

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ТИПЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

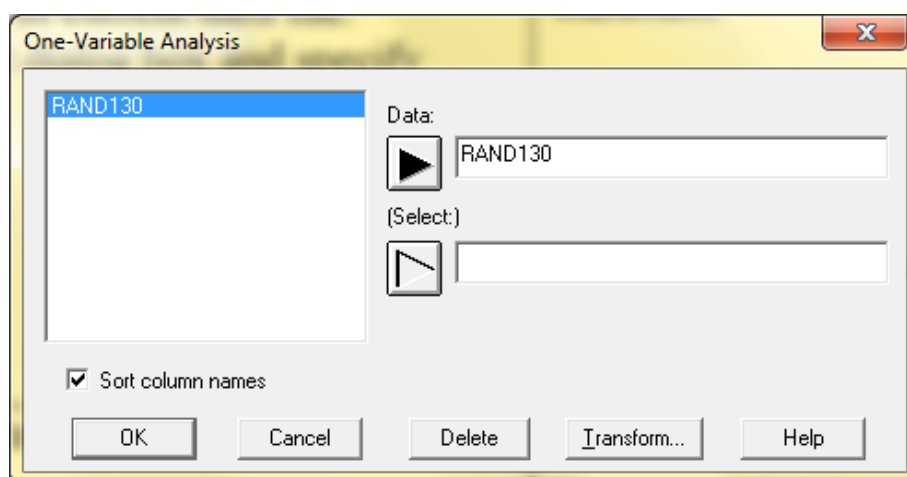
Задача. 130 случайно выбранных студентов попросили ответить на вопрос, каковы их ежедневные расходы на питание. Проверьте гипотезу о нормальном распределении изучаемой случайной величины. Уровень значимости принять равным 0,05.

Для имитации результатов опроса сгенерируйте выборку соответствующего объема, используя датчик случайных чисел (нормальное распределение с параметрами Mean=5, Std.Deviation = 1). Вспоминайте, как это сделать. Обязательно сохраните данные.

Глазомерный метод проверки нормальности

В основе этого метода лежит свойство человеческого глаза обнаруживать сходство геометрического образа с прямой линией. **Глазомерный метод нормальности** состоит в визуальной оценке величины отклонения точек графика от прямой линии: чем лучше ложатся точки на прямую, тем меньше оснований сомневаться в нормальности распределения (в основе этого метода лежит тот факт, что случайная величина $F^{-1}_X(X)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0;1]$; подумайте, как это использовать).

В строке меню выберите **Describe**, в раскрывшемся меню выберите **Numeric Data**, а затем **One-Variable Analysis**. Раскроется диалоговое окно.

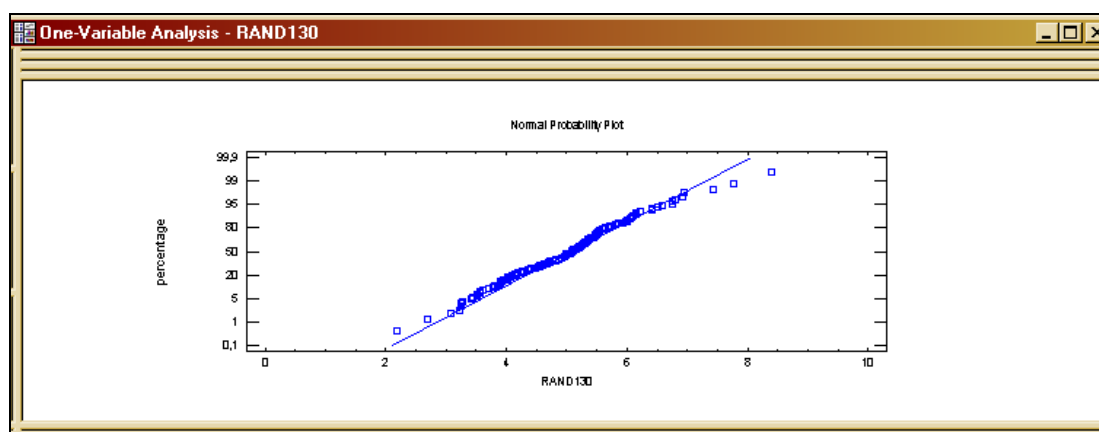


В этом окне выберите нужный столбец, нажмите на кнопку со стрелкой в поле **Data**, затем нажмите OK. Откроется окно анализа с графиком. Нажмите кнопку



Tables and graphs, в окне выберите **Normal Probability Plot**. Раскроется ок-

но

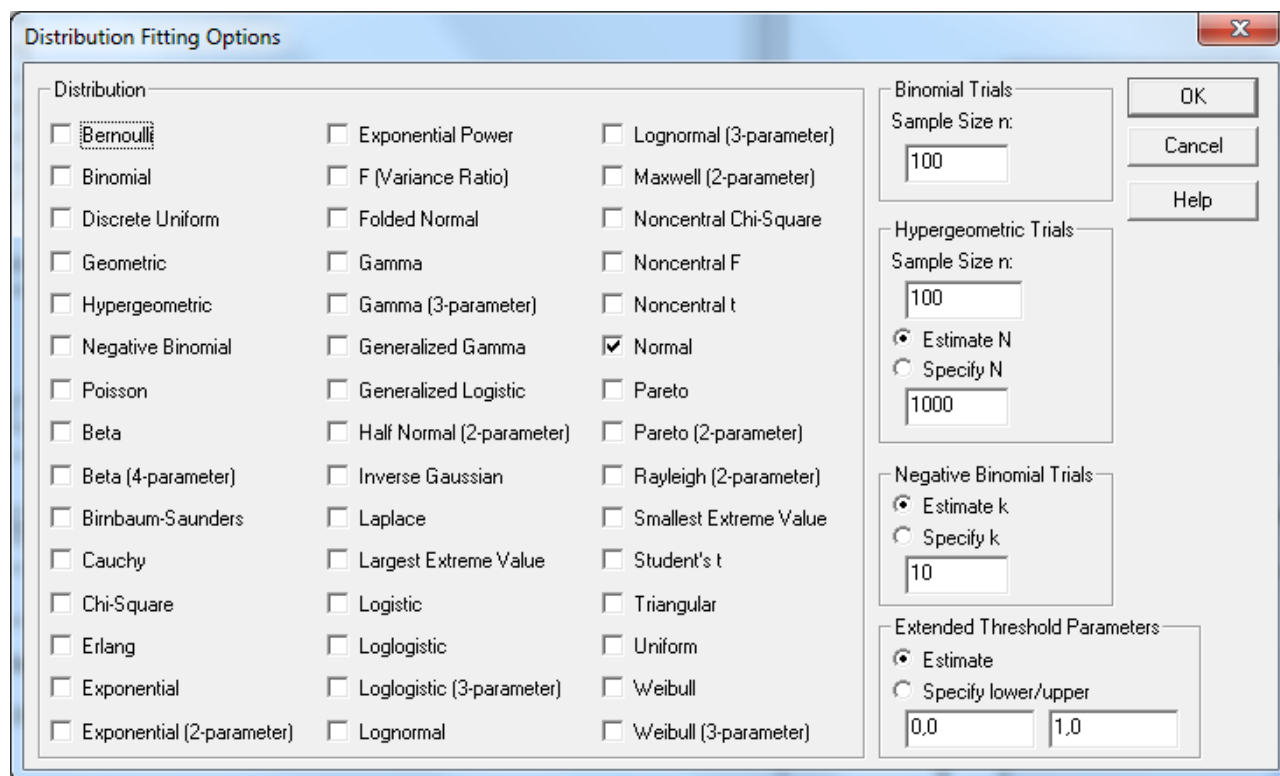


Видно, что точки достаточно хорошо лежат на прямой, это позволяет предположить нормальность. Отметим, что данный способ должен использоваться лишь для предварительной проверки нормальности, четкого критерия отклонения гипотезы он не дает. Такого же рода предварительную проверку можно провести, используя визуальное сравнение гистограммы частот с нормальной кривой (см. лабораторную работу № 2).

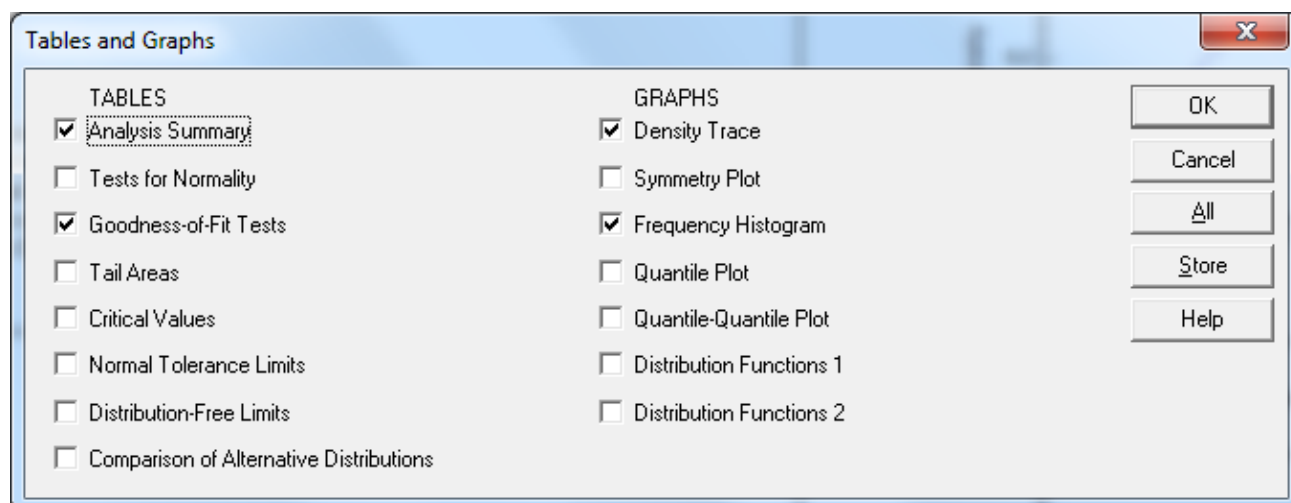
Для проверки гипотезы о типе распределения существуют специальные критерии — **критерии согласия**.

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ χ^2 И КОЛМОГорова–СМИРНОВА.

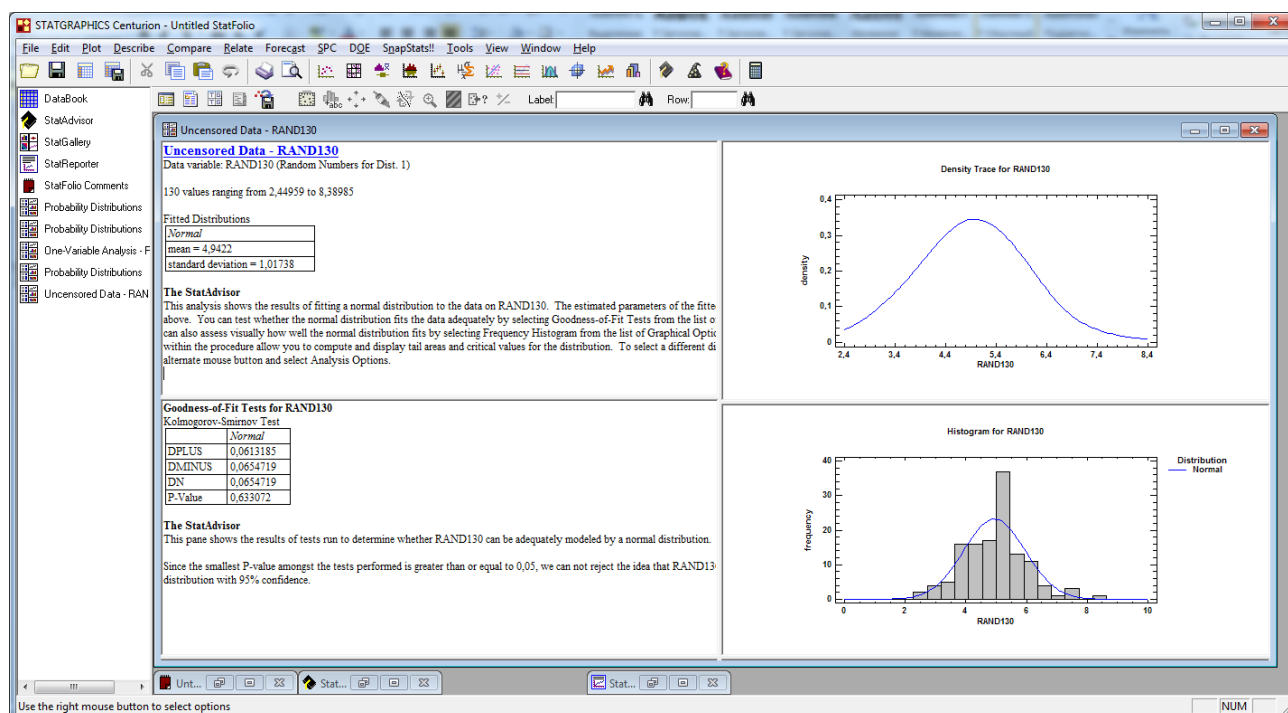
В меню выберите **Describe**, в раскрывшемся меню выберите **Distribution Fitting**, затем **Fitting Uncensored Data**. Раскроется окно, в этом окне надо выбрать название столбца, нажать на кнопку со стрелкой в поле **Data**, нажать кнопку ОК. Раскроется окно



В нем надо выбрать распределение (в нашем случае – нормальное), нажмите ОК. Затем откроется окно



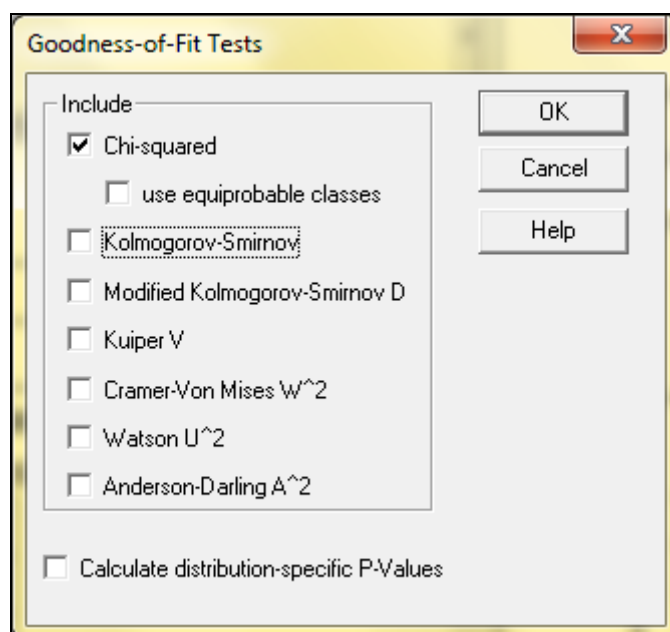
нажмите ОК.



Щелкните дважды по окну *Goodness-of-Fits for Rand 130*

Воспользуйтесь линейкой прокрутки, чтобы вывести на экран *The StatAdvisor* и прочитайте, что там написано. *The StatAdvisor* есть в окнах всех методов, привыкайте ими пользоваться, при этом желательно понимать, на основании каких величин *StatAdvisor* делает тот или иной вывод. Еще лучше, если Вы знаете условия применимости тех методов, которые используются.

Для того чтобы воспользоваться критерием χ^2 , щелкните правой кнопкой в окне *Goodness-of-Fit Tests*, выберите *Pane Options*. Раскроется окно:

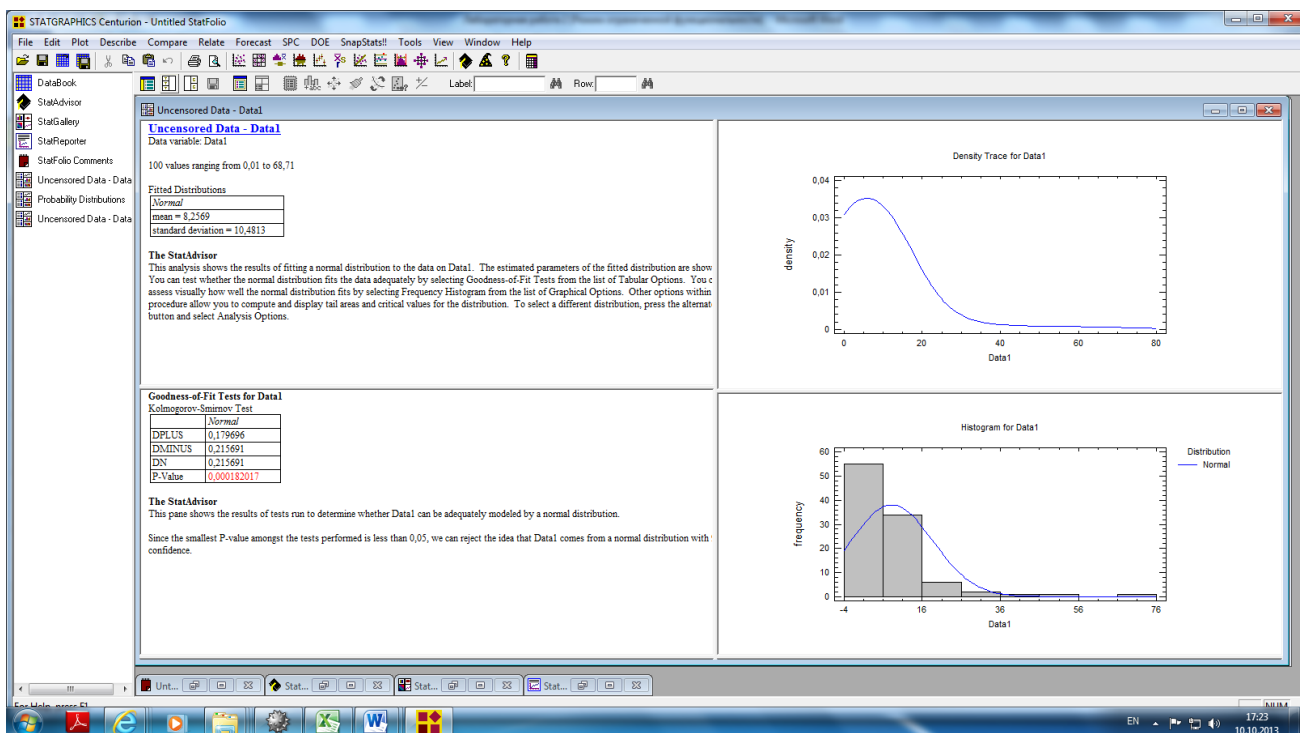


Выберите ***Chi-squared***. Прочитайте самостоятельно результат в ***The StatAdvisor***. Что можно сказать об этой выборке? Обратите внимание на то, что ***StatAdvisor*** выдает заключение независимо от условий применимости и важности того или иного критерия, поэтому *окончательное решение всегда следует принимать самому!*

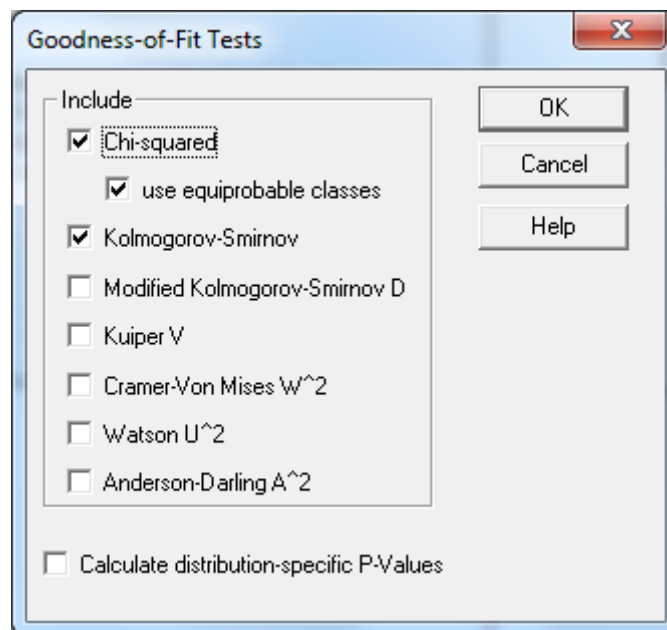
В некоторых случаях нам необходимо узнать распределение генеральной совокупности, из которой взята выборка. Рассмотрим следующую задачу:

Задача. Измерялось время обращения к некоторой базе данных. Данные находятся в файле **Очередь к БД.sf6**. определить тип распределения генеральной совокупности.

В меню выберите ***Distribution Fitting***, затем ***Fitting Uncensored Data***. Нажмите кнопку ОК (распределение будет нормальное)



в этом окне мы видим тест Колмогорова-Смирнова для проверки нормальности распределения. Видно, что $p\text{-value}=0,00018<0,05$; следовательно, мы отвергаем гипотезу о нормальности распределения. Воспользуемся теперь критерием χ^2 , для этого щелкните в окне ***Goodness-of-Fit Tests*** правой кнопкой, выберите ***Pane Options***, раскроется окно



Выберите в нем еще и распределение *Chi-squared*.

Goodness-of-Fit Tests for Data1

Chi-Squared Test

	<i>Lower</i>	<i>Upper</i>	<i>Observed</i>	<i>Expected</i>	
	<i>Limit</i>	<i>Limit</i>	<i>Frequency</i>	<i>Frequency</i>	<i>Chi-Squared</i>
at or below		-9,89315	0	4,17	4,17
	-9,89315	-6,23864	0	4,17	4,17
	-6,23864	-3,80023	0	4,17	4,17
	-3,80023	-1,88292	0	4,17	4,17
	-1,88292	-0,256184	0	4,17	4,17
	-0,256184	1,18738	18	4,17	45,93
	1,18738	2,50768	10	4,17	8,17
	2,50768	3,74232	10	4,17	8,17
	3,74232	4,91714	8	4,17	3,53
	4,91714	6,05133	9	4,17	5,61
	6,05133	7,16019	3	4,17	0,33
	7,16019	8,2569	7	4,17	1,93
	8,2569	9,35361	5	4,17	0,17
	9,35361	10,4625	6	4,17	0,81
	10,4625	11,5967	2	4,17	1,13
	11,5967	12,7715	4	4,17	0,01
	12,7715	14,0061	5	4,17	0,17
	14,0061	15,3264	2	4,17	1,13
	15,3264	16,77	1	4,17	2,41
	16,77	18,3967	2	4,17	1,13
	18,3967	20,314	1	4,17	2,41
	20,314	22,7524	1	4,17	2,41
	22,7524	26,4069	1	4,17	2,41
above	26,4069		5	4,17	0,17

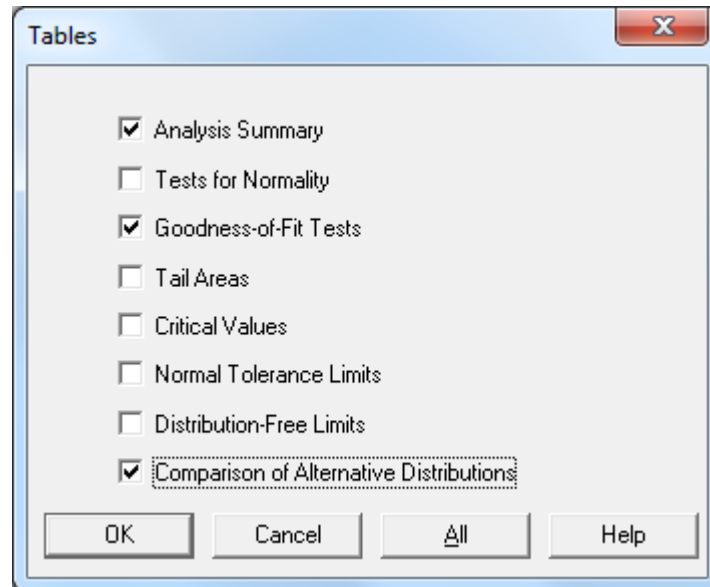
Chi-Squared = 108,8 with 21 d.f. P-Value = 7,76046E-14

Kolmogorov-Smirnov Test

	<i>Normal</i>
DPLUS	0,179696
DMINUS	0,215691
DN	0,215691
P-Value	0,000182017

Результат P-Value = 7,76046E-14 < 0,05 говорит о том, что критерий χ^2 также отвергает нормальность распределения. Попробуем подобрать распределение.

Нажмите кнопку  **Tables and graphs**, выберите

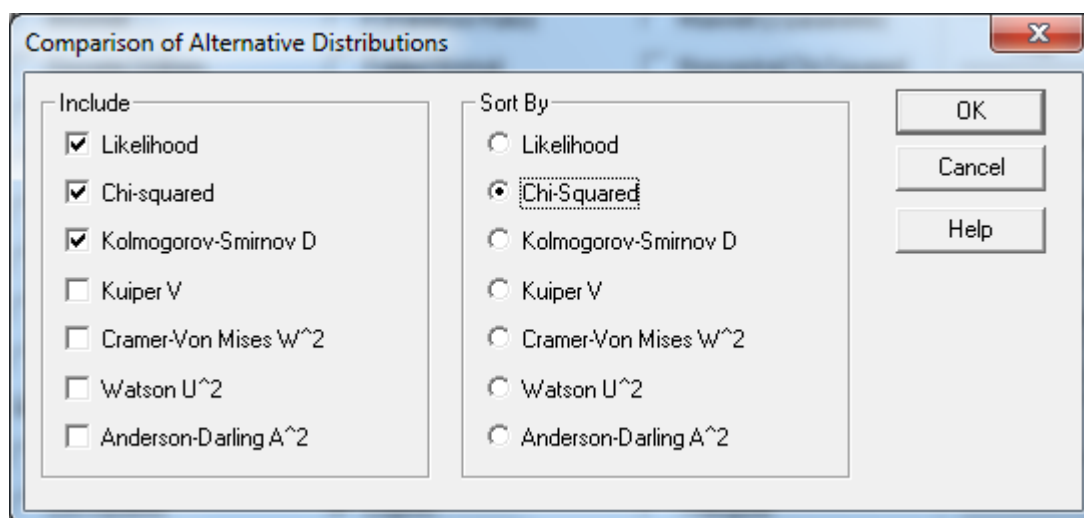


Comparison of Alternative Distributions, раскроется окно с результатами

Comparison of Alternative Distributions

Distribution	Est. Parameters	Log Likelihood	KS D
Weibull	2	-308,671	0,0662112
Gamma	2	-308,793	0,0673059
Exponential	1	-311,105	0,0670094
Loglogistic	2	-315,851	0,0811315
Lognormal	2	-320,735	0,130128
Largest Extreme Value	2	-335,432	0,113865
Birnbaum-Saunders	2	-339,5	0,346297
Laplace	2	-348,682	0,209302
Logistic	2	-354,195	0,18223
Normal	2	-376,353	0,215691
Inverse Gaussian	2	-381,916	0,456014
Uniform	2	-422,975	0,674323
Pareto	1	-1,E9	0,26126
Smallest Extreme Value	<no fit>		

Здесь выводятся на экран результаты метода максимального правдоподобия (*Log Likelihood*) и максимальное отклонение из метода Колмогорова-Смирнова (*KS D*). Результаты упорядочены по результатам метода максимального правдоподобия. Можно вывести столбец со значениями P-Value для критерия χ^2 и упорядочить по этим результатам. Для этого щелкните правой кнопкой, выберите **Pane Options**




в окне в левой части окна Include выберите **Chi-squared**, а в части Sort By тоже **Chi-squared**. Появится окно с результатами

Comparison of Alternative Distributions

Distribution	Est. Parameters	Log Likelihood	Chi-Squared P	KS D
Weibull	2	-308,671	0,703807	0,0662112
Gamma	2	-308,793	0,491066	0,0673059
Exponential	1	-311,105	0,306734	0,0670094
Loglogistic	2	-315,851	0,147973	0,0811315
Lognormal	2	-320,735	0,0341014	0,130128
Largest Extreme Value	2	-335,432	0,000289407	0,113865
Birnbaum-Saunders	2	-339,5	3,61789E-7	0,346297
Logistic	2	-354,195	3,03123E-7	0,18223
Laplace	2	-348,682	4,08922E-11	0,209302
Normal	2	-376,353	7,76046E-14	0,215691
Pareto	1	-1,E9	2,22045E-16	0,26126
Uniform	2	-422,975	0,0	0,674323
Inverse Gaussian	2	-381,916	0,0	0,456014
Smallest Extreme Value	<no fit>			

Как видите, пакет предлагает распределение Вейбулла (Weibull), впрочем, для распределений с одним параметром предлагается показательное распределение (Exponential).

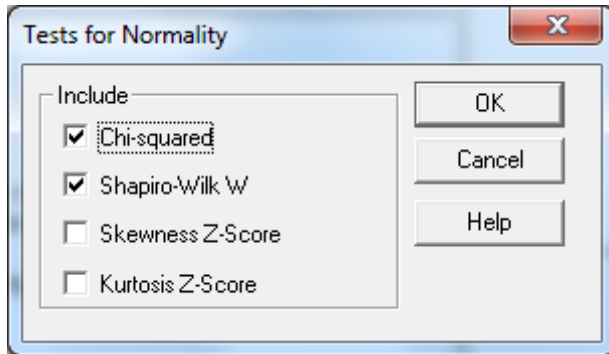
ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ ВЫБОРКИ

Часто бывает необходимо проверить выборку на нормальность. В меню выберите **Describe**, в раскрывшемся меню выберите **Distribution Fitting**, затем **Fitting Uncensored Data**. Выберите данные **Rand 130**. Нажмите кнопку  **Tables and graphs**, выберите **Tests for Normality**, посмотрите результат

Tests for Normality for RAND130

Test	Statistic	P-Value
Shapiro-Wilk W	0,983227	0,64365

Тест Шапиро говорит о том, что нельзя отвергнуть нулевую гипотезу о нормальности распределения. Можно посмотреть результаты критерия χ^2 . Для этого щелкните правой кнопкой в окне теста, выберите *Pane Options*, в раскрывшемся окне



Выберите *Chi-squared*. Посмотрите окно с результатами

Tests for Normality for RAND130

Test	Statistic	P-Value
Chi-Squared	23,2769	0,503504
Shapiro-Wilk W	0,983227	0,64365

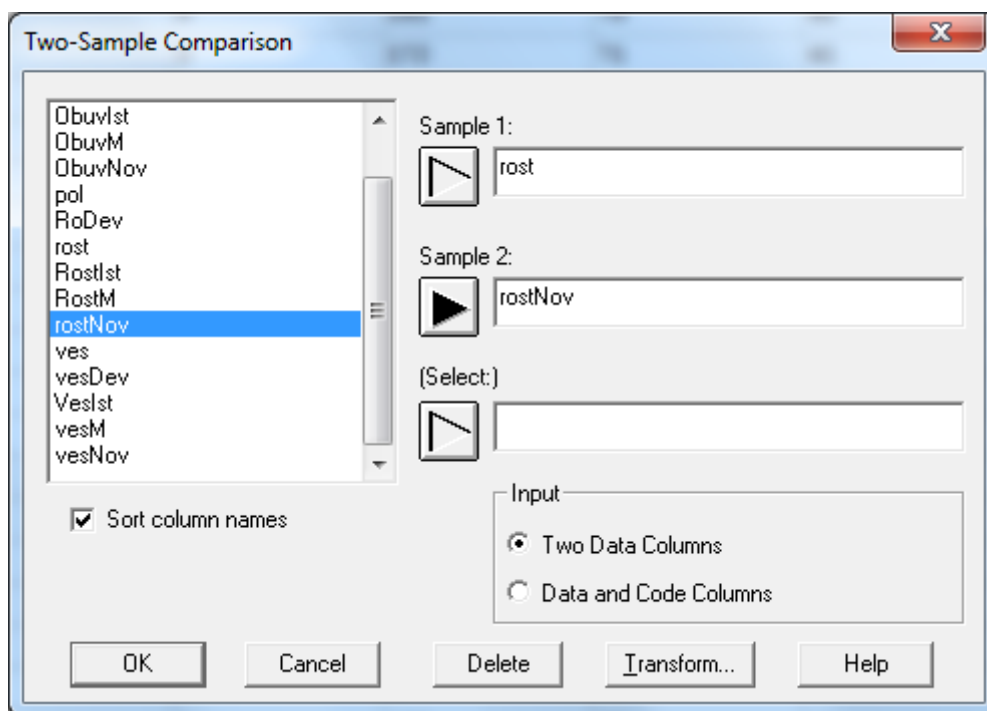
P-Value критерия χ^2 , большее 0,05, также не отвергает гипотезу о нормальности выборки.

ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК

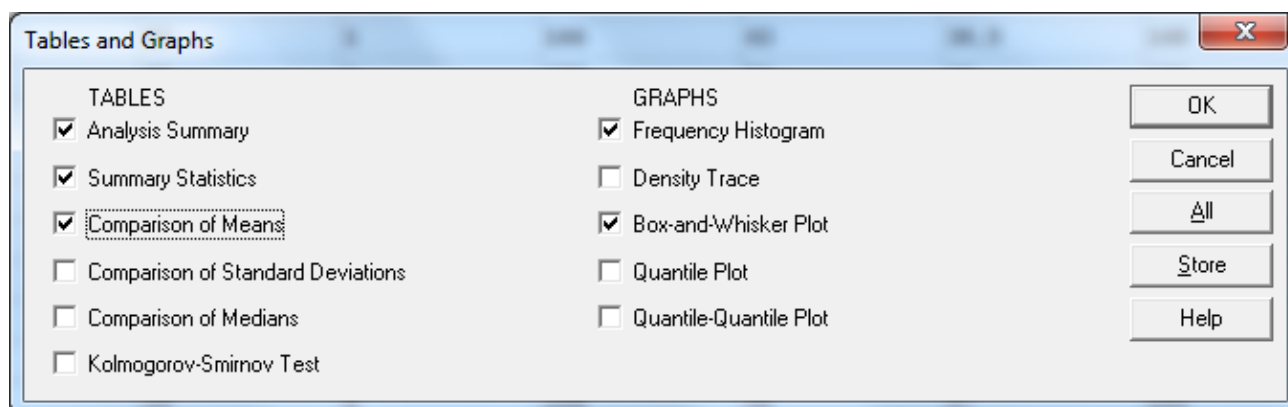
Задача 1. Проведен опрос студентов 4 курса математико–механического факультета г. Екатеринбурга и г. Новоуральска (40 студентов и 20 соответственно). Результаты приведены в *Rost_Razmer.sf*. Можно ли утверждать, что студенты из Екатеринбурга выше, чем студенты из Новоуральска?

Самостоятельно проверьте нормальность распределения. Если распределение нормальное, то мы можем воспользоваться критерием Стьюдента (*t*-тест) для проверки равенства средних.

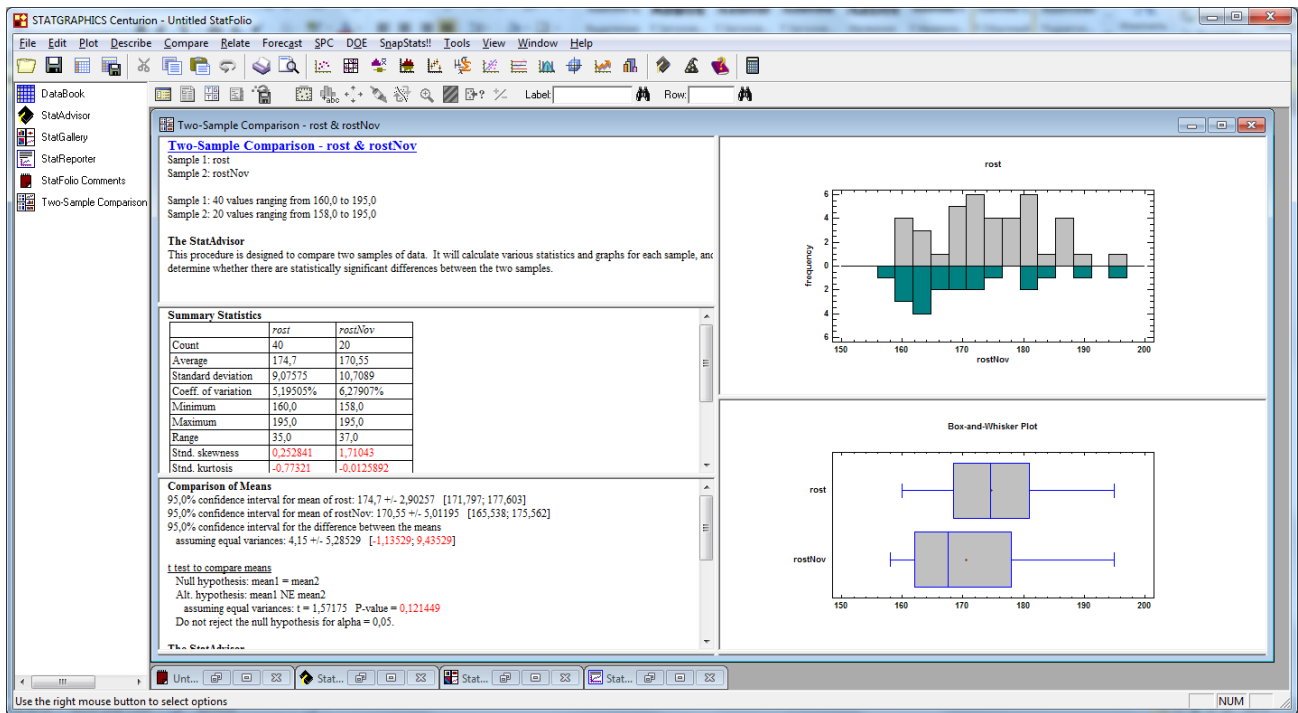
В этой задаче наблюдения непарные (почему?), в строке меню выберите *Compare*, в раскрывшемся меню выберите *Two Samples*, затем *Independent Samples*.



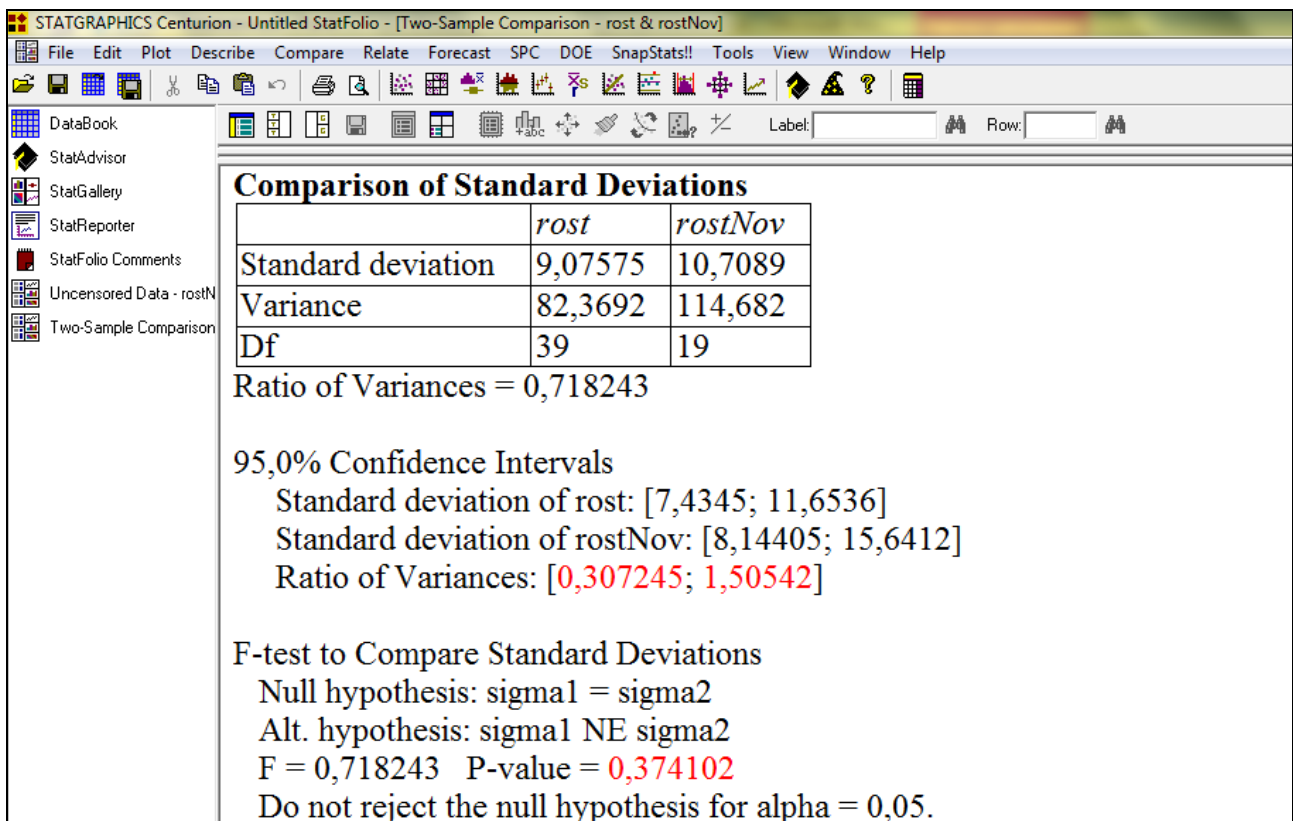
В поле *Sample1* поставьте **rost**, в поле *Sample2* — **rostNov**. Нажмите кнопку OK. Раскроется окно, в котором надо выбрать **Comparison of Means**. Нажмите OK



Раскроется поле первичного анализа.



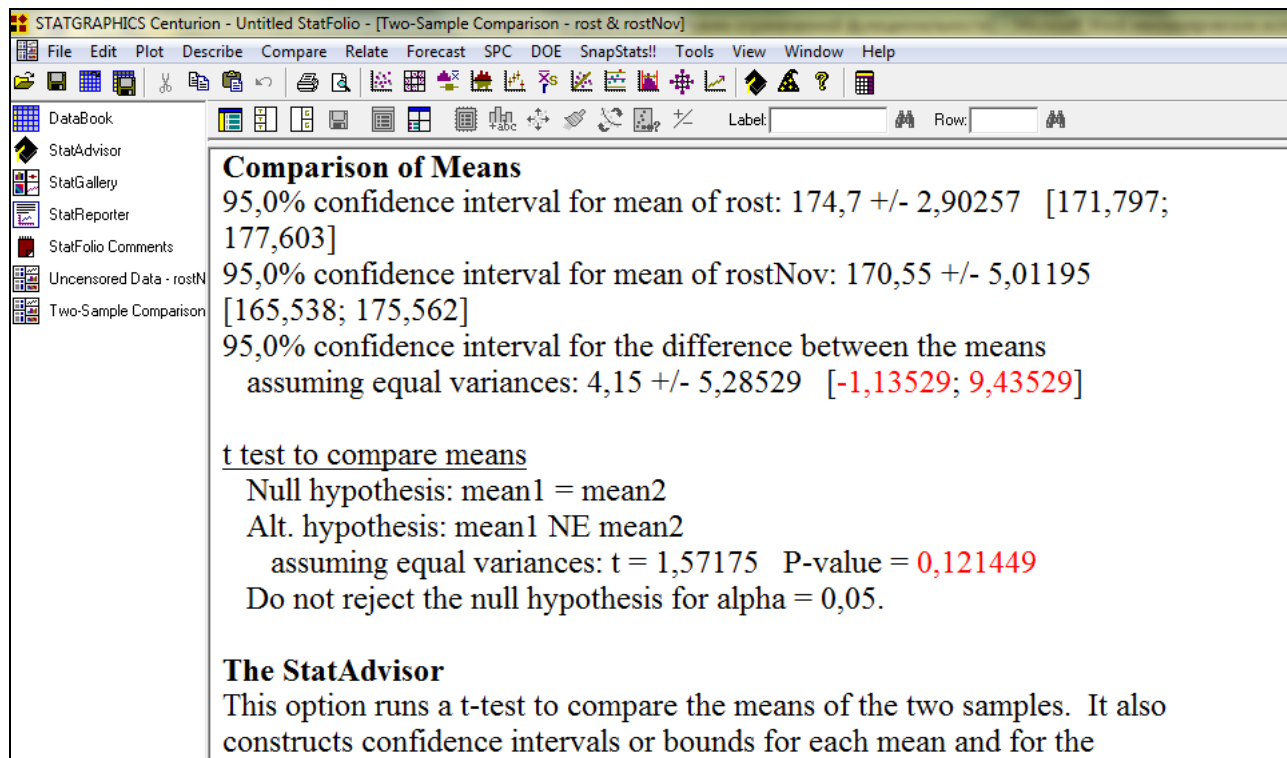
Проверим сначала гипотезу о равенстве дисперсий (эту проверку можно опустить, если объемы выборок достаточно велики и не сильно отличаются друг от друга). Щелкните по кнопке **Tables and Graphs**, в раскрывшемся окне выберите **Comparison of Standard Deviations**. Раскроется следующее окно



Значения $p\text{-value} = 0,374102$, большие 0,05, говорят о том, что нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Следовательно, можно считать, что дисперсии

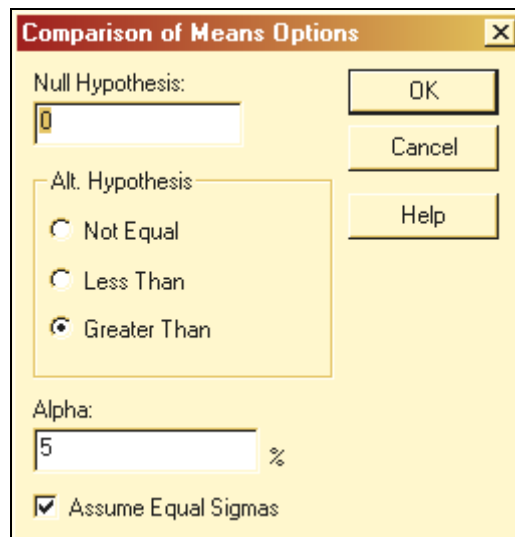
выборок равны и можно воспользоваться критерием Стьюдента (t -тестом) для проверки равенства средних.

Щелкните по кнопке **Tables and graphs**, в раскрывшемся окне выберите **Comparison of Means**. Раскроется следующее окно



По умолчанию нулевая гипотеза состоит в том, что генеральные средние равны, альтернативная – двусторонняя (средние не равны). P-value = 0,121449 > 0,05 говорит о том, что нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

В качестве альтернативной гипотезы разумно рассмотреть $\text{mean1} > \text{mean2}$, т.е. рост студентов в г.Екатеринбурге выше, чем в г. Новоуральске (это следует из того, что выборочная средняя для г. Екатеринбурга больше, чем выборочная средняя для г. Новоуральска, вопрос в том, насколько эта разница статистически значима). Щелкните правой кнопкой в окне **Comparison of Means**, выберите **Pane Options**, раскроется окно:



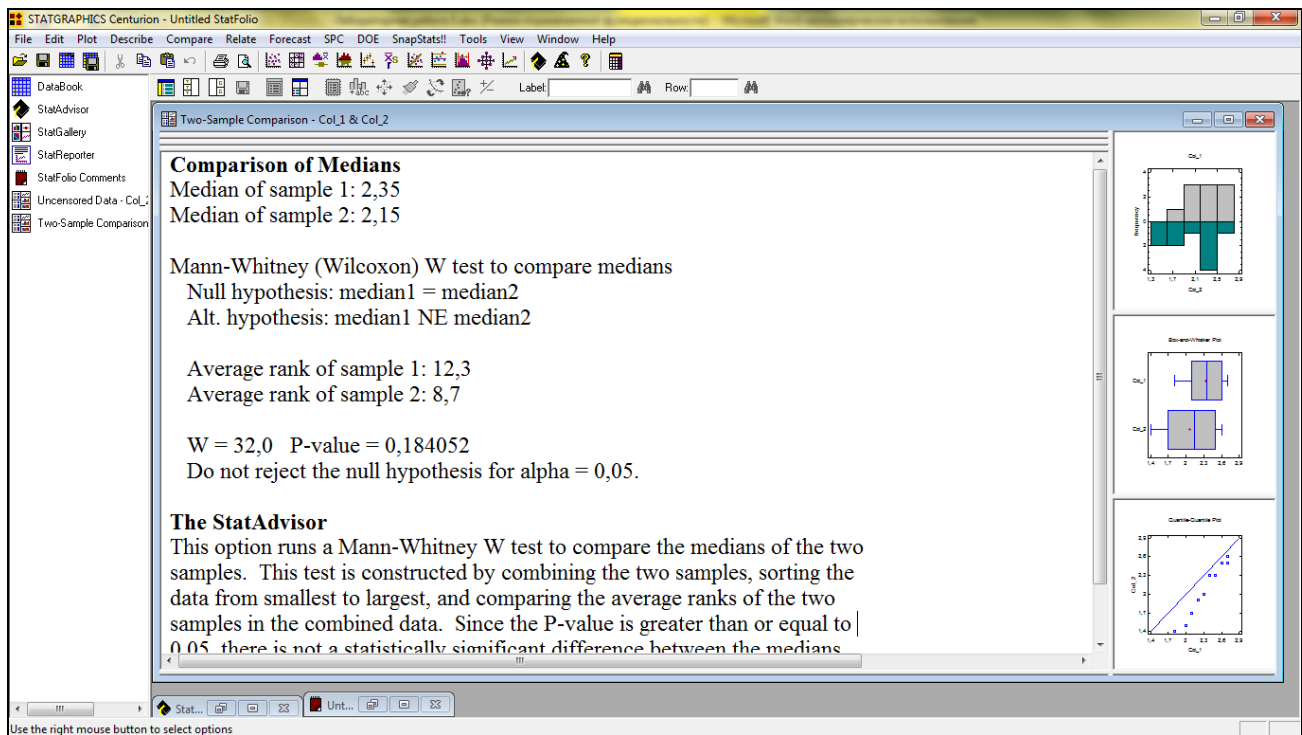
Видим, что $p\text{-value}$ и в этом случае больше 0,05, что говорит о статистически незначимой разнице результатов.

Задача 2. Препарат из группы антагонистов кальция – нифедипин – обладает способностью расширять сосуды, и его применяют при лечении ишемической болезни сердца. Ш. Хейл и соавторы измерили диаметр коронарных артерий после приема нифедипина и плацебо и получили следующие две выборки данных диаметра коронарной артерии (в миллиметрах)

плацебо	2,5	2,2	2,6	2,0	2,1	1,8	2,4	2,3	2,7	2,7	1,9
нифедипин	2,5	1,7	1,5	2,5	1,4	1,9	2,3	2,0	2,6	2,3	2,2

Позволяют ли приведенные данные считать, что нифедипин влияет на диаметр коронарных артерий?

В этой задаче выборки имеют слишком маленький объем для того чтобы говорить о проверке нормальности. Если у нас есть сомнения в нормальности рассматриваемых величин, особенно если мы работаем с малыми выборками, можно воспользоваться одним из непараметрических критериев — критерием Уилкоксона (Манна-Уитни). В строке меню выберите **Compare**, в раскрывшемся меню выберите **Two Samples**, затем **Independent Samples**. Щелкните по кнопке **Tables**, в раскрывшемся окне выберите **Comparison of Medians**. Перед вами раскроется окно:



Нулевая гипотеза состоит в том, что медианы равны, альтернативная — не равны. $P\text{-value}=0,184052 > 0,05$ говорит о том, что нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, следовательно, по данным этой выборки нельзя сказать, что нифепедин влияет на диаметр артерий.

Проверим однородность с помощью критерия Колмогорова-Смирнова. Нажмите кнопку **Tables and graphs**, выберите в окне **Kolmogorov-Smirnov Test**, раскроется окно

Kolmogorov-Smirnov Test

Estimated overall statistic DN = 0,272727
Two-sided large sample K-S statistic = 0,639602
Approximate P value = 0,807924

значение P value = 0,807924 говорит о том, что нет оснований отвергать гипотезу о равенстве распределений, следовательно, выборки однородные.

