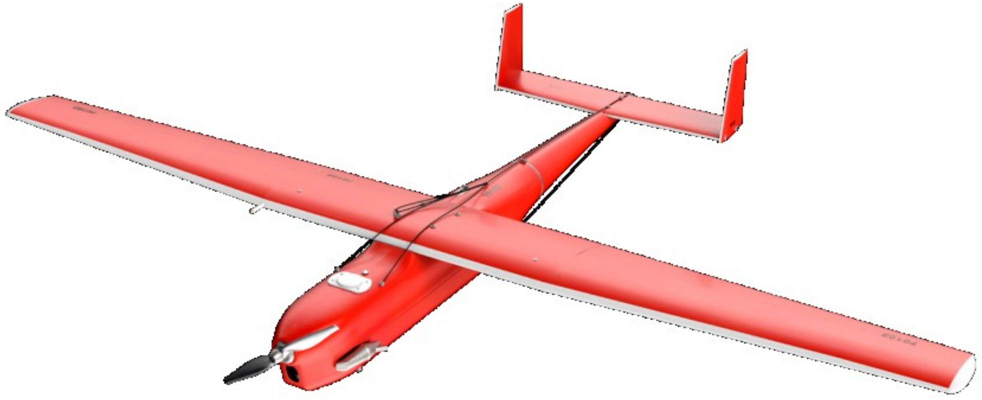
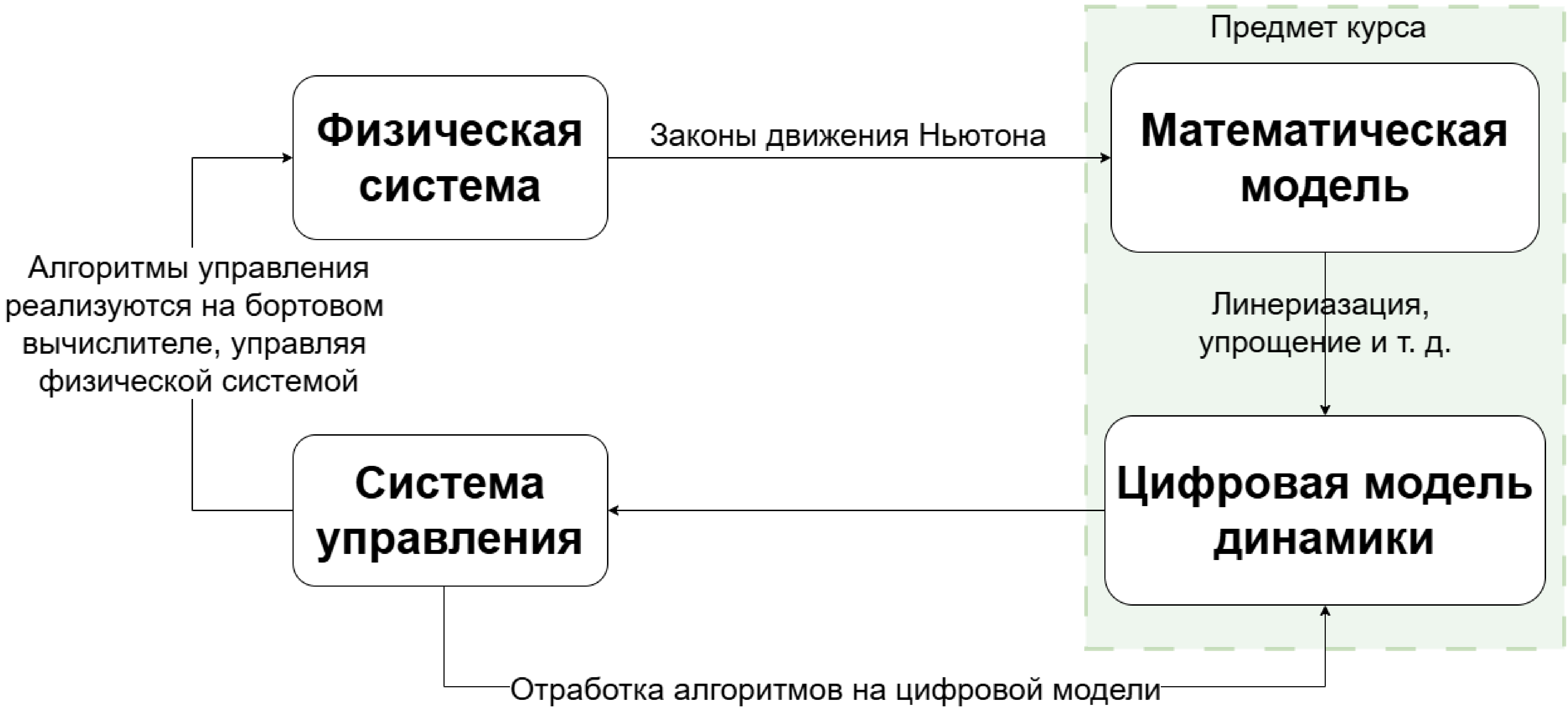
Л1. Системы координат. Способы задания ориентации

Объект курса – механическая система

Метеор М2



Геоскан



Процесс разработки. Описывая физическую систему уравнениями движения, составляем математическую модель объекта. По матмодели строится цифровая модель динамики, описывающая поведение объекта в среде и влияние на него внешних факторов и управляющих воздействий. Затем разрабатываются алгоритмы управления, отлаживаются в среде цифрового моделирования. В конечном счете готовый алгоритм переносится на реальную систему для управления ею

Системы координат (СК). Зачем?

