Лабораторная работа №1

Халина Ирина

№169

Найдя путем подбора частное решение, привести уравнение Риккати $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$ к уравнению Бернулли и решить его.

Решение. Подставим частное решение в виде $y_1(x) = ax + b$ в уравнение. Из полученного тождества составим систему уравнений относительно a и b и, решив ее, получим $a = 1, b = 0$ или $a = b = 1$. Положим $a = 1, b = 0$, тогда $y_1(x) = x$. Произведя замену $y = x + \frac{1}{z}$, получим уравнение:

$$-\frac{1}{z^2}(xz' + z - 1) = 0.$$

Тогда $z = 1 - xC$ и $y = x + \frac{1}{1-xC}$.
Ответ: $y = x + \frac{1}{1-xC}$.

№170

Найдя путем подбора частное решение, привести уравнение Риккати $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$ к уравнению Бернулли и решить его.

Решение. Подставим частное решение в виде $y_1(x) = ax + b$ в уравнение. Из полученного тождества составим систему уравнений относительно a и b и, решив ее, получим $a = 1, b = 2$ или $a = 1, b = -2$. Положим $a = 1, b = 2$, тогда $y_1(x) = x + 2$. Произведя замену $y = x + 2 + \frac{1}{z}$ получим уравнение:

$$\frac{1}{z^2}(z' + 4z + 1) = 0.$$

Тогда $z = \frac{Ce^{-4x}-1}{4}$ и $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{-4x}-1}$.
Ответ: $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{-4x}-1}$.

№171

Найдя путем подбора частное решение, привести уравнение Риккати $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$ к уравнению Бернулли и решить его.

Решение. Подставим частное решение в виде $y_1(x) = e^x + a$ в уравнение и получим $a = 0$, тогда $y_1(x) = e^x$. Произведя замену $y = e^x + z$ получим уравнение:

$$z' - z^2 = 0.$$

Тогда $z = -\frac{1}{x+C}$ и $y = e^x - \frac{1}{x+C}$.
Ответ: $y = e^x - \frac{1}{x+C}$.

№179

Пусть в уравнении $xy' + ay = f(x)$ имеем $a = const > 0, f(x) \longrightarrow b$ при $x \longrightarrow 0$. Показать, что только одно решение остается ограниченным при $x \longrightarrow 0$, и найти предел этого решения при $x \longrightarrow 0$.

Решение. Пусть общее решение уравнения:

$$y = \frac{C}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a}\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}d(|t|),$$

где $d(|t|) = sgntdt$, $t \neq 0$, $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow 0$. Тогда оценим

$$\frac{1}{|x|^a}|\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}d(|t|)| \leq \frac{1}{a}\sup_{0\leq t\leq x}|\varepsilon(t)| \longrightarrow 0, x \longrightarrow 0.$$

Следовательно, $\lim_{x\to 0} y$ существует только при $C = 0$ и равен $\frac{b}{a}$.

№180

Пусть в уравнении $xy' + ay = f(x)$ имеем $a = const < 0, f(x) \longrightarrow b$ при $x \longrightarrow 0$. Показать, что все решения этого уравнения имет один и тот же конечный предел при $x \longrightarrow 0$ и найти его.

Решение. Общее решение уравнения:

$$y = \frac{C}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a}\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|).$$

Если $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)$ - ограничен, то

$$\forall\, C\ \lim_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a}$$

Если $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)$ - не ограничен, то применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)}{|x|^a} = \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon(x)|x|^{a-1}}{a|x|^{a-1}} = 0$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a},\ \forall\, C$$

№181

Показать, что уравнение $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, где $|f(t)| \leq M$ при $-\inf < t < +\inf$, имеет одно решение, ограниченное при $-\inf < t < +\inf$, и найти его. Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

Решение. Представим общее решение заданного уравнения в виде:

$$x(t) = e^{-t} + e^{-t}\int_{-\infty}^t f(\tau)e^{\tau}d\tau$$

Такое представление возможно в силу того, что $\left|\int_{-\infty}^t f(\tau)e^{\tau}d\tau\right| \leq Me^t$, и, как следствие, несобственный интеграл сходится. Из неравенства также следует, что функция $e^{-t}\int_{-\infty}^t f(\tau)e^{\tau}d\tau$ ограничена числом M $\forall t \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом необходимым и достаточным условием ограниченности функции x является равенство $C = 0$. Искомое решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^t f(\tau)e^{\tau}d\tau$$

Пусть, далее:

$$\forall \tau \in (-\infty, +\infty) f(\tau + T) = f(\tau),\ T > 0$$

Тогда из искомого решения находим:

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^t f(\tau + T)e^{\tau}d\tau = e^{-(t+T)}\int_{-\infty}^{t+T} f(\tau_1)e^{\tau_1}d\tau_1 = x(t+T),$$

где $\tau_1 = \tau + T$. Следовательно, x - периодическая функция.