



Кафедра общей физики

О. Я. Извеков, В. Н. Щербаков, Ю. Н. Извекова

Изгиб балки

Учебно-методическое пособие
по курсу *Введение в механику сплошных сред*

МОСКВА
МФТИ
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра общей физики

О. Я. Извеков, В. Н. Щербаков, Ю. Н. Извекова

Изгиб балки

Учебно-методическое пособие
по курсу *Введение в механику сплошных сред*

МОСКВА
МФТИ
2023

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 22.251я73
ИЗЗ

Рецензент

Кандидат технических наук А. А. Быков

**Извеков, Олег Ярославович,
Щербаков, Владимир Николаевич,
Извекова, Юлия Николаевна**

ИЗЗ Изгиб балки : учебно-методическое пособие по курсу *Введение в механику сплошных сред* / О. Я. Извеков, В. Н. Щербаков, Ю. Н. Извекова ; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). – Москва : МФТИ, 2023. – 20 с.

В учебно-методическом пособии предлагается познакомиться с изгибом упругой балки. Излагаются основы теории плоского изгиба упругой прямолинейной балки, дается описание лабораторной установки, формулируется задание для студентов и вопросы для самоконтроля.

Предназначено для студентов 2 курса физтех-школы аэрокосмических технологий (ФАКТ), обучающихся по направлению подготовки 03.03.01 «Прикладные математика и физика», профиль подготовки «Физика и механика космических и природных систем».

**УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 22.251я73**

© Извеков О. Я., Щербаков В. Н., Извекова Ю. Н., 2023
© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Основные понятия	4
2.	Правило знаков	5
3.	Дифференциальные соотношения	5
4.	Эпюры	6
5.	Нормальные и касательные напряжения	8
6.	Чистый изгиб	9
7.	Главные моменты, центробежные моменты	12
8.	Оценка касательных напряжений в длинных балках	12
9.	Энергия изогнутой балки. Теорема Кастильяно	13
10.	Дифференциальное уравнение упругой линии балки	15
11.	Описание лабораторного стенда	17
12.	Задание	18
13.	Контрольные вопросы	19
	Список литературы	19

1. Основные понятия

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*. Будем считать, что балка сделана из однородного материала и имеет постоянное поперечное сечение, обладающее осью симметрии. Ось симметрии каждого сечения лежит в *плоскости симметрии балки* (рис. 1). Пусть внешние силы, приложенные к телу, также лежат в плоскости симметрии балки. Внешние силы могут быть *сосредоточенными* и *непрерывно распределенными*, также к балке может быть приложен внешний момент сил.

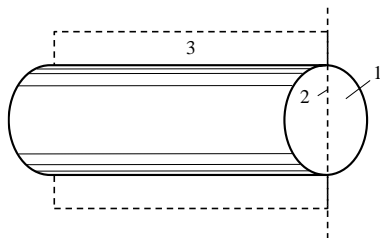


Рис. 1. Балка: 1 – сечение, 2 – ось симметрии сечения, 3 – плоскость симметрии балки

Вся балка, а также любая ее часть находятся в равновесии. Мысленно разрежем балку и рассмотрим ее части, как самостоятельные тела. Согласно условиям равновесия, в сечении балки должна возникать сила реакции, компенсирующая внешнюю силу, и момент, компенсирующий момент внешней силы и внешние моменты. Проекция силы реакции на плоскость сечения называется *внутренней поперечной силой* Q , проекция вдоль балки называется *внутренней продольной силой* N , а момент – *внутренним изгибающим моментом* M . Далее, будем рассматривать случай, когда $N = 0$. Очевидно, что внутренние поперечные силы, действующие в смежных сечениях, одинаковы по величине и противоположны по направлению, внутренние изгибающие моменты также направлены противоположно (см. рис. 2).

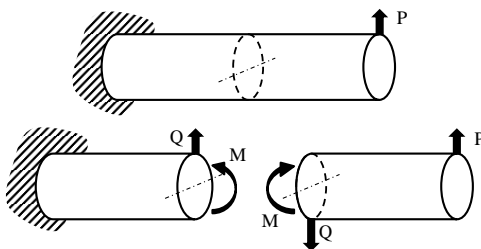


Рис. 2. Сечение балки: P – внешняя сила, Q – внутренняя поперечная сила, M – внутренний изгибающий момент

2. Правило знаков

Рассмотрим фрагмент балки, находящийся в состоянии равновесия под действием внутренних изгибающих моментов и внутренних поперечных сил. Считается, что внутренние изгибающие моменты, действующие в сечениях, ограничивающих фрагмент балки, положительны, если они изгибают балку выпуклостью вниз. Такой выбор знака согласован со знаком кривизны оси балки. Внутренние поперечные силы считаются положительными, если они вращают фрагмент балки по часовой стрелке (см. рис. 3).

