2.25. 习题 5.3: 1, 9, 10, 13.

5.4. 1, 5

1. $(C,+)$ $f+g+h=f+(g+h)$ $f+g\in C$

$f+0=0+f=f$ $f-f=0$

$f_1+g_1=g_1+f_1$

$(C,\cdot)$ $f\cdot g\cdot h=f(g(x))\cdot h(x)=f(g(x)\cdot h(x))=f(g\,h(x))$.

$f\cdot 1=1\cdot f=f$ $f\cdot g\in C$

$(C,+,\cdot)$ 结合率，交换加群，若f为线性函数

$$(f\cdot(g+h))(x)=f((g+h)(x))$$
$$=f(g(x)+h(x))$$
$$=f(g(x))+f(h(x))$$
$$=(f\cdot g)(x)+(f\cdot h)(x)=(f\cdot g+f\cdot h)(x)$$

结论：若为线性函数，则成立，否则，不成立.

9. $(1-ab)\cdot m=m\cdot(1-ab)=1$

$m-abm=m-mab=1$

$abm=mab$

$$(1-ba)(1+bma)=1+bma-ba-babma$$
$$=1+b(m-1-abm)a$$
$$=1+b\cdot[(1-ab)m-1]a$$
$$=1$$

$$(1+bma)(1-ba)=1-ba+bma-bmaba$$
$$=1+b(m-1-mab)a=1+b[m(1-ab)-1]a$$
$$=1$$

10. R是环，S是R的子集。

证明：$C(S)=\{a\in R \mid ax=xa, \forall x\in S\}$ 是R的子环

子环：加法子群，满足乘法封闭。

充要条件，$\forall a,b\in S$ $a-b\in S$，$\underbrace{ab\in S}$ → 乘法封闭

证明：$a-b\in S$ 保证了S为加法子群

$a-a=0$ 说明0元在S中

若 $a=0$，则 $a-b=0-b=-b\in S$ 逆元 ✓

$-b\in S$ 则 $a-(-b)=a+b\in S$，加法封闭

回到本题，$\forall a,b\in S$

$ax=xa$ $bx=xb$

$abx=a(bx)=axb=xab$ 故 $ab\in S$

$(a-b)x=ax-bx=xa-xb=x(a-b)$ 故 $a-b\in S$

12.

13. 如果环中任意元素的平方等于自身，证明该环是交换环 立方呢？

证：$\forall x\in R$， $x^2=x$

$\forall a,b\in R$， 要证 $ab=ba$

$a+b\in R$， $(a+b)^2=a+b$

$=a^2+ab+ba+b^2=a+ab+ba+b$

$\Rightarrow ab+ba=0$ $(a-b)^2=a^2-ab-ba+b^2=a-b$

$ab+ba=2b=0 \Rightarrow b=0$

故 $ab=ba=0$.

若 $a^3=a$，$b^3=b$.

考虑集合 $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

其中 0,1 是 mod2 意义下的 0,1

上述集合构成环.

且 $\forall a\in S\quad a^3=a$

但 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$

故不是交换环.

P131、

1、$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 是否同构.

假设 $\exists\varphi$ 为同构 $\quad\varphi(x)=y.\quad x\in\{a+\sqrt{2}b\}$

$y\in\{m+\sqrt{3}n\}$

$(m_1$ 和 $n_1\in\mathbb{Q})$.

$\varphi(\sqrt{2})=m_1+n_1\sqrt{3}\qquad\varphi(2)=2\varphi(1)=2=\varphi(\sqrt{2})\cdot\varphi(\sqrt{2})=m_1^2+3n_1^2+2m_1n_1\sqrt{3}$

$\varphi(1)=1\quad\varphi(0)=0\qquad$ 故 $m_1n_1=0.\quad m_1^2+3n_1^2=2$

若 $m_1=0.\ n_1^2=\frac{2}{3}$ 矛盾

若 $n_1=0\quad m_1^2=2$ 矛盾 $\qquad$ 故非同构

5. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $a,b\in\mathbb{Z}_3=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=a^2+b^2\neq 0.$$ 有逆元

乘法、加法封闭. 有单位元,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ -b_1a_2-a_1b_2 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_2b_1+a_1b_2 \\ -a_1a_2-a_2b_1 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{pmatrix}$$

可交换　　满足分配律 → 域.

