信道容量

信道（信息通道）

- 信道是介质的一个统计模型，信号通过这个介质进行传输或是在这个介质中进行存储。
- 一般来说，信道总是受到干扰的，我们需要用公式加以描述，以便计算有多少信息真正通过一个给定的信道。

信道

x1

x2

.

.

X .

xn

→ P(yj | xi) →

y1

y2

.

. Y

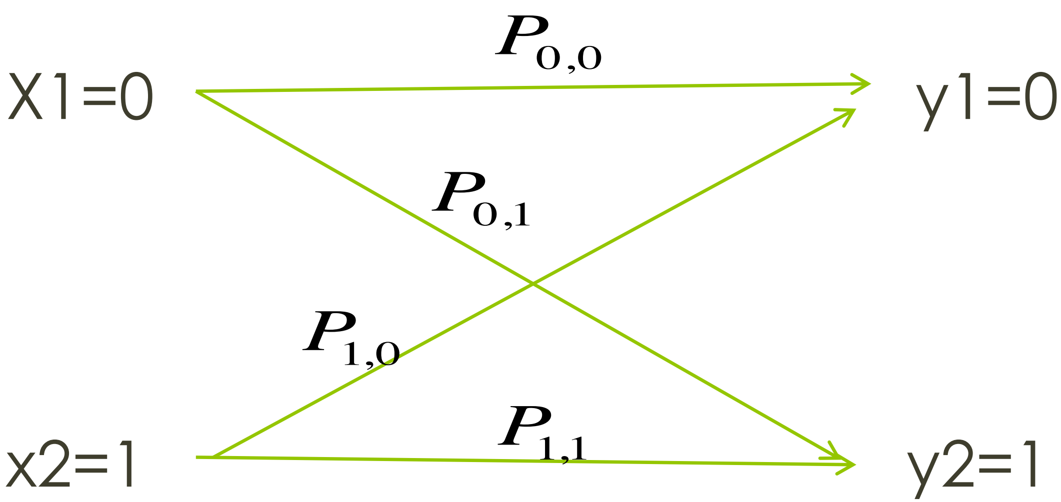
.

ym

P(yj | xi)表示当输入为xi时输出为yj时的概率。

二元对称信道

- 二元对称信道是一个最有用的信道模型。



二元信道被称为对称的如果

$$P_{0,0} = P_{1,1}, P_{1,0} = P_{0,1}.$$

- 设输入符号的概率是

$$P(X=0)=p, P(X=1)=1-p.$$

再设二元对称信道的概率是

$$P_{0,0}=P_{1,1}=P, P_{1,0}=P_{0,1}=Q.$$

信道矩阵：

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q & P \end{bmatrix}$$

- 这一模型中的信道完全可以用条件概率所描述，即

$$(P_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le m} = (P(y_j \mid x_i))_{1\le i\le n,1\le j\le m}.$$

信道转移矩阵具有如下性质：
1 第 I 行对应于第i个输入符号xi
2 第 j 列对应于第 j 个输出符号 yj
3 每一行中全部元素的和为1

$$\sum_{j=1}^{m} P_{i,j} = 1$$

4 假设P(xi)是输入符号xi的发生概率，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(y_j \mid x_i)P(x_i)=1.$$

概率转移矩阵完全描述了矩阵的特性，我们总是假定信道是稳定的，即这些概率不随时间而改变。

回忆：条件概率的贝叶斯公式

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j \mid x_i) = P(y_j)P(x_i \mid y_j).$$

信道的一些基本关系式

- 在传输系统中输入符号是按概率 $P(x_i)$ 选择的，接收符号发生的概率 $P(y_j)$，这两组概率之间的关系如下：

$$P(x_1)P_{1,1}+P(x_2)P_{2,1}+\ldots+P(x_n)P_{n,1}=P(y_1)$$

$$P(x_1)P_{1,2}+P(x_2)P_{2,2}+\ldots+P(x_n)P_{n,2}=P(y_2)$$

……

$$P(x_1)P_{1,m}+P(x_2)P_{2,m}+\ldots+P(x_n)P_{n,m}=P(y_m)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) P_{i,j} = P(y_j), j = 1, 2, \ldots, m.$$

$$P(x_i, y_j) = P(x_i) P(y_j \mid x_i) = P(y_j) P(x_i \mid y_j).$$

$$P(x_i \mid y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)} = \frac{P(x_i) P(y_j \mid x_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(x_i) P(y_j \mid x_i)}.$$

