LOGIKA MATEMATIKA

ALJABAR BOOLEAN

EKO SUHARYANTO - 081310792300

SISTEM INFORMASI

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS PAMULANG

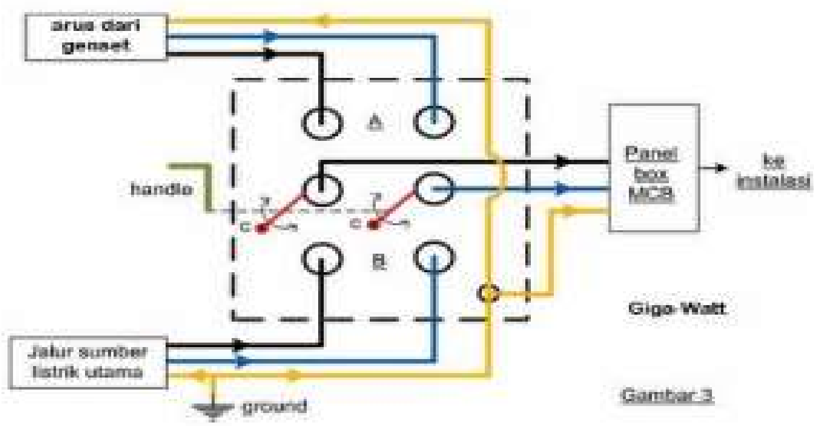
PENDAHULUAN

- Aljabar Boolean ditemukan oleh George Boole, pada tahun 1854.
- Boole melihat bahwa himpunan dan logika proposisi mempunyai sifat-sifat yang serupa (perhatikan kemiripan hukum-hukum aljabar logika dan hukum-hukum aljabar himpunan).
- Dalam buku *The Laws of Thought, Boole* memaparkan aturan-aturan dasar logika.
- Aturan dasar logika ini membentuk struktur matematika yang disebut **aljabar Boolean.**
- Aplikasi: perancangan rangkaian pensaklaran, rangkaian digital, dan rangkaian *IC (integrated circuit)* komputer

PENDAHULUAN

Peraga digital

Integarted Circuit (IC)



Jaringan saklar

ALJABAR BOOLEAN

Misalkan *B* adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator biner, + dan ., dan sebuah operator uner, ’. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari *B.* Maka, tupel

<B, +, .,’, 0, 1>

disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap *a, b, c* ∊ *B* berlaku aksioma berikut:

1. Identitas

(i) $a + 0 = a$

(ii) $a \cdot 1 = a$

ALJABAR BOOLEAN

2. Komutatif
   (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a . b = b . a$
3. Distributif
   (i) $a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$
   (ii) $a + (b . c) = (a + b) . (a + c)$
4. Komplemen
   Untuk setiap *a ϵ B terdapat elemen unik a' ϵ B sehingga*
   (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a . a' = 0$

ALJABAR BOOLEAN

- Berhubung elemen-elemen *B* tidak didefinisikan nilainya (kita bebas menentukan anggota-anggota *B),* maka terdapat banyak sekali aljabar boolean.
- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, orang harus memperlihatkan:
  1. elemen-elemen himpunan *B,*
  2. kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner dan operator uner,
  3. himpunan *B,* bersama-sama dengan dua operator tersebut, memenuhi keempat aksioma di atas

ALJABAR BOOLEAN

- Aljabar himpunan dan aljabar logika proposisi juga merupakan aljabar Boolean karena memenuhi empat aksioma di atas.
- Dengan kata lain, aljabar himpunan dan aljabar proposisi adalah himpunan bagian (*subset)* dari aljabar Boolean.
- Pada aljabar proposisi misalnya:

  \- *B* berisi semua proposisi dengan n peubah.

