Лабораторная работа 3

Пуговская Валерия

4 семестр

1 вариант

1) Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро

а) $y = 2y'x - \ln y'$

$$y = 2y'x - \ln y' \text{ - уравнение Лагранжа.}$$

$$\text{Полагая, что } \frac{dy}{dx} = p = y' \text{ и } dy = pdx$$

имеем:

$$pdx = d(2px - \ln p) = 2xdp + 2pdx - \frac{dp}{p}$$

$$pdx = (\frac{1}{p} - 2x)dp, p \neq 0$$

$$\text{тогда, } x' + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^2} \text{ - линейно относительно переменной х}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p}, \frac{dx}{d} = -\frac{2dp}{p}, \text{ после перестановки имеем: } \ln x = \ln C - 2\ln p$$

$$x = p^{-2}C, x = p^{-2}C(p), x' = p^{-2}C' - 2p^{-3}$$

$$-2\frac{1}{p^3}C + \frac{1}{p^2}C' + \frac{2}{p^3}C = \frac{1}{p^2}$$

$$C = \int dp = p + C_1$$

Получаем параметрическое уравнение относительно у:

$$x = \frac{1}{p} + \frac{C_1}{p^2}, C_1 = const$$

у = 2px - $\ln p = 2 + \frac{C_1}{p} - \ln p$

Ответ: $x = \frac{1}{p} + \frac{C_1}{p^2}$
$y = 2 + \frac{C_1}{p} - \ln p$

б) $y = xy' - {y'}^2$

$$y = xy' - {y'}^2 \text{ - уравнение Клеро}$$

Полагая, что y' = p, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = p, dy = pdx, pdx = d(xp - p^2) = xdp + pdx - 2pdp$$

$$(p - p)dx = (1 - 2p)dp = 0, dp = 0 \Rightarrow p = const$$

$$y' = C_1 \Rightarrow y = xC_1 + C_2$$

$$x = 2p$$
$$y = p^2$$
$$y = \frac{x^2}{4}$$

Ответ:

$$y = Cx - C^2$$
$$y = \frac{x^2}{4}$$

2) Проинтегрировать уравнение

$$y'y''' - 3(y'')^2 = 0 \text{ - уравнение не содержит x явно}$$

Понижаем степень:

$$z = y', z' = y'', z'' = y'''$$

Подставляем:

$$zz'' - 3(z')^2 = 0$$

$$z'' - \frac{3}{z}(z')^2 = 0$$

$$u = z', z'' = u'z' = u'u$$

$$u'u - \frac{3}{z}u^2 = 0$$

$$u\frac{du}{dz} = \frac{3u^2}{z}, \int \frac{dz}{dx} = \int \frac{3dz}{z}, \ln u = \ln z^3 C_1$$

$$u = z^3 C_1 = z' = \frac{dz}{dx}, \int \frac{dz}{z^3} = \int C_1 dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = xC_1 + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{2(y')^2} = xC_1 + C_2 \Rightarrow$$

$$(y')^2 = -\frac{1}{2(xC_1 + C_2)} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{xC_1 + C_2}} \Rightarrow dy = \pm\frac{dx}{\sqrt{xC_1 + C_2}} \Rightarrow$$

$$y = \pm\frac{2\sqrt{xC_1 + C_2}}{C_1} + C_3$$

$$u = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z = const = y' \Rightarrow y = xC_1 + C_2$$

Ответ: $y = \pm\frac{2\sqrt{xC_1+C_2}}{C_1} + C_3$
$y = xC_1 + C_2$

3) Понизить порядок уравнения и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения

$2x^3y'''-y''x^2 = (y'')^3$ - данное уравнение не содержит y как искомую функцию и ее производную, поэтому полагаем:

$$y'' = p, y''' = p'$$

$2x^3p' - x^2p = (p)^3$ - не содержит p как искомую функцию.

$$p' = \frac{p^2}{2x^3} + \frac{z}{2x} \text{ - уравнение Риккари}$$

В общем случае, алгоритма решения не существует.

