Дифференциальные уравнения

Гарматная Лолита

Май 2022

Вариант 1

№1

a) $\left(2\,x\,y^2+3\,x^2+\frac{1}{x^2}+3\,\frac{x^2}{y^2}\right)\,\mathrm{d}x+\left(2\,x^2\,y+3\,y^2+\frac{1}{y^2}-2\,\frac{x^3}{y^3}\right)\,\mathrm{d}y=0$

$P'_y=4x\,y-\frac{6x^2}{y^3}$

$Q'_x=4x\,y-\frac{6x^2}{y^3}$

$P'_y=Q'_x\Rightarrow$ Уравнение в полных дифференциалах.

Для решения использовать формулу :

$u\,(x,y)=\int_{x_0}^{x}P\,(x,y_0)\;dx\;+\int_{y_0}^{y}Q\,(x,y)\;dy$

b) $x\,y\,\left(1+y^2\right)\,\mathrm{d}x+\left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}y=0$

Уравнение с разделяющимися переменными.

С помощью интегрирующего множителя $\mu\,(x,y)=\left(y(1+x^2)\right)^{-1}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и используем формулу из пункта $a)$ + решаем уравнение $y(1+x^2)=0$.

c) $2\,x\,y\,\mathrm{d}x-\left(x^2-y^2\right)\,\mathrm{d}y=0$

Уравнение в нормальной дифференциальной форме.

Ищем интегрирующий множитель в виде $w=y^2+x^2$:

$\psi\,(w)=\frac{4x}{-(x^2-y^2)2\,x\,-2y\,2x\,y}=\frac{-2}{x^2+y^2}.$

$\mu\,(w)=e^{-\int_1^w\frac{2}{\tau}\,d\tau}$

С помощью полученного интегрирующего множителя $\mu\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и решаем его, используя формулу из пункта $a)$.

d) $y'\,\mathrm{ctg}\,x-y=2\,\cos^2(x)\,\mathrm{ctg}\,x$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения используют метод вариации произвольной постоянной.

Также существует метод основанный на представлении искомой функции y в виде $y\,(x)=u\,(x)\,v\,(x)$.

e) $x^2\,y^2\,y'+x\,y^3=a^2,\quad a\in R$

$y'\;+\;\frac{1}{x}y\;=\;\frac{a^2}{x^2}y^{-2}$

Дифференциальное уравнение Бернулли.

Дифференциальное уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению подстановкой $z=y^{1-(-2)}$.

f) $y'=4\,y^2-4\,x^2\,y+x^4+x+4$

Уравнение Риккати.

Пусть $y_1\,(x)-$ частное решение. Подстановкой $y\;=y_1+u$ уравнение Риккати приводится к уравнению Бернулли.

g) $y\,x'-2\,x+y^2=0$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для решения используют метод вариации произвольной постоянной.

№2

$\left(x^3\ (1+\ln(x))+2\,y\right)\ \mathrm{d}x + x\ \left(3\,y^2\,x^2-1\right)\ \mathrm{d}y = 0; \quad \mu=\mu(x)\ ,\mu=\mu(y)\ .$
$\psi(x) = \frac{2-9y^2\,x^2+1}{x(3y^2x^2-1)} = \frac{-3}{x}$
$\psi(y) \neq \frac{2-9y^2\,x^2+1}{-(x^3(1+\ln(x))+2\,y)}$
Интегрирующий множитель будет иметь вид :
$\mu(x) = e^{\int_1^x \frac{3}{\tau}d\tau} = \frac{1}{x^3}$
Домножая уравнение на интегрирующий множитель, получим уравнение в полных дифференциалах :
$\left(1+\ln(x)+2\frac{y}{x^3}\right)\ \mathrm{d}x = 0 + \left(3y^2-\frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}y = 0$
$P'_y = \frac{2}{x^3}$
$Q'_x = \frac{2}{x^3}$
$P'_y = Q'_x$
$u(x,y) = \int_1^x (1+\ln(x))\,dx\ \ + \int_0^y (3y^2-\frac{1}{x^2})\,dy =$
$= \left[\int_1^x \ln(x) = \left[u=\ln(x)\,,\ \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\ v=x\right] = x\ln(x)-x+1\right] =$
$= x\ln(x)+y^3-\frac{y}{x^2}$
Ответ : $\quad y^3+x\ln(x) = c+\frac{y}{x^2}$