共 $\underset{a}{3}\times\underset{b}{3}=9$ 个元素. 故为九元域

乘法群: 依旧满足 $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}$ 形式

考虑: 除去0元外其他8个元素　存在 $e=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　且刚好是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的8次幂

生成元

2.27

习题5.4

3. 证明 $(a+b)^{p^m} = a^{p^m} + b^{p^m}$

对m作归纳法 $m=0$ 时 ✓

$m=1$ 时 $pa=pb=0$

故. $(a+b)^p = a^p + b^p$

设 $m=n-1$ 时成立. $(a+b)^{p^{n-1}} = a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}}$

则 $m=n$ 时.

$$(a+b)^{p^m} = (a+b)^{p^n} = (a+b)^{p^{n-1}\cdot p^1} = \left[(a+b)^{p^{n-1}}\right]^p$$

$$= \left(a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}}\right)^p$$

又 $\because a\in F,\ b\in F$ 故 $a^{p^{n-1}}\in F$ $b^{p^{n-1}}\in F$

故 $\left(a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}}\right)^p = \left(a^{p^{n-1}}\right)^p + \left(b^{p^{n-1}}\right)^p = a^{p^n} + b^{p^n}$

$\square$

第二卷.

习题1.1.

6. (1) 满足 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 的所有实值连续函数 f

$(f,+)$ 为阿贝尔群. $\int_a^b 0\,dx = 0$.

$0+f=0$. $1\cdot f = f$ $f-f=0$.

$ab\cdot f = a(bf)$. $(f+g)u = uf + ug$ $(a+b)f = af + bf$

故为向量空间.

(2) $\int_a^b f(x)\,dx \le 0$. 在 $[a,b]$ 上.

不满足, 不一定有一个

(3) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

满足

$f+g$ ✓ $\quad f+g+h = f+(g+h)$ ✓

$-f$ ✓ $\quad 0+f=f$ ✓

$f+g=g+f$ ✓ $\quad abf = a(bf)$ ✓

$1\cdot f = f$ ✓ $\quad (a+b)f = af+bf$ ✓

$(f+g)a = fa+ga$. ✓

9. (1) ${}^tA = A$ $\quad {}^t(A+B) = A+B$

${}^t(cA) = c\,{}^tA = cA$. ✓

(2) ${}^tA = -A$ $\quad {}^t(A+B) = -(A+B) = -A-B = {}^tA + {}^tB$

${}^t(cA) = c\,{}^tA = -cA$ ✓

(3) $\det A = 0$. $\quad 0 \le \det(A+B) \le \det A + \det B = 0$

故 $\det(A+B)=0$ ✓

$\det cA = c^n \det A = 0$.

(4) $tr(A) = 0$ $\quad tr(A+B) = 0$

$tr(cA) = c\, tr A = 0$ ✓

13. "$\Rightarrow$" ∵为向量空间，$\forall x\in A$，$k\in\mathbb{Z}_p$ $kx\in A$

故 $px\in A$ 又 p 为零元，故 $px=0$

"$\Leftarrow$" $px=0$ 定义 $\forall k\in\mathbb{Z}_p$，$x\in A$

$kx=(k \bmod p)\cdot x$

故 $1\cdot x=x$ $abx=a(bx)$

且满足两个分配律 □

14. "$\Rightarrow$" 为向量空间 $\forall x\in A$，$k\in\mathbb{Q}$ $kx\in A$

且若 $x\neq 0$，$k\neq 0$，$kx\neq 0$ 故为无限阶

"$\Leftarrow$" 无限阶，故 $\forall x\in A$ $k\in\mathbb{Q}$ $x\neq 0$，$k\neq 0$

时 $kx\neq 0$，故 $1\cdot x=x$，$abx=a(bx)$

且满足两个分配律 □

向量空间，即对 $\forall x\in A$，$nx\in A$

且此过程可逆，故 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$a\in A$

方程 $nx=a$ 有解

15. ∵ $|K|=q$ 故在 K^n 中有 q^n 个元素

∵系数不全为0，不妨设 $a_1\neq 0$

则 $x_1=\dfrac{b_1-a_2x_2-a_3x_3-\cdots-a_nx_n}{a_1}$

当 $x_2,\cdots x_n$ 固定时，x_1 有唯一的值

故方程解的个数 $=(x_2,x_3,\dots x_n)$ 的取值总数 $=q^{n-1}$