Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва

Дугаева Светлана Анатольевна

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Исследовать простейшую модель типа “хищник-жертва” — модель Лотки-Вольтерры.

Задание

Вариант 29

Для модели «хищник-жертва» (рис. @fig:001):

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -0.31x(t) + 0.054x(t)y(t) \\
\dfrac{dy}{dt} = 0.32y(t) - 0.055x(t)y(t)
\end{cases}
$$

Рис. 0.1: Система ДУ для модели

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$x_0 = 7, y_0 = 15$

Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

Теоретическая справка

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников (рис. @fig:002):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy(t) + dx(t)y(t)\end{aligned} \tag{1}$$

Рис. 0.1: Система ДУ

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв.

Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy).

Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние A (рис. @fig:003):

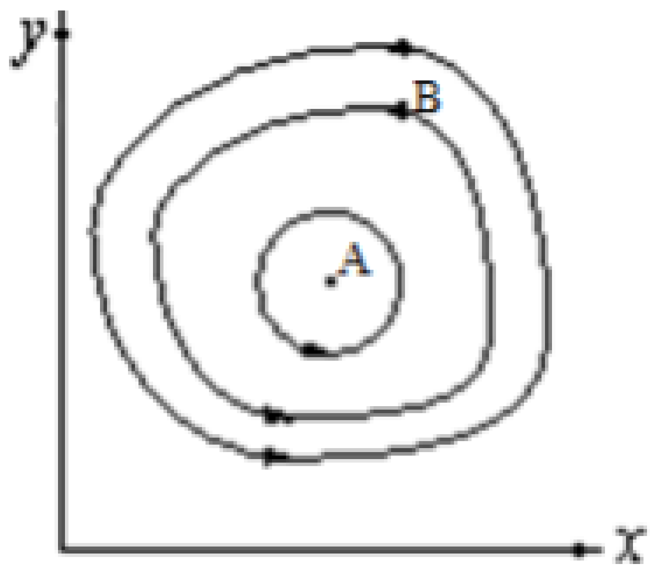

Рис. 0.2: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: x0 =a/c , y0 =b/d.

Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$x(0) = x_0, y(0) = y_0$

то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели (рис. @fig:004):

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \varepsilon f(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \varepsilon g(x,y), \ \varepsilon \ll 1 \qquad (2)$$

Решение задачи:

В данной задаче:

x – число хищников, y - число жертв.

a=0.31 - коэффициент естественной смертности хищников

b=0.32 - коэффициент естественного прироста жертв

c=0.054 - коэффициент увеличения числа хищников

d=0.055 - коэффициент смертности жертв

Стационарное состояние системы будет в точке: x0 =a/c , y0 =b/d.

1. Построение графика изменения численности хищников (рис. @fig:005):

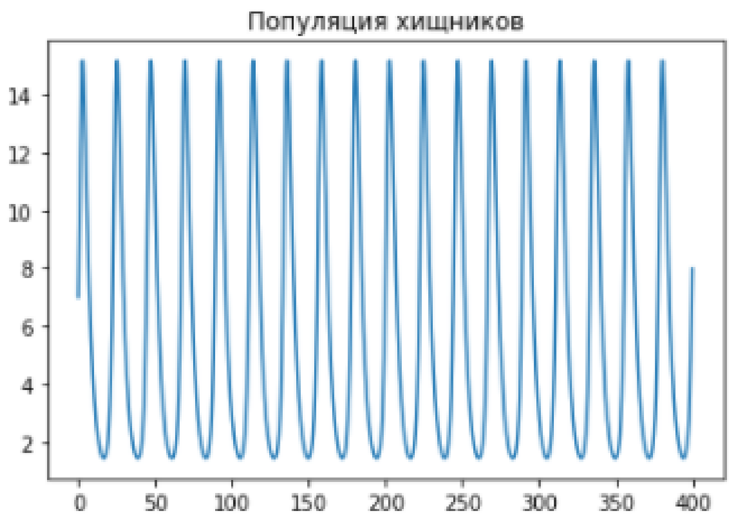

Рис. 0.3: Численность хищников

2. Построение графика изменения численности жертв (рис. @fig:006):

