第五周

9. $f_c(X+Y)=f_c(X)+f_c(Y)$

$f_c(mX)=mf_c(X)$

$f_c(XY)=C^{-1}XYC=C^{-1}XEYC=C^{-1}XC\cdot C^{-1}YC$

$=f_c(X)f_c(Y)$

习题2.2.

5. $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}BA+\dim(\operatorname{Im}A\cap\ker B)$

若 $BAx=0$ $\begin{cases} Ax=0 & x\in\ker A \\ Ax\neq 0. & x\in\ker B\cap\operatorname{Im}A \end{cases}$

$\ker BA=\ker A\oplus(\operatorname{Im}A\cap\ker B)$

$\dim(\ker BA)=\dim\ker A+\dim(\operatorname{Im}A\cap\ker B)$

故原式 $\Leftrightarrow$ $\dim(\operatorname{Im}A)+\dim(\ker A)=\dim(\operatorname{Im}BA)+\dim(\ker BA)$

由秩-零化度定理，上式显然

6. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}AC\leq\dim(\operatorname{Im}A\cap\ker B)+\operatorname{rank}BAC$

$\Leftrightarrow$ $\dim(\operatorname{Im}AC\cap\ker B)\leq\dim(\operatorname{Im}A\cap\ker B)$

又 $\operatorname{Im}AC\subseteq\operatorname{Im}A$ 即得

10.

$A=M^{-1}\cdot B\cdot M$ 即 $MA=BM$

令 $M=C+Di$ $C.D$ 为实矩阵

$\Rightarrow$ $CA=BC$ $DA=BD$

故 $\forall t\in\mathbb{R}.$ $(C+tD)A=B(C+tD)$

只需说明 $\exists t$ $C+tD$ 可逆. 即 $\det(C+tD)\neq 0$ 即可

又 $\det(C+tD)$ 为关于 t 的 n 阶多项式，至多有 n 个实根为0.

故 $\exists t.$ $\det(C+tD)\neq 0$

习题2.3

5. $\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$

$\mathscr{A}(v-\mathscr{A}v)=\mathscr{A}v-\mathscr{A}^2v=\mathscr{A}v-v=-1\cdot(v-\mathscr{A}v)$ 特征值 -1

若 $\mathscr{A}=\mathscr{E}$. $\mathscr{A}(v-\mathscr{A}v)=\mathscr{E}v-\mathscr{E}v=0(v-\mathscr{A}v)$ 特征值 0.

又 $\mathscr{A}(\frac{1}{2}(v+\mathscr{A}v))=\frac{1}{2}\mathscr{A}v+\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}(v+\mathscr{A}v)\in V^{1}$

$\mathscr{A}(\frac{1}{2}(v-\mathscr{A}v))=-\frac{1}{2}(v-\mathscr{A}v)\in V^{-1}$

又 $\because v\in V$ $v=\frac{1}{2}(v+\mathscr{A}v)+\frac{1}{2}(v-\mathscr{A}v)$ □

而若 $\mathrm{char} k=2$ $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}(v+v)=0\neq v$. 故无法分解

10.

(2) 设 $p(t)=a_nt^n+\cdots+a_0$

$t\frac{dp(t)}{dt}=na_nt^n+\cdots+a_1t$

$t\frac{d}{dt}p(t)=\lambda p(t)\Rightarrow\lambda=n,n-1,\cdots1$, 对应的特征空间为 $t^n,t^{n-1},\cdots t^1$

(4) ${}^t x=Ax$

(5) $\frac{d^nf}{dt^n}=\lambda f(t)$ 若 $f(t)=\cos kt$ $\frac{d^{2n}\cos kt}{dt^{2n}}=(-1)^nk^{2n}\cos kt$

