БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАВДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №3

"Уравнения в общей форме"

Студента 2 курса 10 группы
Свирид Полины Дмитриевны

Минск, 2022

Вариант 1

1. Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро:

а) $2xy' - y = \ln y'$

Уравнение Лагранжа

Замена $y' = p \Rightarrow dy = pdx-$ основное соотношение

$2xp - y = \ln p$

$y = 2xp - \ln p$

$dy = 2pdx + 2xdp - \dfrac{1}{p}dp$

$pdx = 2pdx + 2xdp - \dfrac{1}{p}dp$

$-pdx = 2xdp - \dfrac{1}{p}dp$

$-px' = 2x - \dfrac{1}{p}$

$\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{2}{p} \Rightarrow x = \dfrac{C}{p^2}$

$x' = \dfrac{C'}{p^2} - \dfrac{2C}{p^3}$

$-\dfrac{C'}{p} + \dfrac{2C}{p^2} = \dfrac{2C}{p^2} - \dfrac{1}{p}$

$C' = 1 \Rightarrow C = p + C_1$

$x = \dfrac{p + C_1}{p^2} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{C_1}{p^2}$

Дополнительное иследование случая: $p = 0 \Rightarrow y' = const$
$y' \neq 0$, т.к. ln в нуле не определен

$$\textbf{Ответ:}\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{p} + \dfrac{C_1}{p^2} \\ y = -\ln p + 2 + \dfrac{2C_1}{p} \end{cases}$$

б) $y = xy' - y'^2$

Уравнение Клеро

Замена $y' = p \Rightarrow dy = pdx -$ основное соотношение

$dy = pdx + xdp - 2pdp$

$pdx = pdx + xdp - 2pdp$

$(2p - x)dp = 0 \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow p = y' = const = C$

$y = Cx - C^2$

Дополнительное исседование случая: $x - 2p = 0$

$\frac{x}{2} = p = y' \quad \frac{xdx}{2} = p = dy \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C$

$\frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$

Ответ: $y = Cx - C^2, y = \frac{x^2}{4}$

2. Проинтегрировать уравнение $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$

$y' = z$

$zz'' - 3(z')^2 = 0$

$z' = p(z); \qquad z'' = p'p$

$zp'p - 3p^2 = 0$

$zp' - 3p = 0$

$p' = \frac{3p}{z} \qquad \frac{dp}{3p} = \frac{dz}{z} \qquad \ln p = 3 \ln C_1 z \Rightarrow p = C_1 z^3$

$z' = p = C_1 z^3 \qquad \frac{dz}{C_1 z^3} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1 z^2} = x + C_2$

$z^2 = \frac{1}{C_1 x + C_2} \Rightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{C_1 x + C_2}}$

$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 x + C_2}}$

$\pm y = \frac{2\sqrt{C_1 x + C_2}}{C_1} + C_3$

Дополнительное исседование случая: $p = 0 \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z = const$

$y' = const \Rightarrow y = C_1 x + C_2$

Ответ: $\pm y = \frac{2\sqrt{C_1 x + C_2}}{C_1} + C_3$, $y = C_1 x + C_2$

3. Понизить порядок уравнения $2x^3y''' - x^2y'' = (y'')^2$ и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

$2x^3y''' - x^2y'' = (y'')^2$

$y'' = z \Rightarrow 2x^3z' - x^2z = z^2$

$z' = \dfrac{z^2}{2x^3} + \dfrac{z}{2x}$

Тип: Уранение Риккати

Метод интегрирования: В общем случае алгоритма решения уравнения Риккати не существует. Однако, если известно частное решение, то уравнение можно свести к уравнению Бернулли, с помощью замены $y = U + y_0$, где y_0- частное решение

4. Решить уравнение в точных производных $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 3x^2$

$y' + \dfrac{y}{x} = x^3 + C_1$

$\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow y = \dfrac{C_2}{x}$

$y' = \dfrac{C_2'}{x} - \dfrac{C_2}{x^2}$

$\dfrac{C_2'}{x} - \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{C_2}{x^2} = x^3 + C_1$

$C_2' = x^4 + C_1x \Rightarrow C_2 = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{C_1x^2}{2} + C_3$

$y = \dfrac{x^4}{5} + \dfrac{C_1x}{2} + \dfrac{C_3}{x}$

$y = \dfrac{x^4}{5} + C_1x + \dfrac{C_3}{x}$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{5} + C_1x + \dfrac{C_3}{x}$

Вариант 2

1. Проинтегрировать уравнения Лагранжа и Клеро:

а) $2xy' - y = \cos y'$

Уравнение Лагранжа

Замена $y' = p \Rightarrow dy = pdx-$ основное соотношение

$2xp - y = \cos p$

$y = 2xp - \cos p$

$dy = 2pdx + 2xdp + \sin pdp$

$pdx = 2pdx + 2xdp + \sin pdp$

$-pdx = 2xdp + \sin pdp$

$-px' = 2x + \sin p$

$\frac{dx}{x} = -\frac{2}{p} \Rightarrow x = \frac{C}{p^2}$

$x' = \frac{C'}{p^2} - \frac{2C}{p^3}$

$-\frac{C'}{p} + \frac{2C}{p^2} = \frac{2C}{p^2} + \sin p$

$C' = -p\sin p \Rightarrow C = \int -p\sin p\,\mathrm{d}p = \begin{bmatrix} u = p & dv = -\sin pdp \\ du = dp & v = \cos p \end{bmatrix} = p\cos p - \int \cos p\,\mathrm{d}p = p\cos p - \sin p + C_1$

$$\begin{cases} x = \frac{\cos}{p} - \frac{\sin p}{p^2} + \frac{C_1}{p^2} \\ y = 2(\frac{C_1}{p} - \sin p) + \cos p \end{cases}$$

Дополнительное исседование случая: $dp = 0 \Rightarrow p = y' = const \Rightarrow y' = C_1x + C_2$

$2xC_1 - C_1x - C_2 = \cos C_1 \Rightarrow C_1 = 0,\, C_2 = -1 \Rightarrow y = -1$

Ответ: $$\begin{cases} x = \frac{\cos}{p} - \frac{\sin p}{p^2} + \frac{C_1}{p^2} \\ y = 2(\frac{C_1}{p}\sin p) + \cos p \end{cases}, y = -1$$

б) $y = xy' - (2 + y'^2)$

Уравнение Клеро

Замена $y' = p \Rightarrow dy = pdx-$ основное соотношение

$dy = pdx + xdp - 2pdp$

$pdx = pdx + xdp - 2pdp$

$(x-2p)dp = 0 \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow p = y' = const = C$

$y = Cx - C^2 - 2$

Дополнительное исседование случая: $x - 2p = 0$

$\frac{x}{2} = p = y' \quad \frac{xdx}{2} = p = dy \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C$

$\frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} - 2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow C = -2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} - 2$

Ответ: $y = Cx - C^2 - 2, y = \frac{x^2}{4} - 2$

2. Проинтегрировать уравнение $2yy'' + (y')^2 = 0$

$y' = p \qquad y'' = pp'$

$p^2 + 2ypp' = 0 \qquad p = 0 \Rightarrow y = C$

$p + 2yp' = 0 \qquad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y} \Rightarrow p = \frac{C_1}{\sqrt{y}} = y'$

$\frac{dy\sqrt{y}}{C_1} = dx \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{y^{3/2}}{C_1} = x + C_2$

$\frac{4}{9}\frac{y^3}{C_1^2} = (x + C_2)^2$

$4y^3 = 9C_1(x + C_2)^2$

Ответ: $4y^3 = 9C_1(x + C_2)^2$, $y = C$

3. Понизить порядок уравнения $(y'')^2 + y' = xy''$ и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

$(y'')^2 + y' = xy''$

$y' = z \Rightarrow (z')^2 + z = xz'$

Тип: Уранение Клеро

Метод интегрирования: Замена $z' = p$. Решение уравнение сводикся к $y = C$ и рассмотрению случая $x + \phi'(p) = 0$.

4. Решить уравнение в точных производных $yy'' + (y')^2 = 1$

$yy'' + (y')^2 = 1$

$yy' = x + C$

$ydy = (x + C)dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + Cx + C_1$

$y^2 = x^2 + Cx + C_1$

Ответ: $y^2 = x^2 + Cx + C_1$