Дифференциальные уравненя

Горбунов Анатолий

29 мая 2022 г.

№169

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$$

Частное решение будет имеет вид:

$$y_1(x) = ax + b$$

Подставим его в исходное уравнение:

$$ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 = -x^2$$

$$ax - 2ax^2 - abx - ax - b + a^2x^2 + 2axb + b^2 = -x^2$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a^2 - 2a = -1 \\ 2ab - 2b = 0 \\ b^2 - b = 0 \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 1, b = 0 \\ a = 1, b = 1 \end{cases}$$

Пусть $a = 1, b = 0$. Тогда $y_1(x) = x$ - частное решение. Сделаем замену:

$$y = x + \frac{1}{z} \tag{1}$$

Подставим замену в исходное уравнение:

$$x\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 = -x^2$$

$$x - \frac{xz'}{z^2} - 2x^2 - \frac{2x}{z} - x - \frac{1}{z} + x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} = -x^2$$

Получаем уравнение:

$$xz' + z - 1 = 0$$

Решаем уравнение методом Лагранжа:

$$xz' + z = 0$$

$$z' + \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln z + \ln x = \ln c$$

$$zx = c, z = \frac{c}{x}$$

$$z' = \frac{c'x - c}{x^2}$$

$$\frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{c'}{x} = \frac{1}{x}$$

$$c = x + c_1$$

$$z = \frac{x + c_1}{x}$$

Подставим значение z в уравнение (1):

$$y = x + \frac{x}{x + c_1}$$

Ответ: $y = x + \frac{x}{x+c_1}$

№170

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$$

Частное решение будет имеет вид:

$$y_1(x) = ax + b$$

Подставим его в исходное уравнение:

$$a - 2x(ax + b) + a^2x^2 + 2abx + b^2 = 5 - x^2$$

$$a - 2ax^2 - 2xb + a^2x^2 + 2abx + b^2 - 5 + x^2 = 0$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2a + a^2 + 1 = 0 \\ -2b + 2ab = 0 \\ a + b^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Система имеет два решения:

$$\begin{cases} a = 1, b = 2 \\ a = 1, b = -2 \end{cases}$$

Пусть $a = 1, b = 2$, тогда $y_1(x) = x + 2$ - частное решение. Сделаем замену:

$$y = x + 2 + \frac{1}{z} \tag{2}$$

Подставим замену в исходное уравнение:

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x\left(x + 2 + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} + 2x\left(2 + \frac{1}{z}\right) = 5 - x^2$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} - 2x^2 - 4x - \frac{2x}{z} + x^2 + 4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} + 4x + \frac{2x}{z} - 5 + x^2 = 0$$

Получаем уравнение:

$$z' - 4z - 1 = 0$$

Решаем уравнение методом Лагранжа:

$$z' - 4z = 0$$

$$\frac{dz}{z} - 4dx = 0$$

$$\ln z - 4x = c$$

$$z = e^{4x}c$$

$$z' = 4e^{4x}c + e^{4x}c'$$

$$4e^{4x}c + e^{4x}c' - 4e^{4x}c - 1 = 0$$
$$e^{4x}c' = 1$$
$$c' = e^{-4x}$$
$$c = -\frac{1}{4}e^{-4x} + c_1$$
$$z = -\frac{1}{4} + e^{4x}c_1$$

Подставим значение z в уравнение (2):

$$y = x + 2 + \frac{1}{-\frac{1}{4} + e^{4x}c_1} = x + 2 + \frac{4}{e^{4x}c - 1}$$

Ответ: $y = x + 2 + \frac{4}{e^{4x}c-1}, y = 2 + x$

№ 171

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^x(e^x + 1)$$

Частное решение имеет вид:

$$y_1(x) = e^x + b$$

Подставим его в исходное уравнение:

$$e^x + 2e^{2x} + 2be^x - e^{2x} - 2be^x - b^2 = e^x(e^x + 1)$$
$$-b^2 = 0$$
$$b = 0$$

Частное решение $y_1(x)$ имеет вид:

$$y_1(x) = e^x$$

Сделаем замену в исходном уравнении:

$$y = y_1(x) + z = e^x + z \tag{3}$$
$$(e^x + z)' + 2(e^x + z)e^x - (e^x + z)^2 - = e^x(e^x + 1)$$
$$e^x + z' + 2e^{2x} + 2ze^x - e^{2x} - 2ze^x - z^2 = e^{2x} + e^x$$

Получаем уравнение:

$$z' = z^2$$

Решаем его методом Лагранжа:

$$z' - z^2 = 0,$$
$$\frac{dz}{dx} - z^2 = 0,$$
$$\frac{dz}{z^2} - \frac{dx}{1} = 0,$$
$$\frac{dz}{z^2} - \frac{dx}{1} = 0,$$
$$-\frac{1}{z} - x = c,$$
$$z = -\frac{1}{z + c},$$

Подставим значение z в уравнение (3):

$$y = e^x - \frac{1}{z + c}$$

Ответ: $y = e^x - \frac{1}{z+c}$, $y = e^x$.

№ 179

Общее уравнение имеет вид:

$$y = \frac{c}{|x|^a} + \frac{1}{|x|^a}\int_0^x f(t)|t|^{a-1} d(|t|),$$

где $d(|t|) = sign(t)dt$, $t \neq 0$, или

$$y = \frac{c}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a}\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1} d(|t|) \qquad (4),$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$ в силу условия. Вследствие оценки:

$$\frac{1}{|x|^a}\left|\int_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1} d(|t|)\right| \leq \frac{1}{a}\sup_{0\leq t\leq x}|\varepsilon(t)| \to 0, x \to 0.$$

Из (4) следует, что $\lim_{x\to 0} y$ существует и ограничен только при $c = 0$ и равен $\frac{b}{a}$. Искомое решение уравнения имеет вид:

$$y = \frac{1}{|x|^a}\int_0^x f(t)|t|^{a-1} d(|t|)$$

№ 180

$$xy' + ay = f(x), a = const < 0, f \to b, x \to 0$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{C}{|x|^a} + \frac{1}{|x|^a}\int f(x)|x|^{a-1} d(|x|)$$

$$y(x) = \frac{C}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a}\int \varepsilon(x)|x|^{a-1} d(|x|)$$

Пусть $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1} d(|x|)$ - ограничен, тогда:

$$\forall\ C\ \lim_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a}$$

Пусть $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1} d(|x|)$ - не ограничен, тогда применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int \varepsilon(x)|x|^{a-1} d(|x|)}{|x|^a} = \lim_{x\to 0}\frac{\epsilon(x)|x|^{a-1}}{a|x|^{a-1}} = 0$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \frac{b}{a},\ \forall\ C$$

№ 181

Представим общее решение заданного уравнения в виде:

$$x(t) = ce^{-t} + e^{-t}\int_{-\infty}^t f(\tau)e^\tau d\tau \qquad (5)$$

Такое представление возможно в силу того, что:

$$\left|\int_{-\infty}^t f(\tau)e^\tau d\tau\right| \leq Me^t \qquad (6),$$

И, как следствие, несобственный интеграл сходится. Из неравенства (6) также следует, что функция $e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}d\tau$ ограничена числом M $\forall t \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом необходимым и достаточным условием ограниченности функции x является равенство $c = 0$. Искомое решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}d\tau \tag{7}$$

Пусть, далее:

$$\forall\tau \in (-\infty, +\infty) f(\tau + T) = f(\tau),\ T > 0$$

Тогда из (7) находим:

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau + T)e^{\tau}d\tau = e^{-(t+T)}\int_{-\infty}^{t+T} f(\tau_1)e^{\tau_1}d\tau_1 = x(t + T),$$

где $\tau_1 = \tau + T$. Следовательно, x - периодическая функция.