

Mathematische Algorithmen

Planarität - Minoren und der Satz von Kuratowski

Sven Kube

10. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	2
2	Fast Planarität des $K_{3,3}$ und K_5	2
3	Begriffe aus der Graphentheorie	3
3.1	Kantenkontraktion	3
3.2	Unterteilungsgraph	4
4	Minoren	4
4.1	Minor	4
4.2	Topologischer Minor	5
4.3	Minorenrelation	6
5	Kuratowski	7
5.1	Satz von Kuratowski	7
5.2	Anwendung beim Petersen-Graph	7
6	Anhang	9
6.1	Algorithmus von John Hopcroft und Robert Tarjan	9
7	Quellen	10

1 Motivation

Bisher haben wir mit Eulers Polyedersatz eine Eigenschaft planarer Graphen kennengelernt. Für den $K_{3,3}$ sowie den K_5 haben wir dabei einen Widerspruch für die Kantenabschätzung hergeleitet und gezeigt, dass der $K_{3,3}$ sowie der K_5 nicht planar sind.

Aus diesem Zusammenhang kann man leicht folgern, dass auch der $K_{3,3}$ oder der K_5 um Knoten und Kanten erweitert, nicht planar sein kann. Man könnte nun auf den Gedanken kommen, den $K_{3,3}$ oder K_5 als *atomare Bestandteile* von Graphen die nicht planar sind zu bezeichnen. Als *Bausteine für Nichtplanarität*. Man könnte sagen: „Wenn ein Graph solch einen atomaren Bauteil *drin hat*, ist er nicht planar“.

Die zuvor genannten Gedanken, die hier noch diffus formuliert sind, werden in den kommenden Kapiteln definiert, erläutert und anhand von Beispielen anschaulich gemacht.

2 Fast Planarität des $K_{3,3}$ und K_5

In der Motivation haben wir bei dem $K_{3,3}$ und K_5 von *atomaren Bausteinen für Nichtplanarität* gesprochen. Wie bei Atomen in der Physik stellen wir uns dabei die kleinsten, nicht weiter aufteilbaren, Bausteine für Nichtplanarität vor. Wir sprechen also, auf unsere Graphen bezogen, von Graphen, die nicht planar sind und ebenfalls die kleinsten nicht planaren Graphen sind. Dazu betrachten wir nun die fast planaren Graphen.

Ein Graph G ist fast planar, wenn er durch Löschen einer Kante planar wird. Die folgenden Abbildungen zeigen, dass dies für den K_5 und den $K_{3,3}$ gilt.

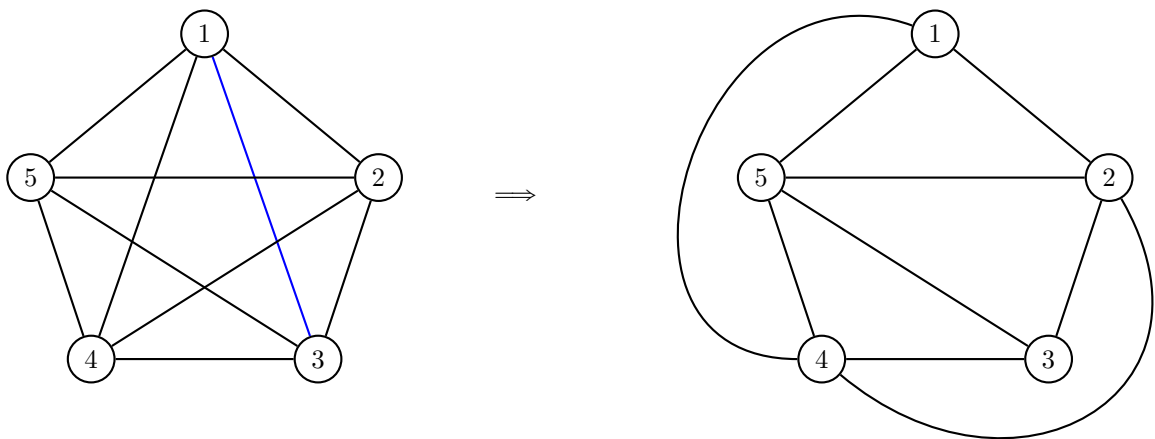


Abbildung 1: Durch Entfernen einer Kante wird der K_5 planar.

