自我介绍

- （略）
- 好像大家都认识我（大雾）

- **扫码下载课件 →**
- 或者点击
- **http://wys.life/201801-Fourier-Lecture.html**
- ~~嗯下课之前是不会给你的……~~

傅里叶变换及其在OI中的应用

清华大学 计算机科学与技术系 王逸松

wangyisong1996@gmail.com

Q & A & Q

- **Q：这节课讲什么？**
- A：傅里叶变换。~~三小时学会 DFT 和 FFT。~~
- **Q：听说第一课堂的课很难？**
- A：没事，这节课全是讲故事。
- **Q：什么我已经会写(bei) FFT 了？**
- A：那就当听故事吧 ~
- **Q：我还想学多项式的那套理论！**
- A：请出门右转 UOJ（大雾）
- **Q：明天要考这个吗？**
- A：（我是不会告诉你明天没有考试的）

目录

- **傅里叶变换与信号处理**
  - 信号与信号处理
  - 傅里叶变换
- **傅里叶变换的实际应用**
  - 傅里叶变换与音频信号
  - 傅里叶变换与图像信号
- **傅里叶变换和信息竞赛**
  - 快速傅里叶变换 FFT
  - 多项式乘法问题

为什么要花三个小时学傅里叶变换

- 从物理和实际生活的角度去理解傅里叶变换
- （而不只是通过数学推导和写(bei)代(mu)码(ban)）
- 从不了解到了解，从“知其然”到“知其所以然”

```c
void FFT(Complex *a, int lg_n, bool rev) {
    int n = 1 << lg_n;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int t = get_bitrev(i, lg_n);
        if (i < t) {
            Complex tmp = a[i];
            a[i] = a[t], a[t] = tmp;
        }
    }
    for (int i = 0; i < lg_n; i++) {
        int S = 1 << i;
        Complex w1 = (Complex){cos(PI / S), sin(PI / S) * (rev ? -1 : 1)};
        for (int j = 0; j < n; j += 2 * S) {
            Complex w = (Complex){1.0, 0.0};
            Complex *A = a + j;
            for (int k = 0; k < S; k++) {
                Complex t = A[k + S] * w;
                A[k + S] = A[k] - t;
                A[k] = A[k] + t;
                w = w * w1;
            }
        }
    }
}
```

该代码来自 http://uoj.ac/submission/120678

第一部分：傅里叶变换与信号处理

- 信号与信号处理
  - 信号的概念
  - 信号的描述
  - 信号的基本运算
  - 一些特殊的信号
- 傅里叶变换
  - 傅里叶级数 FS
  - 傅里叶变换 FT
  - 信号与采样
  - 离散时间傅里叶变换 DTFT
  - 离散傅里叶变换 DFT

信号与信号处理

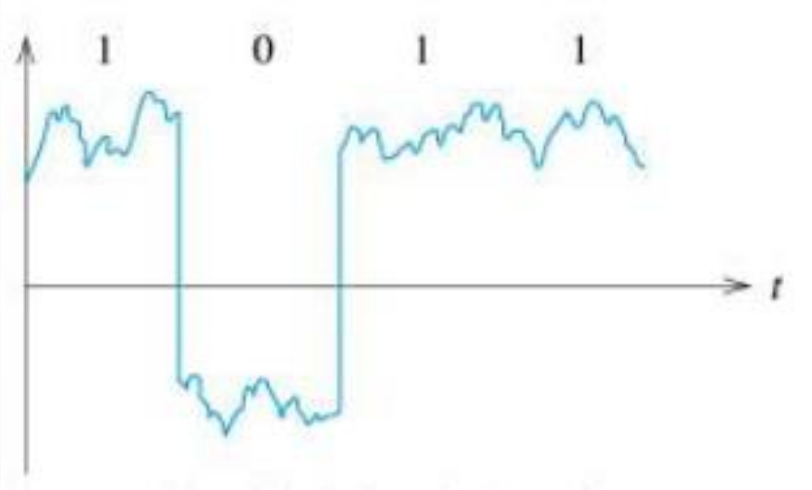
信号的概念

- **信号：**人对物理世界的一种观察
- **观察：**人通过传感器对物理世界的一种测量
- **传感器：**把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置
- **测量：**用一种物理量来表示另一种物理量

- 按物理种类分：光信号、电信号、声波信号、温度信号……
- 按信号处理的过程来分：模拟信号、数字信号
- 按信号的数学性质来分：确定信号、随机信号
- 按信号的时间性质来分：周期信号、非周期信号

