Лабораторная работа №3

Варвара Бородина

Май 2022

№1.1

а) $y = 2y'x - \ln y$

$$y = 2y'x - \ln y \text{ - уравнение Лагранжа}$$

$$\frac{dy}{dx} = p = y', dy = pdx = d(2px - \ln p) = 2xdp + 2pdx - \frac{dp}{p}$$

$$-pdx = (2x - \frac{1}{p})dp, p \neq 0$$

$$x' + \frac{2}{p}x == \frac{1}{p^2} \text{ - линейно по x}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p}, \frac{dx}{d} = -\frac{2dp}{p}, \ln x = -2\ln p + \ln C$$

$$x = p^{-2}C, x = p^{-2}C(p), x' = -2p^{-3} + p^{-2}C'$$

$$-2p^{-3}C + p^{-2}C' + \frac{2}{p}p^{-2}C = \frac{1}{p^2}$$

$$C = \int 1dp = p + C_1$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \frac{C_1}{p^2}, C_1 = const \\ y = 2px - \ln p = 2 + \frac{C_1}{p} - \ln p \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \frac{C_1}{p^2} \\ y = 2 + \frac{C_1}{p} - \ln p \end{cases}, y = const$

б) $y = xy' - {y'}^2$

$$y = xy' - {y'}^2 \text{ – уравнение Клеро}$$

$$\frac{dy}{dx} = p, dy == pdx = d(xp - p^2) = xdp + pdx - 2pdp$$

$$(p - p)dx = (1 - 2p)dp = 0, dp = 0 \Rightarrow p = const$$

$$y' = C_1 \Rightarrow y = xC_1 + C_2$$

$$\begin{cases} x = 2py = p^2y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y = Cx - C^2 \\ y = \frac{x^2}{4} \end{cases}$

№1.2

$$y'y''' - 3(y'')^2 = 0 \text{ - не содержит y' как искомую функцию}$$

$$z = y', z' = y'', z'' = y'''$$

$$zz'' - 3(z')^2 = 0$$

$$z''\frac{3}{z}(z')^2 = 0 \text{ - не содержит y как независимую переменную}$$

$$u = z', z'' = u'z' = u'u$$

$$u'u - \frac{3}{z}u^2 = 0$$

$$u\frac{du}{dz} = \frac{3u^2}{z}, \int \frac{dz}{dx} = \frac{3dz}{z}, \ln u = \ln zC_1$$

$$u = z^3C_1 = z' = \frac{dz}{dx}, int\frac{dz}{z^3} = \int C_1dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = xC_1 + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{2(y')^2} = xC_1 + C_2 \Rightarrow$$

$$(y')^2 = -\frac{1}{2(xC_1 + C_2} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{xC_1 + C_2}} \Rightarrow dy = \pm\frac{dx}{\sqrt{xC_1 + C_2}} \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{2\sqrt{xC_1 + C_2}}{C_1} + C_3$$

$$u = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z = const = y' \Rightarrow y = xC_1 + C_2$$

Ответ: $\begin{cases} y = \pm\frac{2\sqrt{xC_1+C_2}}{C_1} + C_3 \\ y = xC_1 + C_2 \end{cases}$

№1.3

$$2x^3y''' - y''x^2 = (y'')^3 \text{ - не содержит y как искомую функцию}$$

$$y'' = p, y''' = p'$$

$$2x^3p' - x^2p = (p)^3 \text{ - не содержит p как искомую функцию}$$

$$p' = \frac{p^2}{2x^3} + \frac{z}{2x} \text{ - уравнение Риккари}$$

В общем случае алгоритма решения не существует

№1.4

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 3x^2$$

$$y' = \frac{y}{x} = x^3 + C_1$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln C_2 \Rightarrow y = \frac{C_2}{x}$$

$$y' = \frac{C_2'}{x} - \frac{C_2}{x^2}$$

$$\frac{C_2'}{x} - \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_2}{x^2} = x^3 + C_1$$

$$C_2' = x^4 + C_1x \Rightarrow C_2 = \int (x^4 + C_1x)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{C_1x^2}{2} + C_3$$

$$y = \frac{x^4}{5} + \frac{C_1x}{2} + \frac{C_3}{x}$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{5} + C_1x + \frac{C_3}{x}$