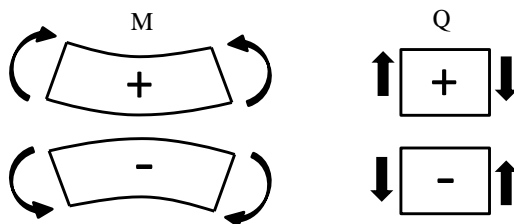


Рис. 3. Правило знаков

3. Дифференциальные соотношения

Выведем дифференциальные соотношения между внутренним изгибающим моментом, внутренней поперечной силой и линейной плотностью внешней распределенной силы. Плотность внешней распределенной силы, приложенной к балке, как показано на рис. 4, будем считать положительной. Ось z направим слева направо.

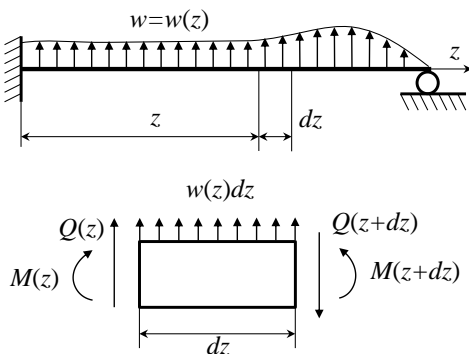


Рис. 4

Рассмотрим фрагмент балки длиной dz (см. рис. 4). Из условия равенства нулю равнодействующих сил получаем

$$Q(z) + wdz - Q(z + dz) = 0, \quad (1)$$

откуда следует

$$\frac{dQ}{dz} = w. \quad (2)$$

Запишем баланс моментов относительно левого сечения:

$$Q(z + dz)dz - M(z + dz) + M(z) - wdz\left(\frac{1}{2}dz\right) = 0. \quad (3)$$

Последним членом в этом выражении можно пренебречь. Окончательно получаем уравнение

$$Q = \frac{dM}{dz}. \quad (4)$$

4. Эпюры

Эпюрой называется график зависимости внутреннего изгибающего момента или внутренней поперечной силы от положения сечения вдоль балки. Эпюры строятся справа налево, то есть рассматривается равновесие правой части балки. Приведем без подробного разбора эпюры типичных случаев изгиба статически определимой балки. Подробный разбор этих и других случаев можно найти, например, в [1].

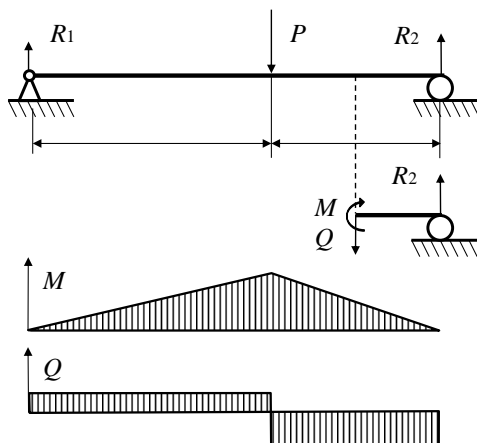


Рис. 5

На рис. 5 представлены эпюры внутреннего изгибающего момента и внутренней поперечной силы в случае, когда к статически определимой балке приложена внешняя сосредоточенная сила. Обратим внимание, что в точке приложения внешней сосредоточенной силы эпюра внутреннего изгибающего момента имеет излом, а эпюра внутренней поперечной силы – разрыв, что соответствует формуле (4). Так как обе опоры шарнирные, внутренний изгибающий момент в концах балки равен нулю.