信号与信息

- 信号是载有信息的物理量，是系统直接进行加工、变换以及实现通信的对象
- 信号是信息的表现形式，信息则是信号里所蕴含的内容



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Imagen_4.png

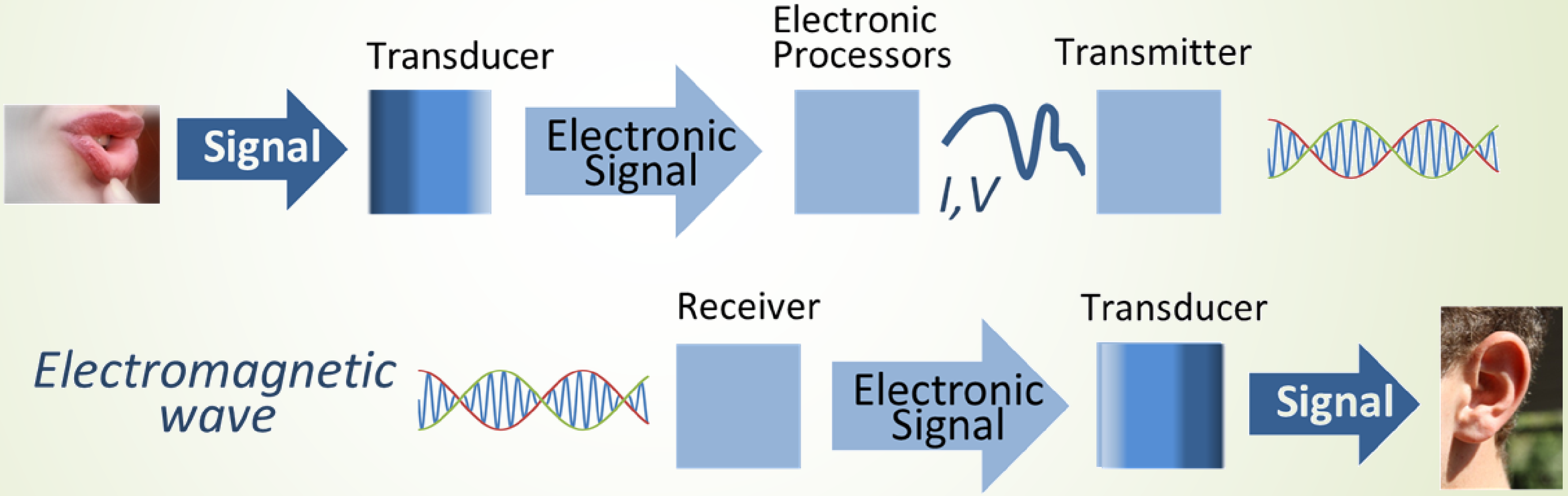
传感器

- **把一种物理变化转换成另一种物理变化的装置**

- 数码相机：光能产生电信号
- 麦克风：空气振动能产生电信号
- 热敏电阻：阻值随温度变化
- 热电偶：温差产生电压
- 加速度传感器
- 压力传感器
- 流量传感器

信号处理的概念

- 对信号进行变换、分析和综合等处理过程的统称



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Signal_processing_system.png

信号的描述

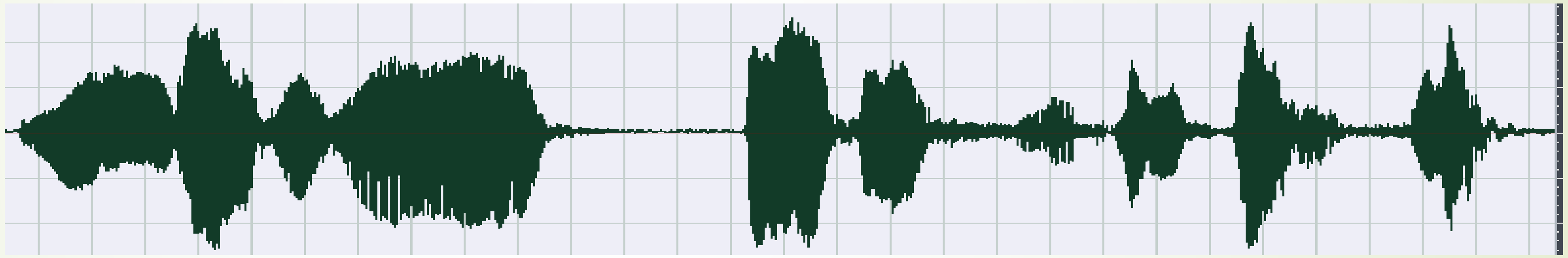
- **数学描述：**
- 使用具体的数学表达式，把信号描述为一个或若干个自变量的函数或序列的形式

$$f(t) = \sin(1000 \times 2\pi \times t)$$

音频来源：作者使用 GoldWave 软件制作

信号的描述

- **波形描述：**
- 按照函数随自变量的变化关系，把信号的波形画出来



您这个人儿，大概喜欢照相。

信号的基本运算

- 四则运算：+ - × ÷
- 平移运算：f(t) → f(t – b)
- 反褶运算：f(t) → f(-t)
- 压扩运算：f(t) → f(at)
- 微分运算：f(t) → $\frac{d}{dt}$f(t)
- 积分运算：f(t) → $\int_{-\infty}^{t}$f(u)du
- 卷积：$(f \ * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

