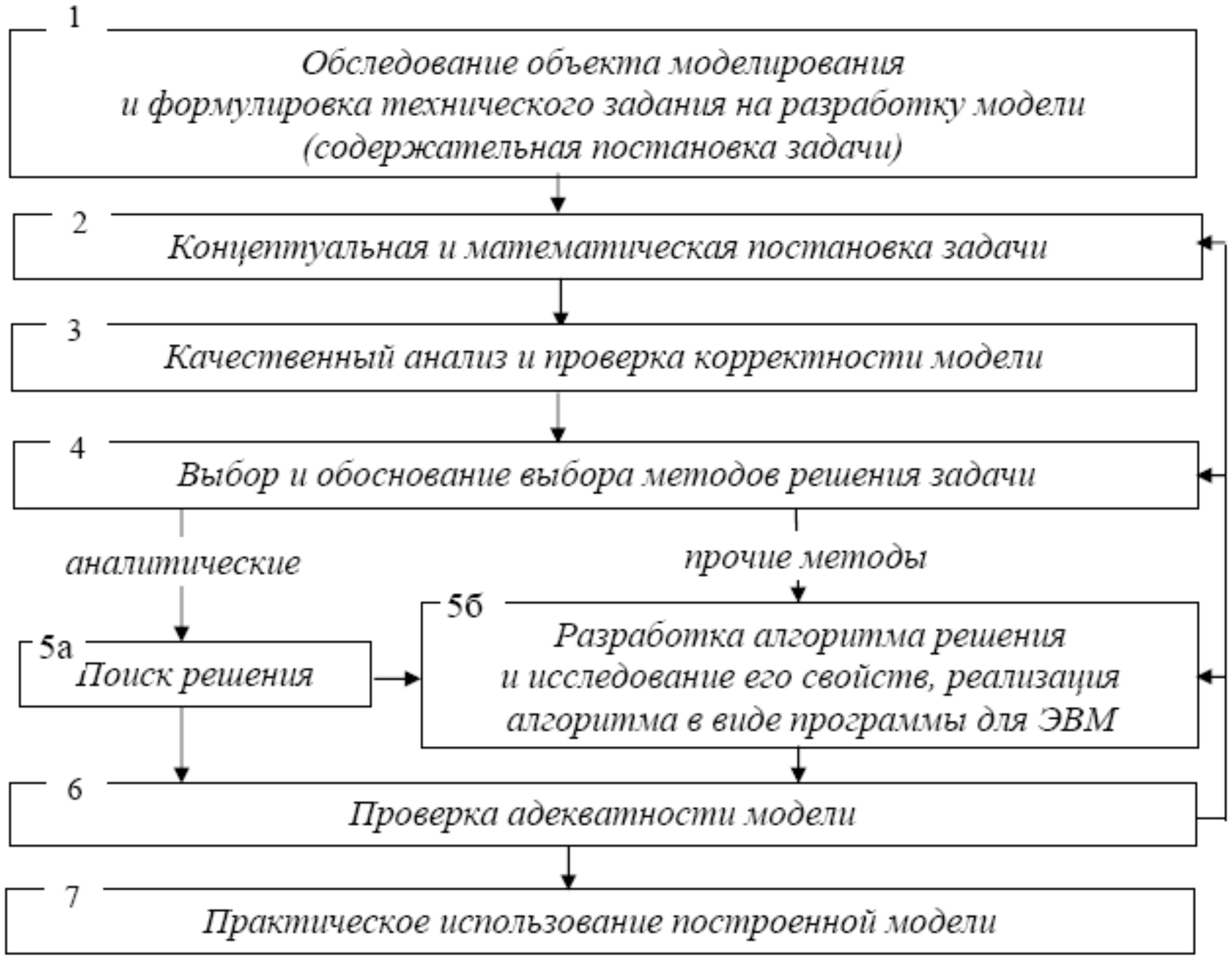
Задача о баскетболисте

Занятие 2

17 сент 2020

Этапы создания математической модели



Содержательная постановка задачи о баскетболисте

1 этап создания мат. модели

Задача: Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

Исходные данные:

- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

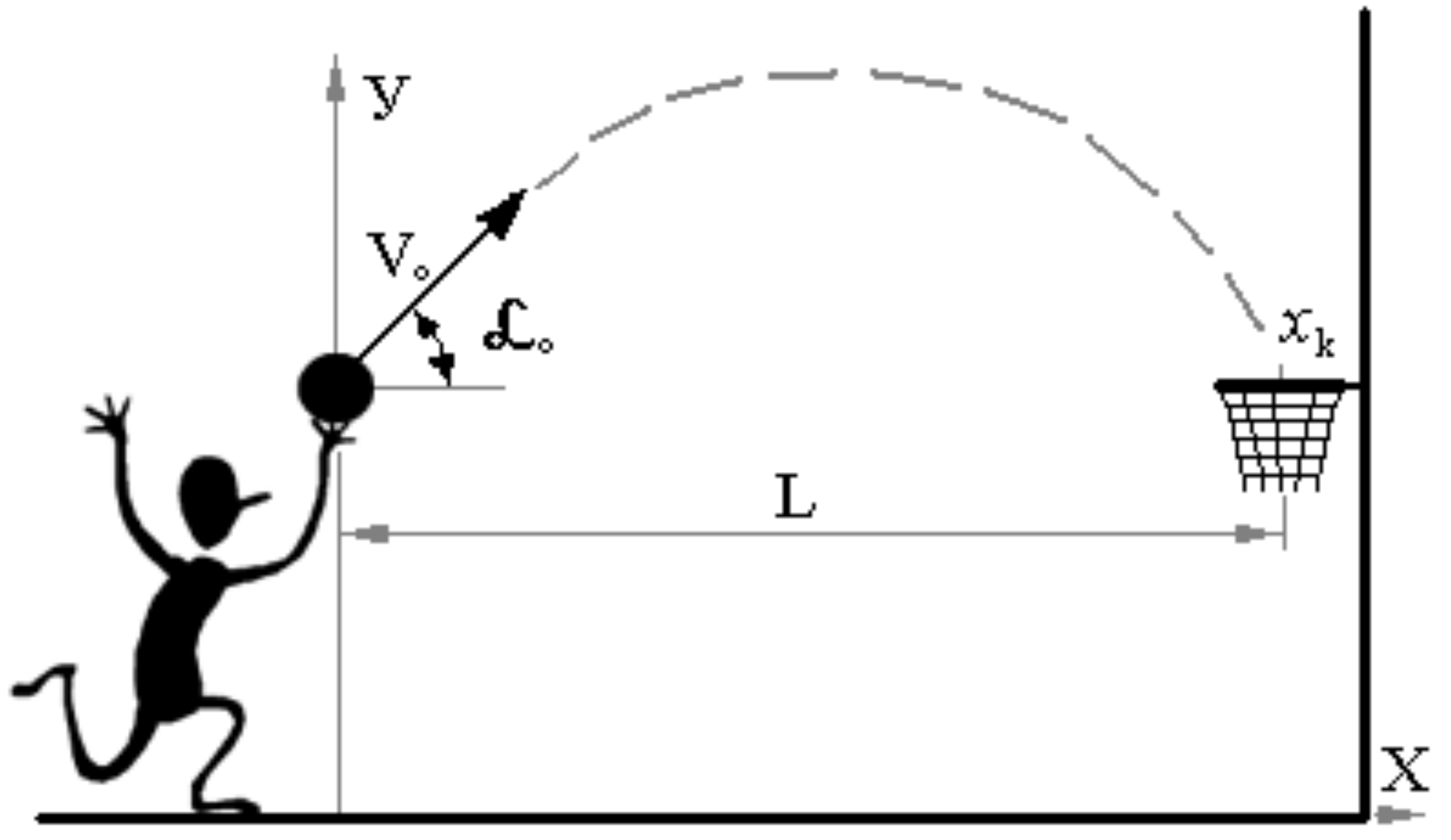
Концептуальная постановка задачи

2 этап создания мат. модели

Движение баскетбольного мяча может быть описано в соответствии с законами классической механики Ньютона.

