Minoren und der Satz von Kuratowski

Sven Kube

10. Juni 2022

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Motivation

Bisher: Eulers Polyedersatz $\Rightarrow K_{3,3}$ und K_5 nicht planar.

Überlegung:

- Erweiterter $K_{3,3}$ oder K_5 ist auch nicht planar.
- $K_{3,3}$ und K_5 sind „Atome von Nichtplanarität“ oder „kleinste Elemente nicht planarer Graphen“.
- Wenn in einem Graph der $K_{3,3}$ oder K_5 *drin* ist $\Rightarrow$ Graph nicht planar.

Überblick

Die Graphen $K_{3,3}$ und K_5 sind fast planar

Kantenkontraktion

Unterteilungsgraph

Minor und topologischer Minor

- Minor
- Topologischer Minor
- Minorenrelation

Satz von Kuratowski

- Anwendung beim Petersen-Graph

Überblick

$K_{3,3}$ und K_5 sind fast planar

Definition: Fast planar

Ein Graph G ist fast planar, wenn er durch löschen einer Kante planar wird.

Gilt für $K_{3,3}$ und K_5, siehe folgende Beispiele.

$K_{3,3}$ ist fast planar

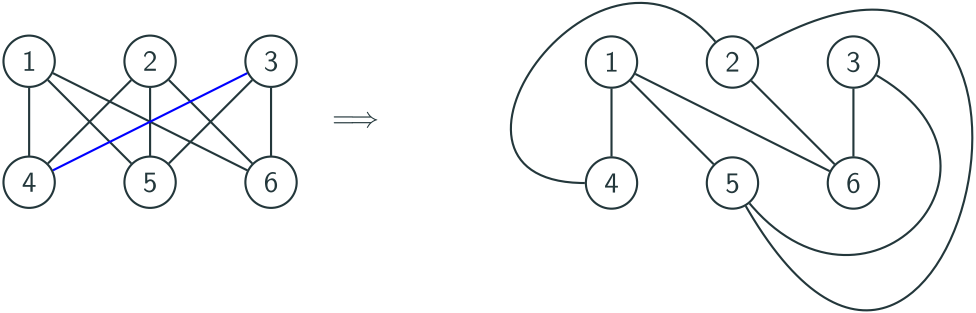


Abbildung 1: Durch entfernen einer Kante wird der $K_{3,3}$ planar.

K_5 ist fast planar

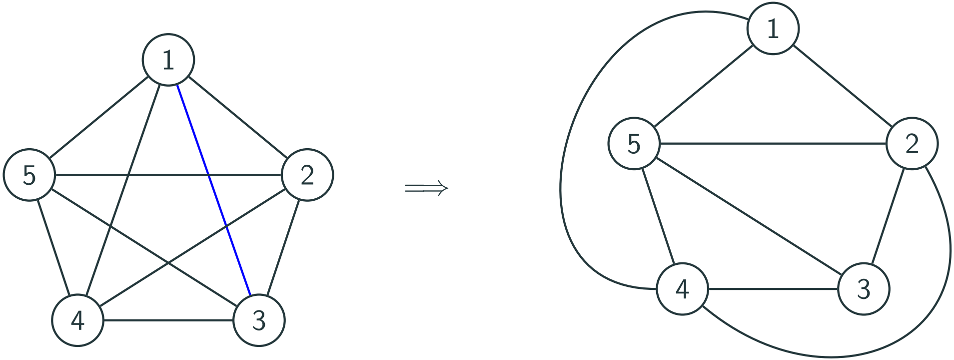
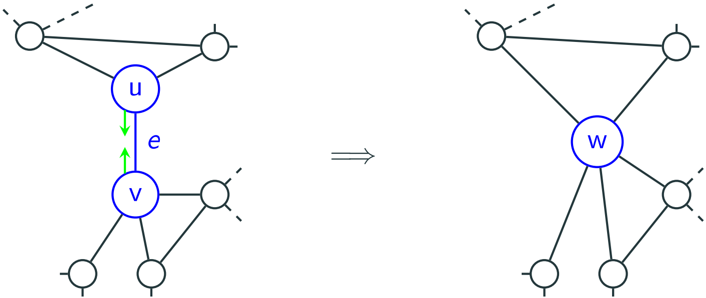


Abbildung 2: Durch entfernen einer Kante wird der K_5 planar.

