A辑第20卷第3期
2005年5月
水动力学研究与进展
JOURNAL OF HYDRODYNAMICS
Ser. A, Vol. 20, No. 3
May, 2005

文章编号:1000-4874(2005)03-0405-06

蒙特卡罗法的一种快速计算:在势流问题中的应用*

林建国, 周俊陶
(大连海事大学环境与工程学院,大连 116026)

摘　要: 本文针对过去用蒙特卡罗方法做大范围、多节点的势流计算时计算量大、速度较慢,尤其是在游动次数增加以后,这种缺点就表现的非常明显的问题,提出了一种可以进行大范围、多节点计算的快速计算方法,同时提出了一种以角度为转移标准的转移概率,并给出了相应的随机游动模型和相应的算例加以验证。计算结果表明,本文提出的改进方法和原来传统的蒙特卡罗方法相比,在保持相同随机游动次数的情况下,计算时间大大减少。本文提出的方法不仅缩短了蒙特卡罗方法求解的时间,而且拓宽了蒙特卡罗方法的应用。

关 键 词: 势流;蒙特卡罗法;数值计算;快速算法;角度转移概率
中图分类号: O242.2　　**文献标识码:** A

A quick calculation of Monte-Carlo method for the problems of potential flow

LIN Jian-guo, ZHOU Jun-tao
(Environmental Science & Eng. College, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

Abstract: It will take long computational time for Monte-Carlo Method (MCM) to deal with the potential flow, which has big scale and more grid. The drawback of the problem becomes more apparent especially when the number of random walk is added. According to the problem, in this paper, a quick calculation method based on MCM is presented. In this method, a transfer probability based on angle is proposed. And the random walk model and examples are given accordingly. With the same number of random walk, the comparison with results shows that the improved method in this paper costs much less time than common MCM. The method presented in this paper not only shortens the calculation time, but also extends the application of MCM.

Key words: potential flow; MCM; numerical calculation; quick calculation; angle transference probability

* **收稿日期:** 2004-04-01
作者简介: 林建国(1960~),男,辽宁大连人,教授,博士,博导。

1 引言

蒙特卡罗方法是一种具有独特风格的数值计算方法，亦称为随机模拟(Random simulation)方法，有时也称为随机抽样(Random sampling)技术或统计实验(Statistical testing)方法[1,2]。与其它数值方法相比，蒙特卡罗方法有如下显著优点：(1)如果只需要知道局部个别点的值，蒙特卡罗法可以单独就计算区域任意一点作计算，其值无需通过联解其它节点值求出，计算单点的工作量大大减少；(2)由于随机游动在平面上进行和在空间进行无根本差别，方法易于推广到三维问题；(3)蒙特卡罗法及其程序结构简单。因此，蒙特卡罗方法在许多问题中得到应用[3-9]。

对复杂边界的势流问题，如果我们只关心域内几个重要坐标点的值，用传统蒙特卡罗方法求解有其特殊的优势[3]，但在做大范围、多节点的计算时，由于计算量较大，则需要较长的计算时间，尤其是在游动次数增加以后，这种缺点就表现的更加明显。为此，本文提出了改进的方法，同时，在文献[3]的基础上，又提出了一种以角度为转移标准的转移概率。例题计算结果表明，本文提出的改进方法和传统的蒙特卡罗方法相比，在保持相同随机游动次数的情况下，计算时间大大减少，即使计算整个计算域内节点的值，其计算工作量也不是很大。这必将拓宽蒙特卡罗方法的应用范围，使其在工程实际问题中得到更广泛的应用。

