

Дифференциальные уравнения

Варвара Бородина

Март 2022

№169

$$xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$$

Частное решение будет имеет вид:

$$y_1(x) = ax + b$$

Подставим его в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} ax - (2x + 1)(ax + b) + (ax + b)^2 &= -x^2 \\ ax - 2ax^2 - abx - ax - b + a^2x^2 + 2axb + b^2 &= -x^2 \end{aligned}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a^2 - 2a = -1 \\ 2ab - 2b = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 1, b = 0 \\ a = 1, b = 1 \end{cases}$$

Пусть $a = 1, b = 0$. Тогда $y_1(x) = x$ - частное решение. Сделаем замену:

$$y = x + \frac{1}{z} \tag{1}$$

Подставим замену в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} x \left(1 - \frac{z'}{z^2} \right) - (2x + 1) \left(x + \frac{1}{z} \right) + \left(x + \frac{1}{z} \right)^2 &= -x^2 \\ x - \frac{xz'}{z^2} - 2x^2 - \frac{2x}{z} - x - \frac{1}{z} + x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} &= -x^2 \end{aligned}$$

Получаем уравнение:

$$xz' + z - 1 = 0$$

Решаем уравнение методом Лагранжа:

$$xz' + z = 0$$

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln z + \ln x = \ln c$$

$$zx = c, z = \frac{c}{x}$$

$$z' = \frac{c'x - c}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x^2} &= \frac{1}{x} \\ \frac{c'}{x} &= \frac{1}{x} \\ c &= x + c_1 \\ z &= \frac{x + c_1}{x}\end{aligned}$$

Подставим значение z в уравнение (1):

$$y = x + \frac{x}{x + c_1}$$

Ответ: $y = x + \frac{x}{x + c_1}$

№170

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$$

Частное решение будет имеет вид:

$$y_1(x) = ax + b$$

Подставим его в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}a - 2x(ax + b) + a^2x^2 + 2abx + b^2 &= 5 - x^2 \\ a - 2ax^2 - 2xb + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 5 + x^2 &= 0\end{aligned}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2a + a^2 + 1 = 0 \\ -2b + 2ab = 0 \\ a + b^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 1, b = 2 \\ a = 1, b = -2 \end{cases}$$

Пусть $a = 1, b = 2$, тогда $y_1(x) = x + 2$ - частное решение. Сделаем замену:

$$y = x + 2 + \frac{1}{z} \tag{2}$$

Подставим замену в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}1 - \frac{z'}{z^2} - 2x \left(x + 2 + \frac{1}{z} \right) + x^2 + 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} + 2x \left(2 + \frac{1}{z} \right) &= 5 - x^2 \\ 1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{z} + x^2 + 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} + 4x + \frac{2x}{z} - 5 + x^2 &= 0\end{aligned}$$

Получаем уравнение:

$$z' - 4z - 1 = 0$$

Решаем уравнение методом Лагранжа:

$$\begin{aligned}z' - 4z &= 0 \\ \frac{dz}{z} - 4dx &= 0 \\ \ln z - 4x &= c \\ z &= e^{4x}c \\ z' &= 4e^{4x}c + e^{4x}c'\end{aligned}$$

$$4e^{4x}c + e^{4x}c' - 4e^{4x}c - 1 = 0$$

$$e^{4x}c' = 1$$

$$c' = e^{-4x}$$

$$c = -\frac{1}{4}e^{-4x} + c_1$$

$$z = -\frac{1}{4} + e^{4x}c_1$$

Подставим значение z в уравнение (2):

$$y = x + 2 + \frac{1}{-\frac{1}{4} + e^{4x}c_1} = x + 2 + \frac{4}{e^{4x}c - 1}$$

Ответ: $y = x + 2 + \frac{4}{e^{4x}c - 1}, y = 2 + x$

№ 171

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^x(e^x + 1)$$

Частное решение имеет вид:

$$y_1(x) = e^x + b$$

Подставим его в исходное уравнение:

$$e^x + 2e^{2x} + 2be^x - e^{2x} - 2be^x - b^2 = e^x(e^x + 1)$$

$$-b^2 = 0$$

$$b = 0$$

Частное решение $y_1(x)$ имеет вид:

$$y_1(x) = e^x$$

Сделаем замену в исходном уравнении:

$$y = y_1(x) + z = e^x + z \quad (3)$$

$$(e^x + z)' + 2(e^x + z)e^x - (e^x + z)^2 = e^x(e^x + 1)$$

$$e^x + z' + 2e^{2x} + 2ze^x - e^{2x} - 2ze^x - z^2 = e^{2x} + e^x$$

Получаем уравнение:

$$z' = z^2$$

Решаем его методом Лагранжа:

$$z' - z^2 = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} - z^2 = 0,$$

$$\frac{dz}{z^2} - \frac{dx}{1} = 0,$$

$$\frac{dz}{z^2} - \frac{dx}{1} = 0,$$

$$-\frac{1}{z} - x = c,$$

$$z = -\frac{1}{z + c},$$

Подставим значение z в уравнение (3):

$$y = e^x - \frac{1}{z + c}$$

Ответ: $y = e^x - \frac{1}{z + c}, y = e^x.$

№ 179

Общее уравнение имеет вид:

$$y = \frac{c}{|x|^a} + \frac{1}{|x|^a} \int_0^x f(t)|t|^{a-1}d(|t|),$$

где $d(|t|) = \text{sign}(t)dt$, $t \neq 0$, или

$$y = \frac{c}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a} \int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}d(|t|) \quad (4),$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ в силу условия. Вследствие оценки:

$$\frac{1}{|x|^a} \left| \int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}d(|t|) \right| \leq \frac{1}{a} \sup_{0 \leq t \leq x} |\varepsilon(t)| \rightarrow 0, x \rightarrow 0.$$

Из (4) следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} y$ существует и ограничен только при $c = 0$ и равен $\frac{b}{a}$. Искомое решение уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{|x|^a} \int_0^x f(t)|t|^{a-1}d(|t|)$$

№ 180

$$xy' + ay = f(x), a = \text{const} < 0, f \rightarrow b, x \rightarrow 0$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{C}{|x|^a} + \frac{1}{|x|^a} \int f(x)|x|^{a-1}d(|x|)$$

$$y(x) = \frac{C}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a} \int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)$$

Пусть $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)$ - ограничен, тогда:

$$\forall C \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \frac{b}{a}$$

Пусть $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)$ - не ограничен, тогда применим правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}d(|x|)}{|x|^a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x)|x|^{a-1}}{a|x|^{a-1}} = 0$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \frac{b}{a}, \forall C$$

№ 181

Представим общее решение заданного уравнения в виде:

$$x(t) = ce^{-t} + e^{-t} \int_{-\infty}^t f(\tau)e^{\tau}d\tau \quad (5)$$

Такое представление возможно в силу того, что:

$$\left| \int_{-\infty}^t f(\tau)e^{\tau}d\tau \right| \leq Me^t \quad (6),$$

И, как следствие, несобственный интеграл сходится. Из неравенства (6) также следует, что функция $e^{-t} \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{\tau} d\tau$ ограничена числом $M \forall t \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом необходимым и достаточным условием ограниченности функции x является равенство $c = 0$. Искомое решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{\tau} d\tau \quad (7)$$

Пусть, далее:

$$\forall \tau \in (-\infty, +\infty) f(\tau + T) = f(\tau), \quad T > 0$$

Тогда из (7) находим:

$$x(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^t f(\tau + T) e^{\tau} d\tau = e^{-(t+T)} \int_{-\infty}^{t+T} f(\tau_1) e^{\tau_1} d\tau_1 = x(t + T),$$

где $\tau_1 = \tau + T$. Следовательно, x - периодическая функция.