

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della
popolazione tra città su reti spaziali mediante la
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1 INTRODUZIONE	5
2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1 Definizioni miscellanee	9
2.2 Reti e città	10
2.3 Cenni sui dati	11
3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	15
3.1 Definizioni preliminari di probabilità	15
3.2 Descrizione cinetica di [tipo] Boltzmann	18
3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea	18
3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea	23
3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea	24
3.3 Descrizione cinetica urbana su reti	27
3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta	27
3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata	31
3.3.3 Nesso discreto-continuo	34
4 SIMULAZIONI	37
4.1 Premesse	37
4.1.1 Metodo Monte Carlo	37
4.1.2 Fluttuazioni	37
4.1.3 Grafici	37
4.2 Regole d'emigrazione	37
4.2.1 Popolazione	38
4.2.2 Popolazione-Connettività	38
4.2.3 Popolazione-Connettività frazionata	38
4.2.4 Popolazione-Forza	38
4.3 Interpretazione	38
5 CONCLUSIONI	39
APPENDICE	41
A Codice	41
ELENCO DELLE FIGURE	43
ELENCO DELLE TABELLE	45

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [16] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1.1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1.1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se in luogo di f si scrive la popolazione s [16, Fig. 9-2, p. 375]; tuttavia ciò è vero solo qualora $s \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1.1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia S la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_S(s)$ la sua funzione di densità di probabilità², la quale permette d'interpretare $f_S(s)ds$ come il numero di città con $s \in (s, s+dt)$; allora si dice che S segue una distribuzione di Pareto nella coda se soddisfa

$$R(s) \equiv \int_s^{+\infty} f_S(t)dt \approx \frac{c}{s^p} \quad \text{se } s \gg 1, \quad (1.2)$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}_+$ e con $R(s)$ uguale alla funzione di ripartizione complementare di S : essa rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a s e, qualora l'indice di Pareto p fosse unitario, è analoga al rango r nella (1.1).

Più recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_S(s)$ è ben fittata dalla distribuzione lognormale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3)$$

ove $X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$; come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹ In realtà, come Zipf stesso ammette [16, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

² Affinché $f_S(s)$ esista bisogna rigorosamente anche supporre che S sia assolutamente continua, ma qui non è necessario entrare nei dettagli per i quali si rimanda ai §§ 3.1 e 3.3.

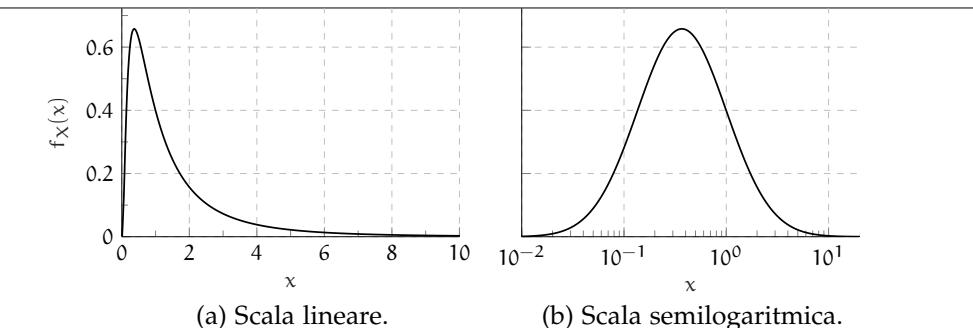


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che per fissare l’intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (1.3)

$$f_S(s) = \xi f_{S_1}(s) + (1-\xi) f_{S_2}(s), \quad (1.4)$$

ove $\xi \in (0,1)$ è un parametro da fissare tanto quanto le medie e le varianze associate a $S_1, S_2 \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$, per un totale di 5 parametri.

Pertanto l’obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (**TCSMA**) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d’interazione riguardo al fenomeno dell’emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell’autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- ◊ o applicano la **TCSMA** alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la **TCSMA** [3];
- ◊ altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [11];
- ◊ infine, l’articolo che piú si avvicina all’obbiettivo di questa tesi applica, tuttavia, la sua teoria nel contesto delle reti sociali [14].

³ In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s’intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della
60 teoria dei grafi applicata alla **TCSMA** sono stati piuttosto recenti e prin-
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la **TCSMA** è ap-
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza). Sia $N \equiv |\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero di vertici totali, si definisce la matrice d'adiacenza $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ pesata come:

$$w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso associato al lato (i, j) ; nel caso in cui $q_{i,j} \equiv 1 \forall i, j \in \mathcal{I}$ si ha la matrice d'adiacenza unitaria $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si osserva che, se non altrimenti detto, scrivendo solo «matrice d'adiacenza» si sottintende sempre l'unitarietà.

Osservazione 2.1. Per i grafi indiretti sia \mathbf{W} che \mathbf{A} sono simmetriche mentre per quelli diretti non è detto che sia così.

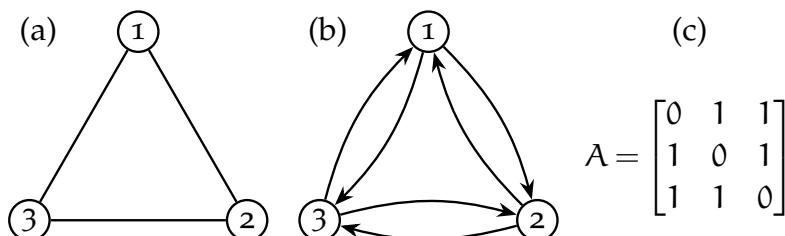


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

98 **Definizione 2.4** (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice $i \in J$, in
 99 un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i}; \quad (2.3)$$

100 d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più
 101 [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado
 102 entrante e uscente

$$k_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j}, \quad (2.4)$$

103 rispettivamente.

104 Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2.3, 2.4) ma con
 105 $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

106 2.2 RETI E CITTÀ

107 Dopo aver illustrato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il proble-
 108 ma di come rappresentare con essi la moltitudine di collegamenti possibili
 109 tra le città

110 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i
 111 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati
 112 e le loro intersezioni come nodi [13, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la
 113 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [13, § 3.2.1 p. 22]; altri si
 114 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in
 115 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [13, § 3.1.3.2 p. 17], navale
 116 [13, § 3.1.4 p. 19], aereo [13, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

117 Tuttavia, da quanto detto nella Cap. 1, è chiaro che per predire la distribu-
 118 zione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 119 1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono
 120 troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola
 121 città;
- 122 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contempora-
 123 neamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere
 124 diversi trasporti per muoversi.

