POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente

Relatori
prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

Candidato
Valerio Taralli

firma dei relatori

. . . .
. . . .

firma del candidato

. . . .

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e *Marco*

INDICE

1 Introduzone 5
2 Teorie cinetiche dei sistemi multiagente 7
2.1 Descrizione cinetica 7
2.2 Nesso discreto-continuo 7
2.2.1 Ipotesi semplificative 7
2.2.2 Analisi della 1° IS 8
2.2.3 Analisi della 2° IS 8
2.2.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS 9
3 Simulazioni 11
4 Conclusioni 13

1 INTRODUZONE

2 TEORIE CINETICHE DEI SISTEMI MULTIAGENTE

2.1 DESCRIZIONE CINETICA

La distribuzione totale presenta la seguente forma

$$f(x,s,t) = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{J}} f_i(s,t)\otimes\delta(x-i), \tag{1}$$

ove $N \equiv |\mathcal{J}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s,t) : \mathcal{P}\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s,t)ds = 1, \qquad \forall t\geqslant 0, \forall i\in\mathcal{J},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{J}}\int_{\mathcal{P}} f(x,s,t)dsdx = 1$$

a ogn'istante.

[...]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f_i ds &= \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{J}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{J}} A(j,i)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_*-\varphi_*\rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i\in\mathcal{J},\end{aligned} \tag{2}$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s,t)\ \ \forall i\in\mathcal{J},\ \ \varphi\equiv\varphi(s),\ \ \varphi_*\equiv\varphi(s_*)\ \text{ e }\ \varphi'\equiv\varphi(s').$$

2.2 NESSO DISCRETO-CONTINUO

È d'interesse esplorare il legame presente tra la (2) coll'equazione classica di Boltzmann §§§ .

2.2.1 Ipotesi semplificative

A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da applicare alla (2):

1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s,t) = f_j(s,t) = f(s,t) \quad \forall i,j \in \mathcal{I}, \tag{3}$$

3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s,s_*) = \Psi_*(s_*,s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s,s_*). \tag{4}$$

2.2.2 Analisi della 1° IS

Con tal'ipotesi la (2) diventa

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N}\left[\sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_*-\varphi_*\rangle f_j f_i^* ds ds_*\right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agl'indici

$$F(s,t) \equiv \int_{\mathcal{I}} f(x,s,t)dx = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t) \otimes \int_{\mathcal{I}} \delta(x-i)dx = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t), \tag{5}$$

che corrisponde a una media tra le distribuzione dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_*-\varphi_*\rangle F f_i^* ds ds_*\right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi+\varphi'_*-\varphi_*\rangle F F^* ds ds_*, \tag{6}$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann §§§ . Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (5).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio quella media F.

2.2.3 Analisi della 2° IS

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la (2) diventa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f f^* ds ds_* \\ + \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(j,i)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_*-\varphi_*\rangle f f^* ds ds_*,\end{aligned}$$

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix $\mathbf{M}$; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

$\tilde{V} \leftarrow V_0$
$t \leftarrow 1$
for $t < T$ **do**
  $\langle\varphi\rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(\tilde{V}(i))$
  $V \leftarrow \tilde{V}$
  $P \leftarrow$ random permutation of $\{1,\dots,N\}$
  $p_1 \leftarrow (P(1),\dots,P(N/2))$
  $p_2 \leftarrow (P(N/2+1),\dots,P(N))$
  $i \leftarrow 1$
  for $i < N/2$ **do**
    $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i),p_2(i))\Delta t)$
    $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1-\Theta) + \Psi(V(p_1(i)),V(p_2(i)))\Theta$
    $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1-\Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)),V(p_1(i)))\Theta$
    $i \leftarrow i+1$
  end for
  $t \leftarrow t+\Delta t$
end for

che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f ds = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j\in\mathcal{I}}A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_*\rangle f f^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i,j\in\mathcal{I}}A(i,j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f ds = \frac{L}{N^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathcal{I}}A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_*\rangle f f^* ds ds_*\right]. \tag{7}$$

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa[1]; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann §§§ .

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla (2), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la 1° IS.

2.2.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS

Visto che vale 1° IS si può partire dalla (6) nella quale la distribuzione media (5) diventa per 2° IS

$$F(s,t) = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t) \overset{2^\circ}{=} \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

1 Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore prorio N^2, ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti[2], essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (6) diventa

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$ e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche §§§ usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica tra una popolazione di particelle di un gas.

2 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \to \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

3 SIMULAZIONI

4 CONCLUSIONI

BIBLIOGRAFIA

[1] Marco Nurisso, Matteo Raviola e Andrea Tosin. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0956792524000020.