№3

$y\ (x+\ln(y)) + (x-\ln(y))\ y' = 0$
Замена : $\quad u=\ln(y)\,, \quad y=e^u, \quad u'=\frac{y'}{y}, \quad y'=u'\,e^u.$
$e^u(x+u)+e^u u'(x-u)=0,$
$(x+u)+u'(x-u)=0,$
$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$
$(x-u)\mathrm{d}u = -(x+u)\mathrm{d}x,$
Замена : $u=v\,x, \quad \mathrm{d}u=v\mathrm{d}x+s\mathrm{d}v,$
$(-v^2\,x+2v\,x+x)\mathrm{d}x+(x^2-v\,x^2)\mathrm{d}v=0$
$P'_v = -2v\,x+2x,$
$Q'_x = 2x-2v\,x,$
$P'_v = Q'_x \Rightarrow$ уравнение в полных дифференциалах.
$u(x,y) = \int_0^x x\,dx\ \ + \int_0^v (x^2-v\,x^2)\,dv = \frac{x^2}{2}+x^2v-\frac{v^2x^2}{2}$
$v\,x^2+\frac{x^2}{2}-\frac{v^2\,x^2}{2}=c.$
К замене $\quad v=\frac{u}{x}$:
$u\,x+\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2}=c.$
К замене $\quad u=\ln(y)$:
$x\ln(y)+\frac{x^2}{2}-\frac{\ln^2(y)}{2}=c.$
Ответ : $\quad x\ln(y)-\frac{\ln^2(y)}{2} = c-\frac{x^2}{2}.$

№4

$\mathrm{d}y = (y-2)^{\frac{2}{3}}\ \mathrm{d}x, \quad y(1)=2$
$\frac{\mathrm{d}y}{(y-2)^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x,$

$3(y-2)^{\frac{1}{3}} = x + c,$
$y = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3 + 2.$
Используя начальные условия, найду с :
$2 = \left(\frac{1+c}{3}\right)^3 + 2,$
$c = -1.$
$y = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 + 2,$
$y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} + \frac{53}{27}.$
Ответ : $y = \frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{9} + \frac{53}{27}.$

Вариант 2

№1

a) $x\,y\,\left(1+y^2\right)\,\mathrm{d}x - \left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$
Уравнение с разделяющимися переменными.
С помощью интегрирующего множителя $\mu\,(x,y) = \left(y(1+y^2)(1+x^2)\right)^{-1}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и используя формулу $u\,(x,y) = \int_{x_0}^{x} P\,(x,y_0)\;dx + \int_{y_0}^{y} Q\,(x,y)\;dy\,,$ решаем полученное уравнение.
Решаем уравнение $y(1+y^2)(1+x^2) = 0.$

b) $\frac{x^2\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x}{(x-y)^2} = 0$
$P'_y = -\frac{2y(x-y)^2 + 2(x-y)y^2}{(x-y)^4} = \frac{-2y\,x}{(x-y)^3},$
$Q'_x = \frac{2x(x-y)^2 - 2(x-y)x^2}{(x-y)^4} = \frac{-2y\,x}{(x-y)^3},$
$P'_y = Q'_x \Rightarrow$ Уравнение в полных дифференциалах.
Для решения использовать формулу :
$u\,(x,y) = \int_{x_0}^{x} P\,(x,y_0)\;dx \;+ \int_{y_0}^{y} Q\,(x,y)\;dy\,.$