125 Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti
 126 pendolari [13, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutti i
 127 possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre
 128 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché
 129 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

130 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di
 131 grafo con cui si ha a che fare; eppure qui la risposta è immediata: un ente,
 132 ovvero una città, può interagire con un secondo senza che questo interagisca
 133 a sua volta col primo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico
 134 ([2.2](#)) perché il contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

135 **Ipotesi 2.1.** Il grafo \mathcal{G} è diretto e simmetrico, per cui la matrice d'adiacenza
 136 \mathbf{A} è simmetrica.

137 Inoltre si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 13], ovvero i suoi
 138 nodi occupano un punto nello spazio euclideo, seppure, al momento, sia una
 139 caratteristica alquanto formale; tuttavia servirà tenerlo a mente quando si
 140 definiranno alcune regole d'interazione nel Cap. 4. Perdipiù, contrariamente
 141 a quanto si possa pensare di primo acchito, tale grafo non è a invarianza di
 142 scala [2] a causa del tipo di grafo [4, 13]; ciò non esclude l'esistenza di nodi
 143 più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato
 144 superiormente proprio dalla natura spaziale del grafo.

145 Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

146 **Ipotesi 2.2.** Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti
 147 nel tempo.

148 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
 149 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
 150 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle conne-
 151 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
 152 stesse.

153 2.3 CENNI SUI DATI

154 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999
 155 [10] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un file di testo formato da
 156 una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
 linee barrate corrispondono a dati trascurati.

157 I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è ne-
 158 cessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni
 159 e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

160 Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento
 161 Pen_91It.txt:

¹ si v. il documento trapen91.txt per maggiori informazioni.

1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229», «241», «216», «203», «224», «236», «246».

In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi] sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

00200714212215_____1,

ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in totale 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», eppure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizzare che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo; è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il codice del comune di destinazione².

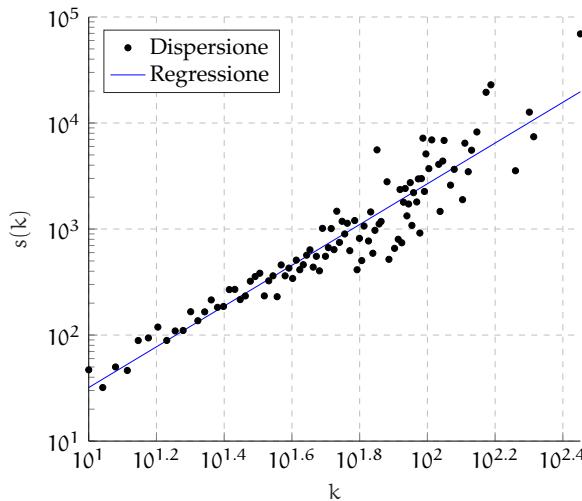


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

Infine nelle Ipp. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle seguenti osservazioni:

1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);

2 Si potrebbe scegliere, tra tutti i comuni colo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella Cap. 4, sono correzioni del tutto innecessarie.

- 187 2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-
 188 mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che
 189 limiti superiori e inferiori più estesi;
- 190 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g
 191 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-
 192 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come
 193 afferma [5];
- 194 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-
 195 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte
 196 di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-
 197 no molto distanti geograficamente³, per cui è ragionevole che i flussi
 198 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

(b) Pesi maggiori di [5]

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

199 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero
 200 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-
 201 to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva
 202 tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

³ Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

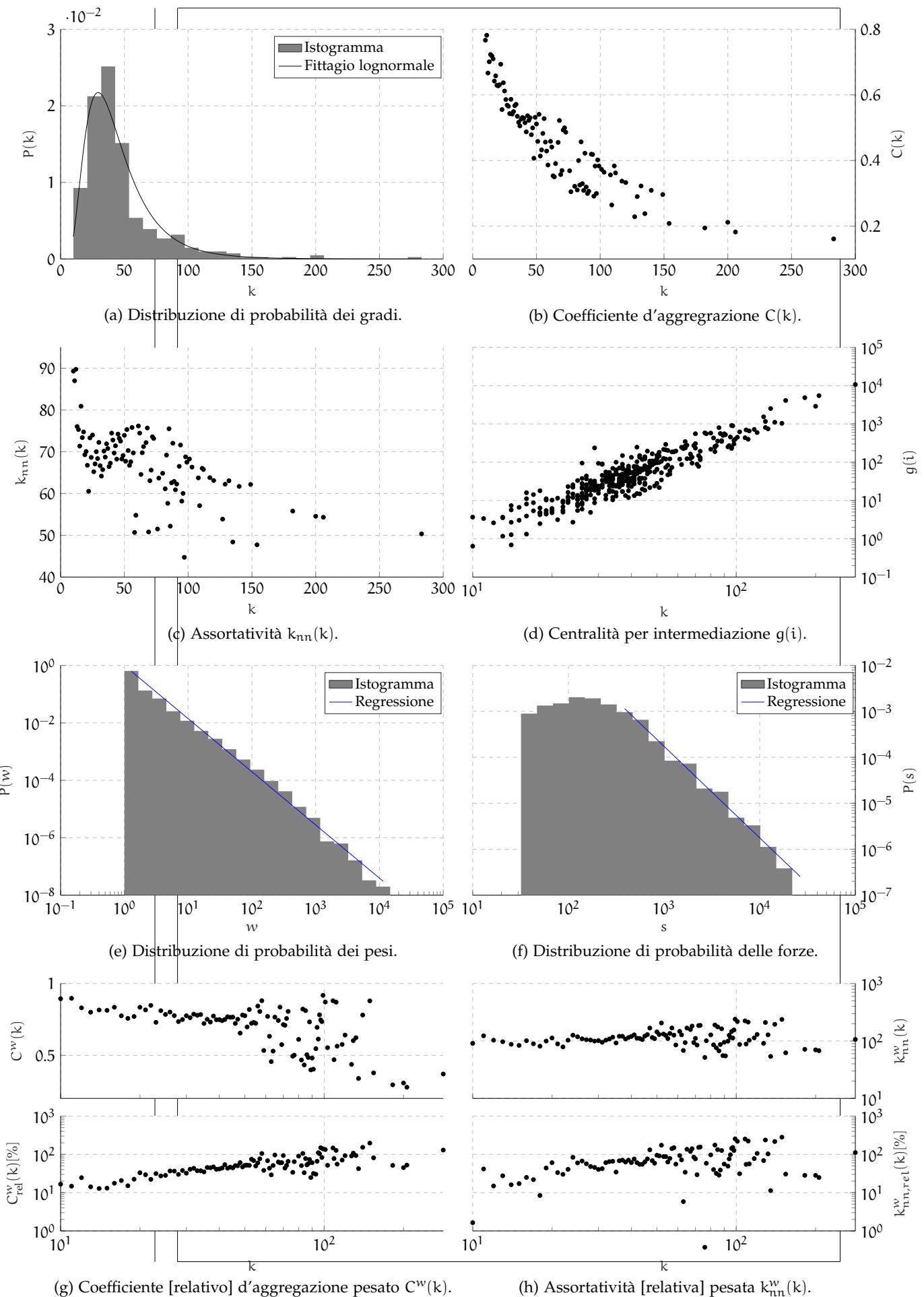


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la [TCSMA](#) necessaria per ottenere e discutere i risultati nel Cap. 4.