2 传统蒙特卡罗方法及其改进

势流问题满足拉普拉斯方程，本文以二维的拉普拉斯方程的边值问题为例，对蒙特卡罗法进行描述，在此基础上，提出改进方法。

满足第一类边界条件的势流问题可表示为：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad x,y\in S \tag{1}$$

$$\varphi\,|_{\Gamma}=f(Q) \tag{2}$$

其中：S 代表求解域，Γ 代表边界，Q 是边界上 Γ 的任意点，$f(Q)$ 是边界上的已知值。

由蒙特卡罗方法求解上述问题，通常要将求解域 S 进行网格划分，在节点上进行求解。假设节点 P 为域内任一节点，与 P 点相邻的节点为 P_1、P_2……、P_n，设一质点从 P 点出发，按照转移概率 $p_1(P)$、$p_2(P)$、…、$p_n(P)$ 向与 P 点相邻的 P_1、P_2……、P_n 随机移动一步。若质点第一步到达的位置是 P_i，再按转移概率 $p_1(P_i)$、$p_2(P_i)$、…、$p_m(P_i)$ 向与 Pi 相邻的 m 个节点处随机移动一步。如此继续下去，直到该质点第一次到达一个边界节点 Q 处时，游动就停止。

因为游动路线是随机的，现假设一条游动路线为：

$$v_P:P\rightarrow P_1\rightarrow P_2\rightarrow\cdots\rightarrow P_{k-1}\rightarrow Q\rightarrow\in\Gamma \tag{3}$$

对于这样的一个随机游动路线，定义随机量 ξ 的值为：$\xi=g(v_P)=f(Q)$。把由 P 点开始而在边界上 Γ 终止的游动称为一次随机游动，一次随机游动就得到随机量 ξ 的一个取值，经过 N 次随机游动，就会获得 N 个随机量 ξ_1、ξ_2……、ξ_n，平均值 $\bar{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$ 就可以作为 $\varphi(P)$ 的近似值。文献[1]已经证明随机量 ξ 的数学期望 $E(\xi)=\varphi(P)$。用这种方法就可以计算任意一节点的值，这就是传统的蒙特卡罗方法。

如果需要求解的总节点数为 M，每次随机游动平均经历 n 个节点，进行 N 次随机游动，那么，用上述传统的蒙特卡罗方法求所有节点的结果需要进行 $M\cdot N\cdot n$ 次计算，通常 N 的选取要很大才能保证 $E(\xi)=\varphi(P)$。因此，其计算工作量非常大。为此，我们对上述传统的蒙特卡罗方法进行改进如下：

游动路线(3)是质点由 P 点为出发点，经过一步游动之后到达 P_1 点，然后经过一系列游动之后到达边界点 Q，对于这条路线定义的随机变量 ξ 的取值为 $f(Q)$，我们不难发现，以 P 点为出发点游动到边界点 Q 这么一次随机游动过程当中，其实也包含了质点以 P_1(P_2、P_3、…、P_{k-1})点为出发点游动到边界点 Q 的一次随机游动，这样，以后在对 P_1(P_2、P_3、…、P_{k-1})点进行单独计算随机游动次数时，也就相应的减少了一次随机游动次数。所以，当单独对 P 点进行 N 次随机游动，质点游动过程中所经历过的节点也相应地进行了小于或等于 N 次的随机游动，那么，以后在对相应的点作单独随机游动的时候，其游动次数、计算时间都将相应减少。随着总体计算节点数、游动次数的增加，相对传统的蒙特卡罗方法而言，其计算速度将显著提高，计算时间大为减少，优越性更加明显。

在上述改进的基础上，本文又提出一种与文献

[3]不同的以角度为转移标准的转移概率计算方法。

设与点 P 相邻的点为 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6 等 6 个点(见图 1)，PP_1 对应的是角度为零的坐标线，角度逆时针为增大的方向，由此可以得出 $\angle P_{i-1}PP_i(i=2,3\cdots6)$ 的对角线所对应的角度，所取的随机数为 R，如果 $2\pi R$ 落在点 $P_i(i=1,2,3\cdots6)$ 左右两条对角线之内，则由 P 向 P_i 点转移。