Überblick

Kantenkontraktion

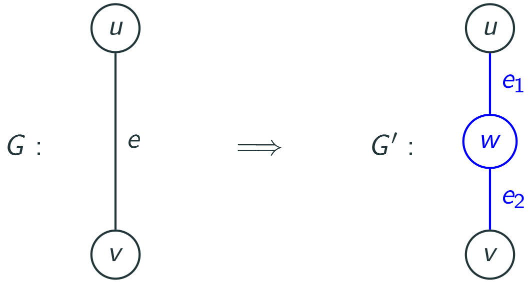


Definition: Kantenkontraktion

Aus einem Graph G wird eine Kante e entfernt und die beiden vorher durch die Kante e verbundenen Knoten u und v zu einem neuen Knoten w vereinigt.

Überblick

Unterteilungsgraph



Definition: Unterteilungsgraph

Als Unterteilungsgraph eines Graphen G wird ein Graph bezeichnet, der durch (null-, ein- oder mehrmalige) Kantenunterteilung in G entsteht.

Überblick

Minor

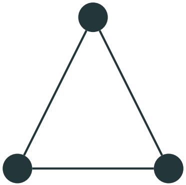


Abbildung 3: K_3

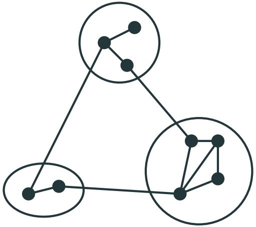


Abbildung 4: G_1

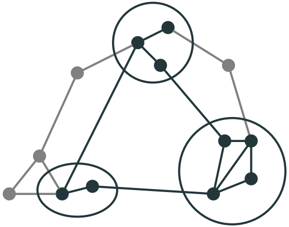


Abbildung 5: G_2

Minor

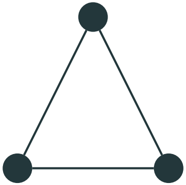


Abbildung 3: K_3

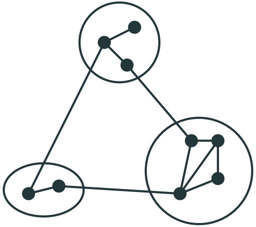


Abbildung 4: G_1

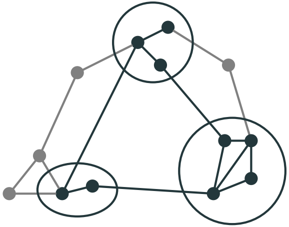


Abbildung 5: G_2

Definition: Minor

Ein Graph G heißt *Minor* von H, wenn H einen Teilgraph enthält, aus dem durch Kantenkontraktion G hervorgeht.

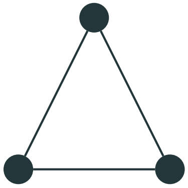


Abbildung 6: K_3

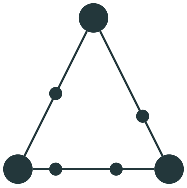


Abbildung 7: G_1

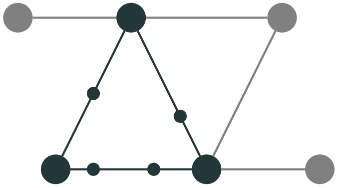


Abbildung 8: G_2

Topologischer Minor

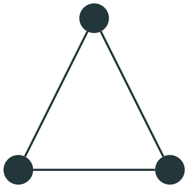


Abbildung 6: K_3

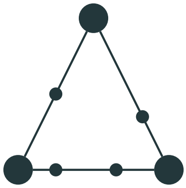


Abbildung 7: G_1

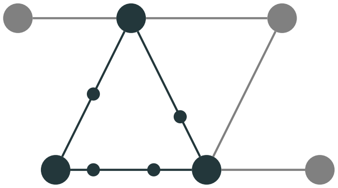


Abbildung 8: G_2

Definition: Topologischer Minor

Ein Graph G heißt *topologischer Minor* von H, wenn H einen Unterteilungsgraphen von G enthält.

Minorenrelation

Definition: Minorenrelation

$G \preccurlyeq H :\Longleftrightarrow G$ ist Minor von H.

1. reflexiv, transitiv und antisymetrisch.
   Definiert Ordnungsrelation auf den endlichen Graphen.
2. jeder topologische Minor eines Graphen G ist auch ein Minor von G.
3. **nicht** jeder Minor eines Graphen G auch ein topologischer Minor von G.