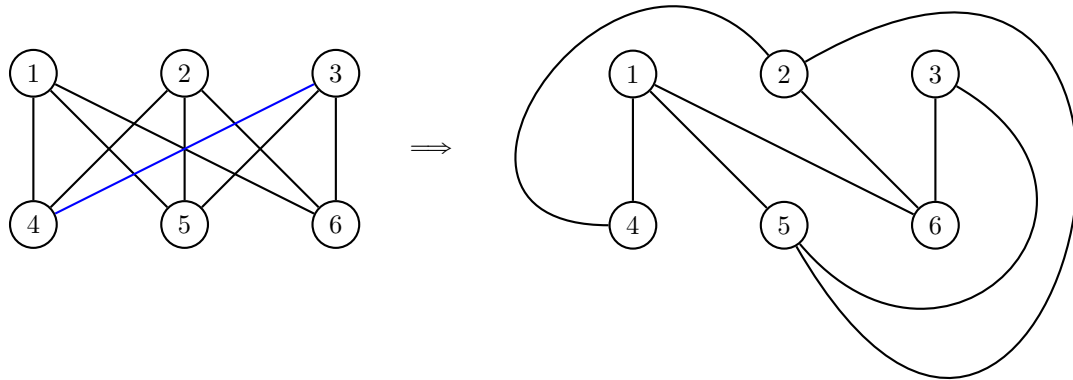


Abbildung 2: Durch Entfernen einer Kante wird der $K_{3,3}$ planar.

Daraus folgt, dass der $K_{3,3}$ und der K_5 fast planar sind.

3 Begriffe aus der Graphentheorie

Für die in kommenden Kapiteln folgenden Definitionen und Erklärungen definieren wir nun zunächst den Begriff der *Kantenkontraktion* und des *Unterteilungsgraphs* aus der Graphentheorie.

3.1 Kantenkontraktion

Als Kontraktion oder auch Kantenkontraktion wird in der Graphentheorie eine grundlegende Operation auf einem Graph beschrieben.

Definition 1 (Kantenkontraktion) Aus einem Graph G wird eine Kante e entfernt und die beiden vorher durch die Kante e verbundenen Knoten u und v zu einem neuen Knoten w vereinigt.

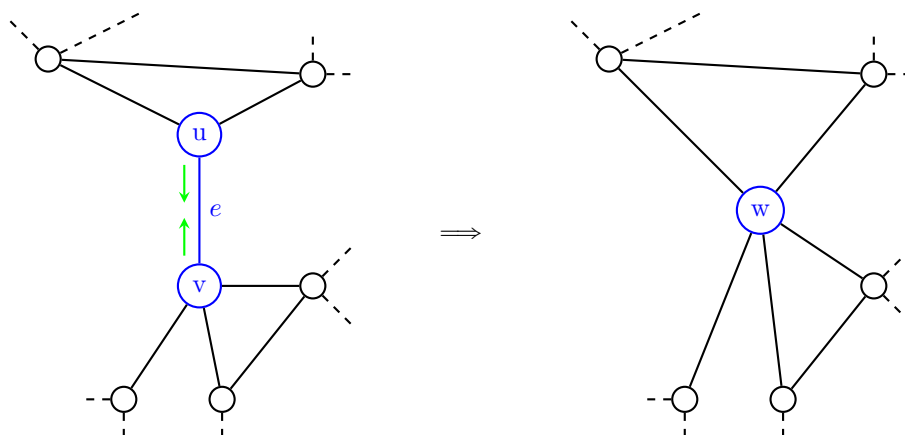


Abbildung 3: Durch Kantenkontraktion von $\{u, v\}$ entsteht ein neuer Knoten w .