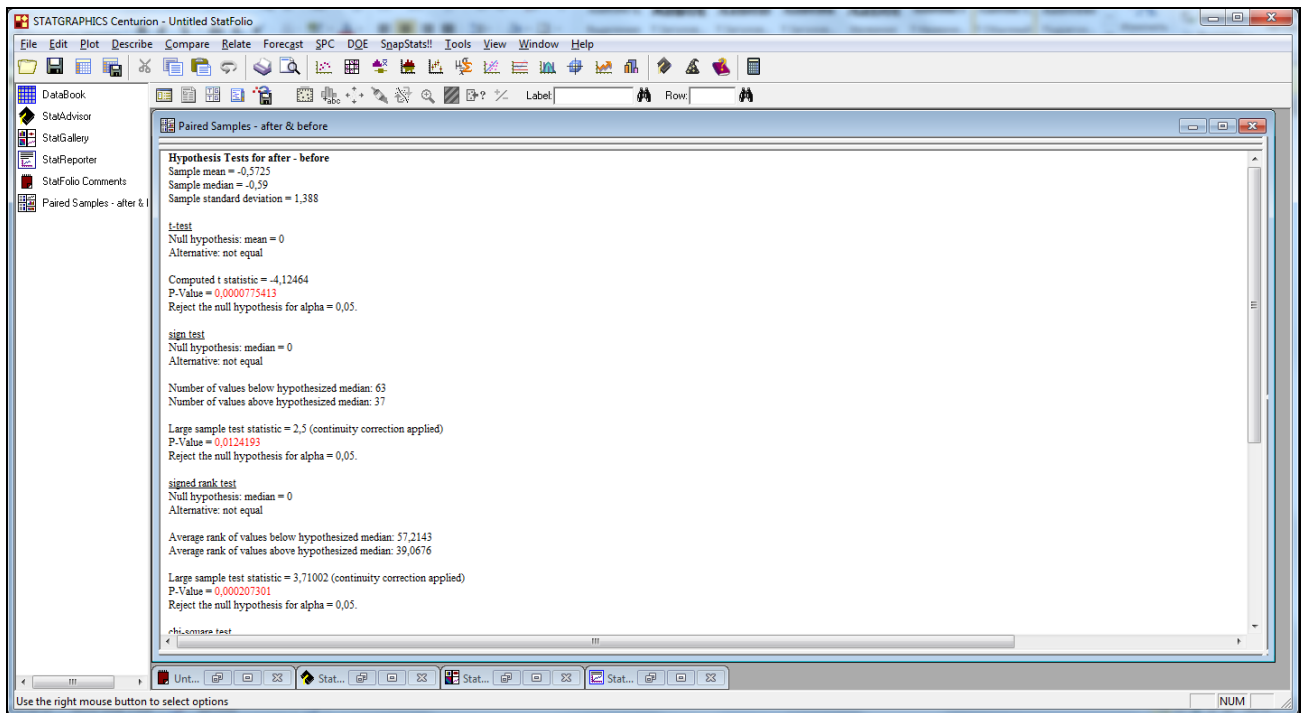
Задача 3. В университете лыжные соревнования проводились дважды: в начале и в конце сезона. Результаты приведены в файле *skier.sf*. Считая, что в соревнованиях участвовали одни и те же люди, можно ли утверждать, что результаты существенно улучшились?

Прежде всего, проверьте самостоятельно нормальность выборок.

Так как в испытаниях участвовали одни и те же люди, мы должны применять для исследования парные критерии.

В строке меню выберите **Compare**, в раскрывшемся меню выберите **Two Samples**, затем **Paired Samples**, раскроется окно, в котором в левой части надо выбрать сначала название одного столбца, нажать на кнопку со стрелкой в поле **Sample1**, затем название второго столбца и нажать на кнопку со стрелкой в поле **Sample2**. Нажмите на кнопку ОК.

Раскроется окно, в нем щелкните по кнопке **Tables and graphs**, выберите **Hypothesis Tests**. Перед вами следующее окно:



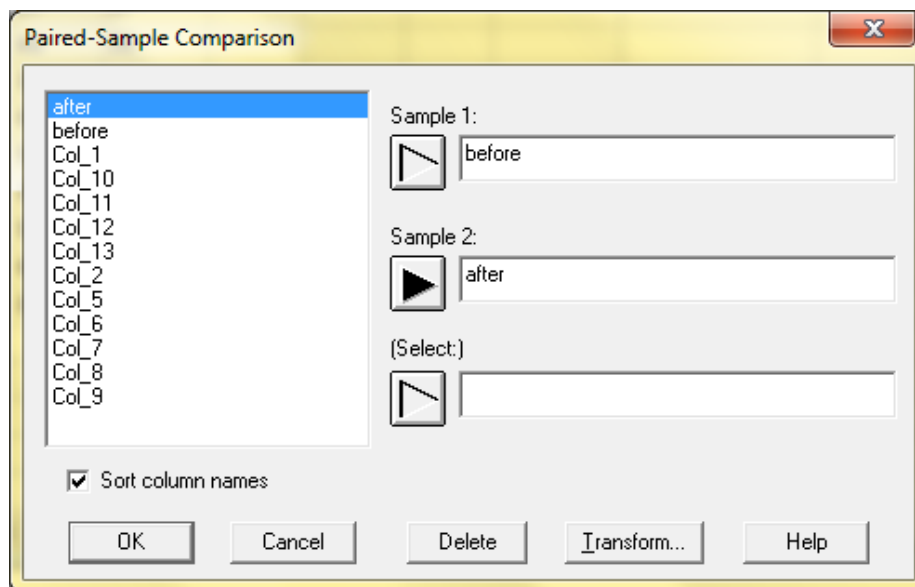
Здесь несколько критериев: **критерий Стьюдента** (t -тест), **Sign test** — критерий знаков, **Signed rank test** — критерий знаковых ранговых сумм. Если выборки получены из нормальной генеральной совокупности (это надо проверить), воспользуемся t -тестом. Видно, что выборочная средняя разности выборок больше нуля, поэтому в качестве альтернативной гипотезы естественно выбрать **Greater Than**. Значение p -value, меньшее 0,05, говорит о статистически значимой разнице средних выборок.

Задача 4. Данные об агрегации тромбоцитов до и после выкуривания сигареты приведены в таблице.

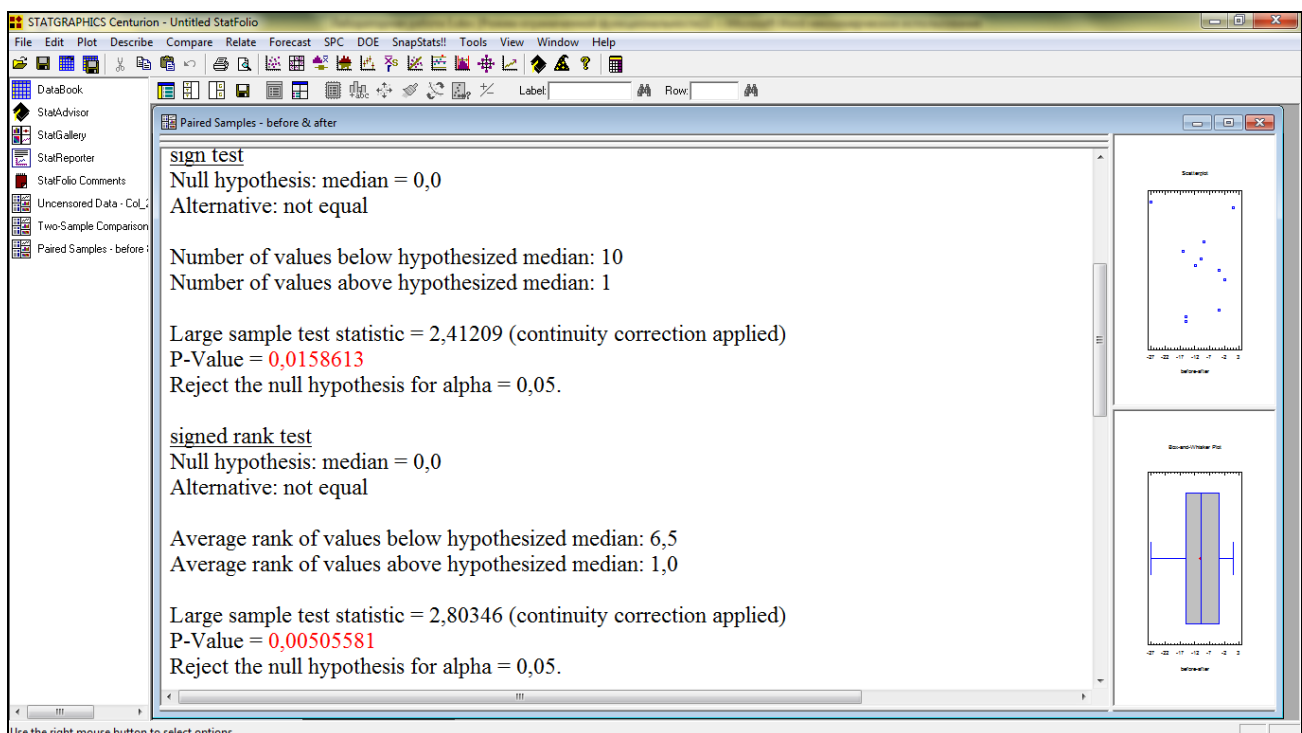
До	25	25	27	44	30	67	53	53	52	60	28
После	27	29	37	56	46	82	57	80	61	59	43

Как влияет курение на функцию тромбоцитов?

Наблюдения парные. Данных немного для того чтобы можно было говорить о проверке нормальности, поэтому будем пользоваться медианными критериями (критерием знаков и критерием знаковых ранговых сумм). В строке меню выберите *Compare*, в раскрывшемся меню выберите *Two Samples*, затем *Paired Samples*,



Раскроется окно анализа.

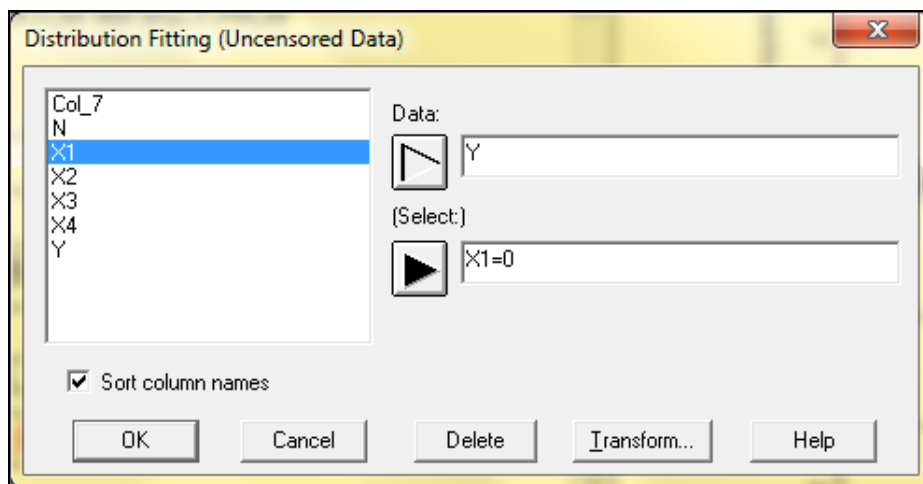


При нулевой гипотезе медианы равны и альтернативной двусторонней гипотезе оба теста (и знаковый, и знаковый ранговый) отвергают нулевую гипотезу. Следовательно, курение влияет на функцию тромбоцитов.

