

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della
popolazione tra città su reti spaziali mediante la
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	7
2.1	Definizioni miscellanee	7
2.2	Reti e città	8
2.3	Cenni sui dati	8
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	9
3.1	Descrizione cinetica classica	9
3.2	Descrizione cinetica retale	9
3.2.1	Impostazione	9
3.2.2	Algoritmi d'interazione	10
3.2.3	Interazioni azione-reazione	10
3.3	Derivazione dell'equazioni cinetiche	11
3.3.1	Derivazione esatta	11
3.3.2	Interazioni tra città	13
3.3.3	Derivazione approssimata	15
3.4	Nesso discreto-continuo	15
3.4.1	Ipotesi semplificative	15
3.4.2	Analisi della 1° IS	16
3.4.3	Analisi della 2° IS	16
3.4.4	Analisi della 1°, 2° e 3° IS	17
4	SIMULAZIONI	19
5	CONCLUSIONI	21

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già studiato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf [7] quasi cinquant'anni dopo: nella sua teoria ha introdotto la legge che oggi prende il suo nome.[\[§\]](#)

Aggiungere le formule sul rango[\[§\]](#).

D'altra parte, nella letteratura più recente, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, la maggior parte degli articoli su tale argomento o considerano le città come luoghi ove vivono gli agenti, creando così un modello di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [\[§\]](#), o non considerano una naturale struttura da grafo [\[§\]](#) oltre ad astrarre eccessivamente le città e i loro dintorni [\[§\]](#).

In questo elaborato le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono su mediante la struttura di un grafo spaziale; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

La suddivisione è come segue: nel secondo capitolo si affronteranno brevemente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto quelli pertinenti alla topologia interurbana; nel terzo la teoria cinetica dei sistemi multiagente è approfondita prima da un punto di vista classico, poi mediata dai grafi sia esattamente che approssimativamente; infine nel quarto si illustreranno i principali risultati mentre nel quinto si conclude con delle note finali e potenziali sviluppi futuri.

Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice in Python è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 3 (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso¹ associato al lato (i, j) . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

Definizione 4 (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2), ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

¹ Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

54 Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

55 **Ipotesi 1.** Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

56 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
57 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
58 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connes-
59 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
60 stesse.

61 2.2 RETI E CITTÀ

62 Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafici sorge successivamente il pro-
63 blema di come rappresentare mediante i grafici la moltitudine di collegamenti
64 possibili tra le città

65 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafici: i
66 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati
67 e le loro intersezioni come nodi [4, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la
68 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [4, § 3.2.1 p. 22]; altri si
69 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in
70 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [4, § 3.1.3.2 p. 17], navale
71 [4, § 3.1.4 p. 19], aereo [4, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

72 Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione
73 della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 74 1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono
75 troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola
76 città;
- 77 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contempora-
78 neamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere
79 diversi trasporti per muoversi.

80 Ecco perché la corretta rete considerata è quella legata ai movimenti pen-
81 dolari [4, § 3.1.3.3 p. 18; 2] tra città che mostrano olisticamente tutt'i possibili
82 collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra
83 collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari
84 (vacanze, visite mediche, ecc.).

85 2.3 CENNI SUI DATI

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

3.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

3.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

3.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o più agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia $X \in \mathcal{J}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{J} è l'insieme dei vertici mentre \mathcal{E} dei lati di \mathcal{G} . Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geq 0}$; la funzione $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è una variabile aleatoria da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popolazioni \mathcal{P} e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geq 0$. Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da \mathcal{E} , definendo così un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{J}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (1)$$

ove $N \equiv |\mathcal{J}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{J},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

112 **3.2.2 Algoritmi d'interazione**

113 Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti intera-
 114 giscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel det-
 115 taglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in$
 116 $\mathcal{J} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un interazione con
 117 un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \quad (2)$$

118 ove $\Theta \in [0, 1]$ è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'in-
 119 terazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ($\Theta = 1$) o no ($\Theta = 0$);
 120 d'altro canto $S'_t \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, V_t) in
 121 seguito a un'interazione avvenuta.

122 Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (3)$$

123 il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzio-
 124 nale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione
 125 $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle
 126 connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

127 dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^* ;
 128 per coerenza è necessario impostare $\Delta t \leq 1$ che impone un limite superiore
 129 al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto
 130 facile da verificare nella pratica.

131 La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria $S'_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ dipen-
 132 dente in generale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4)$$

133 in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

134 **3.2.3 Interazioni azione-reazione**

135 Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con
 136 un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

137 Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si
 138 può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$
 139 mentre quella *in indietro* sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile
 140 in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto
 141 l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga
 142 a quella dell'agente (X, S_t) :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*/}, \quad (5)$$

143 ove si osserva che la Θ è la stessa della (2) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$
 144 ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso

145 in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di
 146 simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

147 è definita mediante una funzione $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da
 148 Ψ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [5, § 2.2.1] sarà
 149 identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[\text{AR}] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

150 Si conclude questa sezione osservando che gli agenti (X, S_t) , (X^*, S_t^*) sono
 151 campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

152 3.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

153 3.3.1 Derivazione esatta

154 Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'e-
 155 voluzione per le distribuzioni di probabilità f_i delle opinioni degli agenti;
 156 per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi
 157 multiagente [5, 6].