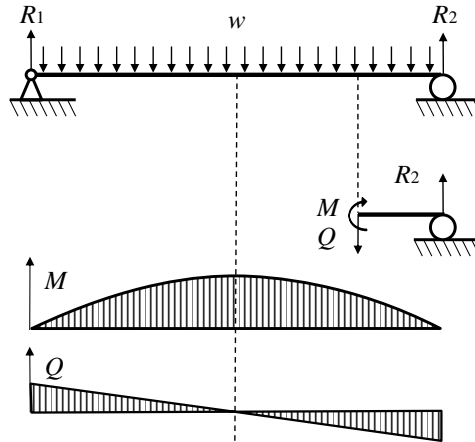


Рис. 6

На рис. 6 представлены эпюры для случая распределенной внешней силы с постоянной плотностью. Поперечная сила вдоль балки меняется линейно в соответствии с формулой (2), тогда согласно формуле (4) зависимость момента от координаты представляет собой параболу. Также заметим, что в точке $Q = 0$ эпюра момента имеет максимум.

На рис. 7 показан случай с двумя внешними сосредоточенными силами, приложенными на одинаковых расстояниях от шарнирных опор. Заметим, что между точками приложения этих сил внутренний момент постоянен, а внутренняя поперечная сила равна нулю. Такое состояние изогнутой балки называется *чистым изгибом*.

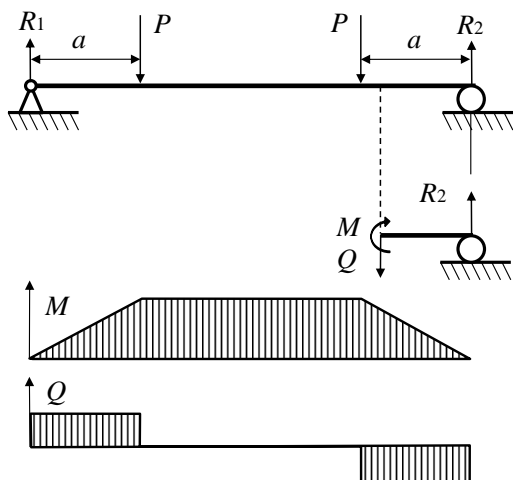


Рис. 7

5. Нормальные и касательные напряжения

До настоящего момента мы не обсуждали вопрос о природе внутреннего изгибающего момента и внутренней поперечной силы. В каждой точке сечения изогнутой балки действуют контактные силы реакции и определен вектор напряжения. Его проекция на нормаль к сечению называется *нормальным напряжением* σ , а проекция на плоскость сечения называется *касательным напряжением* τ .

При внимательном взгляде на геометрию изогнутой балки замечаем, что слои (волокна) балки по одну сторону от ее оси (где именно располагается эта ось, выясним позднее) удлиняются, а по другую сторону укорачиваются. Слой, длина которого не изменяется, называется *нейтральным слоем*. Очевидно, что суммарное действие касательных напряжений в сечении дает внутреннюю поперечную силу

$$Q = \int_S \tau dS. \quad (5)$$

Нормальные напряжения при движении перпендикулярно нейтральному слою меняют знак, что означает, что момент нормальных со-

ставляющих контактных сил отличен от нуля и равен, очевидно, внутреннему изгибающему моменту.

$$M_x = \int_S \sigma y dS. \quad (6)$$

Здесь плечо y силы σdS отсчитывается от произвольной оси в плоскости сечения, параллельной нейтральному слою.

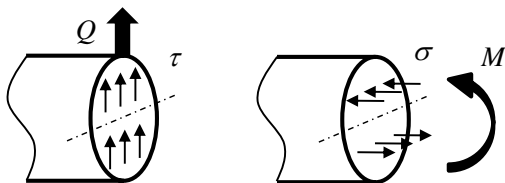


Рис. 8. Качественная картина распределения нормальных и касательных сил в сечении балки

6. Чистый изгиб

Рассмотрим более подробно состояние *чистого изгиба*.

Заметим, что при чистом изгибе все изначально плоские сечения, перпендикулярные нейтральному слою, остаются плоскими и перпендикулярными нейтральному слою и после деформации. Действительно, рассмотрим фрагмент балки. Из соображений симметрии очевидно, что среднее сечение фрагмента остается плоским. Разрезая мысленно по этому сечению, мы получаем два симметричны фрагмента, средние сечения которых, также остаются плоскими. Такое мысленное разрезание можно проводить бесконечно, что убеждает нас в том, что все сечения при чистом изгибе остаются плоскими. Таким образом, при чистом изгибе сечения не деформируются, а только поворачиваются. В произвольном случае это утверждение выполняется приближенно и называется *гипотезой плоских сечений*.

