

Лабораторная работа №2

Заговальский Глеб

Май 2022

Вариант 1

1) Указать тип и метод интегрирования ур-ий

а)

$$(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^2})dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^3}{y^3})dy = 0$$

Тип: уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Метод:

$$\int_{x_0}^x \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^2} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(2x_0^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x_0^3}{y^3} \right) dy = u(x, y)$$

б)

$$xy(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$$

Тип: уравнение с разделяющимися переменными

Метод:

$$\int \frac{xdx}{1 + x^2} = - \int \frac{dy}{y(1 + y^2)}$$

в)

$$2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$$

Тип: однородное уравнение

Метод:

замена переменных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$
$$y = ux$$
$$dy = xdu + udx$$

$$2x^2udx - (x^2 - u^2x^2)(xdu + udx) = 0$$
$$2x^2udx - x^3du - x^2udx + u^2x^3du + u^3x^2dx = 0$$
$$(x^2u + u^3x^2)dx + (-x^3 + u^2x^3)du = 0 \quad | : x^2$$
$$x'(u + u^3) + x(-1 + u^2) = 0$$

Получили линейное по x

$$\frac{dx}{du}(u + u^3) + x(-1 + u^2) = 0$$
$$\int \frac{dx}{du} = - \int \frac{(u^2 - 1)du}{u + u^3}$$

г)

$$y' \operatorname{ctg}(x) - y = 2\cos^2(x) \operatorname{ctg}(x)$$

Тип: линейное по y уравнение

Метод:

метод Лагранжна

д)

$$x^2y^2y' + xy^3 = a^2$$

Тип: уравнение Бернулли по y

Метод:

замена переменных

$$u = y^3$$
$$du = 3y^2dy$$

е)

$$y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$$

Тип: уравнение Рикатти

Метод:

не решается в общем случае

ж)

$$yx' - 2x + y^2 = 0$$

Тип: линейное по x уравнение

Метод:

метод Лагранжа

Вариант 1

2) Проинтегрировать ур-ие, установив вид интегрирующего множителя

$$\begin{aligned} & (x^3 + x^3 \ln x + 2y)dx + (3y^2 x^3 - x)dy = 0 \\ \Psi(y) : \quad & \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{9x^2 y^2 - 3}{x^3 + x^3 \ln(x) + 2y} = f(x, y) \Rightarrow \Psi \neq \Psi(y) \\ \Psi(x) : \quad & \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{3 - 9x^2 y^2}{3x^3 y^2 - x} = \frac{3(1 - 3x^2 y^2)}{-x(1 - 3x^2 y^2)} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \Psi = \Psi(x) \\ & \mu(x) = e^{\int \Psi(x) dx} = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = x^{-3} \\ & \left(1 + \ln(x) + \frac{2y}{x^3}\right) dx + \left(3y^2 + -\frac{1}{x^2}\right) dy = 0, \quad x \neq 0 \quad (1) \\ & \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

(1) - уравнение в полных дифференциалах

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \ln x + \frac{2y}{x^3} \\ & u(x, y) = \int \left(1 + \ln x + \frac{2y}{x^3}\right) dx \\ & u(x, y) = x \ln x - \frac{y}{x^2} + c(y) \\ & \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} + c'(y) \\ & c'(y) = 3y^2 \\ & c(y) = y^3 \\ & c = x \ln x - \frac{y}{x^2} + y^3 \end{aligned}$$

$$x = 0 \Rightarrow u'_x dx + u'_y dy = 0 \Rightarrow x = 0 - \text{решение.}$$

Ответ: $c = x \ln x - \frac{y}{x^2} + y^3, x = 0$.

Вариант 1

3) Преобразовать уравнение с помощью подстановки, указать тип и метод интегрирования полученного ур-ия

$$y(x + \ln y) + (x - \ln y)y' = 0 \quad \ln y = \eta \quad d\eta = \frac{dy}{y}$$

$$\frac{dy}{d\eta}(x + \eta) + (x - \eta)\frac{dy}{dx} = 0 \quad | : dy$$

$$(x + \eta)dx + (x - \eta)d\eta = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \text{уравнение в полных дифференциалах}$$