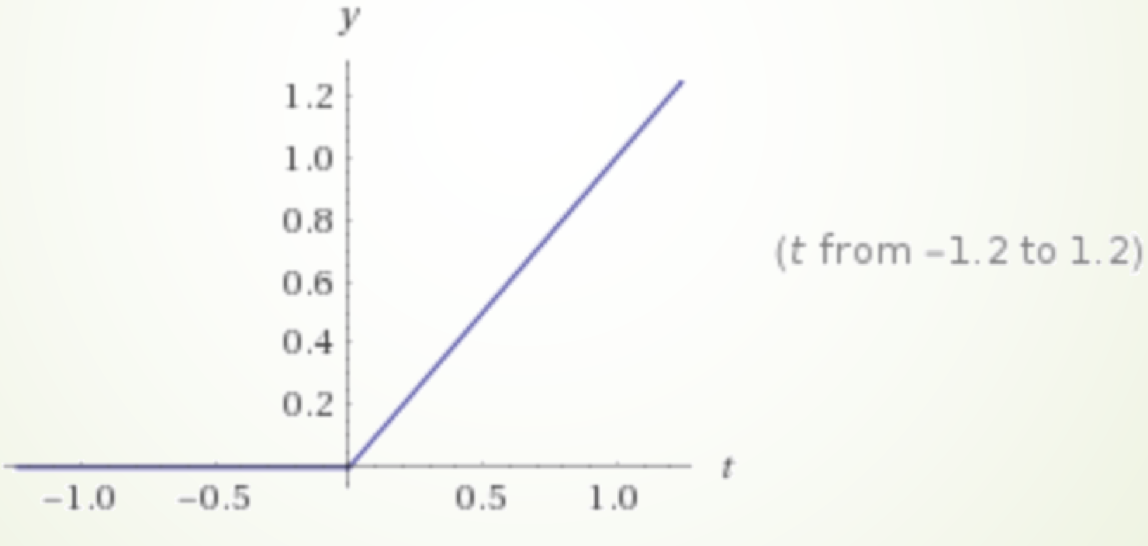
卷积的性质

- $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

- 交换律：$f * g = g * f$
- 分配律：$f * (g + h) = f * g + f * h$
- 结合律：$(f * g) * h = f * (g * h)$
- 与微分运算的关系：$\frac{d}{dt}(f * g) = \left(\frac{d}{dt}f\right) * g$
- 与积分运算的关系：$\int (f * g) = \left(\int f\right) * g$

特殊的信号

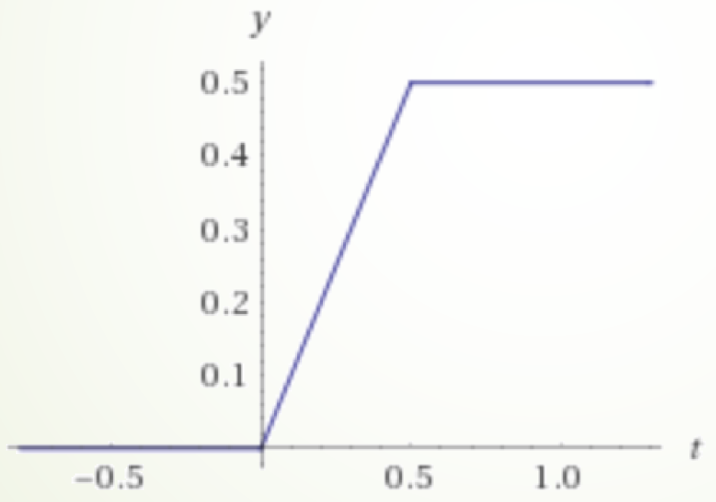
- 单位斜变信号
- R(t) = max(0, t)



图片来源： http://www.wolframalpha.com/input/?i=R(t)+%3D+max(0,+t)

特殊的信号

- **截顶的**单位斜变信号
- R(t) = min(τ , max(0, t))
- 如图为 $\tau = 0.5$：

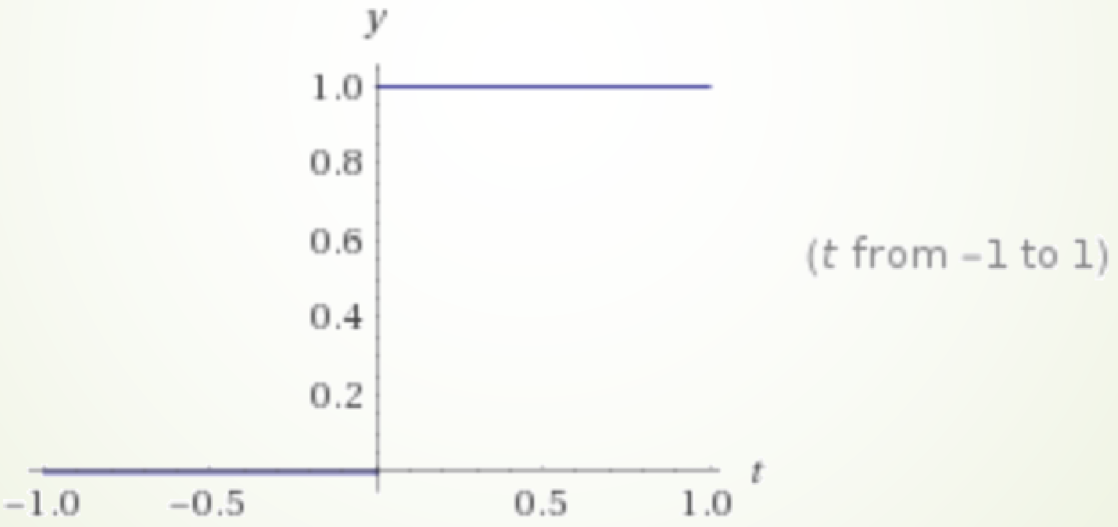


(t from −0.8 to 1.3)

图片来源： http://www.wolframalpha.com/input/?i=R(t)+%3D+min(0.5,+max(0,+t))