Примем следующие гипотезы:

- объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R;
- мяч будем считать материальной точкой массой m, положение которой совпадает с центром масс мяча;
- движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения g и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
- пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс.



Определить закон движения материальной точки массой m под действием силы тяжести, если известны начальные координаты точки xo и yo, ее начальная скорость vo и угол бросания αo. Центр корзины имеет координаты xk и yk. Вычислить точность броска $\Delta = x(tk) - xk$, где tk определяется из условий: $tk>0$, $vy<0$, $y(tk)=yk$.

Математическая постановка

2 этап создания мат. модели

1. Векторная постановка

Найти зависимости от времени для векторных параметров r(t) и v(t) из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

при следующих начальных условиях:

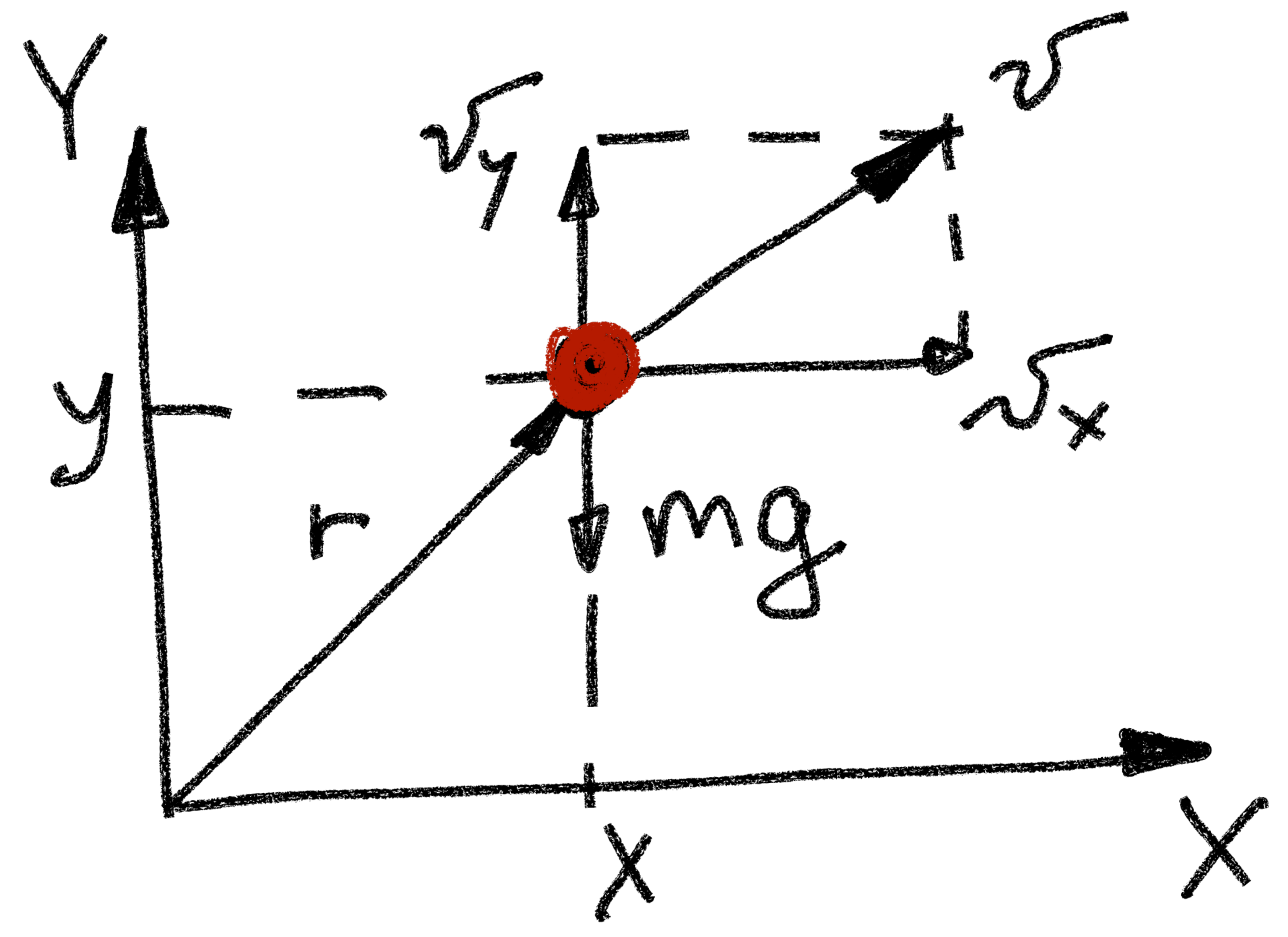
$$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Вычислить параметр Δ как

