

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea  
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

## Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



### Relatori

prof. Andrea Tosin  
prof. Nome Cognome

*firma dei relatori*

.....  
.....

### Candidato

Valerio Taralli

*firma del candidato*

.....

Anno Accademico 2025-2026

---

---

Ai miei genitori,  
*Elisabetta e Marco*

---

# INDICE

1 INTRODUZIONE	5
2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1 Definizioni miscellanee . . . . .	9
2.2 Reti e città . . . . .	10
2.3 Cenni sui dati . . . . .	11
3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	15
3.1 Descrizione cinetica classica . . . . .	15
3.2 Descrizione cinetica retale . . . . .	15
3.2.1 Impostazione . . . . .	15
3.2.2 Algoritmi d'interazione . . . . .	16
3.2.3 Interazioni azione-reazione . . . . .	16
3.3 Derivazione dell'equazioni cinetiche . . . . .	17
3.3.1 Derivazione esatta . . . . .	17
3.3.2 Interazioni tra città . . . . .	19
3.3.3 Derivazione approssimata . . . . .	21
3.4 Nesso discreto-continuo . . . . .	21
3.4.1 Ipotesi semplificative . . . . .	21
3.4.2 Analisi della 1° IS . . . . .	22
3.4.3 Analisi della 2° IS . . . . .	22
3.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS . . . . .	23
4 SIMULAZIONI	25
5 CONCLUSIONI	27
APPENDICE	29
A Codice . . . . .	29



# 1

## INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf<sup>1</sup> [14] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che  $2000 \approx C/10$ . La stessa legge descritta in (1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se si in luogo di  $f$  la popolazione  $t$  [14, Fig. 9-2, p. 375] ( $t$  sta per *taglia*); tuttavia ciò è vero solo qualora  $t \gg 1$ , ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1) vale sempre.

Piú in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia  $T$  la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia  $f_T(t)$  la sua funzione di densità di probabilità<sup>2</sup>, per la quale  $f_T(t)dt$  indica il numero di città con  $t \in (t, t+dt)$ , allora si dice che  $T$  segue una distribuzione di Pareto se soddisfa

$$R(t) \approx \frac{1}{t^p} \quad \text{se } t \gg 1, \quad \text{ove } R(t) = \int_t^{+\infty} f_T(\tau)d\tau, \quad (2)$$

che altro non è che la funzione di ripartizione complementare di  $T$ , la quale rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a  $t$ ; si indica con  $R(t)$  perché è analoga al rango nella (1) una volta che s'impone l'indice di Pareto  $p$  unitario.

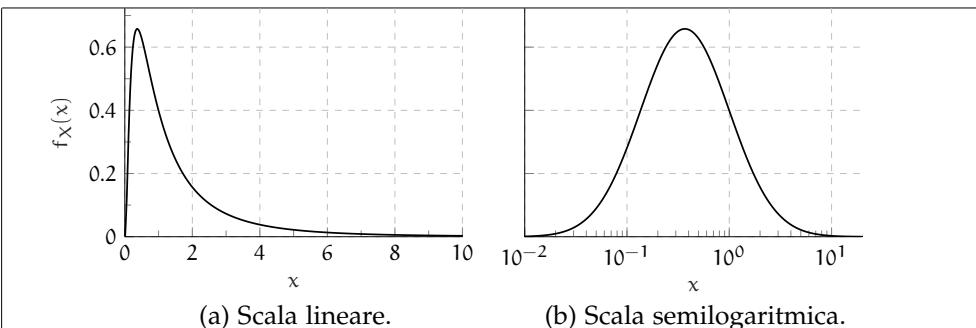
Piú recentemente [6, 7] si è scoperto che al di fuori della coda la  $f_T(t)$  è ben fissata dalla distribuzione lognormale con funzione di distribuzione di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{ove } X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma). \quad (3)$$

Come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale  $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  (Fig. 1.1) in cui  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  indica la distribuzione gaussiana.

<sup>1</sup>In realtà, come Zipf stesso ammette [14, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

<sup>2</sup>Affinché  $f_T(t)$  esista rigorosamente anche supporre che sia assolutamente continua ma in questa introduzione non è necessario entrare nei dettagli, per i quali si rimanda alla § 3.



