lec37.

一般的优化问题(不一定凸).

若拉格朗日函数有鞍点 $\Leftrightarrow$ 此点P/D最优、对偶间隙为零

$L(x,\lambda,\nu)$.　　　　原问题/对偶问题.

一般的可微优化问题(不一定凸)., 对偶间隙为零.

$\min\ f_0(x)$

s.t. $f_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,m$

$h_i(x)=0,\ i=1,\cdots,p.$

KKT条件:
① $f_i(x^*)\le 0,\ i=1,\cdots,m$
② $h_i(x^*)=0,\ i=1,\cdots,p$ } 原问题可行性.
③ $\lambda^*\geqslant 0$ 对偶问题可行性
④ $\lambda_i^* f_i(x^*)=0,\ i=1,\cdots,m$ 互补松弛条件.
⑤ $\nabla f_0(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla f_i(x^*)+\sum_{i=1}^{p}\nu_i^* h_i(x^*)=0.$ 稳定性条件.

可微的凸优化问题, 对偶间隙为零.

例: $\min\ \frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r.\quad P\in S_+^n$

s.t. $Ax=b.$

① $Ax^*=b.$

⑤. $\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r+(Ax-b)^T\nu^*\}\Big|_{x=x^*}=0.$

$\Leftrightarrow\ Px^*+q+A^T\nu^*=0.$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^* \\ \nu^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix}$$

例: Water-fitting问题

$\min\ -\sum_{i=1}^{n}\log(\alpha_i+x_i)$　　$x\in\mathbb{R}^n$

s.t. $x\geqslant 0$　　$\alpha\in\mathbb{R}^n$

$1^Tx=1$　　$\alpha\geqslant 0.$

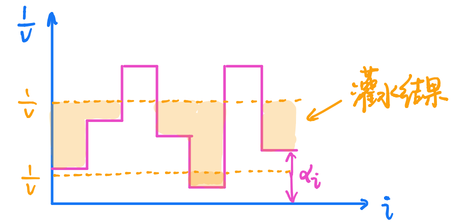
① $x^*\geqslant 0$
② $1^Tx^*=1.$
③ $\lambda^*\geqslant 0$
④ $\lambda_i^*x_i^*=0,\ i=1,\cdots,n.$
⑤. $-\frac{1}{\alpha_i+x_i^*}-\lambda_i^*+\nu^*=0.\ i=1,\cdots,n.$

⑤ $\Rightarrow \lambda_i^*=\nu^*-\frac{1}{\alpha_i+x_i^*}\ \xRightarrow{④}\ x^*(\nu^*-\frac{1}{\alpha_i+x_i^*})=0,\ i=1,\cdots,n.$

$\xRightarrow{③}\ \nu^*-\frac{1}{\alpha_i+x_i^*}\geqslant 0.\quad i=1,\cdots,n.$

若 $v^* \geq \frac{1}{\alpha_i} \Rightarrow x_i^* = 0.$

$v^* < \frac{1}{\alpha_i} \Rightarrow x_i^* > 0, \quad x_i^* = \frac{1}{v^*} - \alpha_i$



例: $\min f_0(x)$

s.t. $x \geq 0.$

$\Leftrightarrow x \geq 0$

$\nabla f_0(x) \geq 0$

$x_i (\nabla f_0(x))_i = 0, i=1,\cdots,n$ (Complementary).

lec38.

$\Leftrightarrow$ ① $x^* \geq 0$

③ $\lambda^* \geq 0$

④. $\lambda_i^* (-x_i^*) = 0, i=1,\cdots,n.$

⑤. $\nabla f_0(x^*) + (-\lambda^*) = 0.$

$⑤ \Rightarrow \lambda^* = \nabla f_0(x^*) \xRightarrow{③} \nabla f_0(x^*) \geq 0$