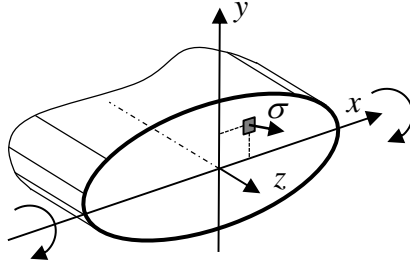


Рис. 9

Гипотеза плоских сечений позволяет вычислить деформации в изогнутой балке. Введем систему координат. Направим ось x вдоль *нейтральной линии сечения* (геометрическое место точек сечения, где $\sigma = 0$, то есть линия пересечения нейтрального слоя и сечения), а ось y вдоль оси симметрии сечения (см. рис. 9). Будем также называть нейтральную линию сечения *осью поворота сечения*.

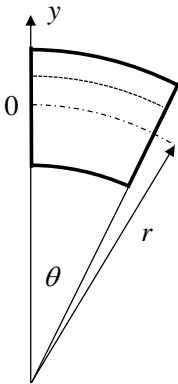


Рис. 10

Из соображений симметрии нейтральный слой в случае чистого изгиба представляет собой дугу окружности. Обозначим радиус кривизны нейтрального слоя r . Рассмотрим элемент балки длиной dz (см. рис. 10). Очевидно, $dz = r d\theta$. Вычислим относительное удлинение волокон при координате y .

$$\varepsilon(y) = \frac{(r + y)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{y}{r}. \quad (7)$$

Тогда нормальные напряжения в сечении будут равны

$$\sigma(x, y) = E\varepsilon = \frac{E}{r} y. \quad (8)$$

Как видно, нормальные напряжения не зависят от координаты x .

Вычислим внутренний изгибающий момент (см. рис. 9). Подставим в формулу (6) значение напряжений из (8).

$$M_x = \int_S \sigma(x, y) y dS = \frac{E}{r} \int_S y^2 dS = \frac{E}{r} I_x. \quad (9)$$

Здесь введено обозначение $I_x = \int_S y^2 dS$ – момент инерции сечения при повороте относительно оси x , $dS = dxdy$ – элемент площади сечения.

Выражая радиус кривизны через изгибающий момент, получим

$$\sigma(x, y) = \frac{M}{I_x} y. \quad (10)$$

Таким образом, нормальные напряжения при чистом изгибе распределены линейно вдоль оси y .

Момент инерции сечения характеризует жесткость балки на изгиб и зависит от геометрии сечения.

Пример 1. Дана балка прямоугольного сечения со сторонами b и h (пусть для определенности $h > b$, b – размер вдоль оси x). Вычислить моменты инерции сечения относительно осей симметрии.

$$I_x = \int_S y^2 dS = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{1}{12} bh^3. \quad (П1.1)$$

Очевидно, что

$$I_y = \frac{1}{12} hb^3. \quad (П1.2)$$

Из (П1.1) и (П1.2) получим отношение моментов инерции сечения $I_y/I_x = (b/h)^3$. Согласно (9), в таком же соотношении будут и кривизны оси балки при одном и том же внутреннем изгибающем моменте, но различных ориентациях сечения. Таким образом, выбирая геометрию сечения можно добиться высокой жесткости балки и одновременно экономии материала. На рис. 11 представлены некоторые типы используемых сечений с осью симметрии.

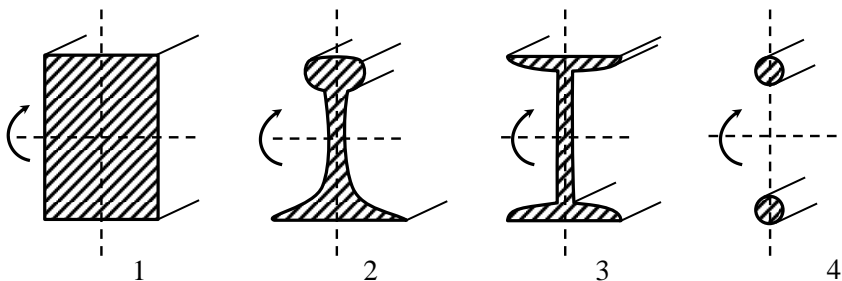


Рис. 11. Сечения: 1 – прямоугольное, 2 – рельс, 3 – двутавр, 4 – плоская ферма из стержней круглого сечения

7. Главные моменты, центробежные моменты

Так как при чистом изгибе равна нулю внутренняя сила N вдоль балки, то

$$N = \int_S \sigma(x, y) dS = 0 \Rightarrow \int_S y dS = 0. \quad (11)$$

Величина $\int_S y dS$ называется *статическим моментом площади сечения* относительно нейтральной оси. Равенство нулю статического момента означает, что нейтральная ось проходит через *центр тяжести сечения*.

