

# Спекл-фотометрия или как увидеть невидимое

Сутурин Даниил

Май 2023

## Аннотация

В данной работе исследуется явление дифракции когерентного излучения - лазерного излучения - на случайно-неоднородных объектах. Рассматриваются спекл-картины в отраженных от неоднородной поверхности и в проходящих через рассеиватель лучах. Определяются размеры неровностей ресеивателя. И визуализируются изменения поверхности рассеивателя путем сравнения спекл-картин до и после внесения изменений.

## Введение

Спеклы - явление интерференции когерентного излучения при отражении от шероховатой поверхности. Отраженные лучи имеют случайное распределение амплитуд и сдвига фаз. Интерференционная картина носит также случайный характер, имея вид зернистого пятна (Рис. 1). Зерна - результат интерференции случайных волн, пришедших в фазе. Статистический анализ случайной картины позволяет получать информацию о статистических свойствах рассеивателя и излучения. Также можно фиксировать изменение рассеивающей поверхности по изменению спекл-картины, так как для каждого рассеивателя своя структура спекл-картины, которая чрезвычайно чувствительна к любым изменениям системы, в чем мы в данной работе и убедимся.

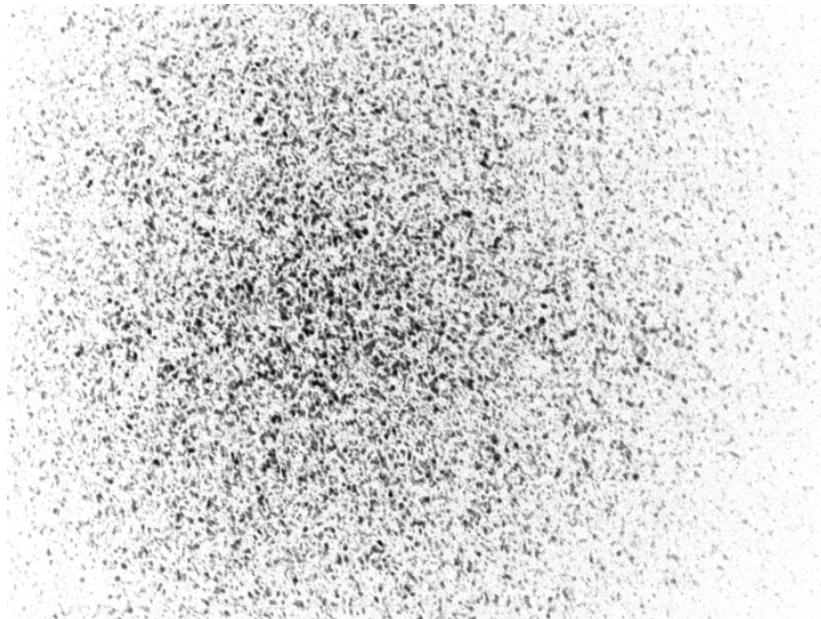


Рис. 1: Общий вид спекл-картины

## Теоретические сведения

### Функция корреляции

Рассмотрим основные выводы из теории формирования спектральной картины при рассеянии на матовой пластинке. Поверхность пластиинки обработана не идеально (Рис. 2) - имеются впадины и выпуклости относительно некоторого реперного уровня (Рис. 3)

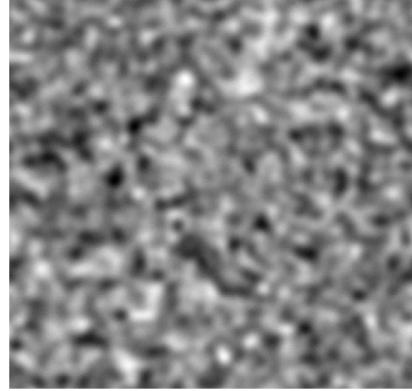


Рис. 2: Поверхность матовой пластиинки. Светлые и темные области - выпуклости и впадины соответственно

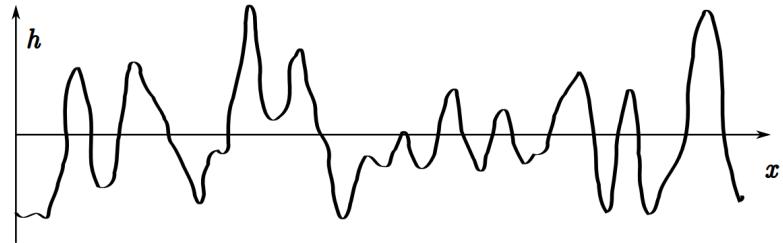


Рис. 3: Профиль поверхности рассеивателя

Для описания неровностей поверхности рассеивателя можем ввести функцию неровности  $h(x,y)$ . Это случайная величина - далее СВ - от двух координат, которая характеризует величину смещения точки поверхности от реперного уровня.

