БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАВДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №2

"Уравнения первого порядка в нормальной
дифференциальной форме"

Студента 2 курса 10 группы
Свирид Полины Дмитриевны

Минск, 2022

Вариант 1

1. Указать тип и метод интегрирования дифференциальных уравнений:

а) $(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^2})dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^3}{y^3})dy = 0$

Условие Эйлера: $\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$

Тип: Уранение с полным дифференциалом

Метод интегрирования: Через КРИ-2 или нахождение общего интеграла $U(x, y) = C$, используя условия Эйлера

б) $xy(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

$\frac{x}{(1+x^2)}dx + \frac{1}{y(1+y^2)}dy = 0$

Тип: Уранение с разделяющимися переменными

Метод интегрирования: Общее решение $\int P(x)\, dx + \int Q(y)\, dy = C$

в) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

$P(xt, yt) = t^2 P(x, t) \qquad Q(xt, yt) = t^2 Q(x, t)$

Тип: Однородное уравнение

Метод интегрирования: Замена $U = \frac{y}{x}$ и сведение к линейному уравнению

г) $y' \operatorname{ctg} x - y = 2\cos x^2 \operatorname{ctg} x$

Тип: Линейное по y уравнение

Метод интегрирования: Метод Лагранжа, метод Бернулли или через интегрирующий множитель

д) $x^2y^2y' + xy^3 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$

$y' + y\frac{1}{x} = a^2x^{-2}y^{-2}$

Тип: Уравнение Бернулли $m = -2$

Метод интегрирования: Замена $U = y^{1-m}$ и сведение к линейному уравнению е) $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$

Тип: Уравнение Риккати

Метод интегрирования: Необходимо найти частное решение, после чего делается замена $y = U + y_0$, где y_0- частное решение. Полученное уравнение сводится к уравнению Бернулли

ж) $yx' - 2x + y^2 = 0$

Тип: Линейное по x уравнение

Метод интегрирования: Метод Лагранжа, метод Бернулли или через интегрирующий множитель

2. Проинтегрировать уравнение, установив вид интегриреущего множителя:

$(x^3(1 + \ln x) + 2y)dx + x(3y^2x^2 - 1)dy = 0$; $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(x)$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2 - 9y^2x^2 + 1}{x(3y^3x^2 - 1)} = \frac{-3(3y^2x^2 - 1)}{x(3y^3x^2 - 1} = -\frac{3}{x} = f(x)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{x}; \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3dx}{x}; \qquad \mu = x^{-3}$$

$$((1 + \ln x) + \frac{2y}{x^3})dx + (3y^2 - \frac{1}{x^2})dy = 0$$

Условие Эйлера: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{2}{x^3}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{2y}{x^3} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 3y^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$U = \int 3y^2 - \frac{1}{x^2}\, dy + \phi(x) = y^3 - \frac{y}{x^2} + \phi(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2y}{x^3} + \phi'(x) = 1 + \ln x + \frac{2y}{x^3}$$

$$\phi'(x) = 1 + \ln(x) \Rightarrow \phi(x) = x + \int \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{bmatrix} = x + x\ln x -$$

$$-\int 1\, dx = x + x\ln x - x + C = x\ln x + C$$

$$U = y^3 + \frac{y}{x^2} + x\ln x + C$$

Дополнительное решение $x = 0$

Ответ: $U = y^3 + \dfrac{y}{x^2} + x\ln x + C$, $x = 0$

3. Преобразовать уравнение $y(x+\ln y)+(x-\ln y)y'=0$ с помощью подстановки $\ln y=\eta$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

$y=e^{\eta}; \qquad dy=e^{\eta}d\eta$

$e^{\eta}(x+\eta)dx+(x-\eta)e^{\eta}d\eta=0$

$(x+\eta)dx+(x-\eta)d\eta=0$

Условие Эйлера: $\dfrac{\partial P}{\partial \eta}=1=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$

Тип: Уранение с полным дифференциалом

Метод интегрирования: Через КРИ-2 или нахождение общего интеграла $U(x,\eta)=C$, используя условия Эйлера

4. Решить задачу Коши $dy=(y-2)^{2/3}dx$, $y|_{x=1}=2$

$\dfrac{dy}{(y-2)^{2/3}}=dx$

$3(y-2)^{1/3}=x+C$

$(y-2)^{1/3}=\dfrac{x}{3}+C_1$

$y-2=(\dfrac{x}{3}+C_1)^3; \qquad y=(\dfrac{x}{3}+C_1)^3+2$

$y|_{x=1}=(\dfrac{1}{3}+C_1)^3+2=2 \Rightarrow C_1=-\frac{1}{3} \Rightarrow y=(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3})^3+2$

