Лабораторная работа 2

Лиходиевский Аркадий Анатольевич

Вариант 1

№1

а) Тип уравнений: уранение в полных дифференциалах

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy - \frac{6x^2}{y^3}$$

Метод решения: через КРИ-2

$$\int_{x_0}^{x} \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3x^2}{y^2}\right) dx + \int_{y_0}^{y} \left(2x_0^2 y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x_0^3}{y^3}\right) dy = u(x,y)$$

б) Тип уравнений: уранение с разделяющимися переменными

Метод решения: разделить переменные и проинтегрировать слева и справа

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = -\int \frac{dy}{y(1+y^2)}$$

в) Тип уравнений: однородное уранение

$$\frac{Q'_x - P'_x}{p} = \frac{-4x}{2xy} = \frac{-2}{y} = f(y)$$

$$\frac{\mu'_y}{\mu} = \frac{-2}{y}$$

Метод решения: через интегрирующий множитель

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{y}dy$$

$$\ln\mu = -2\ln y$$

$$\mu = y^{-2}$$

г) Тип уравнений: линейное по у уравнение

Метод решения: метод Лагранжна вариации произвольной постоянной

д) Тип уравнений: уравнение Бернулли по у, $m = -2$

Метод решения: заменой переменных сводим к линейному

$$u = y^{1-m} = y^3, \quad du = 3y^2dy$$

е) Тип уравнений: уравнение Рикатти

Метод решения: не решается в общем случае

ж) Тип уравнений: линейное по х уравнение

Метод решения: метод Лагранжа вариации произвольной постоянной

№2

$$(x^3+x^3\ln x+2y)dx+(3y^2x^3-x)dy=0$$

$$\Psi(y):\quad \frac{Q'_x-P'_y}{P}=\frac{9x^2y^2-3}{x^3+x^3\ln(x)+2y}=f(x,y)\Rightarrow\Psi\neq\Psi(y)$$

$$\Psi(x):\quad \frac{P'_y-Q'_x}{Q}=\frac{3-9x^2y^2}{3x^3y^2-x}=\frac{3(1-3x^2y^2)}{-x(1-3x^2y^2)}=-\frac{3}{x}\Rightarrow\Psi=\Psi(x)$$

$$\mu(x)=e^{\int\Psi(x)dx}=e^{-\int\frac{3}{x}dx}=e^{-3\ln x}=x^{-3}$$

$$\left(1+\ln(x)+\frac{2y}{x^3}\right)dx+\left(3y^2+-\frac{1}{x^2}\right)dy=0,\quad x\neq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{2}{x^3}$$

получили уравнение в полнных дифференциалах

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+\ln x+\frac{2y}{x^3}$$

$$u(x,y)=\int\left(1+\ln x+\frac{2y}{x^3}\right)dx$$

$$u(x,y)=x+x\ln x-x-\frac{y}{x^2}+c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}+c'(y)$$

$$c'(y)=3y^2$$

$$c(y)=y^3$$

$$u(x,y)=x\ln x-\frac{y}{x^2}+y^3=c$$

Ответ: $x\ln x-\frac{y}{x^2}+y^3=c$.

№3

$$y(x+\ln y)+(x-\ln y)y'=0\quad \ln y=\eta,\quad d\eta=\frac{dy}{y}$$

$$\frac{dy}{d\eta}(x+\eta)+(x-\eta)\frac{dy}{dx}=0\quad |:dy$$

$$(x+\eta)dx+(x-\eta)d\eta=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1\Rightarrow \text{уравнение в полных дифференциалах}$$

Метод решения: через КРИ-2

$$\int_{x_0}^{x}(x+\eta)dx+\int_{\eta_0}^{\eta}(x-\eta)d\eta=u(x,y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + x\eta - \frac{\eta^2}{2} = c$$
$$\frac{x^2}{2} + x\ln y - \frac{\ln^2 y}{2} = c$$
Ответ:$\frac{x^2}{2} + x\ln y - \frac{\ln^2 y}{2} = c$

№4

$$dy = (y-2)^{\frac{2}{3}}dx, \quad y|_{x=1} = 2$$
$$\frac{dy}{(y-2)^{\frac{2}{3}}} = dx, \quad y-2=t$$
$$\int t^{-\frac{2}{3}}dt = \int dx$$
$$3t^{\frac{1}{3}} = x + c$$
$$3(y-2)^{\frac{1}{3}} = x + c$$
$$0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$$
$$3(y-2)^{\frac{1}{3}} = x - 1$$
Ответ: $x = 1 + 3(y-2)^{\frac{1}{3}}$.

Вариант 2

№1

а) Тип уравнений: уравнение с разделяющимися переменными

Метод решения: разделить переменные и проинтегрировать слева и справа
$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{1}{y(1+y^2)}dy = 0$$

б) Тип уравнений: однородное степени 0

Метод решения: диффеоморфная замена перемнных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$

$$y = ux, \quad dy = xdu + udx$$

в) Тип уравнений: однородное второй степени

Метод решения: диффеоморфная замена перемнных

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = x \end{cases}$$

$$y = ux, \quad dy = xdu + udx$$

г) Тип уравнений: линейное по y

Метод решения: метод Бернули

д) Тип уравнений: уравнение Бернули

Метод решения: заменой переменных сводим к линейному

$$u = y^{1-m}$$

е) Тип уравнений: уравнение Риккати

Метод решения: не решается в общем случае

ж) Тип уравнений: линейное по x

Метод решения: метод Бернули

№2

$$y^2(x-y)dx + (1-xy^2)dy = 0$$

$$\mu = \mu(y) : \frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{-y^2 - (2xy - 3y^2)}{y^2(x-y)} = \frac{-2y(x-y)}{y^2(x-y)} => \mu = \mu(y)$$

$$\mu' = \frac{2}{y}\mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dy}{y}$$

$$\ln\mu = \ln y^{-2}$$

$$\mu = y^{-2}$$

$$(x-y)dx + (\frac{1}{y^2} - x)dy = 0$$

уравнение в полных дифференциалах, т к

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int_0^x \Big(x-y)dx + \int_0^y \Big(\frac{1}{y^2} - x_0)dy = u(x,y)$$

Ответ: $u(x,y) = x^2 - xy - \frac{2}{y}$

№3

$$y' = x + e^{x+2y}$$

$$\eta = e^{-2y}, \quad d\eta = -2e^{-2y}dy$$

$$\frac{dy}{dx} = x + e^{x+2y}$$

$$\frac{d\eta}{-2\eta dx} = x + \frac{e^x}{\eta}$$

$$e^{-2y}dy = (xe^{-2y} + e^x)dx$$

$$\eta' + 2\eta x = e^x$$

линейное по η , решаем методом Лагранжа

№4

$$dy = x\sqrt{y}dx, y|_{x=1} = 0$$

$$xdx = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

интегрируем слева и справа

$$\frac{x^2}{2} = 2\sqrt{y} + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 4\sqrt{y} = 1$$

Ответ: $x^2 - 4\sqrt{y} = 1$