Введем функцию корреляции  $\psi_h(\vec{\rho})$  для  $h(x,y) = h(\vec{r})$ :

$$\psi_h(\vec{\rho}) = \langle h(\vec{r}) \cdot h(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle - \langle h(\vec{r}) \rangle^2 \quad (1)$$

В качестве приближения для корреляционной функции  $\psi_h(\vec{\rho})$  выберем нормальное распределение:

$$\psi_h(\rho) = \sigma_h^2 e^{-\frac{\rho^2}{\rho_h^2}} \quad (2)$$

где  $\rho_h$  - характерное расстояние уменьшения  $\psi_h(\rho)$  в  $e$  раз.

При прохождении через пластиинку волны набирают разность фаз  $\phi$ :

$$\phi = knh - kh = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)h \quad (3)$$

Видим, что  $\phi$  - новая СВ, являющаяся функцией  $h$ . Тогда корреляционная функция  $\psi_\phi(\vec{\rho})$  имеет вид:

$$\psi_\phi(\vec{\rho}) = \langle \phi(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r} + \vec{\rho}) \rangle = \sigma_\phi^2 e^{-\frac{\rho^2}{\rho_h^2}}$$

При небольших смещениях  $\rho$ :

$$\psi_\phi(\rho) \approx \sigma_\phi^2 \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_h}\right)^2\right), \quad \sigma_\phi^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(n-1)^2 \sigma_h^2 \quad (4)$$

После прохождения пластиинки волна имеет амплитуду:  $E(\vec{r}) = E_0 e^{i\phi(\vec{r})}$ . Расчитаем корреляционную функцию фазового множителя для комплексной амплитуды:

$$\psi_\phi(\vec{\rho}) = \langle e^{i[\phi(\vec{r}+\vec{\rho})-\phi(\vec{r})]} \rangle = e^{-\frac{\rho^2}{\rho_\phi^2}} \quad (5)$$

Так как  $\phi$  и  $h$  зависимые СВ, то  $\psi_\phi(\vec{\rho})$  имеет тоже гауссово распределение.

Для оценки радиуса корреляции  $\rho_\phi$  разложим в ряд по степеням  $\rho$  выражение для функции корреляции фазового множителя для комплексной амплитуды (5), получим с учетом (4):

$$1 - \sigma_\phi^2 \frac{\rho^2}{\rho_h^2} = 1 - \frac{\rho^2}{\rho_h^2} \quad (6)$$

Тогда выражение для  $\rho_\phi$  имеет вид:

$$\rho_\phi = \frac{\rho_h}{\sigma_\phi} = \frac{\rho_h \lambda}{2\pi(n-1)\sigma_h} \quad (7)$$

Введя параметр шероховатости поверхности  $\zeta$ :

$$\zeta = \frac{\sigma_h}{\rho_h} \quad (8)$$

мы получим выражение для радиуса корреляции фазового множителя в виде:

$$\rho_\phi = \frac{\lambda}{2\pi(n-1)\zeta}$$

Распределение интенсивности света в пучке лазерного излучения описывается гауссовой кривой:

$$I_L(\vec{r}) = I_0 e^{-\frac{r^2}{\rho_L^2}} \quad (9)$$

По мере следования лазерного пучка происходит его расширение, линза может изменить размер пучка, но не меняет гауссову форму.

Рассмотрим ход луча от матовой пластиинки до экрана или матрицы фотокамеры, фиксирующей спекл-картину (Рис. 4) Формирование спекл-картины происходит в дальней зоне, тогда

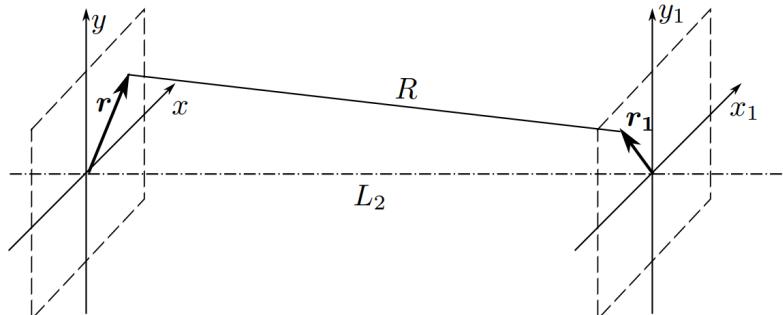


Рис. 4: Ход луча, рассеянного на пластиинке, до экрана

воспользовавшись приближением вида:

$$R = L_2 + \frac{r^2 + r_1^2}{2L_2} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{L_2}$$