S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità collegate si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvivando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Semiretta intera/reale positiva). In tutto questo elaborato si fanno uso dei seguenti sottinsiemi dei numeri reali e naturali:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+ &\equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \\ \mathbb{N}_+ &\equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Definizione 3.2 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Siccome Ω è uno spazio astratto poco trattabile, in questo scritto si definisce una variabile aleatoria semplicemente evidenziando l'appartenenza al suo codominio e sottintendendo il suo dominio: $X \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.3 (Densità di probabilità di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua, allora la densità di probabilità $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge \mathbb{P}_X di X :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la variabile aleatoria X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x)dx$ va inteso come $f_X(dv)$.

235 **Definizione 3.4** (Densità congiunta di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

236 un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità congiunta di
 237 probabilità $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge
 238 $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ di \mathbf{X} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}\end{aligned}$$

239 **Definizione 3.5** (Densità marginale di probabilità di X_i). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in$
 240 \mathbb{R}^n un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità marginale
 241 di probabilità $f_{X_i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile così definita:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3.2)$$

242 essa è a tutti gli effetti la densità di probabilità della variabile aleatoria X_i
 243 secondo la Def. 3.3.

244 **Osservazione 3.2.** Per brevità, da qui in avanti s'indicheranno le precedenti
 245 densità sottintendendo che siano relative alla probabilità: $f_{\mathbf{X}}$ è dunque la
 246 densità di \mathbf{X} , f_X la densità congiunta di \mathbf{X} e f_{X_i} la densità marginale di X_i .

247 Inoltre, qualora il contesto non dia ambiguità, si sottintendono le variabili
 248 o i vettori aleatori cui fanno riferimento le relative densità: dunque f è la
 249 densità di \mathbf{X} , X e X_i , a seconda del caso; in alternativa si possono usare
 250 anche forme più leggere, come f_i per f_{X_i} , se necessario.

251 **Proprietà 3.1** (Densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano
 252 $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte
 253 le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la
 254 densità congiunta di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

255 **Definizione 3.6** (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assoluta-
 256 mente continua e data una funzione misurabile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora
 257 il valore atteso di $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

258 e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
 259 preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

260 **Definizione 3.7** (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleato-
 261 ria assolutamente continua a media finita $\mathbb{E}[X] < \infty$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -
 262 algebra, allora l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una variabile aleatoria Y tale
 263 che

264 AC₁ $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

265 AC₂ per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

266 L'insieme delle Y che soddisfanno le AC₁ e AC₂ sono indicate col simbolo
267 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può
268 indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

269 Un'analogia definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti
270 con X scalare e Y vettoriale.

271 **Osservazione 3.3.** Presa una variabile aleatoria $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente defi-
272 nizione \mathcal{G} può essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

273 ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borel relativa allo spazio dei numeri reali mentre
274 $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathbb{R}_+(\Omega)$.

275 Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

276 **Proposizione 3.1.** *Dati*

277 1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;

278 2. un vettore aleatorio $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da
279 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^h$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^k$ con densità congiunta $f_Z(x, y)$ e marginali f_X e f_Y ;

280 3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{Z})] = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] <$
281 ∞ ;

282 allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

283 che soddisfa $h(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y}]$.

284 *Dimostrazione.* Per la AC₁ è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(\mathbf{Y}))$:

$$\sigma(h(\mathbf{Y})) \equiv \sigma(\mathbf{Y}^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(\mathbf{Y}^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

285 a parole si considera la controimmagine tramite \mathbf{Y} dei borelliani filtrati da h ,
286 ragion per cui la sigma algebra non potrà che essere contenuta in quella non
287 filtrata.

288 Per la AC₂ si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(\mathbf{Y})$ avvalendosi della caratteriz-
289 zazione di $h(\mathbf{Y})$ tramite (3.3):

$$\begin{aligned} \int_A h(\mathbf{Y}) d\mathbb{P} &= \int_B h(y) f_Y(y) dy \stackrel{(3.2)}{=} \int_B h(y) \int_{\mathbb{R}^h} f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx dy \stackrel{(3.3)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(y) \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\mathbf{Y}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_C(\mathbf{Z}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

ove $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

□

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (3.3), allora $h(y)$ si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y=y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.4)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y)/f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la densità di X condizionata dall'evento $Y=y$.

La (3.4), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(X, Y)$ rispetto a X dopo aver "fissato" l'evento $Y=y$, vale a dire considerando la Y come fosse un parametro uguale a y .

Successivamente, se s'impone $A = \Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]], \quad (3.5)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(X, Y)$ si calcola mediando rispetto a Y la variabile aleatoria $\mathbb{E}[X|Y]$, ricavata dalla (3.4) ma considerando y arbitrario.

Definizione 3.8 (Processo stocastico). Data una dimensione $n \in \mathbb{N}_+$, un processo stocastico è un insieme di vettori aleatori X_t parametrizzati da un indice $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\{X_t \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} = \{X_t\}_{t \in I},$$

la cui densità congiunta è

$$\mathbb{P}_{X_t}(A) = \mathbb{P}(X_t \in A) = \int_A f_{X_t}(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}$$

Comunemente s'interpreta l'indice t come il tempo ponendo $I \equiv \mathbb{R}_+$, e così sarà fatto in questo scritto.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA DI [TIPO] BOLTZMANN

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Descrizione classica

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

317 G₁ è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la
 318 distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

319 G₂ è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver
 320 luogo o, precisamente, sono più frequenti;

321 G₃ è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

322 G₄ le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso
 323 e dell'energia esprimibile, grazie alle G₂ e G₃, binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (\text{CI})$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (\text{CE})$$

324 ove $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle
 325 velocità precollisionali $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

326 Dalla G₄ si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire
 327 da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le regole d'interazione.