特殊的信号

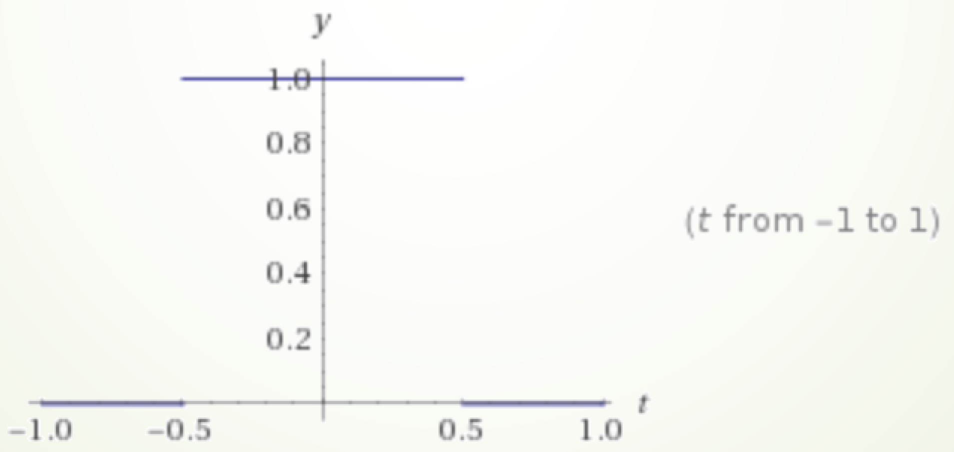
- 单位阶跃信号
- $u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$



图片来源： http://www.wolframalpha.com/input/?i=R(t)+%3D+max(0,+t)

特殊的信号

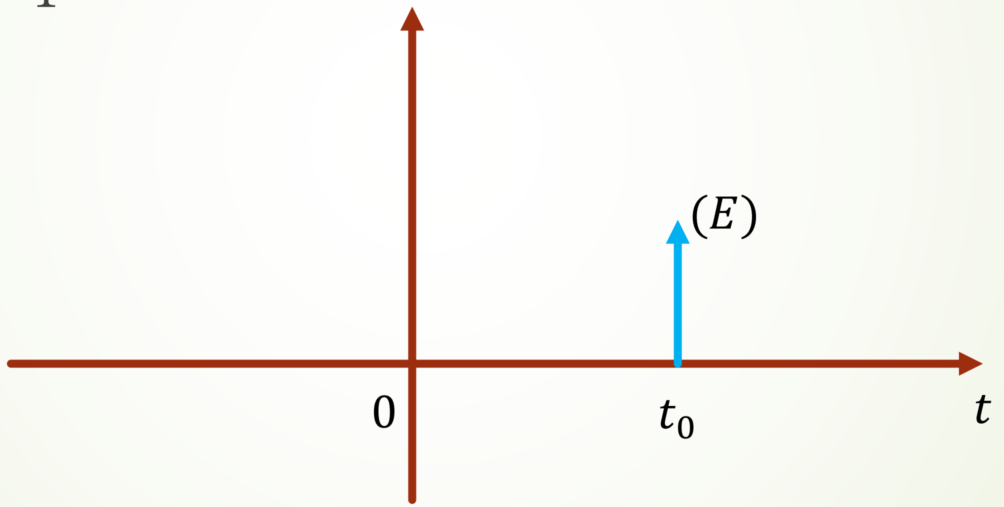
- 单位矩形脉冲信号
- $G_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$
- 如图为 $\tau = 1$，此时 $G(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$



图片来源： http://www.wolframalpha.com/input/?i=step(t%2B0.5)-step(t-0.5)

特殊的信号

- 单位冲激信号
- $\delta(t) = 0, t \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$



$$\delta_{E,t_0}(t) = E\,\delta(t - t_0)$$

傅里叶变换

傅里叶级数 Fourier Series

- 一种信号的分解方法
  - 直流分量+交流分量、偶分量+奇分量、实部分量+虚部分量
- **傅里叶级数（周期信号）**

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\ \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

- ω_1为信号的角频率，T_1为信号的周期
- $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$，$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt\ ,\quad b_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt$$

傅里叶级数 Fourier Series

- 三角形式的傅里叶级数：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,\omega_1 t + b_n \sin n\,\omega_1 t)$$

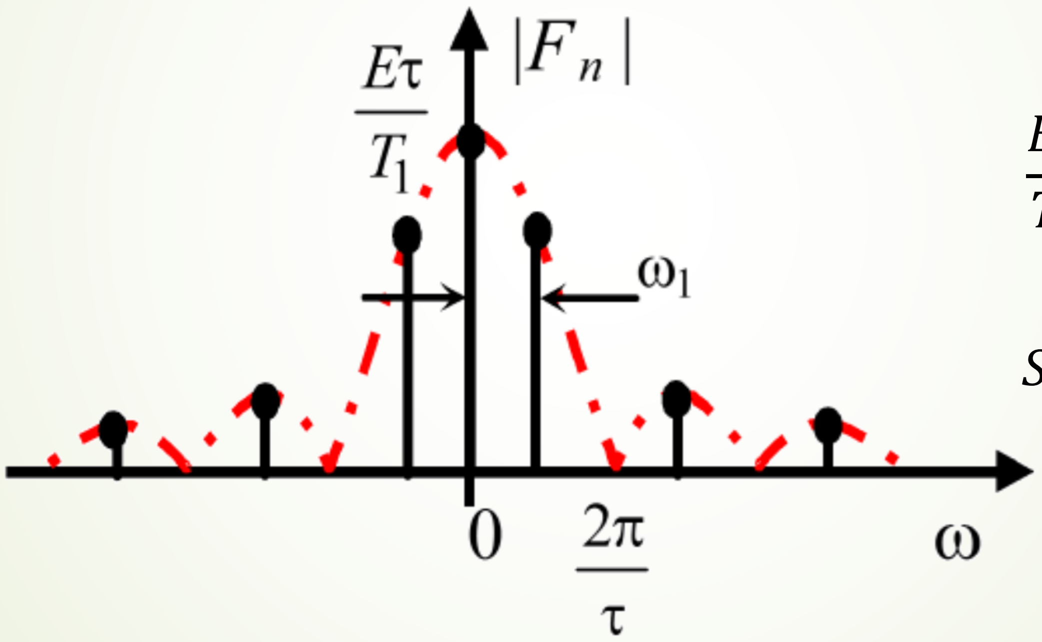
- 复指数形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