Рассчитаем изгибающий момент в сечении балки относительно оси симметрии сечения y .

$$M_y = \int_S \sigma(x, y) x dS = \frac{E}{r} \int_S xy dS. \quad (12)$$

Величина $I_{xy} = \int_S xy dS$ называется *центробежным моментом инерции сечения*. Когда ось поворота сечения совпадает с его осью симметрии, как в рассматриваемом случае, эта величина равна нулю (это условие достаточное, но не необходимое). Оси поворота, проходящие через центр тяжести сечения, в случае $I_{xy} = 0$ называются *главными*. В произвольном случае $I_{xy} \neq 0$, следовательно, поворот сечения вокруг одной из осей вызывает изгибающий момент вокруг перпендикулярной оси. Если балка при изгибе выходит из первоначальной плоскости, изгиб называется *косым* (подробнее о косом изгибе см. [1]).

8. Оценка касательных напряжений в длинных балках

Пусть дана консольно закрепленная балка длиной l , характерный размер сечения b . Пусть к свободному концу балки перпендикулярно ее оси приложена внешняя сила P . Оценка нормальных напряжений в удаленном сечении дает $\sigma \approx Pl/b^3$, а касательных – $\tau \approx P/b^2$. Таким образом, для длинной балки справедливо $\tau/\sigma \approx b/l \ll 1$, и соотношения, справедливые для чистого изгиба, приближенно справедливы и в произвольном случае.

9. Энергия изогнутой балки. Теорема Кастильяно

Далее, примем предположение, что материал балки однороден, а сечение постоянно ($E = const$, $I_x = const$). Пусть балка находится в состоянии чистого изгиба. Энергия элемента балки длиной dz и площадью dS , прилегающего к сечению с координатой z , равна

$$dW = \frac{\sigma^2(x, y)}{2E} dz dS. \quad (13)$$

Тогда полная энергия балки

$$W = \iint \frac{\sigma^2(x, y)}{2E} dz dS = \frac{1}{2E} \iint \sigma^2(x, y) dz dS. \quad (14)$$

С учетом (10), получим

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2E} \iint \frac{M^2(z)}{I_x^2} y^2 dz dS = \frac{1}{2E} \int \frac{M^2(z)}{I_x^2} dz \int y^2 dS = \\ &= \frac{1}{2EI_x} \int M^2(z) dz. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно теореме Кастильяно, перемещение точки приложения сосредоточенной силы вдоль линии ее действия определяется частной производной полной энергии упругой системы по этой силе. Тогда из (15) следует

$$\delta y = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{EI_x} \int M \frac{\partial M}{\partial P}(z) dz. \quad (16)$$

В случае, когда в нужном направлении внешняя сила не приложена, перемещение все равно можно вычислить. С этой целью в систему добавляется *фиктивная сила*, которая, после дифференцирования по ней, обнуляется (см. [2]).

Пример 2. Найти реакцию в шарнирной опоре для балки длиной l , показанной на рис. 12.

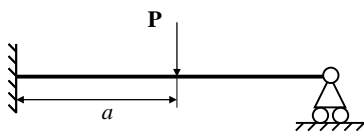


Рис. 12

Решение. Система статически неопределима и требует одного дополнительного уравнения к системе уравнений статики (подробнее см. [1, 2]). Заменяем связи соответствующими реакциями (рис. 13) и составим систему уравнений.

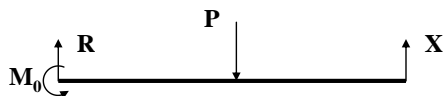


Рис. 13

Уравнения статики:

$$M_0 = -Pa + Xl, \quad (\text{П2.1})$$

$$R_0 = -P + X. \quad (\text{П2.2})$$

Дополнительное уравнение дает теорема Кастильяно:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0. \quad (\text{П2.3})$$

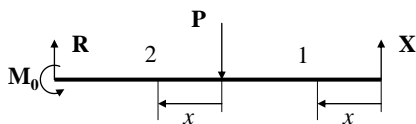


Рис. 14

Найдем внутренний изгибающий момент $M(z)$ в произвольном сечении балки. Удобно разбить балку на две части и координату отсчитывать от правого конца, чтобы исключить влияние реакций на левом конце (рис. 14).