328 **Proposizione 3.2** (Regole d'interazione). *Esistono due funzioni $\psi, \psi_* : \mathbb{R}^3 \rightarrow$
 329 \mathbb{R}^3 lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

330 ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .

331 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

332 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
 333 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \gamma] = 0, \end{aligned}$$

334 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

335 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (3.7) diven-
 336 ta allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (3.8)$$

337 □

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

338 Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $n \in \mathbb{S}^2$, seppure
 339 da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante
 340 per i centri delle particelle collidenti.

341 Si osservi come le regole d'interazione nella 3.6 sono bilineari e simmetri-
 342 che secondo la seguente definizione:

343 **Definizione 3.9** (Regole d'interazione simmetriche). Due regole d'interazio-
 344 ne del tipo (3.6) si dicono simmetriche sse

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}' &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}'_* &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v})\end{aligned}$$

345 **Descrizione statistica**

346 Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame:
 347 siano allora $\{\mathbf{V}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ i processi stocastici delle velocità precollisio-
 348 nali, dove $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ sono variabili aleatorie di cui le velocità precedenti, \mathbf{v}
 349 e \mathbf{v}_* , sono due realizzazioni al tempo t ; un simile discorso vale per i processi
 350 stocastici delle velocità poscollisionali $\{\mathbf{V}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}'_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

351 **Osservazione 3.5.** Le variabili aleatorie \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es.
 352 \mathbf{V}_t^i) proprio per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, da cui si
 353 deduce anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

354 Le regole d'interazione nella (3.6) diventano

$$[RI]_V \begin{cases} \mathbf{V}' = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* = \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{cases}$$

355 in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim$
 356 $\mathcal{U}(\mathbb{S}^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste
 357 uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

358 Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto
 359 formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad [B]_V$$

360 che è una variabile aleatoria di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui
 361 probabilità è descritta da due termini:

- 362 1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'a-
 363 vere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali
 364 possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
- 365 2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

366 **Osservazione 3.6.** Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$
 367 condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo;
 368 si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale
 369 condizione sarà sempre verificata.

2 Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

370 Colle [RI]_v e [B]_v, lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è
371 dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[AR]_v \begin{cases} \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t, \end{cases}$$

372 che di fatto è una regola che descrive se gli agenti interagiscono a coppie
373 (modellizzato dalla Θ) e, nel caso, come interagiscono (modellizzato dalle
374 \mathbf{V}'_t e \mathbf{V}''_t) modificando il loro stato al tempo successivo.

375 ***Derivazione modello***

376 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di me-
377 diare le [AR]_v attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità
378 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ o di $\mathbf{V}'_{t+\Delta t}$; pertanto
379 una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle [AR]_v,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t), \end{aligned}$$

380 e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t)]; \end{aligned}$$

381 per espandere la media, siccome Θ dipende da $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n})$, bisogna avvalersi
382 dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t) | \mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n}]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})]\Delta t, \end{aligned} \tag{3.12}$$

383 e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

384 e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

385 che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \end{aligned} \tag{3.13}$$

³ Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel'3.6 per qualunque valore di $B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})$.

386 in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot d\Omega$$

387 indica la media rispetto a Ω , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega)$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega)$.
 388 e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui densità congiunta è $f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine
 389 necessario sommare le due equazioni in (3.13). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.14)$$

390 infatti dal'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il domi-
 391 nio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo
 392 integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono
 393 necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

394 **Ipotesi 3.2.** Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \Omega) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (3.15)$$

395 una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega|$.

396 **Ipotesi 3.3 (Caos molecolare).** Le particelle interagenti secondo le [AR]_V so-
 397 no campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare
 398 matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni
 399 caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due par-
 400 ticelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole
 401 dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

402 **Osservazione 3.7.** Dal'Ip. 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la
 403 densità congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{V_t}(\mathbf{v}, t) f_{V_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

404 In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(\mathbf{v}_*)$ nel secondo membro della
 405 seconda equazione della (3.13) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.16)$$

406 seguendo la medesima logica della (3.14). Applicando i due risultati illu-
 407 strati nelle (3.14, 3.16) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann
 408 omogenea asimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \left(\frac{\varphi' + \varphi'_*}{2} - \varphi \right) f f_* d\Omega d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.17)$$

409 ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le
 410 funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi *
 411 (per una spiegazione più dettagliata si legga poco dopo nel § 3.2.3).

412 Tuttavia, qualora le regole d'interazione siano simmetriche secondo la
 413 Def. 3.9, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di
 414 variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma debole⁴:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{\mathbb{S}^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* dnd\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad (3.18)$$

Si può anche ricavare la forma forte della (3.18) considerando le regole d'interazione inverse della (3.6) [12, § 2.5, p. 15], ma il conto esula dagli scopi di questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per la sezione a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*. \quad (3.19)$$

3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la (3.19), bensì è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine avvettivo $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*, \quad (3.20)$$

dove l'operatore $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ è il gradiente spaziale e la distribuzione dipende ora anche dallo spazio: $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Essa è un'equazione integro-differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a tempo dato.

Il primo membro della (3.20) non è altro che la derivata materiale della distribuzione f : posto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$, ovvero in mancanza di collisioni, l'equazione involve in una del trasporto lineare con soluzione nota.

Proposizione 3.3. *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.21)$$

ha come soluzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$ in cui $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ è la distribuzione iniziale.

Dimostrazione. Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella (3.21) la velocità \mathbf{v} nell'operatore avvettivo non dipende né dallo spazio né dal tempo, quindi si possono prendere le curve $\mathbf{x}(t)$ tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (3.22)$$

dette, appunto, curve caratteristiche della (3.21); valutando allora la distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lungo di esse si può definire $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$ che derivata equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

da cui si deduce che f è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (3.22) si può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, dunque la soluzione in un generico punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

⁴ Si dice debole siccome essa vale per una funzione test φ arbitraria.

444 considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo t passa
 445 per \mathbf{x} . □

446 Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale f_0 sem-
 447 plicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la
 448 direzione della velocità costante \mathbf{v} , movimento che rappresenta la variazione
 449 medi statistica delle posizioni molecolari.

450 D'altra parte il secondo membro della (3.20) rappresenta la variazione me-
 451 dia statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò
 452 anche chiamato operatore collisionale).

