# Лабораторная работа №8

**Модель конкуренции двух фирм**

Дугаева Светлана Анатольевна

# Содержание

# Список иллюстраций

# 1 Цель работы

Рассмотреть модели конкуренции двух фирм, производящих взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише.

# 2 Задание

Вариант 29

Случай 1: Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений (рис. 2.1):

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2,$$

где $a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}$, $a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$, $c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$.

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Рис. 2.1: Уравнения динамики изменения объемов продаж для 2х фирм в 1м случае

Случай 2: Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед M1M2 будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений (рис. 2.2):

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0{,}00019\right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$
$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Рис. 2.2: Уравнения динамики изменения объемов продаж для 2х фирм во 2м случае

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами (рис. 2.3):

$$M_0^1 = 8.5,\ M_0^2 = 9.1,$$
$$p_{cr} = 33, N = 83, q = 1$$
$$\tau_1 = 27, \tau_2 = 24,$$
$$\tilde{p}_1 = 11.3, \tilde{p}_2 = 12.5$$

Рис. 2.3: Начальные условия и параметры

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

# 3 Выполнение лабораторной работы

## 3.1 Теоретическая справка

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют. Обозначим (рис. 3.1):

$N$ – число потребителей производимого продукта.
$S$ – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.
$M$ – оборотные средства предприятия
$\tau$ – длительность производственного цикла

$p$ – рыночная цена товара
$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
$\delta$ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

$\kappa$ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

Рис. 3.1: Условные обозначения

Q(S/p) – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени. Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме (рис. 3.2):

$$Q = q - k\frac{p}{S} = q\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right) \qquad (1)$$

Рис. 3.2: Функция спроса товаров долговременного использования

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при p = pcr (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина pcr = Sq/k. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть, Q(S/p) = 0 при p >= pcr) и обладает свойствами насыщения. Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде (рис. 3.3):

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)p - \kappa \qquad (2)$$

Рис. 3.3: Уравнения динамики оборотных средств

Уравнение для рыночной цены p представим в виде (рис. 3.4):

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + Nq\left(1 - \frac{p}{p_{cr}}\right)\right) \qquad (3)$$

Рис. 3.4: Уравнение для рыночной цены p

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу. Параметр gamma зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла tau. При заданном M уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво. В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением (рис. 3.5):

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}}+Nq\left(1-\frac{p}{p_{cr}}\right)=0 \qquad (4)$$

Рис. 3.5: Алгебраическое соотношение для уравления 3

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно (рис. 3.6):

$$p=p_{cr}\left(1-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}\right) \qquad (5)$$

Рис. 3.6: Равновесное значение цены p

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид (рис. 3.7):

$$\frac{dM}{dt}=M\frac{\delta}{\tau}\left(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}}-1\right)-M^2\left(\frac{\delta}{\tau\tilde{p}}\right)^2\frac{p_{cr}}{Nq}-\kappa \qquad (6)$$

Рис. 3.7: Измененное уравнение 2

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию dM/dt = 0 (рис. 3.8):

$$\tilde{M}_{1,2}=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \qquad (7)$$

где

$$a=Nq\left(1-\frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p}\frac{\tau}{\delta},\ b=\kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2} \qquad (8)$$

Рис. 3.8: Стационарные решения для уравнения 6

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае a^2 < 4b) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, b « a^2) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При b « a стационарные значения M равны (рис. 3.9):

$$\tilde{M}_{+} = Nq\frac{\tau}{\delta}\left(1-\frac{\tilde{p}}{p_{cr}}\right)\tilde{p},\ \tilde{M}_{-} = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta\left(p_{cr}-\tilde{p}\right)} \tag{9}$$

Рис. 3.9: Стационарные значения M

Первое состояние M+ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние M- неустойчиво, так, что при M<M- оборотные средства падают (dM/dt < 0), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу M- соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр sigma всюду входит в сочетании с tau. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: sigma = 1, а параметр tau будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

## 3.2 Решение задачи:

1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем.

В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений (рис. 3.10):

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$
$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2,$$

где $a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}$, $a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}$, $c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1 \tilde{p}_1}$, $c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}$.

