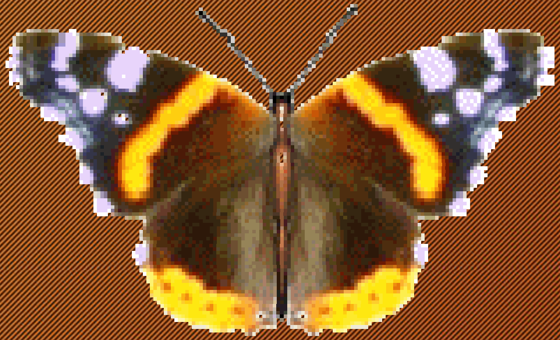


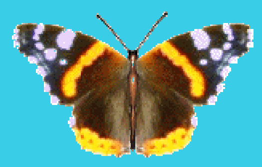
DETERMINAN MATRIKS

MATRIK

SISTEM INFORMASI

FAKULTAS TEKNIK – UNIVERSITAS PAMULANG

DETERMINAN MATRIKS



Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi skalar dengan domain matriks bujur sangkar. Dengan kata lain, determinan merupakan pemetaan dengan domain berupa matriks bujur sangkar, sementara kodomain berupa suatu nilai skalar.

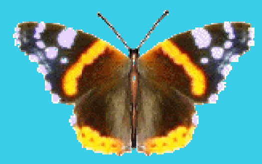
DETERMINAN MATRIKS

Determinan suatu matriks sering digunakan dalam menganalisa suatu matriks, seperti : untuk memeriksa keberadaan invers matriks, menentukan solusi sistem persamaan linear dengan aturan cramer, pemeriksaan basis suatu ruang vektor dan lain-lain.

DETERMINAN MATRIKS

Pada bab ini akan dijelaskan tentang penentuan nilai determinan suatu matriks dengan menggunakan definisi (permutasi), operasi baris elementer dan ekspansi kofaktor.
Selain itu, akan dijelaskan hubungan determinan dengan invers matriks.

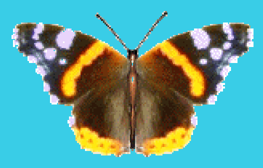
PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS



Permutasi merupakan cabang ilmu kombinatorika. Permutasi merupakan susunan yang mungkin dibuat dengan memperhatikan urutan.

Contoh :
Permutasi dari {1, 2, 3} adalah
(1,2,3), (1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS



Selanjutnya diperkenalkan definisi **invers** dalam permutasi, yaitu jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutan permutasi.

Misalkan dalam suatu permutasi tertulis (2, 1, 3) maka dalam urutan bilangan tersebut, bilangan yang lebih kecil dari 2 hanya bilangan 1 sehingga nilai inversnya adalah 1.

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Sementara itu, setelah bilangan 1 hanya ada bilangan 3, tidak ada bilangan yang lebih kecil dari 1 sehingga inversnya adalah nol. Jumlah invers dalam permutasi tersebut adalah 1 + 0 = 1.

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Selanjutnya, jumlah invers pada suatu permutasi akan didefinisikan sebagai berikut :

- Permutasi genap yaitu jumlah invers adalah bilangan genap.
- Permutasi ganjil yaitu jumlah invers adalah bilangan ganjil.

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut ini :

Contoh :

Jumlah invers pada permutasi dari {1, 2, 3}

(1,2,3) → 0 + 0 = 0 → permutasi genap

(1,3,2) → 0 + 1 = 1 → permutasi ganjil

(2,1,3) → 1 + 0 = 1 → permutasi ganjil

(2,3,1) → 1 + 1 = 2 → permutasi genap

(3,1,2) → 2 + 0 = 2 → permutasi genap

(3,2,1) → 2 + 1 = 3 → permutasi ganjil

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Definisi Determinan Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hasil kali elementer A → hasilkali *n* buah unsur A tanpa ada pengambilan unsur dari baris/kolom yang sama.

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ada 6 (3!) hasil kali elementer dari matriks A, yaitu:

$a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$,
$a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Hasil kali elementer bertanda

$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$

$-\,a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$

$-\,a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$

$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$

$-\,a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$

Perhatikan…
Tanda (+/-) muncul sesuai hasil klasifikasi permutasi indeks kolom,
yaitu : jika genap → + (positif)
jika ganjil → - (negatif)

Jadi, Misalkan A_{nxn} maka determinan dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda matriks tersebut.

Notasi : Det(A) atau |A|

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS

Contoh :

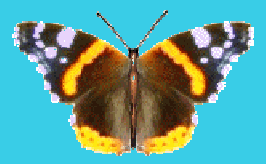
Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka:

det(A)= $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13} a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Atau

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

PERMUTASI DAN DETERMINAN MATRIKS



Contoh Soal :

Tentukan determinan matriks dari : $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(B) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right.$$

$$= \boxed{(3)(1)(1)} + \boxed{(2)(0)(-2)} + \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(3)(0)(-2)} - \boxed{(2)(1)(1)}$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

TUGAS / LATIHAN

Tentukan determinan matriks dari :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

TERIMA KASIH

MATRIK

SISTEM INFORMASI

FAKULTAS TEKNIK – UNIVERSITAS PAMULANG