In der Abbildung 3 ist beispielhaft die Kontraktion der Kante e dargestellt. Die beiden inzidenten Knoten u

und v der Kante e werden nach der Definition der Kantenkontraktion zu einem neuen Knoten w vereinigt. Die mit u und v verbundenen Kanten werden zu dem neuen Knoten w umgelenkt.

3.2 Unterteilungsgraph

Als Unterteilungsgraph wird in der Graphentheorie ein Graph bezeichnet, der durch Kantenunterteilung aus einem anderen Graphen entstanden ist.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, dann versteht man unter einer Unterteilung einer Kante $e = \{u, v\} \in E$ die Ersetzung dieser Kante durch zwei neue Kanten e_1 und e_2 , die die beiden Knoten u und v der entfernten Kante mit einem neuen Knoten $w \notin V$ verbinden. Auf diese Weise entsteht ein neuer Graph $G' = (V', E')$ mit der neuen Knotenmenge $V' = V \cup \{w\}$ und der neuen Kantenmenge: $E' = E \setminus \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$, wobei $e_1 = \{u, w\}$ und $e_2 = \{w, v\}$ sind.

Definition 2 (Unterteilungsgraph) Als Unterteilungsgraph eines Graphen G wird ein Graph bezeichnet, der durch (null-, ein- oder mehrmalige) Kantenunterteilung in G entsteht.

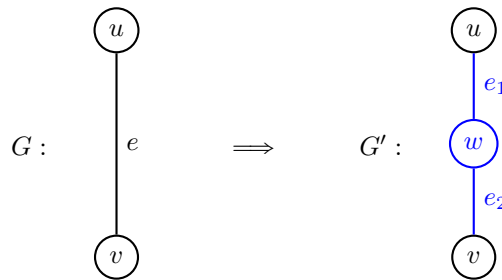


Abbildung 4: G wird durch Kantenunterteilung von e zu G' .

In der Abbildung 4 wird beispielhaft eine Kantenunterteilung der Kante e gezeigt. Durch die Unterteilung von e entsteht ein neuer Knoten w . Aus der vorherigen Kante $\{u, v\}$ sind nach der Unterteilung in dem Graph G' die Kanten $E = \{\{u, w\}, \{w, v\}\}$ (e_1 und e_2) entstanden.

4 Minoren

Mithilfe der in Abschnitt 3 vorgestellten Begriffen der Graphentheorie, der Kantenkontraktion und dem Unterteilungsgraph, wollen wir nun die Begriffe des *Minors* sowie des *topologischen Minors* einführen und definieren.

4.1 Minor

Im Folgenden wollen wir uns der Definition des Minors anhand eines Beispiels nähern.

Betrachten wir folgendes Beispiel bestehend aus den drei Graphen K_3 , G_1 und G_2 .

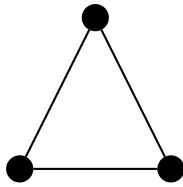


Abbildung 5: K_3

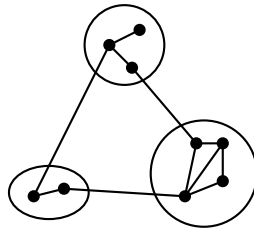


Abbildung 6: G_1

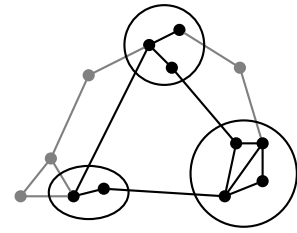


Abbildung 7: G_2

Auf der linken Seite ist der vollständige Graph mit drei Knoten K_3 abgebildet. Diesen erhält man durch die Kontraktion von Kanten innerhalb des Graphen G_1 . Der Graph G_1 ist selbst wieder in dem Graph G_2 enthalten. Dies ist ein Beispiel dafür, dass der K_3 ein Minor von G_2 ist.

