

Введение в математическое моделирование

Сентябрь 2020

Задание для самостоятельной работы

- Найти литературу с математической моделью с готовым аналитическим решением или экспериментальными данными;
- Получить решение с использованием двух методов (любых на Ваш выбор);
- Написать отчет с подробным описанием:
 - * выбранной модели,
 - * причин выбора методов решения,
 - * обоснование верности решения.

Определение модели

Модель — это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых интересующих исследователя свойств оригинала.

Важную роль при разработке моделей играют **гипотезы**, т.е. определенные предсказания, предположительные суждения о причинно-следственных связях явлений, основанные на некотором количестве опытных данных, наблюдений, догадок. Формулирование и проверка правильности гипотез основывается, как правило, на **аналогиях** - это представлениях о каком-либо частном сходстве двух объектов.

Важные свойства моделей:

- Полнота модели (насколько модель близка к оригиналу; все модели являются неполными);
- Адекватность модели (насколько модель пригодна для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта);
- Простота модели;
- Потенциальность модели (возможность получения новых знаний об исследуемом объекте с помощью модели);

Цели моделирования

1. Понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой.
2. Научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях.
3. Прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

Классификация моделей

Материальное моделирование — это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием его материального аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики данного объекта. К таким моделям, например, можно отнести использование макетов в архитектуре, моделей и экспериментальных образцов при создании различных транспортных средств.

Идеальное моделирование отличается от материального тем, что оно основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой и всегда носит теоретический характер.

Натурное моделирование — это такое моделирование, при котором реальному объекту ставится в соответствие его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия. К примерам натурных моделей можно отнести макеты в архитектуре, модели судов в судостроении.

Аналоговое моделирование – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими соотношениями, логическими и структурными схемами). В качестве примеров аналоговых моделей можно привести электрические и механические колебания, которые с точки зрения математики описываются одинаковыми соотношениями, но относятся к качественно отличающимся физическим процессам. Поэтому изучение механических колебаний можно вести с помощью электрической схемы, и наоборот.

Интуитивное моделирование – это моделирование, основанное на интуитивном (не обоснованном с позиций формальной логики) представлении об объекте исследования, не поддающимся формализации или не нуждающимся в ней. В качестве наиболее яркого примера интуитивной модели окружающего мира можно считать жизненный опыт любого человека. Любое эмпирическое (т.е. полученное из эксперимента или в процессе наблюдения) знание без объяснения причин и механизмов наблюдаемого явления также следует считать интуитивным.

Научное моделирование — это всегда логически обоснованное моделирование, использующее минимальное число предположений, принятых в качестве гипотез на основании наблюдений за объектом моделирования.

Знаковым называют моделирование, использующее в качестве моделей знаковые изображения какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, иероглифы, руны, наборы символов, включающее также совокупность законов и правил, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и элементами. В качестве примеров таких моделей можно назвать любой язык: язык устного и письменного человеческого общения, алгоритмический язык, язык химических формул, язык живописи и язык нот для записи музыкальных произведений, язык математических формул.



Взаимосвязь моделей



Математическое моделирование — это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

При наблюдении за объектом-оригиналом в голове исследователя формируется некий мысленный образ объекта, его идеальная модель, которую в научной литературе принято называть **КОГНИТИВНОЙ** моделью. Когнитивные модели субъективны, так как формируются умозрительно (“в голове” исследователя) на основе всех его предыдущих знаний и опыта.

Представление когнитивной модели на естественном языке называется **содержательной** моделью.

Концептуальной моделью принято называть содержательную модель, при формулировке которой используются понятия и представления предметных областей знаний, занимающихся изучением объекта моделирования.

Логико-семантическая модель является описанием объекта в терминах и определениях соответствующих предметных областей знаний, включающим все известные логически непротиворечивые утверждения и факты.

Структурно-функциональные модели – модели, в которых объект обычно рассматривается как целостная система, которую расчленяют на отдельные элементы или подсистемы. Для представления подобных моделей удобны различного рода схемы, карты и диаграммы.

Причинно-следственные модели часто используют для объяснения и прогнозирования поведения объекта.

Формальная модель является представлением концептуальной модели с помощью одного или нескольких формальных языков (например, языков математических теорий, универсального языка моделирования (UML) или алгоритмических языков).

Преимущества математического моделирования

- Экономичность (в частности, сбережение ресурсов реальной системы).
- Возможность моделирования гипотетических, т.е. не реализованных в природе объектов (прежде всего на разных этапах проектирования).
- Возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в натуре (критический режим ядерного реактора, работа системы противоракетной обороны).
- Возможность изменения масштаба времени.
- Легкость многоаспектного анализа.
- Большая прогностическая сила вследствие возможности выявления общих закономерностей.
- Универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы (ЭВМ, системы программирования и пакеты прикладных программ широкого назначения).

Определение математической модели

Под математической моделью будем понимать любой оператор A , позволяющий по соответствующим значениям параметров X установить параметров Y объекта входных выходные значения моделирования:

$$A: X \rightarrow Y, \quad X \in \Omega X, \quad Y \in \Omega Y,$$

где ΩX и ΩY — множества допустимых значений входных и выходных параметров для моделируемого объекта.

В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств ΩX и ΩY могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.).

Классификация математических моделей

1. По сложности объекта моделирования;
2. По оператору модели;
3. По входным и выходным параметрам;
4. По цели моделирования;
5. По способу исследования модели.

Классификация математических моделей

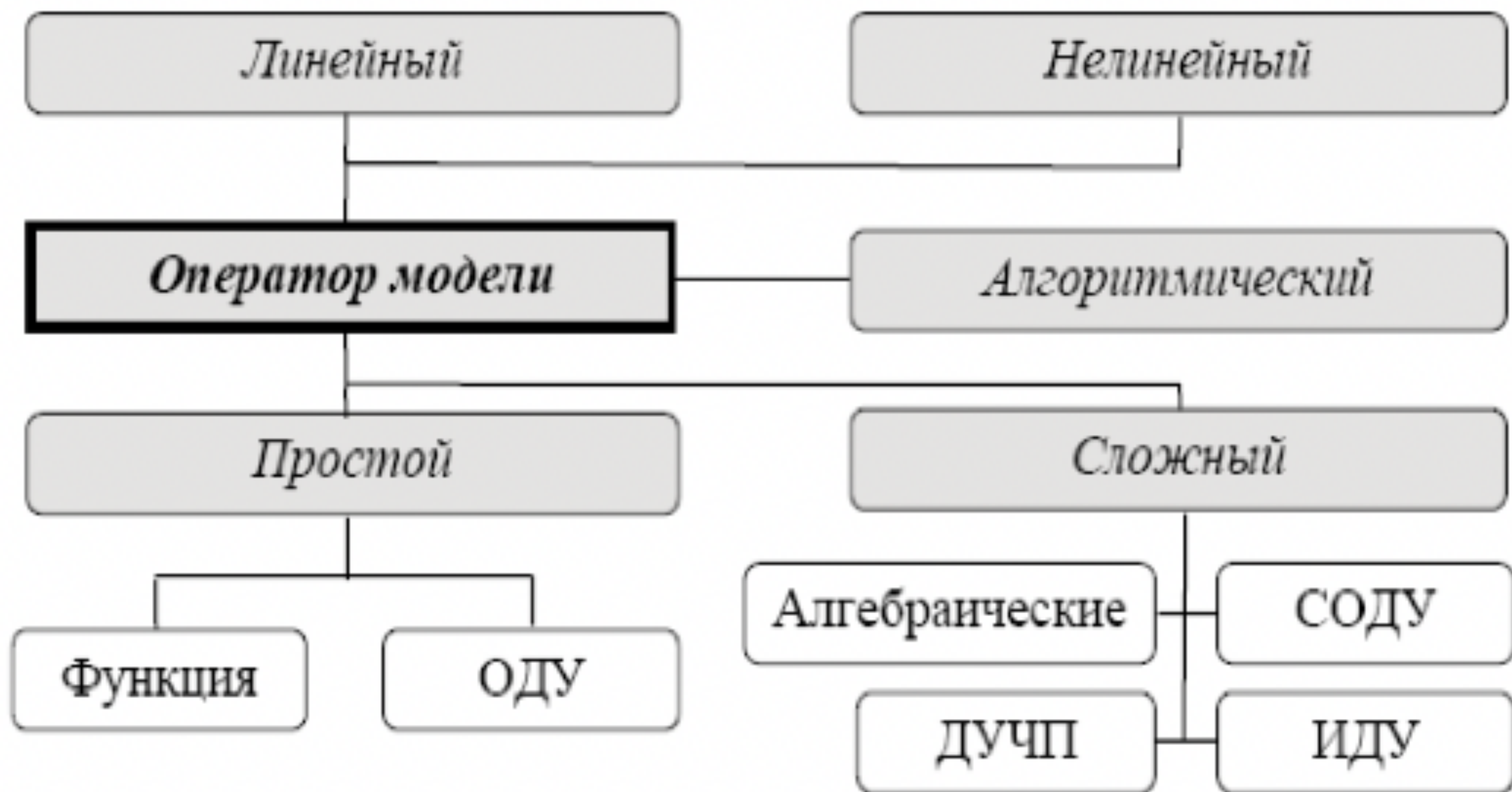
По сложности объекта моделирования



- **Простой** объект – объект, в котором при моделировании не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы. В качестве примера подобного объекта можно привести материальную точку в классической механике.
- **Система** есть совокупность взаимосвязанных элементов, в определенном смысле обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое.
- Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются **структурными**. Среди структурных динамических систем выделяют в отдельный подкласс **имитационные** системы, состоящие из конечного числа элементов, каждый из которых имеет конечное число состояний.

Классификация математических моделей

По оператору модели



Классификация математических моделей

По параметрам модели

- **Детерминированные** – значения всех параметров модели определяются детерминированными величинами (т.е. каждому параметру соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число или соответствующая функция). Данный способ соответствует полной определенности параметров;
- **Стохастический** – значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности. В литературе наиболее полно исследованы случаи нормального (гауссова) и показательного распределения случайных величин;
- **Случайные** – значения всех или отдельных параметров модели устанавливаются случайными величинами, заданными оценками плотностей вероятности, полученными в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров. Данная форма описания тесно связана с предыдущей. Однако в данном случае получаемые результаты моделирования будут существенным образом зависеть от точности оценок моментов и плотностей вероятности случайных параметров, от постулируемых законов распределения, объема выборок;
- **Интервальные** - значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданными интервалом, образованным минимальным и максимально возможными значениями параметра;
- **Нечеткие** - значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству. Такая форма используется, когда информация о параметрах модели задается экспертом на естественном языке, а следовательно, в “нечетких” (с позиции математики) терминах типа “много больше пяти”, “около нуля”.



Классификация математических моделей

По отношению ко времени

- Совокупность значений параметров модели в некоторый момент времени или на данной стадии называется **состоянием объекта**.
- Модель в которой не рассматривается развитие объекта во времени, модель называют **статической**, в противном случае модель называют **динамической**.
- Если в каждой фиксированной точке исследуемого пространства значения параметров модели не зависят от времени, модель называют **стационарной**.
- Если в качестве одной из существенных независимых переменных модели необходимо использовать время (или его аналог), то модель называется **нестационарной**.

Классификация математических моделей

По целям моделирования

- Целью **дескриптивных моделей** является построение законов изменения параметров модели. В качестве примера такой модели можно привести модель движения материальной точки под действием приложенных сил, использующая второй закон Ньютона.
- **Оптимизационные модели** предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом.
- **Управленческие модели** применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека.

