MINISTÉRIO DA DEFESA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Seção de Engenharia de Defesa (SE/10)

EE 600200: Álgebra Linear Computacional

Lista de Exercícios #1

Cap Suzane GAERTNER Martins

Rio de Janeiro, RJ
MARÇO de 2025

$1^{\underline{a}}$ Questão

As seguintes matrizes admitem inversa? Caso positivo, calcule a inversa.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solução

Para verificar se a matriz A possui inversa, podemos calcular o seu determinante: $Det(A) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3 \neq 0$ Logo, a matriz A possui inversa.

Assim, aplicando o método de eliminação de Gauss Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow L_2 = 2L_1 - L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow L_1 = 3L_1 - 2L_2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow L_1 = \frac{L_1}{3} \text{ e } L_2 = \frac{L_2}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right]$$

Desta forma a matriz A^{-1} será:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right]$$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Solução

Calculando o determinante de B usando a regra de Sarrus, temos:

$$\begin{aligned} Det(B) &= (1 \times 1 \times 4) + (2 \times 1 \times 6) + (6 \times 2 \times 1) \\ &\quad - (6 \times 1 \times 6) - (2 \times 2 \times 4) - (1 \times 6 \times 1) \\ &= 4 + 12 + 12 - 16 - 6 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Logo, a matriz B não admite inversa.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Det}(C) = -6 \neq 0 \Rightarrow$ admite inversa!

Solução Para calcular a inversa da matriz C, vamos aplicar o método de Gauss-Jordan para encontrar, de forma escalonada reduzida da matriz estendida $[C \mid I]$onde I é a matriz identidade 4x4:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_3 = 3L_1 + L_3 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \; L_2 \leftrightarrow L_4 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow L_3 = L_3 + 10L_2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -18 & -7 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_2 = L_2 + 2L_4 \\ L_3 = L_3 + 18L_4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -30 & 0 & -7 & 18 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 = 30L_1 + L_3 \\ L_2 = 10L_2 - L_3 \Rightarrow \\ L_4 = 30L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 30 & 60 & 0 & 0 & 23 & 18 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 0 & -7 & 18 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 7 & 12 & -1 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow L_1 = 6L_2 + L_1 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 30 & 0 & 0 & 0 & 5 & 30 & -5 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 0 & -7 & 18 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 7 & 12 & -1 & -10 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} L_1 = \dfrac{L_1}{30} \\ L_2 = \dfrac{-L_2}{10} \end{array} e \begin{array}{c} L_3 = \dfrac{-L_3}{30} \\ L_4 = \dfrac{L_4}{30} \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{30} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{30} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Com isso concluímos que a inversa da matriz C, C^{-1} é dada por:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{7}{30} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{30} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Questão 2

[ELON] (2.11): Seja F o subespaço de R^3 gerado pelos vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, -1, -1)$. Ache números a, b, c com a seguinte propriedade: um vetor $w = (x, y, z)$ pertence a F se, e somente se, $ax + by + cz = 0$.

Solução

Como u e v definem o subespaço F, qualquer vetor de F pode ser escrito como uma combinação linear w entre u e v, ou seja, existem escalares $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$$

$$w = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Onde $w \in F$.

$$w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$$

A combinação linear $w \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$ representa o espaço nulo de F ou seja N(F). Além da solução trivial, ou seja $\alpha = \beta = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

Desta forma, sendo $\alpha = \beta$ obtemos:

$$a \cdot (\alpha + \alpha) + b \cdot (\alpha - \alpha) - c \cdot (\alpha - \alpha) = 0 \implies a = 0$$

sendo $\alpha = -\beta$ obtemos:

$$a \cdot (\alpha - \alpha) + b \cdot (\alpha + \alpha) - c \cdot (\alpha + \alpha) = 0 \implies b = -c$$

Desta forma, $\forall$ b, (0, b, -b) tem-se que $w \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{bmatrix} = 0$

Questão 3

Seja uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realize as seguintes operações em um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, na ordem em que são apresentadas:

1) Escale a componente x por um fator α e a componente y por um fator β; e

2) Rotacione o vetor resultante em 30º no sentido anti-horário.

Dê o que se pede.

a) Calcule a matriz A que representa T.

Solução

Temos $v^T = A \cdot v$, sendo $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
sabendo que a matriz de rotação de um vetor em um ângulo θ é :

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Então temos:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(30) & -sen(30) \\ sen(30) & cos(30) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Desta forma obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha cos(30) & -\beta sen(30) \\ \alpha sen(30) & \beta cos(30) \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \beta\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

b) Responda: se invertêssemos a ordem das operações, os resultados seriam diferentes? Justifique.

Solução No caso de inverter as operações teríamos:

$$B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(30) & -sen(30) \\ sen(30) & cos(30) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo,

$$B = \begin{bmatrix} \alpha \cdot cos(30) & -\alpha \cdot sen(30) \\ \beta \cdot sen(30) & \beta \cdot cos(30) \end{bmatrix}$$

Ou seja $A \neq B$

Questão 4

Implemente, em Python, o algoritmo de substituição regressiva, considerando que as entradas são:

a) uma matriz triangular superior; e

b) um vetor coluna de tamanho correspondente.