Интеграл Френеля в дальней зоне имеет вид:

$$E(\vec{r}_1) \propto e^{i\frac{\pi r_1^2}{\lambda L_2}} \iint_S E(x, y) e^{i\phi(\vec{r})} e^{i\frac{\pi r^2}{2\lambda L_2}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda L_2}(\vec{r} \cdot \vec{r}_1)} dx dy$$

Нас интересует корреляционная функция  $\psi_E(\vec{\rho}) = \langle E(\vec{r}_1)E^*(\vec{r}_1') \rangle$

$$\psi_E(\vec{\rho}) \propto \iint_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r})E(\vec{r}') \langle e^{i[\phi(\vec{r})-\phi(\vec{r}')]}\rangle e^{i\frac{\pi}{\lambda L_2}(r^2-r'^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda L_2}[\vec{r}\cdot\vec{r}_1-\vec{r}'\cdot\vec{r}_1']} d\vec{r} d\vec{r}',$$

где  $\vec{r}_1' = \vec{\rho} + \vec{r}_1$ , а  $\vec{r}' = \vec{\rho} + \vec{r}$

С учетом (5), (9) и пренебрегая квадратичным фазовым множителем при  $L_2$ , мы получаем оценку для модуля функции корреляции поля:

$$|\psi_E(\vec{\rho})| \propto \left| \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{\rho_L^2}} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{\rho_\phi^2}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda L_2}[\vec{r}\cdot\vec{r}_1-\vec{r}'\cdot\vec{r}_1']} d\vec{r} d\vec{r}' \right| \quad (10)$$

Так как формирование спекл-картины происходит в дальней зоне, то выполняются условия дифракции Фраунгофера. Спекл-картина устойчива, при удалении экрана расстояние между спектлами и сами спектлы увеличиваются, однако новых не появляется.

### Индикатриса рассеяния

Интенсивность спекл-картины на экране убывает радиально - в центре картины спектлов больше и они ярче. Индикатриса - зависимость относительной интенсивности спектлов от углового смещения от центра картины.

Радиусом индикации  $\rho_i$  назовем линейный размер смещения от центра картины, где интенсивность уменьшится в  $e$  раз (Рис. 5)

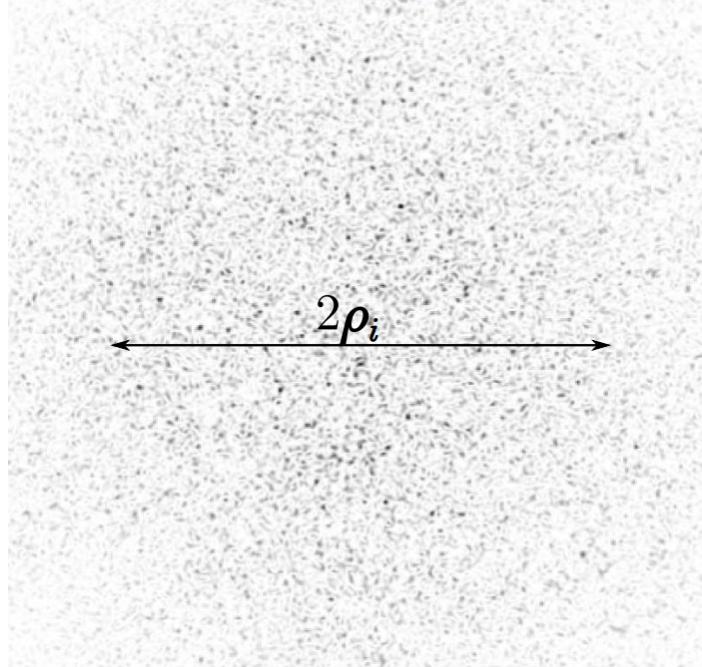


Рис. 5: Общий вид спекл-картины с радиусом индикатрисы

Оценим  $\rho_i$ . Угловое расхождение пучка лазерного излучения после прохождения матовой пластинки:  $\theta_\phi \approx \frac{\lambda}{\rho_\phi}$ , тогда положив в выражении (10)  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1'$ , мы получим:

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\pi\rho_\phi} L_2 \quad (11)$$

Из выражения (7) получим:

$$\zeta = \frac{\rho_i}{2L_2(n-1)} \quad (12)$$

То есть по измерению радиуса индикатрисы и геометрических размеров установки, мы можем оценить характерную шероховатость поверхности рассеивателя.

