第三周作业

1.2 5. "$\Rightarrow$" $f_1, f_2 \cdots f_n$ 线性无关 $\forall x$. $m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x) + \cdots + m_n f_n(x) = 0$. 当且仅当 $m_1 = \cdots = m_n = 0$.

即 $f_i(a_j) = \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ f_n(a_1) & \cdots & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix}$ 行向量线性无关. 满秩 $\Rightarrow$ $\det \neq 0$.

"$\Leftarrow$" $\det \neq 0$. , 行向量线性无关, $\Rightarrow$

$m_1 f_1(x) + m_2 f_2(x) + \cdots + m_n f_n(x) = 0$. 当且仅当 $m_1 \cdots m_n = 0$. 则 $f_1 \cdots f_n$ 线性无关.

$\square$

1.3 2. V 是 q 元域 K 上的 n 维向量空间.

(1) $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 中第一个元素 m_1 有 $q^n - 1$ 个选择 (非零)

考虑 $(m_1, 0, 0, \cdots, 0)$ m_1 的取值有 q 个 (含零)

故选择第二个线性无关的向量, 有 $q^n - q$ 个.

$\Rightarrow$ 类推. 第 n 个向量 m_n, 有 $q^n - q^{n-1}$ 个选择.

故 V 的基的个数为 $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

(2) 基与可逆方阵一一对应 故也为 $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

(3) 退化: 总数 − 可逆. 即: $q^{n^2} - (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

(4) k 维子空间个数 $= \dfrac{k\text{维子空间基的总数}}{\text{每个}k\text{维子空间基的个数}} = \dfrac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}$

6. 二项式定理 $t^n = (t-c+c)^n = c^n + C_n^1 c^{n-1}(t-c) + \cdots + C_n^k c^{n-k}(t-c)^k + \cdots + (t-c)^n$

故 $$(1, t-c, \cdots, (t-c)^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 & \cdots & c^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 c & \cdots & C_{n-1}^1 c^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_{n-1}^2 c^{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (1, t, \cdots, t^{n-1})$$

9. "$\Rightarrow$" 反证 若$\exists k$. $v_1 \cdots v_k$ 线性相关

则$\exists\, m \le k-1$ $v_1 \cdots v_m$线性无关，(极大线性无关组)，$\dim V = m$，与无限维矛盾！

"$\Leftarrow$" 反证. 设V是有限维的. 设$\dim V = n$.

则$\exists$极大线性无关组 $v_1, v_2 \cdots v_n$. 向量$v_1, v_2, \cdots v_n$线性无关

但 $v_1, v_2, \cdots, v_{n+1}$ 线性相关，与前提矛盾！

$\square$

1.4. 1.

$$\dim(U_1+U_2+U_3) = \dim(U_1+U_2) + \dim U_3 - \dim(U_1+U_2)\cap U_3$$
$$= \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1\cap U_2 + \dim U_3 - \dim(U_1+U_2)\cap U_3$$

故只需证 $\dim U_1\cap U_3 + \dim U_2\cap U_3 - \dim U_1\cap U_2\cap U_3 \le \dim(U_1+U_2)\cap U_3$

设 $U_1\cap U_2\cap U_3$ 的一个基为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$

扩充为 $U_1\cap U_2$ 的一个基 $m_1, m_2, \cdots m_k, n_1, n_2, \cdots, n_t$

$U_1\cap U_3$ 的一个基. $m_1, m_2, \cdots m_k, w_1, w_2, \cdots, w_l$

$U_2\cap U_3$ 的一个基 $m_1, m_2, \cdots, m_k, g_1, g_2, \cdots g_p$

则命题为 $k+l+k+p-(k+t) \le \dim(U_1+U_2)\cap U_3$

即 $k+l+p-t \le \dim(U_1+U_2)\cap U_3$

首先说明 $U_1\cap U_3 + U_2\cap U_3$ 是 $(U_1+U_2)\cap U_3$ 的子空间.

$\forall\, v \in U_1\cap U_3 + U_2\cap U_3$，$\exists\, w \in U_1\cap U_3$ $u \in U_2\cap U_3$，s.t. $v = w+u$.

而 $w+u \in U_1+U_2$ $w+u \in U_3$ 故 $w+u \in (U_1+U_2)\cap U_3$

即 $U_1\cap U_3 + U_2\cap U_3 \subseteq (U_1+U_2)\cap U_3$

故 $\dim(U_1+U_2)\cap U_3 \ge \dim(U_1\cap U_3 + U_2\cap U_3)$
$$= \dim U_1\cap U_3 + \dim U_2\cap U_3 - \dim(U_1\cap U_3)\cap(U_2\cap U_3)$$
$$= k+l+k+p-k = k+l+p$$

又 $k+l+p-t \le k+l+p$ 即证.

$\square$

3.

"$\Rightarrow$" 反证 设$\exists i$ $V_1+\cdots+V_{i-1}\cap V_i=u\neq 0$.

那么 $u=u_1+u_2+\cdots+u_{i-1}$ $u_j\in V_j$ $j\neq i$

从而 $0=u_1+u_2+\cdots+u_{i-1}+(-u)$

但 $u_1,\cdots u_i$ 线性无关 矛盾

"$\Leftarrow$" 反证，设 $V_1\cdots V_m$ 线性相关

则 $\exists$一组不全为0的向量 $v_1,\cdots,v_m$，不妨设 $v_m\neq 0$ (见下方蓝字说明)

$v_1+v_2+\cdots+v_m=0$

故 $-v_m=v_1+v_2+\cdots v_{m-1}\in V_1+\cdots+V_{m-1}$.

且 $-v_m\in V_m$

故 $(V_1+V_2+\cdots+V_{m-1})\cap V_m=-v_m\neq 0$.

说明：此处"不妨设"的理由如下

若$v_m=0$. 则有 $v_1+v_2+\cdots+v_{m-1}=0$.

若$v_{m-1}=0$ 则有 $v_1+\cdots+v_{m-2}=0$.

$\cdots$

找到第一个不为0的v_k, 有 $v_1+v_2+\cdots+v_k=0$.

继续上述黑字操作知 $(V_1+\cdots+V_{k-1})\cap V_k=-v_k\neq 0$.

(又$\because V_1\cdots V_m$ 线性无关，故上述v_k中的$k\geq 2$.)

$\square$.

习题 1.5

3. $V/U = \bar{x} = x+U = \{x+u \mid u \in U\}$

$V/W = \bar{y} = y+W = \{y+w \mid w \in W\}$

$U+W$: $V/U+W \subseteq V/U + V/W$ 且右边为有限维.

$U \cap W$:

考虑映射 $\phi: V \longrightarrow V/U \times V/W$, $v \longmapsto (v+U, v+W)$

$\ker\phi = \{v \mid \phi(v) = (U, W)\}$ 即 $v \in U$, $v \in W$, 即 $v \in U \cap W$

故 $\ker\phi = U \cap W$ $\quad \mathrm{Im}\,\phi = \{(v+U, v+W) \mid v \in V\}$

又 $\because$ $V/\ker\phi \cong \mathrm{Im}\,\phi$ 故为有限维

(2) $\mathrm{codim}\,(U \cap W) = \dim \mathrm{Im}\,\phi$

$\mathrm{codim}\,U + \mathrm{codim}\,W = \dim V/U \times V/W$

故 $\mathrm{codim}\,U + \mathrm{codim}\,W = \mathrm{codim}(U+W) + \mathrm{codim}(U \cap W)$

$\dim V/U+W + \dim V/U\cap W = \dim V/U + \dim V/W$.

若 V 为有限维, 则 U, W 也为有限维. 有 $\dim U + \dim W - \dim U \cap W = \dim(U+W)$

则上式成立. 若 V 为无限维. ?

习题 2.1

5. (1) 找到 U 的一组基 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ $\quad g(u_i) \in W$

扩展为 V 的基 $u_1, \cdots u_n, v_1, \cdots v_m$.

$\forall\, v \in V$ $\quad v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$

定义 $f(v) = a_1 g(u_1) + \cdots + a_n g(u_n)$

$f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ $\quad cf(v_1) = f(cv_1)$

(2) $f(x) = x+U$ $\quad f(x+y) = x+y+U = f(x)+f(y)$

$f(\alpha x) = \alpha x + U = \alpha(x+U) = \alpha f(x)$

(3) U 的一个基 $u_1, \cdots u_n$ 扩展为 V 的基 $u_1 \cdots u_n\, v_1, \cdots v_m$

$v = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$

$h(v) = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ $\quad$ 而对于 $\forall u$, 都可以表示为 $u_1, \cdots u_n$ 线性组合.

故为恒等映射.

10. (1) 包含0向量

$\forall f_1, f_2 \in U$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi}[f_1(t)+f_2(t)]dt=0 \quad \int_{-\pi}^{\pi}(f_1(t)+f_2(t))\cos t dt=0$

$\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(t)+f_2(t))\sin t dt=0$

且 $cf_1 \in U$ （c可以提到积分号之前，$c\cdot 0=0$）

故为子空间

(2) $\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx=0\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx=0\end{cases} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx+t)+\cos(nx-t)\,dt=0.$

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin t\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx+t)-\sin(nx-t)\,dt=0$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx+t)-\sin(nx-t)\,dt=0$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin t\,dt=\frac{-1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx+t)-\cos(nx-t)dt=0$

(3) 对于 $\forall n\geq 2$ $\quad \cos nx$ 和 $\sin nx$ 都在U中.