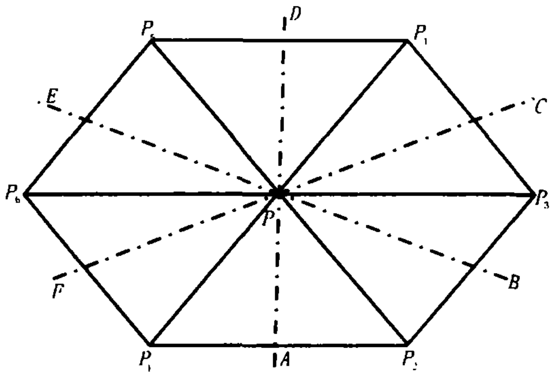

图 1　节点分布

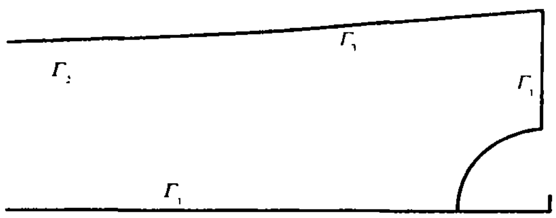

图 2　计算区域

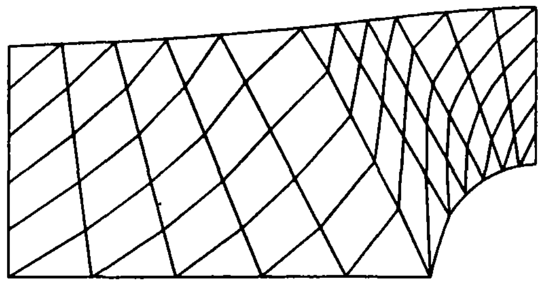

图 3　随机游动网格(12×6=72 个节点)

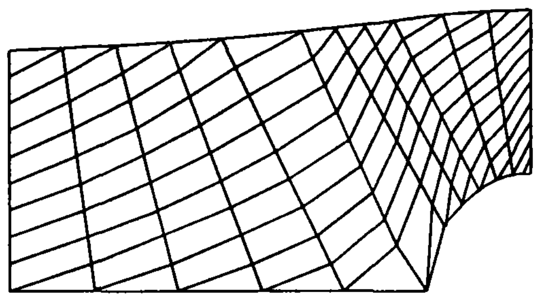

图 4　随机游动网格(13×10=130 个节点)

3　算例验证

(1) 本文选用了有代表性的平面二维绕流问题作为算例，验证新方法的有效性，并与传统的蒙特卡罗方法进行比较。选用圆柱绕流区域中的一条流线作为边界。流函数 Ψ 的控制方程、边界条件及计算区域如下：

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0$$

$$\Psi|_{\Gamma 1}=0;\Psi|_{\Gamma}=2;$$

$$\Psi|_{\Gamma 2}=y;\frac{\partial\Psi}{\partial n}|_{\Gamma 4}=0$$

采用不规则网格(如图 3、4)，分别用本文提出的新蒙特卡罗方法和传统的蒙特卡罗方法对全部节点进行计算。在相同游动次数的情况下，两种方法所得的结果和解析解的比较见表 1 以及图 5－图 8(其中的横坐标是节点编号，其顺序是图 3、4 的左下方点为 0 节点，纵向从下向上、横向从左向右编号)。

由表 1 可以看出，在相同游动次数情况下，本文提出的新方法的计算时间比传统蒙特卡罗法有大幅度地减少，减少的幅度随着节点数的增加而增大，在 78%～90%之间。

(2) 为了进一步验证本文方法的有效，又对具有解析解 $\Psi=x^2-y^2$、矩形边界的二维拉普拉斯方程进行了求解，采用图 9 的任意三角单元分布，结果如表 2 所示。

从以上两个算例充分证明了本文提出的新方法在大范围、多节点计算时，比传统蒙特卡罗方法具有极大的优越性，尽管两种方法的精度同量阶，但本文方法的计算时间却非常少，确是是一种快速算法。

4　结语

本文针对传统蒙特卡罗方法在做大范围、多节点的计算时速度较慢，尤其是在游动次数增加以后，这种缺点就表现的非常明显的现象，并结合蒙特卡罗方法及程序结构简单的特点，提出了一种可以进行大范围、多节点计算的新蒙特卡罗方法，同时提出了一种