## Функция корреляции интенсивности спекл-картины

Характер распределения интенсивности излучения в пределах одного спекла тоже носит экспоненциальный характер - интенсивность спадает от центра к периферии крупного спекла (Рис. 6)

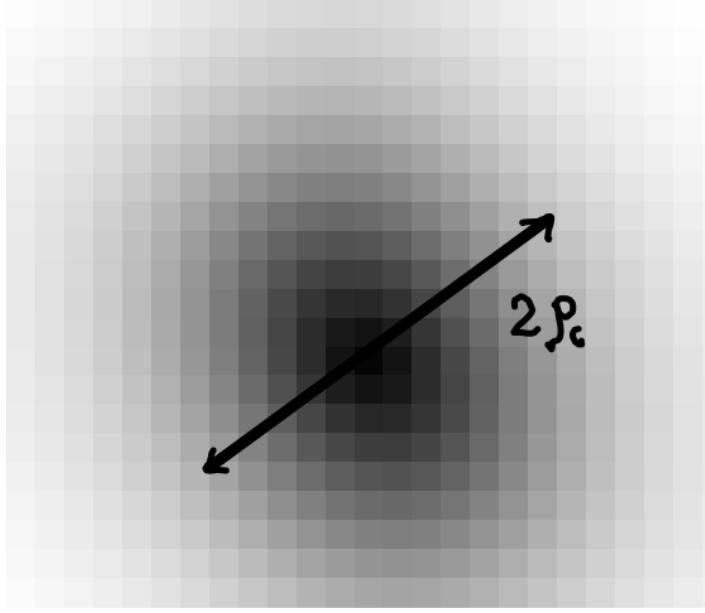


Рис. 6: Крупномасштабное изображение спекла

Функция корреляции интенсивности в пределах одного спекла описывается гауссовой кривой:

$$\psi_I(\rho) \approx e^{-\frac{\rho^2}{\rho_c^2}}, \quad (13)$$

где  $\rho_c$  - средний размер спекла.

Согласно (10) при  $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\vec{r}' = 0$  получим, что:

$$\psi_I(\rho) = |\psi_E(\rho)|^2 = e^{-\frac{2\pi^2\rho_L^2}{\lambda^2 L_2^2} \rho^2}$$

Тогда радиус корреляции спекл-картины равен:

$$\rho_c = \frac{\lambda L_2}{\sqrt{2}\pi\rho_L} \quad (14)$$

## Функция распределения интенсивности спекл-картины

Так как значение напряженности поля в конкретной точке экрана есть суперпозиция многих волн, идущих от неровностей матовой пластиинки, то, принимая напряженность в качестве СВ, мы согласно центральной предельной теореме получим нормальное распределение поля на экране. Тогда вероятность того, что на данную точку экрана попадет волна с амплитудой от  $|E|$  до  $|E| + d|E|$  равна:

$$W(|E|)d|E| \approx |E|e^{-\frac{|E|^2}{I_0}} d|E|$$

Функция распределения вероятности для спекл-картины:

$$dP(I) = W(I)dI = \frac{1}{I_0} e^{-\frac{I}{I_0}} dI, \quad (15)$$

где  $I_0$  - среднее значение интенсивности по всей спекл-картине.

## Экспериментальная установка

В данной работе было проведено две серии измерений. Первая серия измерений заключалась в изучении спекл-картины в проходящем свете и оценке размеров неровностей рассеивателя и размеров лазерного пучка, принципиальная схема представлена на рисунке 7

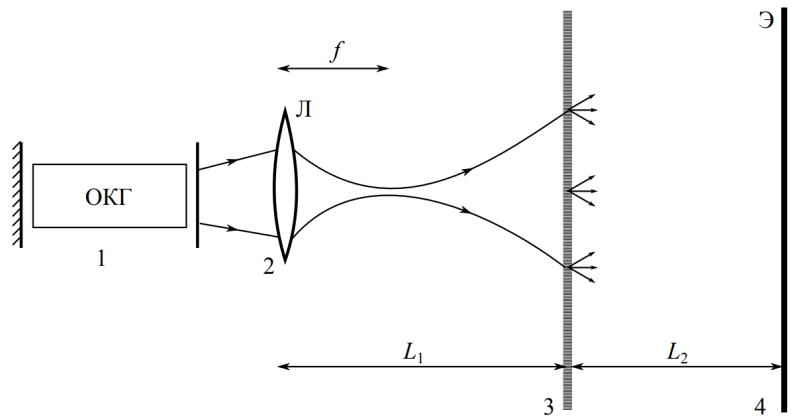


Рис. 7: Принципиальная схема экспериментальной установки: 1 - лазер, 2 - линза, 3 - рассеиватель, 4 - фотокамера

Во второй серии измерений исследовалась спекл-картина в отраженных лучах от разных поверхностей: бумага, стена, покрытая известью, и стекло. Получались изображения спекл-картины до и после внесения изменений в поверхность рассеивателя. Далее с помощью простейшего алгоритма фотографии обрабатывались, делались контрастнее и инвертировались для визуализации внесенного изменения. Экспериментальная установка представлена на рисунке 8