$$\Delta = r_x(t_k) - r_{xk},$$

Где t_k определить из следующих условий:

$$t_k > 0, \qquad \mathbf{v}(t_k) < 0, \qquad y(t_k) = y_k\,.$$



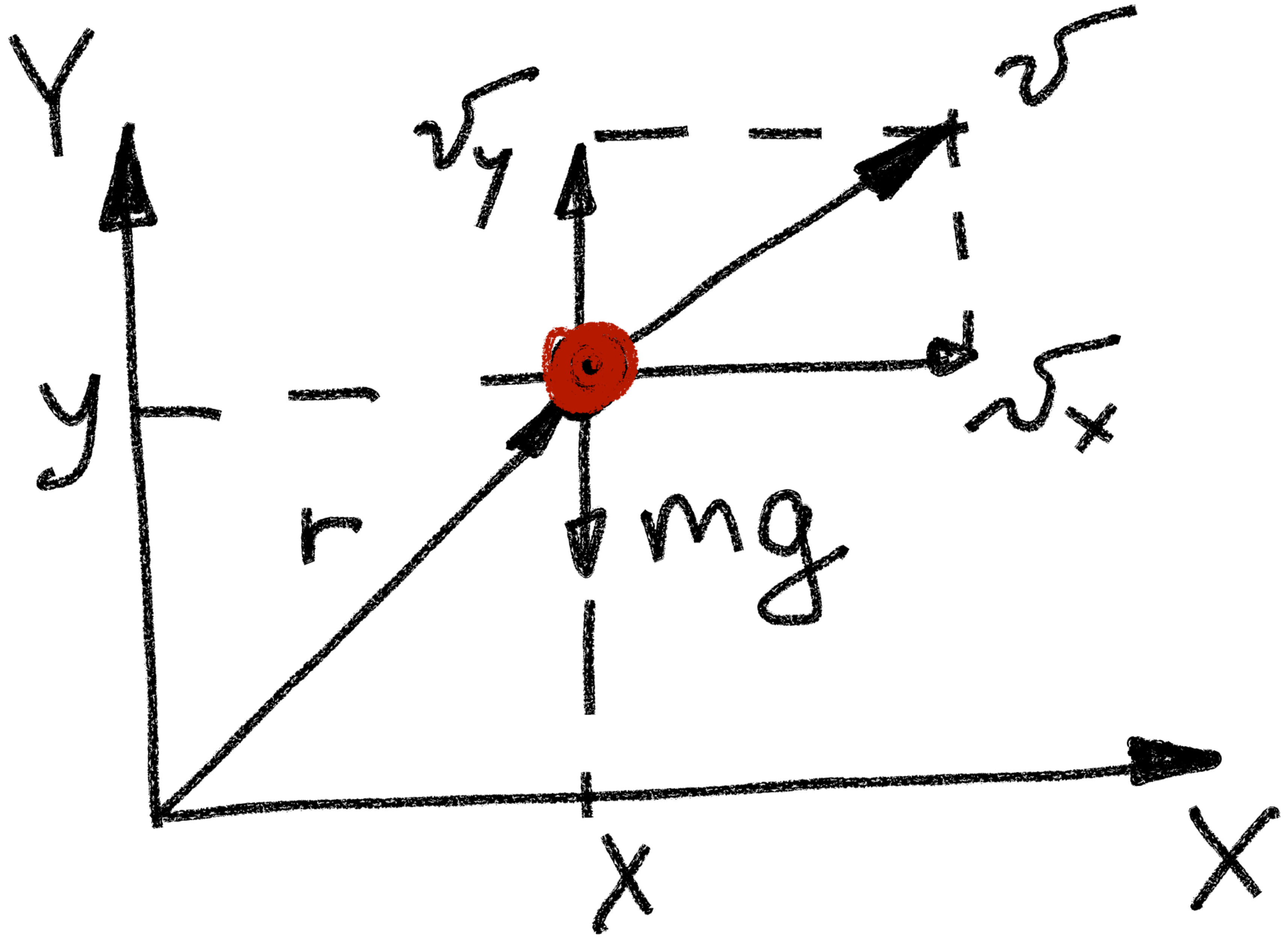
Математическая постановка

2 этап создания мат. модели

1. Координатная постановка

Найти зависимости $x(t)$, $y(t)$ и $v_x(t)$, $v_y(t)$ из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$



при следующих начальных условиях:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$
$$v_x(0) = v_0 \cos(\alpha_0), \quad v_y(0) = v_0 \sin(\alpha_0).$$

Вычислить параметр Δ как

$$\Delta = x(t_k) - x_k,$$

Где t_k определить из следующих условий:

$$t_k > 0, \qquad v(t_k) < 0, \qquad y(t_k) = y_k\,.$$

Качественный анализ и проверка корректности модели

3 этап построения мат. модели

Как можно видеть, с математической точки зрения задача о баскетболисте свелась к задаче Коши для системы ОДУ первого порядка с заданными начальными условиями. Полученная система уравнений является замкнутой, так как число независимых уравнений (4 дифференциальных и 2 алгебраических) равно числу искомых параметров задачи (*x, y, vx, vy,* Δ*, tk*). Выполним контроль размерностей задачи:

Общее уравнение динамики

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum \mathbf{F} \to [kg] \cdot \frac{[m/s]}{[s]} = [H] \to \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right]$$

Связь скорости и перемещения:

$$\frac{dr}{dt} = v \to \frac{[m]}{[s]} = \left[\frac{m}{s}\right]$$

Существование и единственность решения задачи Коши доказана математиками. Поэтому данную математическую модель можно считать корректной.

Аналитическое решение задачи

Этап 5а

Аналитическое решение задачи выглядит следующим образом (можете получить решение самостоятельно):

$$x(t) = x_0 + v_0 t\cos(\alpha_0), \quad y(t) = y_0 + v_0 t\sin(\alpha_0) - \frac{gt^2}{2},$$