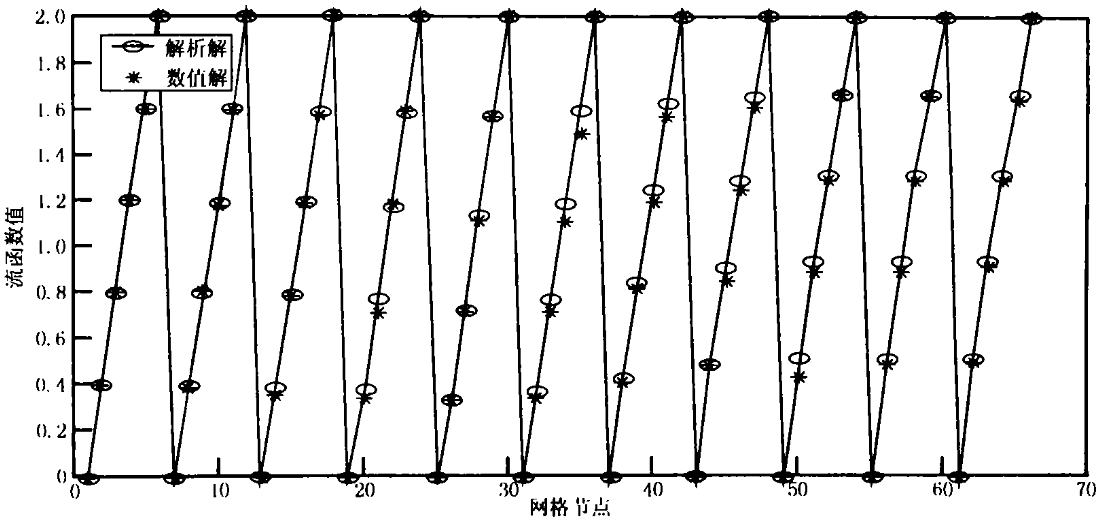

图5 本文方法与解析解的比较(12 * 6网格节点)

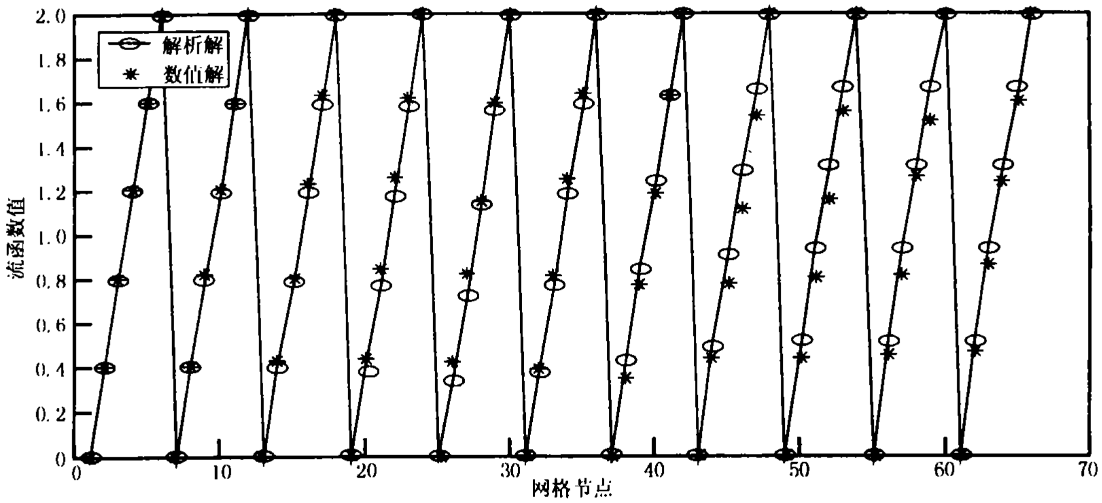

图6 传统蒙特卡罗方法与解析解的比较(12 * 6网格节点)