Definition 3 (Minor) Ein Graph G heißt Minor von G_2 , wenn G_2 einen Teilgraph enthält, aus dem durch Kantenkontraktion G hervorgeht.

4.2 Topologischer Minor

Zusätzlich zu dem Begriff des Minors wollen wir nun auch den Begriff des *topologischen Minors* einführen.

Betrachten wir folgendes Beispiel bestehend aus den drei Graphen K_3 , G_1 und G_2 .

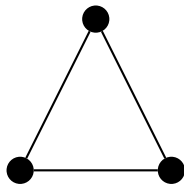


Abbildung 8: K_3

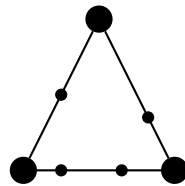


Abbildung 9: G_1

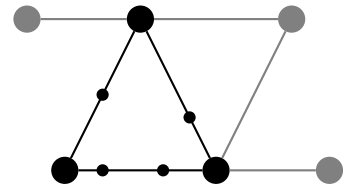


Abbildung 10: G_2

Der Graph G_1 in der Mitte stellt einen Unterteilungsgraph von dem Graph K_3 auf der linken Seite dar. Rechts dargestellt ist der Graph G_2 in dem der Unterteilungsgraph G_1 enthalten ist. K_3 ist topologischer Minor von G_2 .

Definition 4 (Topologischer Minor) Ein Graph G heißt topologischer Minor von G_2 , wenn G_2 einen Unterteilungsgraphen von G enthält.

4.3 Minorenrelation

Durch die Einführung des Begriffs *Minor* können wir die Minorenrelation definieren:

Definition 5 $G \leq H :\iff G$ ist Minor von H .

Eigenschaften der Minorenrelation:

- Die Minorenrelation ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch und definiert daher eine Ordnungsrelation auf den endlichen Graphen.
- Es gilt, dass jeder topologische Minor eines Graphen G auch ein Minor von G ist.
- Es gilt **nicht**, dass jeder Minor eines Graphen G auch ein topologischer Minor von G ist.

Im Folgenden betrachten wir ein Beispiel anhand dessen klar wird, dass nicht jeder Minor eines Graphen G auch ein topologischer Minor von G ist.

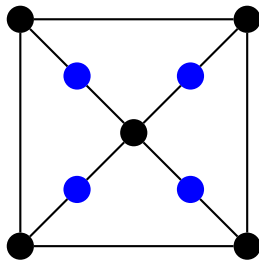


Abbildung 11: F

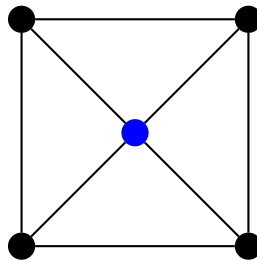


Abbildung 12: G

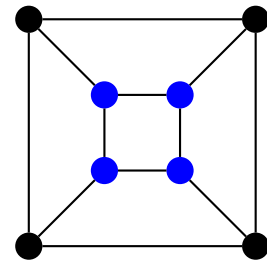


Abbildung 13: H

Zu Beginn betrachten wir die Graphen G und F und versuchen zu zeigen, dass G sowohl ein Minor als auch ein topologischer Minor von F ist:

- Wenn wir in dem Graph F die Kante zwischen den blau markierten Knoten und den Eckpunkten kontrahieren, erhalten wir den Graph G .
 $\Rightarrow G$ ist Minor von F .
- Der Graph F ist der Unterteilungsgraph von G , bei dem jede Kante vom Mittelpunkt zu den Eckpunkten unterteilt wurde.
 $\Rightarrow G$ ist topologischer Minor von F .