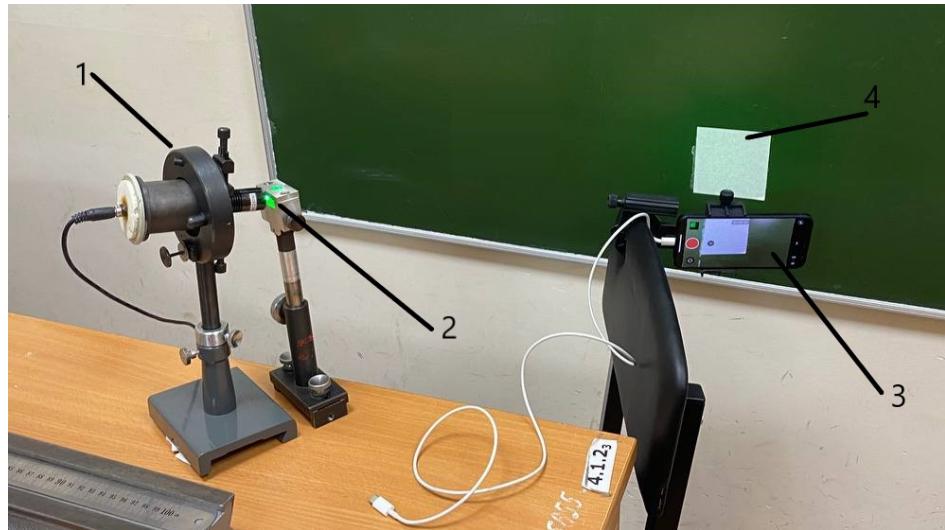


Рис. 8: Принципиальная схема экспериментальной установки: 1 - лазер, 2 - рассеиватель, 3 - фотокамера, 4 - образец, на поверхность которого вносится изменение

## Результаты измерений и обработки данных

### Первая серия измерений

Приведем результаты измерений в таблице 1 при фиксированном расстоянии от камеры до матовой пластинки  $L_2 = 20\text{ mm}$  и двух значений расстояния от линзы до матового стекла. Видим,

$L_1, \text{mm}$	$L_2, \text{mm}$	Радиус индикатрисы, $\text{мм}$	Шероховатость	Размер неоднородности, $\mu\text{m}$	Размер пикселя фотокамеры, $\mu\text{m}$
20	20	2.3	0.1	1.2	4.7
30	20	2.4	0.1	1.2	4.7

Таблица 1: Радиус индикатрисы и параметры рессеивателя

что характерный размер неровностей порядка микрометра, то есть спектр-картина чрезвычайно чувствительна к любым даже самым маленьким неровностям рассеивателя. Данное обстоятельство, находит применение для бесконтактной оценки качества образца на конвейерных линиях. С очередного образца снимается спектр-картина и программно сравнивается с заранее полученным шаблоном хорошего образца. В случае сильного несоответствия образец отбраковывается.

Приведем зависимость интенсивности спектр-картины в области центра и соответствующую кривую нормального распределения, полученную по усреднению по интенсивности (Рис. 9) По

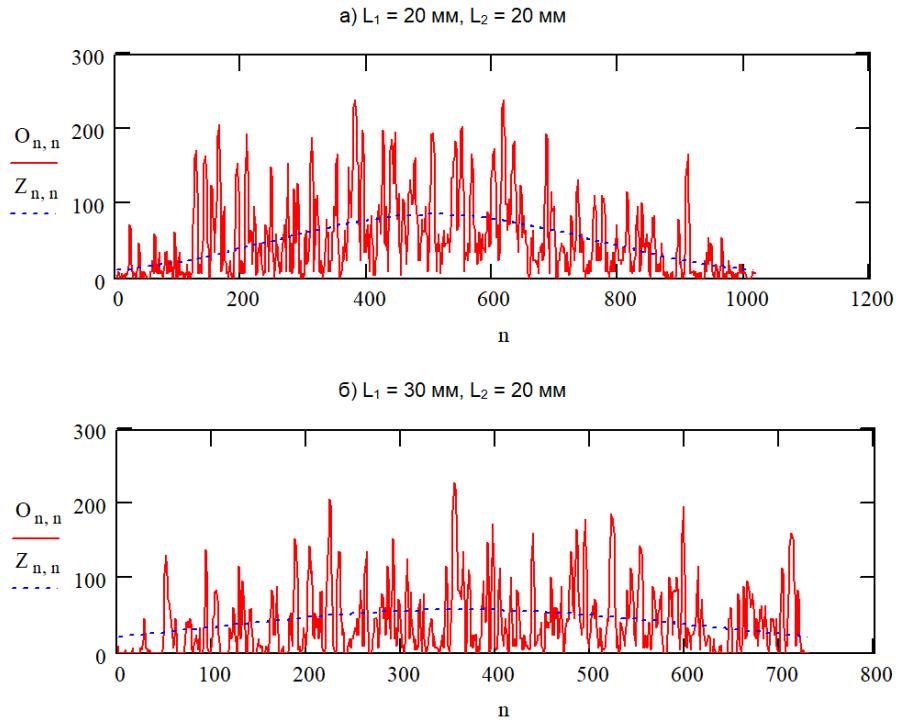


Рис. 9: Распределение интенсивности по пикселям в центральной области спектр-картины

горизонтальной оси откладывается номер пикселя, принимающий то или иное значение интенсивности, по вертикальной оси - безразмерное значение интенсивности пикселя, измеряемое от 0 до 255.

