Дифференциальные уравнения
Лабораторная работа №2

Горбунов Анатолий

Май 2022

вариант 1

1) Указать тип и метод интегрирования ур-ий

а)

$$(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^2})dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^3}{y^3})dy = 0$$

Тип: уранение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Метод:

$$\int_{x_0}^{x} \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^2}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \left(2x_0^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x_0^3}{y^3}\right) dy = u(x, y)$$

б)

$$xy(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$$

Тип: уранение с разделяющимися переменными

Метод:

$$\int \frac{xdx}{1 + x^2} = -\int \frac{dy}{y(1 + y^2)}$$

в)

$$2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$$

Тип: однородное уранение

Метод:

замена перемнных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$

$$y = ux$$

$$dy = xdu + udx$$

$$2x^2udx - (x^2 - u^2x^2)(xdu + udx) = 0$$

$$2x^2udx - x^3du - x^2udx + u^2x^3du + u^3x^2dx = 0$$

$$(x^2u + u^3x^2)dx + (-x^3 + u^2x^3)du = 0 \quad | : x^2$$

$$x'(u + u^3) + x(-1 + u^2) = 0$$

Получили линейное по x

$$\frac{dx}{du}(u + u^3) + x(-1 + u^2) = 0$$

$$\int \frac{dx}{du} = -\int \frac{(u^2 - 1)du}{u + u^3}$$

г)

$$y\text{'}ctg(x) - y = 2cos^2(x)ctg(x)$$

Тип: линейное по у уранение

Метод:

метод Лагранжна

д)

$$x^2y^2y\text{'} + xy^3 = a^2$$

Тип: уранение Бернулли по у

Метод:

замена переменных

$$u = y^{1-m} = y^3, \ du = 3y^2dy$$

е)

$$y\text{'} = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$$

Тип: уранение Рикатти

Метод:

не решается в общем случае

ж)

$$yx\text{'} - 2x + y^2 = 0$$

Тип: линейное по x уравнение

Метод:

метод Лагранжа

вариант 1

2) Проинтегрировать ур-ие, установив вид интегрирующего множителя

$$(x^3 + x^3 \ln x + 2y)dx + (3y^2x^3 - x)dy = 0$$

$$\Psi(y): \quad \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{9x^2y^2 - 3}{x^3 + x^3\ln(x) + 2y} = f(x,y) \Rightarrow \Psi \neq \Psi(y)$$

$$\Psi(x): \quad \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{3 - 9x^2y^2}{3x^3y^2 - x} = \frac{3(1 - 3x^2y^2)}{-x(1 - 3x^2y^2)} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \Psi = \Psi(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int \Psi(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$$

$$\left(1 + \ln(x) + \frac{2y}{x^3}\right)dx + \left(3y^2 + -\frac{1}{x^2}\right)dy = 0, \quad x \neq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2}{x^3}$$

() - уравнение в полнных дифференциалах

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{2y}{x^3}$$

$$u(x,y) = \int \left(1 + \ln x + \frac{2y}{x^3}\right)dx$$

$$u(x,y) = x\ln x - \frac{y}{x^2} + c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} + c'(y)$$

$$c'(y) = 3y^2$$

$$c(y) = y^3$$

$$c = x\ln x - \frac{y}{x^2} + y^3$$

$$x = 0 \Rightarrow u'_x dx + u'_y dy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ - решение.}$$

Ответ: $c = x\ln x - \frac{y}{x^2} + y^3$, $x = 0$.

вариант 1

3) Преобразовать уравнение с помощью подстановки, указать тип и метод интегрирования полученного ур-ия

$$y(x+\ln y)+(x-\ln y)y'=0 \quad \ln y=\eta \quad d\eta=\frac{dy}{y}$$

$$\frac{dy}{d\eta}(x+\eta)+(x-\eta)\frac{dy}{dx}=0 \quad |:dy$$

$$(x+\eta)dx+(x-\eta)d\eta=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1 \Rightarrow \text{уравнение в полных дифференциалах}$$