  \- dua elemen unik berbeda dari *B* adalah ***T*** dan ***F,***

  \- operator biner: v dan ^, operator uner: ~

  \- semua aksioma pada definisi di atas dipenuhi

  Dengan kata lain <*B,* v*,* ^*,* ~*,* ***F, T*** > adalah aljabar Booelan

ALJABAR BOOLEAN 2-NILAI

- Merupakan aljabar Boolean yang paling popular, karena aplikasinya luas.
- Pada aljabar 2-nilai:

(i) $B = \{0, 1\}$,

(ii) operator biner: + dan ., operator uner: ’

(iii) Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	a . b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	a + b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b
0	1
1	0

(iv) Keempat aksioma di atas dipenuhi

EKSPRESI BOOLEAN

- Ekspresi Boolean dibentuk dari elemen-elemen *B* dan/atau peubah-peubah yang dapat dikombinasikan satu sama lain dengan operator +, ., dan ’.
- **Contoh 1:**

0

1

a

b

$a + b$

$a \, . \, b$

$a' \, . \, (b + c)$

$a \, . \, b' + a \, . \, b \, . \, c' + b'$, *dan sebagainya*

HUKUM-HUKUM ALJABAR BOOLEAN

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b\ c) = (a + b)\ (a + c)$ (ii) $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

HUKUM-HUKUM ALJABAR BOOLEAN

Contoh 2: Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean maka kesamaaan berikut:

$$a + a'b = a + b \text{ dan } a(a' + b) = ab$$

adalah benar.

Penyelesaian:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$ *(Hukum Penyerapan)*

$= a + (ab + a'b)$ *(Hukum Asosiatif)*

$= a + (a + a')b$ *(Hukum Distributif)*

$= a + 1 \cdot b$ *(Hukum Komplemen)*

$= a + b$ *(Hukum Identitas)*

HUKUM-HUKUM ALJABAR BOOLEAN

(ii) $a(a' + b) = a\,a' + ab$	*(Hukum Distributif)*
$= 0 + ab$	*(Hukum Komplemen)*
$= ab$	*(Hukum Identitas)*

FUNGSI BOOLEAN

- Contoh-contoh fungsi Boolean:

  $f(x) = x$

  $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

  $f(x, y) = x' y'$

  $f(x, y) = (x + y)'$

  $f(x, y, z) = xyz'$
- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal.**
- Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ terdiri dari 3 buah literal, yaitu *x, y, dan z'.*
- Jika diberikan $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, maka nilai fungsinya:

  $h(1, 1, 0) = 1 . 1 . 0' = (1 . 1) . 1 = 1 . 1 = 1$

BENTUK KANONIK

- Ekspresi Boolean yang menspesifikasikan suatu fungsi dapat disajikan dalam dua bentuk berbeda.
- Pertama, sebagai **penjumlahan dari hasil kali** dan kedua sebagai **perkalian dari hasil jumlah.**

- **Contoh 3:**

  $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$

  dan

  $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

  adalah dua buah fungsi yang sama.

BENTUK KANONIK

- *Minterm: suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung* literal yang lengkap dalam bentuk hasil kali
- *Maxterm: suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung* literal yang lengkap dalam bentuk hasil jumlah.
- **Contoh 4:**

  $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ *3 buah minterm:* $x'y'z$, $xy'z'$, xyz

  $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

  → 5 buah *maxterm:* $(x + y + z)$, $(x + y' + z)$, $(x + y' + z')$, $(x' + y + z')$, *dan* $(x' + y' + z)$

BENTUK KANONIK

- Misalkan peubah (*variable) fungsi Boolean* adalah *x, y,* dan *z*
  Maka:
  x’y → bukan *minterm* karena literal tidak lengkap
  y’z’ → bukan minterm karena literal tidak lengkap
  xy’z, xyz’, x’y’z → *minterm* karena literal lengkap
  (x + z) → bukan maxterm karena literal tidak lengkap
  (x’ + y + z’) → *maxterm* karena literal lengkap
  (xy’ + y’ + z) → bukan *maxterm*

BENTUK KANONIK

- Ekspresi Boolean yang dinyatakan sebagai penjumlahan dari satu atau lebih *minterm* atau perkalian dari satu atau lebih *maxterm* disebut dalam **bentuk kanonik.**

BENTUK KANONIK

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:
  1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product atau SOP)*
  2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum atau POS)*
- Fungsi $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ *dikatakan dalam bentuk* SOP
- Fungsi $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$
  dikatakan dalam bentuk POS

BENTUK KANONIK

Cara membentuk *minterm dan maxterm:*

- Untuk *minterm, setiap peubah yang bernilai 0* dinyatakan dalam bentuk komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan tanpa komplemen.
- Sebaliknya, untuk *maxterm, setiap peubah yang* bernilai 0 dinyatakan tanpa komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan dalam bentuk komplemen.

