1 Численное решение уравнения Пуассона в прямоугольнике

Рассмотрим разностную задачу с однородными (нулевыми) граничными условиями:

$$
\begin{gathered}
\frac{-v_{i-1,j}+2\,v_{ij}-v_{i+1,j}}{h_1^2}+\frac{-v_{i,j-1}+2\,v_{ij}-v_{i,j+1}}{h_2^2}=f_{i,j},\\
v_{0j}=v_{N_1j}=0,\quad v_{i0}=v_{iN_2}=0,\\
i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь $h_1=l_1/N_1,\ h_2=l_2/N_2$.

Преобразуем разностную задачу (1) к операторной форме. Обозначим через $v=v(ih_1,jh_2)$ сеточную функцию, определенную при $0\le i\le N_1,\ 0\le j\le N_2$ и соответствующую решению (1), т.е. $v(ih_1,jh_2)=v_{ij}$. Аналогично через $f=f(ih_1,jh_2)$ обозначим сеточную функцию, соответствующую правой части (1), т.е. $f(ih_1,jh_2)=f_{ij}$. При этом потребуем, чтобы функция f обращалась в 0 на границе прямоугольника Ω: $f_{0j}=f_{N_1j}=0,\ f_{i0}=f_{iN_2}=0$. Через Λ_k обозначим операторы

$$
(\Lambda_1u)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{-u_{i+1,j}+2\,u_{ij}-u_{i-1,j}}{h_1^2}, & 1\le i\le N_1-1,\\ & 1\le j\le N_2-1,\\ 0 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}
$$

$$
(\Lambda_2u)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{-u_{i,j+1}+2\,u_{ij}-u_{i,j-1}}{h_1^2}, & 1\le i\le N_1-1,\\ & 1\le j\le N_2-1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}
$$

Тогда разностная краевая задача (1) может быть представлена в операторной форме

$$
Bv\equiv(\Lambda_1+\Lambda_2)\,v=f. \tag{2}
$$

Обозначим через H_0 пространство сеточных функций, обращающихся в 0 на границе прямоугольника Ω. Введем в H_0 скалярное произведение

$$
(v^1,\,v^2)=\sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}v^1(ih_1,jh_2)\,v^2(ih_1,jh_2)\,h_1h_2.
$$

Рассмотрим следующую систему сеточных функций

$$e_{k_1,k_2}(ih_1, jh_2) = \frac{2}{l_1 l_2} \sin \frac{k_1 \pi i h_1}{l_1} \sin \frac{k_2 \pi j h_1}{l_2} \equiv \frac{2}{l_1 l_2} \sin \frac{k_1 \pi i}{N_1} \sin \frac{k_2 \pi j}{N_2},$$

$$1 \le k_1 \le N_1 - 1, \quad 1 \le k_2 \le N_2 - 1.$$

Каждая функция e_{k_1,k_2} является собственной функцией оператора A, а соответствующее собственное значение

$$\lambda_{k_1,k_2} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 \pi h_1}{2\, l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi h_2}{2\, l_2}.$$

Более того, функции $\{e_{k_1,k_2}\}$ образуют ортонормированную систему:

$$(e_{k_1,k_2},\, e_{n_1,n_2}) = \begin{cases} 1, & (k_1, k_2) = (n_1, n_2), \\ 0, & (k_1, k_2) \ne (n_1, n_2). \end{cases}$$

Таким образом, они образуют базис в пространстве H_0 и любая сеточная функция, в том числе и решение v операторного уравнения (2), может быть представлена в следующем виде:

$$v(ih_1, jh_2) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \tilde{v}_{k_1 k_2}\, e_{k_1 k_2}(ih_1, jh_2),$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \quad 1 \le j \le N_2 - 1,$$

где величины $\tilde{v}_{k_1 k_2}$ – ее коэффициенты Фурье. При этом

$$\tilde{v}_{k_1,k_2} = (u,\, e_{k_1,k_2}) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} v(ih_1, jh_2)\, e_{k_1 k_2}(ih_1, jh_2)\, h_1 h_2,$$

$$1 \le k_1 \le N_1 - 1, \quad 1 \le k_2 \le N_2 - 1.$$

Сеточная функция f, которая является правой частью системы (1) также может быть разложена в ряд:

$$f(ih_1, jh_2) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \tilde{f}_{k_1 k_2}\, e_{k_1 k_2}(ih_1, jh_2),$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \quad 1 \le j \le N_2 - 1,$$

а ее коэффициенты Фурье $\tilde{f}_{k_1 k_2}$ определяются аналогично.

