

Тестовые задания

Задача 1. Изучить алгоритм динамического программирования для вычисления наибольшей общей подпоследовательности.

Доказательство. Пусть даны строки $string1$ и $string2$, длиной $n1$ и $n2$ соответственно. Будем считать динамическую функцию $f(n1, n2)$, где $n1, n2$ - длины соответствующих строк. Формула для вычисления функции такова: если $n1 = 0$ или $n2 = 0$, то $f(n1, n2) = 0$. Если $string1[n1] = string2[n2]$, то $f(n1, n2) = f(n1-1, n2-1) + 1$. Иначе $f(n1, n2) = \max(f(n1-1, n2), f(n1, n2-1))$. Тогда значение $f(n1, n2)$ будет ответом задачи. \square

Задача 2.1. Приведите пример критической строки для строки "XY".

Доказательство. Строка "YX" является критической для "XY". Т.к. $|LCS(YX, XY)| = 1$, $|LCS(X, XY)| = 1$, $|LCS(Y, XY)| = 1$, $|LCS("", XY)| = 0$. \square

Задача 2.2. Пусть a, b - произвольные строки. Могут ли строки a и b быть взаимно критическими друг для друга?

Доказательство. Да. Например, строки "XY" и "YX" являются взаимно критическими друг для друга. Вообще все пары строк вида "XmY" и "YnN" где X, Y - произвольные символы, а m, n строки, не содержащие X и Y являются взаимно критическими друг к другу. \square

Задача 2.3. Пусть x, y - произвольные символы. Могут ли строки xa и xb быть взаимно критическими друг для друга?

Доказательство. Нет. Пусть строки оказались критическими друг для друга. Тогда в подстроке a должен содержаться символ y , причем после него никаких символов, которые попали в LCS быть не должно (это нужно чтобы выполнялось условие на $|LCS(xa, xby)|$). По таким же рассуждениям в начале строки a должен быть символ x . Тогда, не умаляя общности, первая строка выглядит как $xxa'yu$. По тем же соображениям вторая строка выглядит как $xxb'yu$. Но в таком случае условие критичности для строк не выполняется, ведь $|LCS(xa'y, xxb'yu)| + 2 = |LCS(xxa'yu, xxb'yu)|$. \square

Задача 2.4. Определение критической строки не работает в случае, если $|s| = 1$. Как разумно доопределить этот случай?

Доказательство. Пусть даны две строки a и b . И $|LCS(a, b)| = n$. Тогда s критическая для b если $|LCS(sa, b)| = |LCS(as, b)| = |LCS(sas, b)| = n + 1$. \square

Задача 3. Решение находится в файле `task3.py`

Задача 4. Пусть a, b - двоичные строки, $|a| = |b| = n$. Известно, что если символы в строках a, b выбираются независимо и равновероятно из множества $0, 1$, то при большом n матожидание величины $|LCS(a, b)|$ стремится к cn , где c - фиксированная константа. Точное значение c неизвестно. Написать программу на любом языке программирования, вычисляющую как можно более точное приближение для c .

Доказательство. Пусть даны строки длины n . Тогда посчитаем вероятность того что $|LCS(a, b)| = k$ для всех k от 0 до n . Я полагаю, что вероятность эта равна $\frac{2^k}{2^{2n}}$. Тогда $E(n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^{2n-i}}$. В таком случае, устремив n к бесконечности и поделив результат на n получим приближение к константе. Однако я не смог сделать эту формулу удобно вычисляемой и не уверен в оценке количества строк для значения LCS , так что оставил тут лишь свои предположения по ходу решения задачи. \square