метод решения:

$$\int_{x_0}^x (x + \eta)dx + \int_{\eta_0}^{\eta} (x - \eta)d\eta = u(x, y)$$

$$\frac{x^2}{2} + x\eta - \frac{\eta^2}{2} = c$$

$$\frac{x^2}{2} + x \ln y - \frac{\ln^2 y}{2} = c$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + x \ln y - \frac{\ln^2 y}{2} = c$

Вариант 1

4) Решить задачу Коши

$$dy = (y - 2)^{\frac{2}{3}} dx, \quad y|_{x=1} = 2$$

$$d(y - 2)(y - 2)^{-\frac{2}{3}} = dx, \quad y - 2 = t$$

$$\int t^{-\frac{2}{3}} dt = \int dx$$

$$3t^{\frac{1}{3}} = x + c$$

$$3(y - 2)^{\frac{1}{3}} = x + c$$

$$0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

$$3(y - 2)^{\frac{1}{3}} = x - 1$$

Ответ: $3(y - 2)^{\frac{1}{3}} = x - 1$.

Вариант 2

1) Указать тип и метод интегрирования ур-ий

а)

$$xy(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0$$

Тип: уравнение с разделяющимися переменными

Метод:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{y(1+y^2)}dy = 0$$

б)

$$\frac{(x)^2}{(x-y)^2}dy - \frac{(y)^2}{(x-y)^2}dx = 0$$

Тип: однородное уравнение степени 0

Метод:

$$\begin{aligned}\frac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} &= 0 \\ \frac{(tx)^2}{(tx-ty)^2}dy - \frac{(ty)^2}{(tx-ty)^2}dx &= 0 \\ \frac{t^2x^2}{t^2(x-y)^2}dy - \frac{t^2y^2}{(x-y)^2t^2}dx &= 0\end{aligned}$$

в)

$$(x^2 + y^2)dx - 2xy = 0$$

Тип: однородное уравнение степени 2

Метод:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)dx - 2xy &= 0 \\ ((xt)^2 + (yt)^2)dx - 2(tx)(ty) &= 0\end{aligned}$$

г)

$$(4 - x^2)y' + xy = 4$$

Тип: линейное по y уравнение

Метод:

$$y' + \frac{x}{4-x^2}y = 4$$

д)

$$y'tg(x) + 2y'tg(x)^2 = ay^2$$

Тип: уравнение Бернулли

Метод:

$$y'tg(x) + 2y'tg(x)^2 = ay^2$$

е)

$$xy' = x^2y^2 - y + 1$$

Тип: уравнение Риккати

Метод:

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2 + \frac{1}{x}$$

ж)

$$dx + (x + y^2)dy = 0$$

Тип: линейное по x

Метод:

$$x' + x = -y^2$$

Вариант 2

2) Проинтегрировать ур-ие, установив вид интегрирующего множителя

$$y^2(x - y)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

$$\int y^2(x - y)dx + \int (1 - xy^2)dy = C$$

$$x^2 - 2xy - \frac{2}{y} = C$$

$$y = 0$$

$$\mu = \mu(y) : \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-y^2 - (2xy - 3y^2)}{y^2(x - y)}$$

$$\mu = \mu(x) : \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2xy - 3y^2 - y^2}{1 - xy^2} = \frac{2y(x - 2y)}{1 - xy^2}$$

$$\mu' = \frac{2}{y^2}\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dy}{y^2}$$

$$\ln \mu = \ln y^{-2}$$

$$\mu = y^{-2}$$

Ответ: $x^2 - 2xy - \frac{2}{y} = C, y = 0$

Вариант 2

3) Преобразовать уравнение с помощью подстановки, указать тип и метод интегрирования полученного уравнения

$$y' = x + e^{x+2y}$$

$$\eta = e^{-2y}$$

$$d\eta = -2e^{-2y}dy$$

$$\frac{dy}{dx} = x + e^{x+2y}$$

$$e^{-2y}dy = (xe^{-2y} + e^x)dx$$

$$-\frac{1}{2}d\eta = (x\eta + e^x)dx$$

$$\eta' + 2x\eta = -2e^x \text{ - линейное по } \eta$$

$$\text{Ответ: } \eta' + 2x\eta + 2e^x = 0$$

Вариант 2

4) Решить задачу Коши

$$dy = x\sqrt{y}dx, y|_{x=1} = 0$$

$$x dx = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\sqrt{y} + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 4\sqrt{y} = 1$$

$$\text{Ответ: } x^2 - 4\sqrt{y} = 1$$