1.2 事件的概率

- 把刻划事件发生的可能性大小的数量指标叫做事件的概率。
- 事件A的概率以P(A) 表示。

- 统计概率
- 古典概率
- 几何概率

- 在概率的发展史上，人们针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算的各种方法。然而所定义的概率都存在一定的缺陷。

一、统计概率

统计定义 —— 基于频率的定义

频率

设在 n 次试验中，事件 A 发生了$\mu(A)$次，

则称 $f_n(A)=\dfrac{\mu(A)}{n}$ 为事件 A 发生的 **频率.**

频率的性质

- $0\le f_n(A)\le 1$ —— **非负性**
- $f_n(\Omega)=1$ —— **规范性**
- 事件 A,B互不相容，即 $AB=\phi$

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$$ —— **可加性**

可推广到有限个两两互不相容事件的和事件

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$ —— **可加性**

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容。

频率稳定性的实例

实验者	掷硬币的次数n	正面出现次数	正面出现的频率
Deorgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Feller	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

从上述实例可以看出：当投掷次数充分大时，正面出现的频率在0.5左右摆动。

定义：在相同的条件下，将某试验重复进行n次,事件A发生的频率 $f_n(A)$ 随着n 增大，总在某一固定常数p 左右摆动，则称 p 为事件A的概率, 记作 $P(A)$.

对本定义的评价

优点：直观易懂　　缺点：粗糙模糊　　不便使用

由概率的统计定义与频率的性质，知概率必具备下列性质

- 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可加性：事件 A, B 互不相容，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

概率的物理意义：概率是衡量事件发生可能性大小的度量。

二、古典概型

定义：如果试验T满足

(1) 样本空间只有有限个样本点；

$$\Omega=\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\ldots\cup\{\omega_n\}$$

(2) 每个样本点是等可能发生的，即

$$P(\{\omega_{\rm i}\})=1/n，\ i=1,2,\ldots n。$$

则称这样的试验模型为古典概型。

古典概型中概率的计算：

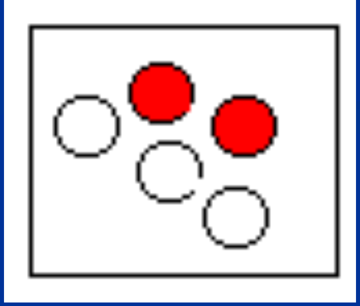
$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中包含的样本点总数}}$$

古典概型中事件概率求法

1、摸球问题

例1:设盒中有3个白球，2个红球，现从盒中任抽2个球，求取到一红一白的概率。

解:设A-----取到一红一白



$$N(\Omega)=C_5^2 \qquad N(A)=C_3^1C_2^1$$

$$\therefore \qquad P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

答:取到一红一白的概率为3/5

例 2 将10张标有0，1，2，…，9数字的相同卡片搅混在一起，再任意抽取一张，以X表示所取卡片上的数字，求

(1) $P(X=i)$; $i=0,1,2,\ldots$，9;

(2) $P(X$为奇数).

解 (1) $$P(X=i)=\frac{1}{10}$$

(2) $$P(X\text{为奇数})=\frac{5}{10}=0.5$$

例3 一箱中有10件产品，其中2件次品，从中随机取3件，抽得的次品数为X, 求

(1) $\{X=0\}$ 即“抽得的三件产品中全是正品”的概率;

(2) $\{X=1\}$ 即“抽得的三件产品中有一件次品”的概率；

(3) $\{X=2\}$即“抽得的三件产品中两件是次品”的概率.

解

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$$

2、分球入盒问题

例4：设有n个球等可能落入N个盒子里($N>n$)，求

(1)在n个指定的盒子里各有一个球的概率？

(2) n个球落入任意n 个盒子里中的概率？

解:设A: n个指定的盒子里各有一个球;

B:任意n 个盒子里中各有一只球

$$N(\Omega)=N^n \qquad N(A)=n!$$

$$P(A)=\frac{n!}{N^n} \qquad P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

3.分组问题

例5 30名学生中有3名运动员，将这30名学生平均分成3组，求：

（1）每组有一名运动员的概率；

（2）3名运动员集中在一个组的概率。

解:

设A:每组有一名运动员;B: 3名运动员集中在一组

$$N(\Omega)=C_{30}^{10}C_{20}^{10}C_{10}^{10}=\frac{30!}{10!\ 10!\ 10!}$$

$$P(A)=\frac{3!\dfrac{27!}{9!\ 9!\ 9!}}{N(\Omega)}=\frac{50}{203}\qquad P(B)=\frac{3\times C_{27}^{7}C_{20}^{10}C_{10}^{10}}{N(\Omega)}$$

4 随机取数问题

例6 从1到200这200个自然数中任取一个,

(1)求取到的数能被6整除的概率;

(2)求取到的数能被8整除的概率;

(3)求取到的数既能被6整除也能被8整除的概率.

解: $N(\Omega)=200$ $N(1)=[200/6]=33,$

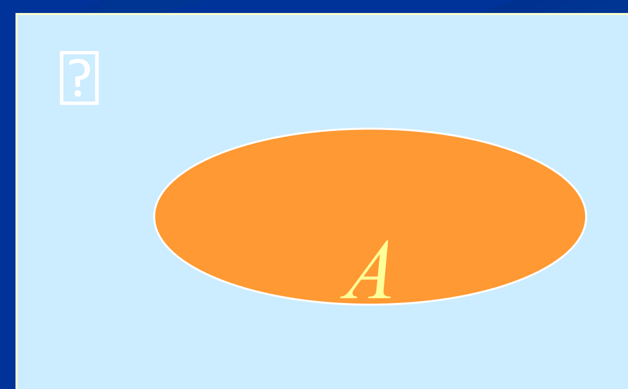
$N(2)=[200/8]=25$ $N(3)=[200/24]=8$

(1),(2),(3)的概率分别为：
33/200,1/8,1/25

三 几何概率

设样本空间为有限区域 Ω, 若样本点落入 Ω 内任何区域 A 中的概率与区域A的测度成正比, 则样本点落入A内的概率为

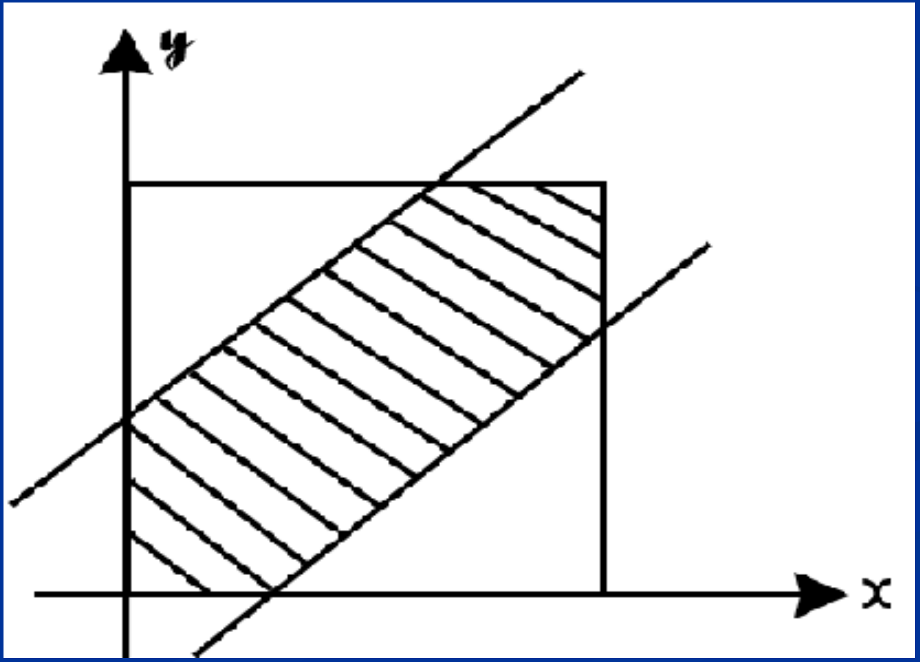
$$P(A)=\frac{A\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$$



例7(约会问题) 两人相约7：00－8：00在某地见面，先到的一人等待另一人20分钟，这时就离去，试求两人能会面的概率.

