

Лабораторная работа 3.2.4
СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ

Аксенова Светлана

3 ноября 2020 г.

Цель работы: исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре.

В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, катушка индуктивности, электронный осциллограф, универсальные измерительный мост.

1 Теоретическое введение

Рассмотрим электрический контур, представленный на [рисунке 1](#). Сумма падений напряжения на элементах цепи в отсутствие внешней ЭДС равна нулю:

$$CL\frac{d^2U_c}{dt^2} + CR\frac{dU_c}{dt} + U_c = 0. \quad (1)$$

Разделим это уравнение на CL и обозначим

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (2)$$

где γ - коэффициент затухания, ω_0 - собственная круговая частота колебательного контура. Период собственных колебаний T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3)$$

Тогда уравнение для напряжения на конденсаторе U_c принимает вид:

$$\ddot{U}_c + 2\gamma\dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = 0. \quad (4)$$

Аналогично выглядит уравнение для других величины, характеризующих колебания в контуре.

Для решения уравнения (4) введём вспомогательную переменную $U(t)$, положив

$$U_c(t) = U(t) \exp(-\gamma t). \quad (5)$$

Тогда получится уравнение

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \quad (6)$$

где $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. В зависимости от соотношений между коэффициентом затухания γ и собственной частотой ω_0 решение уравнения по-разному меняется во времени.

1.1 Затухающие колебания

Если $0 < \gamma < \omega_0$, то это режим *затухающих колебаний*. Это условие принимает вид

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{cr}, \quad (7)$$

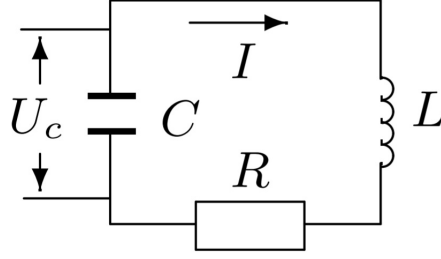


Рисунок 1 – Последовательный колебательный контуре

где R_{cr} - критическое сопротивление. Введём также волновое сопротивление контура

$$\rho = \frac{1}{2}R_{cr} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8)$$

При выполнении условия (7) следует, что $\omega_1^2 > 0$ и уравнение (6) описывает гармонические колебания величины $U(t)$ с амплитудой U_0 , круговой частотой ω_1 и начальной фазой ϕ_0 :

$$U(t) = U_0 \cos(\omega_1 t + \phi_0). \quad (9)$$

С учётом (5) можно записать решение исходного уравнения (4) в виде

$$U_c(t) = U_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \phi_0), \quad (10)$$

где $U_0 \exp(-\gamma t)$ - амплитуда затухающих колебаний (U_0 - начальная амплитуда), а $\omega_1 t + \phi_0$ - фаза затухающий колбений (ϕ_0 - начальная фаза), ω_1 - круговая частота свободных затухающиз колебаний.

Если принять за начальные условия $I(0) = 0$ и $U_c(0) = U_{c0}$, то уравнения примут вид

$$U_c(0) = U_{c0} = U_0 \cos \phi_0, U_c'(0) = I(0)/C = -\gamma U_0 \cos \phi_0 - \omega_1 U_0 \sin \phi_0 = 0 \quad (11)$$

Второе условие даёт равенство $\tan \phi_0 = -\gamma/\omega_1$ и, следовательно,

$$\cos \phi_0 = \pm \frac{\omega_1}{\omega_0}, \sin \phi_0 = \pm \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (12)$$

Формулу (10) можно представить в виде

$$U_c(t) = \exp(-\gamma t)(a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t), \quad (13)$$

где $a = U_0 \cos \phi_0, b = -U_0 \sin \phi_0$. При этом выражения для $U_c(t)$ и $I(t)$ при заданных начальных условиях принимают вид

$$U_c(t) = U_{c0} \exp(-\gamma t)(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t), I(t) = C\dot{U}_c = -\frac{U_{c0}\omega_0}{\rho\omega_1} \exp(-\gamma t) \sin \omega_1 t. \quad (14)$$