Классификация математических моделей

По целям моделирования

- Метод реализации модели относят к **аналитическим**, если он позволяет получить выходные величины в виде аналитических выражений, т.е. выражений, в которых используется не более чем счетная совокупность арифметических операций и переходов к пределу.
- При **численном** подходе совокупность математических соотношений модели заменяется конечномерным аналогом. После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма.
- При **имитационном** подходе на отдельные элементы разбивается сам объект исследования.



Этапы построения математической модели

Этапы создания математической модели



Содержательная постановка модели

Человека или организацию, заинтересованных в создании новой математической модели, для краткости будем называть **заказчиком**. В качестве **исполнителя**, как правило, может выступать рабочая группа, включающая специалистов разного профиля: прикладных математиков, специалистов, хорошо знающих особенности объекта моделирования, программистов.

Перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика, составляет **содержательную постановку задачи моделирования**.

На основании анализа всей собранной информации **постановщик** задачи должен сформулировать такие требования к будущей модели, которые, с одной стороны, удовлетворяли бы заказчика; с другой стороны, реализация модели должна быть осуществлена в заданные сроки в рамках выделенных материальных средств.

Содержательная постановка модели

Этап обследования проводится членами рабочей группы под руководством постановщиков задач и включает следующие работы:

1. тщательное обследование собственно объекта моделирования с целью выявления основных факторов, механизмов, определяющих его поведение, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект,
2. сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах – аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов,
3. аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту),
4. анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, содержательная постановка задачи моделирования, дополнительные требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде **технического задания на проектирование и разработку модели.**

Концептуальная постановка модели

Концептуальная постановка задачи моделирования — это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

В отличие от содержательной концептуальная постановка задачи моделирования, как правило, формулируется членами рабочей группы без привлечения представителей заказчика, на основании разработанного на предыдущем этапе технического задания, с использованием имеющихся знаний об объекте моделирования и требований к будущей модели.

Математическая постановка задачи

Математическая постановка — это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Наиболее простой вид оператор модели имеет в случае, если он имеет вид системы алгебраических уравнений. Подобные модели можно назвать моделями **аппроксимационного типа**.

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач, возникающих для дифференциальных задач:

1. **Задача Коши, или задача с начальными условиями**, в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;
2. **Начально – граничная, или краевая задача**, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней – в каждый момент времени (на исследуемом интервале);
3. **Задачи на собственные значения**, когда в формулировку задачи входят неопределенные параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

Качественный анализ и проверка корректности модели

- **Контроль размерностей**, включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности. При переходе к вычислениям данная проверка сочетается с контролем использования одной и той же системы единиц для значений всех параметров.
- **Контроль порядков**, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых друг с другом величин и исключением малозначимых параметров. Контроль характера зависимостей: направление и скорость изменения выходных параметров модели, вытекающие из выписанных математических соотношений, должны быть такими, как это следует непосредственно из «физического» смысла изучаемой модели.
- **Контроль экстремальных ситуаций**. Весьма полезно проследить за тем, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым для них значениям – чаще всего к нулю или бесконечности. Контроль граничных условий, включающий проверку, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям.
- **Контроль физического смысла** состоит в проверке физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.
- **Контроль математической замкнутости**, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, и притом однозначно, решить поставленную математическую задачу.
- Математическая модель является **корректной**, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

Выбор и обоснование метода решения задачи

- Все методы решения задач, составляющих «ядро» математических моделей, можно подразделить на **аналитические** и **алгоритмические**.
- Следует отметить, что при использовании аналитических решений для получения результатов «в числах» также часто требуется разработка соответствующих алгоритмов, реализуемых на ЭВМ. Однако исходное решение при этом представляет собой аналитическое выражение (или их совокупность). Решения же, основанные на алгоритмических методах, принципиально не сводимы к точным аналитическим решениям соответствующей задачи.
- В случае, если соответствующая математическая задача (хотя бы и в упрощенной постановке) допускает аналитическое решение, последнее, без сомнения, предпочтительнее численного.
- Алгоритмические методы сводятся к некоторому **алгоритму**, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ. Точность моделирования в подобном эксперименте существенно зависит от использованного метода и его параметров (например, шага интегрирования).

