**9.** $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$

令 $t=1+x^2$　$t\geq 1$　$f(x)=\dfrac{t}{1-(t-1)+(t-1)^2}=\dfrac{t}{t^2-3t+3}=\dfrac{1}{t-3+\frac{3}{t}}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$

当且仅当 $t=\sqrt{3}$ 时取等，而 $t\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0^+$

故　$0<f(x)<\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$，有界！

**10.**

(1) 不存在，定义域为闭区间，值域一定有界

(2) 不存在，定义域为闭区间，值域一定为闭区间

(3) 不存在，定义域为闭区间的连续函数，值域一定连续

(4) 可能存在　$f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$　$x\in(0,1)$　$f(x)\in(2,+\infty)$

**11.** $f(x)=\tan x$　$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

**12** 设 $y=f(x)$ 在开区间 $I=(a,b)$ 上连续并严格单调，证明：$y=f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也为开区间

法一：

不妨设其严格单增，则其值域是一个区间，设定义域为 $A$，值域为 $B$

其有反函数 $g(x)$，$g(x)$ 是从 $B\to A$ 的一个函数

任取 $A$ 中一个开区间 $I$，其原像 $g^{-1}(I)$ 都是 $B$ 中的一个开区间，

又 $\because$ 一一对应，取 $A$，其原像 $g^{-1}(A)=B$ 也为一个开区间。　b

法二：

$f(x)\in C(a,b)$　且 $f(x)$ 不妨严格单增

设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\xi_1$　即 $\forall\varepsilon>0$　$\exists\delta$，$\forall a<x<a+\delta$，有 $|f(x)-\xi_1|<\varepsilon$

先证对于 $\forall x_1$，$f(x_1)>\xi_1$，假设 $\overset{\exists x_1}{f(x_1)}\leq\xi_1$，则 $f(\frac{a+x_1}{2})<f(x_1)\leq\xi_1$

一直操作二分法，$f(\frac{a+\frac{a+x_1}{2}}{2})<f(\frac{a+x_1}{2})<f(x_1)\leq\xi_1$，取 $\varepsilon=f(x_1)-f(\frac{a+x_1}{2})$

当 $x\to+\infty$　$x_n\to a^+$，而　$|f(x_n)-\xi_1|>f(x_1)-f(\frac{a+x_1}{2})=\varepsilon$　矛盾

又对于 $\forall\varepsilon_1>0$　$\exists\ \xi_1<c<\xi_1+\varepsilon_1$（稠密性）

取 $\varepsilon=c-\xi_1$　则 $\exists x_3$　$f(x_3)<c$

故 $\xi_1<f(x_3)<c<\xi_1+\varepsilon_1$

故 $\forall x_1\in(a,b)$　$f(x_1)>\xi_1$

且 $\forall\varepsilon_1>0$　$\exists f(x_3)$，$\xi_1+\varepsilon_1>f(x_3)$

$\therefore$ $\xi_1$ 是 $f(x)$ 下确界，类似地，设 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\xi_2$. $\xi_2$ 是 $f(x)$ 上确界

一方面，$(a,b)$ 中任何一点函数值都介于 $(\xi_1,\xi_2)$ 中

故 $f(a,b)\subset(\xi_1,\xi_2)$

另一方面，$(\xi_1,\xi_2)$ 中任何一个数 $r$，都 $\exists x_r$ $f(x_r)=r$

故 $(\xi_1,\xi_2)\subset f(a,b)$

所以，$f(x)$ 的值域是开区间 $(\xi_1,\xi_2)$

13.

反证．设 $a$ 点的右极限不存在，又 $\because f(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致连续

不妨 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

又 $\because$ 一致连续．$\forall\varepsilon>0$．$\exists\delta$．$\forall x',x''$，$|x'-x''|<\delta$．$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

又 $\because \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

对上述 $\delta$，取 $a<x_1<a+\delta$

取 $M=f(x_1)$ $\exists\delta_2<\delta$ $\forall a<x<a+\delta_2$ $f(x)>f(x_1)$

取 $x_2\in(a,a+\delta_2)$ $f(x_2)>f(x_1)$

取 $\varepsilon=f(x_2)-f(x_1)$ $\alpha$ $\because a<x_1<a+\delta$ $a<x_2<a+\delta$

故 $|x_1-x_2|<\delta$．$|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_2)-f(x_1)=\varepsilon$ 矛盾！

故 $f(x)$ 在 $a$ 点右极限一定存在。

类似地，$f(x)$ 在 $b$ 点左极限也一定存在。

$\square$

14. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ 故 $a \in (0, +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0.\ \exists N \in \mathbb{N}_+\ \forall n > N\ |a_n - a| < \varepsilon$

考虑 $f(a)$ $\forall \varepsilon_0 > 0,\ \exists \delta_0$ $\forall a-\delta_0 < x < a+\delta_0$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$

取 $\varepsilon = \delta_0$, $a+\delta_0 < a_n < a+\delta_0$, 故 $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon_0$

故 $f(a_n)$也收敛

若仅假设连续, 结论不成立

如反例: $f(x) = \frac{1}{x}$ $a_n = \frac{1}{n}$

15. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $a \in (-\infty, +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_+\ \forall n > N\ |a_n - a| < a$

考虑 $f(a)$. $\forall \varepsilon_0 > 0.\ \exists \delta_0,\ \forall\ |x - a| < \delta_0$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$

取 $\varepsilon = \delta_0$. 故 $|a_n - a| < a$

故 $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon_0$

故 $\{f(a_n)\}$ 也收敛 □

16. $f(x) = \sin x^2$

取 $x_n' = \sqrt{2n\pi}$ $x_n'' = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

$|x_n'' - x_n'| = \left| \frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi + 2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right| < \varepsilon$

取 $\varepsilon = 1$ $f(x_n') - f(x_n'') = 1$

PPT

**例12** 设$f\in C[a,b]$, 且$\forall x\in[a,b]$, $\exists y\in[a,b]$使

$$|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|.$$

试证: $\exists\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=0$.

反证. 设 $\nexists\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$

又$\because$ $f\in C[a,b]$ 故 $\forall x\in[a,b]$ $f(x)$同号

故不妨设 $f(x)>0$.

又$\because$ $f\in C[a,b]$ $\exists\xi_1$, $f(\xi_1)=\inf f(x)$

取 $x=\xi_1$ 由题, $\exists y$. $f(y)\le\frac{1}{2}f(\xi_1)$

故 $0<f(y)<f(\xi_1)$ 与 $f(\xi_1)$是下确界矛盾! □