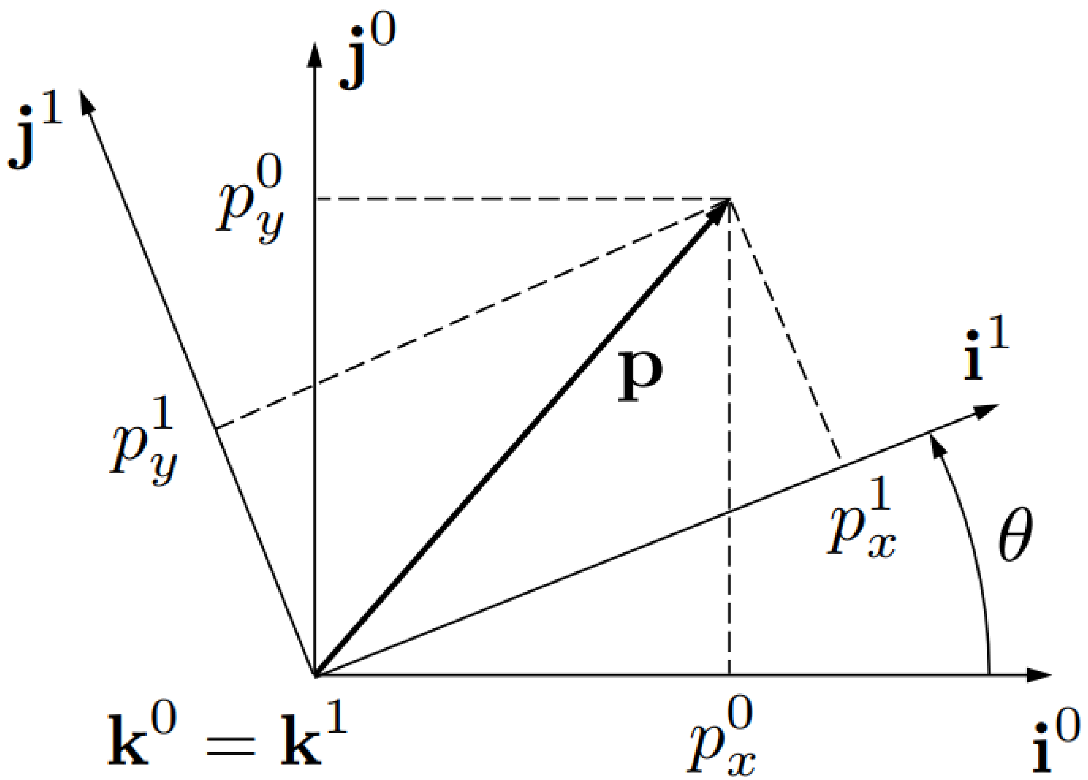
- Уравнения движения выводятся относительно инерциальной СК. Однако, имеют удобный вид в связанной с телом СК (ССК)

- Силы и моменты сил (аэродинамические, гравитационные, тяги …) легче описываются в ССК

- Инерциальный блок, включающий акселерометры, гироскопы, магнетометр … дают показания в ССК. GPS – в инерциальной

- В задачах ориентации на местности используются локальные СК

Повороты СК. Матрицы перехода



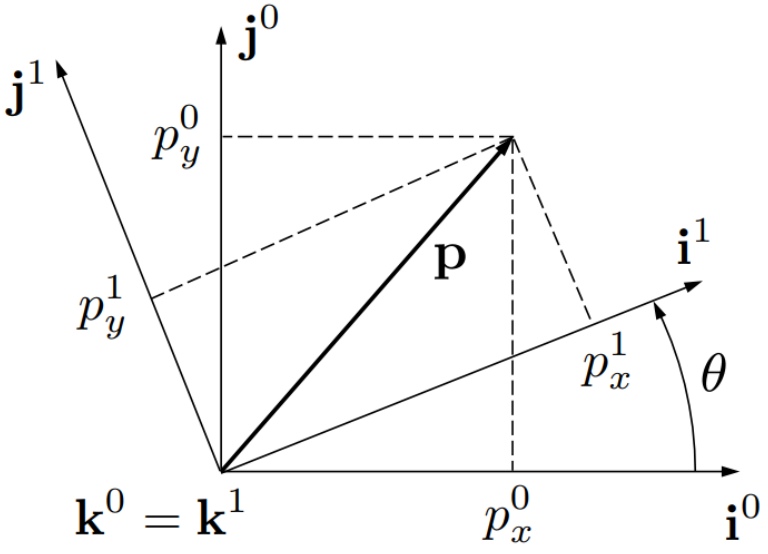
$$\boldsymbol{p} = p_x^0\boldsymbol{i}^0 + p_y^0\boldsymbol{j}^0 + p_z^0\boldsymbol{k}^0$$

$$\boldsymbol{p} = p_x^1\boldsymbol{i}^1 + p_y^1\boldsymbol{j}^1 + p_z^1\boldsymbol{k}^1$$

$$p_x^0\boldsymbol{i}^0 + p_y^0\boldsymbol{j}^0 + p_z^0\boldsymbol{k}^0 = p_x^1\boldsymbol{i}^1 + p_y^1\boldsymbol{j}^1 + p_z^1\boldsymbol{k}^1$$

$$\boldsymbol{p}^1 = \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix}$$

Повороты СК. Матрицы перехода



Матрицы **положительного** поворота СК относительно базисных осей

$$R_0^1(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & 0 \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ относительно } Ok\ (Oz)$$

$$R_0^1(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \text{относительно } Oj\ (Oy)$$