Betrachten wir nun die Graphen G und H und versuchen zu zeigen, dass G sowohl ein Minor als auch ein topologischer Minor von H ist

- Wenn wir in dem Graphen H die Kanten zwischen den blauen Knoten kontrahieren, sodass nur ein blauer Knoten verbleibt, haben wir den Graph G erzeugt.
 $\Rightarrow G$ ist Minor von H .
- Bei dem Versuch in dem Graph H einen Unterteilungsgraphen von G zu finden haben wir nun ein Problem. Der Graph H enthält keinen Unterteilungsgraph von G . G ist daher kein topologischer Minor von H .
 $\Rightarrow G$ ist **kein** topologischer Minor von H .

Damit haben wir ein Beispiel gefunden, bei dem ein Graph ein Minor eines anderen Graphen ist, es sich aber nicht auch um einen topologischen Minor handelt.

5 Kuratowski

Bisher haben wir mit Eulers Polyedersatz eine Eigenschaft planarer Graphen kennengelernt. Im Folgenden werden wir anhand der im vorherigen Abschnitt definierten Begriffe *Minor* und *topologischer Minor* eine Methode kennenlernen, um nachzuweisen, ob ein Graph planar ist oder nicht.

5.1 Satz von Kuratowski

Mit Hilfe der zuvor definierten Minoren und den Graphen $K_{3,3}$ und K_5 lassen sich nun alle planaren Graphen charakterisieren.

1930 hat dazu der polnische Mathematiker Kazimierz Kuratowski den folgenden Satz verfasst:

Satz von Kuratowski: *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder einen $K_{3,3}$ noch einen K_5 als Minor enthält.*

Alternativ kann man formulieren, dass ein Graph genau dann planar ist, wenn er weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als *topologischen Minor* enthält.

Durch den Satz von Kuratowski lassen sich zwei Aussagen treffen:

1. Wenn ein Graph G den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor enthält, ist der Graph G **nicht** planar.
2. Wenn ein Graph G **nicht** planar ist, enthält er den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor.

Dass der erstgenannte Zusammenhang gilt kann man sich leicht überlegen. Wenn man zu einem Graphen G , der bereits den $K_{3,3}$ oder K_5 enthält und daher nicht planar ist, weitere Knoten und Kanten hinzufügt, kann der Graph G dadurch nicht planar werden.

Im Vergleich dazu ist nicht intuitiv klar, dass auch der zweite Zusammenhang, wenn ein Graph G **nicht** planar ist er den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor enthält, allgemein gilt.

Bemerkung: Der Beweis des Satzes von Kuratowski wird hier aufgrund seiner Länge nicht geführt.

5.2 Anwendung beim Petersen-Graph

In den folgenden Abbildungen sind die Knotenlöschungen und Kantenkontraktionen dargestellt, mit denen man aus dem Petersen-Graph den $K_{3,3}$ erhält. Damit ist, wie bereits zuvor erwähnt, mithilfe des Satzes von Kuratowski nachgewiesen, dass der Petersen-Graph nicht planar ist.

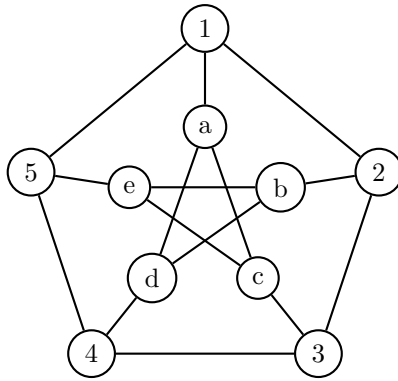


Abbildung 14: Petersen-Graph

Folgend wird in 5 Schritten mithilfe von Knotenlösungen und Kantenkontraktionen gezeigt, dass der $K_{3,3}$ Minor des Petersen-Graph ist.