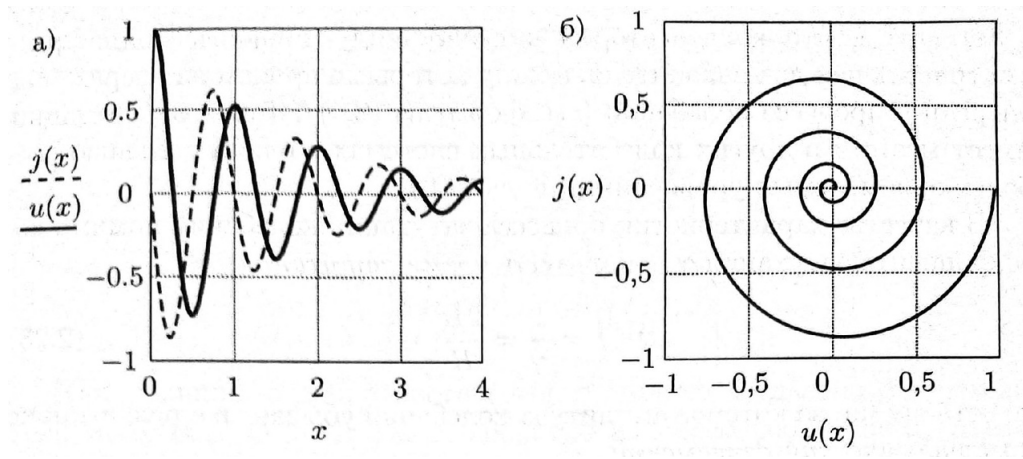


Рисунок 2 – Затухающие колебания

Эти выражения определяют параметрическое представление *траектории системы на фазовой плоскости* переменных (U_c, I) . На [рисунке 2а](#) показаны в безразмерных переменных зависимости (14) напряжения и тока в контуре от времени в режиме свободных затухающих колебаний: сплошная линия $u(x) = U_c(x)/U_{c0}$, где $x = \omega_1 t/2\pi$, соответствует напряжению в конденсаторе, а штриховая линия $j(x) = \rho I(x)/U_{c0}$ - току в контуре. На [рисунке 2б](#) показана фазовая траектория этих колебаний, представляющая собой скручивающуюся к точке спираль.

Периодом затухающих колебаний называется величина

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}} \quad (15)$$

В качестве характеристик процесса затухания колебаний используют *логарифмический декремент*:

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}}, \quad (16)$$

где U_k и U_{k+1} - два последовательных максимальных отклонения в одну сторону от оси абсцисс. На практике удобно пользоваться формулой

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}} \quad (17)$$

С логарифмическим декрементом связана ещё одна важная характеристика колебательного контура - его *добротность* Q :

$$Q \equiv \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\gamma T_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{cr}^2}{R^2} - 1}. \quad (18)$$

В энергетическом смысле добротность определяется как отношение запасённой в ней энергии к потере энергии за время $T/2\pi$. Если добротность $Q \gg 1$, то колебательный контур обладает слабым затуханием.

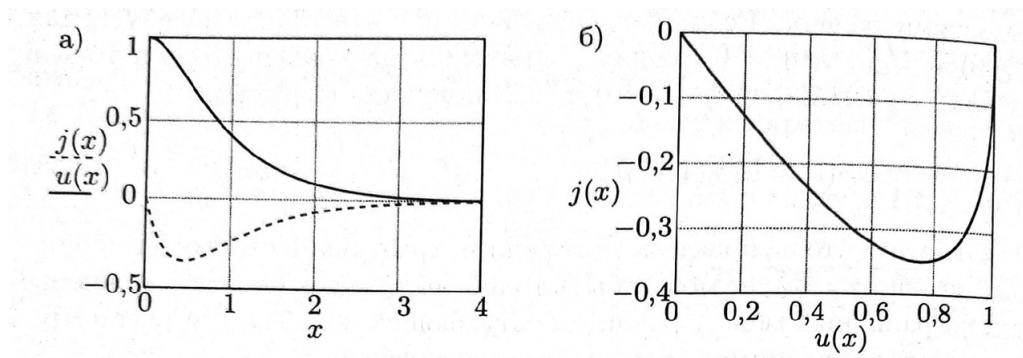


Рисунок 3 – Аперриодический режим

1.2 Критический и аперриодический режимы

Если реализуется критический режим ($\gamma = \omega_0$), то параметры контура связаны отношением

