Hw 4

习题 1.6.

1. $\exists v.\ f(v)\neq 0$. 故 $f(\frac{v}{f(v)})=\frac{f(v)}{f(v)}=1$，即 $\exists e_1.\ f(e_1)=1$.

$f(e_1)=1 \quad f(e_2)=0 \quad \cdots \quad f(e_n)=0$

$f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=x_1f(e_1)=x_1$

2. 找一组基 $v_1,\cdots v_{n-k}$，扩充为 V 的基 $v_1\cdots v_{n-k}.\underset{\uparrow}{v_{n-k+1}}\cdots\underset{\uparrow}{v_n}$.

$s_1,\cdots,s_k$

构造映射 $f_1\cdots f_{n-k}$ s.t. $f_i(v_j)=\delta_{ij}$

f_1 的核为 $\langle v_2,\cdots v_{n-k},v_{n-k+1},\cdots,v_n\rangle$

f_2 $\quad \langle v_1\cdots v_{n-k},v_{n-k+1},\cdots,v_n\rangle$

$\cdots$

f_{n-k} $\quad \langle v_1\cdots v_{n-k-1},v_{n-k+1},\cdots,v_n\rangle$

核的交为 $\langle s_1,\cdots,s_k\rangle$
这也即 $\forall k$ 维子空间

3. $\Rightarrow$ 线性无关

if $\ker(f_1)\cap\ker(f_2)\cap\cdots\cap\ker(f_n)=a\neq 0$.

$f_1(a)=0=\cdots=f_n(a)$ 则 $\exists c_1\cdots c_n$ 不全为0 $c_1f_1(a)+\cdots+c_nf_n(a)=0$. 矛盾

$\Leftarrow$

$\exists c_1\cdots c_n$ 不全为0， $c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$.

取定 x_1 $f_1(x_1)=0$. $f_2\cdots f_k(x_1)\neq 0$. $\Rightarrow$ $\begin{cases} c_2f_2(x_1)+\cdots+c_nf_n(x_1)=0. \\ c_1f_1(x_2)+\cdots+c_nf_n(x_2)=0 \\ c_1f_1(x_n)+\cdots+c_{n-1}f_{n-1}(x_{n-1})=0\end{cases}$

类似 $\Rightarrow$

有非零解 $c_1\cdots c_n$ $\Rightarrow$ $\det\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n)\end{vmatrix}\neq 0$. $\Rightarrow$ 线性无关.

4. 设 f 非零函数. $\exists x_0$ $f(x_0)\neq 0$. $\Rightarrow g(x_0)=0$.

则 $\forall x$, $x=x_0+x-x_0$. $g(x)=g(x-x_0)$

又 $f(x-x_0)g(x-x_0)=0$. 且 $f(x-x_0)\neq 0$. $\Rightarrow g(x-x_0)=0$. $\Rightarrow g(x)=0$.

6. 令 $X=(x_{ij})$ $\quad f(mX)=mf(x)=tr(AmX)=m\,tr(AX)$

$f(X+Y)=f(x)+f(Y)=tr(AX+AY)=tr\,AX+tr\,AY$.

$A=(a_{ij})$ $\quad tr(AX)=(a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+\cdots+a_{1n}x_{n1})+(a_{21}x_{12}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{32}+\cdots+a_{2n}x_{n2})$
$+\cdots+(a_{n1}x_{1n}+\cdots+a_{nn}x_{nn})$ 故存在性 ✓

而若 $tr(AX)=tr(BX)$ 则 $a_{ij}=b_{ij}$. 故 $A=B$ 唯一性. ✓

7. $\ker f=\ker g$.

$\exists V_0\notin\ker f$. 令 $\lambda=\frac{f(V_0)}{g(V_0)}$

考虑 $g(V-\frac{g(V)}{g(V_0)}V_0)=g(V)-g(V_0)\cdot\frac{g(V)}{g(V_0)}=0$ 故 $V-\frac{g(V)}{g(V_0)}V_0\in\ker g$

故 $f(V-\frac{g(V)}{g(V_0)}V_0)=f(V)-\frac{f(V_0)}{g(V_0)}\cdot g(V)=0$

也即 $f(V)=\lambda g(V)$

习题2.1

1. (1) $f(u+v)=f(u)+f(v)\quad\in W$

$f(cu)=cf(u)\quad\in W$.

(2) 线性映射

$f^{-1}(V_1+V_2)=f^{-1}(V_1)+f^{-1}(V_2)\quad\in V$

$f^{-1}(cV_1)=cf^{-1}(V_1)\quad\in V$

2. $f(V_1,\dots,V_n)=(e_1,\dots,e_m)\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\because$ $\operatorname{rank} f=r$. 故一定 $\exists\, fV_1\cdots fV_r$. 使得这 r 个向量线性无关.

$fV_1=e_1\quad fV_2=e_2\quad\cdots\quad fV_r=e_r$

取 $V_{r+1},\dots,V_n$ 使 $V_1\cdots V_r,V_{r+1}\cdots V_n$ 线性无关

且满足 $fV_{r+1},\dots,fV_n$ 与 $fV_1\cdots fV_r$ 线性相关

再结合 f 为线性函数.

引理: 一定 $\exists\, m_1,\dots,m_r,m_{r+1}\cdots m_n$. m_i 皆为 V_i 的线性组合.

使得 $f(m_1)=q_1\quad f(m_2)=q_2\quad\cdots\quad f(m_r)=q_r$. $f(m_{r+1})=\cdots=f(m_n)=0$、

其中 $q_1\cdots q_r$ 线性无关.

证明: 假如 $fV_{r+1}\neq0$.

$\because$ fV_{r+1} 与 $fV_r\cdots fV_1$ 线性相关

故 $\exists$ 不全为0 的 $a_1\cdots a_{r+1}$ $\quad a_1fV_1+\cdots+a_{r+1}fV_{r+1}=0$.

$(a_{r+1}\neq0)$

故 $fV_{r+1}=-\frac{1}{a_{r+1}}(a_1fV_1+\cdots+a_rfV_r)$.

$=f(\frac{-V_1a_1}{a_{r+1}}-\frac{V_2a_2}{a_{r+1}}-\cdots-\frac{V_ra_r}{a_{r+1}})$.

将 V_{r+1} 替换成 $m_{r+1}=V_{r+1}+\frac{V_1a_1}{a_{r+1}}+\frac{V_2a_2}{a_{r+1}}+\cdots+\frac{V_ra_r}{a_{r+1}}$ 即 $fm_{r+1}=0$

$\square$

故 令 $q_1=e_1\quad\cdots\quad q_r=e_r$. 扩充为 $e_1\cdots e_r,e_{r+1}\cdots e_m$.

即得 $f(e_1\cdots e_n)=(e_1\cdots e_m)\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

6.

(1) 一共 $n \cdot k$ 个位置，每个位置 q 种可能 $q^{n \cdot k}$

(2) $(q^k-1)\cdots\cdots(q^k-q^{n-1})$

(3) $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})$

7. $V/\ker f \cong \mathrm{Im} f$ 若皆为有限维，则 $\ker f$ 和 $V/\ker f$ 皆为有限维

则 V 为有限维. 矛盾.