2.2 随机变量的数字特征

- r.v.的平均取值 —— 数学期望
- r.v.取值平均偏离均值的情况— 方差

分布函数能完整地描述 r.v.的统计特性, 但实际应用中并不都需要知道分布函数，而只需知道 r.v.的某些特征.

例如：

判断棉花质量时, 既看纤维的平均长度

又要看纤维长度与平均长度的偏离程度，而不必知道每朵棉花的纤维长度。

平均长度越长,偏离程度越小, 质量就越好;

考察一射手的水平, 既要看他的平均环数是否高, 还要看他弹着点的范围是否小, 即数据的波动是否小.

由上面例子看到，与 r.v. 有关的某些数值（均值、偏离度），虽不能完整地描述 r.v.但能清晰地描述 r.v.在某些方面的重要特征，这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

4.1 随机变量的数学期望

一、数学期望的定义（离散型）

定义 1. 设 X 为离散 r.v. 其分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛,则称其和为 X

的**数学期望**，记作 $E(X)$, 即 $$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

注意：不是所有的 r.v.都有数学期望

例4 甲乙两个射手的技术统计如下：

甲 X	8	9	10
P	0.3	0.1	0.6

乙 Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

甲乙两个射手谁的水平高？

$$E(X)=8\times 0.3+9\times 0.1+10\times 0.6=9.3$$

$$E(Y)=8\times 0.2+9\times 0.5+10\times 0.3=9.1$$

例5 $X \sim B(n, p)$, 求 $E(X)$.

解

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np(p+1-p)^{n-1}=np$$

2、连续型r.v. 数学期望

定义 设连续 r.v. X 的 p.d.f. 为 $f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

绝对收敛, 则称此积分为 X 的数学期望

记作 $E(X)$, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

数学期望的本质 —— 加权平均，它是一个数不再是 r.v.

例7 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu+\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\mu$$

$$\overset{t=x-\mu}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt+\mu=\mu$$

被积函数为奇函数

练习 $X \sim U(a,b)$,求$E(X)$

常见 r.v. 的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为p 的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

二、 r.v.函数 的数学期望

定理1. ❑ 设离散 r.v. X 的概率分布为

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=Eg(X)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

❑ 设连续型 r.v. 的 p.d.f. 为$f(x)$,若广义积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛, 则$Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

注：若$g(x)=x$,则根据定理1，有 $EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 这与定义是一致的。

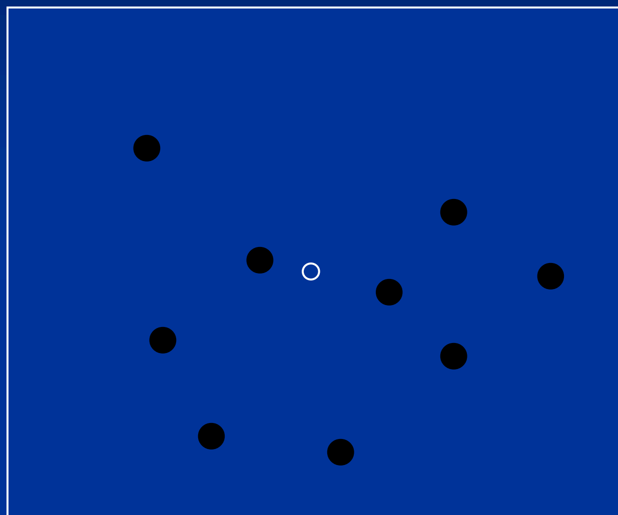
4.2 方差

一、方差的定义

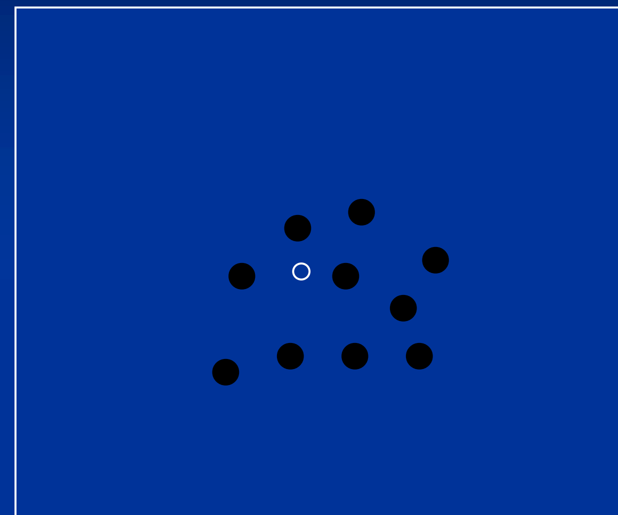
上一讲我们介绍了随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹，其落点距目标的位置如图：



甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙较好

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近.