Obs.: para obter a pontuação total, sua implementação deve levantar ou retornar uma 'exception' se for identificado um elemento nulo na diagonal da matriz triangular superior.

Solução

Arquivo "Backsolve.py"

```python
import numpy as np

def retro(A, b):
    n = len(b)
    x = np.zeros(n)

    if not np.allclose(A, np.triu(A)):
        print("\nErro: A matriz não é triangular superior!")
        exit()

    if np.any(np.diag(A) == 0):
        return "Erro: A matriz possui um " \
        "elemento nulo na diagonal principal."

    for i in range(n - 1, -1, -1):  # começa da última linha e vai subindo
        soma = 0
        for j in range(i + 1, n):
            soma += A[i, j] * x[j]

            x[i] = (b[i] - soma) / A[i, i]

    return x

print("Este é um programa de substituição regressiva para resolução de matrizes triangulares superiores")
linhas = int(input("Digite o número de linhas da matriz: "))
```

```python
print(f"Digite os valores das {linhas} linhas separados por espaços:")

matriz = []
for i in range(linhas):
    linha = input(f"Linha {i+1}: ").split()
    linha = [float(valor) for valor in linha]  # converte os valores para float
    matriz.append(linha)

A = np.array(matriz, dtype=float)

print("\nMatriz inserida:")
print(A)

linhas_b = 1

print(f"Digite os valores da {linhas_b} linha do vetor separados por espaços:")

linha_b = input(f"Linha: ").split()
b = np.array(linha_b, dtype=float)

print("\nVetor inserido:")
print(b)

X =retro(A,b)
print("\nA resolução é X:")
print(X)
```

Questão 5

Seja um robô planar de dois elos e duas juntas conforme a Figura 1. Considerando $L_1 = 20,0cm$ e $L_2 = 15,0cm$:

a) implemente uma função em Python que receba os ângulos θ_1 e θ_2 e retorne a posição do efetuador final, representada pelas coordenadas $\hat{X}_U$ e $\hat{Y}_U$ expressas em cm com precisão de 1 casa decimal.

b) calcule a matriz de transformação do sistema de coordenadas do referencial do efetuador final (i.e., do referencial localizado na "ponta" do robô, representado em vermelho) para o sistema de coordenadas $\hat{X}_U$, $\hat{Y}_U$, afixado na primeira junta do robô.

(Dica: estude o Exemplo 1.7 do [Ford]. A matriz será 3×3.)

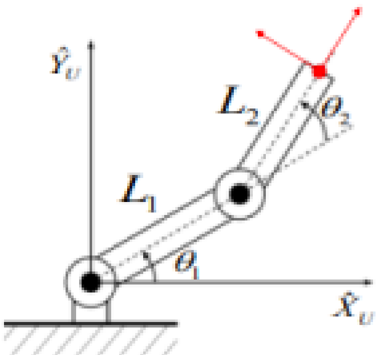

Figura 1

Solução

a) Arquivo "efetuador.py"

```
import numpy as np

print("Este programa calcula a posição do efetuador final de um robô planar de dois elos.")
theta1_deg = float(input("Digite o ângulo 1 de deslocamento: "))
theta2_deg = float(input("Digite o ângulo 2 de deslocamento: "))

def posicao_efetuador(theta1_deg, theta2_deg):
    L1 = 20.0
    L2 = 15.0
```

```

    # Converter para radianos
    theta1 = np.radians(theta1_deg)
    theta2 = np.radians(theta2_deg)

    # Calcular posição
    x = L1 * np.cos(theta1) + L2 * np.cos(theta1 + theta2)
    y = L1 * np.sin(theta1) + L2 * np.sin(theta1 + theta2)

    # Arredondar para 1 casa decimal
    return round(x, 1), round(y, 1)

print("O ponto final é: ",np.array(posicao_efetuador(theta1_deg, theta2_deg)))

```

b) Sabemos que, no plano, a matriz geral de rotação + translação se dá por:

$$T = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & x \\ sen(\theta) & cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• transformação da base até o elo 1, onde a rotação é de θ_1 e a translação é ao longo de L_1, temos:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 cos(\theta_1) \\ L_1 sen(\theta_1) \end{bmatrix} \rightarrow T_0^1 = \begin{bmatrix} cos(\theta_1) & -sen(\theta_1) & L_1 cos(\theta_1) \\ sen(\theta_1) & cos(\theta_1) & L_1 sen(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• transformação do elo 1 até o efetuador (elo 2), onde a rotação é de θ_2 e a translação é ao longo de L_2, temos:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_2 \\ \hat{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 cos(\theta_2) \\ L_2 sen(\theta_2) \end{bmatrix} \rightarrow T_1^2 = \begin{bmatrix} cos(\theta_2) & -sen(\theta_2) & L_2 cos(\theta_2) \\ sen(\theta_2) & cos(\theta_2) & L_2 sen(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, a transformação total, da base até o efetuador (elo 2), se dará por:

$$T_0^2 = T_1^2 \cdot T_0^1$$

Resultando em:

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} cos(\theta_1 + \theta_2) & -sen(\theta_1 + \theta_2) & L_1 cos(\theta_1) + L_2 cos(\theta_1 + \theta_2) \\ sen(\theta_1 + \theta_2) & cos(\theta_1 + \theta_2) & L_1 sen(\theta_1) + L_2 sen(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$