Задача 5. В файле *Dohod_Pol.sf* приведены данные о годовой зарплате сотрудников администрации в зависимости от пола, возраста, стажа и квалификации. Есть ли существенное различие в средней зарплате мужчин и женщин?

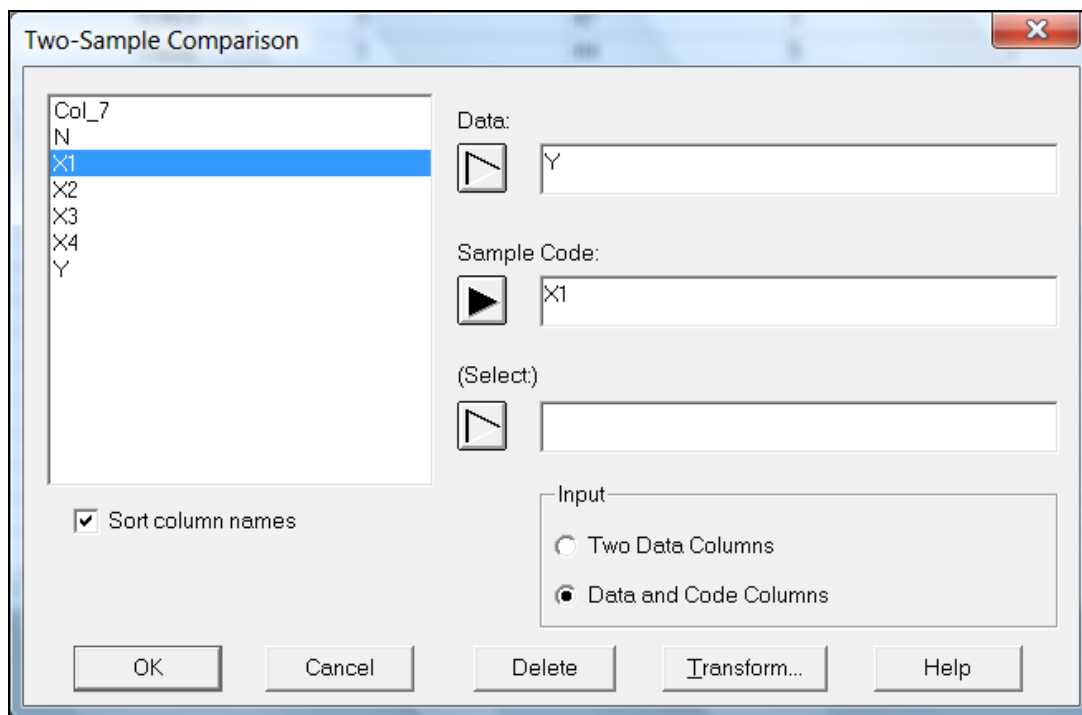
Рассмотрите данные, которые есть в файле. В поле *X1* введена так называемая фиктивная переменная, которая принимает значение 0, если пол женский, и 1, если пол мужской.

Прежде всего, проверим нормальность для мужчин и женщин. В строке меню выберите ***Describe, Distribution Fitting, Fitting Uncensored Data***, в раскрывшемся диалоговом окне выберите данные для женщин

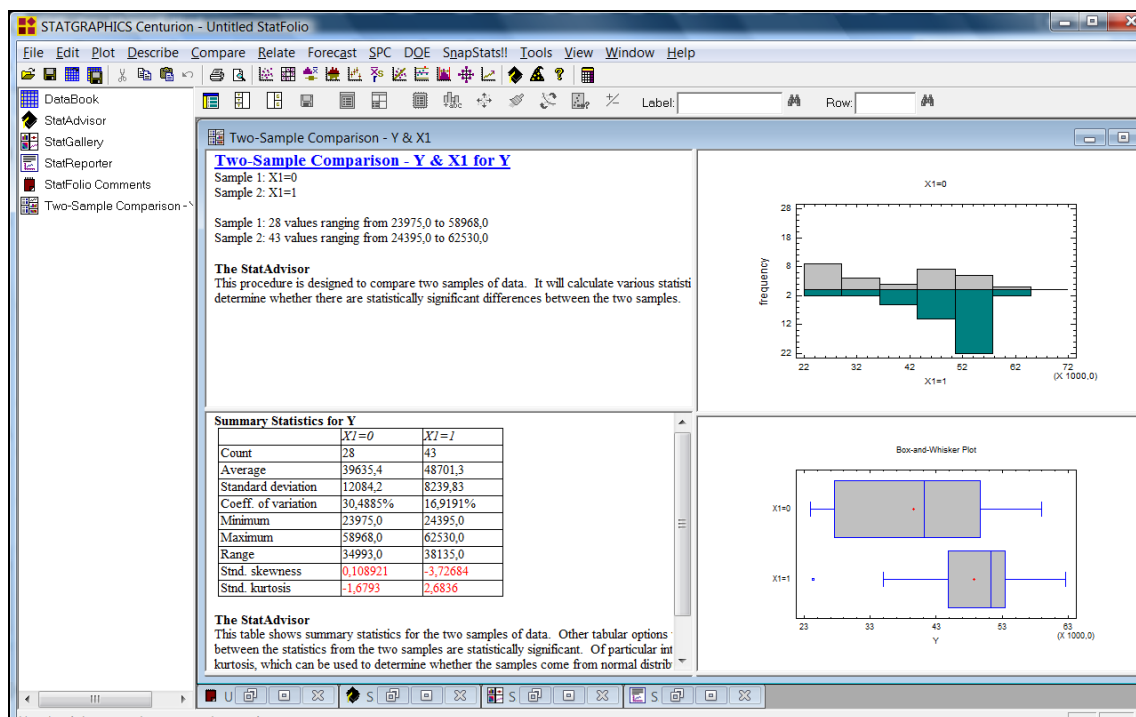


Проверьте самостоятельно, есть ли нормальность. Аналогично проверьте для мужчин.

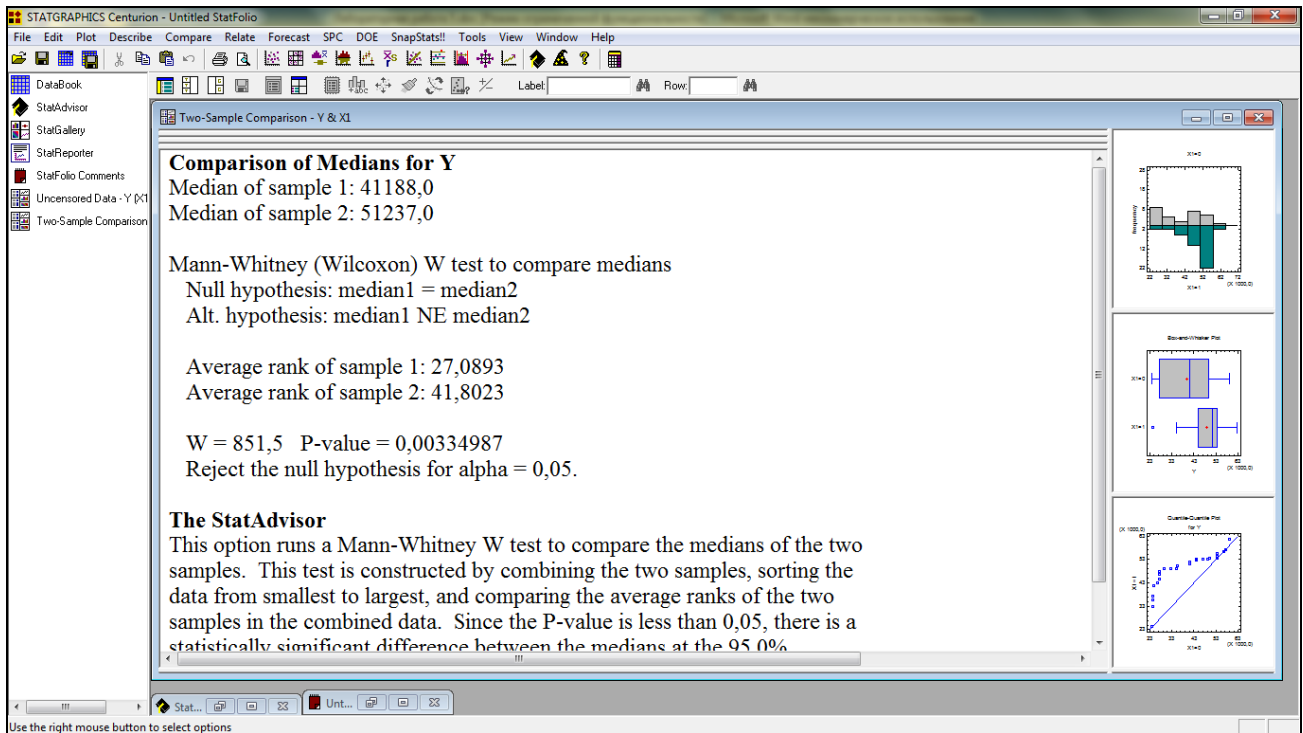
В строке меню выберите ***Compare, Two Samples, Independent Samples***. В раскрывшемся окне выберите *Y* в поле *Data*, в нижней части окна выберите ***Data and Code Columns, X1*** в поле *Sample Code*.



Нажмите кнопку ОК. Раскроется окно:



В этом окне можно посмотреть характеристики каждой выборки (для мужчин и для женщин), также можно посмотреть на гистограммы выборок. Так как нормальности нет, выбираем медианный критерий. Нажмите кнопку **Tables**, выберите **Comparison of Medians**.



В раскрывшемся окне можно увидеть, что при двусторонней альтернативной гипотезе $p\text{-value} = 0,00334987 < 0,05$, следовательно, выборки неоднородны.

СРАВНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ВЫБОРОК С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЯ χ^2

Задача. Для выявления различий результатов применения трех методик преподавания одного и того же предмета произведены выборочные проверки знаний учащихся, обучавшихся по этим методикам. Получены следующие результаты (в таблице приведено количество учеников, получивших ту или иную оценку, т.е. частоты):

Методика	Оценка			
	отлично	хорошо	удовлетвори- тельно	неудовлетвори- тельно
1	7	12	15	7
2	10	18	26	9
3	40	50	87	10

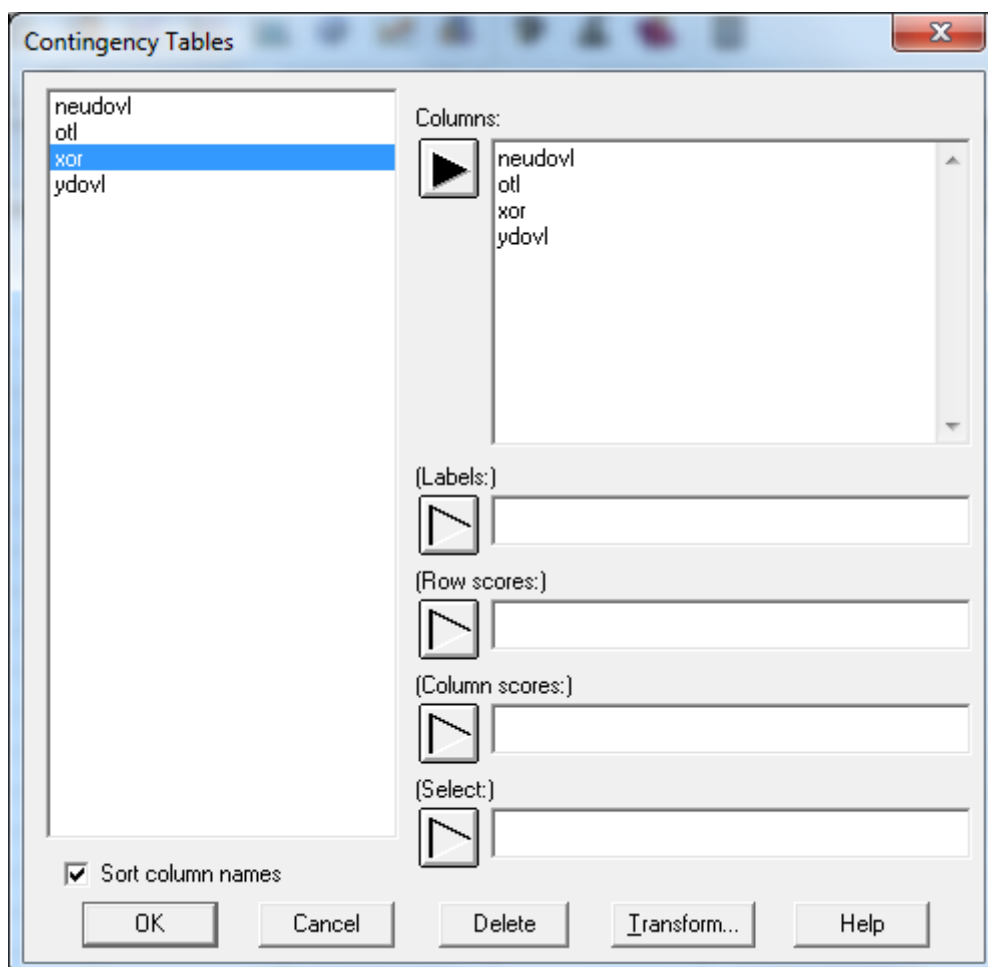
Можно ли говорить о существенном различии в знаниях учащихся, обучавшихся по трем разным методикам? Уровень значимости принять равным 0,05.

Такая таблица частот называется **таблицей сопряженности**.

Введите таблицу следующим образом:

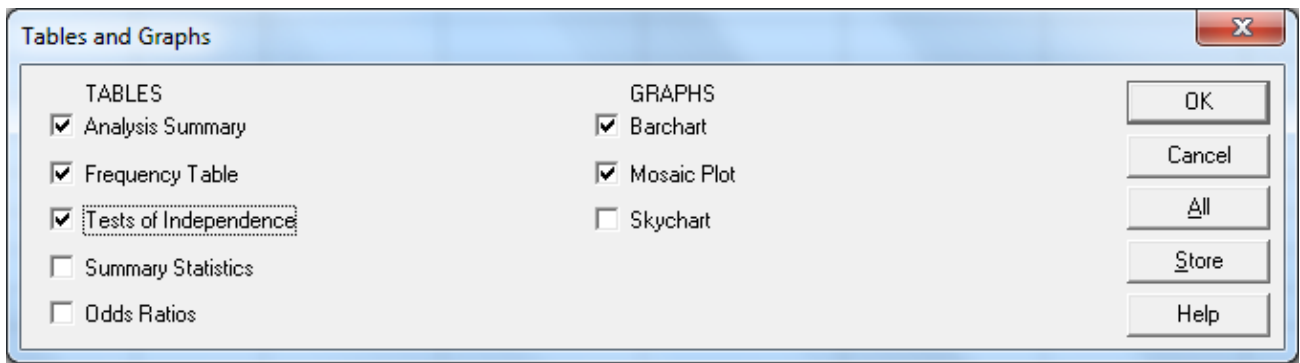
	otl	xor	udovl	neudovl	Col
1	7	12	15	7	
2	10	18	26	9	
3	40	50	87	10	
4					
5					

В строке меню выберите **Describe**, в раскрывшемся меню выберите **Categorical Data**, затем **Contingency Table**. Раскроется окно:

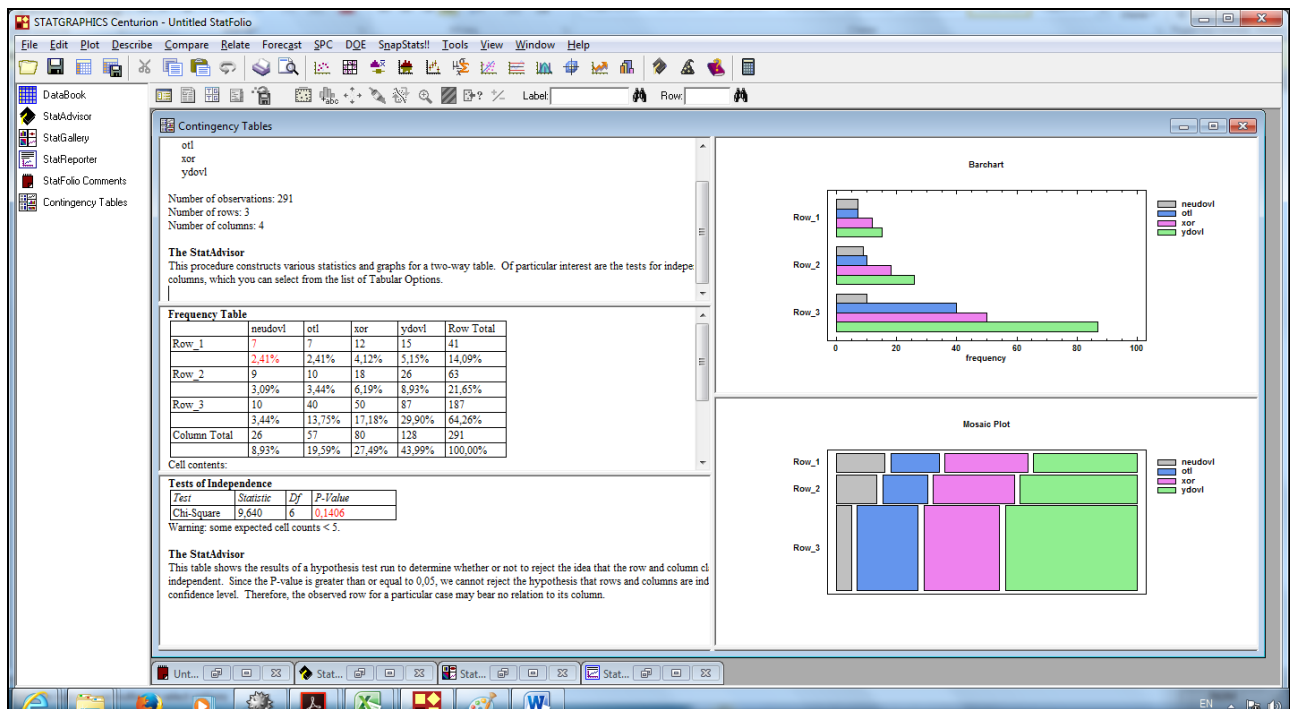


В этом окне нужно последовательно выбирать все названия столбцов и нажимать на кнопку со стрелкой в поле **Columns**. Названия столбцов будут переходить в поле в центре окна. Затем нажмите на ОК.

После этого раскроется следующее окно:



В этом окне выберите **Tests of Independence**, нажмите ОК. Раскроется окно



Так как $p\text{-value}$ в окне **Tests of Independence** больше или равно 0,1, мы не можем отклонить гипотезу о независимости данных столбцов (т. е. оценок) от использованной методики.

Эту же задачу можно интерпретировать как задачу о проверке однородности трех выборок, полученных при использовании различных методик обучения. С помощью того же критерия мы получим, что все выборки однородны, т. е. различные методики не дают существенного различия в оценках.

ЗАДАНИЯ

1. Предложена диета для похудения. В результате двухнедельного применения этой диеты масса тела пациентов изменилась следующим образом:

Масса (кг)	Пациент
------------	---------

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
До диеты	68	80	92	81	70	79	78	68	57	76
После диеты	60	84	87	79	74	71	72	67	57	60

Можно ли утверждать, что диета уменьшает массу тел пациентов?

(Мы уже решали эту задачу в предыдущей работе, здесь следует использовать непараметрические критерии).

2. Опрошено по 13 семей в городах Москва и Екатеринбург, каковы их ежемесячные расходы на транспорт. Получены следующие результаты (в процентах от семейного бюджета, верхняя строка — для Москвы, нижняя — для Екатеринбурга). Можно ли говорить о существенном различии доли транспортных расходов в семейном бюджете москвичей и екатеринбуржцев? Достаточно ли однородны эти выборки, чтобы их объединение (например, с целью получения выборки большего объема и оценивания по объединенной выборке среднего процента транспортных расходов) было оправдано?

12,1	6,2	6,0	8,4	4,2	6,8	6,9	20,0	13,5	7,2	8,5	10,7	7,9
5,3	5,7	4,2	4,6	10,8	5,0	5,2	12,7	6,3	3,2	5,0	4,8	5,7

3. В опросе членов городской организации одной из политических партий среди прочего выяснялось их занятие и определялось, выполняет ли респондент какую-либо партийную функцию. Выдержка из ответов респондентов—мужчин содержится в таблице.

	Наемный работник	Государственный служащий	Предприниматель
Да	13	16	7
Нет	9	2	17

Можно ли говорить о наличии связи между партийностью и родом деятельности?

4. Можно ли сказать, что по данным файла Rost_Razmer.sf девочки и мальчики не отличаются в росте статистически значимо?

ВОПРОСЫ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Что такое критерии согласия?
2. Какая гипотеза проверяется с помощью критерия согласия χ^2 ? Как следует группировать данные для применения этого критерия?
3. Какие критерии проверки однородности вы знаете для независимых (непарных) наблюдений?
4. Какие критерии проверки однородности вы знаете для парных наблюдений?
5. В чем «идея» критерия знаков?
6. В чем «идея» критерия знаковых ранговых сумм?
7. В чем разница между парными и независимыми наблюдениями?
8. Параметрические или непараметрические гипотезы проверяются с помощью критерия Пирсона? Обоснуйте ответ.
9. Что вы будете делать, если при проверке гипотез о математическом ожидании у вас нет нормальности распределений?