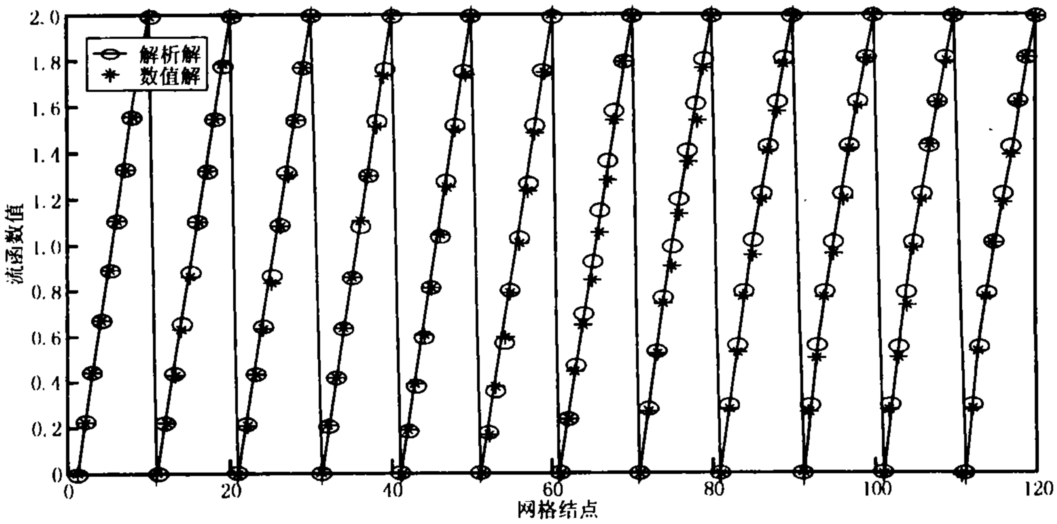

图7 本文方法与解析解的比较(13 * 10网格节点)

表 1 结果比较(单点游动次数 3000)

节点数	传统蒙特卡罗方法/本文方法			
	平均误差(%)	最大误差(%)	所耗时间(s)	平均单点耗时(s)
12 * 6	10.09/3.36	34.8/11.4	27/6	0.375/0.0833
13 * 10	8.33/2.94	29.1/10.1	167/15	1.28/0.115

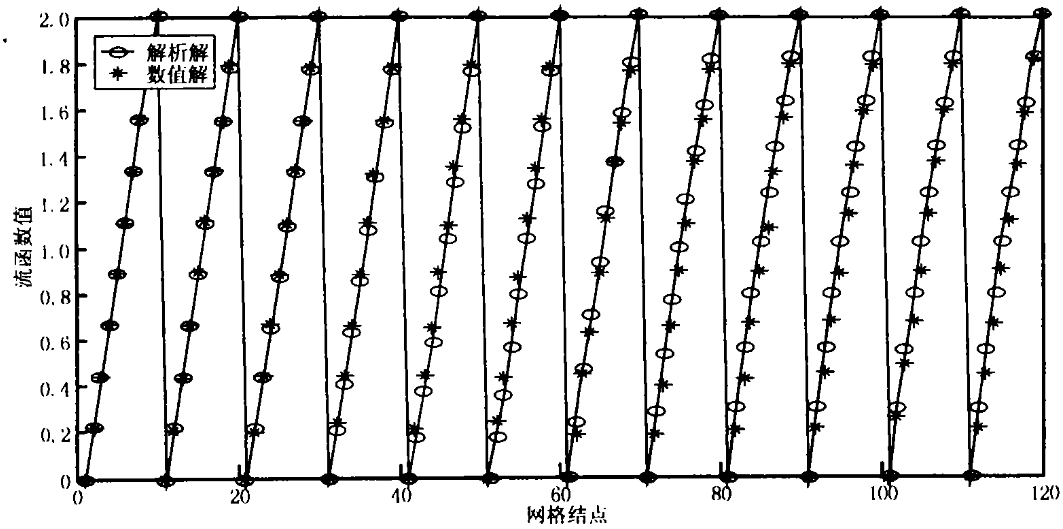

图 8 传统蒙特卡罗方法与解析解的比较(13 * 10 网格节点)