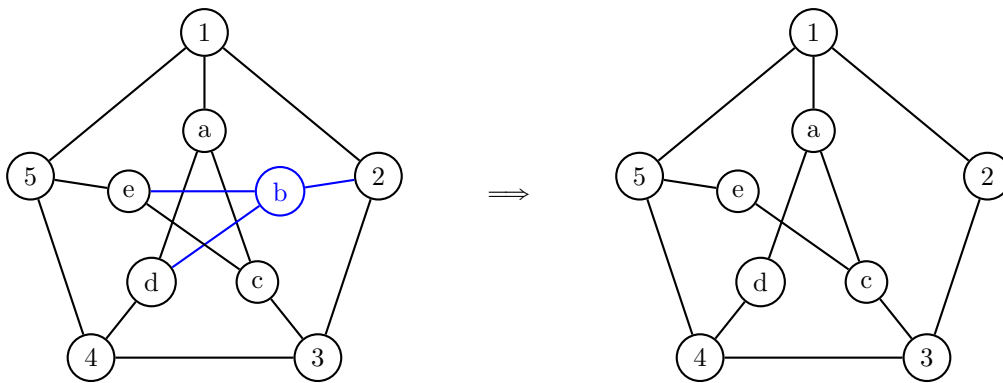


Abbildung 15: Schritt 1: Knoten b wird gelöscht.

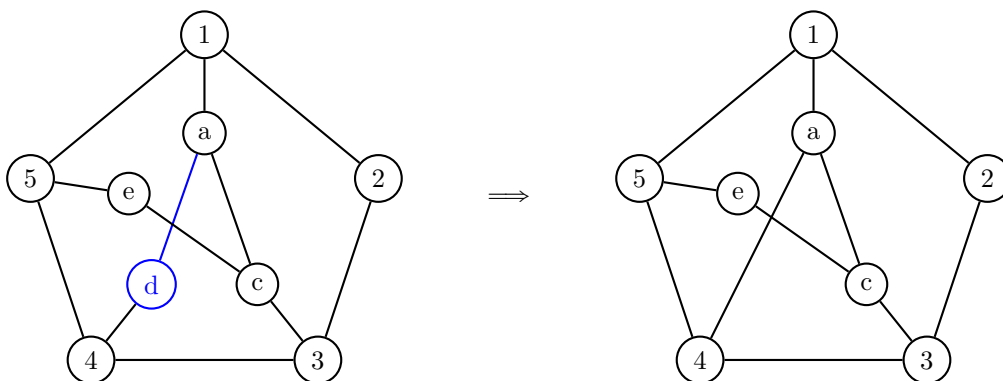


Abbildung 16: Schritt 2: Kante zwischen Knoten d und Knoten a kontrahieren.

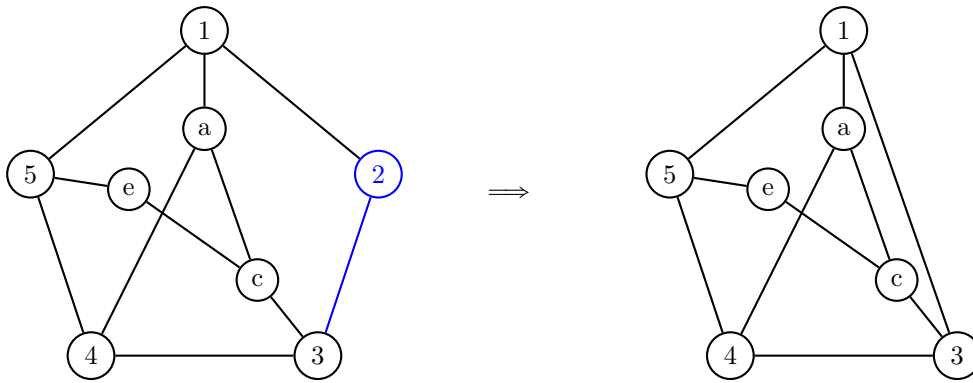


Abbildung 17: Schritt 3: Kante zwischen Knoten 2 und Knoten 3 kontrahieren.