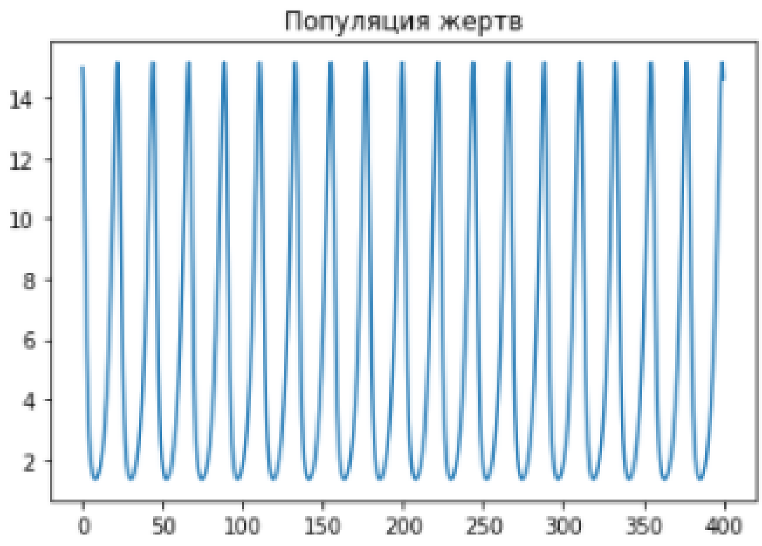

Рис. 0.4: Численность жертв

3. Построение графика зависимости численности хищников от численности жертв с заданными начальными условиями (рис. @fig:007):

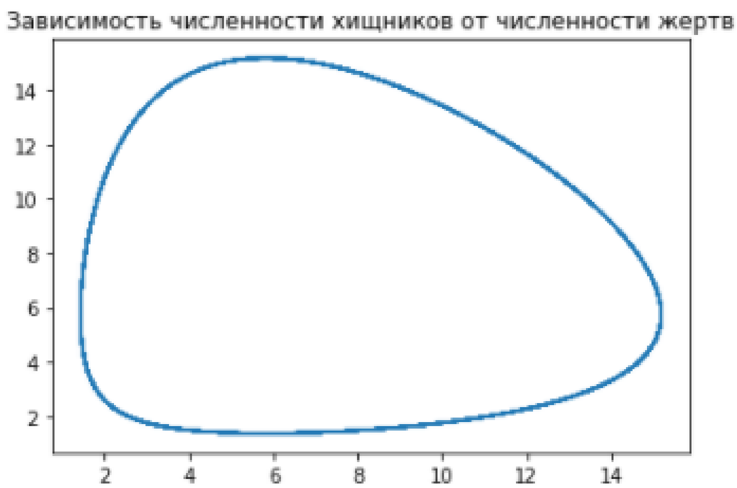

Рис. 0.5: Фазовый портрет

4. Расчет стационарного состояния системы (рис. @fig:008):

```
stat1=a/c
stat2=b/d
stat1, stat2
```

```
(5.7407407407407405, 5.818181818181818)
```

Рис. 0.6: Стационарное состояние

$x_0 = 5.74074074074074, y_0 = 5.818181818181818$

Построение модели "Хищник-жертва"

Код в jupyter notebook (рис. @fig:009)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
```

```
a = 0.31
b = 0.32
c = 0.054
d = 0.055

x0 = [7, 15]
t = np.arange(0, 400, 0.1)
```

```
def dx(x, t):
    dx1 = -a*x[0] + c*x[0]*x[1]
    dx2 = b*x[1] - d*x[0]*x[1]
    return [dx1, dx2]
```

```
y = odeint(dx, x0, t)
y
```

```
array([[ 7.        , 15.        ],
       [ 7.35677274, 14.88829345],
       [ 7.72646997, 14.74791913],
       ...,
       [ 7.24048746, 14.92735124],
       [ 7.606135  , 14.79623585],
       [ 7.98397187, 14.63630853]])
```

```
plt.title('Популяция хищников')
plt.plot(t, y[:, 0])
```

Рис. 0.7: код

Выводы

В ходе данной лабораторной работы мы исследовали модель «хищник – жертва». А также построили график зависимости численности хищников от численности жертв, график изменения численности жертв и график изменения численности хищников, нашли стационарное состояние системы.