DU 1

Журавлёв Владислав

May 2022

1 169

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$$

Ищем частное решение в виде: $y(x) = ax + b$. Подставим:

$$ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 = -x^2$$

Получаем $2ab - 2b = 0; (a-1)b = 0; -b + b^2 = 0$. Получили 2 решения: $a = 1, b = 1$ и $a = 1, b = 0$. Возьмём $a = 1, b = 0$: $y_0(x) = x$. Заменим $y = x + \frac{1}{z}$ и получим:

$$x(1 - \frac{z'}{z^2}) - (2x+1)(x + \frac{1}{z}) + (x + \frac{1}{z})^2 = -x^2$$

Сократим:

$$xz' + z - 1 = 0$$

Интегрируем и получаем $z = 1 + \frac{C}{x}$. Подставляем в y:

$$y = x + \frac{x}{x + C}$$

2 170

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$$

Ищем частное решение в виде: $y(x) = ax + b$. Подставим:

$$a - 2x(ax + b) + a^2x^2 + 2abx + b^2 = 5 - x^2$$

Получаем условия:

$$\begin{cases} (a-1)^2 = 0 \\ 2ab - 2b = 0 \\ b^2 + a - 5 = 0 \end{cases}$$

Получили $a = 1, b = \pm 2$
Возьмём $a = 1, b = 2$, тогда $y = x + 2$
Берём замену $y = x + 2 + \frac{1}{z}$

$$1 - \frac{z^{'}}{z^2} - 2x(x + 2 + \frac{1}{z}) + x^2 + (4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2}) + 2x(2 + \frac{1}{z}) = 5 - x^2$$

Получаем уравнение:

$$z^{'} - 4z - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4dx \Rightarrow z = C_1e^{4x} - \frac{1}{4}$$

$$y = x + 2 + \frac{4}{4C_1e^{4x} - 1}$$

3 171

$$y^{'} + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$$

Ищем частное решение в виде: $y_0(x) = e^x + b$

$$e^x + 2e^{2x} + 2be^x - 2be^x - b^2 = e^{2x} + e^x$$

Получаем $b = 0 \Rightarrow y_0 = e^x$

$$y = y_0 + z = e^x + z$$

$$(e^x + z)^{'} + 2(e^x + z)e^x - (e^x + z)^2 = e^{2x} + e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{'} = z^2 \Rightarrow z = -\frac{1}{x + C}$$

$$y = e^x - \frac{1}{x + C}$$

4 179

$xy^{'} + ay = f(x)$, $a = const > 0, f(x) \to b$ при $x \to 0$.
Представим уравнение в виде:

$$y = \frac{C}{|x|^a} \ + \frac{1}{|x|^a} \int\limits_0^x f(t)|t|^{a-1} d(|t|)$$

$$y = \frac{C}{|x|^a} \ + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a} \int\limits_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1} d(|t|)$$

Где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$

$$\frac{1}{|x|^a} |\int\limits_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1} d(|t|)| \leq \frac{1}{a} \sup_{0 \leq t \leq x} |\varepsilon(t)| \to 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} y(t)$ существует и ограничен только, когда $C = 0$ и равняется $\frac{b}{a}$
Тогда решение уравнения:

$$y = \frac{1}{|x|^a} \int\limits_0^x f(t)|t|^{a-1} d(|t|)$$

5 180

$xy^{'} + ay = f(x)$, $a = const < 0, f(x) \to b$ при $x \to 0$.
Представим уравнение в виде:

$$y = |x|^{-a}(C + \int\limits_0^x f(t)|t|^{a-1} d(|t|)) = \frac{b}{a} + |x|^{-a}(C + \int\limits_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1} d(|t|))$$

Если интеграл ограничен, то при любом C $\lim\limits_{x \to 0} y(t) = \frac{b}{a}$. Если не ограничен при $x \to 0$, то применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1} d(|t|)}{|x|^a} = \lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon(x)|x|^{a-1}}{a|x|^{a-1}} = 0$$

Получается, что:

$$\lim_{x \to 0} y(x) = \frac{b}{a}$$

6 181

Показать, что уравнение $x^{'} + x = f(t)$, где $|f(t)| \le M$, где $-\infty < t < \infty$ имеет одно ограниченное решение, найти его. Показать, если решение периодическое, то f(t) периодическая.
Запишем общее решение уравнения

$$x(t) = Ce^{-t} + e^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau} d\tau$$

Такое представление возможно, так как несобственный интеграл сходится :

$$|\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau} d\tau| \le Me^{t}$$

Отсюда следует, что функция $e^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau} d\tau$ ограничена M для $t \in (-\infty, +\infty)$. Функция x(t) ограничена, если $C = 0$. Тогда решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau} d\tau$$

Пусть функция периодическая, то есть для любого $\tau \in (-\infty, +\infty)$, $f(\tau + T) = f(\tau)$, где $T > 0$. Получается

$$x(t) = e^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau + T)e^{\tau} d\tau = e^{-(t+T)} \int\limits_{-\infty}^{t+T} f(\tau_0)e^{\tau_0} d\tau_0 = x(t + T)$$

где $\tau_0 = \tau + T$. Тогда x(t) - периодическая функция.