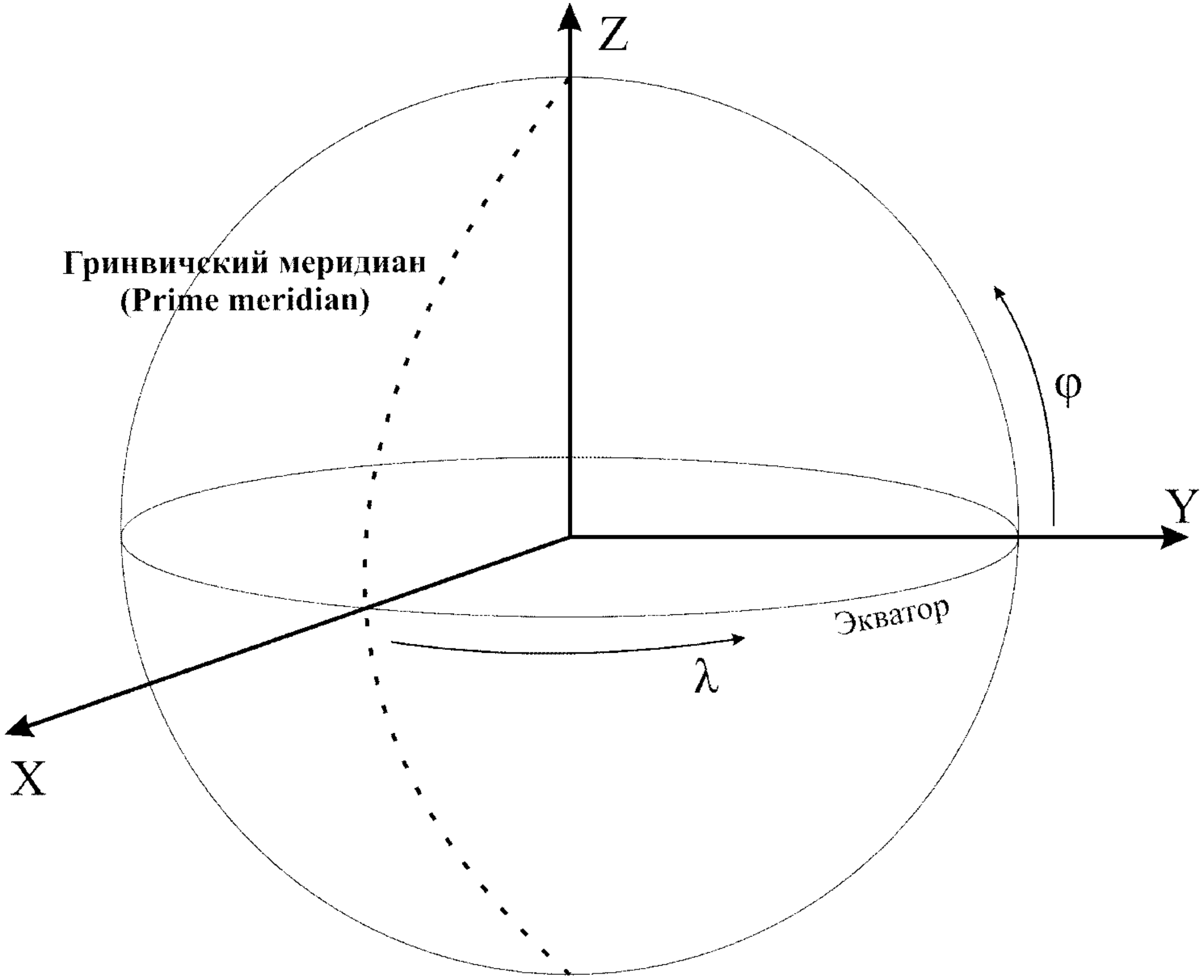
$$R_0^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \text{относительно } Oi\ (Ox)$$

Мнемоническое правило – синус с минусом в строке над единицей. На диагонали косинусы

Обозначения

- $\sin\theta = s_\theta$
- $\cos\theta = c_\theta$
- $R_b^i(\phi)$ – матрица поворота из СК b в СК i на угол ф