4) Проинтегрировать уравнение в точных приводных

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 3x^2$$

$$y' = \frac{y}{x} = x^3 + C_1$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y + \ln x = \ln C_2 \Rightarrow y = \frac{C_2}{x}$$

$$y' = \frac{C_2'}{x} - \frac{C_2}{x^2}$$

$$\frac{C_2'}{x} - \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_2}{x^2} = x^3 + C_1$$

$$C_2' = x^4 + C_1 x \Rightarrow C_2 = \int (x^4 + C_1 x)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_3$$

$$y = \frac{x^4}{5} + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_3}{x}$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{5} + C_1 x + \frac{C_3}{x}$

2 вариант

1) Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро

а) $2xy' - y = cosy'$

$$y = 2xy' - cosy' \text{ - уравнение Лагранжа}$$

Полагаем, что p = y':

$$y' = p \Rightarrow dy = pdx, dy = 2pdx + 2xdp + \sin pdp$$

$$2pdx + (2x + \sin p)dp = pdx, -pdx = (2x + \sin p)dp$$

$$-px' = 2x + \sin p, x' + \frac{2x}{p} = -\frac{\sin p}{p} \text{ - линейное, } p \neq 0$$

Решение уравнения методом Лагранжа:

$$x' + \frac{2x}{p} = 0, \frac{dx}{x} = \frac{-2}{p}dp, \ln x = \ln \frac{1}{p^2}$$

$$x = c\frac{1}{p^2}$$

$$c = c(x)$$

$$x' = c'\frac{1}{p^2} - 2c\frac{1}{p^3}$$

$$c'\frac{1}{p^2} - 2c\frac{1}{p^3} + 2c\frac{1}{p^2} = -\frac{\sin p}{p}, c' = -p\sin p$$

$$c = \int p\sin pdp = p\cos p - \sin p + c_1$$

$$x = \frac{1}{p^2}(p\cos p - \sin p + c_1) = \frac{1}{p}\cos p - \frac{1}{p^2}\sin p + \frac{c_1}{p^2}$$

$$p = 0 : y' = 0 \Rightarrow y = const \Rightarrow y = -1$$

Ответ: $x = \frac{\cos(p)}{p} + \frac{c_1 - \sin(p)}{p^2}$
$y = \cos(p) + 2\frac{c_1 - \sin(p)}{p}$
$y = -1$

б) $y = xy' - (2 + (y')^2)$ - уравнение Клеро

Полагая, что y' = p: $y' = p$

$$\Rightarrow y = px - (2 + p^2)$$

$$dy = xdp + pdx - 2pdp, dy = pdx$$

$$xdp + pdx - 2pdp = pdx \Rightarrow xpd - 2pdp = 0 \Rightarrow (x - 2p)dp = 0$$

$$dp = 0 \Rightarrow p = const$$

$$y' = p \Rightarrow y = c_1x + c_2$$

$$x = 2p$$

$$y' = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C$$

Ответ:

$$y = \frac{x^2}{4} + C, y = c_1x + c_2,$$

2) Проинтегрировать уравнение

$$2yy'' + (y')^2 = 0$$

Уравнение не содержащее явно x:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Замена:

$$y'' = p(y)$$
$$y'' = p'y' = p'p$$
$$2ypp' + p^2 = 0, p' + \frac{p}{2y} = 0, p \neq 0, y \neq 0$$
$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}, \ln{(p)} = \ln{(cy^{-\frac{1}{2}})}$$
$$p = cy^{-\frac{1}{2}}, y' = cy^{-\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y^{\frac{1}{2}}}$$
$$y^{\frac{1}{2}}dy = cdx$$
$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1x + c_2$$

Особое решение:

$$p = 0, y' = 0 \Rightarrow y = const$$

Ответ: $y = const$
$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c_1x + c_2$

3) Понизить порядок уравнения и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения

$$(y'')^2 + y' = xy''$$

Замена y' = p:

$$y' = p \Rightarrow y'' = p'$$

$$(p')^2 + p = xp$$

$$p = xp' - (p')^2 \text{ - уравнение Клеро}$$

Положим, что $p' = t$ и решим уравнение по аналогии первого номера.

4) Проинтегрировать уравнение в точных приозводных

$$yy'' + (y')^2 = 1$$

Подобрали первообразные слева и справа:

$$yy' = x + c$$

$$y' = \frac{x+c}{y}, \frac{dy}{dx} = \frac{x+c}{y}$$

$$ydy = (x+c)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$$

Ответ: $y^2 = x^2 + c_1x + c_2$