Лабораторная работа №2

Халина Ирина

Вариант 1

Задание 1а

Проинтегрировать уравнение Лагранжа $2xy' - y = \ln y'$.

Решение.

$$y = 2xy' - \ln y'.$$

Используя замену $\dfrac{dy}{dx} = p$ и дифференцируя, получим:

$$y = 2xp - \ln p, \tag{1}$$

$$pdx = 2xdp + 2pdx - \frac{dp}{p},$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^2}. \tag{2}$$

Уравнение (2) линейно относительно x. Применим метод Лагранжа:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p},$$

$$\ln x = \ln Cp^{-2},$$

$$x = Cp^{-2}.$$

Положим $C = C(p)$, тогда:

$$x = C(p)p^{-2}, \tag{3}$$

$$x' = C'(p)p^{-2} - 2C(p)p^{-3}.$$

Подставляя x и x' в уравнение (2), найдем $C(p)$:

$$C'(p)p^{-2} = p^{-2},$$

$$C(p) = p + C_1.$$

Подставим $C(p)$ в уравнение (3), а x в уравнение (1):

$$x = \frac{1}{p} + \frac{C_1}{p^2},$$

$$y = 2 + \frac{2C_1}{p} - \ln p.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{p} + \dfrac{C_1}{p^2}$, $y = 2 + \dfrac{2C_1}{p} - \ln p$.

Задание 1б

Проинтегрировать уравнение Клеро $y = xy' - y'^2$.

Решение.

Используя замену $\dfrac{dy}{dx} = p$ и дифференцируя, получим:

$$y = xp - p^2,$$
$$dp(x - 2p) = 0.$$

Приравнивая dp к нулю получим, что $p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$. Приравнивая $x - 2p$ к нулю и исключая p получим особое решение $y = \frac{1}{4}x^2$.
Ответ: $y = Cx - C^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$.

Задание 2

Проинтегрировать уравнение $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$.

Решение.

Используя замену $y' = z$, получим $zz'' - 3(z')^2 = 0$. В полученное уравнение подставим замену $z' = p$, $z'' = p'p$, тогда:

$$zp' - 3p = 0, \quad p \neq 0,$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{3dz}{z},$$
$$\ln p = \ln C_1 z^3,$$
$$p = C_1 z^3.$$

Приравнивая z' к p, получим:

$$\frac{dz}{dx} = C_1 z^3,$$
$$\frac{dz}{z^3} = C_1 dx,$$
$$\frac{1}{z^2} = C_1 x + C_2,$$
$$|z| = \frac{1}{\sqrt{C_1 x + C_2}}.$$

Делая обратную замену и интегрируя, получим:

$$\pm y = \frac{2\sqrt{C_1 x + C_2}}{C_1} + C_2.$$

Рассмотрим случай $p = 0$:

$$z' = 0 \Rightarrow z = C_1 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2.$$

Ответ: $\pm y = \dfrac{2\sqrt{C_1 x + C_2}}{C_1} + C_2$, $y = C_1 x + C_2$.

Задание 3

Понизить порядок уравнения $2x^3y''' - y''x^2 = (y'')^3$ и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

Решение.

Используя замену $y'' = p$, получим:

$$2x^3p' - px^2 = p^3,$$

$$2x^3\frac{dp}{dx} - px^2 = p^3,$$

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{2x} = \frac{p^3}{2x^3}.$$

Ответ: тип - уравнение Бернулли, метод - замена $z = \frac{1}{p^2}$.

Задание 4

Проинтегрировать уравнение в точных производных $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2} = 3x^2$.

Решение.