Для области 1 ($0 < z < l - a$):

$$M(z) = Xz. \quad (\text{П2.4})$$

Для области 2 ($0 < z < a$):

$$M(z) = X(l - a + z) - Pz. \quad (\text{П2.5})$$

Подставим выражения (П2.4) и (П2.5) в (16), получим

$$\begin{aligned} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial P} dz &= \int_0^{l-a} M \frac{\partial M}{\partial P} dz + \int_0^a M \frac{\partial M}{\partial P} dz = \\ &= \int_0^{l-a} Xz^2 dz + \int_0^a (X(l-a+z) - Pz)(l-a+z) dz = 0. \end{aligned}$$

Беря интеграл и упрощая выражение, получим искомую реакцию

$$X = \frac{P}{2} \left(\frac{3(l/a) - 1}{(l/a)^3} \right). \quad (\text{П2.6})$$

При $a = l/2$, получаем $X = \frac{5}{16} P$.

10. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Кривизна $1/r$ плоской линии $y = y(z)$ определяется выражением

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

При малых деформациях ($y' \ll 1$) формула (17) приближенно дает

$$\frac{1}{r} \approx y'',$$

подставляя это выражение в (9), получим приближенное *дифференциальное уравнение упругой линии балки*.

$$M_x(z) = y'' EI_x. \quad (18)$$

Пример 3. Рассмотрим консольно закрепленную балку длиной l со свободным концом. Пусть к балке на расстоянии a от закрепленного конца приложена внешняя сосредоточенная сила P . Изначально балка была строго горизонтальна. Требуется найти отклонение свободного конца балки по вертикали от первоначального положения (см. рис. 15).

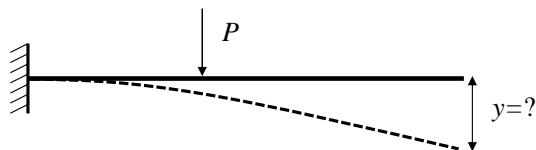


Рис. 15

Для решения задачи удобно балку разбить на два участка, как показано на рис. 16. На том же рисунке показана эпюра внутреннего изгибающего момента. Используя дифференциальное уравнение упругой линии балки (18), можно найти общий вид решения на каждом участке. Константы интегрирования определяем из граничных условий и условий сшивки на границе участков (на границе должны совпадать значения y , а также y').

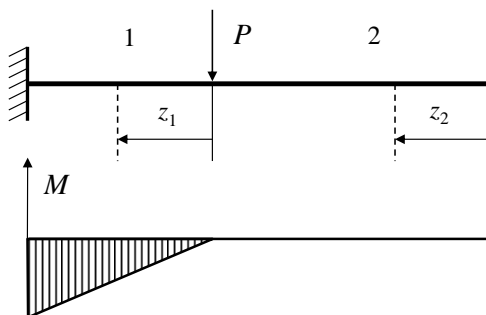


Рис. 16

На участке 1 внутренний изгибающий момент равен

$$M_x(z_1) = -Pz_1. \quad (\text{П3.1})$$

Тогда, с учетом (18), получим общее выражение для упругой линии балки на этом участке:

$$EI_x y' = -P \frac{z_1^2}{2} + C, \quad (\text{П3.2})$$

$$EI_x y = -P \frac{z_1^3}{6} + Cz_1 + C_1. \quad (\text{П3.3})$$

Из граничных условий: $y(z_1 = a) = 0$, $y'(z_1 = a) = 0$ получим $C = Pa^2/2$, $C_1 = -Pa^3/3$. Тогда окончательно

$$EI_x y = -P \frac{z_1^3}{6} + P \frac{a^2 z_1}{2} - P \frac{a^3}{3}. \quad (\text{П3.4})$$

На участке 2 внутренний изгибающий момент равен нулю. Тогда

$$y = Az_2 + A_1. \quad (\text{П3.5})$$

Из сшивки (П3.4) и (П3.5) на границе участков при $z_2 = l - a$, с другой стороны при $z_1 = 0$, уточняем коэффициенты. Искомое перемещение будет равно

$$y(z_2 = 0) = A_1 = -\frac{Pa^2}{EI_x} \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6} \right). \quad (\text{П3.6})$$

При $a = l$, $y = -\frac{Pl^3}{3EI_x}$; при $a = l/2$, $y = -\frac{5Pl^3}{48EI_x}$.