- 例 设有一个二元对称信道，P=9/10, Q=1/10, 输入为X=0的概率为p=19 / 20，而X=1的概率为1-p=1/20. 则
- $P(Y=0)=P(X=0)P(Y=0|X=0)+P(X=1)P(Y=0|X=1)=172/200$

$$P(Y=1)=P(X=0)P(Y=1|X=0)+P(X=1)P(Y=1|X=1)=28/200$$

$$P(X=0|Y=0)=171/172.$$

$$P(X=1|Y=0)=1/172.$$

$$P(X=0|Y=1)=19/28.$$

$$P(X=1|Y=1)=9/28.$$

信道的信息传输率

- 信息传输率R是平均每个符号所能传送的信息量，而平均互信息I(X;Y)就是接收到符号集Y后平均每个符号获得的关于X的信息量，故信道的信息传输率就是 平均互信息量。
- $$R = I(X;Y) = H(X) - H(X|Y).$$
- 若平均传送一个符号为 t 秒，则信道每秒平均传送的信息量

$$R_t = \frac{I(X;Y)}{t}$$

信道容量

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i y_j)\log\frac{p(y_j\mid x_i)}{p(y_j)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j\mid x_i)\log\frac{p(y_j\mid x_i)}{\sum_{i=1}^{n}p(x_i)p(y_j\mid x_i)}$$

I(X;Y) 是$P(x_i)$和 $P(y_j\mid x_i)$的二元函数，当信道特性$P(y_j\mid x_i)$固定后，I(X;Y) 随信源概率分布变化$P(x_i)$

信道容量

- I(X;Y) 是 $P(x_i)$ 的上凸函数，总能找到一个 $P(x_i)$ 使得信息率达到最大。
- 信道容量：信道中最大的传输数率

$$C = \max_{P(x)}\{I(X;Y)\}$$

- 单位 比特/信道符号
- 单位时间的信道容量 比特/秒

信道容量

$$C = \max_{P(x_i)} I(X;Y)$$

$$= \max_{P(x_i)} [H(X) - H(X|Y)]$$

$$= \max_{P(x_i)} [H(Y) - H(Y|X)]$$

$$C_t = \frac{1}{t} \max_{P(x_i)} I(X;Y)$$

均匀信道

定义 均匀信道是指它的信道转移矩阵中的每一行的元素都是第一行元素的一个置换.

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & P_{n,n} \end{bmatrix}$$

强对称（均匀）离散信道

$$X \in \{x_{1,}\dots,x_n\}, Y \in \{y_1,\dots,y_n\}.$$

$$\begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{n-1} & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \frac{p}{n-1} & 1-p & \cdots & \frac{p}{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{n-1} & \frac{p}{n-1} & \cdots & 1-p \end{bmatrix}$$

P 总体错误概率

特点及信道容量

- 每行、每列都是同一集合各元素的不同排列

$$\{1-p, \frac{p}{n-1}, \ldots, \frac{p}{n-1}\}$$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(x_i, y_j)\log P(y_j|x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(x_i) H_{ni}$$

- 其中 $H_{ni}=-\sum_{i=1}^{n}P(y_j|x_i)\log P(y_j|x_i)$

根据信道的特点，我们有

$$H_{ni}=-(1-p)\log(1-p)-p\log\frac{p}{n-1}$$

Xi 不同时只是求和顺序不同，结果完全一样，所以 H_{ni} 与X无关，是常数。

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i)H_{ni}=H_{ni}$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H_{ni}$$

$$C=\max_{P(x_i)}[H(Y)-H(Y|X)]$$

$$=\max_{P(x_i)}[H(Y)-H_{ni}]$$

输入符号的概率如何分布，才能使得H(Y) 达到最大？

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) P(y_j \mid x_i)$$

- 当 x1=…=xn=1/n, H(Y)取最大值为log n.

所以 信道容量为

$$C = \log n - H_{ni}$$

Shannon定理

- 定理　可以证明存在这样一种编码方法，利用这种方法通信速率可以任意地接近于二元对称信道的信道容量，可靠度又可以任意接近于1.

- 注 shannon定理要求码长足够长，这是不实用的。