解 以x, y分别记两人到达的时刻，则两人能见到面的充分必要条件为

$$|x - y| \leq 20$$



这是一个几何概率问题，可能的结果为边长为60的正方形里的点，能会面的点为在区域中阴影部分。因此所求概率为

$$p=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

几何概率的性质可概括如下

- 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性：事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容。

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的公理化定义与性质

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫1933年建立.

柯尔莫哥洛夫

(А. Н. Колмогоров1903-1987)

俄国数学家

1939年任苏联科学院院士.先后当选美,法,意,荷,英,德 等国的外籍院士 及皇家学会会员. 为 20 世纪最有影响的俄国数学家.

一、定义

设 Ω 是随机试验 *T* 的样本空间，若能找到一个法则，使得对于 *T* 的每一事件 *A*,总有唯一确定的实数 $P(A)$ 与之对应, 且 $P(A)$ 满足

1. 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
2. 规范性：$P(\Omega) = 1$
3. 可列可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

其中 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互不相容事件，

$P(A)$ 称为事件 A 的概率。

$P(A)$是事件A的函数，自变量为事件A，其

定义域为 $\{A \mid A \subset \Omega\}$ 值域为 $[0,1]$.

二、概率的性质

性质1 $P(\phi)=0$

性质2 (有限可加性) 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互不相容，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

性质3 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

性质4 (可减性) $A \subset B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$

(单调性) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$

性质5. (加法公式) 对任意两个事件A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

加法公式

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

半可加性

推广：

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

加法公式

一般：

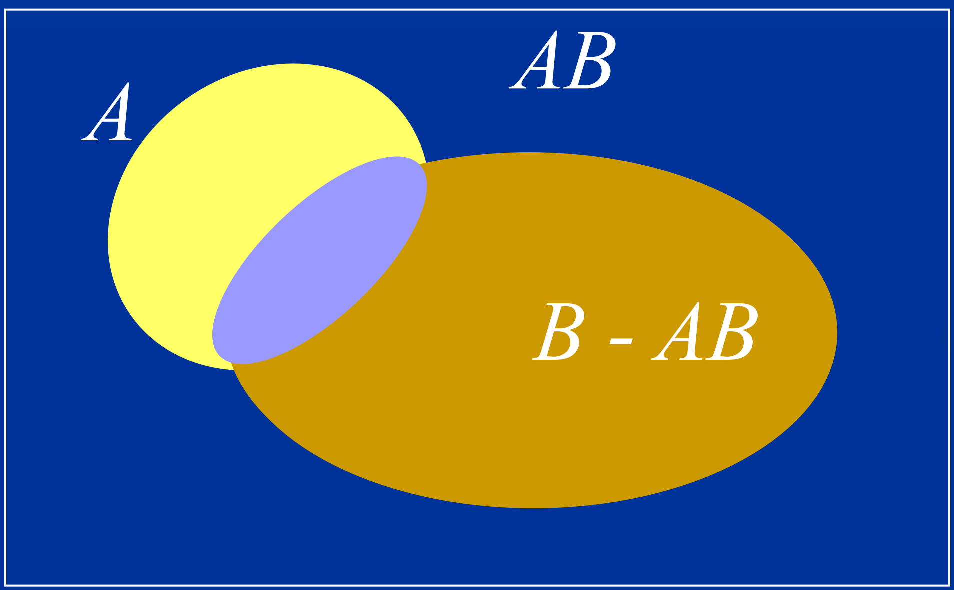
加法公式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}^{n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例1 对任意两个事件A, B, 有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$



$$B=AB+(B-A)$$

应用性质2

$$P(B)=P(AB)+P(B-AB)$$

也可以利用

or $\quad B-A=B-AB$

or $\quad B=AB+\bar{A}B$

例2 P(A)=1/4, P(B)=1/2, 就下列三种情况

(1)A与B互不相容； (2) $A \subset B$

(3) P(AB)=1/8

求P(B - A).

解(1) 由于A与B不相容，即 $AB = \phi$

$\bar{A} \supset B$ $B - A = B\bar{A} = B$

P(B－A)=P(B)=1/2

(2) P(B－A)=P(B)－P(A)= $\dfrac{1}{4}$

(3) P(B－A)=P(B)－P(AB)= $\dfrac{3}{8}$

应用例1

作业： 一只口袋中有45只白球，5只黑球，今从中任取3只球，求其中有黑球的概率.


稍事休息！