Приведем результат измерений радиуса корреляции - размера отдельного спектра - при разных конфигурациях оптической системы (Табл. 2)

$L_1, \text{mm}$	20	20	20	20	30	30	30	30
$L_2, \text{mm}$	20	40	60	80	20	40	60	80
Радиус корреляции, $\mu\text{m}$	19±2	33±2	47±2	61±2	14±2	28±2	38±2	38±2

Таблица 2: Радиус корреляции

Видим, что с ростом расстояния от рассеивателя до фотокамеры, размер спеклов увеличивается.

Согласно выражению (14):

$$\rho_c = \frac{\lambda L_2}{\sqrt{2\pi}\rho_L}$$

график зависимости  $\rho_c(L_2)$  должен иметь линейный вид. Построим соответствующие зависимости (Рис. 10) для двух значений  $L_1$  и по угловому коэффициенту наклона определим характерный радиус лазерного пучка (Табл. 3)

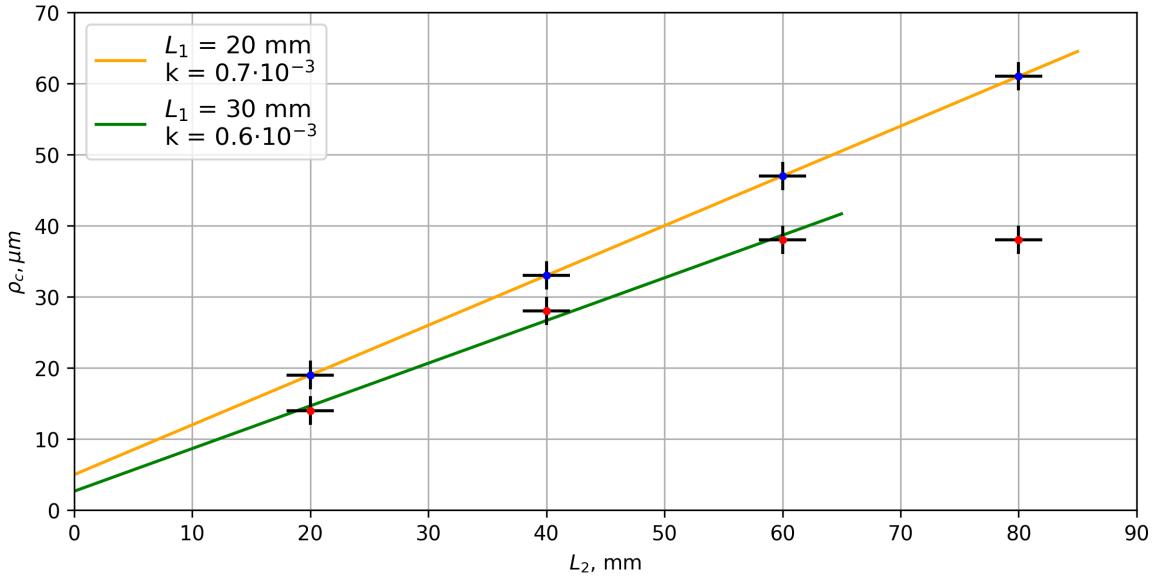


Рис. 10: Зависимость радиуса корреляции  $\rho_c$  от расстояния  $L_2$  между пластинкой и фотокамерой

$L_1 = 20 \text{ mm}$	$L_1 = 30 \text{ mm}$
$\rho_L = (200 \pm 1) \mu\text{m}$	$\rho_L = (230 \pm 1) \mu\text{m}$

Таблица 3: Радиус лазерного пучка

В данной серии измерений лазер был красного цвета с длиной волны  $\lambda = 630 \text{ nm}$

## Вторая серия измерений

Теперь, когда мы понимаем, что спектральная картина чувствительна к изменениям поверхности рассеивателя размером порядка  $\sigma_h \sim 1\mu m$ , мы можем фиксировать изменения поверхности, невидимые невооруженным глазом. "Разрешающая" способность спектральной картины высока, возможность визуализировать изменение теперь зависит от разрешающей способности фотоприемника.

Посмотрим на регистрацию изменения поверхности рассеивателя для разных образцов.