Выбор и обоснование метода решения задачи

Применение любого численного метода неминуемо приводит к погрешности результатов решения задачи. Выделяют три основных составляющих возникающей погрешности при численном решении исходной задачи:

- неустраняемая погрешность, связанная с неточным заданием исходных данных задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);
- погрешность метода, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи (например, заменяя производную $y'(x)$ разностным аналогом $(y(x+\Delta x)-y(x))/\Delta x$, получаем погрешность дискретизации, имеющую при $\Delta x \rightarrow 0$ порядок Δx);
- ошибка округления, связанная с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ.

В процессе работы вычислительного алгоритма на каждом акте вычислений возникает некоторая погрешность. При этом величина погрешности может от действия к действию нарастать или не возрастать (а в некоторых случаях – даже уменьшаться). Если погрешность в процессе вычислений неограниченно нарастает, то такой алгоритм называется *неустойчивым* или *расходящимся*. В противном случае алгоритм называется *устойчивым* или *сходящимся*.

Проверка адекватности модели

Под **адекватностью** математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи. Прежде чем переходить к проверке адекватности модели, необходимо убедиться в правильном комплексном функционировании всех алгоритмов и программ модели, выполнить независимое тестирование и отладку всех отдельных алгоритмов (например, используемых программных модулей, реализующих используемый численный метод).

Проверка адекватности модели преследует две цели:

1. Убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок. Переходить к проверке гипотез следует лишь после проверки использованных методов решения, комплексной отладки и устранения всех ошибок и конфликтов, связанных с программным обеспечением.
2. Убедиться, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании. Решение вопроса о точности моделирования зависит от требований, предъявляемых к модели, и ее назначения. При этом должна учитываться точность получения экспериментальных результатов или особенности постановок тестовых задач. Для моделей, предназначенных для выполнения оценочных и прикидочных расчетов, удовлетворительной считается точность в 10-15%. Для моделей, предназначенных для использования в управляющих и контролирующих системах, требуемая точность может быть 1-2% и даже выше.

Проверка адекватности модели

Неадекватность результатов моделирования возможна, по крайней мере, по трем причинам:

А. Значения задаваемых параметров модели не соответствуют допустимой области этих параметров, определяемой принятой системой гипотез. Например, в задаче о баскетболисте гипотезу об отсутствии сопротивления воздуха можно использовать лишь при относительно малых (< 5 м/с) скоростях движения тела. При больших значениях начальной скорости мяча влияние силы сопротивления будет существенным.

В. Принятая система гипотез верна, но константы и параметры в использованных определяющих соотношениях установлены не точно. Например, в случае задачи о баскетболисте значение ускорения свободного падения g может быть уточнено в зависимости от широты местности, где находится баскетболист.

С. Неверна исходная совокупность гипотез.

Практическое использование построенной модели

Независимо от области применения разработанной модели группа разработчиков обязана провести качественный и количественный анализ результатов моделирования. Подобный анализ может преследовать несколько целей.

1. Работая с моделью, разработчики становятся специалистами в области знаний, связанной с объектом моделирования. Они начинают достаточно хорошо представлять свойства объекта, предсказывать и объяснять его поведение, в некотором смысле они могут даже представлять себя в роли объекта моделирования. Поэтому всесторонний анализ результатов моделирования может позволить выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики или, по крайней мере, лучшим образом учитывать его поведение и свойства.
2. Качественный и количественный анализ результатов моделирования позволяет обозначить область применения модели, что особенно важно в случае использования моделей для систем автоматического управления.
3. Подобный анализ позволит проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе математической постановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности.
4. Наконец, выполненный анализ может показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.