c) $\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x - 2\,x\,y\,\mathrm{d}y = 0$
Уравнение в нормальной дифференциальной форме.
Ищем интегрирующий множитель в виде $w = x^2 - y^2$:
$\psi\,(w) = \frac{4y}{-2x\,y(2x) - (x^2+y^2)(-2y)} = \frac{-2}{x^2-y^2}.$
$\mu\,(w) = e^{-\int_1^w \frac{2}{\tau}\,d\tau}$
С помощью полученного интегрирующего множителя $\mu\left(x^2-y^2\right) = \frac{1}{(x^2-y^2)^2}$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и решаем его, используя формулу :
$u\,(x,y) = \int_{x_0}^{x} P\,(x,y_0)\;dx \;+ \int_{y_0}^{y} Q\,(x,y)\;dy\,.$
Решить уравнение $x^2 - y^2 = 0.$

d) $\left(4-x^2\right)\,y' + x\,y = 4$
$y' + \frac{x}{4-x^2}\,y = \frac{4}{4-x^2}-$ линейное дифференциальное уравнение первого порядка.
Для решения использовать метод вариации произвольной постоянной.

e) $y'\ \mathrm{tg}\,(x) + 2\,y\ \mathrm{tg}^2\,(x) = a\,y^2, \quad a \in R$
$y' + 2y\,\mathrm{tg}\,(x) = \frac{a}{\mathrm{tg}(x)} y^2 -$ дифференциальное уравнение Бернулли.
Дифференциальное уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению подстановкой $z = y^{1-2}$.

f) $x\,y' = x^2\,y^2 - y + 1$
$y' = x\,y^2 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x} -$ уравнение Риккати.
Пусть $y_1\,(x) -$ частное решение. Подстановкой $y = y_1 + u$ уравнение Риккати приводится к уравнению Бернулли.

g) $\mathrm{d}x + \left(x + y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$
Уравнение в нормальной дифференциальной форме.
Ищем интегрирующий множитель в виде $w = y:$
$\psi\,(y) = \frac{-1}{-1} = 1.$
$\mu\,(y) = e^{\int_1^y \mathrm{d}\tau}$
С помощью полученного интегрирующего множителя $\mu\,(y) = e^y$ приводим уравнение к уравнению в полных дифференциалах и решаем
его, используя формулу :
$u\,(x,y) = \int_{x_0}^{x} P\,(x, y_0)\ dx\ + \int_{y_0}^{y} Q\,(x,y)\ dy\,.$

№2

$y^2\ (x - y)\ \mathrm{d}x + \left(1 - x\,y^2\right)\ \mathrm{d}y = 0; \quad \mu = \mu\,(x)\,, \mu = \mu\,(y)\ .$
$\psi\,(x) \neq \frac{2y\,x - 2y^2}{1 - x\,y^2},$
$\psi\,(y) = \frac{2y\,x - 2y^2}{-y^2 (x-y)} = \frac{2y(x-y)}{-y^2(x-y)} = -\frac{2}{y},$
$\mu = \mu\,(y) = e^{-\int_1^y \frac{2}{\tau}\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{y^2},$
Домножая уравнение на интегрирующий множитель, получим уравнение в полных дифференциалах :
$(x - y)\mathrm{d}x + (\frac{1}{y^2} - x)\mathrm{d}y = 0$
$u\,(x,y) = \int_0^x x\,dx\ + \int_0^y (\frac{1}{y^2} - x)\,dy\ = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - x\,y.$
Ответ : $-x\,y - \frac{1}{y} = c - \frac{x^2}{2}, y = 0.$

№3

$y' = x + e^{x+2y}$
Замена : $u = e^{-2y}, \quad y = -\frac{\ln(u)}{2}, \quad y' = -\frac{u'}{2u}, \quad u' = -2e^{-2y}.$
Получается :
$-\frac{u'}{2u} = x + \frac{e^x}{u},$
$u' + 2u\,x = -2e^x$
Линейное однородное дифференциальное уравнение.
Для решения используется метод вариации произвольной постоянной.

№4

$\mathrm{d}y = x\,\sqrt{y}\,\mathrm{d}x, \quad y\,(1) = 0.$

$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = x\mathrm{d}x,$
$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c,$
$y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2,$
При подстановке начальных данных :
$(\frac{1}{4} + c)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{4}.$
Ответ : $\quad y = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\right)^2.$