453 Pertanto la (3.20) descrive una chiara separazione di effetti: il primo mem-
 454 bro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il
 455 secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

456 L'obiettivo di Boltzmann tramite la (3.20) era di raccordare due mondi: il
 457 mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità
 458 fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione
 459 molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità
 460 fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

461 Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia
 462 di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione f soddi-
 463 sfacente la (3.20); i principali sono

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.} \end{aligned} \quad (3.23)$$

464 Tali quantità sono definite da f seppure questa sia in genere infattibile da
 465 ricavare dalla (3.20), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; ep-
 466 pure, tramite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite
 467 [12, 15], è possibile svincolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della f ri-
 468 cavando un sistema chiuso dei soli momenti (3.23). La convergenza di questi
 469 a un valore stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione
 470 mesoscopica indotta dalla distribuzione f .

471 3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

472 La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di
 473 problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria
 474 è stata sviluppata da Pareschi *et al.* [15]; sono chiamati così per due ragioni:

- 475 1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analo-
 476 ghe strutturalmente alla (3.18) e

477 2. sono applicati a contesti⁵ molto distanti da quello originale delle
 478 velocità di particelle di un gas.

479 Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già
 480 visti nel § 3.2.1 senza però riscrivere tutti i passaggi.

481 **Descrizione e derivazione**

482 Sia $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico relativo allo stato microscopico dell'agente
 483 di un sistema, dove $X_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ è il vettore aleatorio⁶ che descrive i suoi
 484 $n \in \mathbb{N}_+$ stati microscopici al tempo t ; allora le Ipp. 3.1 e 3.3 si possono così
 485 riformulare:

486 **Ipotesi 3.4.** Gli agenti sono caratterizzati dalle seguenti ipotesi:

487 B1 la distribuzione statistica dei microstati è uniforme nello spazio, e
 488 quindi non dipende da esso;

489 B2 gli agenti interagiscono solo binariamente, ovvero le interazioni a
 490 coppia sono le più frequenti;

491 B3 gli agenti sono indistinguibili cosicché ognuno è rappresentativo
 492 del loro insieme;

493 B4 due agenti interagenti sono statisticamente indipendenti.

494 D'altra parte gli stati poscollisionali (postati), X'_t e $X^{*'}_t$, si legano con quelli
 495 precollisionali (prestati), X_t e X^*_t , tramite

$$[RI]_x \begin{cases} X'_t = \psi(X_t, X^*_t, y), \\ X^{*'}_t = \psi_*(X_t, X^*_t, y_*), \end{cases}$$

496 ove ora

$$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{h_*} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

497 sono generiche regole d'interazione, non necessariamente simmetriche (si ve-
 498 da Def. 3.9) o lineari, mentre $y \in \mathbb{R}^h$ e $y_* \in \mathbb{R}^{h_*}$, con $h, h_* \in \mathbb{N}$, rappresentano
 499 dei coefficienti potenzialmente stocastici.

500 L'interazione tra di essi avviene secondo una variabile aleatoria di Ber-
 501 noulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(X_t, X^*_t, w, t) \Delta t), \quad [B]_x$$

502 con tasso/nucleo d'interazione

$$\mu(X_t, X^*_t, w, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

503 per controllare quant'è "probabile" che i due agenti interagiscano, e coeffi-
 504 cienti $w \in \mathbb{R}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, potenzialmente stocastici.

505 **Osservazione 3.8.** Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modelli-
 506 stico si può semplicemente porre unitario:

$$\mu \equiv 1, \quad \forall (x, x^*, w, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$$

507 sottintendendo in tal modo un'uniforme "probabilità" d'interazione.

5 Esempi importanti sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico, come quello qui considerato delle città

6 Si noti che il dominio I degli stati non coincide necessariamente col'intero spazio reale \mathbb{R}^n .

Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'interazione

$$[\text{AR}]_x \begin{cases} X_{t+\Delta t} = (1-\Theta)X_t + \Theta X'_t, \\ X^*_{t+\Delta t} = (1-\Theta)X^*_t + \Theta X'^*_t, \end{cases}$$

dove $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

Osservazione 3.9. l'acronimo $[\text{AR}]_x$ sta per «Azione-Reazione» poiché si suppone che ogn'interazione (azione), ossia $\Theta=1$, necessariamente modifica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [14] questa regola può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1 colla quantità osservabile $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si perviene all'equazione di tipo Boltzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(x, x_*, w, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* dx dx_*, \quad (3.27)$$

nella quale $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media rispetto a tutti i coefficienti potenzialmente stocastici (y , y_* e w), mentre il termine $-\varphi - \varphi_*$ discende dal fatto che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione μ sia pari.

Notazione

Nei previ paragrafi si è fatto spesso uso, specie per le varie equazioni [di tipo] Boltzmann (3.17–3.20, 3.27), di una notazione abbreviata per tutti gli oggetti salvo il tasso d'interazione μ . In questo breve paragrafo si definiscono in maniera più esplicita queste abbreviazioni facendo riferimento al contesto generale sviluppato poco fa.

Innanzitutto la densità congiunta f da sola sottintende la variabile dell'agente interagente x mentre con un pedice f_* quella dell'agente ricevente x_* :

$$f \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_* \equiv f(x_*, t);$$

dopodiché le quantità osservabili φ seguono la medesima logica di prima ma coll'aggiunta di un apice per distinguere le variabili postinterazionali:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \varphi(x) & \text{e} & \varphi_* \equiv \varphi(x_*), \\ \varphi' &\equiv \varphi(x') & \text{e} & \varphi'_* \equiv \varphi(x'_*). \end{aligned}$$

Ovviamente questa notazione può essere generalizzata a una qualunque funzione scalare $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione del microstato degli agenti:

$$\begin{aligned} g &\equiv g(x) & \text{e} & g_* \equiv g(x_*), \\ g' &\equiv g(x') & \text{e} & g'_* \equiv g(x'_*). \end{aligned}$$

Infine si osserva che qualora vi siano altri pedici o apici nelle funzioni a venire, essi *non* fanno riferimento a questa notazione corta, se non altrimenti specificato. Per esempio giusto nel prossimo paragrafo si lavora con delle densità f_i , in cui i è l'indice del nodo del grafo associato all'agente; è comunque possibile, anche per questi casi, usare la notazione precedente riposizionando lievemente i pedici e gli apici:

$$f^i \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_*^i \equiv f(x_*, t);$$

541 ***Analisi dimensionale***

542 **3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI**

543 Si analizza adesso il caso del tessuto interurbano descritto nel § 2.2, considerando le città sia come agenti che come nodi di una rete che ne regola le interazioni: due città possono interagire se sono connessi; è anche ovvio che l'interazione modifichi, in qualche modo da definire, la loro popolazione.

547 In questo paragrafo si applicano i concetti della teoria sviluppata nei §§ 2.1 e 3.2.3 e, in particolare, la notazione usata e definita. S'inizia mostrando una derivazione esatta la quale, cioè, considera la topologia esatta; quindi si approfondisce un'approssimazione nella quale si "perde" la topologia indotta dalla rete; infine, si considerano i collegamenti tra la derivazione esatta e quella di tipo Boltzmann sotto determinate ipotesi.

553 **3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta**

554 ***Descrizione e derivazione***

555 Visto che si assume che valgono le Ip. 3.4⁷, dalla B3 sorge un problema non di poco conto: gli agenti sono indistinguibili ma la rete sottostante li rende distinti per via degl'indici \mathcal{I} .

558 Per dipanare la questione è sufficiente considerare l'indice come una variabile aleatoria $I \in \mathcal{I}$ così da definire il processo stocastico come

$$\{\mathbf{X}_t\} \equiv \{I, S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

560 in cui $S_t \in \mathbb{R}_+$ è la variabile aleatoria relativa alla popolazione dell'agente rappresentativo al tempo t ed è l'unica componente del processo stocastico a variare nel tempo per l'Ip. 2.2.

563 Così ragionando si può nel complesso descrivere statisticamente lo stato microscopico $\mathbf{X}_t \equiv (I, S_t)$ dell'agente rappresentativo colla densità congiunta

$$f(i, s, t) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

565 che è discreta in $i \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathbb{R}_+$, uguale a

$$f(i, s, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(i - j), \quad (3.28)$$

566 dove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

568 è la densità di S_t dell'agente i -esimo.

⁷ Perdipiù la B2 è valida a un tempo t , ma nell'unità di tempo dimensionale t le interazioni si possono considerare come non binarie, come già discusso alla fine del § 3.2.3.

569 In tal modo la densità congiunta f è effettivamente indistinguibile rispetto
 570 a tutti gli agenti, soddisfacendo la [B3](#), e integra sul suo dominio a uno:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(\mathcal{J} \times \mathbb{R}_+) &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) dids = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) ds \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f_i(s, t) ds = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} 1 = \frac{N}{N} = 1 \quad \forall t \geq 0; \end{aligned}$$

571 mentre le densità f_i preservano la naturale distinguibilità degli agenti indot-
 572 ta dalla topologia sottostante.

573 Sempre come conseguenza del grafo, la [\[B\]x](#) deve dipendere dalla matrice
 574 d'adiacenza A :

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(I, I^*) \Delta t), \quad [B]_S$$

575 ove $A: \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che a ogni coppia d'indici (I, I^*) associa la
 576 relativa entrata nella matrice d'adiacenza

$$A(I, I^*) \equiv a_{I, I^*} = \begin{cases} 1 & \text{se } (I, I^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

577 secondo la [\(2.2\)](#); in tal modo l'interazione non ha possibilità d'avvenire se i
 578 due agenti non sono connessi.

579 **Osservazione 3.10.** Rispetto al caso generale [\[B\]x](#) il tasso d'interazione ha
 580 forma

$$\mu(X_t, X_t^*, w, t) \equiv A(I, I^*), \quad (3.30)$$

581 esso, cioè, è per definizione costante sia rispetto agli stati S_t e S_t^* che rispetto
 582 al tempo, oltre a non avere coefficienti⁸ w .

583 **Osservazione 3.11.** Per definizione della distribuzione di Bernoulli, è neces-
 584 sario imporre $A(I, I^*) \Delta t \leq 1$, ma dato che $A(I, I^*) \in \{0, 1\}$ ciò si traduce nella
 585 naturale condizione che $\Delta t \leq 1$.

586 D'altro canto le regole d'interazione nella [\[RI\]x](#) diventano

$$[RI]_S \begin{cases} S'_t = \psi(S_t, S_t^*, I, I_*, \sigma), \\ S_t^{*\prime} = \psi_*(S_t, S_t^*, I, I_*). \end{cases}$$

587 **Osservazione 3.12.** Confrontato al caso generale [\[RI\]x](#), solo la funzione della
 588 città interagente ψ presenta un coefficiente stocastico $y \equiv \sigma \in \mathbb{R}$, mentre quel-
 589 la relativa alla città ricevente ψ_* non dipende da potenziali coefficienti y_* .⁹
 590

591 Unendo le [\[B\]S](#) e [\[RI\]S](#), le [\[AR\]x](#) si scrivono

$$[AR]_S \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta) S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta) S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \end{cases}$$

592 coerentemente col fatto che in un cteso urbano, qualora una città-nodo
 593 interagisca con un'altra, entrambe debbano variare il loro stato (Oss. [3.9](#)).

⁸ Questa situazione si può simbolicamente rappresentare ponendo $k = 0$.

⁹ Come nell'Oss. [3.10](#), tale condizione si può simbolicamente rappresentare ponendo $h_* = 0$.

594 **Osservazione 3.13.** Paragonato a $[AR]_x$ ci si potrebbe chiedere perché non
 595 si considera l'intero vettore aleatorio \mathbf{X}_t , come pure nella $[RI]_s$; la ragione è
 596 che I è una componente statica che non varia nel tempo.

597 In ogni caso, considerando I_t e I_t^* momentaneamente dinamiche, si possono
 598 definire le regole d'interazione

$$[RI]_I \begin{cases} I'_t = \psi(S_t, S_t^*, I, I_*) \equiv I_t, \\ I_t^{*\prime} = \psi_*(S_t, S_t^*, I, I_*) \equiv I_t^*, \end{cases}$$

599 da cui segue l'algoritmo d'interazione

$$[AR]_I \begin{cases} I_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I_t + \Theta I'_t = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t = I_t, \\ I_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^{*\prime} = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^* = I_t^*, \end{cases}$$

600 che soddisfa la staticità di I e I_* e completa, assieme a $[AR]_s$, la formulazione
 601 $[AR]_x$ più generale.

602 Sia $\Phi: \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un'arbitraria quantità osservabile, dalla $[B]_s$ l'equazio-
 603 ne di tipo Boltzmann omogenea (3.27) ha forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{I}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} A(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi_*' - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* didi_*, \quad (3.33)$$

604 ove si è usata la notazione abbreviata illustrata nel § 3.2.3, mentre $\langle \cdot \rangle$ indica
 605 il valore atteso rispetto alla variabile aleatoria σ nelle $[RI]_s$.

606 **Osservazione 3.14.** Anche se la derivazione della (3.33) è già stata spiegata
 607 nel dettaglio nel § 3.2.1, rimane interessante riportare la forma del passaggio
 608 più difficile, ossia quella della media condizionata (3.12):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(I, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(I, I_*)\Delta t) | I, I_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, S_t)(1 - A(I, I_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(I, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(I, I_*)\Delta t]]. \end{aligned}$$

609 Si noti come il condizionamento sia solo rispetto a I a I_* , proprio poiché Θ
 610 in $[B]_s$, tramite il tasso d'interazione μ nella (3.30), dipende solo da quegli
 611 stati.

612 *Analisi delle regole d'interazione*

613 Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

614 Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-
 615 reazione» descritta da $[AR]_x$: infatti, se una città interagisce con un'altra,
 616 scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto
 617 che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

618 Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile
 619 l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,
 620 ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò
 621 implica che la matrice d'adiacenza M è simmetrica.

622 Gli stati postinterazione (??) prendono come riferimento regole d'intera-
 623 zione lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS_t^*, \\ S_t^{*\prime} = p_*S_t + q_*S_t^*, \end{cases} \quad (3.34)$$

le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (3.35)$$

ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$ sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle regole d'interazione lineari (3.34) le (3.35) soddisfanno

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0 & q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*) \end{aligned} \quad (3.36)$$

rispettivamente per la prima e seconda legge d'interazione. Ovviamente questo scambio deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \end{aligned} \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \quad (3.37)$$

ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{N}$ ma è più agevole supporre $\mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (3.35), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (3.38)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (3.38) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (3.35), situazione che si vuole evitare¹⁰ dato che nella (4.1) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- 645 F₁ possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del
646 vincolo imposto da (3.38);
- 647 F₂ la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- 648 F₃ seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione,
649 è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- 651 ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F₁ poiché può assumere
652 valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- 653 ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diven-
654 ta degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né
655 F₂ né F₃, mentre F₁ si;

¹⁰ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

- 656 ◇ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette
 657 sia **F₂** (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che **F₃**,
 658 ma sfortunatamente non **F₁** perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$
 659 ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
 660 ◇ l'unica distribuzione che soddisfà tutte le caratteristiche ricercate
 661 è proprio la distribuzione gamma.

662 Si consideri allora una distribuzione gamma avente densità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (3.39)$$

663 ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha)$:
 664 $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha+1} e^{-y} dy. \quad (3.40)$$

665 Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfà per definizione la **F₃**, e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha \theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha \theta^2, \quad (3.41)$$

666 con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da
 667 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (3.42)$$

668 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la **F₂** semplicemente tra-
 669 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzio-
 670 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

671 D'altra parte la **F₁** necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
 672 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
 673 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
 674 di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

675 ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (3.43)$$

676 siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda \in (0, 1)$. La (3.43) implica quindi che
 677 non è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la **F₁**, ma
 678 che questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ
 679 più piccola è la varianza, e viceversa.

680 3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata

681 Si premette innanzitutto che con approssimazione s'intende di abbandonare
 682 la topologia indotta dal grafo, ovverosia a trascurare la variabile aleatoria I

sostituendola con qualche informazione che non permetta piú di distinguere i nodi, tornando dunque a tutti gli effetti a una descrizione classica di tipo di Boltzamnn seppure solo in maniera approssimata.

Per questo obiettivo è però prima necessario riformulare la (3.33) tramite una scelta oculata delle Φ :

Ipotesi 3.5. Si considera la seguente classe di osservabili:

$$\Phi(i,s) \equiv \delta(i-j)\varphi(s) \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (3.44)$$

dove $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria.

Con tale scelta è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i : usando, infatti, la (3.44) nella (3.33) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_j ds &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi \rangle}{2} f_j \sum_{i \in \mathcal{J}} A(j,i) f_i^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} f_j^* \sum_{i \in \mathcal{J}} A(i,j) f_i ds ds_*, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

ma essendo A simmetrica (Ip. 2.1) vale

$$A(i,j) = A(j,i) \iff A = A^\top,$$

con A^\top indicante la matrice trasposta, da cui

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_j ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} f_j \sum_{i \in \mathcal{J}} A(j,i) f_i^* ds ds_* \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

che in forma matriciale, introducendo le densità vettoriali

$$\mathbf{f} \equiv (f_i)_{i \in \mathcal{J}} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_* \equiv (f_i^*)_{i \in \mathcal{J}'},$$

si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \odot \mathbf{A} \mathbf{f}_* ds ds_*, \quad (3.45)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard (prodotto per elementi).

Il prossimo passo è introdurre la densità globale delle taglie, ossia la densità marginale della (3.28) rispetto alla popolazione s :

$$\bar{f}(s,t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(i,s,t) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}, \quad (3.46)$$

ove $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, che non è che la media tra le densità di S_t tra tutti i vertici; premoltiplicando la (3.45) per $\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top$ e usando la (3.46) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{A} \mathbf{f}_* ds ds_*, \quad (3.47)$$

Osservazione 3.15. La (3.47) si può anche direttamente ricavare usando, anziché la (3.44), direttamente un osservabile indipendente dall'indice i :

$$\Phi(i,s) \equiv \varphi(s).$$

703 La (3.47) non è ancora un'equazione chiusa per \bar{f} per via del secondo mem-
 704 bro nel quale $\mathbf{f}^\top \mathbf{A} \mathbf{f}_*$ richiede sia di conoscere nel dettaglio le connessioni
 705 sottostanti del grafo che le distribuzioni della popolazione di ogni città.

706 Purtroppo la natura arbitraria delle [RI]s non permette procedere esatta-
 707 mente, per cui sono necessarie delle approssimazioni:

708 **Definizione 3.10** (Approssimazione della \mathbf{A}). Sia $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di
 709 rango uno

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top}{D}$$

710 definite tramite il prodotto diadiaco dei vettori

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^+ &\equiv (k_1^+, k_2^+, \dots, k_N^+)^\top = \mathbf{A} \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{k}^- &\equiv (k_1^-, k_2^-, \dots, k_N^-)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N,\end{aligned}$$

711 dei gradi uscenti ed entranti rispettivamente, e la costante¹¹

$$D \equiv \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^+ = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^+ = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^- = \|\mathbf{A}\|_1.$$

712 Allora \mathbf{B} approssima la matrice d'adiacenza \mathbf{A} poiché per definizione vale

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{B} \mathbf{1} &= \frac{1}{D} \mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^+ \frac{D}{D} = \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{1} &= \frac{1}{D} \mathbf{k}^- (\mathbf{k}^+)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^- \frac{D}{D} = \mathbf{k}^-\end{aligned}\right\} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}.$$

713 Inoltre, poiché \mathbf{A} è simmetrica (Ip. 2.1) vale $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}^\top}{D}.$$

714 Approssimando la \mathbf{A} colla Def. 3.10, la (3.47) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{h} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{h}^\top \mathbf{B} \mathbf{h}_* ds ds_*,$$

715 ove sono state rinominate le densità \bar{f} , \mathbf{f} e \mathbf{f}_* per distinguerle da quelle esatte;
 716 espandendo \mathbf{B} si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{h} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2D} (\mathbf{k}^\top \mathbf{h})(\mathbf{k}^\top \mathbf{h}_*) ds ds_*.$$

717 S'introduca poi una nuova densità:

718 **Definizione 3.11** (Densità dei gradi \mathbf{k}). Sia

$$g_N : \mathbb{R}_+ \times \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

719 la densità di probabilità che al tempo t un agente abbia popolazione s e
 720 grado k , definizione che la lega alle f_i nella (3.28) dalla relazione

$$g_N(s, k, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} f_i(s, t),$$

¹¹ La $\|\cdot\|$ è la norma uno applicata alle matrici: $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sum_{i,j} |a_{i,j}|$.

721 ove

$$\mathcal{I}_k \equiv \{i \in \mathcal{J} \mid k_i = k\}$$

722 è l'insieme dei nodi con grado k ; da essa ne seguono altre due:

$$\bar{f}(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} f_i(s, t) = \sum_{k=0}^N g_N(s, k, t),$$

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{f}(s, t) = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i f_i(s, t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{i \in \mathcal{I}_k} f_i(s, t) = N \sum_{k=0}^N k g_N(s, k, t).$$

723 Avvalendosi della Def. 3.11 si può riformulare la precedente equazione in
724 termini di g_N :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_N(s, k, t) ds = \sum_{k, k_*=0}^N \int_{\mathbb{R}_+^2} k k_* \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2D} g_N g_N^* ds ds_*,$$

725 dove si è aggiunto un asterisco al grado moltiplicato a g_N^* per distinguerlo
726 da quello moltiplicato a g_N .

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f d\mathbf{v} di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} B(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* didi_*,$$

727 3.3.3 Nesso discreto-continuo

728 È d'interesse esplorare il legame presente tra la (??) coll'equazione classica
729 di Boltzmann {§}.

730 *Ipotesi semplificative*

731 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da applicare alla (??):

733 S1 Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi
734 che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv \mathbb{1}$.

735 S2 Si assume che gli agenti siano indistinguibili rispetto al grafo:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J}, \quad (3.48)$$

736 S3 S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (3.49)$$

737 *Analisi della S1*

738 Con tal'ipotesi la (??) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

739 e valutando la distribuzione marginale della (3.28) rispetto agli indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (3.50)$$

740 che corrisponde a una media tra le distribuzione dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

741 mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (3.51)$$

742 la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann [\(§\)](#). Ciò
743 significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano di-
744 stinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la
745 distribuzione media [\(3.50\)](#).

746 Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo [1](#), illu-
747 strato nel paragrafo a venire, ove una matrice d'adiacenza unitaria porta
748 ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica
749 distribuzione che può calcolare [1](#) è proprio quella media F .

750 *Analisi della S2*

751 La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti
752 siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme
753 alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente.
754 Pertanto la [\(??\)](#) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i,j) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j,i) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

755 che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i,j \in \mathcal{J}} A(i,j) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

756 e definendo $L \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} A(i,j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{J}} A(i,j) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (3.52)$$

757 In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente si-
758 mile è la rete a una completamente connessa [12](#); d'altra parte l'equazione è
759 analoga a quella classica di Boltzmann [\(§\)](#).

760 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla
761 [\(??\)](#), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che
762 quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa
763 per la [S1](#).

[12](#) Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

764 **Analisi della S1, S2 e S3**

765 Visto che vale S1 si può partire dalla (3.51) nella quale la distribuzione media
 766 (3.50) diventa per S2

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^o}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

767 ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti¹³, essendo questi, appunto,
 768 indistinguibili.

769 In tal modo la (3.51) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

770 che unita all S3 porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
 771 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

772 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

773 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche
 774 [S] usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
 775 tra una popolazione di particelle di un gas.

13 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix M ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

1: $\tilde{V} \leftarrow V_0$
2: $t \leftarrow 1$
3: **for** $t < T$ **do**
4: $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
5: $V \leftarrow \tilde{V}$
6: $P \leftarrow$ random permutation of $\{1, \dots, N\}$
7: $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
8: $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
9: $i \leftarrow 1$
10: **for** $i < N/2$ **do**
11: $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i))\Delta t)$
12: $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
13: $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
14: $i \leftarrow i + 1$
15: **end for**
16: $t \leftarrow t + \Delta t$
17: **end for**

776 **4** | SIMULAZIONI

777 Quello che ho riscontrato è che i risultati ottenuti per la Sardegna sono di
778 fatto gli stessi per tutte le regioni, inclusa l'Italia; questa è la ragione per cui
779 in questa sezione ci si concentrerà solo su quella regione. Alla fine, però, si
780 mostrano alcuni grafici anche per l'Italia intera.

781 **4.1 PREMESSE**

782 **4.1.1 Metodo Monte Carlo**

783 **4.1.2 Fluttuazioni**

784 **4.1.3 Grafici**

785 **4.2 REGOLE D'EMIGRAZIONE**

786 La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno
787 dell'immigrazione.

788 **4.2.1 Popolazione**

789 Una prima possibilità consiste nella

$$790 \quad E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (4.1)$$

790 che in essenza è la [9, (2.2), § 2, p. 223] modificata mediante la [9, (4.5), § 4, p. 791 228], ossia è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di emigrazione 792 maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , 793 maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente 794 significato:

- 795 ◊ $\lambda \in (0,1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le 796 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 797 ◊ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente 798 il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

799 In poche parole la (4.1) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi 800 per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

801 In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla 802 (3.36) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (4.1).

803 **4.2.2 Popolazione-Connettività**804 **4.2.3 Popolazione-Connettività frazionata**805 **4.2.4 Popolazione-Forza**806 **4.3 INTERPRETAZIONE**

807

5 | CONCLUSIONI

- 808 1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di
809 Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
- 810 2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa
811 della rete statica.
- 812 3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

813 APPENDICE

814 A CODICE

815

ELENCO DELLE FIGURE

816	Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	6
817	Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.	9
819	Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.	12
820	Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	14
822			
823			

824

ELENCO DELLE TABELLE

825

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
linee barrate corrispondono a dati trascurati. 11

826

827

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 13

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berlant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [11] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025).
- [13] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [14] Nuriacco, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: <10.1017/S0956792524000020>.

- 869 [15] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*
870 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 871 [16] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An*
872 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.