周期矩形脉冲信号的 FS

- 假设脉冲宽度为τ，脉冲幅度为E，重复周期为T



红色虚线

$$\frac{E\tau}{T_1} \times Sa(\frac{\tau}{2}t)$$

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

迷思

- 傅里叶级数是对周期信号定义的
- 对于非周期信号呢？

- **方法一：** 截取非周期信号的一段，作为一个“周期”来求傅里叶级数

- **方法二：** 假设周期可以不断增加，直到无限大……

傅里叶变换 Fourier Transform

- 傅里叶级数的周期无限增加
- （经过一些数学推导），我们能得到：

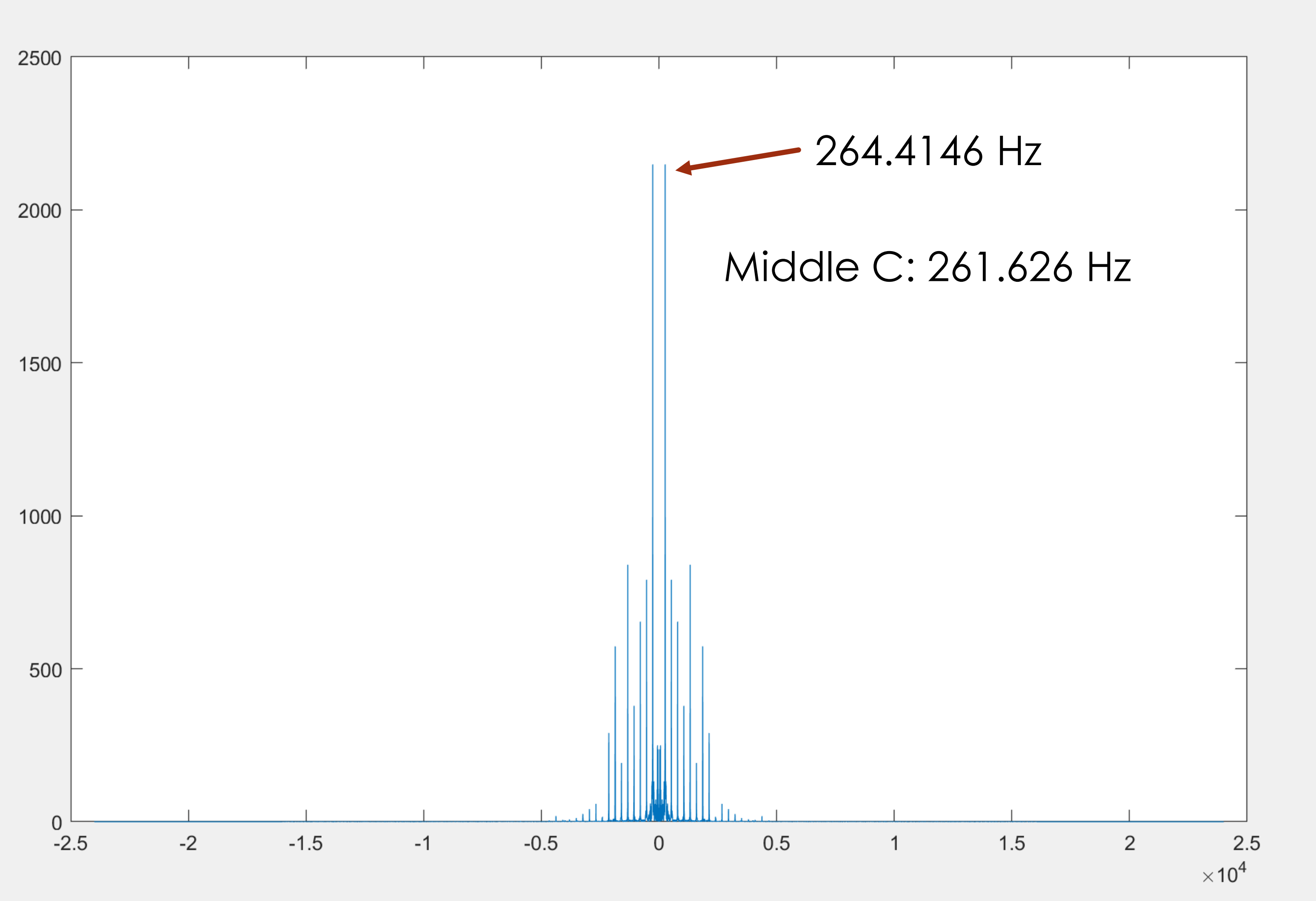
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

