p \end{matrix} \right\} \ (\cap\, \mathrm{dom} f_0)$$

$x^* \in X_f$ 最优 $\Leftrightarrow$ $\nabla f_0^T(x^*)(y-x^*) \ge 0$, $\forall y \in X_f$

$\mathrm{dom} f = X_f$



$\nabla f_0^T(x^*)(y-x) \ge 0$

两个向量夹角≤90°.

lec24.

例：约束仅为等式约束.

min $f_0(x)$ $\quad \mathrm{dom} f_0 = \mathbb{R}^n$

s.t. $Ax=b$

若 $\exists x>0$, $Ax=b$, x 最优 $\Leftrightarrow$ $\forall y$, $Ay=b$.

$\nabla f_0^T(x)(y-x) \ge 0.$

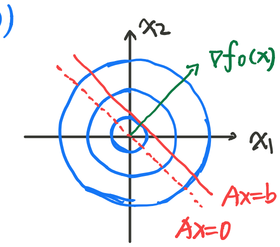
$Ax=b$, $Ay=b$ $\Rightarrow$ $y=x+v$, $v \in N(A)$ A的化零空间 $(Av=\theta)$

代入：

$\nabla f_0^T(x)v \ge 0$, $\forall v \in N(A)$

① $v=\theta$, A可逆, $x=A^{-1}b$.

② $\nabla f_0^T(x)$ 与 $N(A)$ 正交



例：约束仅为非负约束

min $f_0(x)$

s.t. $x \ge 0.$

若 $\exists x \ge 0$, x 最优 $\Leftrightarrow$ $\forall y>0$, $\nabla f_0^T(x)(y-x) \ge 0$.

$\nabla f_0^T(x)\cdot y - \nabla f_0^T(x)\cdot x \ge 0.$

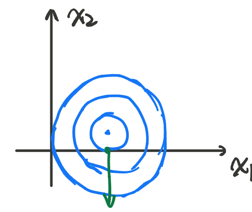
①若∃i，使得 $(\nabla f_0^T(x))_i<0$，则，$\nabla f_0^T(x)y$ 必可以取到无穷小（因为对∀y均成立，总能找到一个y使得 $\nabla f_0^T(x)y$ 取到无穷小，因此必有 $\nabla f_0^T(x)\geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} ②\ \text{对}\forall y\text{均有}\ \nabla f_0^T(x)(y-x)\geq 0 \xRightarrow[y=0]{} \nabla f_0^T(x)x\leq 0. \\ ③\ \nabla f_0^T(x)\geq 0,\ x\geq 0,\ \nabla f_0^T(x)\cdot x\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f_0^T(x)=0.$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ \nabla f_0(x)\geq 0 \\ (\nabla f_0(x)_i)\, x_i=0 \end{cases}$$

complementary 互补条件

$\nabla f_0^T(x)$与x每一个分量至少有一个为0.



$x_1>0,\ x_2=0.$

$(\nabla f_0(x))_1=0 \quad (\nabla f_0(x))_2<0.$

典型的凸问题.

线性规划：

$$\begin{aligned} \min\ & c^Tx+d && c\in\mathbb{R}^n,\ d\in\mathbb{R}. \\ \text{s.t.}\ & Gx\leq h && G\in\mathbb{R}^{m\times n},\ h\in\mathbb{R}^m \\ & Ax=b && A\in\mathbb{R}^{k\times n},\ b\in\mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

目标与约束均为线性（linear program).