11. Описание лабораторного стенда

Схема лабораторного стенда и внешний вид установки показаны на рис. 17 и 18. Один конец балки прямоугольного сечения свободен, другой жестко закреплён. Вдоль балки на направляющих смонтированы два датчика силы (встроенных в нагружающие винты) и два датчика перемещения. Все датчики можно переносить вдоль балки и закреплять в нужном месте. Датчики силы откалиброваны в ньютонах, а датчики перемещения – в десятых долях миллиметра.

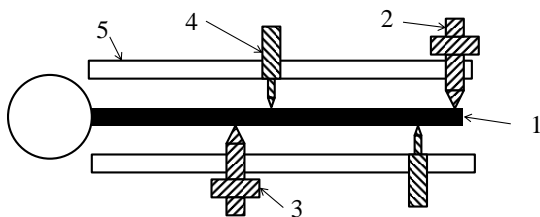


Рис. 17. Схема установки: 1 – балка, 2 – винт, 3 – датчик силы, 4 – датчик перемещения, 5 – направляющая

Для расчета момента сечения требуется измерить геометрические характеристики сечения (ширина, высота). Материал балки – сталь с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см².

12. Задание

Задание формулирует преподаватель. Примерный вариант задания изложен ниже.

1. Статически определимая балка. Установить винт нагрузки в определенном месте балки. Второй винт снять с направляющей. Разместить датчики перемещения так, чтобы первый располагался напротив винта, а второй напротив свободного конца балки. Провести серию измерений перемещений при постепенном увеличении нагрузки (регулируется винтом). По наклону линейного участка графика зависимости перемещения от величины сосредоточенной силы определить коэффициент пропорциональности. Рассчитать тот же коэффициент теоретически с помощью теоремы Кастильяно, или решая дифференциальное уравнение упругой линии балки.

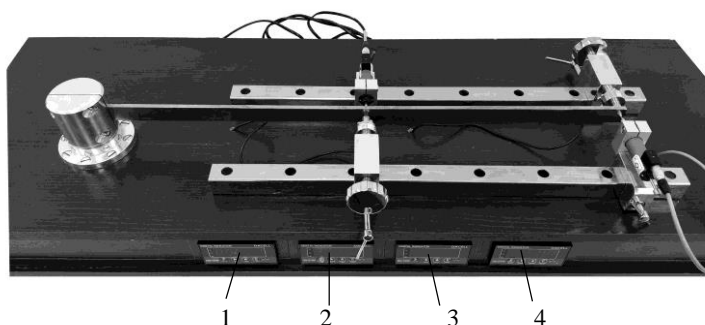


Рис. 18. Общий вид установки: 1, 3 – индикаторы датчиков силы, 2, 4 – индикаторы датчиков перемещения

2. Статически неопределимая балка. Второй винт закрепить на направляющей напротив свободного конца балки. Этот винт будет играть роль шарнирно-неподвижной опоры. В процессе эксперимента мы будем только считывать показания силы. Провести серию измерений перемещения точки приложения сосредоточенной силы и реакции в шарнирно-неподвижной опоре. По наклону графика сила–реакция определить коэффициент пропорциональности и сравнить с теоретическим. Рассчитать зависимость перемещения точки приложения силы от величины силы. Сравнить с экспериментальным значением.

13. Контрольные вопросы

- 1) Решить пример 2 с помощью дифференциального уравнения упругой линии балки.
- 2) Решить пример 3 с помощью теоремы Кастильяно, вводя фиктивную силу.
- 3) Подробно разобрать построение эпюр из п. 4.

Список Литературы

1. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. Москва : Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. 592 с.
2. *Извеков О.Я., Щербаков В.Н.* Рамы : учебно-методическое пособие по курсу *Введение в механику сплошных сред*. Москва : МФТИ, 2016. 16 с.

Учебное издание

**Извеков Олег Ярославович
Щербаков Владимир Николаевич
Извекова Юлия Николаевна**

Изгиб балки

Учебно-методическое пособие
по курсу *Введение в механику сплошных сред*

Редактор *Н. Е. Кобзева*. Корректор *И. А. Волкова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 07.07.2023. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 1,25.
Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 20 экз. Заказ № 101.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