№2.1

а) $2xy' - y = cosy'$

$$y = 2xy' - cosy' \text{ - уравнение Лагранжа}$$

$$y' = p \Rightarrow dy = pdx, dy = 2pdx + 2xdp + \sin(p)dp$$

$$2pdx + (2x + \sin(p))dp = pdx, -pdx = (2x + \sin(p))dp$$

$$-px' = 2x + \sin(p), x' + \frac{2}{p} = -\frac{\sin(p)}{p} \text{ - линейное, } p \neq 0$$

Решаем методом Лагранжа:

$$x' + \frac{2}{p} = 0, \frac{dx}{x} = -\frac{2}{p}dp, \ln x = \ln p^{-2}$$

$$x = cp^{-2}, c = c(x), x' = c'p^{-2} - 2cp^{-3}$$

$$c'p^{-2} - 2cp^{-3} + 2cp^{-2} = -\frac{\sin(p)}{p}, c' = -p\sin(p)$$

$$c = \int p\sin(p)dp = p\cos(p) - \sin(p) + c_1$$

$$x = \frac{1}{p^2}(p\cos(p) - \sin(p) + c_1) = \frac{1}{p}\cos(p) - \frac{1}{p^2}\sin(p) + \frac{c_1}{p^2}$$

$$p = 0 : y' = 0 \Rightarrow y = const \Rightarrow y = -1$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\cos(p)}{p} + \frac{c_1 - \sin(p)}{p^2} \\ y = 2xp - \cos p \end{cases}, y = -1$

б) $y = xy' - (2 + (y')^2)$

Уравнение Клеро. Сделаем замену:

$$y' = p \Rightarrow y = px - (2 + p^2)$$

$$dy = xdp + pdx - 2pdp, dy = pdx$$

$$xdp + pdx - 2pdp = pdx \Rightarrow xpd - 2pdp = 0 \Rightarrow (x - 2p)dp = 0$$

$$dp = 0 \Rightarrow p = const$$

$$y' = p \Rightarrow y = c_1 x + c_2$$

$$x = 2p$$

$$y' = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C$$

Запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 - 2 - p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 - 2 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = Cp \\ y = Cx - C^2 \end{cases}$, $y = \frac{x^2}{4} + C$

№2.2

$$2yy'' + (y')^2 = 0$$

Однородное относительно y и ее производных. Сделаем замену:

$$y'' = y'p + yp' = yp^2 + yp'$$

$$2y(yp^2 + yp') + y^2p^2 = 0$$

$$3y^2p^2 + yp' = 0, p' = -3xy, y \neq 0$$

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{3y}{1}dx, -p^{-1} = -3yx, p = \frac{1}{3xy}$$

$$y' = py = \frac{1}{3x} \Rightarrow y = \frac{1}{3}\ln(x) + c$$

Уравнение не содержащее явно x:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Сделаем замену:

$$y' = p(y)$$

$$y'' = p'y' = p'p$$

$$2ypp' + p^2 = 0, p' + \frac{p}{2y} = 0, p \neq 0, y \neq 0$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}, \ln(p) = \ln(p^{-\frac{1}{2}})$$

$$p = cy^{-\frac{1}{2}}, y' = cy^{-\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$y^{\frac{1}{2}}dy = cdx, \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1x + c_2$$

Основное решение: p = 0, y' = 0 $\Rightarrow y = const$: y = const

№2.3

$$(y'')^2 + y' = xy''$$

Выполним замену:

$$y' = p \Rightarrow y'' = p'$$

$$(p')^2 + p = xp, p = xp' - (p')^2 \text{ - уравнение Клеро}$$

Выполним замену: p' = t

№2.4

$$yy'' + (y')^2 = 1$$

$$yy' = x + c$$

$$y' = \frac{x+c}{y}, \frac{dy}{dx} = \frac{x+c}{y}$$

$$ydy = (x+c)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$$