

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea  
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della  
popolazione tra città su reti spaziali mediante la  
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



**Relatori**

prof. Andrea Tosin  
prof. Nome Cognome

*firma dei relatori*

.....  
.....

**Candidato**

Valerio Taralli

*firma del candidato*

.....

Anno Accademico 2025-2026

---

---

Ai miei genitori,  
*Elisabetta e Marco*

# INDICE

1 INTRODUZIONE	5
2 TEORIE CINETICHE DEI SISTEMI MULTIAGENTE	7
2.1 Descrizione cinetica classica . . . . .	7
2.2 Descrizione cinetica retale . . . . .	7
2.2.1 Impostazione . . . . .	7
2.2.2 Algoritmi d'interazione . . . . .	8
2.2.3 Interazioni azione-reazione . . . . .	8
2.3 Derivazione dell'equazioni cinetiche . . . . .	9
2.3.1 Derivazione esatta . . . . .	9
2.3.2 Interazioni tra città . . . . .	11
2.3.3 Derivazione approssimata . . . . .	13
2.4 Nesso discreto-continuo . . . . .	13
2.4.1 Ipotesi semplificative . . . . .	13
2.4.2 Analisi della 1° IS . . . . .	14
2.4.3 Analisi della 2° IS . . . . .	14
2.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS . . . . .	15
3 SIMULAZIONI	17
4 CONCLUSIONI	19



# 1

## INTRODUZIONE



# 2

## TEORIE CINETICHE DEI SISTEMI MULTIAGENTE

### 2.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

### 2.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

#### 2.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o più agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia  $X \in \mathcal{J}$  la posizione di un agente sul grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{E})$ , ove  $\mathcal{J}$  è l'insieme dei vertici mentre  $\mathcal{E}$  dei lati di  $\mathcal{G}$ . Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico  $(X, S_t)_{t \geq 0}$ ; la funzione  $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  è una variabile aleatoria da uno spazio astratto  $\Omega$  allo spazio delle popolazioni  $\mathcal{P}$  e indica la popolazione dell'agente al tempo  $t \geq 0$ . Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da  $\mathcal{E}$ , definendo così un processo stocastico  $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$ .

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico  $X, S_t$  dell'agente mediante una probabilità di misura  $f = f(x, s, t)$ , discreta in  $x \in \mathcal{J}$  e continua in  $s \in \mathcal{P}$ . Pertanto si può dare alla  $f$  la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (1)$$

ove  $N \equiv |\mathcal{J}|$  è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre  $\delta(\cdot)$  denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia  $S_t$  dell'agente  $X = i$ .

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{J},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

28    **2.2.2 Algoritmi d'interazione**

29 Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti intera-  
 30 giscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel det-  
 31 taglio, in un dato passo temporale  $\Delta t > 0$  si assume che un agente  $(X, S_t) \in$   
 32  $\mathcal{J} \times \mathcal{P}$  cambi la sua popolazione a  $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$  a seguito di un interazione con  
 33 un altro agente  $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$  secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \quad (2)$$

34 ove  $\Theta \in [0, 1]$  è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'in-  
 35 terazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ( $\Theta = 1$ ) o no ( $\Theta = 0$ );  
 36 d'altro canto  $S'_t \in \mathcal{P}$  è la nuova popolazione ottenuta dall'agente  $(X, V_t)$  in  
 37 seguito a un'interazione avvenuta.

38 Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (3)$$

39 il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzio-  
 40 niale al passo temporale d'interazione  $\Delta t$  mediante un nucleo d'interazione  
 41  $A(X, X^*) = 1$ , che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle  
 42 connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

43 dove la coppia ordinata  $(X, X^*)$  denota il lato dal vertice  $X$  al vertice  $X^*$ ;  
 44 per coerenza è necessario impostare  $\Delta t \leq 1$  che impone un limite superiore  
 45 al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto  
 46 facile da verificare nella pratica.

47 La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria  $S'_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  dipen-  
 48 dente in generale dagli stati preinterazione  $V_t, V_t^*$  degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4)$$

49 in cui  $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  è funzione nota potenzialmente stocastica.