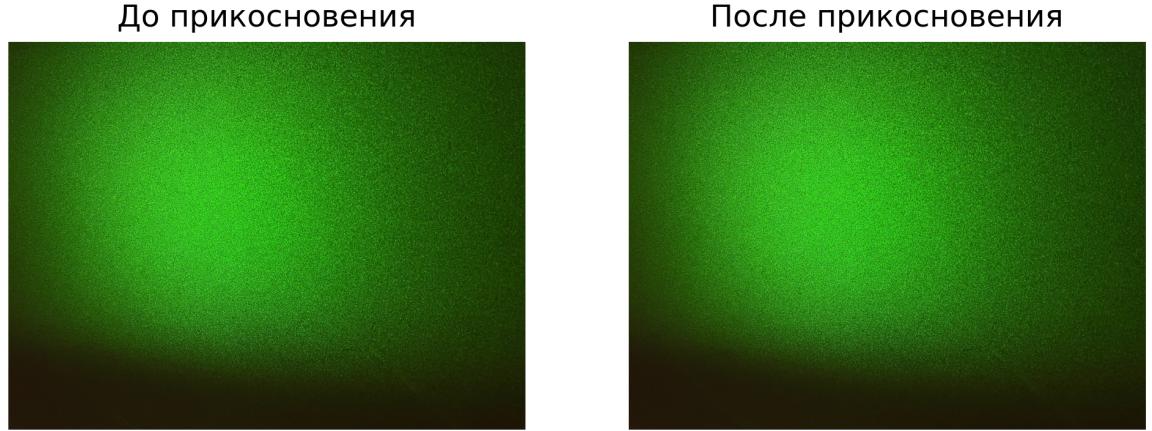


Рис. 11: Фотография поверхности стены. До и после прикосновения

Никаких видимых изменений нет, ни в лучах лазера, ни в рассеянном свете. Однако изменения были внесены - прикосновение пальцем к стене. Посмотрим на результат вычитания изображений попиксельно на рисунке 12

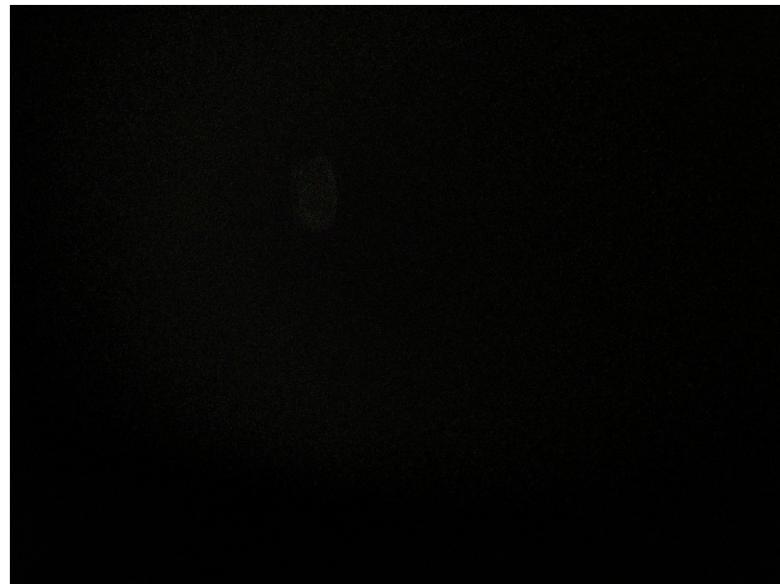


Рис. 12: Результат вычитания изображений

Картинка довольно тусклая. Инвертируем ее и сделаем как можно контрастнее (Рис. 13)



Рис. 13: Результат обработки (стена)

Приведем еще некоторые результаты регистрации изменения поверхности рассеивателя:

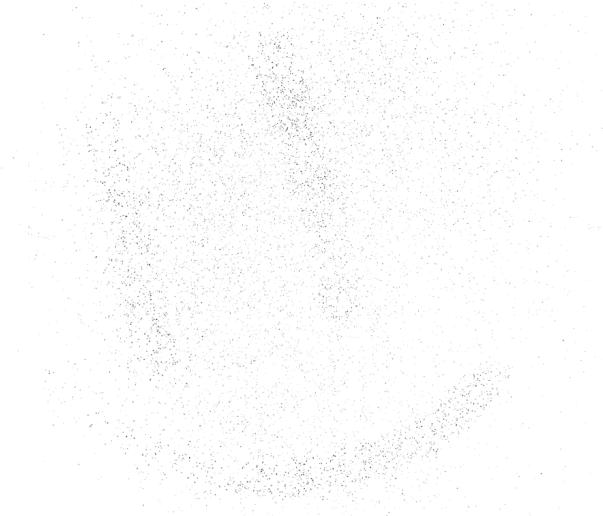
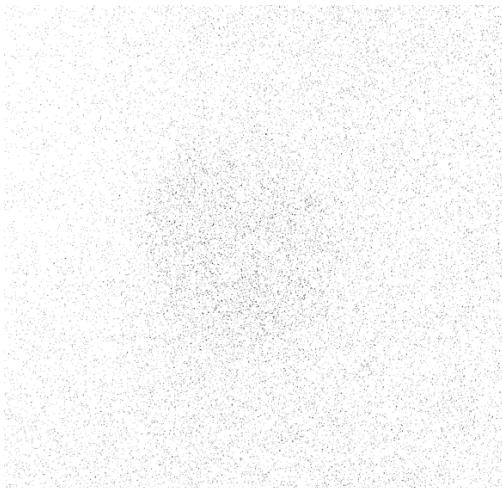