$$R = R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (19)$$

Тогда напряжение на конденсаторе

$$U_c(t) = (a_1 + a_2 t) \exp(-\gamma t), \quad (20)$$

так как $\ddot{U} = 0$ и $U(t) = a_1 + a_2 t$, где a_1 и a_2 определяются начальными условиями задачи.

На практике этот режим не может быть точно реализован, он имеет значение как пограничный между режимом затухающих колебаний и аперриодическим режимом затухания, который реализуется при $\gamma > \omega_0$.

В этом режиме $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 < 0$. Введём величину

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (21)$$

Общее решение уравнения имеет вид $U(t) = b_1 \exp \alpha t + b_2 \exp -\alpha t$, где b_1 и b_2 определяются начальными условиями. Соответственно, напряжение на конденсаторе

$$U_c(t) = \exp(-\gamma t)(b_1 \exp(\alpha t) + b_2 \exp(-\alpha t)). \quad (22)$$

Тогда при заданных ранее начальных условиях получим

$$U_c(t) = U_{c0} \exp(-\gamma t) \left[\cosh(\alpha t) + \frac{\gamma}{\alpha} \sinh(\alpha t) \right], I(t) = -\frac{U_{c0} \omega_0}{\rho \alpha} \exp(-\gamma t) \sinh \alpha t. \quad (23)$$

Графики, соответствующие формулам (23), а также фазовая траектория системы в аперриодическом режиме показаны в безразмерных переменных на [рисунке 3](#), где $x = \alpha t$

2 Экспериментальная установка

Схема представлена на [риссунк 4](#). Колебания наблюдаются на экране осциллографа. Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю

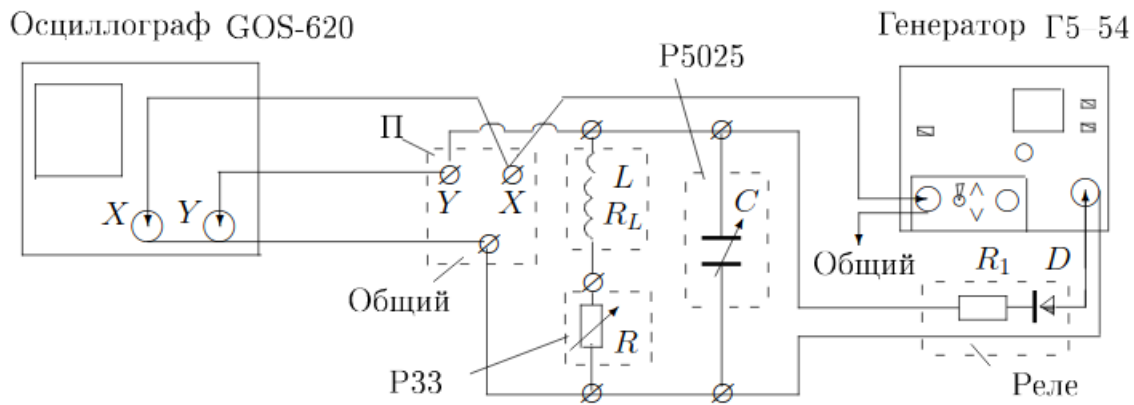


Рисунок 4 – Схема установки для исследования свободных колебаний

импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке. Реле содержит диодный тиристор D и ограничительный резистор R_1 . Входное сопротивление осциллографа велико (≈ 1 МОм), его влиянием на контур можно пренебречь.

3 Измерение периодов

Для измерения периода колебаний контура на магазине сопротивлений было установлено сопротивление $R = 0$; на магазине ёмкостей величина $C = 0,02$ мкФ. Измерялось расстояния x_0 между импульсами, поступающими с генератора, в момент, когда оно занимает почти весь экран. При изменении ёмкости от $0,02$ мкФ до $0,9$ мкФ измерялось расстояние x , которое занимает несколько полных колебаний n . Далее по формуле $T = T_0 x / (n x_0)$, где частота повторения импульсов $T_0 = 0,01$ сек, рассчитывался период колебаний.

По теоретической формуле $T = 2\pi\sqrt{LC}$ был рассчитан теоретический период колебаний контура для каждого значения C . В результате был построен график $T_{exp} = f(T_{th})$, который представлен на [рисунке 5](#). Коэффициент наклона графика

$$k = 1,123 \pm 0,30.$$

4 Критическое сопротивление и декремент затухания

Измерения проводились при собственной частоте колебаний $\nu_0 = 5$ кГц. Индуктивность $L = 200$ мГн, соответственно, рассчитанная ёмкость равна $0,005$ мкФ. Критическое сопротивление, рассчитанное по формуле (7) $R_{crth} = 12,67$ кОм.

Увеличивая сопротивление R с нулевого значения до критического R_{cr} , было зафиксировано критическое значения сопротивления, при котором колебательный режим переходит в апериодический - $R_{crexp} = 9$ кОм. Он отличается от найденного теоретически, т.к. величина L задана приближённо.

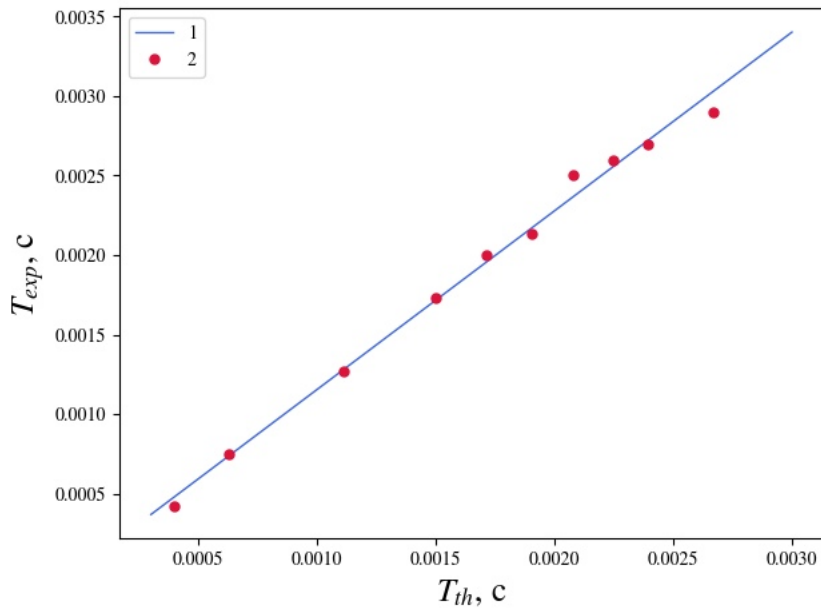


Рисунок 5 – Зависимость $T_{exp} = f(T_{th})$: 1 - аппроксимирующая прямая, 2 - точки, полученные теоретически и экспериментально

Для расчёта логарифмического декремента затухания по формуле (17) были проведены измерения в диапазоне от $R \simeq 0,1R_{cr}$ до R_{cr} . На экране осциллографа наблюдалась картина затухающих колебаний. Для расчёта измерялись амплитуды, разделённые целым числом периодов n . Для каждого случая было посчитано $R_{sum} = R_L + R$, где $R_L = 38,957$ Ом - омическое сопротивление катушки R , измеренное на измерителе LCR при частоте эксперимента. В результате был построен график в координатах $1/\Theta^2 = f[1/(R_{sum}^2)]$ (рисунок 6). По наклону прямой было определено критическое сопротивление $R_{cgr} = 2\pi\sqrt{\Delta Y/\Delta X}$:

$$R_{cgr} = 11,50 \pm 0,08 \text{ Ом}$$

По формуле (18) рассчитаем добротность контура Q для максимального и минимального значений Θ :

$$Q_{mingr} = 2,6 \pm 0,9, Q_{maxgr} = 8,5 \pm 1,8$$

Также были рассчитаны теоретические значения добротности контура Q :

$$Q_{minth} = 2,29 \pm 0,24, Q_{maxth} = 5.3 \pm 0.7$$

5 Колебания на фазовой плоскости

На экране осциллографа, переведя ручку «TIME/DIV» в положение $\ll X - Y \gg$ и подобрав масштаб, наблюдалась траектория системы на фазовой плоскости - спираль. Для измерения Θ измерялись радиусы витков спирали разделённые целым числом периодов n . Была также рассчитана максимальная и минимальная добротности:

$$Q_{minsp} = 3.7 \pm 1.8, Q_{maxsp} = 6.80 \pm 2.38$$

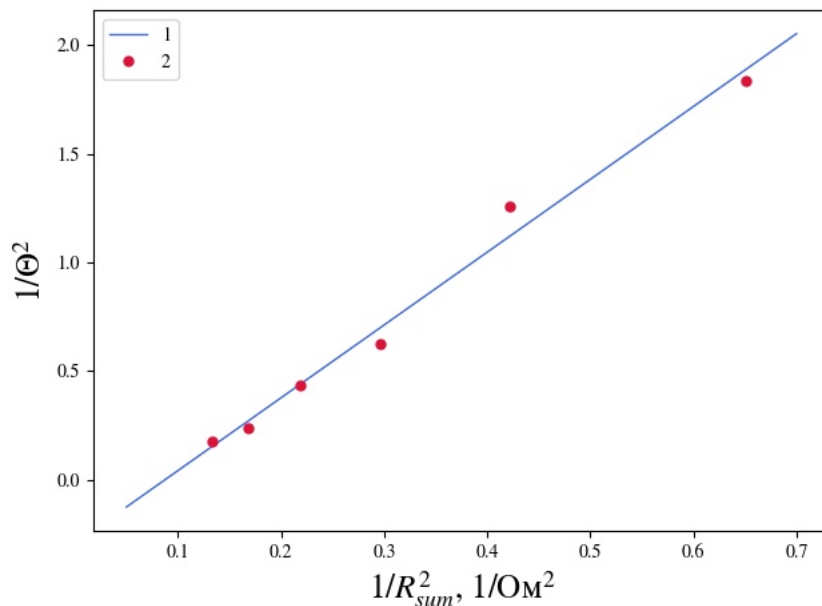


Рисунок 6 – График зависимости $1/\Theta^2 = f[1/(R_{sum}^2)]:1$ - аппроксимирующая прямая, 2 - точки, полученные экспериментально

	R_{cr} , кОм	R_{cr} , кОм	R_{cr} , кОм		Q	Q	Q
	Теор.	Подбор	Граф.		Теор.	$f(\Theta)$	Спираль
Знач.	12,67	9	11,50	max	5,3	8,5	6,80
				min	2,29	2,6	3,7
$\sigma(\epsilon)$	1,27(10%)	1(11%)	0,08(0,7%)	max	0,7(13,2%)	1,8(21,2%)	2,38(35%)
				min	0,24(10,5%)	0,9(34,6%)	1,9(51,3%)

Таблица 1 – Полученные результаты

6 Вывод

Было проведено исследование свободных колебаний в электрическом контуре, в результате разными способами были получены основные характеристики контура. Все результаты были сведены в [таблицу 1](#). Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что наиболее точный способ определения критического сопротивления - графический, а добротности - теоретический.

7 Список литературы

1. [Методическое пособие по выполнению работы](#)
2. Лабораторный практикум по общей физике: Учебное пособие в трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм. 2-е изд., перераб и дополн. / Никулин М.Г., Попов П.В, Нозик А.А. и др.; Под ред. А.В. Максимычева, М.Г. Никулина. – М.: МФТИ, 2019. – 370 с.

8 Приложение

[Ссылка на данные и их обработку](#)