158 Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una
 159 quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico
 160 agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR],
 161 valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agli indici
 162 e alla popolazione a tempo fissato, si ha {§}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

163 da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

164 laddove, prendendo il limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (7)$$

165 Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma
 166 colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (8)$$

167 Osservando che le coppie (X, S_t) e (X^*, S_t^*) fanno riferimento a un agente
 168 rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (7, 8), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E}[A(X, X^*) (\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f dv dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (9)$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (1):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*) \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (10)$$

mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni Ψ e Ψ_* .

Si noti che la (9) è valida per ogni funzione *test* Φ per cui è un'equazione debole per la distribuzione f . (commento su Fokker-Planck (S))

Si osservi anche che la (9) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione f di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta $g(x, x_*, s, s_*, t)$ degli agenti interagenti nel prodotto $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$.

Dalla (9) con una scelta adeguata della funzione *test* Ψ , è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i . Sia $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$, dove $\phi_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$ e $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ è arbitrario. Allora usando la (1) dentro la (9) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (11)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento (S)). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (12)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard e \mathbf{M}^\top al trasposta di \mathbf{M} . Si noti che \mathbf{M} altro non è che la matrice d'adiacenza di \mathcal{G} .

197 **3.3.2 Interazioni tra città**

198 Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

199 Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-
200 reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra,
201 scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto
202 che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

203 Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile
204 l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,
205 ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò
206 implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

207 Gli stati postinterazione (10) prendono come riferimento leggi d'interazio-
208 ni lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS^*_t, \\ S^{*'}_t = p_*S_t + q_*S^*_t, \end{cases} \quad (13)$$

209 le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (14)$$

210 ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$
211 sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rap-
212 presenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni
213 lineari (13) le (14) soddisfano

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e \quad p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e \quad q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (15)$$

214 rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio
215 deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \end{aligned} \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \quad (16)$$

216 ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relati-
217 vi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da
218 come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo ma-
219 nuscrutto si è modificata la [3, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [3, (4.5), § 4, p.
220 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (17)$$

221 che in essenza è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di
222 emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rappor-
223 to s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il
224 seguente significato:

- 225 $\diamond \lambda \in (0, 1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le
226 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 227 $\diamond \alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapida-
228 mente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (17) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i piú svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (15) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (17).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è piú agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (14), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (18)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (18) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (14), situazione che si vuole evitare¹ dato che nella (17) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiú, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (18);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che piú grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 si;
- ◊ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◊ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (19)$$

ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (20)$$

¹ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

266 Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la [F₃](#), e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (21)$$

267 con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da
268 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (22)$$

269 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la [F₂](#) semplicemente tra-
270 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzio-
271 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

272 D'altra parte la [F₁](#) necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
273 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
274 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
275 di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

276 ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (23)$$

277 siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0, 1)$. La [\(23\)](#) implica quindi che non
278 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la [F₁](#), ma che
279 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ più
280 piccola è la varianza, e viceversa.

281 3.3.3 Derivazione approssimata

282 3.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

283 È d'interesse esplorare il legame presente tra la [\(11\)](#) coll'equazione classica
284 di Boltzmann [{§}](#).

285 3.4.1 Ipotesi semplificative

286 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-
287 care alla [\(11\)](#):

288 1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la
289 matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

290 2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (24)$$

291 3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (25)$$

292 **3.4.2 Analisi della 1° IS**

293 Con tal'ipotesi la (11) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

294 e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agli indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (26)$$

295 che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

296 mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (27)$$

297 la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann {§}. Ciò
298 significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano di-
299 stinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la
300 distribuzione media (26).

301 Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una
302 matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a
303 quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio
304 quella media F.

305 **3.4.3 Analisi della 2° IS**

306 La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti
307 siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme
308 alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente.
309 Pertanto la (11) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

310 che sommata su tutti gli indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

311 e definendo $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (28)$$

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix \mathbf{M} ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

- 1: $\tilde{V} \leftarrow V_0$
- 2: $t \leftarrow 1$
- 3: **for** $t < T$ **do**
- 4: $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
- 5: $V \leftarrow \tilde{V}$
- 6: $P \leftarrow$ random permutation of $\{1, \dots, N\}$
- 7: $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
- 8: $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
- 9: $i \leftarrow 1$
- 10: **for** $i < N/2$ **do**
- 11: $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i)) \Delta t)$
- 12: $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
- 13: $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
- 14: $i \leftarrow i + 1$
- 15: **end for**
- 16: $t \leftarrow t + \Delta t$
- 17: **end for**

312 In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa²; d'altra parte l'equazione è
 313 analogica a quella classica di Boltzmann [\[§\]](#).

314 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla
 315 (11), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2
 316 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scom-
 317 parsa per la [1° IS](#).

319 3.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS

320 Visto che vale [1° IS](#) si può partire dalla (27) nella quale la distribuzione
 321 media (26) diventa per [2° IS](#)

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

322 ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti³, essendo questi, appunto,
 323 indistinguibili.

324 In tal modo la (27) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

² Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

³ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

325 che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
326 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

327 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

328 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche

329 **{S}** usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
330 tra una popolazione di particelle di un gas.

332

5 | CONCLUSIONI

333 Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-
334 Planck per la distribuzione stazionaria.

335 Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della
336 rete statica.

337 Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [3] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [4] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [5] Nuriuso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- [6] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- [7] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.