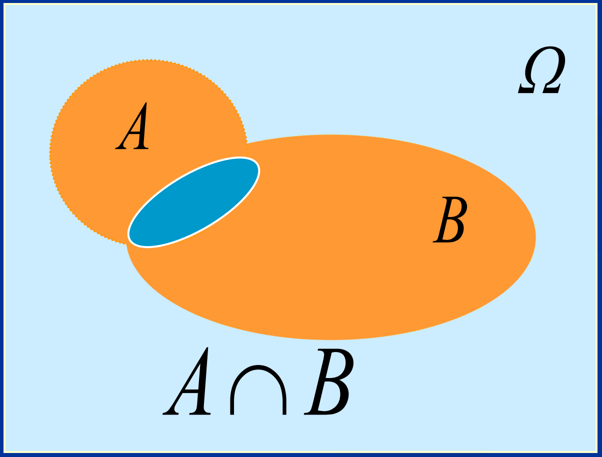
§1.3 条件概率与事件的独立性

一、条件概率

在概率论中，有时需要考察事件B发生的条件下事件A发生的概率，如：



定义 设A、B为两事件, $P(B)>0$, 则

称 $P(AB)/P(B)$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率，记为 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

相对于条件概率， $P(A)$ 为无条件概率或原概率。

注1. 如果$B=\Omega$，则 $P(A|B)=P(A)$. 如果$B\neq\Omega$，则条件概率相当于将样本空间Ω缩小为B.

注2. $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率. $P(A)>0$

条件概率也是概率, 故具有概率的性质：

- 非负性 $0 \le P(A|B) \le 1$
- 规范性 $P(B|B) = 1$
- 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

其中 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互不相容事件。

上述三条性质对应于概率的公理化定义的三条性质,除此以外有下列性质:

- $P(\phi|B)=0$

- $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \middle| B\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$

有限可加性

其中 $A_1, A_2, \cdots$ **为两两互不相容事件。**

- $P(A|B)+P(\overline{A}\mid B)=1$

可减性

- $P(A_2-A_1\mid B)=P(A_2\mid B)-P(A_1\mid B)$, 若$A_1\subset A_2$

- $$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 A_2 | B)$$

加法公式

$$P(A_1 \cup A_2 | B) \le P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$$

半可加性

例1 考虑有两个小孩的家庭,问其中至少有一个女孩的家庭中, 另一小孩也是女孩的概率有多大?(假设生男,生女是等可能的)

解：根据题意样本空间为

$$\Omega=\{(男,男)(男,女)(女,男)(女,女)\}$$

B={至少有一个女孩家庭}
={(男,女)(女,男)(女,女)}

AB={至少有一个为女孩家庭中,
另一个小孩也是女孩} ={(女,女)}

于是所求概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

二、乘法公式

利用条件概率求积事件的概率即乘法公式

$$P(AB)=P(A)P\left(B \middle| A\right) \quad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P\left(A \middle| B\right) \quad (P(B)>0)$$

推广

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P\left(A_2 \middle| A_1\right)\cdots P\left(A_n \middle| A_1A_2\cdots A_{n-1}\right)$$

$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

例2 一批产品共10件，其中3件为次品，每次从中任取一件不放回，问第三次才取到正品的概率等于多少？

解 A_1表示第一次取得次品; A_2表示第二次取得次品

A_3表示第三次取得正品，则

$P(A_1)=3/10$;　$P(A_2|A_1)=2/9$;　$P(A_3|A_1A_2)=7/8$；

根据乘法公式有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=0.0583.$$

三、事件的独立性

例3 已知袋中有3只红球, 2只白球.从袋中有放回地取球两次, 每次取1球, 用A表示“第一次取得红球”B表示“第二次取得红球”,求P(B), P(B|A).

解 $P(A)=P(B)=\dfrac{3}{5}$ $P(AB)=\dfrac{9}{25}$,

$$\Longrightarrow \quad P(B\mid A)=P(B)$$

事件 A 发生与否对 B 发生的概率没有影响可视为事件 A 与 B 相互独立.