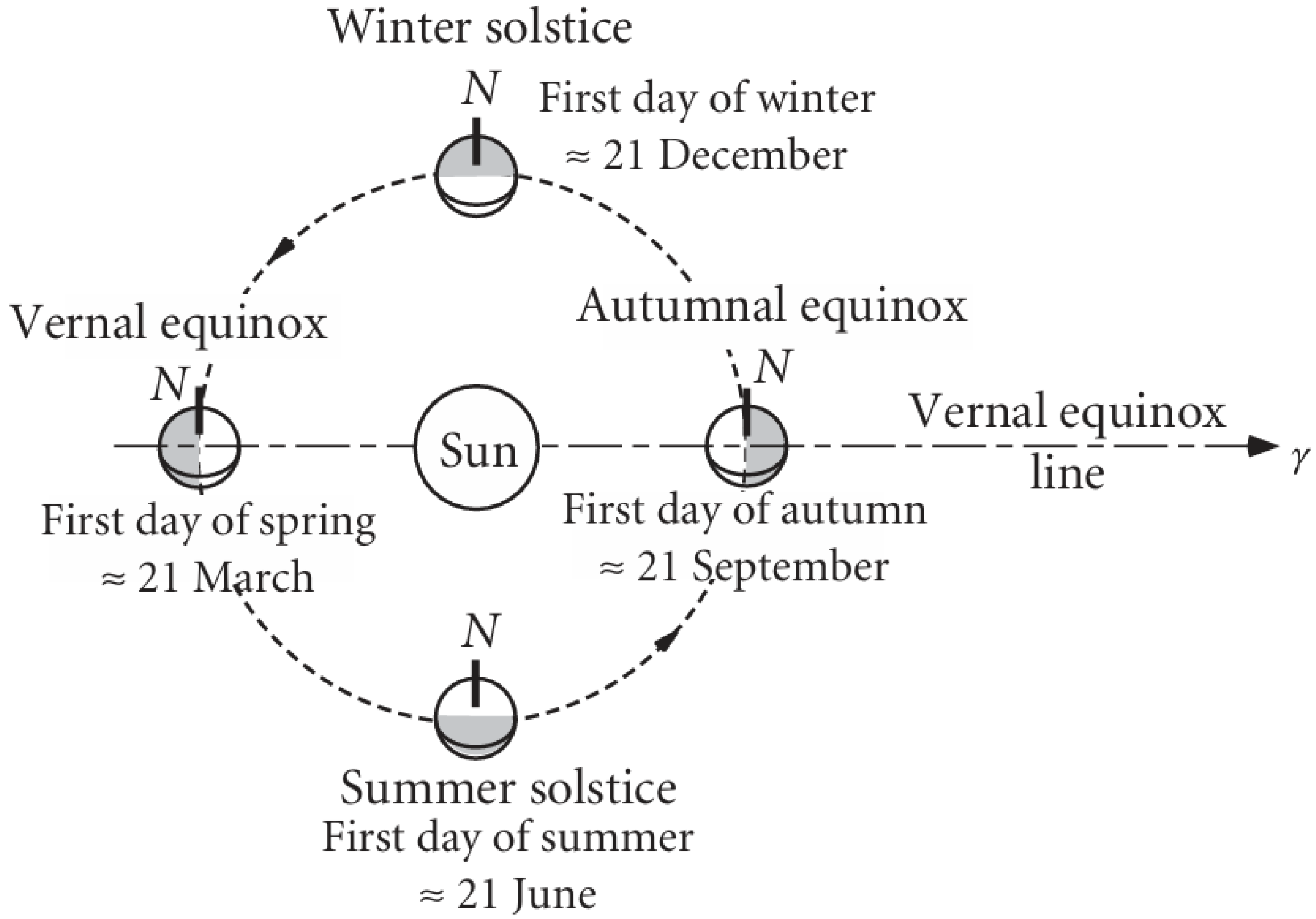
Системы координат. Геоцентрическая СК



Геоцентрическая система координат
Earth Centered Earth Fixed (ECEF)

Геоцентрическая система координат связана с центром масс Земли. OZ – вдоль оси вращения. OX – в точку пересечения нулевого меридиана с плоскостью экватора. OY – дополняет до правой тройки. **Неинерциальная** СК, вращается вместе с Землей