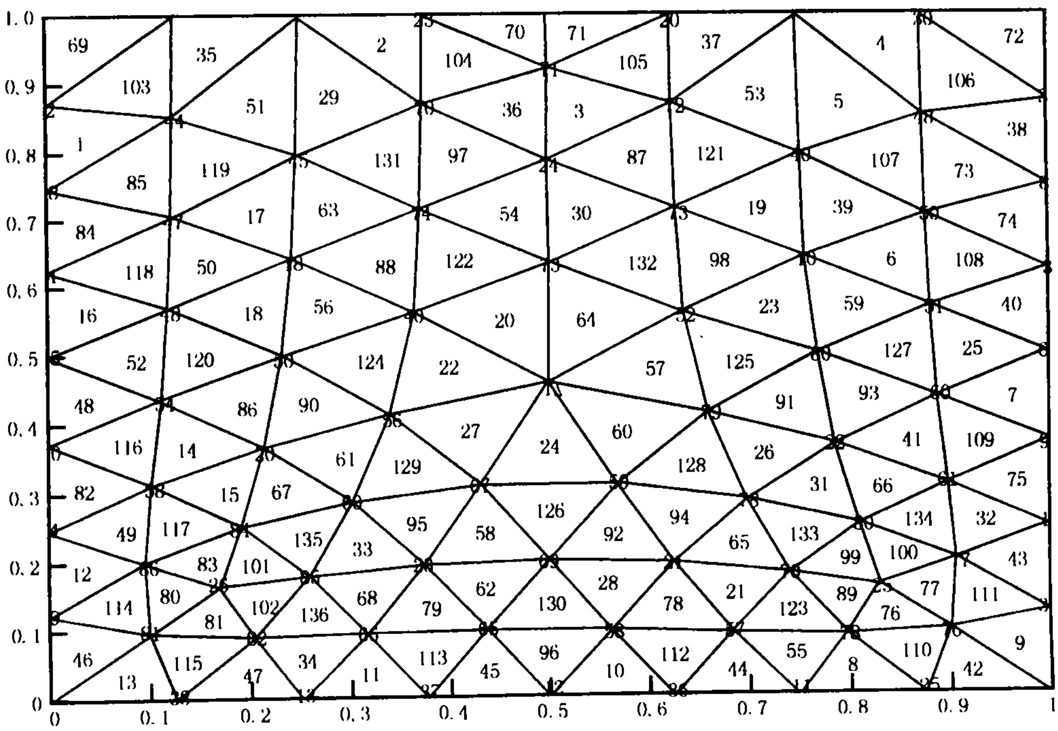

图 9 网格划分(共 85 个节点,136 个网格)

表2 单点游动次数3000

节点数	常规蒙特卡罗方法/本文方法		
	最大误差	所耗时间(秒)	平均单点耗时(秒)
85	3.1%/5.4%	60/4	0.706/0.047

以角度为转移标准的转移概率，并通过算例验证了此法的可行性和在大范围、多节点计算上存在着明显的优越性，本文方法对解决工程实际问题具有重要的现实意义。

参考文献：

[1] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海：上海科学技术出版社，1985.

[2] 朱本仁. 蒙特卡罗方法引论[M]. 济南：山东大学出版社，1986.

[3] 吉庆丰，郑邦民. 不规则游动网格的蒙特卡罗方法[J]. 水动力学研究与进展，A辑，2000，(2)：177-181.

[4] 赵涛. 有压隧洞出口段水流的二维势流蒙特卡罗解[D]. 新疆农业大学硕士学位论文，2000.

[5] 谷德军，刘乙敏，江奕光. 对流边界层中公路线源扩散的Monte--Carlo法模拟[J]. 热带气象学报，2000，16(1)：38-45.

[6] 宫野. 计算多重积分的蒙特卡罗方法与数论网格法[J]. 大连理工大学学报，2001，41(1)：20-23.

[7] 崔国民，蔡祖恢，李美玲. 直接模拟蒙特卡罗法对连续流体传热和流动的模拟[J]. 工程热物理学报，2000，21(4)：487-490.

[8] 娄安刚，王学昌，于宜法，奚盘根，俞光耀. 蒙特卡罗方法在海洋溢油扩展预测中的应用研究[J]. 海洋科学，2000，24(5)：7-10.

[9] 卢贵武，李荣. 蒙特卡罗计算机模拟方法及其在流体理论研究中的应用[J]. 石油大学学报(自然科学版)，1999，23(3)：112－116.