考虑. $\quad C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx=0$

则 $\int_{-\pi}^{\pi}[C_2\cos 2x+\cdots+C_n\cos nx]\cos mx\,dx=0. \quad \forall m=2,\ldots,n$

又 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos kx=\begin{cases}0 & m\neq k.\\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx & m=k\end{cases}$

故 $C_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=0$ 也即 $C_m\cdot\pi=0. \Rightarrow C_m=0.$

故 $\cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos nx$ 线性无关

故U为无限维

(4) $g(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x\cos t+\sin x\sin t)f(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\cos x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t dt+\sin x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin t dt$

$\mathrm{Im}\,T$ 由 $\{1,\cos x,\sin x\}$ 张成，故为有限维(3维)

(5) $\ker T$ 即 $T(f)=0.$ $\quad$ 即 $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=0$ ① $\quad \int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t dt=0$ ② $\quad \int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin t dt=0$ ③

由(1).(2).(3)知. $\ker f=U$

(6) 设 $f(x)=a_1+b_1\cos x+c_1\sin x \quad T(f)(x)=2\pi a_1+\pi b_1\cos x+\pi c_1\sin x=C(a_1+b_1\cos x+c_1\sin x)$

若 $b_1=c_1=0$，则 $C=2\pi$ $\quad$ 若 $a_1=0$. 则 $C=\pi$.

综上 $\begin{cases}f(x)=a_1\\ C_1=2\pi\end{cases} \quad \begin{cases}f(x)=b_1\cos x+c_1\sin x\\ C=\pi.\end{cases}$

习题 2.2

1. $T(X_1+X_2) = A(X_1+X_2)B = AX_1B + AX_2B = T(X_1)+T(X_2)$ 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$T(cX_1) = AcX_1B = cAX_1B = cT(X_1)$

$T(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (TE_{11}, TE_{12}, TE_{21}, TE_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})T$.

故矩阵为 $\begin{pmatrix} ae & bg & ag & bg \\ af & bh & ah & bh \\ ce & dg & cg & dg \\ cf & dh & ch & dh \end{pmatrix}$

自同构，由一组基来确定 故为同构，阶数相同

12. $\mathrm{Aut}\,V \cong GL_n(K)$

$\underbrace{GL_n(k)}_{n\times n\text{可逆}}$ 阶数 第一行 q^n-1

二 q^n-q

$\cdots$

n q^n-q^{n-1}

$|\mathrm{Aut}\,V| = |GL_n(k)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

$SL_n(k) \to \det = 1$ 而 $GL_n(k)$ 行列式有 $q-1$ 种可能

$\Rightarrow$ $SL_n(k)$ 阶数是 $GL_n(k)$ 的 $\frac{1}{q-1}$

$SL_n(k) = \frac{1}{q-1}(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$

补充题：设 V 和 W 都是域 K 上的向量空间，且 $f: V \to W$ 是线性映射. 证明线性空间 $V/\ker f$ 和 $\mathrm{im}\, f$ 同构. 并由此证明，若 V 是有限维的，则有 $\dim\ker f + \dim\mathrm{im}\, f = \dim V$. (这一结论称为第一同构定理.)

$\phi: V/\ker f \to \mathrm{im} f$ 即 $v+\ker f \longmapsto \phi(v+\ker f) = f(v)$

若 $v_1+\ker f = v_2+\ker f$ $\Rightarrow v_1-v_2 \in \ker f \Rightarrow f(v_1-v_2)=0 \Rightarrow f(v_1)=f(v_2)$

$\phi(v_1+\ker f + v_2+\ker f) = \phi(v_1+v_2+\ker f) = f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) = \phi(v_1+\ker f)+\phi(v_2+\ker f)$

$\phi(c(v+\ker f)) = \phi(cv+\ker f) = f(cv) = cf(v) = c\phi(v+\ker f)$

若 $\phi(v+\ker f)=0$ 即 $f(v)=0$ $v\in\ker f$. $v+\ker f = \ker f$ $\Rightarrow \phi$ 的核为 $\ker f \Rightarrow$ 单射

$\mathrm{im} f$ 中 $\forall w$，$\exists v\in V$ 使 $f(v)=w$ $\phi(v+\ker f) = f(v) = w$

满