- 以及：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- 这就叫**傅里叶变换（Fourier Transform, FT）**及其**逆变换（IFT）**
- **时域**和**频域**之间的变换
- 需要注意：FT 和 IFT 的结果都可能是复数，而不是实数

傅里叶变换 Fourier Transform



图片来源：作者使用 MATLAB 软件制作；音频来源：作者使用自己的手机录制

FS 和 FT 的比较

- **傅里叶级数 FS：**
  - 周期信号
  - 离散频率
  - 频率分量的值
- **傅里叶变换 FT：**
  - 非周期信号
  - 连续频率
  - 频率分量的**密度**

- **FS 和 FT 的关系：**

$$F_n = F(n\omega_1)/T_1$$

傅里叶变换的一些性质

- FT 是**线性运算**
  - 齐次性
$$\mathrm{FT}[a\cdot f(t)] = a\cdot \mathrm{FT}[f(t)]$$
  - 叠加性
$$\mathrm{FT}[f_1(t)+f_2(t)] = \mathrm{FT}[f_1(t)]+\mathrm{FT}[f_2(t)]$$
- FT 的尺度变换特性
$$\mathrm{FT}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
- FT 的卷积特性（时域卷积定理、频域卷积定理）
$$\mathrm{FT}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathrm{FT}[f_1(t)]\cdot \mathrm{FT}[f_2(t)]$$
$$\mathrm{IFT}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{IFT}[F_1(\omega)]\cdot \mathrm{IFT}[F_2(\omega)]$$

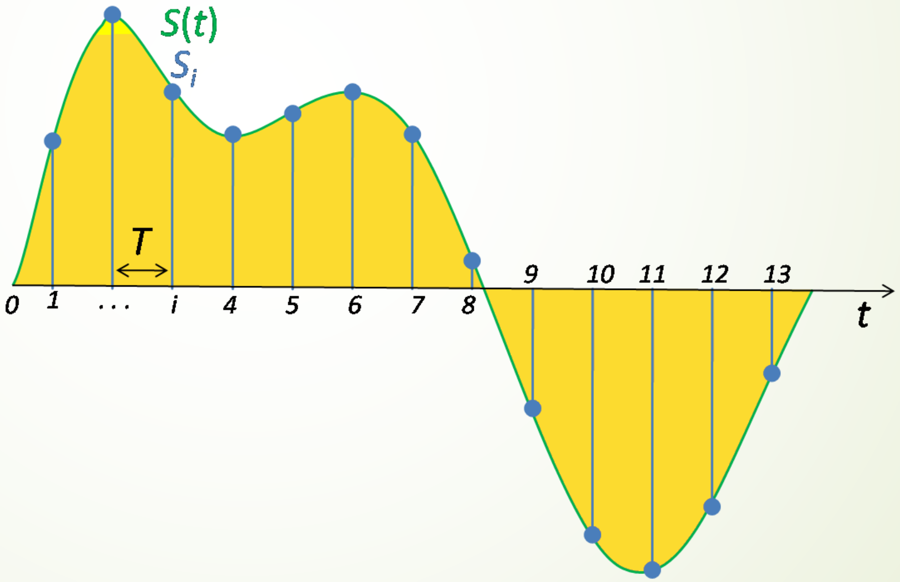
迷思 2

- 在数学上，傅里叶变换能把信号从时域变换到频域
- 但是在计算机中，我们似乎不可能对这些连续函数进行计算
- 甚至不能存储连续函数……

- **先考虑问题的第一步：**
- 如果有一个信号，如何在计算机中表示它？

采样

- 一个最直接的解决方法
- 每隔一定的时间，获取这个时刻的信号的值，保存下来
- 连续 → 离散
- 函数 → 序列
- 实数 → 浮点数



图片来源：https://en.wikipedia.org/wiki/File:Signal_Sampling.png

采样

- 采样的数学定义：

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

- 采样间隔：

$$T$$

- 采样频率：

$$f_s = \frac{1}{T}$$

- 采样角频率：

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

迷思 3

- 一个信号在被采样时，肯定会丢失一些信息
- 那么采样对于傅里叶变换等分析，会有什么影响？

- 具体描述这个问题：
- 一个信号在被采样之后，它的傅里叶变换结果（频域）会发生什么变化？

- 另一个相关的问题：
- 是否有可能，在一定条件下，从采样后的信号恢复出原信号？

采样的性质

- 采样的定义：

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

- 根据**频域卷积**定理，即

$$\mathrm{IFT}[F_1(\omega) \ * F_2(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{IFT}[F_1(\omega)] \cdot \mathrm{IFT}[F_2(\omega)]$$

- 可以推导出：

$$F'(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

- 即，在时域对信号进行采样，就**相当于在频域对信号进行以ω_s为周期的延拓**

采样定理

- 考虑一个（实）信号
- 它的频谱是关于原点共轭对称的
- 假设其截止频率为ω_M

- 考虑对它进行采样
- 如果$2\omega_M > \omega_s$，则采样后信号的频谱相比于原来的频谱会发生相互重叠：**混叠**
- 如果$2\omega_M \leq \omega_s$，则不会发生混叠，且原信号能由采样信号**唯一确定**

- 我们称$2\omega_M \leq \omega_s$为**满足采样定理**
- 我们称$[-\omega_s, \omega_s]$的频率区间为**奈奎斯特区间** (Nyquist Interval)