50    **2.2.3 Interazioni azione-reazione**

51 Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con  
 52 un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

53 Sia  $S$  la città interagente e  $S^*$  quella subente, allora in un grafo diretto si  
 54 può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse  $(S, S^*) \in \mathcal{E}$   
 55 mentre quella *in indietro* sse  $(S^*, S) \in \mathcal{E}$ ; tuttavia questa distinzione è inutile  
 56 in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto  
 57 l'agente  $(X^*, S_t^*)$  aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga  
 58 a quella dell'agente  $(X, S_t)$ :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \quad (5)$$

59 ove si osserva che la  $\Theta$  è la stessa della (2) la cui legge dipende da  $A(X, X^*)$   
 60 ma non da  $A(X^*, X)$ ; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso

in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è definita mediante una funzione  $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  potenzialmente diversa da  $\Psi$ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [2, § 2.2.1] sarà identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[\text{AR}] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

Si conclude questa sezione osservando che gli agenti  $(X, S_t)$ ,  $(X^*, S_t^*)$  sono campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

## 2.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

### 2.3.1 Derivazione esatta

Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'evoluzione per le distribuzioni di probabilità  $f_i$  delle opinioni degli agenti; per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi multiagente [2, 3].

Sia  $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR], valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agli indici e alla popolazione a tempo fissato, si ha ~~sss~~

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per  $\Delta t$ , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

laddove, prendendo il limite  $\Delta t \rightarrow 0^+$ , si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (7)$$

Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi sulla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (8)$$

Osservando che le coppie  $(X, S_t)$  e  $(X^*, S_t^*)$  fanno riferimento a un agente rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (7, 8), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E}[A(X, X^*) (\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f d\nu dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (9)$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (1):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*) \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (10)$$

mentre  $\langle \cdot \rangle$  indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni  $\Psi$  e  $\Psi_*$ .

Si noti che la (9) è valida per ogni funzione *test*  $\Phi$  per cui è un'equazione debole per la distribuzione  $f$ . (commento su Fokker-Planck [SSS](#))

Si osservi anche che la (9) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione  $f$  di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta  $g(x, x_*, s, s_*, t)$  degli agenti interagenti nel prodotto  $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$ .

Dalla (9) con una scelta adeguata della funzione *test*  $\Psi$ , è possibile recuperare un sistema di equazioni deboli per le  $f_i$ . Sia  $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$ , dove  $\phi_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $\phi_i(i) = 1$  mentre  $\phi_i(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$  e  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  è arbitrario. Allora usando la (1) dentro la (9) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (11)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento [SSS](#)). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale  $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$  e la matrice  $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (12)$$

ove  $\odot$  indica il prodotto di Hadamard e  $\mathbf{M}^\top$  al trasposta di  $\mathbf{M}$ . Si noti che  $\mathbf{M}$  altro non è che la matrice d'adiacenza di  $\mathcal{G}$ .

113 **2.3.2 Interazioni tra città**

114 Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

115 Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-  
116 reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra,  
117 scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto  
118 che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

119 Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile  
120 l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,  
121 ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò  
122 implica che la matrice d'adiacenza  $\mathbf{M}$  è simmetrica.

123 Gli stati postinterazione (10) prendono come riferimento leggi d'interazio-  
124 ni lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS^*_t, \\ S^{*'}_t = p_*S_t + q_*S^*_t, \end{cases} \quad (13)$$

125 le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (14)$$

126 ove  $s$  e  $s_*$  sono le città interagente e subente rispettivamente,  $E(s, s_*)$  e  $I(s, s_*)$   
127 sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre  $\gamma$  rap-  
128 presenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni  
129 lineari (13) le (14) soddisfano

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e \quad p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e \quad q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (15)$$

130 rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio  
131 deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \end{aligned} \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \quad (16)$$

132 ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relati-  
133 vi (invertendo  $s$  ed  $s_*$  sarebbe l'opposto). La scelta di  $E(s, s_*)$  dipende da  
134 come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo ma-  
135 nuscrutto si è modificata la [1, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [1, (4.5), § 4, p.  
136 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (17)$$

137 che in essenza è una funzione di Hill di ordine  $\alpha$ , in cui v'è un tasso di  
138 emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rappor-  
139 to  $s_*/s$ , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il  
140 seguente significato:

- 141  $\diamond \lambda \in (0, 1)$  rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le  
142 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 143  $\diamond \alpha \in \mathbb{R}^+$  indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapida-  
144 mente il rapporto  $s_*/s$  raggiunge la massima attrattività  $\lambda$ .