定义 设 A , B 为两事件，若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件A与事件B相互独立

注1. 两事件 A 与 B 相互独立是相互对称的

注2.若A 与 B 相互独立

$$P(A)>0,\ 则P(B)=P(B|A)$$

$$P(B)>0,\ 则P(A)=P(A|B)$$

注3.若 $P(A)>0,\ P(B)>0$

则“事件 A 与 事件 B 相互独立”和“事件 A 与 事件 B 互斥(互不相容)”不能同时成立 (自行证明)

两事件相互独立的性质

性质1. A, B独立$\Leftrightarrow$ $A,\bar{B}$独立$\Leftrightarrow$

$\bar{A}, B$ 独立$\Leftrightarrow$ $\bar{A},\bar{B}$ 独立.

试证其一 $A,\bar{B}$ 独立 $\Rightarrow A,B$ 独立

事实上

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})$$

$$=P(A)-P(A)P(\bar{B})$$

$$=P(A)\left[1-P(\bar{B})\right]=P(A)P(B)$$

性质2．A、B两个事件独立，则　　（推广）

$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$$

定义 **三事件 *A*, *B*, *C* 相互独立**,是指下面的关系式同时成立：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases} \quad (1)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \quad (2)$$

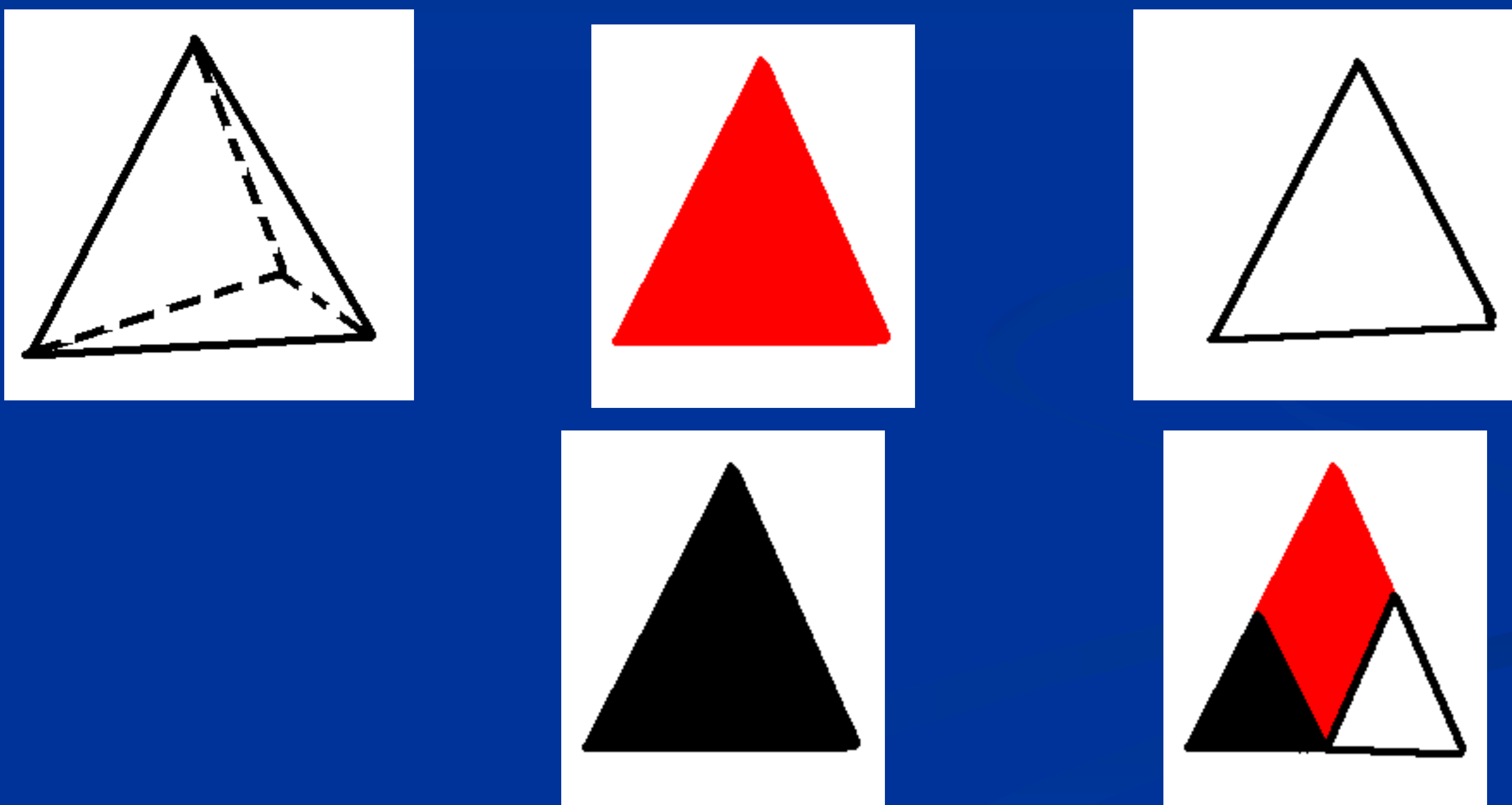
注1)三事件A, B, C 相互独立,要求满足(1)(2)式, 也称 A, B, C 为相互独立的事件组.