метод решения:

$$\int_{x_0}^{x}(x+\eta)dx+\int_{\eta_0}^{\eta}(x-\eta)d\eta=u(x,y)$$

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+x\eta-\frac{\eta^2}{2}=c$$

$$\frac{x^2}{2}+x\ln y-\frac{\ln^2 y}{2}=c$$

Ответ:$\frac{x^2}{2}+x\ln y-\frac{\ln^2 y}{2}=c$

вариант 1

4) Решить задачу Коши

$$dy=(y-2)^{\frac{2}{3}}dx, \quad y|_{x=1}=2$$

$$d(y-2)(y-2)^{-\frac{2}{3}}=dx, \quad y-2=t$$

$$\int t^{-\frac{2}{3}}dt=\int dx$$

$$3t^{\frac{1}{3}}=x+c$$

$$3(y-2)^{\frac{1}{3}}=x+c$$

$$0=1+c\Rightarrow c=-1$$

$$3(y-2)^{\frac{1}{3}}=x-1$$

Ответ: $x=3(y-2)^{\frac{1}{3}}+1$.

вариант 2

1) Указать тип и метод интегрирования ур-ий

а)

$$xy(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$$

Тип: уранение с разделяющимися переменными

Метод:

$$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{y(1+y^2)}dy$$

б)

$$\frac{x^2}{(x-y)^2}dy - \frac{y^2}{(x-y)^2}dx = 0$$

Тип уравнений: однородное степени 0

Метод решения: диффеоморфная замена перемнных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$

$$y = ux, \quad dy = xdu + udx$$

в)

$$(x^2+y^2)dx - 2xy = 0$$

Тип: однородное уравнение степени 2

Метод решения: замена перемнных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$

$$y = ux, \quad dy = xdu + udx$$

г)

$$(4-x^2)y\text{'} + xy = 4$$

Тип: линейное по y уравнение

Метод:

$$y' + \frac{x}{4-x^2}y = 4$$

Решаем методом Лагранжа

д)

$$y'tg(x) + 2ytg(x)^2 = ay^2$$

Тип: уравнение Бернулли

Метод:

$$u = y^{1-m}$$

е)

$$xy' = x^2y^2 - y + 1$$

Тип: уравнение Риккати

Метод:

не решается в общем случае

ж)

$$dx + (x + y^2)dy = 0$$

Тип: линейное по x

Метод:

методом Лагранжа

вариант 2

2) Проинтегрировать ур-ие, установив вид интегрирующего множителя

$$y^2(x-y)dx + (1-xy^2)dy = 0$$

$$\mu = \mu(x) : \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2xy - 3y^2 - y^2}{1 - xy^2} = \frac{2y(x-2y)}{1-xy^2}$$

$$\mu = \mu(y) : \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-y^2 - (2xy - 3y^2)}{y^2(x-y)} = -\frac{2}{y}$$

$$\mu' = \frac{2}{y}\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dy}{y}$$

$$\ln \mu = \ln y^{-2}$$

$$\mu = y^{-2}$$

$$(x-y)dx + (\frac{1}{y^2} - x)dy = 0$$

уравнение в полных дифференциалах, т к

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int_0^x \Big(x - y)dx + \int_0^y \Big(\frac{1}{y^2} - x_0)dy = u(x, y)$$

Ответ: $u(x, y) = x^2 - xy - \frac{2}{y}$

вариант 2
3) Преобразовать уравнение с помощью подстановки, указать тип и метод интегрирования полученного ур-ия

$$y' = x + e^{x+2y}$$

$$\eta = e^{-2y}$$

$$d\eta = -2e^{-2y}dy$$

$$\frac{dy}{dx} = x + e^{x+2y}$$

$$\frac{d\eta}{-2\eta dx} = x + \frac{e^x}{\eta}$$

$$e^{-2y}dy = (xe^{-2y} + e^x)dx$$

$$\eta' + 2\eta x = e^x$$

линейное, решаем методом Лагранжа

вариант 2
4) Решить задачу Коши

$$dy = x\sqrt{y}dx, y|_{x=1} = 0$$

$$xdx = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\sqrt{y} + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 4\sqrt{y} = 1$$

Ответ: $x^2 - 4\sqrt{y} = 1$