BENTUK KANONIK

- Cara membentuk *minterm* dan *maxterm* dari table kebenaran untuk dua peubah:

x	y	*Minterm*		*Maxterm*	
		Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\,y$	m_3	$x' + y'$	M_3

BENTUK KANONIK

- Cara membentuk *minterm* dan *maxterm* dari table kebenaran untuk tiga peubah:

			Minterm		*Maxterm*	
x	y	z	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x y z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x y z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

BENTUK KANONIK

- Jika diberikan sebuah tabel kebenaran, kita dapat membentuk fungsi Boolean dalam bentuk kanonik (SOP atau POS) dari tabel tersebut dengan cara:

  - mengambil *minterm* dari setiap nilai fungsi yang bernilai 1 (untuk SOP)

  atau

  - mengambil *maxterm* dari setiap nilai fungsi yang bernilai 0 (untuk POS).

BENTUK KANONIK

Contoh 5:

Tinjau fungsi Boolean yang dinyatakan oleh Tabel di bawah ini.

Nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk kanonik SOP dan POS

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

BENTUK KANONIK

Penyelesaian:

- **SOP**

  Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

  $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$

  atau (dengan menggunakan lambang *minterm),*

  $f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$

BENTUK KANONIK

Penyelesaian:

- **POS**

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

BENTUK KANONIK

$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

atau dalam bentuk lain,

$f(x, y, z) = M_0\, M_2\, M_3\, M_5\, M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$

BENTUK KANONIK

Contoh 6:

Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

BENTUK KANONIK

Penyelesaian:

(a) SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama.

$$x = x(y + y')$$
$$= xy + xy'$$
$$= xy\,(z + z') + xy'(z + z')$$
$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

dan

$$y'z = y'z\,(x + x') = xy'z + x'y'z$$

BENTUK KANONIK

Jadi $f(x, y, z) = x + y'z$

$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$

$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$

atau

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma\,(1,4,5,6,7)$$

BENTUK KANONIK

(b) POS

$$f(x, y, z) = x + y'z$$
$$= (x + y')(x + z)$$

Lengkapi terlebih dahulu literal pada setiap suku agar jumlahnya sama:

$$x + y' = x + y' + zz'$$
$$= (x + y' + z)(x + y' + z')$$
$$x + z = x + z + yy'$$
$$= (x + y + z)(x + y' + z)$$

BENTUK KANONIK

Jadi :

$$f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$$
$$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$$

atau

$$f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \prod(0, 2, 3)$$

Contoh 7:

Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = xy + x'z$ dalam bentuk kanonik POS.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= xy + x'z \\
&= (xy + x')(xy + z) \\
&= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\
&= (x' + y)(x + z)(y + z)
\end{aligned}
$$

BENTUK KANONIK

Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama:

$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$

$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$

$y + z = y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$

Jadi,

$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$

Atau

$f(x, y, z) = M_0 M_2 M_4 M_5 = \prod (0,2,4,5)$

KONVERSI ANTAR BENTUK KANONIK

Misalkan *f* adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan tiga peubah:

$$f(x, y, z) = \Sigma\ (1, 4, 5, 6, 7)$$

dan *f* ’adalah fungsi komplemen dari *f*,

$$f\,'(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

KONVERSI ANTAR BENTUK KANONIK

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi *f* dalam bentuk POS:

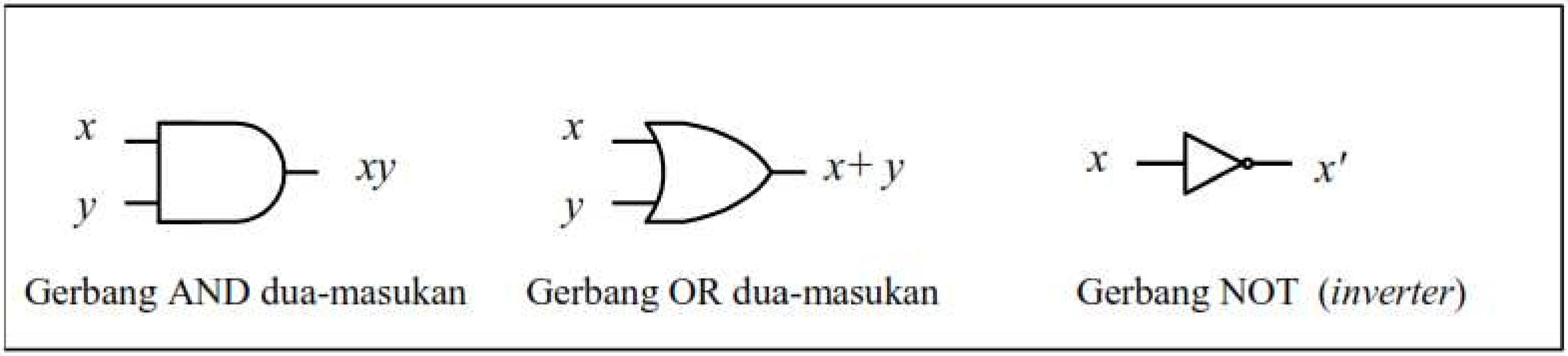
$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0' \,.\, m_2' \,.\, m_3' \\
&= (x'y'z')'\,(x'y\,z')'\,(x'y\,z)' \\
&= (x + y + z)\,(x + y' + z)\,(x + y' + z') \\
&= M_0\, M_2\, M_3 \;= \prod (0,2,3)
\end{aligned}
$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma\,(1, 4, 5, 6, 7) = \prod\,(0,2,3)$.

<u>Kesimpulan</u>: $m_j' = M_j$

RANGKAIAN LOGIKA

- Fungsi Boolean dapat juag direpresentasikan dalam bentuk rangkaian logika.
- Ada tiga gerbang logika dasar: gerbang AND, gerbang OR, dan gerbang NOT



RANGKAIAN LOGIKA

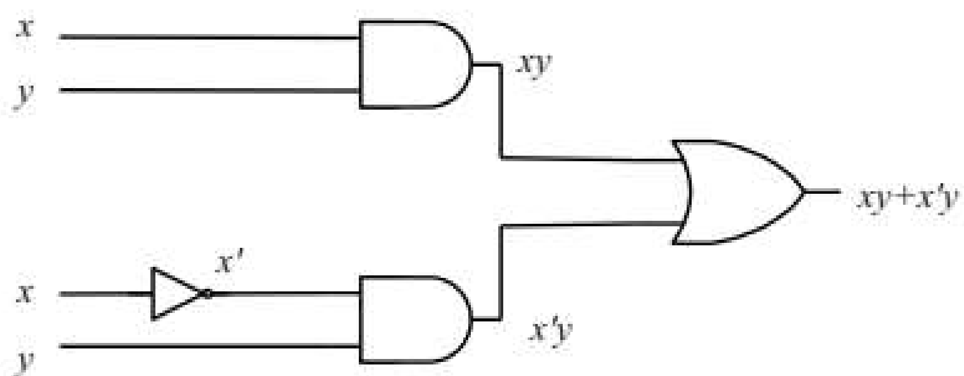
Contoh 8:

Nyatakan fungsi f(x, y, z) = xy + x’y ke dalam rangkaian logika.