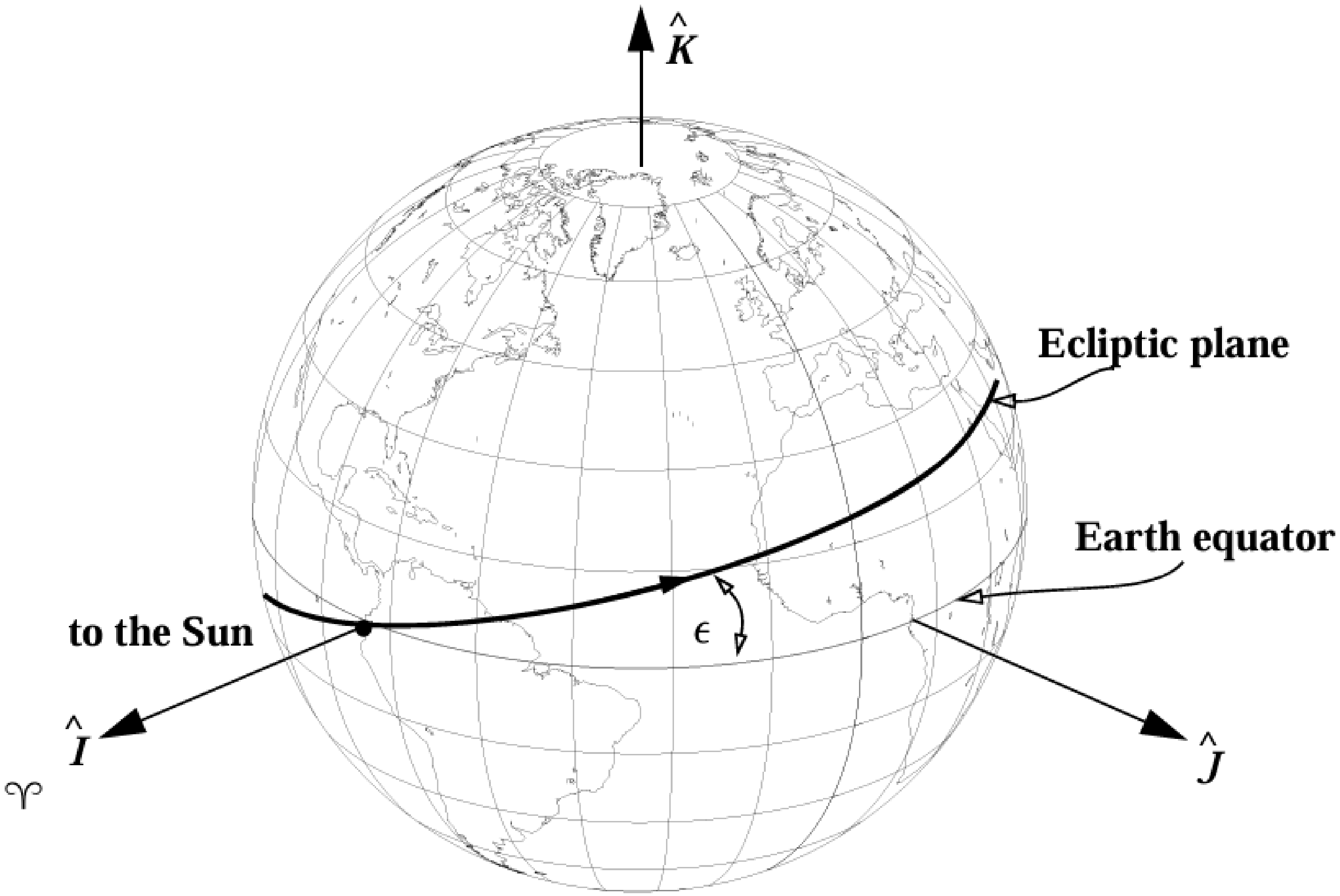
Системы координат. Геоцентрическая инерциальная СК



Определение линии весеннего равноденствия

В день весеннего равноденствия линия пересечения плоскости эклиптики и экваториальной плоскости проходит через Солнце. Луч, выпущенный из Земли по направлению к Солнцу в этот день, называется линией весеннего равноденствия – одна из осей инерциальной СК.

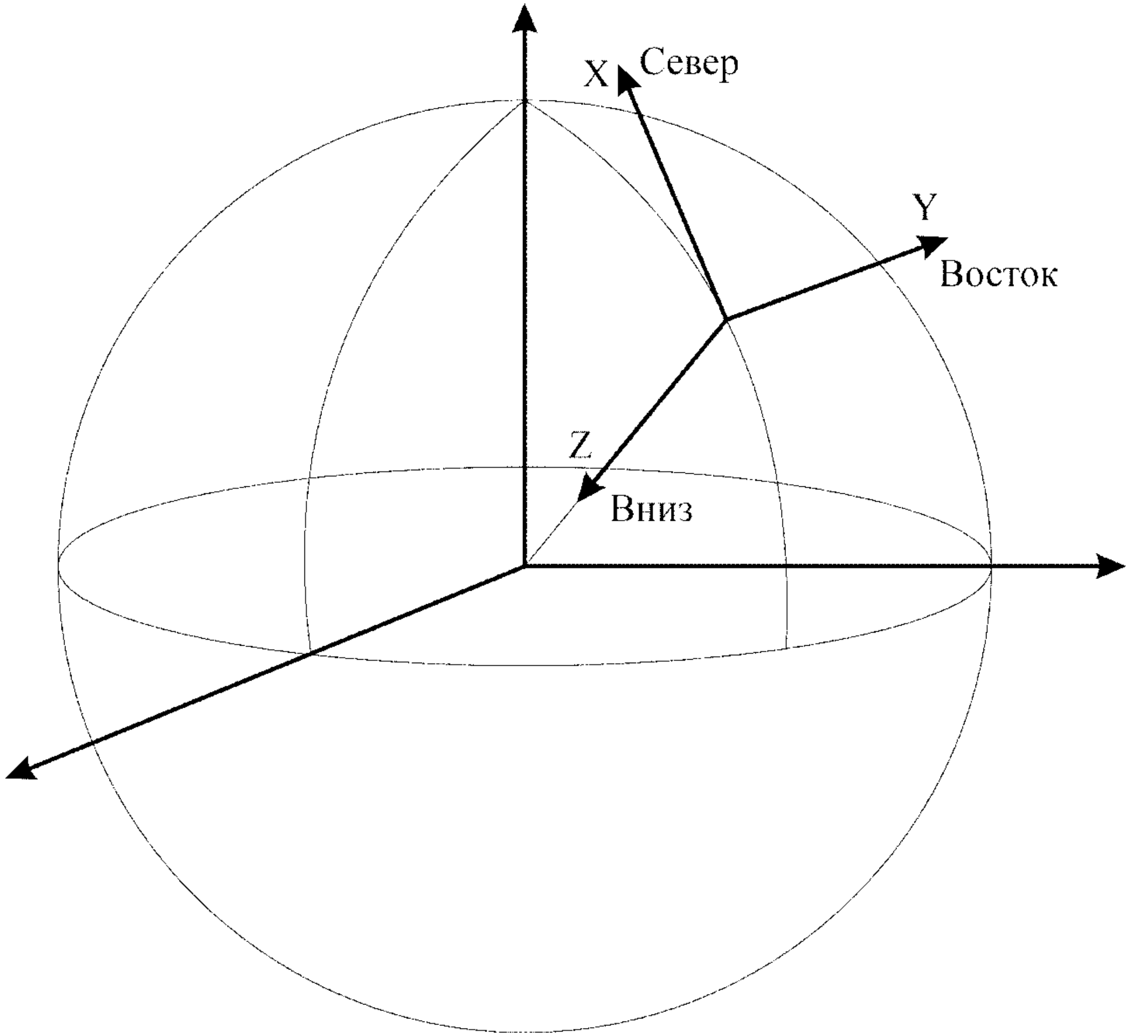
Системы координат. Геоцентрическая инерциальная СК