Подставим полученные для v и f разложения в уравнение (2) и получим:

$$Bv = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \lambda_{k_1 k_2}\, \tilde{v}_{k_1 k_2}\, e_{k_1 k_2}(ih_1, jh_2) = f(ih_1, jh_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \tilde{f}_{k_1 k_2}\, e_{k_1 k_2}(ih_1, jh_2),$$

$$1 \le k_1 \le N_1 - 1, \quad 1 \le k_2 \le N_2 - 1.$$

Из линейной независимости функций $e_{k_1k_2}$ следует, что

$$\tilde{v}_{k_1k_2} = \frac{\tilde{f}_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}}, \quad 1 \le k_1 \le N_1 - 1, \quad 1 \le k_2 \le N_2 - 1.$$

Отсюда получаем, что решение задачи (2) может быть представлено в следующем виде:

$$v(ih_1, jh_2) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} \frac{\tilde{f}_{k_1k_2}}{\lambda_{k_1k_2}}\, e_{k_1k_2}(ih_1, jh_2),$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \quad 1 \le j \le N_2 - 1.$$

Сформулируем этапы численного решения задачи (2) по описанному алгоритму. При этом целесообразно ввести следующие вспомогательные величины: $\mu_{k_2}(ih_1), \mu_{k_1k_2}$ и $v_{k_2}(ih_1)$. Тогда вычисления можно организовать следующим образом:

I Вычисление (с точностью до множителя) коэффициентов Фурье сеточной функции f (прямое преобразование Фурье):

$$\mu_{k_2}(ih_1) = \sum_{j=1}^{N_2-1} f(ih_1, jh_2)\, \sin\frac{k_2\pi j}{N_2},$$

$$1 \le k_2 \le N_2 - 1, \quad 1 \le i \le N_1 - 1;$$

$$\mu_{k_1k_2} = \sum_{i=1}^{N_1-1} \mu_{k_2}(ih_1)\, \sin\frac{k_1\pi i}{N_1},$$

$$1 \le k_1 \le N_1 - 1, \quad 1 \le k_2 \le N_2 - 1.$$

II Восстановление сеточной функции v по ее коэффициентам Фурье (обратное преобразование Фурье):

$$v_{k_2}(ih_1) = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \frac{\mu_{k_1k_2}}{\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{k_1\pi h_1}{2\,l_1} + \frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{k_2\pi h_2}{2\,l_2}}\, \sin\frac{k_1\pi i}{N_1},$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \quad 1 \le k_2 \le N_2 - 1;$$

$$v(ih_1, jh_2) = \frac{4}{N_1N_2} \sum_{k_2=1}^{N_2-1} v_{k_2}(ih_1)\, \sin\frac{k_2\pi j}{N_2},$$

$$1 \le i \le N_1 - 1, \quad 1 \le j \le N_2 - 1.$$

2 Первая краевая задача для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами

В прямоугольнике Ω

$$\Omega = \{(x, y), \quad 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$$

рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{12}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{21}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{22}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения отвечают условию эллиптичности:

$$c_1 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} k_{i,j}(x,y)\xi_i\xi_j \le c_2 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad (x,y) \in \Omega$$

и положительные постоянные c_1, c_2 не зависят от точки (x, y).

Для аппроксимации стоящих в (3) производных рассмотрим следующие сеточные операторы:

$$\Lambda_{xx} v = \frac{1}{2}\left((k_{11} v_{\bar{x}})_x + (k_{11} v_x)_{\bar{x}}\right);$$

$$\Lambda_{yy} v = \frac{1}{2}\left((k_{22} v_{\bar{y}})_y + (k_{22} v_y)_{\bar{y}}\right);$$

$$\Lambda_{xy} v = \frac{1}{2}\left((k_{12} v_{\bar{y}})_x + (k_{12} v_y)_{\bar{x}}\right);$$

$$\Lambda_{yx} v = \frac{1}{2}\left((k_{21} v_{\bar{x}})_y + (k_{21} v_x)_{\bar{y}}\right).$$

Приведем явный вид описанных операторов. Для произвольной функции $u = u(x, y)$

имеем:

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{xx} u = \quad & \Bigg(u(x+h_1, y)\, \frac{k_{11}(x,y) + k_{11}(x+h_1,y)}{2} \\
& - u(x,y)\, \frac{k_{11}(x,y) + k_{11}(x+h_1,y) + k_{11}(x,y) + k_{11}(x-h_1,y)}{2} \\
& + u(x-h_1, y)\, \frac{k_{11}(x,y) + k_{11}(x-h_1,y)}{2} \Bigg) \Bigg/ \, h_1^2; \\
\Lambda_{yy} u = \quad & \Bigg(u(x, y+h_2)\, \frac{k_{22}(x,y) + k_{22}(x,y+h_2)}{2} \\
& - u(x,y)\, \frac{k_{22}(x,y) + k_{22}(x,y+h_2) + k_{22}(x,y) + k_{22}(x,y-h_2)}{2} \\
& + u(x, y-h_2)\, \frac{k_{22}(x,y) + k_{22}(x,y-h_2)}{2} \Bigg) \Bigg/ \, h_2^2;
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
Av = -\left(\Lambda_{xx} + \Lambda_{xy} + \Lambda_{yx} + \Lambda_{yy}\right) v.
$$

Построенный оператор аппроксимирует дифференциальный оператор задачи (3) со вторым порядком.

Рассмотрим задачу о решении системы

$$
Av = f. \tag{4}
$$

Если матрица $K(x,y)$ симметрична, т.е. $k_{12}(x,y) = k_{21}(x,y)$, то оператор A является симметричным и выполнены неравенства:

$$
c_1(Bv, v) \le (Av, v) \le c_2(Bv, v).
$$

Это позволяет применить для решения системы (4) итерационный процесс:

$$
B\left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\alpha_{n+1}}\right) + Av^n = f
$$

3 Итерационные методы со спектрально-эквивалентными операторами.

Пусть дана матрица B, такая, что для всех векторов v из рассматриваемого пространства выполнены соотношения:

$$m_1\,(Bv,v) \le (Av,v) \le M_1\,(Bv,v),$$

и, кроме того, система уравнений $B\,u = c$ может быть решена с относительно небольшими вычислительными затратами. В случае, когда $M_1/m_1 \ll M/m$ для решения системы

$$Av = b \tag{5}$$

может оказаться целесообразным применение итерационного процесса вида

$$B\,\frac{v^{n+1}-v^n}{\alpha_{n+1}} + Av^n = b. \quad n = 0,1,2,\dots \tag{6}$$

Итерационные методы такого типа принято называть *итерационными методами со спектрально-эквивалентными операторами*, а матрица B называется *переобусловливателем* для матрицы A.

Отметим, что на каждом шаге итерационного процесса (6) следующее приближение может быть найдено из соотношения

$$v^{n+1} = v^n - \alpha_{n+1}\,B^{-1}\,(A\,v^n - b)\,.$$

При этом нет необходимости вычислять матрицу B^{-1}. Для нахождения вектора $y = B^{-1}\,(A\,v^n - b)$ достаточно решить систему $B\,y = A\,v^n - b$.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры реализации общего итерационного процесса (6). Все они отличаются только выбором параметров α_n. При этом оценку погрешности удобнее производить не в $\|\cdot\|_2$-норме, а в энергетической норме $\|v\|_A = (Av,v)^{1/2}$.

Метод простой итерации. В этом случае $\alpha_n = 2/(M_1+m_1)$ при всех значениях n. Для погрешности метода справедлива оценка:

$$\left\|z^{n+1}\right\|_A \le \left(\frac{M_1-m_1}{M_1+m_1}\right)\,\|z^n\|_A\,.$$

Чебышевский двухслойный метод. Фиксируется число итераций n, а в качестве итерационных параметров берутся

$$\alpha_j = \left(\frac{M_1 + m_1}{2} + \frac{M_1 - m_1}{2} \cos \frac{\pi(2j-1)}{2n} \right)^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оценка погрешности через n шагов:

$$\|z^n\|_A \leq 2\, q_2^n \left\|z^0\right\|_A, \ \text{ где } q_1 = \frac{\sqrt{M_1} - \sqrt{m_1}}{\sqrt{M_1} + \sqrt{m_1}}.$$

Метод скорейшего градиентного спуска. На каждом шаге значение параметра α_{n+1} выбирается таким, чтобы при данном значении v^n минимизировать величину $\|z^{n+1}\|_A$. Полученное значение

$$\alpha_{n+1} = \frac{(r^n, B^{-1} r^n)}{(AB^{-1} r^n, B^{-1} r^n)},$$

при этом справедлива оценка:

$$\left\|z^{n+1}\right\|_A \leq \left(\frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} \right) \|z^n\|_A .$$