6、 令 $F(x)=f(x)-x$

$\because$ $F(0)=f(0)-0>0$

$F(1)=f(1)-1<0$

$f(x)\in(0,1)$

由零值定理 $\Rightarrow \exists\, \xi$ $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$

Largrange 中值定理：

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)\neq(x_1-x_2)$$

故若 $\exists\, a, b \in[0,1]$

$F(a)=0=F(b)$ 则 $f(a)-f(b)=a-b$ 矛盾.

综上，在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 $x=\xi$，使 $f(x)=x$

□

7. 若 $|x_1-x_2|>\frac{1}{2}$，不妨设 $0<x_1<x_2<1$，则 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|\leq|f'(\xi_1)||x_1-0|+|f'(\xi_2)||1-x_2|$$

$$<|x_1|+|1-x_2|=1+x_1-x_2<\frac{1}{2}$$

若 $|x_1-x_2|\leq\frac{1}{2}$，则 $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|<|f'(\xi)||x_1-x_2|$

故 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|\leq\frac{1}{2}$

即 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$

8. 考虑 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$

则 $F'(x)=\frac{f'(x)e^x-e^x f(x)}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=0$.

故 $F(x)\equiv C$.

也即 $f(x)=Ce^x$ □

9. 由 $f(a)=f(b)$ 且 $f\in C[a,b]$ 知

f 在 (a,b) 至少存在最大值和最小值其中之一.

不妨设 f 在 (a,b) 有最大值 $f(x_1)$ $x_1\in(a,b)$

则 $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}=f'(\xi)>0$ 故 $\exists\,\xi$.

10. (1) $\forall\varepsilon>0\ \exists X\ \forall x>X\ |f'(x)|<\varepsilon$

$\frac{f(x+1)-f(x)}{1}=f'(\xi)$ 其中 $\xi>x>X$

故 $|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$

(2) $\forall\varepsilon>0\ \exists X=\frac{1}{\varepsilon}$. $\forall x>X$. $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$

$\frac{f(x)-f(X+1)}{x-X-1}=f'(\xi)$ $f(x)=f'(\xi)[x-X-1]+f(X+1)$

$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{f'(\xi)[x-X-1]}{x}+\frac{f(X+1)}{x}=f'(\xi)-\frac{f'(\xi)(X+1)}{x}+\frac{f(X+1)}{x}$

$=f'(\xi)-\varepsilon\underbrace{f'(\xi)(X+1)}_{\text{有界}}+\varepsilon\underbrace{f(X+1)}_{\text{有界}}$

$<M\cdot\varepsilon$ □

习题3.4 (p115)

1. (1) $\lim\limits_{x\to 0} \alpha\cdot\frac{1}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1} - \beta\cdot\frac{1}{n}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{mn(1+mx)^{n-1}-mn(1+nx)^{m-1}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{mn(n-1)(1+mx)^{n-2}-mn(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2} = mn^2-m^2n$

(3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\arcsin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6} = \frac{1}{6}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^{-3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6}$

$= \lim\limits_{t\to +\infty} 2t^3 e^{-t} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{2t^3}{e^t} = \lim\limits_{t\to \infty} \frac{12}{e^t} = 0$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^x-a^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(a+x)}-e^{x\ln a}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(a+x)-x\ln a}-1}{e^{-x\ln a}x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(a+x)-x\ln a}{e^{-x\ln a}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\frac{x}{a})}{x\cdot a^{-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{a\cdot a^{-x}} = \frac{1}{a}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = 0$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\arctan^2 x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\frac{2}{1+x^2}\arctan x}{4x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{1+x^2}\arctan x}{2x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}\arctan x}{6x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(1+x^2)^{-2}}{6x^2} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x^2)^2}}{3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2(1+x^2)^{-3}\cdot 2x}{12x} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$