In poche parole la (17) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i piú svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (15)  $p \neq q$  e  $q \neq p$ , e non lineari, a causa della (17).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione  $\gamma$  per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente  $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$  ma è piú agevole supporre  $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$  per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (14), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (18)$$

mentre  $s'_*$  è per definizione sempre positivo. La scelta di  $>$  anziché  $\geq$  nella (18) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora  $\gamma = E(s, s_*) - 1$  si avrebbe  $s' = 0$  dalla (14), situazione che si vuole evitare<sup>1</sup> dato che nella (17) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiú, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto  $\gamma$  deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (18);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia  $\langle \gamma \rangle = 0$ ;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che piú grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 si;
- ◊ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo  $\gamma = E(s, s_*) - 1$  ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◊ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (19)$$

ove  $\alpha$  e  $\theta$  sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre  $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (20)$$

<sup>1</sup> Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

182 Si scelga  $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ , che soddisfa per definizione la [F<sub>3</sub>](#), e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (21)$$

183 con  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  equivalente alla deviazione *standard* mentre  $\sigma^2$  alla varianza, da  
184 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (22)$$

185 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la [F<sub>2</sub>](#) semplicemente tra-  
186 slando i valori campionanti della  $\hat{\gamma}$  di  $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ , ossia si considera la distribuzio-  
187 ne  $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$ :

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

188 D'altra parte la [F<sub>1</sub>](#) necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-  
189 buzione gamma: essa infatti se  $\alpha = 1$  diventa un'esponenziale di parametro  
190  $\theta$ , mentre se  $\alpha < 1$  diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla  
191 di campionare l'origine [e quindi  $-\langle \hat{\gamma} \rangle$  dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

192 ma nel caso peggiore  $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$  da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (23)$$

193 siccome  $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$  e  $\lambda \in (0, 1)$ . La [\(23\)](#) implica quindi che non  
194 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la [F<sub>1</sub>](#), ma che  
195 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande  $\lambda$  più  
196 piccola è la varianza, e viceversa.

### 197 2.3.3 Derivazione approssimata

## 198 2.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

199 È d'interesse esplorare il legame presente tra la [\(11\)](#) coll'equazione classica  
200 di Boltzmann [§§§](#).

### 201 2.4.1 Ipotesi semplificative

202 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-  
203 care alla [\(11\)](#):

204 1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la  
205 matrice d'adiacenza sia unitaria  $A \equiv I$ .

206 2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (24)$$

207 3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (25)$$

208 **2.4.2 Analisi della 1° IS**

209 Con tal'ipotesi la (11) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[ \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

210 e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agl'indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (26)$$

211 che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

212 mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (27)$$

213 la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann **sss**. Ciò  
214 significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano di-  
215 stinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la  
216 distribuzione media (26).

217 Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una  
218 matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a  
219 quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio  
220 quella media F.

221 **2.4.3 Analisi della 2° IS**

222 La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti  
223 siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme  
224 alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente.  
225 Pertanto la (11) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

226 che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

227 e definendo  $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$  si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (28)$$

**Algorithm 1** Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

**Require:** adjacency matrix  $\mathbf{M}$ ; initial state  $V_0 \in \mathcal{O}^N$ ; time step  $\Delta t > 0$ ; final time  $T > 0$

- 1:  $\tilde{V} \leftarrow V_0$
- 2:  $t \leftarrow 1$
- 3: **for**  $t < T$  **do**
- 4:    $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
- 5:    $V \leftarrow \tilde{V}$
- 6:    $P \leftarrow$  random permutation of  $\{1, \dots, N\}$
- 7:    $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
- 8:    $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
- 9:    $i \leftarrow 1$
- 10:   **for**  $i < N/2$  **do**
- 11:      $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i)) \Delta t)$
- 12:      $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
- 13:      $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
- 14:      $i \leftarrow i + 1$
- 15:   **end for**
- 16:    $t \leftarrow t + \Delta t$
- 17: **end for**

In questo contesto il rapporto  $L/N^2 \in [0,1]$  rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa<sup>2</sup>; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann **sss**.

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla (11), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente  $L/N^2$  che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la **1° IS**.

#### 2.4.4 Analisi della **1°, 2° e 3° IS**

Visto che vale **1° IS** si può partire dalla (27) nella quale la distribuzione media (26) diventa per **2° IS**

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

ossia la  $F$  coincide con quella di tutti gli agenti<sup>3</sup>, essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (27) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

<sup>2</sup> Difatti  $L$  è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio  $N^2$ , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati  $N$  nodi.

<sup>3</sup> Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi  $N$  è coerente colla situazione in cui  $N \rightarrow \infty$ , condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale  $N \gg 1$  ben approssima il limite.

241 che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili  $s_* = s$   
242 e  $s = s_*$ )

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

243 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

244 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetri-

245 che ~~sss~~ usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia

246 cinetica tra una popolazione di particelle di un gas.

# 3 | SIMULAZIONI







249

## BIBLIOGRAFIA

- 250 [1] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A  
251 kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- 253 [2] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based  
254 kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topo-  
255 logy». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI:  
256 [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- 257 [3] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*  
258 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.