Beispiel: Nicht jeder Minor ist auch topologischer Minor

Abbildung 9: F

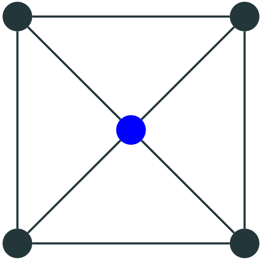


Abbildung 10: G

Abbildung 11: H

Beispiel: Nicht jeder Minor ist auch topologischer Minor

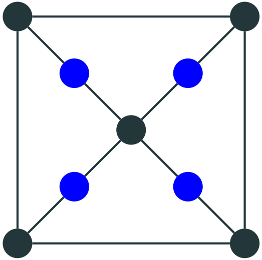


Abbildung 9: *F*

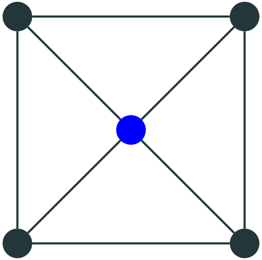


Abbildung 10: *G*

Abbildung 11: *H*

Beispiel: Nicht jeder Minor ist auch topologischer Minor

Abbildung 9: F

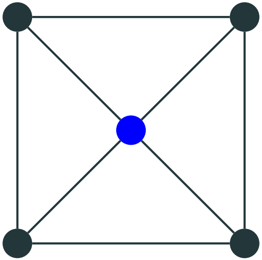


Abbildung 10: G

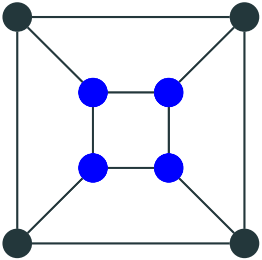


Abbildung 11: H

Überblick

Charakterisierung aller planaren Graphen mit Hilfe des $K_{3,3}$, K_5 und Minoren.

Satz von Kuratowski (Kazimierz Kuratowski, 1930)

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder einen $K_{3,3}$ noch einen K_5 als Minor enthält.

Bemerkung: Ebenfalls gilt, ein Graph G ist genau dann planar ist, wenn er weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor enthält.

Charakterisierung aller planaren Graphen mit Hilfe des $K_{3,3}$, K_5 und Minoren.

Satz von Kuratowski **(Kazimierz Kuratowski, 1930)**

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder einen $K_{3,3}$ noch einen K_5 als Minor enthält.

Bemerkung: Ebenfalls gilt, ein Graph G ist genau dann planar ist, wenn er weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor enthält.

Charakterisierung aller planaren Graphen mit Hilfe des $K_{3,3}$, K_5 und Minoren.

Satz von Kuratowski (Kazimierz Kuratowski, 1930)

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder einen $K_{3,3}$ noch einen K_5 als Minor enthält.

Bemerkung: Ebenfalls gilt, ein Graph G ist genau dann planar ist, wenn er weder den $K_{3,3}$ noch den K_5 als topologischen Minor enthält.

Aussagen des Satzes von Kuratowski:

1. Wenn ein Graph G den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor enthält, ist der Graph G **nicht** planar.

   $\Rightarrow$ Intuitiv klar.

2. Wenn eine Graph G nicht planar ist, enthält er den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor.

   $\Rightarrow$ **Nicht** intuitiv klar.

Aussagen des Satzes von Kuratowski:

1. Wenn ein Graph G den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor enthält, ist der Graph G **nicht** planar.

   $\Rightarrow$ Intuitiv klar.

2. Wenn eine Graph G nicht planar ist, enthält er den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor.

   $\Rightarrow$ **Nicht** intuitiv klar.

Satz von Kuratowski

Aussagen des Satzes von Kuratowski:

1. Wenn ein Graph G den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor enthält, ist der Graph G **nicht** planar.

   $\Rightarrow$ Intuitiv klar.

2. Wenn eine Graph G nicht planar ist, enthält er den $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor.

   $\Rightarrow$ **Nicht** intuitiv klar.

Ist der K_5 Minor des Petersen-Graph?

$\Rightarrow$ **Ja**

Ist der $K_{3,3}$ Minor des Petersen-Graph?

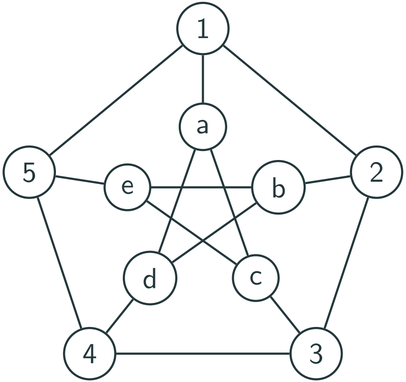


Abbildung 12: Petersen-Graph

Ist der K_5 Minor des Petersen-Graph?

$\Rightarrow$ **Ja**

Ist der $K_{3,3}$ Minor des Petersen-Graph?

