Лабораторная работа №2

Халина Ирина

Вариант 1

Задание 1

а) Уравнение в полных дифференциалах. Метод:

$$\int_{x_0}^{x} \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^3}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \left(2x_0 y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{3x_0^3}{y^3}\right) dy = u(x, y).$$

б) Уравнение с разделяющимися переменными. Метод:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = -\int \frac{dy}{y(1+y^2)}.$$

в) Однородное уравнение. Метод: замена $\frac{y}{x} = u$.
г) Уравнение, линейное по y. Метод: метод Лагранжа.
д) Уравнение Бернулли. Метод: замена переменных $u = y^3$.
е) Уравнение Риккати. Метод: не решается в общем случае.
ж) Уравнение, линейное по x. Метод: метод Лагранжа.

Задание 2

$$(x^3 + x^3 \ln x + 2y)dx + (3y^2x^3 - x)dy = 0,$$

$$\Psi(y): \quad \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{9x^2y^2 - 3}{x^3 + x^3\ln(x) + 2y} = f(x, y) \Rightarrow \Psi \neq \Psi(y),$$

$$\Psi(x): \quad \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{3 - 9x^2y^2}{3x^3y^2 - x} = \frac{3(1 - 3x^2y^2)}{-x(1 - 3x^2y^2)} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \Psi = \Psi(x),$$

$$\mu(x) = e^{\int \Psi(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3},$$

$$\left(1 + \ln(x) + \frac{2y}{x^3}\right) dx + \left(3y^2 + -\frac{1}{x^2}\right) dy = 0, \quad x \neq 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2}{x^3},$$

(1) - уравнение в полнных дифференциалах.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{2y}{x^3},$$

$$u(x, y) = \int \left(1 + \ln x + \frac{2y}{x^3}\right) dx,$$

$$u(x, y) = x\ln x - \frac{y}{x^2} + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} + C'(y),$$

$$C'(y) = 3y^2,$$

$$C(y) = y^3,$$

$$C = x\ln x - \frac{y}{x^2} + y^3,$$

$$x = 0 \Rightarrow u'_x dx + u'_y dy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ - решение.}$$

Ответ: $C = x\ln x - \frac{y}{x^2} + y^3$, $x = 0$.

Задание 3

$$y(x+\ln y)+(x-\ln y)y'=0 \quad \ln y=\eta \quad d\eta=\frac{dy}{y},$$

$$\frac{dy}{d\eta}(x+\eta)+(x-\eta)\frac{dy}{dx}=0 \quad | : dy,$$

$$(x+\eta)dx+(x-\eta)d\eta=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1 \Rightarrow \text{уравнение в полных дифференциалах.}$$

Метод решения:

$$\int_{x_0}^{x}(x+\eta)dx+\int_{\eta_0}^{\eta}(x-\eta)d\eta=u(x,y),$$

$$\frac{x^2}{2}+x\eta-\frac{\eta^2}{2}=C,$$

$$\frac{x^2}{2}+x\ln y-\frac{\ln^2 y}{2}=C.$$

Ответ:$\frac{x^2}{2}+x\ln y-\frac{\ln^2 y}{2}=C$.

Задание 4

$$dy=(y-2)^{\frac{2}{3}}dx, \quad y|_{x=1}=2,$$

$$d(y-2)(y-2)^{-\frac{2}{3}}=dx, \quad y-2=t,$$

$$\int t^{-\frac{2}{3}}dt=\int dx,$$

$$3t^{\frac{1}{3}}=x+C,$$

$$3(y-2)^{\frac{1}{3}}=x+C,$$

$$0=1+C \Rightarrow C=-1,$$

$$3(y-2)^{\frac{1}{3}}=x-1.$$

Ответ: $3(y-2)^{\frac{1}{3}}=x-1$.

Вариант 2

Задание 1

а) Уравнение с разделяющимися переменными. Метод:

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{y(1+y^2)}dy=0.$$

б) Однородное уравнение. Метод: замена $\frac{y}{x}=u$.
в) Однородное уравнение Метод: замена $\frac{y}{x}=u$.
г) Уравнение, линейное по y. Метод: метод Лагранжа.
д) Уравнение Бернулли. Метод: замена переменных $u=y^3$.
е) Уравнение Риккати. Метод:

$$y'+\frac{1}{x}y=xy^2+\frac{1}{x}.$$

ж) Уравнение, линейное по x. Метод: метод Лагранжа.

Задание 2

$$y^2(x-y)dx + (1-xy^2)dy = 0,$$

$$\int y^2(x-y)dx + \int (1-xy^2)dy = C,$$

$$x^2 - 2xy - \frac{2}{y} = C,$$

$$y = 0,$$

$$\mu = \mu(y) : \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-y^2 - (2xy - 3y^2)}{y^2(x-y)},$$

$$\mu = \mu(x) : \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2xy - 3y^2 - y^2}{1 - xy^2} = \frac{2y(x-2y)}{1-xy^2},$$

$$\mu' = \frac{2}{y^2}\mu,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dy}{y^2},$$

$$\ln\mu = \ln y^{-2},$$

$$\mu = y^{-2}.$$

Ответ: $x^2 - 2xy - \frac{2}{y} = C, y = 0.$

Задание 3

$$y' = x + e^{x+2y},$$

$$\eta = e^{-2y},$$

$$d\eta = -2e^{-2y}dy,$$

$$\frac{dy}{dx} = x + e^{x+2y},$$

$$e^{-2y}dy = (xe^{-2y} + e^x)dx,$$

$$-\frac{1}{2}d\eta = (x\eta + e^x)dx,$$

$$\eta' + 2x\eta = -2e^x \text{ - линейное по } \eta.$$

Ответ: $\eta' + 2x\eta + ae^x = 0.$

Задание 4

$$dy = x\sqrt{y}dx, \quad y|_{x=1} = 0,$$

$$xdx = \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\sqrt{y} + C,$$

$$C = \frac{1}{2},$$

$$x^2 - 4\sqrt{y} = 1.$$

Ответ: $x^2 - 4\sqrt{y} = 1.$