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

Рис. 3.10: Уравнения динамики изменения объемов продаж для 2х фирм в 1м случае

Получаем следующий график (рис. 3.11):

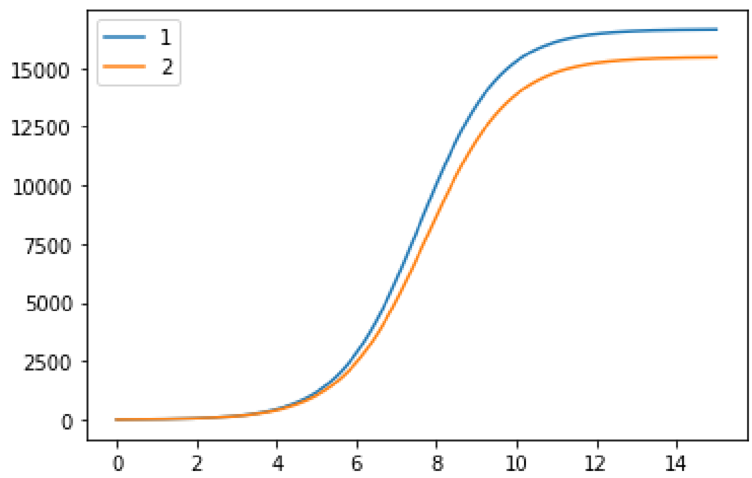


Рис. 3.11: График для первого случая

2. Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед M1M2 будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений (рис. 3.12):

$$\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \left(\frac{b}{c_1} + 0,00019\right) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2$$

$$\frac{dM_2}{d\theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2$$

Рис. 3.12: Уравнения динамики изменения объемов продаж для 2х фирм во 2м случае

Получаем следующий график (рис. 3.13):

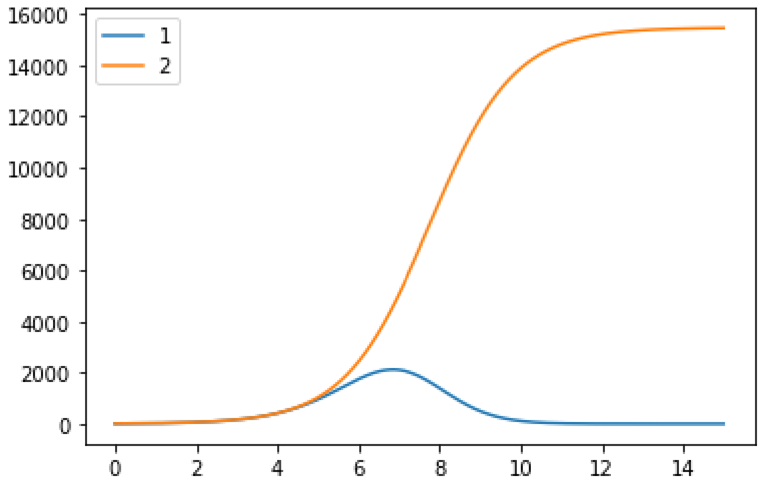


Рис. 3.13: График для второго случая

## 3.3 Построение модели задачи об эпидемии

Код в jupyter notebook для первого случая (рис. 3.14):

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import math
```

```
p_cr=33 # критическая стоимость продукта
tau1=27 # длительность производственного цикла фирмы 1
p1=11.3 # себестоимость продукта у фирмы 1
tau2=24 # длительность производственного цикла фирмы 2
p2=12.5 # себестоимость продукта у фирмы 2
V=83 # число потребителей производственного продукта
q=1 # максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

t0=0
tmax=15
t=np.arange(t0, tmax, 0.01)
x0=[8.5, 9.1]
```

```
a1=p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*V*q)
a2=p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*V*q)
b=p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*V*q)
c1=(p_cr-p1)/(tau1*p1)
c2=(p_cr-p2)/(tau2*p2)

def dx1(x,t):
    dx1=x[0]-(a1/c1)*x[0]*x[0]-(b/c1)*x[0]*x[1]
    dx2=(c2/c1)*x[1]-(a2/c1)*x[1]*x[1]-(b/c1)*x[0]*x[1]
    return [dx1, dx2]

x=odeint(dx, x0, t)
```

```
plt.plot(t,x)
plt.legend('12')
```

Рис. 3.14: код для первого случая

Код в jupyter notebook для второго случая (рис. 3.15):

```
def dx2(x,t):
    dx1=x[0]-(a1/c1)*x[0]*x[0]-(b/c1+0.00019)*x[0]*x[1]
    dx2=(c2/c1)*x[1]-(a2/c1)*x[1]*x[1]-(b/c1)*x[0]*x[1]
    return [dx1, dx2]

x=odeint(dx2, x0, t)
```

```
plt.plot(t,x)
plt.legend('12')
```

Рис. 3.15: код для второго случая

# 4 Выводы

В ходе данной лабораторной работы мы рассмотрели два случая модели конкуренции двух фирм, производящих взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише.