Лабораторная работа 3

Лавринович Никита

Май 2022

Вариант 2

1) Проинтегрировать ур-ия Лагранжа и Клеро

а) $2xy' - y = cosy'$

$$y = 2xy' - cosy' \text{ - уравнение Лагранжа}$$

$$\text{Замена } y' = p \Rightarrow dy = pdx, dy = 2pdx + 2xdp + \sin(p)dp$$

$$2pdx + (2x + \sin(p))dp = pdx, -pdx = (2x + \sin(p))dp$$

$$-px' = 2x + \sin(p), x' + \frac{2}{p} = -\frac{\sin(p)}{p} \text{ - линейное, } p \neq 0$$

Решаем методом Лагранжа:

$$x' + \frac{2}{p} = 0, \frac{dx}{x} = -\frac{2}{p}dp, \ln x = \ln p^{-2}$$

$$x = cp^{-2}$$

$$c = c(x):$$

$$x' = c'p^{-2} - 2cp^{-3}$$

$$c'p^{-2} - 2cp^{-3} + 2cp^{-2} = -\frac{\sin(p)}{p}, c' = -p\sin(p)$$

$$c = \int p\sin(p)dp = p\cos(p) - \sin(p) + c_1$$

$$x = \frac{1}{p^2}(p\cos(p) - \sin(p) + c_1) = \frac{1}{p}\cos(p) - \frac{1}{p^2}\sin(p) + \frac{c_1}{p^2}$$

$$p = 0 : y' = 0 \Rightarrow y = const \Rightarrow y = -1$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\cos(p)}{p} + \frac{c_1 - \sin(p)}{p^2} \\ y = \cos(p) + 2\frac{c_1 - \sin(p)}{p} \end{cases}$ $, y = -1$

б) $y = xy' - (2 + (y')^2)$ - уравнение Клеро

Замена y' = p

$$\Rightarrow y = px - (2 + p^2)$$

$$dy = xdp + pdx - 2pdp, dy = pdx$$

$$xdp + pdx - 2pdp = pdx \Rightarrow xpd - 2pdp = 0 \Rightarrow (x - 2p)dp = 0$$

$$dp = 0 \Rightarrow p = const$$

$$y' = p \Rightarrow y = c_1 x + c_2$$

$$x = 2p$$

$$y' = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + C$$

Ответ:

$$y = \frac{x^2}{4} + C, y = c_1 x + c_2,$$

2) Проинтегрировать уравнение

$$2yy'' + (y')^2 = 0$$

Уравнение не содержащее явно x:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Замена:

$$y' = p(y)$$
$$y'' = p'y' = p'p$$
$$2ypp' + p^2 = 0, p' + \frac{p}{2y} = 0, p \neq 0, y \neq 0$$
$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}, \ln(p) = \ln(cy^{-\frac{1}{2}})$$

$$p = cy^{-\frac{1}{2}}, y' = cy^{-\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$y^{\frac{1}{2}} dy = cdx$$

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = c_1 x + c_2$$

Особое решение: p = 0, y' = 0 $\Rightarrow y = const$: y = const

3) Понизить порядок ур-ия и указать тип и метод интегрирования полученного ур-ия

$$(y'')^2 + y' = xy''$$

Замена:

$$y' = p \Rightarrow y'' = p'$$

$$(p')^2 + p = xp$$

$$p = xp' - (p')^2 \text{ - уравнение Клеро}$$

Выполним замену: p' = t и решаем как в номере 1)

4) Проинтегрировать ур-ие в точных призводных

$$yy'' + (y')^2 = 1$$

Подобрали первообразные слева и справа

$$yy' = x + c$$

$$y' = \frac{x+c}{y}, \frac{dy}{dx} = \frac{x+c}{y}$$

$$ydy = (x+c)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

Ответ: $y^2 = x^2 + c_1 x + c_2$