注2)仅满足(1)式时,称 A, B, C 两两独立,也称 A, B, C 为两两独立的事件组.

注3) 关系式(1) (2)不能互相推出.

$$A, B, C \text{ 相互独立} \quad \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \quad A, B, C \text{ 两两独立}$$

例4 有一均匀的正四面体，三面分别涂有红、白、黑色，第四面涂有红、白、黑三种颜色



将四面体向上抛掷一次, 观察向下一面出现的颜色。

设事件 $\begin{cases} A \text{ —— 红色} \\ B \text{ —— 白色} \\ C \text{ —— 黑色} \end{cases}$

则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(AB)=\frac{1}{4}=P(BC)=P(AC)$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$$

本例说明 不能由 A, B, C 两两独立

$\longrightarrow$ A, B, C 相互独立

两两独立的事件组未必是独立的事件组。

定义 n **个事件** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **相互独立**是指下面的关系式同时成立

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),\ 1 \le i < j \le n$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),\ 1 \le i < j < k \le n$$

…………………………………

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

性质2（推广）若 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

特别，当 $P(A_i)=p$ ，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-(1-p)^n$$

例5 设每个人的血清中含肝炎病毒的概率为0.4%, 求来自不同地区的100个人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率

解 设这100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒为事件 A, 第 i 个人的血清中含有肝炎病毒为事件 A_i $\quad i=1,2,\ldots,100$

则 $A=\bigcup_{i=1}^{100} A_i$

$$P(A)=1-\prod_{i=1}^{100}\left[1-P(A_i)\right]=1-(1-0.004)^{100}\approx 0.33$$

若B_n表示n个人的血清混合液中含有肝炎病毒，则

$$P(B_n)=1-(1-p)^n,\qquad 0<p<1$$

$$n=1,2,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}P(B_n)=1$$

—— 不能忽视小概率事件,
小概率事件迟早要发生

§1.4　全概率公式与Bayes 公式

全概率公式和贝叶斯公式主要用于计算比较复杂事件的概率，它们实质上是加法公式和乘法公式的综合运用。

综合运用

加法公式

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

A、B互斥

乘法公式

$P(AB)= P(A)P(B|A)$

$P(A)>0$

一、全概率公式

问题：由简单事件的概率推出复杂未知事件的概率.

