

Лабораторная работа №2

Лавринович Никита

Май 2022

№1.1

а)

Тип:

уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Метод:

$$\int_{x_0}^x \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^3} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(2x_0y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{3x_0^3}{y^3} \right) dy = u(x, y)$$

б)

Тип:

уравнение с разделяющимися переменными

Метод:

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = - \int \frac{dy}{y(1+y^2)}$$

в)

Тип:

однородное уравнение

Метод:

замена переменных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$
$$y = ux$$
$$dy = xdu + udx$$

$$2x^2 u dx - (x^2 - u^2 x^2)(xdu + udx) = 0$$
$$2x^2 u dx - x^3 du - x^2 u dx + u^2 x^3 du + u^3 x^2 dx = 0$$
$$(x^2 u + u^3 x^2) dx + (-x^3 + u^2 x^3) du = 0 \quad | : x^2$$

$$x'(u + u^3) + x(-1 + u^2) = 0 \quad (1)$$

(1) - линейно по x

$$\frac{dx}{du}(u + u^3) + x(-1 + u^2) = 0$$
$$\int \frac{dx}{du} = - \int \frac{(u^2 - 1)du}{u + u^3}$$

г)

Тип:

линейное уравнение по y

Метод:

метод Лагранжна

д)

Тип:

уравнение Бернулли по y, $m = -2$

Метод:

замена переменных

$$u = y^3$$
$$du = 3y^2 dy$$

е)

Тип:

уравнение Рикатти

Метод:

не решается в общем случае

ж)

Тип:

линейное уравнение по х

Метод:

метод Лагранжа

№1.2

$$\begin{aligned}(x^3 + x^3 \ln x + 2y)dx + (3y^2 x^3 - x)dy &= 0 \\ \Psi(y) : \quad \frac{Q'_x - P'_y}{P} &= \frac{9x^2 y^2 - 3}{x^3 + x^3 \ln(x) + 2y} = f(x, y) \Rightarrow \Psi \neq \Psi(y) \\ \Psi(x) : \quad \frac{P'_y - Q'_x}{Q} &= \frac{3 - 9x^2 y^2}{3x^3 y^2 - x} = \frac{3(1 - 3x^2 y^2)}{-x(1 - 3x^2 y^2)} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \Psi = \Psi(x) \\ \mu(x) &= e^{\int \Psi(x) dx} = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = x^{-3} \\ \left(1 + \ln(x) + \frac{2y}{x^3}\right) dx + \left(3y^2 + -\frac{1}{x^2}\right) dy &= 0, \quad x \neq 0 \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} &= \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

(2) - уравнение в полных дифференциалах

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 1 + \ln x + \frac{2y}{x^3} \\ u(x, y) &= \int \left(1 + \ln x + \frac{2y}{x^3}\right) dx \\ u(x, y) &= x \ln x - \frac{y}{x^2} + c(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{x^2} + c'(y) \\ c'(y) &= 3y^2\end{aligned}$$

$$c(y) = y^3$$

$$c = x \ln x - \frac{y}{x^2} + y^3$$

$$x = 0 \Rightarrow u'_x dx + u'_y dy = 0 \Rightarrow x = 0 - \text{решение.}$$

Ответ: $c = x \ln x - \frac{y}{x^2} + y^3, x = 0$.

№1.3

$$y(x + \ln y) + (x - \ln y)y' = 0 \quad \ln y = \eta \quad d\eta = \frac{dy}{y}$$

$$\frac{dy}{d\eta}(x + \eta) + (x - \eta)\frac{dy}{dx} = 0 \quad | : dy$$

$$(x + \eta)dx + (x - \eta)d\eta = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \Rightarrow \text{уравнение в полных дифференциалах}$$

метод решения:

$$\int_{x_0}^x (x + \eta)dx + \int_{\eta_0}^{\eta} (x - \eta)d\eta = u(x, y)$$

$$\frac{x^2}{2} + x\eta - \frac{\eta^2}{2} = c$$

$$\frac{x^2}{2} + x \ln y - \frac{\ln^2 y}{2} = c$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} + x \ln y - \frac{\ln^2 y}{2} = c$

№1.4

$$dy = (y - 2)^{\frac{2}{3}} dx, \quad y|_{x=1} = 2$$

$$d(y - 2)(y - 2)^{-\frac{2}{3}} = dx, \quad y - 2 = t$$

$$\int t^{-\frac{2}{3}} dt = \int dx$$

$$3t^{\frac{1}{3}} = x + c$$

$$3(y - 2)^{\frac{1}{3}} = x + c$$

$$0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$

$$3(y - 2)^{\frac{1}{3}} = x - 1$$

Ответ: $3(y - 2)^{\frac{1}{3}} = x - 1$.

№2.1

а)

Тип:

уравнение с разделяющимися переменными

Метод:

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{y(1+y^2)}dy = 0$$

б)

Тип:

однородное степени 0

Метод:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} &= 0 \\ \frac{(tx)^2}{(tx-ty)^2} dy - \frac{(ty)^2}{(tx-ty)^2} dx &= 0 \\ \frac{t^2 x^2}{t^2(x-y)^2} dy - \frac{t^2 y^2}{(x-y)^2 t^2} dx &= 0\end{aligned}$$

в)

Тип:

однородное степени 2

Метод:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)dx - 2xy &= 0 \\ ((xt)^2 + (yt)^2)dx - 2(tx)(ty) &= 0\end{aligned}$$

г)

Тип:

линейное по y

Метод:

$$y' + \frac{x}{4-x^2}y = 4$$

д)

Тип:

уравнение Бернулли

Метод:

$$y' \tan(x) + 2y \tan(x)^2 = ay^2$$

е)

Тип:

уравнение Риккати

Метод:

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2 + \frac{1}{x}$$

ж)

Тип:

линейное по x

Метод:

$$x' + x = -y^2$$

№2.2

$$y^2(x-y)dx + (1-xy^2)dy = 0$$

$$\int y^2(x-y)dx + \int (1-xy^2)dy = C$$

$$x^2 - 2xy - \frac{2}{y} = C$$

$$y = 0$$

$$\mu = \mu(y) : \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-y^2 - (2xy - 3y^2)}{y^2(x-y)}$$

$$\mu = \mu(x) : \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2xy - 3y^2 - y^2}{1 - xy^2} = \frac{2y(x - 2y)}{1 - xy^2}$$

$$\mu' = \frac{2}{y^2} \mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dy}{y^2}$$

$$\ln \mu = \ln y^{-2}$$

$$\mu = y^{-2}$$

$$\text{ОТВЕТ: } x^2 - 2xy - \frac{2}{y} = C, y = 0$$

№2.3

$$y' = x + e^{x+2y}$$

$$\eta = e^{-2y}$$

$$d\eta = -2e^{-2y} dy$$

$$\frac{dy}{dx} = x + e^{x+2y}$$

$$e^{-2y} dy = (xe^{-2y} + e^x) dx$$

$$-\frac{1}{2} d\eta = (x\eta + e^x) dx$$

$$\eta' + 2x\eta = -2e^x - \text{линейное по } \eta$$

$$\text{ОТВЕТ: } \eta' + 2x\eta + ae^x = 0$$

№2.4

$$dy = x\sqrt{y}dx, y|_{x=1} = 0$$

$$xdx = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\sqrt{y} + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 4\sqrt{y} = 1$$

$$\text{ОТВЕТ: } x^2 - 4\sqrt{y} = 1$$