蟻本P.319～

分割統治法

目次

分割統治法とは

そのままでは解決できない大きな問題を小さな問題に分割し、その全てを解決することで、最終的に最初の問題全体を解決する、という問題解決の手法である。（Wikipedia）

要はDP

列の分割統治法

P.319

バブルソートの交換回数

長さ n の順列が与えられます
バブルソートでソートするのに必要なスワップ回数を求めてください

$1 \leq n \leq 10^5$

競プロ典型 : 転倒数

ご存じBinary Indexed Tree を利用することで $\Theta(n \log n)$ で求めることができます

```
for i,e in enumerate(a):
  sum += i - BIT.sum(0, e)
  ++BIT[e]
```

分割統治による方法

与えられた順列 A を B, C に二等分する

各 $x < y$ は,

$x \in B$ かつ $y \in C$	転倒してない
$x \in C$ かつ $y \in B$	がんばる
$x, y \in B$	B について同じ問題
$x, y \in C$	C について同じ問題

のどれか

下二つの再帰の深さは, 毎回長さが半分になるので $\Theta(\log n)$ 回

B, C がソート済みであるとすると, 前から見ていってマージしながら数え上げることができる

よって, 各深さでは$\Theta(n)$ で数え上げられる

したがって, マージソートしながら数えれば $\Theta(n\log n)$

木の分割統治法

木に対しても同じように分割統治法を適用できないかを考える

木は適当な場所で切ってもバラバラになったそれぞれが木のままなので, いい感じのところで切って同じように再帰的な処理をすることができそう

重心分解

木の重心 : その頂点を取り除いたとき, 残った最大部分木の頂点数が最小になるようなもの

よって, 木の重心を取り除くと残った部分木それぞれの頂点数は元々の木の $\frac{1}{2}$ 以下になる

よって, 重心で分けて列と同じように分割統治することで再帰の深さが $\Theta(\log n)$ になる

実装がだるい

P.321

Tree (POJ 1741)

n 頂点の木が与えられる
最短距離が k 以下である頂点の組の数を求めよ

$1 \le n \le 10^4$

実装

サンプル(1個)しか試してないですC++98ってなに

平面の分割統治法

P.324

最近点対問題

平面上の n 個の点について, 最も近い二点の距離を求めよ

$1 \leq n \leq 10^4$

なんか乱択で線形とかもあるらしい
(ソースらしきブログが見れなくなってたのでよくわからん)

同じように半分にして再帰的に解くことを考える

x 座標の中央値で平面を左右に分割する

二点 p, q について

どちらも同じ領域に含まれているなら再帰的に計算する

違う領域に含まれていたら？

再帰的に計算したほうの最小距離を d と置く

これを更新し得るものだけ考えればいい

異なる領域に含まれ, かつ距離が d 未満になり得るものは？

x 座標 y 座標別々に考えてみると

x 座標

分割した場所からの距離が d 未満のものだけを考えればよい
よって, x 座標の中央値を x_m として, x 座標が
$x_m - d < x < x_m + d$ である点のみを考えればいい

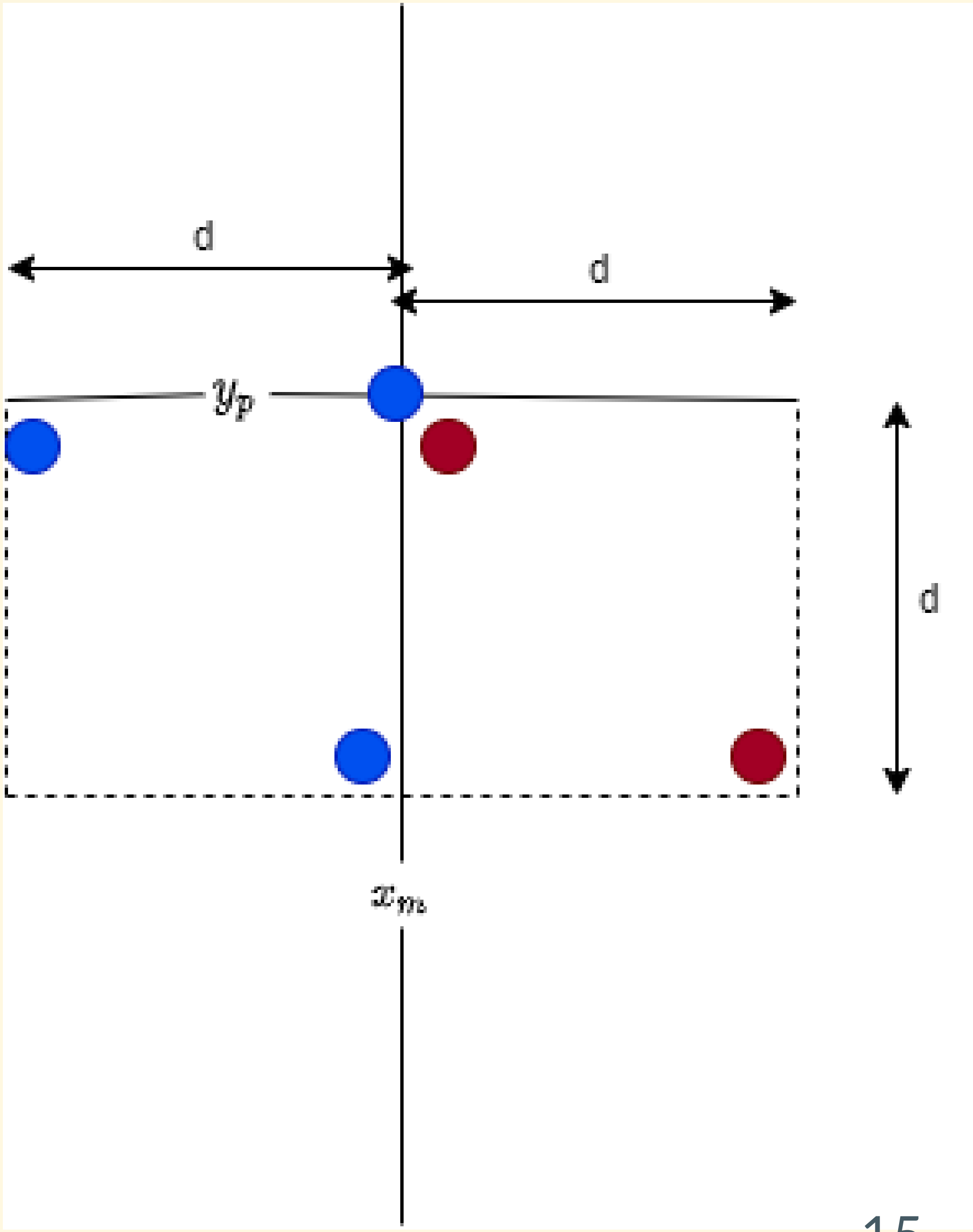
y 座標

各点について, y 座標が自分以下かつ距離が d 未満のものだけ考えるとしてよい
よって, 見ている点の y 座標を y_p として
y 座標が $y_p - d < y \le y_p$ である点のみを考えればいい

$2d \times d$ の長方形領域に含まれる点の数は高々 6 個である

よって, 各点について定数時間で処理できる

y 座標でソートされていると嬉しいので, x 座標の中央値で分割して y 座標の順にソートするマージソートを行いながら計算することで合計 $\Theta(n \log n)$ となる



蛇足：

数学的な計算量解析

計算量

分割・統合が線形時間

$a \geq 1, b > 1, c, d > 0$

$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn \\ \\ d \quad (n \leq 1) \end{cases} \Rightarrow T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) \quad (a > b) \\ \\ \Theta(n \log n) \quad (a = b) \\ \\ \Theta(n) \quad (a < b) \end{cases}$$

カラツバ法
n 桁の整数の乗算 $X \times Y$ を計算する

$X = aR + b, Y = cR + d$ とすると

$XY = acR^2 + (ac + bd - (a - b)(c - d))R + bd$

と書ける よって

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

となり $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

凸法

蟻本に載っているのは平面捜査に基づくグラハムスキャンで
$\Theta(n \log n)$

分割統治でも解ける

半分に分けてそれぞれで凸法, 上と下の接線で結合 を繰り返す

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

となりこれも $\Theta(n \log n)$

SA-IS

前やったやつ

大きさ半分以下の同じ問題を再帰的に解く

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

となり $\Theta(n)$

縮小法とよんだりもする？

recursive slowdown っていうのも見かけた

計算量

分割・統合が定数時間

$a \geq 1, b > 1, c, d > 0$

$$T(n) = \begin{cases} aT\left(\frac{n}{b}\right) + c \\ \\ d \quad (n \leq 1) \end{cases} \Rightarrow T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) \quad (a > 1) \\ \\ \Theta(\log n) \quad (a = 1) \end{cases}$$

$n = b^k$ とすると簡単に証明できます

分割・統合が線形時間のときの計算量の証明

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn \\
&= a\left(aT\left(\frac{n}{b^2}\right) + c\frac{n}{b}\right) + cn \\
&= \cdots \\
&= a\left(\cdots a\left(aT\left(\frac{n}{b^k}\right) + c\frac{n}{b^{k-1}}\right)\cdots + c\frac{n}{b}\right) + cn \\
&= a^k d + cn\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{k-1} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right)
\end{aligned}
$$

$a > b$ とすると

$$
\begin{aligned}
&= a^k d + cn \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^k - 1}{\frac{a}{b} - 1} \\
&< a^k d + \frac{cn}{\frac{a}{b} - 1} \left(\frac{a}{b}\right)^k \\
&= C a^k \\
&= C a^{\log_b n} \\
&= C n^{\log_b a}
\end{aligned}
$$

木分解
https://qiita.com/drken/items/4b4c3f1824339b090202

最近点対
http://www.cs.ucsb.edu/~suri/cs235/ClosestPair.pdf

凸法
https://www.jaist.ac.jp/~uehara/course/2016/i431/pdf/04greedy.pdf

問題集
https://blog.hamayanhamayan.com/entry/2017/05/21/234616