lec41.

Boolean LP. $\Rightarrow$ LP松弛. 互为对偶.

$\Updownarrow$ 松弛.($p^* \neq d^*$).

等价问题 $\Longrightarrow$ 对偶问题(拉格朗日松弛)

例: $\begin{cases} \min & f_0(x) \\ s.t. & Ax-b=0. \end{cases}$ (凸,可微). 罚函数.

$\Leftrightarrow \min f_0(x)+\frac{\alpha}{2}\|Ax-b\|_2^2$. $\tilde{x}$

$\nabla f_0(\tilde{x})+\alpha A^T(A\tilde{x}-b)=0.$

$\tilde{x}=\arg\min\limits_x f_0(x)+\alpha(A\tilde{x}-b)^T(A\tilde{x}-b).$

$\Rightarrow L(x,v)=f_0(x)+v^T(Ax-b)$

$\Rightarrow g(v)=\inf\limits_x\{f_0(x)+v^T(Ax-b)\}$ $v=\alpha(A\tilde{x}-b)$.

$g(\alpha(A\tilde{x}-b))=\inf\limits_x\{f_0(x)+\alpha(A\tilde{x}-b)^T(Ax-b)\}$.

$=f_0(\tilde{x})+\alpha\|A\tilde{x}-b\|_2^2$

$f_0(x^*)=p^*=d^*\geqslant g(\alpha(A\tilde{x}-b))=f_0(\tilde{x})+\alpha\|A\tilde{x}-b\|_2^2\geqslant f_0(\tilde{x})$.

$\begin{cases} \alpha=0 \text{时}, & \arg\min f_0(x). \\ \alpha\to+\infty\text{时}, & f(x^*)=f(\tilde{x}). \end{cases}$

例: 带线性不等式约束的可微凸优化问题

$\min \ f_0(x)$.

s.t. $Ax\geqslant b$. $x\in\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$.

Log-barrier. $\min f_0(x)-\sum\limits_{i=1}^m u\log(a_i^Tx-b_i)$. 离我远一点!!!

设 $\tilde{x}$ 为罚问题最优解

$\nabla f_0(\tilde{x})-\sum\limits_{i=1}^m u\frac{a_i}{a_i^T\tilde{x}-b_i}=0.$

$\tilde{x}=\arg\max\limits_x f_0(x)-\sum\limits_{i=1}^m u\cdot\frac{a_i^Tx-b_i}{a_i^T\tilde{x}-b_i}$

$$\Rightarrow L(x,\lambda)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-a_i^Tx).$$

内点法

$$\Rightarrow g(\lambda)=\inf_x\left\{f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-a_i^Tx)\right\}$$

$$\lambda_i=\frac{u}{a_i^T\tilde{x}-b_i}$$

原问题 → 惩罚 …… 惩罚因子

原问题 → 对偶函数 …… lagrange multiplier.

-- 对应的关系

lec42

Chapter 6. Algorithms.

讨论几种典型的算法.

无约束优化/有约束优化.

所有优化算法都是迭代算法.

$$x^{k+1}=x^k+\alpha^k d^k$$

d^k: 方向(与x维度相同).

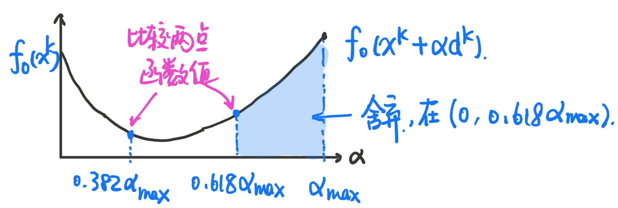
α^k: 步长(标量).

$$\alpha^k=\arg\min_{\alpha\geq 0} f_0(x^k+\alpha d^k)$$

(一维的问题). (切西瓜例子).

line search.

(1) 迭代算法, 黄金分割法.



(2). Amijo Rule.

若 $f_0(x^k+\alpha d^k)>f_0(x^k)+\gamma\alpha\nabla f_0^T(x^k)d^k$, 则 $\alpha\Leftarrow\alpha\cdot\beta$, 否则停止.

γ: $(0, 0.5)$; β: $(0,1)$.