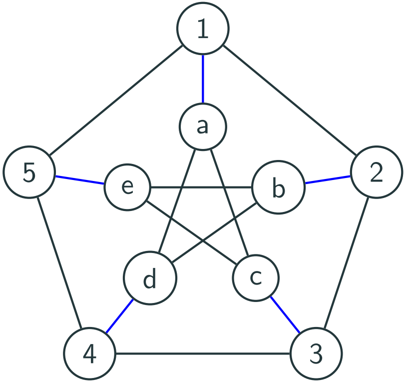


Abbildung 12: Petersen-Graph

Anwendung beim Petersen-Graph

Ist der K_5 Minor des Petersen-Graph?

$\Rightarrow$ **Ja**

Ist der $K_{3,3}$ Minor des Petersen-Graph?

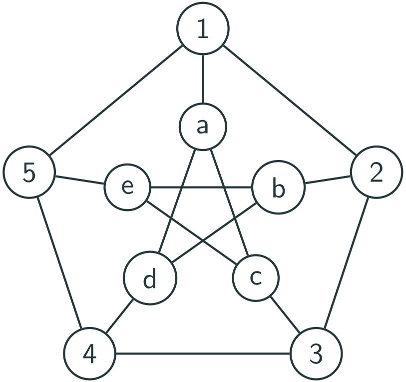


Abbildung 12: Petersen-Graph

Anwendung beim Petersen-Graph

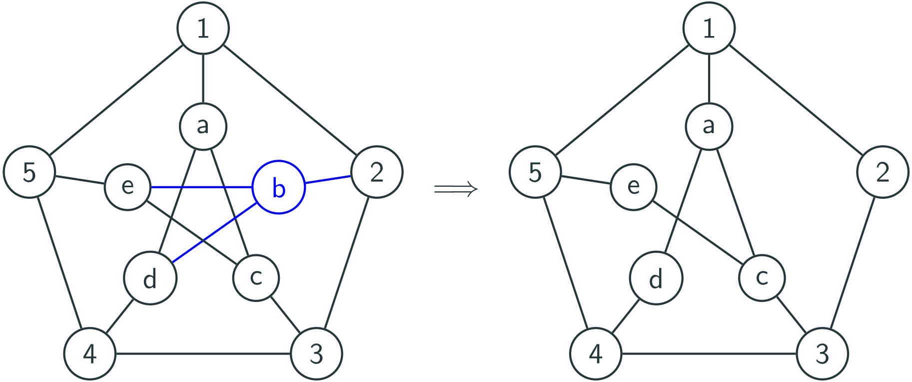


Abbildung 13: Schritt 1: Knoten B wird gelöscht.

Anwendung beim Petersen-Graph

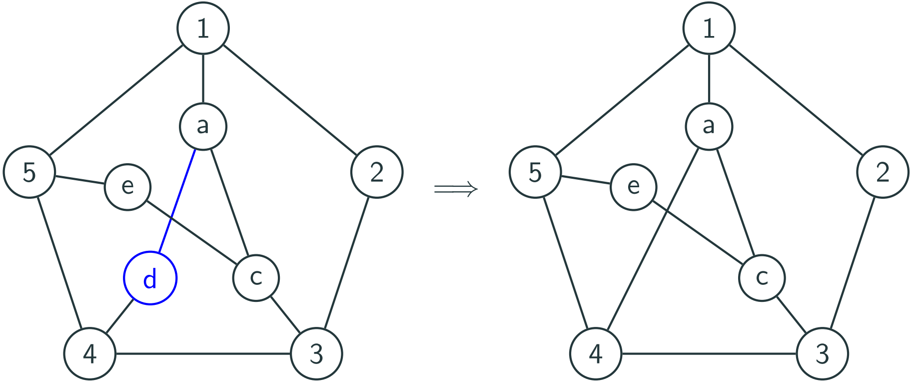


Abbildung 13: Schritt 2: Kante zwischen Knoten d und Knoten a kontrahieren.

