

用 MATLAB 实现蒙特卡罗法计算结构可靠度

冯晓波 杨 桦

(武汉大学水利水电学院 430072)

摘要 针对应用蒙特卡罗直接抽样法解决结构可靠度所遇到的困难,提出利用 MATLAB 的强大数值计算功能解决此类问题。利用 MATLAB 进行蒙特卡罗抽样模拟,在一定程度上减少了对连续型分布采用直接抽样时的困难,大大提高了计算效率。

关键词 蒙特卡罗法 MATLAB 可靠度 随机数

1 蒙特卡罗法

在结构可靠性分析中运用蒙特卡罗法^[1]方法,首先考虑各基本变量相互独立的情况。设基本变量 x_1, x_2, \dots, x_n 分别有分布函数 $F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2), \dots, F_{x_n}(x_n)$, 因为 $F_{x_i}(x_i)$ 为 $[0, 1]$ 区间上的一个数,可以将其与由蒙特卡罗法产生的随机数 r_j 对应。这样,便可得到 $x_i = F_{x_i}^{-1}(r_j), i = 1, 2, \dots, n$ 。对于每一个 r_j 值,可以得到一组对应的基本变量 x_1, x_2, \dots, x_n 。将这组值代入功能函数 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 便得到一个值,该值若小于等于 0, 则在程序中记录一次功能函数的实现,大于 0 则不记入。再对另一随机数重复进行这些计算,直到完成预定的循环次数。假定所进行的循环次数为 K 次, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ 的次数为 m 次,则可得失效概率为 $P_f = m/K$ (要求 K 足够大)。

若基本变量相关,可利用条件概率密度,把多维问题化为一维问题来解决,具体见文献[2]。因此从理论上说,该方法的应用几乎没有什么限制。

但是在实际问题中,连续型分布是很复杂的。有的只能给分布函数的解析表达式,但给不出其反函数的解析表达式,如著名的 β 分布;有的则连分布函数的解析表达式都给不出,如正态分布。所以通常情况下对连续型分布采用直接抽样是有一定困难的。本文利用 MATLAB 的强大数值计算功能,实现了在 MATLAB 中采用蒙特卡罗直接抽样计算结构可靠度,较好地解决了上述问题。

2 在 MATLAB 中实现蒙特卡罗法在结构可靠度中的计算

2.1 MATLAB 简介

MATLAB 是一种功能极其强大的科学和工程计算数学软件系统。它汇集了大量数学、统计、科学和工程所需的函数,除了具有类似于其他计算机编程语言的编程特性外,对计算数学领域的特定数学问题, MATLAB 都给出了该问题的各种高效算法。

此外 MATLAB 还提供一个阵容强大、范围广泛的基本运算体系,例如常用的矩阵代数运算、数组运算等,使用户可以以多种形式快速地操作数据集。与 Basic、Fortran、C 等编程语言相比, MATLAB 具有编程简单直观、用户界面友善、开放性强等特点,大大提高了编程效率。将 MATLAB 用于蒙特卡罗法的一个显著优点是它拥有功能强大的随机数发生器指令。

2.2 随机数的产生

通常在用蒙特卡罗直接抽样法时,必须解 $x = F^{-1}(r)$ 以求得服从相应分布类型的随机变量 x , 再代入功能函数求解。而 MATLAB(6.0 版)提供了 23 种随机变量分布类型的随机数发生器,如正态分布、对数正态分布、泊松分布、威布尔分布等(这些分布基本包括了工程实际中出现的变量分布情况),可直接产生变量 x 以代入功能函数,省去了可能会带来很大麻烦的求分布函数反函数这一步,极大地提高了效率。常用指令举例如下:

$$r = \text{rand}(m, n)$$

产生 m 行 n 列的 $(0 \sim 1)$ 间均布随机数组 r 。

$$r = \text{normrnd}(Mu, Sigma, m, n)$$

产生服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布的 m 行 n 列随机变量数组 r 。

$$r = \text{lgnrnd}(Mu, Sigma, m, n)$$

产生 $\ln R$ 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布的 m 行 n 列随机变量数组 r 。

MATLAB 目前版本尚无极值型分布的随机数发生器,故对极值型分布,仍须求解相应反函数。

2.3 编程求解

由于 MATLAB 能直接产生服从各相应概率分布函数的随机变量数组,从而使编程过程大为简化。

设功能函数为 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为服从各相应概率分布函数的随机变量。首先用相应随机数发生器指令产生 $m' \times n'$ 的随机变量数组 $x_i(k, l), (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m'; l = 1, 2, \dots, n')$ 。然后,将各数组中各元素一一对应代入功能函数。由于 MATLAB 提供了数组运算指令,避免了使用循环语句,从而执行更快。最后得到功能函数结果数组,

统计结果数组中小于等于 0 的元素个数 j , 可得失效概率:

$$P_f = \frac{j}{m' \times n'}$$

如果其中某一随机变量为极值型分布, 则先用均匀分布随机数发生器指令 $r = \text{rand}(m', n')$, 产生一个 m' 行 n' 列的均匀分布随机变量数组 r , 然后用式 $x = F^{-1}(r)$ 解出服从极值分布的随机变量数组, 再与用前述方法产生的其余变量一起代入功能函数求解即可。程序框图如图 1:

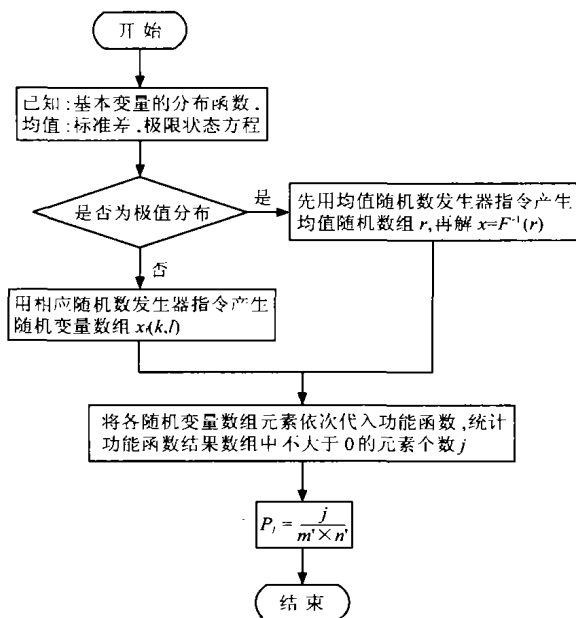


图 1 用 MATLAB 实现蒙特卡罗法程序框图

3 算 例

(1) 算例 1. 失效函数 $g = 2.5 - N[C/(1+E)]H \lg[(P + \Delta P)/P]$ 有 6 个相互独立的正态变量, 而且包含对数运算, 具体数值见表 1。

表 1 数 据

变量	N	C	E	H	P	ΔP
均 值	1.000	0.396	1.190	168.000	3.720	0.350
分布系数	0.10	0.25	0.15	0.05	0.05	0.20

根据前面所述, 直接用正态分布随机数发生器指令产生服从各相应统计特征的变量数组元素, 按 MATLAB 提供的数组计算指令代入功能函数, 再统计小于等于 0 的功能函数值个数即可, 非常简单直观。最后得结果为 $P_f = 6.40 \times 10^{-3}$, 抽样次数 16 万次, 仅需 2.3 s。用 JC 法计算结果为 $P_f = 7.36 \times 10^{-3}$, 计算较为麻烦。

(2) 算例 2. 设一轴心受压构件受到恒定荷载和临时性荷载 2 种压力, 恒载产生的轴向力 N_1 为正态分布, $\mu_{N_1} = 1159.1$ kN, $\sigma_{N_1} = 81.1$ kN; 临时性荷载产生的轴向力为极值 I 型分布, $\mu_{N_2} = 765.5$ kN, $\sigma_{N_2} = 222$ kN; 截面承载能力 R 为对数正态分布, $\mu_R = 4560$ kN, $\sigma_R = 729.6$ kN。极限状态方程为:

$$Z = g(R, N_1, N_2) = R - N_1 - N_2 = 0$$

此例有一极值型分布, 故先用均匀分布随机数发生器指令产生

(0~1) 间均匀分布随机数, 再求极值分布函数反函数, 解出服从极值分布的随机变量。在 MATLAB 中只要 2 条指令即可完成上述过程, 远比 Basic、Fortran、C 等语言简单高效。最后此例结果为 $P_f = 4.27 \times 10^{-5}$ 。

4 结 语

(1) 蒙特卡罗法在结构可靠度的数值模拟中具有收敛速度与基本变量的维数无关, 极限状态函数的复杂程度与模拟过程无关且无需将状态函数线性化和随机变量“当量正态化”的特点, 具有直接解决问题的能力。它的普遍适用性使其成为当今可靠度理论研究的热点, 必将在结构可靠性分析中发挥越来越大的作用。

(2) 在蒙特卡罗法计算中, 当结构失效概率很小时, 抽样模拟次数很大, 会大大增加计算量, 尤其当功能函数的计算需要进行结构整体有限元分析时更是如此。但随着各种改进方法^[4-5]和高性能计算机的出现, 这些问题将得到较大的解决。

(3) MATLAB 的强大功能为结构可靠度计算提供了便利, 研究人员可迅速编出科学高效的计算程序, 大大提高了效率。在西方, MATLAB 的应用已遍及现代科学界和工程界, 相比之下, 我国工程界人员对其了解和应用就少很多, MATLAB 的强大功能等待去发掘。□

参 考 文 献

- 徐钟济. 蒙特卡罗法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985
- 何水清, 王善. 结构可靠性分析与设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993
- 张志涌. 精通 MATLAB5[M]. 第 3 版. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2000
- 李亚东. 重要抽样模拟及其在结构可靠度计算中的应用[J]. 西南交通大学学报, 1992(4)
- 程耿东, 蔡文学. 结构可靠度计算的近似重要抽样模拟及其应用[J]. 工程力学, 1997, 14(2)

[作者简介] 冯晓波, 男, 29 岁, 助教, 博士研究生

(收稿日期: 2002-04-02)

· 信 息 ·

欢迎订阅下列书刊

《中国农村水利水电》1994 年, 1995 年精装合订本, 每本各 48.00 元; 1996 年、1997 年、1998 年、1999 年精装合订本, 每本各 96.00 元; 2000 年、2001 年精装合订本, 每本 120.00 元; 1992 年简装合订本, 每本 42.00 元。

《南方地区改造渍害田排水技术指南》, 每本 16.00 元。

《二十一世纪农田水利学术研讨会论文集》, 每本 30.00 元。

《全国乡镇供水论文集》, 每本 48.00 元。

(以上定价含邮资)。

联系地址: 武汉大学《中国农村水利水电》编辑部, 430072