Penyelesaian:

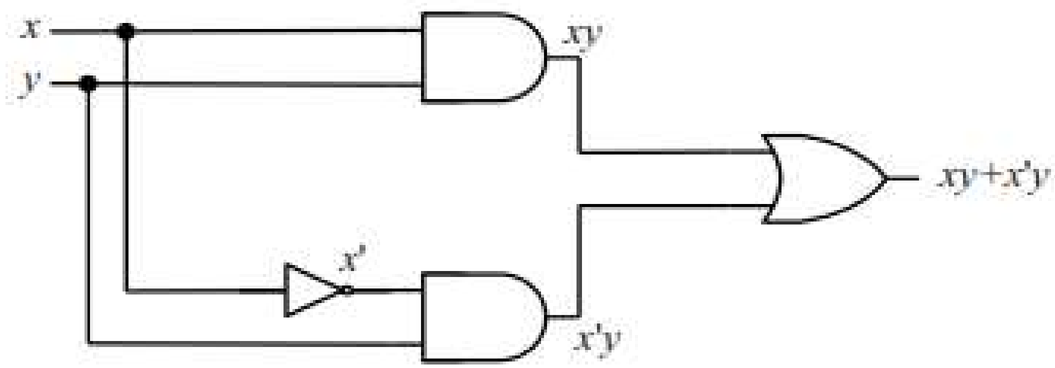
Ada beberapa cara penggambaran

Cara pertama:

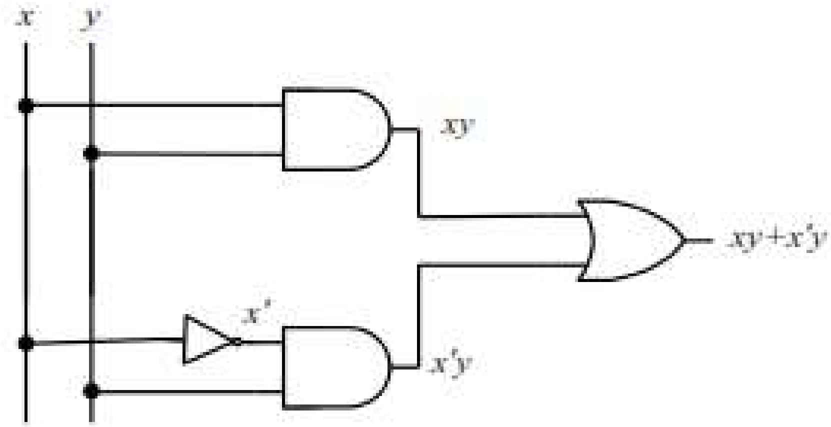


RANGKAIAN LOGIKA

Cara kedua:

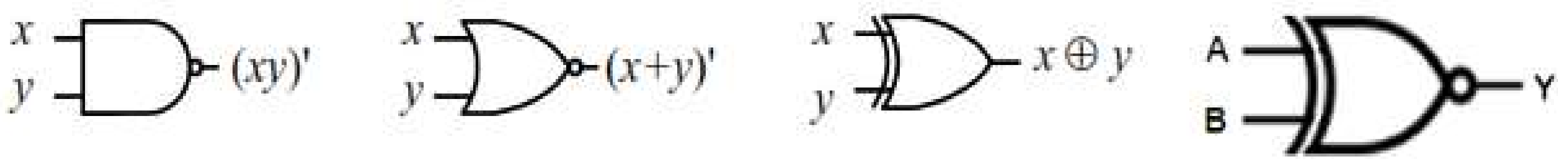


Cara ketiga:



RANGKAIAN LOGIKA

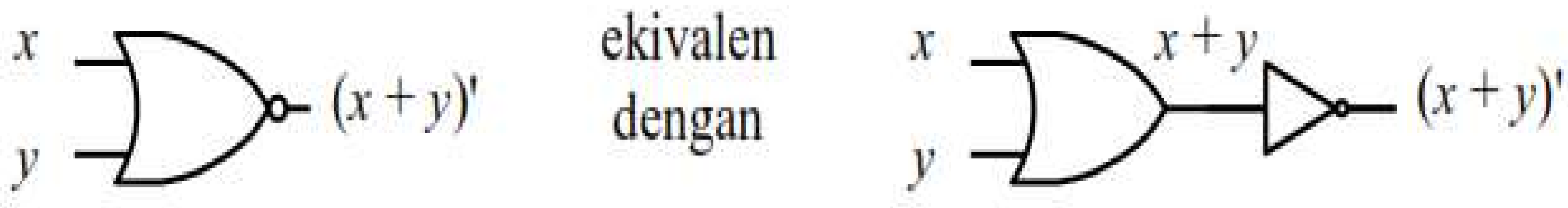
- Gerbang logika turunan: NAND, NOR, XOR, dan XNOR