采样定理

- 我们称$\omega_s < 2\omega_M$的采样为**欠采样**，这会使信号的频谱发生**混叠**

采样率：44100 Hz

采样率：11025 Hz

- 另一个欠采样的例子：高速转动的车轮、电风扇看上去向相反方向转

音频来源：https://music.163.com/song?id=525016797，经过 Goldwave 软件的处理

迷思 4

- 已知对一个信号的采样满足采样定理
- 此时这个信号可以由采样后的信号唯一确定

- 那么如何从采样后的信号恢复原信号呢？

- 一个最简单的方法：
- 用 FT 变换到频域，截取$[-\omega_s, \omega_s]$这个频率区间，然后用 IFT 变换回时域

离散时间傅里叶变换 DTFT

- 对一个采样后的信号进行傅里叶变换：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)e^{-j\omega nT}$$

- 我们称上述变换为**离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform)**

- 注意 DTFT 的结果是以 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ 为周期重复的

离散时间傅里叶变换 DTFT

- 考虑到采样后的信号本质上是个序列
- 可以将 DTFT 的输入信号当做序列处理，也就是将采样频率看作“1”（**频率归一化**）
- 即：

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

- 我们能得到这些概念：
- **T 秒：物理时间、物理频率（模拟频率）、模拟信号**
- **“1”：数字时间、数字频率、数字信号**
- 注意：该 DTFT 的结果以 2π 为周期重复

逆离散时间傅里叶变换 IDTFT

- 由于 IFT 是存在的，所以根据 IFT 和 DTFT 的定义，能得到 IDTFT：

$$f(nT) = \frac{1}{\omega_s}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} F(\omega)e^{j\omega nT}d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

- 从另一个角度说，通过类比 FS 的逆变换，也可以推出上述公式

迷思 5

- **我们现在有了数字信号，很棒棒，但是还有两个遗留问题：**
- 1. DTFT 的输入是无限长的信号（序列），在计算机中存不下？
- 2. DTFT 的频谱的定义域仍然是实数，在计算机中无法计算或存储？

- **第一个问题：**
- 很简单，直接把输入序列截断，只保留长度为 L 的一部分

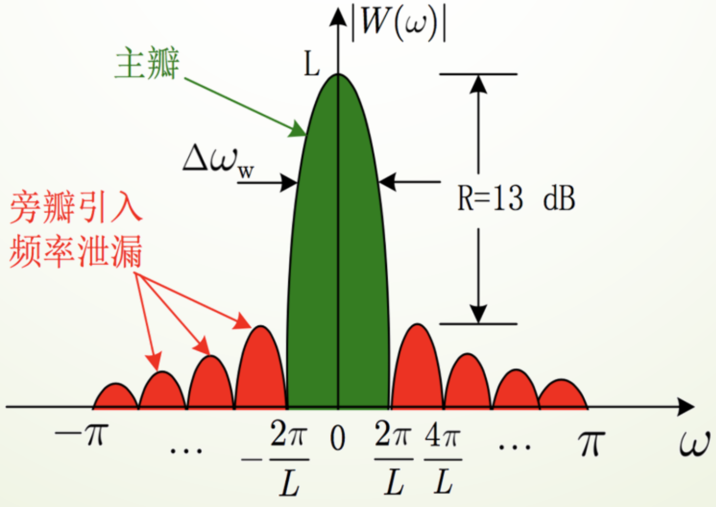
- **第二个问题：**
- 很麻烦，但是可以考虑，在频谱的一个奈奎斯特区间中，只求出 N 个点的值！

迷思 5 (续)

- **第一个问题：**
- 将序列截断，相当于对整个序列乘上一个**窗函数 (Window Function)**，即

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n < L \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

- $w(n)$ 的 FT 结果类似于 Sa 函数（$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$）
- 那么根据**频域卷积定理**，该序列频谱会和 $w(n)$ 的 FT 结果做卷积，发生**频率泄露**



图片来源：清华大学《信号处理原理》课程课件

迷思 5 (续)

- **第二个问题：**
- 在频域只求出 N 个等间隔的点的值，会丢失一些频谱信息
- ★ 事实上，根据采样的性质，这相当于在时域上以 N 为周期将信号重复……
- 这说明当 N 不小于 L 的时候，求出的频谱的点值是正确的

- 不论如何，我们得到了一个 L 点信号到 N 点频域的**离散变换**

离散傅里叶变换 DFT

- 这个离散变换就叫**离散傅里叶变换 (Discrete Fourier Transform)**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{L-1} x(n) W_N^{nk}, k = 0, 1, \cdots, N-1$$

- 其中

$$W_N^{nk} = e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$$

迷思 6

- DFT 能将一个 L 点的序列变换成一个 N 点的序列
- 那么 N 和 L 应该是什么样的关系呢？

- 猜想： 出于对称性，我们选择 N = L？

离散傅里叶变换中 N 和 L 的关系

$$X(k)=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)W_N^{nk}\,,k=0,1,\cdots,N-1$$

- **考虑 N > L：**
- 我们将序列末尾补 N – L 个 0，这不会影响 DFT 的结果

- **考虑 N < L：**
- 这相当于先将原序列下标 mod N 叠加后，再进行 DFT （即，时域混叠）

- **结论：为了方便，N = L**

迷思 7

- 既然有了 DFT，那么是否存在 IDFT？
- 如果存在，那么 IDFT 是什么样的？

- **大胆猜想，~~无需证明~~小心求证**

- **猜想 IDFT 的公式为：**

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk},n=0,1,\cdots,N-1$$

迷思 7 (续)

- **小心求证：**
- 考虑到 DFT 是线性变换，即

$$X = Ax$$

$$A_{ij} = W_N^{ij}$$

- 我们能够证明

$$BA = I$$

- 其中

$$B_{ij} = \frac{1}{N} W_N^{-ij}$$

- 这说明 IDFT 是 DFT 的逆运算

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, n = 0,1, \cdots, N-1$$

逆离散傅里叶变换 IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, n = 0,1,\cdots,N-1$$

- 只是把 DFT 的 W_N^{nk} 换成了 W_N^{-nk}
- 并且把结果除以 N

离散傅里叶变换的一些性质

- 奇偶虚实性~~（请在 30s 内读完这段话）~~

- 奇对称和偶对称序列：
  - 奇函数的 DFT 是奇函数
  - 偶函数的 DFT 是偶函数
- 实序列：
  - 实偶函数的 DFT 是实偶函数；实奇函数的 DFT 是虚奇函数
  - 实函数的 DFT，实部是偶函数，虚部是奇函数；模是偶函数，相位是奇函数
- 虚序列：
  - 虚偶函数的 DFT 是虚偶函数；虚奇函数的 DFT 是实奇函数
  - 虚函数的 DFT，实部是奇函数，虚部是偶函数；模是偶函数，而相位是奇函数

离散傅里叶变换的一些性质

- 频移

$$X(k-l)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n(k-l)}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)W_N^{-nl}\right]W_N^{nk}$$

- 时移

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)]=W_N^{mk}X(k)$$

- 时域卷积

$$\mathrm{DFT}_N[x(n)*y(n)]=\mathrm{DFT}_N[x(n)]\cdot\mathrm{DFT}_N[y(n)]$$

- 频域卷积

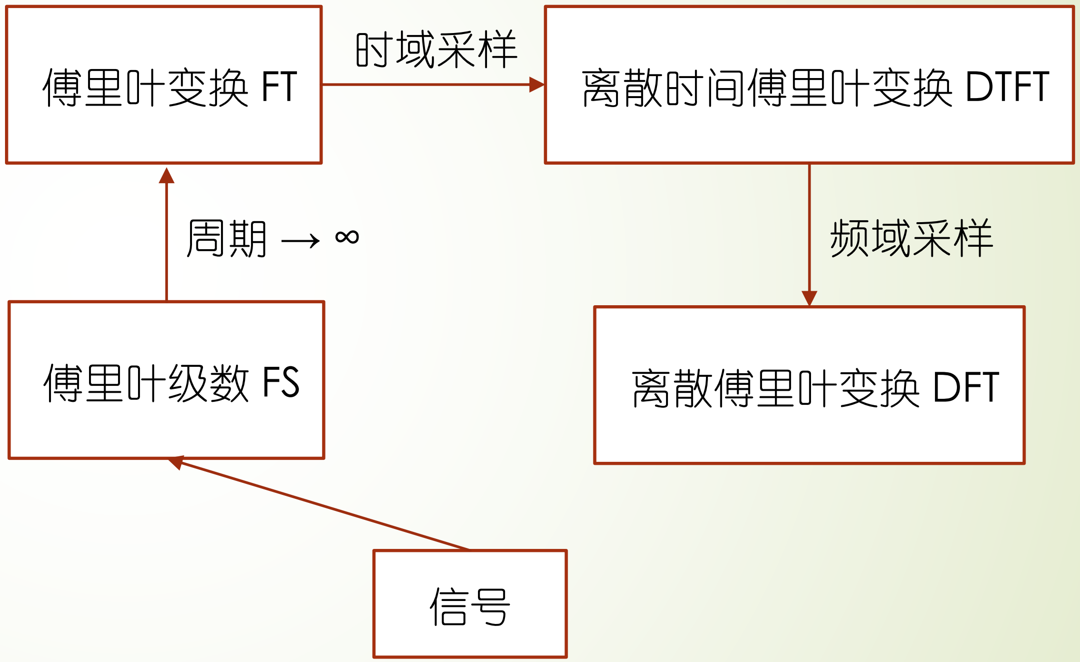
$$\mathrm{IDFT}_N[X(k)*Y(k)]=\frac{1}{N}\mathrm{IDFT}_N[X(k)]\cdot\mathrm{IDFT}_N[Y(k)]$$

FS、FT、DTFT、DFT 的比较

- **傅里叶级数 FS：**
  - 周期信号、离散频率、频率分量的值
- **傅里叶变换 FT：**
  - 非周期信号、连续频率、频率分量的**密度**
- **离散时间傅里叶变换 DTFT：**
  - 非周期采样信号、连续频率、频率分量的**密度**
- **离散傅里叶变换 DFT：**
  - 有限长度非周期采样信号、离散频率、对应 DTFT 频谱频率分量的**密度**

第一部分：傅里叶变换与信号处理

- 信号与信号处理
  - 信号的概念
  - 信号的描述
  - 信号的基本运算
  - 一些特殊的信号
- 傅里叶变换
  - 傅里叶级数 FS
  - 傅里叶变换 FT
  - 信号与采样
  - 离散时间傅里叶变换 DTFT
  - 离散傅里叶变换 DFT



Have a break ~

- “三小时学会 DFT 和 FFT”
- 现在已经过去一半啦……

- 课件在这里 ↘