例: $f(x)=|x|^p \quad x\in\mathbb{R}$.

$$f''(x)=\begin{cases} p(p-1)x^{p-2} & x\geqslant 0 \\ p(p-1)(-x)^{p-2} & x<0. \end{cases}$$

$$p\geqslant 1 \text{ 时. } \left.\begin{cases} p\geqslant 2\text{时. 二阶条件} \\ 1\leq p<2\text{时. (二阶不可微,用定义).} \end{cases}\right\} \text{凸}$$

例: 极大值函数.

$$f(x)=\max\{x_1,\cdots,x_n\} \quad x\in\mathbb{R}^n$$

例: log-sum-up.

$$f(x)=\log(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}). \quad x\in\mathbb{R}^n$$

$$H=\frac{1}{(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n})^2}\left\{\begin{bmatrix} e^{x_1}(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x_n}(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{x_1} & \cdots & e^{x_n} \end{bmatrix}\right\}$$

$$z=[e^{x_1},\cdots,e^{x_n}]^T.$$

$$H=\underbrace{\boxed{\frac{1}{(1^T z)^2}}}_{>0}\underbrace{\left((1^T\cdot z)\operatorname{diag}\{z\}-zz^T\right)}_{K\in\mathbb{R}^{n\times n}.}$$

$$\forall v\in\mathbb{R}^n \quad v^TKv\geqslant 0$$

$$v^TKv=(1^T\cdot z)\cdot v^T\operatorname{diag}\{z\}v-v^Tzz^Tv$$

$$=\underbrace{\left(\sum_i z_i\right)}_{b^Tb}\underbrace{\left(\sum_i v_i^2 z_i\right)}_{a^Ta.}-\underbrace{\left(\sum_i v_i z_i\right)^2}_{a^Tb}$$

$$a=v_i\sqrt{z_i} \quad b_i=\sqrt{z_i}$$

$$v^TKv=(b^Tb)(a^Ta)-(a^Tb)^2\geqslant 0. \qquad \text{Cachy-Schwartz不等式}$$

几何平均.

$$f(x)=(x_1\cdot\cdots\cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \qquad x\in\mathbb{R}^n_{++} \qquad \text{凹函数.}$$

例: 行列式的对数.

$$f(x)=\log\det(x) \qquad \operatorname{dom}f=S^n_{++}$$

当$n=1$时, 是凹函数.

当$n>1$时，$\forall Z\in S_{++}^n$，$\forall t\in\mathbb{R}$，$\forall V\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

$Z+tV\in S_{++}^n=\mathrm{dom} f$. 故 $V\in S^n$

$$g(t)=f(Z+tV)=\log\det(Z+tV)$$
$$=\log\det\{Z^{\frac12}(I+tZ^{-\frac12}VZ^{-\frac12})Z^{\frac12}\}$$
$$=\log\det\{Z\}+\log\det\{I+\boxed{tZ^{-\frac12}VZ^{-\frac12}}\}$$
$$=\log\det\{Z\}+\sum_{i=1}^{n}\log(1+t\lambda_i)$$

λ_i为该矩阵特征值.

λ_i：$tZ^{-\frac12}VZ^{\frac12}$的特征值.（第i个）.

$Q\Lambda Q^T\qquad QQ^T=I$

$$\det(I+tZ^{-\frac12}VZ^{-\frac12})=\det(QQ^T+Q\Lambda Q^T)$$
$$=\det(Q)\det(I+\Lambda)\det(Q^T)$$
$$=\det(\underbrace{QQ^T}_{I_n})\det(\underbrace{I+\Lambda}_{1+\lambda_i})$$

$$g'(t)=\sum_i\frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i}$$
$$g''(t)=\sum_i\frac{-\lambda_i^2}{(1+t\lambda_i)^2}\le 0.\quad \text{凹函数.}$$

保持函数凸性.

非负加权和：$f_1,\cdots,f_m$为凸，则$f=\sum_{i=1}^{m}w_if_i$为凸，若$w_i\ge0$，$\forall i$

①定义域是凸集. ②不等式

若$f(x,y)$，对任意$y\in A$，$f(x,y)$均为凸

(x,y) jointly convex

设$w(y)\ge0$，$\forall y\in A$，$g(x)=\int_{y\in A}w(y)f(x,y)\,dy$ 为凸.

仿射映射：$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$A\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$b\in\mathbb{R}^n$，$g(x)=f(Ax+b)$ $\mathrm{dom}\,g=\{x\mid Ax+b\in\mathrm{dom}f\}$

证：令$x,y\in\mathrm{dom}g$，$0\le\theta\le1$.

$$g(\theta x+(1-\theta)y)=f(\theta Ax+(1-\theta)Ay+b)$$
$$=f(\theta\underline{(Ax+b)}+(1-\theta)\underline{(Ay+b)})$$
$$\le\theta f(Ax+b)+(1-\theta)f(Ay+b)$$
$$=\theta g(x)+(1-\theta)g(y)$$

$f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$i=1,\cdots,m$为凸，$A\in\mathbb{R}^n$，$b\in\mathbb{R}$. $g(x)=A^T[f_1(x)\ \cdots\ f_m(x)]^T+b$.

（A如果非负，是凸函数）

两个凸函数的极大值函数:

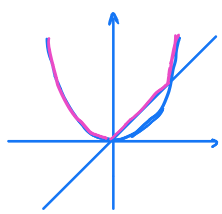
f_1, f_2 是凸函数，定义: $f(x)=\max\{f_1(x), f_2(x)\}$，$\operatorname{dom} f=\operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$

$x, y \in \operatorname{dom} f$，$0 \le \theta \le 1$

$$
\begin{aligned}
f(\theta x+(1-\theta)y) &= \max\{f_1(\theta x+(1-\theta)y), f_2(\theta x+(1-\theta)y)\} \\
&\le \max\{\theta f_1(x)+(1-\theta)f_1(y), \theta f_2(x)+(1-\theta)f_2(y)\} \\
&\le \max\{\theta f_1(x), \theta f_2(x)\}+\max\{(1-\theta)f_1(x), (1-\theta)f(y)\} \\
&= \theta f(x)+(1-\theta)f(y)
\end{aligned}
$$

$$
\max\{a+b, c+d\} \le \max\{a, c\}+\max\{b, d\}
$$

例: $f(x)=\max\{x^2, x\}$



例: 向量中 r 个最大元素的和. $X \in \mathbb{R}^n$

$X[i] \rightarrow$ 第 i 大的元素.

$X[1] \geqslant X[2] \geqslant \cdots \geqslant X[r] \geqslant \cdots \geqslant X[n]$.

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r} X[i]$$

$$f(x)=\max\{x_{i_1}+\cdots+x_{i_r} \mid 1 \le i_1 \le \cdots \le i_r \le n\}$$

无限个凸函数极大值.

$f(x, y)$ 对于 x 为凸，$\forall y \in A$

$$g=\sup_{y \in A} f(x, y).$$

例: 实对称阵的最大特征值.

$f(x)=\lambda_{max}(x)$，$\operatorname{dom} f=S^m$.

$$
\begin{aligned}
Xy=\lambda y &\Leftrightarrow y^T X y=y^T \lambda y \\
&\Leftrightarrow y^T X y=\lambda \|y\|_2^2 \\
&\Leftrightarrow \lambda=\frac{y^T X y}{\|y\|_2^2}
\end{aligned}
$$

$\lambda=y^T X y$，$\|y\|_2=1$.

$\lambda_{max}(X)=\sup\{\underline{\underline{y^T X y}} \mid \|y\|_2=1\}$.

对 X 是凸函数.