$\xRightarrow{④} x_i^* (\nabla f_0(x^*))_i = 0, i=1,\cdots,n.$

例: $\min f_0(Ax+b).$

$\Rightarrow L(x) = f_0(Ax+b).$

$\Rightarrow g = \inf_x f_0(Ax+b).$

$\Rightarrow$ (D) $\max g$

$\min f_0(y)$

s.t. $Ax+b=y.$

$\inf(f_0(y) - v^T y) = -\sup(v^T y - f_0(y))$

$= -f_0^*(y)$

$\Rightarrow L(x,y,v) = f_0(y) + v^T(Ax+b-y).$

$= f_0(y) - v^T y + v^T A x + v^T b.$

$\Rightarrow g(v) = \inf_{x,y} L(x,y,v) = \begin{cases} -f_0^*(v) + v^T b & v^T A = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$

$\Rightarrow$ (D) $\max \ v^T b - f_0^*(v)$

s.t. $v^T A = 0.$

例: $\min \|Ax-b\| \Leftrightarrow \min \|y\|$

s.t $Ax-b=y.$

$\Rightarrow L(x,y,v) = \|y\| + v^T(Ax-b-y). = \|y\| - v^T y + v^T A x - v^T b.$

$\Rightarrow g(v) = \inf_{x,y} L(x,y,v) = \begin{cases} -v^T b - \|v\|_* & v^T A = 0 \\ -\infty \end{cases}$

对偶范数.

$\Rightarrow$ (D) $\begin{cases} \max & -v^T b - \|v\|_* \\ \text{s.t.} & v^T A = 0. \end{cases} \underset{v=-w}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} \max & v^T b - \|v\|_* \\ \text{s.t.} & v^T A = 0. \end{array}$

$\min \frac{1}{2}\|y\|^2$ (最优解一样,最优值不同).

s.t. $Ax-b=y$.

$\Rightarrow L(x,y,v)=\frac{1}{2}\|y\|^2+v^T(Ax-b-y)$

$=\frac{1}{2}\|y\|^2-v^Ty+v^TAx-v^Tb.$

$\Rightarrow g(v)=\begin{cases}-v^Tb-\frac{1}{2}\|v\|_*^2 & v^TA=0.\\ -\infty & v^TA\neq 0.\end{cases}$

$\Rightarrow (D).\begin{cases}\max & -v^Tb-\frac{1}{2}\|v\|_*^2\\ \text{s.t.} & v^TA=0.\end{cases}$

例:带框约束的线性规划问题.

$\min\ c^Tx$

s.t. $Ax=b$

$l\le x\le u.$ 按每个元素相比 $l_i\le x_i\le u_i,\ \forall i$

$\Rightarrow L(x,\lambda_1,\lambda_2,v)=c^Tx+v^T(Ax-b)+\lambda_1^T(l-x)+\lambda_2^T(x-u).$

$=(c+A^Tv-\lambda_1+\lambda_2)^Tx-v^Tb+\lambda_1^Tl-\lambda_2^Tu.$

$\Rightarrow g(v)=\begin{cases}-v^Tb+\lambda_1^Tl-\lambda_2^Tu & c+A^Tv-\lambda_1+\lambda_2=0\\ -\infty & c+A^Tv-\lambda_1+\lambda_2\neq 0.\end{cases}$

$\Rightarrow (D)\ \max\ -b^Tv-\lambda_1^Tl+\lambda_2^Tu$

s.t. $c+A^Tv-\lambda_1+\lambda_2=0$

$\lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0$

等价原问题: $\min\ f_0(x)$ $\quad f_0(x)=\begin{cases}c^Tx & l\le x\le u\\ \infty & \text{otherwise.}\end{cases}$

s.t. $Ax=b.$

$\Rightarrow L(x,v)=f_0(x)+v^T(Ax-b)$

$\Rightarrow g(v)=\inf\limits_x f_0(x)+v^TAx-v^Tb.$

$=\inf\limits_{l\le x\le u} c^Tx+v^TAx-v^Tb.$

$=\inf\limits_{l\le x\le u}(A^Tv+c)^Tx-v^Tb.$

$=-v^Tb+l^T(A^Tv+c)^+-u^T(A^Tv+c)^-$

$\Rightarrow (D)\quad \max\ -v^Tb+l^T(A^Tv+c)^+-u^T(A^Tv+c)^-$