$\frac{d^{2n+1}\cos kt}{dt^{2n+1}}=(-1)^nk^{2n+1}\sin kt$

故当 n 为偶数时 $\lambda=(-1)^{\frac{n}{2}}k^n$, $\cos kt$

n 为奇数时 $\lambda=(-1)^{n-1/2}k^n$, $\sin kt$

16. (1) $\mu_{\mathcal{A}}(x) = k\,\mu_{\mathcal{A},v}(x) + r(x)$

$\because$ $\mu_{\mathcal{A},v}(x)$ 是次数最小的 $\Rightarrow r(x)=0$

故 $\mu_{\mathcal{A},v}(x) \mid \mu_{\mathcal{A}}(x)$

(2) 当 $\mathcal{A}v = \lambda v$ 时 $\mu_{\mathcal{A},v}(x) = \mu_{\mathcal{A}}(x)$

P75.

14. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ 记 $\mathcal{A}v = \lambda v$. $\mathcal{A}^2 v = \lambda^2 v$

$\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda)v = 0$ $\Rightarrow \lambda = 1/0$. $\Rightarrow$ 相似于 $diag(I_r, 0)$.

相似的矩阵迹不变. $tr\, B^{-1}AB = tr(BB^{-1}A) = tr\,A$

相似的矩阵秩不变.

$\Rightarrow$ $rank A =$ 非零行数 又$\because$ $\underbrace{tr(A)}_{= tr(diag(I_r, 0))}$ 为非零行数的个数 (对角线上元素为1).

故 $ranA = trA$

15. 线性无关 $\Rightarrow$ $v, \cdots \mathcal{A}^{n-1}v$ 构成一组基 张成 V.

$\mathcal{A}v = \mathcal{A}(a_1 v + a_2\mathcal{A}v + \cdots + a_n\mathcal{A}^{n-1}v) = a_1\mathcal{A}v + a_2\mathcal{A}^2 v + \cdots + a_n\mathcal{A}^n v$

由于 V 是循环空间. 则 $\mathcal{A}$ 的作用可通过 v 来描述, $\Rightarrow$ 极小多项式为特征多项式

17. 考虑

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & \lambda E - AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ A & \lambda E - AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_k & B \\ A & \lambda E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & \lambda E - BA \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ A & \lambda E - BA \end{pmatrix} \nearrow$$

初等变换 (Ⅲ型) 不改变行列式的值, 故 $\det(\lambda E - AB) = \det(\lambda E - BA)$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

P81. 3. $\chi_A(t)=t^n=0 \Rightarrow \chi_A(\mathcal{A})=\mathcal{A}^n=0$

$\mathcal{A}^k=0$. 考虑 $\mathcal{A}v=\lambda v$ $\mathcal{A}^k v=\lambda^k v=0 \Rightarrow \lambda=0$

特征值只有0 $\Rightarrow$ 特征多项式无非0根

P91. 1.

$U=\{v\in V \mid \xi(\mathcal{A})v=0\}$ $W=\{v\in V \mid \eta(\mathcal{A})v=0\}$

$\theta(t)=\xi(t)\eta(t)$

$\theta(t)=\chi_A(t)=\chi_{A_U}(t)\cdot\chi_{A_W}(t)$

$\xi(\mathcal{A}_U)=0 \Rightarrow \xi(t)$零化$A_U$ 同理 $\eta(t)$零化$\mathcal{A}_W$

又∵ $\xi(t)\eta(t)=\chi_{A_U}(t)\cdot\chi_{A_W}(t)$

设$\mathcal{A}_U$下的极小多项式为$m(t)$ $\mathcal{A}_W$下的极小多项式为$n(t)$

又∵特征多项式的次数为零化多项式中最高次的

即 $\deg(\xi(t))\le\deg(\chi_{A_U}(t))$ $\deg(\eta(t))\le\deg(\chi_{A_W}(t))$

故只能 $\deg(\xi(t))=\deg(\chi_{A_U}(t))$ $\deg(\eta(t))=\deg(\chi_{A_W}(t))$

又 零化多项式次数相同 即多项式相同

□.

(2) $\dim U=\deg\chi_{A_U}=\deg\xi$

$\dim W=\deg\chi_{A_W}=\deg\eta$