Геоцентрическая инерциальная СК
Earth Centered Inertial (ECI)

Ось OX – по направлению на точку весеннего равноденствия на момент 1 января 2000 года. OZ – вдоль оси вращения. OY – дополняет до правой тройки. Эта СК неподвижна относительно звезд. **Инерциальная** СК

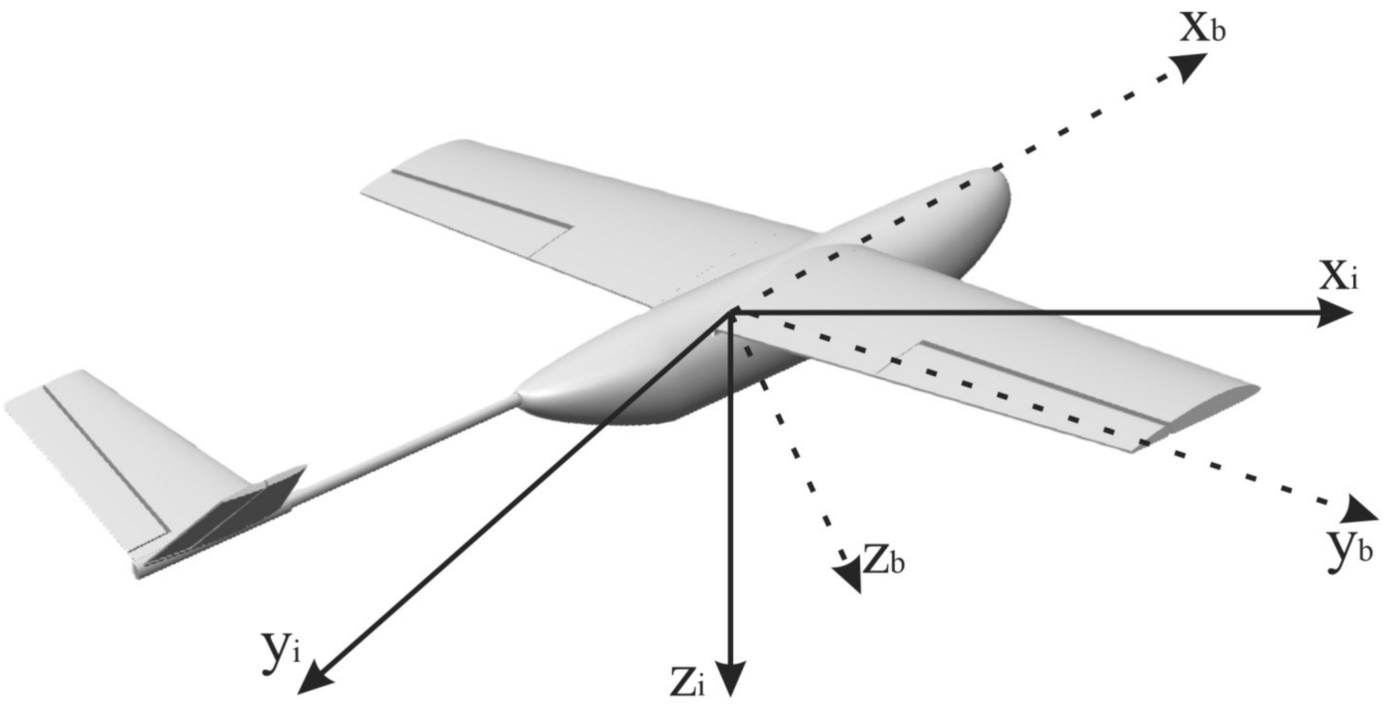
Системы координат. Топоцентрическая СК



Топоцентрическая СК связана с точкой на поверхности Земли. Есть разные способы задания осей: ENU (East-North-Up), NED (North-East-Down), SEZ (South-East-Zenith)
Мы в курсе будем использовать **NED.**

По определению топоцентрическая СК неинерциальная. Однако в предположении модели плоской Земли за счет малых перемещений ЛА по поверхности будем считать ее инерциальной

Связанная с ЛА СК (ССК)



С ЛА, движущимся у поверхности Земли, связана СК. Ox_b – продольная ось. Oy_b - по правому крылу. Oz_b - дополняет до правой тройки