Anwendung beim Petersen-Graph

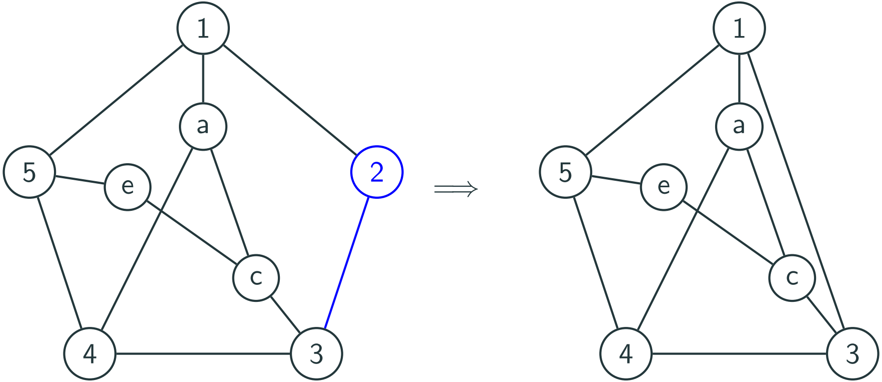


Abbildung 13: Schritt 3: Kante zwischen Knoten 2 und Knoten 3 kontrahieren.

Anwendung beim Petersen-Graph

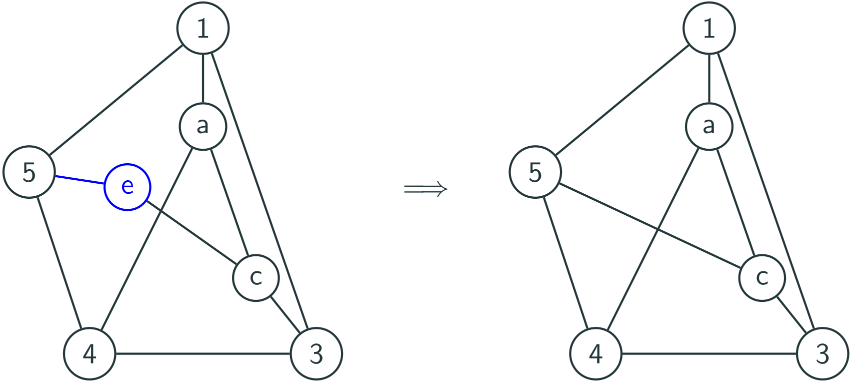


Abbildung 13: Schritt 4: Kante zwischen Knoten e und Knoten 5 kontrahieren.

Anwendung beim Petersen-Graph

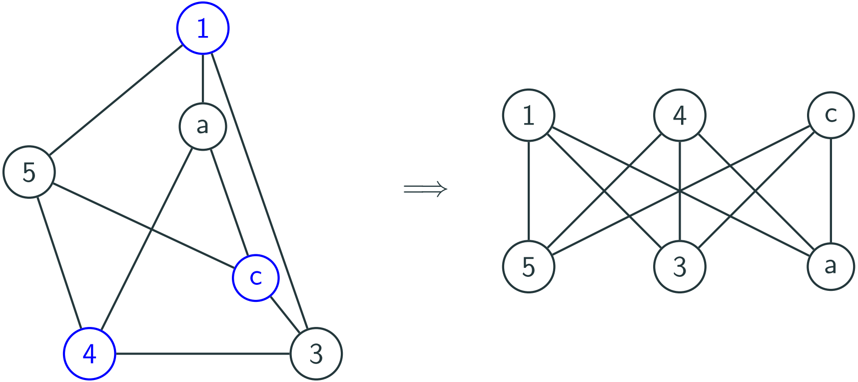
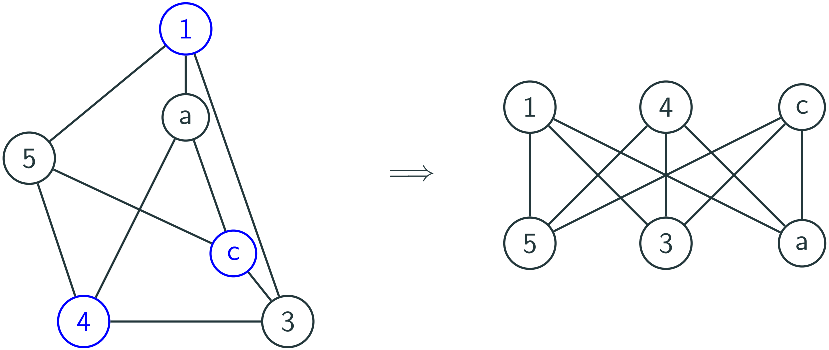


Abbildung 13: Schritt 5: Anordnung der Knoten anpassen.

Anwendung beim Petersen-Graph



Hat auch den $K_{3,3}$ als Minor.

$\Rightarrow$ **nicht planar.**

Zusammenfassung

- Fast Planarität von Graphen am Beispiel des $K_{3,3}$ und K_5
- Kantenkontraktion
- Unterteilungsgraph
- Minor
- Topologischer Minor
- Minorenrelation
- Satz von Kuratowski
- Anwendung des Satzes von Kuratowski am Petersen Graph