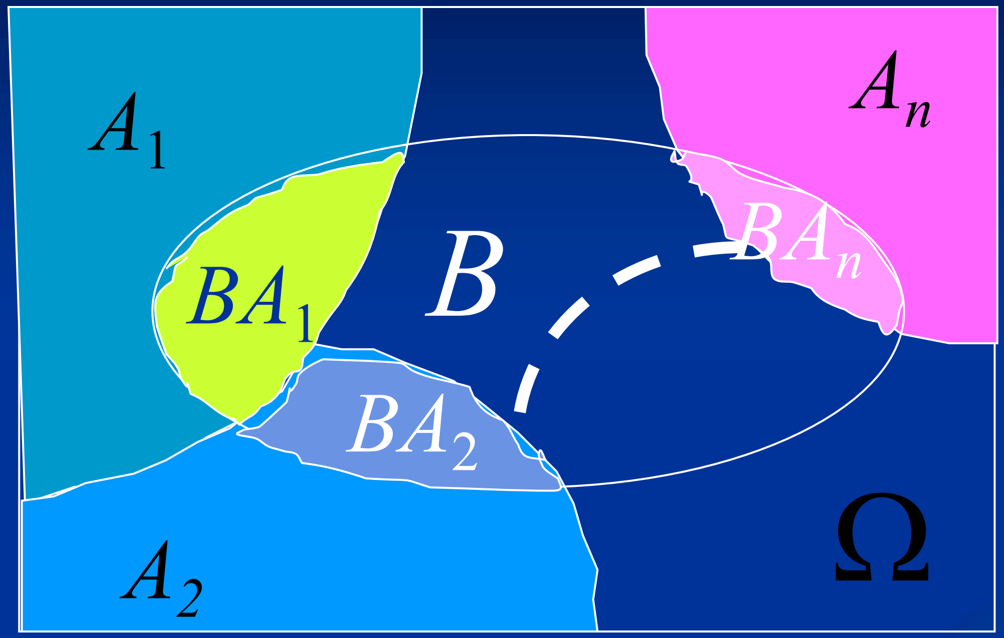
方法：复杂未知事件分解成两两互不相容事件之和.

定理1 设B为随机试验 T 中的任一事件，事件A_1，A_2，…，A_n构成一完备事件组, 则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)$$

上述公式称为全概率公式

复习完备事件组概念。



$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

$$A_i A_j = \phi$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} BA_i$$

$$(BA_i)(BA_j) = \phi$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

全概率公式

应用乘法公式

- 称 $P(A_i)$为先验概率，它是由以往的经验得到的，A_i是事件B的原因
- 事件 B视为结果。

例1 甲乙两个口袋中各有3只白球,2只黑球,从甲袋中任取一球放入乙袋中,求再从乙袋中取出一球为白球的概率.

解　设B表示“最后从乙袋中取出一球为白球”事件

A_1表示“从甲袋中取一白球放入乙袋”，

A_2表示“甲袋中取出一黑球放入乙袋”

则　$P(A_1)=3/5,\ P(A_2)=2/5$

$P(B|A_1)=4/6,\ P(B|A_2)=3/6$

根据全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(B\mid A_i)P(A_i)=0.6$$

二、Bayes公式

贝叶斯 Thomas Bayes，英国人.1702年出生于伦敦，做过神甫.1742年成为英国皇家学会会员.1763年4月7日逝世.

贝叶斯在数学方面主要研究概率论.他首先将归纳推理法用于概率论基础理论，并创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了贡献.1763年发表了这方面的论著对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用.贝叶斯的另一著作《机会的学说概论》发表于1758年.贝叶斯所采用的许多术语被沿用至今. 贝叶斯公式是他在1763年提出来的.

例4（专家系统）医疗诊断中，为了诊断病人到底患了A_1, A_2, …,A_n中的哪一种病,以便对症下药. 对病人进行观察检查，症状记为事件B

$P(A_i)$, 表示生A_i病的概率

$P(B|A_i)$, 表示生A_i病有症状B的概率

$P(A_i|B)$, 表示症状B由A_i引起的概率

若$P(A_i|B)$, i=1,2,…,n中,最大的一个是$P(A_1|B)$,

我们便认为生病A_1是主要的原因,下面的关键是:

计算 $P(A_j|B), j=1,2,\ldots,n$

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Bayes公式

$$j=1,2,\ldots,n$$

Remark: $P(A_j \mid B)$ 后验概率

定理2 设B为一事件且$P(B)>0$,事件$A_1, A_2, \ldots,$ A_n构成一完备事件组，且$P(A_i)>0$, $i=1,2,\ldots n$，