Ориентация аппарата относительно локальной СК $Ox_iy_iz_i$ (NED) задается тремя углами ориентации:

ψ – угол рыскания (yaw)

ϕ – угол крена ($roll$)

θ – угол тангажа ($pitch$)

Связанная с ЛА СК

Матрица перехода из NED в ССК задается тремя последовательными положительными поворотами:

$$R_i^{i'}(\psi) = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

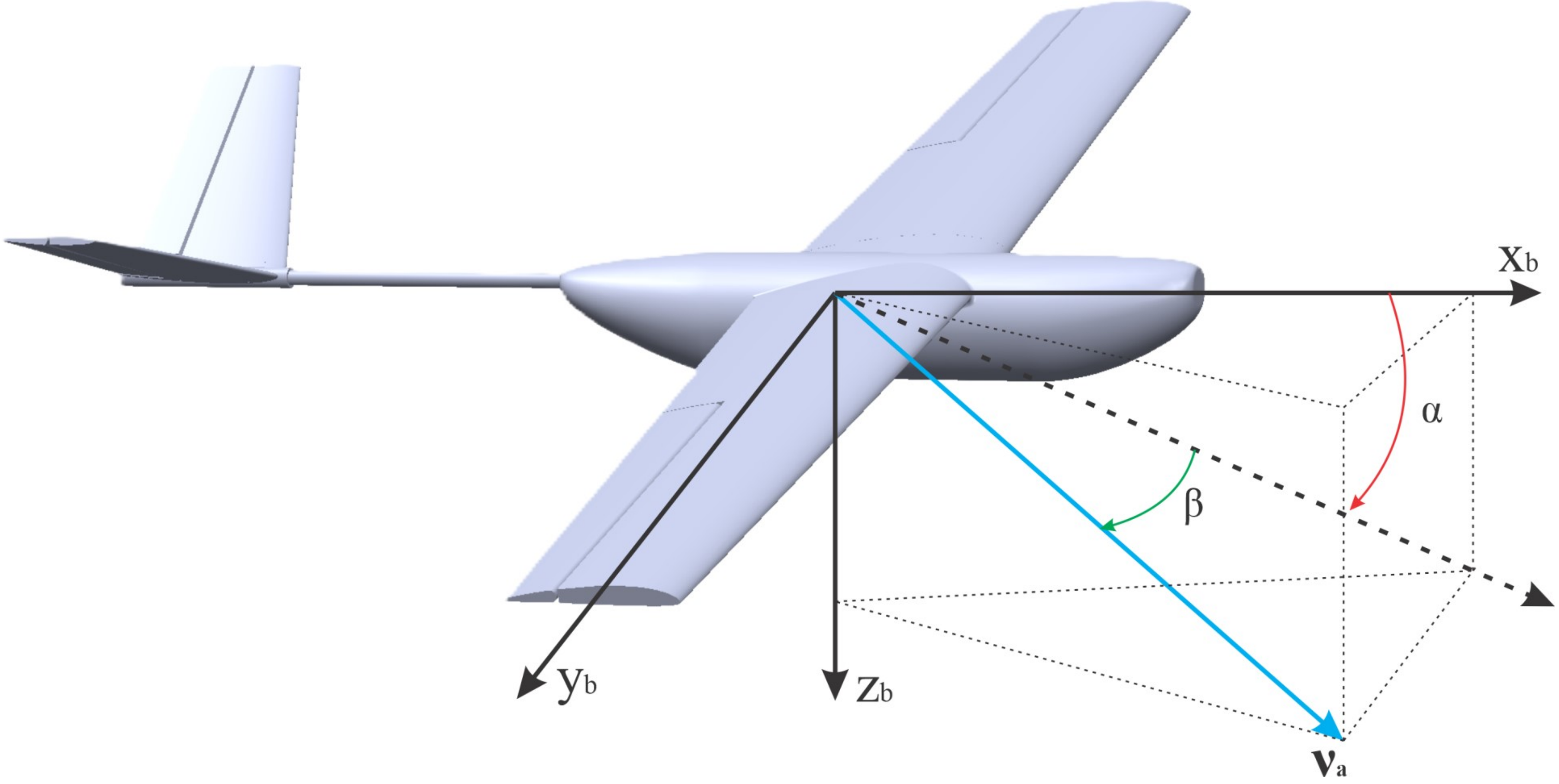
$$R_{i'}^{i''}(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix}$$

$$R_{i''}^{b}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix}$$

$$R_i^b = R_{i''}^{b}(\phi)\, R_{i'}^{i''}(\theta)\, R_i^{i'}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi c_\theta & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta\, c_\psi - s_\psi c_\phi & s_\phi s_\psi s_\theta + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ s_\phi s_\psi + s_\theta c_\phi c_\psi & s_\psi s_\theta c_\phi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{pmatrix}$$

Ветровая СК



Ветровая СК получается поворотом из ССК на угол атаки α и на угол бокового скольжения β:

$$R_s^b(\alpha) = \begin{pmatrix} c_\alpha & 0 & -s_\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix}$$