为此需要引进另一个数字特征,用它来度量随机变量取值在其中心附近的离散程度.

这个数字特征就是我们这一讲要介绍的

----方差

方差是衡量随机变量取值 ***波动程度*** 的一个数字特征。

如何定义？

引例 甲、乙两射手各打了6 发子弹,每发子弹击中的环数分别为：

甲	10, 7, 9, 8, 10, 6,
乙	8, 7, 10, 9, 8, 8,

有五个不同数

有四个不同数

问哪一个射手的技术较好？

解 首先比较平均环数

$$\overline{甲} = 8.3, \quad \overline{乙} = 8.3$$

再比较稳定程度

甲：$2\times(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+(8-8.3)^2$

$+(7-8.3)^2+(6-8.3)^2=13.34$

乙：$(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+3\times(8-8.3)^2$

$+(7-8.3)^2=5.34$

乙比甲技术稳定，故乙技术较好.

定义 若$E[X-EX]^2$存在, 则称其为随机变量X的**方差**, 记为$D(X)$ 或 $Var(X)$

即 $D(X) = E[X-EX]^2$

$\sqrt{D(X)}$ 称为X的**均方差**或**标准差**.

两者量纲相同

$D(X)$ —— 描述 r.v. X的取值偏离平均值的平均偏离程度

若 X 为离散型 r.v.，概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

$$\boxed{D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k}$$

若 X 为连续型**r.v.**，概率密度为 $f(x)$

$$\boxed{D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx}$$

计算方差的常用公式：

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-\left(EX\right)^2}$$

证明: $DX=E(X-EX)^2=E\{X^2-2X\cdot EX+(EX)^2\}$

$$=E(X^2)-2EX\cdot EX+(EX)^2$$

$$=E(X^2)-(EX)^2$$

1. 方差非负，即$D(X)\geq 0$；

2. D(X)的取值相当于平均误差；

3. D(X)=0的充分必要条件为r.v.X的取值为常数。

二、几个重要r.v.的方差

1. 二项分布$B(n, p)$： $E(X)=np$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0.1,\ldots n$$

$$\left.\begin{aligned}
&E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X)\\
&E[X(X-1)]=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(n-p)^{n-k}\\
&=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}(1-p)^{n-k}\\
&=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&E(X^2)=np\\&+n(n-1)p^2\end{aligned}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=np+n(n-1)p^2-n^2p^2$$

$$=np(1-p)$$

解法二:

设

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{次试验事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{第}i\text{次试验事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

则

$$DX_i=E(X_i^2)-\left[EX_i\right]^2$$
$$=p-p^2=p(1-p)$$

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$DX=\sum_{i=1}^{n}DX_i=\sum_{i=1}^{n}p(1-p)=np(1-p)$$

3. 均匀分布$U(a, b)$： $E(X)=(a+b)/2$

$$EX^2=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)^2]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

4. 正态分布$N(\mu, \sigma^2)$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2t^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=-\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}td\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

常见随机变量的方差

分布	概率分布	方差
参数为p 的0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	$p(1\text{-}p)$
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	$np(1\text{-}p)$

分布	概率密度	方差
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	σ^2

三、方差的性质

- $D(c)=0$
- $D(cX)=c^2D(X)$

$$\left.\begin{array}{l} D(c)=0 \\ D(cX)=c^2D(X) \end{array}\right\} D(c_1X+c_2)=c_1{}^2D(X)$$

- 若X,Y相互独立，则

$$\boxed{D(C_1X\pm C_2Y)=C_1^2D(X)+C_2^2D(Y)}$$

若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 为常数

则 $$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)$$

若X,Y相互独立 $\begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$