Ответ: $y=(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3})^3+2$

Вариант 2

1. Указать тип и метод интегрирования дифференциальных уравнений:

а) $xy(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$

$\dfrac{x}{(1+x^2)}dx-\dfrac{1}{y(1+y^2)}dy=0$

Тип: Уранение с разделяющимися переменными

Метод интегрирования: Общее решение $\displaystyle\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy=C$

б) $\dfrac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$

$$\frac{x^2dy}{(x-y)^2} - \frac{y^2dx}{(x-y)^2} = 0$$

Условие Эйлера:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2y(x-y)^2 + 2(x-y)(-y^2)}{(x-y)^4} = \frac{(x-y)(-2xy + 2y^2 - 2y^2)}{(x-y)^4} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x(x-y)^2 - 2(x-y)x^2}{(x-y)^4} = \frac{(x-y)(2x^2 - 2xy - 2x^2)}{(x-y)^4} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Тип: Уранение с полным дифференциалом

Метод интегрирования: Через КРИ-2 или нахождение общего интеграла $U(x,y) = C$, используя условия Эйлера

в) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$

$$P(xt, yt) = t^2P(x,t) \qquad Q(xt, yt) = t^2Q(x,t)$$

Тип: Однородное уравнение

Метод интегрирования: Замена $U = \dfrac{y}{x}$ и сведение к линейному уравнению

г) $(4 - x^2)y' + xy = 4$

Тип: Линейное по y уравнение

Метод интегрирования: Метод Лагранжа, метод Бернулли или через интегрирующий множитель

д) $y' \operatorname{tg} x + 2y \operatorname{tg}^2 x = ay^2$, $a \in \mathbb{R}$

Тип: Уравнение Бернулли $m = 2$

Метод интегрирования: Замена $U = y^{1-m}$ и сведение к линейному уравнению

е) $xy' = x^2y^2 - y + 1$

Тип: Уравнение Риккати

Метод интегрирования: Необходимо найти частное решение, после чего делается замена $y = U + y_0$, где y_0- частное решение. Полученное уравнение сводится к уравнению Бернулли ж) $dx + (x + y^2)dy = 0$

$x' + x + y^2 = 0$

Тип: Линейное по x уравнение

Метод интегрирования: Метод Лагранжа, метод Бернулли или через интегрирующий множитель

2. Проинтегрировать уравнение, установив вид интегрируещего множителя:

$y^2(x - y)dx + (1 - xy^2)dy = 0$; $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(x)$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2xy - 3y^2 + y^2}{1 - xy^2} \neq f(x)$$

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{2y^2 - 2xy}{y^2(x - y)} = \frac{2y(y - x)}{y^2(x - y)} = -\frac{2}{y} = f(y)$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{y}; \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dx}{y}; \qquad \mu = y^{-2}$$

$$(x - y)dx + (\frac{1}{y^2} - x)dy = 0$$

Условие Эйлера: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1 = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - y \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - x$$

$$U = \int x - y\,dx + \phi(y) = \frac{x^2}{2} - xy + \phi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + \phi'(y) = \frac{1}{y^2} - x \Rightarrow \phi'(y) = \tfrac{1}{y^2}$$

$$\phi(y) = -\frac{1}{y} + C$$

$$U = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} + C$$

Дополнительное решение $y = 0$

Ответ: $U = \dfrac{x^2}{2} - xy - \dfrac{1}{y} + C$, $y = 0$

3. Преобразовать уравнение $y' = x + e^{x+2y}$ с помощью подстановки $\eta = e^{-2y}$. Указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

$\ln\eta = -2y; \qquad y = -\frac{1}{2}\ln\eta; \qquad dy = -\frac{1}{2\eta}d\eta$

$-\frac{1}{2\eta}d\eta = (x + \frac{e^x}{\eta})dx$

$d\eta = (-2\eta x - 2e^x)dx$

$\eta' + 2\eta x = -2e^x$

Тип: Линейное по η уравнение

Метод интегрирования: Метод Лагранжа, метод Бернулли или через интегрирующий множитель

4. Решить задачу Коши $dy = x\sqrt{y}dx$, $y|_{x=1} = 0$

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = xdx$

$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + C$

$y = (\frac{x^2}{4} + C_1)^2$

$y|_{x=1} = (\frac{1}{4} + C_1)^2 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4})^2$

Ответ: $y = (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4})^2$