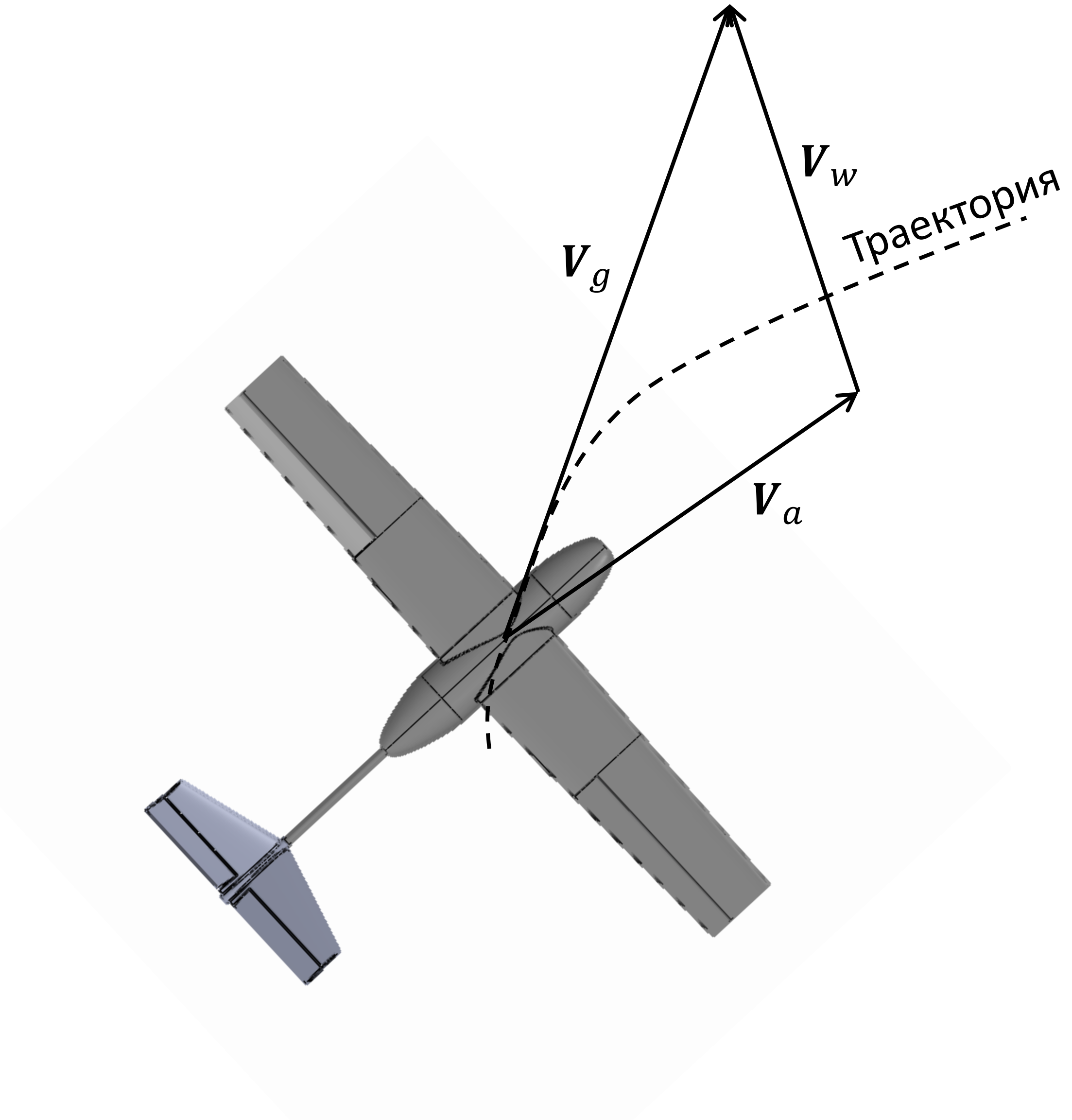
$$R_s^w(\beta) = \begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta & 0 \\ -s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_b^w = R_s^w(\beta) R_b^s(\alpha) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\beta & s_\alpha c_\beta \\ -s_\beta c_\alpha & c_\beta & -s_\alpha s_\beta \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix}$$

Аэродинамические силы удобно записываются в ветровой СК, так как действуют вдоль и перпендикулярно вектору воздушной скорости $\boldsymbol{V}_a$

Ветровой треугольник



V_w - скорость ветра
V_g - скорость ЛА относительно земли
V_a - скорость ЛА относительно воздушного потока (воздушная скорость)

$$\boldsymbol{V}_g = \boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{V}_w$$

$$\boldsymbol{V}_g^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \text{скорость относительно земли в ССК}$$

$$\boldsymbol{V}_w{}^b = \begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} = R_i^b \begin{pmatrix} w_n \\ w_e \\ w_d \end{pmatrix} - \text{скорость ветра в ССК}$$

$$V_a^w = \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ветровой треугольник. Соотношения на α и β

$$\boldsymbol{V_a}^b = \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{pmatrix} = R_w^b \boldsymbol{V}_a^w = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\beta & s_\alpha c_\beta \\ -s_\beta c_\alpha & c_\beta & -s_\alpha s_\beta \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V_a \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta \\ s_\beta \\ s_\alpha c_\beta \end{pmatrix}$$

Выражаем из последнего α и β

$$\alpha = arctg\left(\frac{w_r}{u_r}\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v_r}{V_a}\right)$$