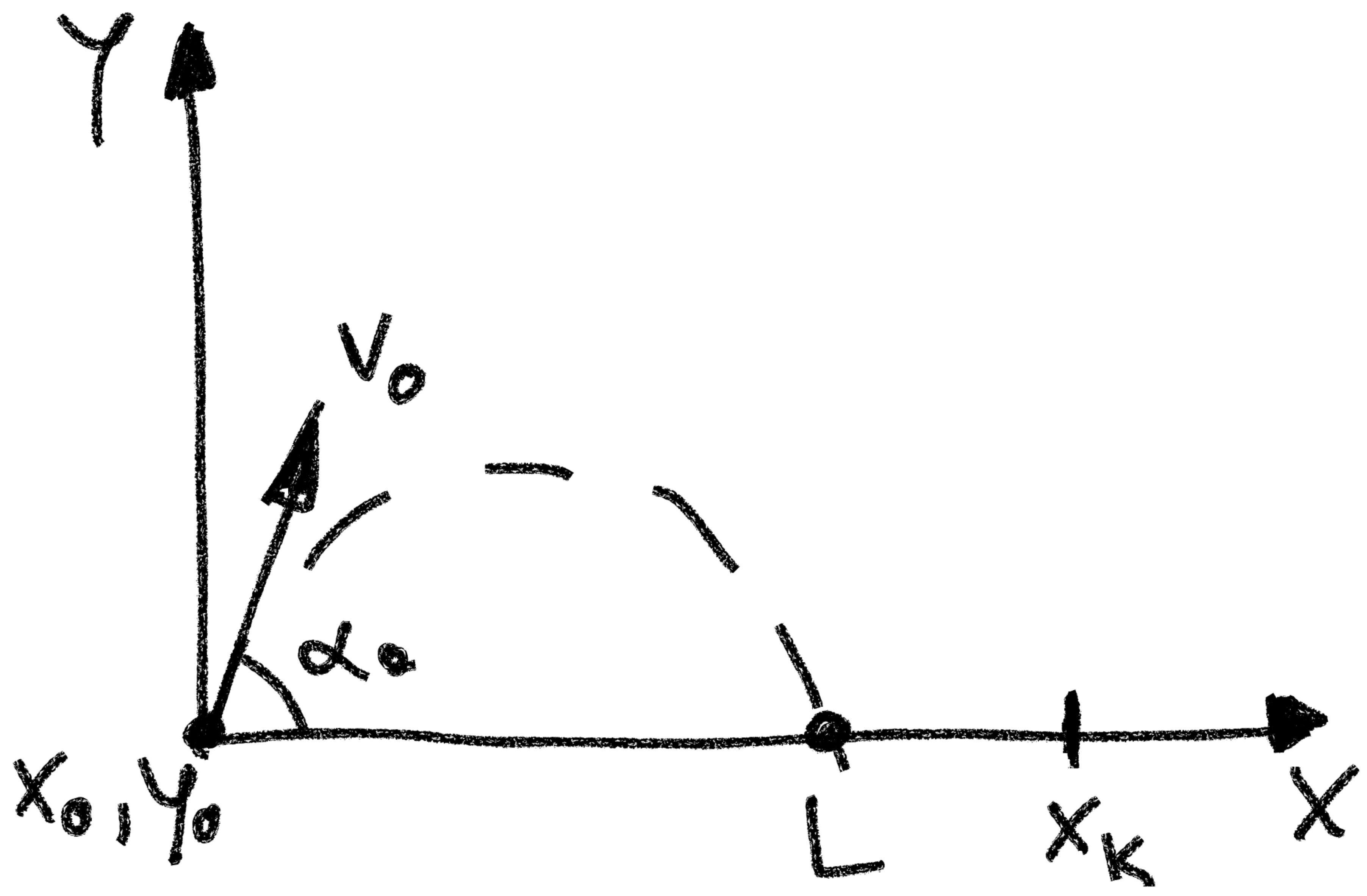
$$v_x(t) = v_0\cos(\alpha_0), \qquad v_y(t) = v_0\sin(\alpha_0) - gt\,.$$

Пусть $x_0 = y_0 = y_k = 0$. Дальность броска тогда выразится следующим образом:

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha_0)\,.$$

Тогда точность броска равна:

$$\Delta = L - x_k\,.$$



Алгоритм численного решения

Этап 5б

```
Int main(){
      \\ Входные данные:
      \\ m, r - масса и радиус мяча;
      \\ y0, x0 - начальные координаты мяча;
      \\ v0, alpha - начальная скорость и угол броска мяча;
      \\ xk, yk - координаты корзины;
      \\ t - текущее время;
      \\ dt - шаг по времени;
      \\ fx, fy - силы, действующие на мяч;
      \\ x, y, vx, vy - текущие координаты и проекции скорости мяча;
      while(vy >= 0 || (vy < 0 && y >= yk)){
            t += dt;
            vx += fx dt/m;
            Vy += fy dt/m;
            x += vx dt;
            y +=  vy dt;
      }
      L = x  - x0;
      Delta = x - xk;
}
```