№1

а) $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$ Легко подобрать пример насыщения:

когда каждый элемент вектора один и тот же.

$$\sqrt{m}\,\|x\|_\infty = \sqrt{\underbrace{x_{max}^2 + x_{max}^2 + \ldots + x_{max}^2}_{m}}$$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_m^2}$. Если хоть один элемент $x_i < x_{max}$, то

$$\|x\|_2 < \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$$

№2

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $A = U \Sigma V^+$ легко заметить, что $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Тогда легко подобрать U и V^+

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U^+U = 1,\ V^+V = 1$$

д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0 \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Для простоты предположим, что $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Тогда $V^+ = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, но что бы выполнялось $V^+V = 1$,

$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A = U \Sigma V^T$

$$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U \underbrace{\Sigma\Sigma^T}_{\to \, diag(\sigma_1^2 \ldots \sigma_n^2)} U^T$$

Собственные числа (AA^T) – сингул. знач в квадрате.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_2 = 0 \end{matrix}$$

U состоит из собств. векторов AA^T

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

V состоит из собств. векторов A^TA.

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad V \text{ и } U \text{ унитарны}$$

Тогда $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$