则有
$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j B)}{P(B)}=\frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

上述公式称为**Bayes公式.**

例5 某商店从三个厂购买了一批灯泡,甲厂占25%,乙厂占35%,丙厂占40%,各厂的次品率分别为5%,4%,2%,求

(1)消费者买到一只次品灯泡的概率

(2)若消费者买到一只次品灯泡,问它是哪个厂家生产的可能性最大。

解 以B表示消费者买到一只次灯泡,A_1,A_2,A_3分别表示买到的灯泡是甲、乙、丙厂生产的灯泡，根据题意得：

$$P(A_1)=25\%,\ P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=40\%,$$
$$P(B|A_1)=5\%,\ P(B|A_2)=4\%,\ P(B|A_3)=2\%$$

$$(1)P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)=0.0345$$

$$(2)P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)}=0.3623$$

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)}=0.4058$$

$$(3)P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)}=0.2319$$

所以买到乙厂产品的可能性最大。

例6 通信渠道中可传输的字符为AAAA, BBBB, CCCC三者之一，传输三者的概率分别为0.3、0.4、0.3. 由于通道噪声的干扰，正确地收到被传输字母的概率为0.6，收到其它字母的概率为0.2，假定字母前后是否被歪曲互不影响，若收到的信号为ABCA，问传输的是信号AAAA的概率等于多少？

解 以B表示事件“收到ABCA”，A_1表示“传输的字符为AAAA”，A_2表示事件“传输的字符为BBBB”，A_3表示事件“传输的字符为CCCC”，则根据题意有

$\mathrm{P}(A_1)= 0.3$, $\mathrm{P}(A_2)=0.4$, $\mathrm{P}(A_3)=0.3$,

$\mathrm{P}(B|A_1)=0.6\times0.2\times0.2\times0.6=0.0144$,

$\mathrm{P}(B|A_2)=0.2\times0.6\times0.2\times0.2=0.0048$,

$\mathrm{P}(B|A_3)= 0.2\times0.2\times0.6\times0.2=0.0048$,

根据Bayes公式有

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i)P(A_i)} = 9/16$$

例7 据以往临床记录，某种诊断癌症试验，结果有阴、阳两个。当被诊断者患癌症时，其反应呈阳性的概率为0.95，当被诊断者未患癌症时，其反应呈阴性的概率为0.95。现对一大批人普查，设被普查人患癌症概率为0.005,试求某人反应为阳性时,确实患癌症的概率?

解:设A表示患有癌症；B表示反应呈阳性。

$$P(A)=0.005 \quad P(B|A)=0.95 \quad P(\bar{B}|\bar{A})=0.95 \quad P(B|\bar{A})=0.05$$

所求概率为：

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.05}=0.087$$

结果分析：

贝叶斯理论及应用		
数学领域	贝叶斯分类算法 (应用:统计分析、测绘学) 贝叶斯公式 (应用:概率空间) 贝叶斯区间估计 (应用:数学中的区间估计) 贝叶斯序贯决策函数 (应用:统计决策论)	贝叶斯风险 (应用:统计决策论) 贝叶斯估计 (应用:参数估计) 贝叶斯统计 (应用:统计决策论) 经验贝叶斯方法 (应用:统计决策论)
工程领域	**贝叶斯定理** (应用:人工智能、心理学、遗传学) 贝叶斯分析 (应用:计算机科学) 贝叶斯逻辑 (应用:人工智能) 贝叶斯网络 (应用:人工智能)	贝叶斯分类器 (应用:模式识别、人工智能) 贝叶斯决策 (应用:人工智能) 贝叶斯推理 (应用:数量地理学、人工智能) 贝叶斯学习 (应用:模式识别)
其他领域	贝叶斯主义 (应用:自然辩证法)	有信息的贝叶斯决策方法 (应用:生态系统生态学)

总结

- 全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$$

- Bayes公式

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)}$$


结束！