Рис. 14: Результат обработки (стена)



Отпечаток пальца



Надпись

Рис. 15: Результаты обработки (бумага)



Рис. 16: Результат обработки (бумага)



Рис. 17: Листочек, проходивший испытания, не имеет видимых невооруженным глазом изменений, говорящих о том, как именно изменялась поверхность

Также были предприняты попытки отобразить изменения поверхности стекла, однако контрастность изображения даже после обработки слишком низкая и тяжело рассмотреть изменения поверхности, если не прикладывать достаточные усилия, чтобы, например, оставить отпечаток пальца (Рис. 17) В нижней части у основания еле различимо потемнее, соответствующее прикосновению.

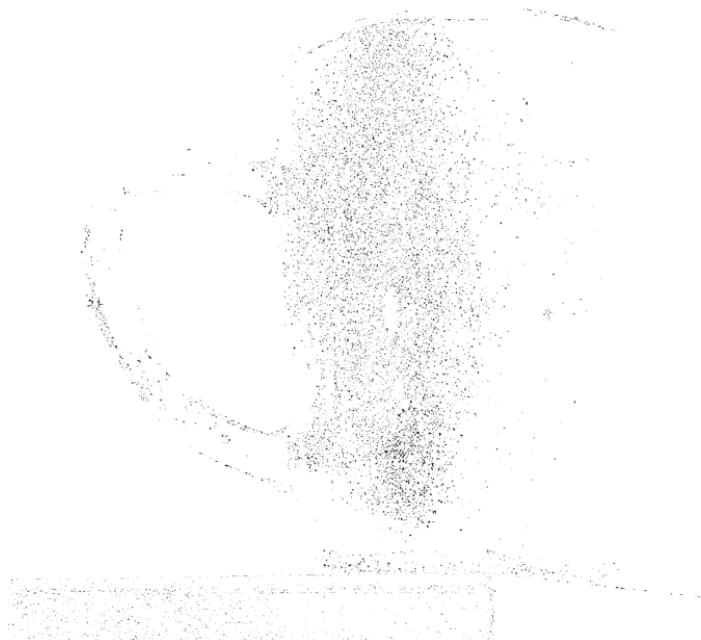


Рис. 18: Поверхность стеклянной кружки

## Обсуждение результатов

В данной работе изучили принцип формирования спекл-картины в проходящих и отраженных лучах от поверхности рассеивателя. Оценили из статистических характеристик спекл-картины и геометрических размеров установки характеристики поверхности рассеивателя и лазерного пучка, так оценили размер неровности поверхности матового стекла  $\sigma_h$  и радиус лазерного пучка  $\rho_L$ :

$$\sigma_h \sim 1\mu m \quad \zeta \sim 0.1$$

$$\rho_L \sim 200\mu m$$

Спекл-картина чрезвычайно чувствительна к малейшим изменениям поверхности рассеивателя, что подтверждается нашими оценками для  $\sigma_h$

С помощью анализа спекл-картин до и после внесения изменений на поверхности различных образцов, мы смогли визуализировать внесенное изменение на поверхность. Высокая "разрешающая" способность и чувствительность спеклов предъявляют жесткие требования для относительного положения лазера, образца и камеры. Малейшие сдвиги камеры приводили к исчезновению полезной информации с изображения. Большое количество попыток предшествовало получению изображений, приведенных в данной работе.

В дальнейшем планируется создать демонстрационный стенд, включающий держатели для лазера, камеры и образца, который бы позволил студентам визуализировать изменения поверхности рассеивателя и не только.

## Ссылки

А. В. Максимычев, Д. А. Александров, Н. С. Берюлёв и др. Лабораторный практикум по общей физике: учеб. пособие. В трёх томах. Т. 2. Оптика/ Под редакцией А. В. Максимычева. - М.:МФТИ, 2014. - 446 с.



Ссылка на GitHub с сопутствующими материалами