lec 27.

线性规划：目标线性、等式约束线性、不等式约束线性.

二次规划：目标二次(凸)、等式约束线性、不等式约束线性.

QCQP：目标二次，等式约束二次、不等式约束二次.

例：投资组合问题. portfolio optimization.

B budget.

	Beginning.	Endding.
#1	x_1	p_1x_1.
⋮	⋮	⋮
#n	x_n	p_nx_n.

优化问题可描述为：

$$\max \ p_1x_1+\cdots+p_nx_n$$
$$\text{s.t.} \ x_1+\cdots+x_n \leq B \ (=B)$$
$$x_1,\cdots,x_n \geq 0.$$

考虑收益与风险，优化目标：收益大且风险小.

$$\bar{p}^T = [\underset{\text{房子}}{1.05} \ \ \underset{\text{股市}}{1.05} \ \ \underset{\text{银行}}{1}] \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

优化问题描述.

$$\min \ x^T\Sigma x \quad \text{(极小化风险)}$$
$$\text{s.t.} \ \bar{p}^T x \geq r_{min} \quad \text{(收益)}$$
$$1^T x = B.$$
$$x \geq 0.$$

Semi-definite Programming 半正定规划.

$$\min \ tr(CX).$$
$$\text{s.t} \ tr(A_iX)=b_i, \ i=1,\cdots,p.$$
$$X \succeq 0 \ \text{半正定矩阵.} \ X\in S_+^n, \ C\in R^{n\times n}, \ A_i\in R^{n\times n}, \ b_i\in R.$$

例：特例：对角矩阵. $diag\{x\}$.

$$\min \ (diag\{x\})^T diag\{x\}$$
$$\text{s.t.} \ (diag\{A_i\})^T diag\{x\} = b_i, \ i=1,\cdots,p.$$

当成关于此向量的线性规划问题.

$$diag\{x\} \geq 0.$$

$$\min \; c^T x$$
$$\text{s.t.} \; x_1A_1+\cdots+x_nA_n \preceq B \quad \text{(半正定约束)}$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\; B、A_1、\cdots、A_n\in S^k,\; c\in\mathbb{R}^n.$$

例: $A(x)=A+x_1A_1+\cdots+x_nA_n,\; A_i\in\mathbb{R}^{p\times q},\; i=0,\cdots,n,\; x\in\mathbb{R}^n$

谱范数: $\|A(x)\|_2 = A(x)$ 最大奇异值.

$$\min \; \|A(x)\|_2$$

$$\|A(x)\|_2\le\sqrt{s},\; s>0 \iff A^T(x)A(x)-sI\preceq 0$$

即 $\min \; \sqrt{s}$ (非凸)

$\text{s.t.} \; A^T(x)A(x)\preceq sI.$ (凸约束)

lec 28.

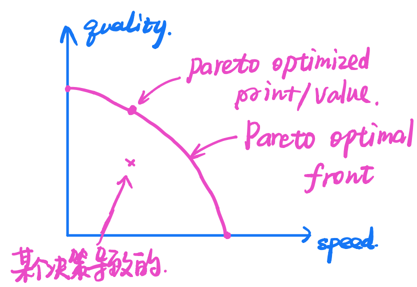
$$\begin{array}{l}\min \; t\\ \text{s.t.} \; A^T(x)A(x)-t^2I\preceq 0\\ \quad\; t\ge 0\end{array} \iff \begin{array}{l}\min \; t\\ \text{s.t.} \begin{bmatrix} tI & A(x)\\ A^T(x) & tI\end{bmatrix}\succeq 0\\ \quad\; t\ge 0.\end{array} \iff \begin{array}{l}\min \; t\\ \text{s.t.} \; Y=\begin{bmatrix} tI & A(x)\\ A^T(x) & tI\end{bmatrix} \text{(线性)}\\ \quad\; Y\succeq 0 \;\text{(半正定)}\\ \quad\; t\ge 0. \;\text{(线性)}\end{array}$$

多目标优化问题

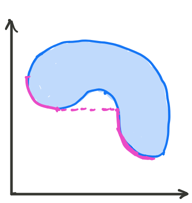
$$\min \; f_0(x)$$
$$\text{s.t.} \; f_i(x)\le 0,\; i=1,\cdots,m.$$
$$h_i(x)=0,\; i=1,\cdots,p.$$
$$f_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^q,\; f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\; h_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$$

例: min Risk.
min −Income.
s.t Resources.

例: min −speed
min −quality.
s.t. resources.



pareto optimal front 上任意点,若找到另一解使之在某个指标上更优,必在另外某指标上变得更差.



pareto optimal front.

若$\{f_0(x)\}$在R^k中为凸, $f(x)$为凸, $h_i(x)$为仿射, 则必可通过下述方法求得 Pareto front 上一点.

$$\min \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_{0i}(x) \quad \lambda_i \geq 0.$$
$$\text{s.t.} \quad f_i(x) \leq 0, \ i=1,\cdots,m.$$
$$h_i(x) = 0, \ i=1,\cdots,p.$$

通过遍历$\{\lambda_i\}$可找出所有点.

例: Ridge Regression.

$b = Ax + e$, $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $e \in R^m$, $x \in R^n$

$$\left.\begin{array}{l}\min \ \|b-Ax\|_2^2 \\ \min \ \|x\|^2\end{array}\right\} \ \min \ \|b-Ax\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2 \quad \text{岭回归.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\min \ \|b-Ax\|_2^2$$
$$\text{s.t.} \ \|x\|_2^2 \leq \varepsilon.$$