# 习题2.2

1. $f(x)=x\cdot 2^x-1$　　$f(0)\cdot f(1)=-1<0$　　$f(x)$在$[0,1]$上连续　故有零点

2. $f(x)=x-a\sin x-b$　　$f(0)=-b<0$

$f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b>a+b-a-b=0$

故 $f(a+b)\cdot f(b)<0$　　$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，故$\exists$零点

$(0,a+b)$

且零点不超过 $a+b$

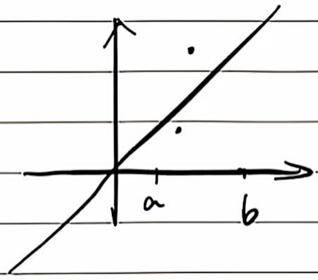
3. $f(x)=x-\sin(1+x)$

$f(-1)=-1$　　$f(1)=1-\sin 2>0$　　$f(-1)\cdot f(1)<0$

且$f(x)$在$R$上连续　故$f(x)$有实零点

$(-1,1)$

4.




若$f(a)=a$ 或$f(b)=b$，则满足

否则，令 $f(x_1)=a$　　$f(x_2)=b$

不妨　$a<x_1<x_2<b$

令 $F(x)=f(x)-x$　　$F(x_1)=f(x_1)-x_1=a-x_1<0$

$F(x_2)=f(x_2)-x_2=b-x_2>0$

$F(x_1)\cdot F(x_2)<0$　且 $F(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，故$\exists x_0$, $F(x_0)=0$

此时　$f(x_0)-x_0=0$　即 $f(x_0)=x_0$

5. 令 $F(x)=f(x)-g(x)$　　$F(a)=f(a)-g(a)>0$

$F(b)=f(b)-g(b)<0$

$F(x)$在$[a,b]$连续，$F(a)\cdot F(b)<0$，故$\exists x_0\in[a,b]$, s.t. $F(x_0)=0$

此时　$f(x_0)=g(x_0)$　　$x_0\in[a,b]$

6. 令 $F(x)=f(x)-f(a+x)$

$F(0)+F(a)=0$

若 $F(0)=F(a)=0$ 此时 $x_0=0$. 满足

若 $F(0)\neq 0$ $F(a)\neq 0$ 则 $F(0)\cdot F(a)<0$ $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续

故 $\exists x_0\in[0,a]$, s.t. $F(x_0)=0$. 即 $f(x_0)=f(a+x_0)$

7. 设 $f(x_i)=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$ $\quad f(x_i)\in f([a,b])$

$f(x_k)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$ $\quad f(x_k)\in f([a,b])$

则 $f(x_i)=\frac{1}{n}\cdot nf(x_i)\leq\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\leq\frac{1}{n}\cdot nf(x_k)=f(x_k)$

故 $\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\in f([a,b])$

故 $\exists$ 一点 $\xi$, s.t. $f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$

更一般地 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$

将前 $f(x)\to f(x_k)$

$f(x_i)=(q_1+\cdots+q_n)f(x_i)\leq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)\leq(q_1+\cdots+q_n)f(x_k)=f(x_k)$

故 $q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)\in f([a,b])$

故 $\exists$ 一点 $\xi_1$, s.t. $f(\xi_1)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)$

8. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X\in\mathbb{R}_+$ $\forall x>X$, $|f(x)-A|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$. $\forall x>X$ $|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|<|A|+1$

又考虑区间 $[a,X]$, 又 $\because f(x)$ 在 $[a,X]$ 连续

故 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上有界, 不妨 $|f(x)|\leq B$. $x\in[a,X]$

设 $M=\max\{|A|+1,B\}$, $|f(x)|\leq M$, 故 $f(x)$ 有界.

扫描全能王 创建

**9.** $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$

令 $t=1+x^2$ $\quad t\geq 1$ $\quad f(x)=\dfrac{t}{1-(t-1)+(t-1)^2}=\dfrac{t}{t^2-3t+3}=\dfrac{1}{t-3+\frac{3}{t}}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$

当且仅当 $t=\sqrt{3}$ 时取等，而 $t\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0^+$

故 $0<f(x)<\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$，有界！

**10.**

(1) 不存在，定义域为闭区间，值域一定有界

(2) 不存在，定义域为闭区间，值域一定为闭区间

(3) 不存在，定义域为闭区间的连续函数，值域一定连续

(4) 可能存在 $\quad f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ $\quad x\in(0,1)$ $\quad f(x)\in(2,+\infty)$

**11.** $f(x)=\tan x$ $\quad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

**12** 设 $y=f(x)$ 在开区间 $I=(a,b)$ 上连续并严格单调，证明：$y=f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也为开区间

法一：

不妨设其严格单增，则其值域是一个区间，设定义域为 $A$，值域为 $B$

其有反函数 $g(x)$，$g(x)$ 是从 $B\to A$ 的一个函数

任取 $A$ 中一个开区间 $I$，其原像 $g^{-1}(I)$ 都是 $B$ 中的一个开区间，

又 $\because$ 一一对应，取 $A$，其原像 $g^{-1}(A)=B$ 也为一个开区间。 $\quad$ D

法二：

$f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(x)$ 不妨严格单增

设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\xi_1$，即 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta$. $\forall a<x<a+\delta$，有 $|f(x)-\xi_1|<\varepsilon$

先证对于 $\forall x_1$，$f(x_1)>\xi_1$，假设 $\overset{\exists x_1}{f(x_1)}\leq\xi_1$，则 $f(\frac{a+x_1}{2})<f(x_1)\leq\xi_1$

一直操作二分法，$f(\frac{a+\frac{a+x_1}{2}}{2})<f(\frac{a+x_1}{2})<f(x_1)\leq\xi_1$，取 $\varepsilon=f(x_1)-f(\frac{a+x_1}{2})$

当 $x\to+\infty$ $x_n\to a^+$，而 $|f(x_n)-\xi_1|>f(x_1)-f(\frac{a+x_1}{2})=\varepsilon$. 矛盾.

又对于 $\forall\varepsilon_1>0$ $\quad\exists\ \xi_1<c<\xi_1+\varepsilon_1$ (稠密性)

取 $\varepsilon=c-\xi_1$ $\quad$ 则 $\exists x_3$. $f(x_3)<c$ $\qquad$ 故 $\forall x_1\in(a,b)$ $f(x_1)>\xi_1$

故 $\xi_1<f(x_3)<c<\xi_1+\varepsilon_1$ $\qquad$ 且 $\forall\varepsilon_1>0$ $\exists f(x_3)$，$\xi_1+\varepsilon_1>f(x_3)$

$\because$ $\xi_1$是$f(x)$下确界，类似地，设 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\xi_2$，$\xi_2$是$f(x)$上确界

一方面，$(a,b)$中任何一点函数值都介于 $(\xi_1,\xi_2)$中

故 $f(a,b)\subset(\xi_1,\xi_2)$

另一方面，$(\xi_1,\xi_2)$中任何一个数$r$，都$\exists x_r$ $f(x_r)=r$

故 $(\xi_1,\xi_2)\subset f(a,b)$

所以，$f(x)$的值域是开区间$(\xi_1,\xi_2)$

13.

反证．设$a$点的右极限不存在，又$\because f(x)$在$(a,b)$上一致连续

不妨 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

又$\because$一致连续．$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$．$\forall x',x''$，$|x'-x''|<\delta$，$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

又$\because \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

对上述$\delta$，取 $a<x_1<a+\delta$

取$M=f(x_1)$ $\exists\delta_2<\delta$ $\forall a<x<a+\delta_2$ $f(x)>f(x_1)$

取$x_2\in(a,a+\delta_2)$ $f(x_2)>f(x_1)$

取 $\varepsilon=f(x_2)-f(x_1)$ $\because a<x_1<a+\delta$ $a<x_2<a+\delta$

故 $|x_1-x_2|<\delta$． $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_2)-f(x_1)=\varepsilon$ 矛盾！

故$f(x)$在$a$点右极限一定存在。

类似地，$f(x)$在$b$点左极限也一定存在。

□

扫描全能王 创建