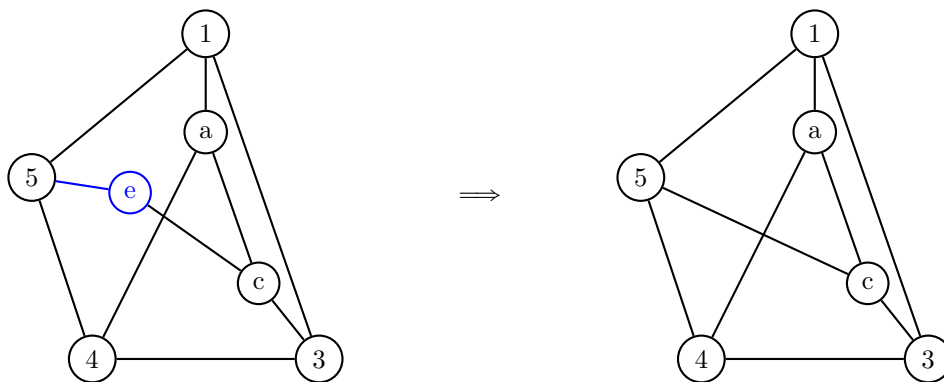


Abbildung 18: Schritt 4: Kante zwischen Knoten e und Knoten 5 kontrahieren.

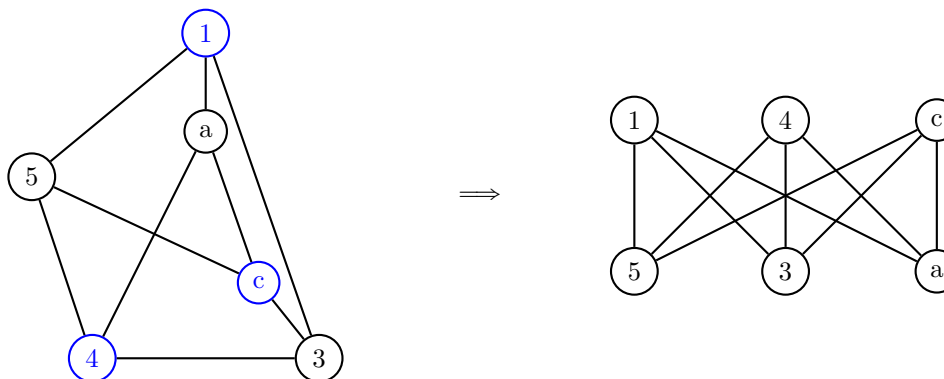


Abbildung 19: Schritt 5: Anordnung der Knoten zu der üblichen Darstellung des $K_{3,3}$ verschieben.

Da der Petersen-Graph, wie in dem vorherigen Beispiel gezeigt, den $K_{3,3}$ als Minor enthält ist er **nicht** planar.

6 Anhang

6.1 Algorithmus von John Hopcroft und Robert Tarjan

1974 haben John Hopcroft und Robert Tarjan einen Algorithmus zum Testen auf Planarität von Graphen vorgestellt. Mithilfe von speziellen Datenstrukturen kann dieser Algorithmus in linearer Zeit ($O(n)$) einen Graphen auf Planarität testen.

7 Quellen

- [1] „Graphen- und Netzwerkoptimierung“ Christina Buesing ISBN 978-3-8274-2422-8
- [2] Wikipedia

[https://de.wikipedia.org/wiki/Minor_\(Graphentheorie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Minor_(Graphentheorie))

<https://de.wikipedia.org/wiki/Kantenkontraktion>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Unterteilungsgraph>

- [3] „Graphen an allen Ecken und Kanten“, Lutz Volkmann, Lehrstuhl 2 Mathematik RWTH-Aachen 2011, Version 2

https://www.math2.rwth-aachen.de/files/gt/buch/graphen_an_allen_ecken_und_kanten.pdf