Преобразуя уравнение, получим линейное уравнение относительно y. Решим с помощью метода Лагранжа:

$$y'' = (\frac{y}{x} + x^3)',$$

$$y' = \frac{y}{x} + x^3 + C_1,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln\frac{C_2}{x} \Rightarrow y = \frac{C_2}{x},$$

$$C_2' = x^4 + C_1x \Rightarrow C_2 = \frac{x^5}{5} + \frac{C_1x^2}{2} + C_3,$$

$$y = \frac{x^4}{5} + C_1x + \frac{C_3}{x}.$$

Ответ: $y = \dfrac{x^4}{5} + C_1x + \frac{C_3}{x}$.

Вариант 2

Задание 1а

Проинтегрировать уравнение Лагранжа $2xy' - y = \cos y'$.

Решение.

$$y = 2xy' - \cos y'.$$

Используя замену $\dfrac{dy}{dx} = p$ и дифференцируя, получим:

$$y = 2xp - \cos p, \tag{4}$$

$$pdx = 2xdp + 2pdx + \sin p dp,$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{\sin p}{p}. \tag{5}$$

Уравнение (5) линейно относительно x. Применим метод Лагранжа:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 0,$$
$$\frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p},$$
$$\ln x = \ln Cp^{-2},$$
$$x = Cp^{-2}.$$

Положим $C = C(p)$, тогда:

$$x = C(p)p^{-2}, \tag{6}$$
$$x' = C'(p)p^{-2} - 2C(p)p^{-3}.$$

Подставляя x и x' в уравнение (2), найдем $C(p)$:

$$C'(p)p^{-2} = \frac{\sin p}{p},$$
$$C(p) = \sin p - p\cos p + C_1.$$

Подставим $C(p)$ в уравнение (6), а x в уравнение (4):

$$x = \frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p} + \frac{C_1}{p^2},$$
$$y = 2\frac{\sin p}{p} - 3\cos p + \frac{2C_1}{p}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\sin p}{p^2} - \dfrac{\cos p}{p} + \dfrac{C_1}{p^2}$, $y = 2\dfrac{\sin p}{p} - 3\cos p + \dfrac{2C_1}{p}$.

Задание 1б

Проинтегрировать уравнение Клеро $y = xy' - (2 + y'^2)$.

Решение.

Используя замену $\dfrac{dy}{dx} = p$ и дифференцируя, получим:

$$y = xp - (2 + p^2),$$
$$dp(x - 2p) = 0.$$

Приравнивая dp к нулю получим, что $p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$. Приравнивая $x - 2p$ к нулю и исключая p получим особое решение $y = \frac{1}{4}x^2 + C$.
Ответ: $y = Cx - C^2$, $y = \frac{1}{4}x^2 + C$.

Задание 2

Проинтегрировать уравнение $2yy'' + y'^2 = 0$.

Решение.

Используя замену $y' = p$, получим $2yp'p + p^2 = 0$. Тогда:

$$2yp' + p = 0, \quad p \neq 0,$$
$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y},$$
$$\ln p = \ln C_1 y^{-1/2},$$
$$p = C_1 y^{-1/2}.$$

Приравнивая y' к p, получим:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^{-1/2},$$
$$\frac{dy}{y^{-1/2}} = C_1 dx,$$
$$y = \sqrt[3]{(C_1 x + C_2)^2}.$$

Рассмотрим случай $p = 0$:

$$y' = 0 \Rightarrow y = C_1.$$

Ответ: $y = \sqrt[3]{(C_1 x + C_2)^2}$, $y = C_1$.

Задание 3

Понизить порядок уравнения $(y'')^2 + y' = xy''$ и указать тип и метод интегрирования полученного уравнения.

Решение.

Используя замену $y' = p$, получим:

$$p'^2 + p = xp',$$
$$p = xp' - p'^2.$$

Ответ: тип - уравнение Клеро, метод - замена $p' = t$.

Задание 4

Проинтегрировать уравнение в точных производных $yy'' + y'^2 = 1$.

Решение.

Преобразуя уравнение, получим и решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$yy' = x + C_1,$$
$$ydy = (x + C_1)dx,$$
$$y^2 = x^2 + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y^2 = x^2 + C_1 x + C_2$.