Gerbang NAND Gerbang NOR Gerbang XOR Gerbang XNOR

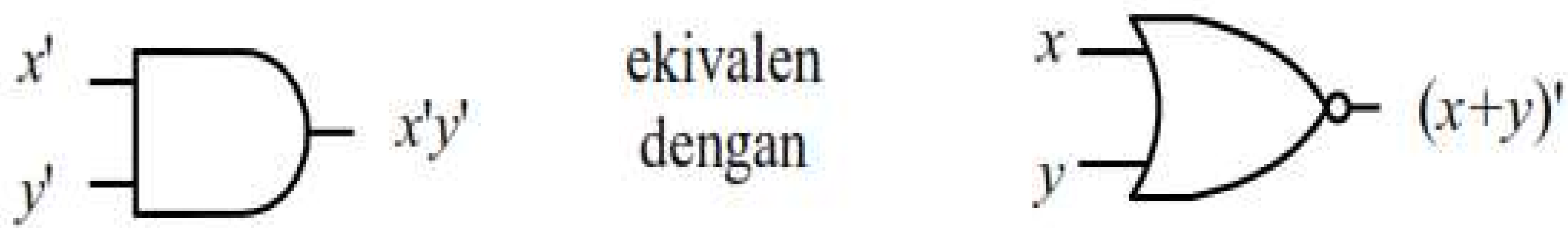
RANGKAIAN LOGIKA

Keempat gerbang di atas merupakan kombinasi dari gerbang-gerbang dasar,
misalnya gerbang NOR disusun oleh kombinasi gerbang OR dan gerbang NOT:



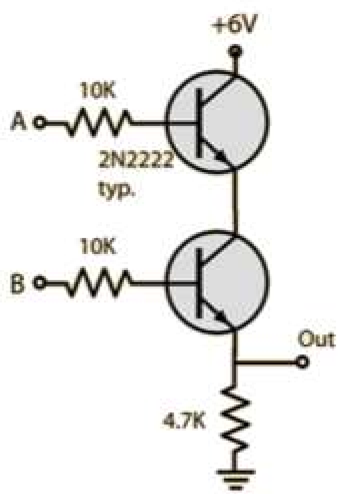
RANGKAIAN LOGIKA

Selain itu, dengan menggunakan hukum De Morgan, kita juga dapat membuat gerbang logika yang ekivalen dengan gerbang NOR dan NAND di atas:

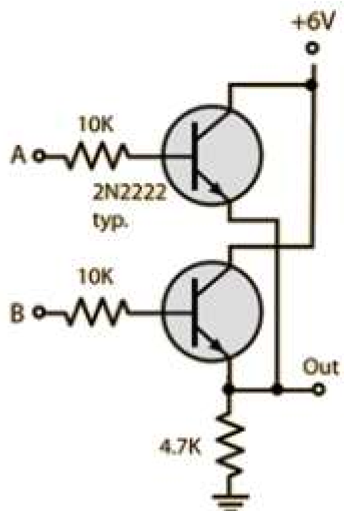


RANGKAIAN LOGIKA

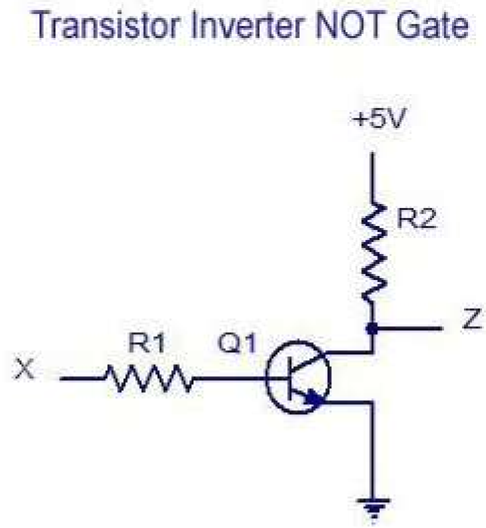
Transistor untuk gerbang logika



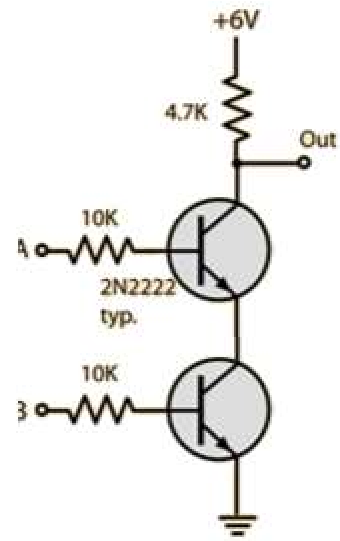
AND



OR



NOT



NAND

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN

- Menyederhanakan fungsi Boolean artinya mencari bentuk fungsi lain yang ekivalen tetapi dengan jumlah literal atau operasi yang lebih sedikit.
- Contoh:

  $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

  disederhanakan menjadi

  $f(x, y) = x' + y'$.

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN

- Dipandang dari segi aplikasi aljabar Boolean, fungsi Boolean yang lebih sederhana berarti rangkaian logikanya juga lebih sederhana (menggunakan jumlah gerbang logika lebih sedikit).

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN

- Tiga metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean:
  1. Secara aljabar, menggunakan hukum-hokum aljabar Boolean.
  2. Metode Peta Karnaugh.
  3. Metode Quine-McCluskey (metode tabulasi)

PENYEDERHANAAN FUNGSI BOOLEAN

- Tiga metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean:
  1. Secara aljabar, menggunakan hukum-hokum aljabar Boolean.
  2. Metode Peta Karnaugh.
  3. Metode Quine-McCluskey (metode tabulasi)
- Yang dibahas hanyalah **Metode Peta Karnaugh**

METODE PETA KARNAUGH

- Peta Karnaugh (atau *K-map) merupakan metode grafis* untuk menyederhanakan fungsi Boolean.
- Metode ini ditemukan oleh Maurice Karnaugh pada tahun 1953. Peta Karnaugh adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak (berbentuk bujursangkar) yang bersisian.

METODE PETA KARNAUGH

- Tiap kotak merepresentasikan sebuah *minterm.*
- Tiap kotak dikatakan bertetangga jika *minterm-minterm* yang merepresentasikannya berbeda hanya 1 buah literal.

Peta Karnaugh dengan dua peubah

m_0	m_1
m_2	m_3

Penyajian 1

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

Penyajian 2

	y'	y
x'	$x'y'$	$x'y$
x	xy'	xy

Penyajian 3

METODE PETA KARNAUGH

Peta Karnaugh dengan tiga peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

x \ yz	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

METODE PETA KARNAUGH

Peta Karnaugh dengan empat peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

wx \ yz	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

METODE PETA KARNAUGH

Cara mengisi peta Karnaugh

- Kotak yang menyatakan *minterm* diisi “1”
- Sisanya diisi “0”
- Contoh: $f(x, y, z) = x'yz' + xyz' + xyz$

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

METODE PETA KARNAUGH

Contoh: $f(x, y, z) = xz' + y$

xz': Irisan antara:

x → semua kotak pada baris ke-2

z' → semua kotak pada kolom ke-1 dan kolom ke-4

METODE PETA KARNAUGH

y:

y → semua kotak pada kolom ke-3 dan kolom ke-4

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1

$xz' + y$

METODE PETA KARNAUGH

Pengisian peta Karnaugh dari tabel kebenaran

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tinjau hanya nilai fungsi yang memberikan 1. Fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran adalah $f(x, y) = x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz$.

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

TERIMA KASIH