**Figura 1.1:** Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [7, 8] ci si è poi resi conto che per fissare l’intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (3)

$$f_T(t) = z f_T^1(t) + (1-z) f_T^2(t), \quad (4)$$

ove  $z \in [0,1]$  è un parametro da fissare tanto quanto le medie e le varianze associate a  $f_T^1(t)$  e  $f_T^2(t)$  per un totale di 5 parametri.

Pertanto l’obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d’interazione riguardo al fenomeno dell’emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell’autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- o applicano la TCSMA alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [8]<sup>3</sup> o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la TCSMA[3];
- altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate[10];
- infine l’articolo che piú si avvicina all’obbiettivo di questa tesi, applica tuttavia la sua teoria nel contesto delle reti sociali[12].

<sup>3</sup> In particolare [8], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s’intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della  
60 teoria dei grafi applicata alla TCSMA sono stati piuttosto recenti e prin-  
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.  
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-  
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-  
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come  
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-  
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto  
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la TCSMA è ap-  
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia  
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno  
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi  
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di  
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.



# 2

## NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivono molto brevemente i dati usati.

### 2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

**Definizione 1** (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia  $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$ , ove  $\mathcal{I}$  è l'insieme degl'indici dei nodi mentre  $\mathcal{E}$  è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici  $\mathcal{I}$ : due nodi  $i, j \in \mathcal{I}$  sono connessi sse  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

Dall'insieme  $\mathcal{E}$  si può poi specializzare il concetto di grafo:

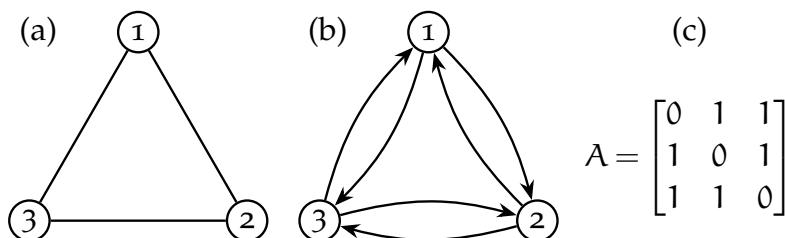
**Definizione 2** (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato  $(i, j) \in \mathcal{E}$  allora  $(j, i) \in \mathcal{E}$  e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

**Definizione 3** (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia  $|\mathcal{I}|$  la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria  $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$  e pesata  $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$  come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove  $q_{i,j}$  è il peso<sup>1</sup> associato al lato  $(i,j)$ . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.



**Figura 2.1:** Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

<sup>1</sup> Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo  $q_{i,j} \equiv 1$ .

94 **Definizione 4** (Grado e Forza [entrante/uscente]). Dato un indice  $i \in \mathcal{J}$ , in un  
95 grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

96 d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più  
97 [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado  
98 in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

99 rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di  
100 (2, 3) ma con  $w_{i,j}/w_{j,i}$  in luogo di  $a_{i,j}/a_{j,i}$ .

101 Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

102 **Ipotesi 1.** *Il grafo  $\mathcal{G}$  è assunto statico: in altre parole,  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{E}$  sono costanti nel tempo.*

103 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-  
104 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta  
105 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connes-  
106 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città  
107 stesse.

## 108 2.2 RETI E CITTÀ

109 Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il pro-  
110 blema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti  
111 possibili tra le città

112 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i  
113 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati  
114 e le loro intersezioni come nodi [11, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la  
115 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [11, § 3.2.1 p. 22]; altri si  
116 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in  
117 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [11, § 3.1.3.2 p. 17], navale  
118 [11, § 3.1.4 p. 19], aereo [11, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

119 Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione  
120 della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 121 1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono  
122 troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola  
123 città;
- 124 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contempora-  
125 neamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere  
126 diversi trasporti per muoversi.

127 Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti  
128 pendolari [11, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutti

129 possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre  
 130 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché  
 131 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

132 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di  
 133 grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e immediata  
 134 dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può interagire  
 135 con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col primo; si è dunque  
 136 di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2) perché il contesto richiede  
 137 di considerare la direzione d'interazione.

138 Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 11],  
 139 ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò  
 140 tale osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando  
 141 si definiranno le leggi d'interazione. Perdipiù, contrariamente a quanto si  
 142 possa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2]  
 143 proprio a causa della sua natura spaziale [4, 11]; ciò non esclude l'esistenza  
 144 di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è  
 145 limitato superiormente dalla natura spaziale del grafo.

## 146 2.3 CENNI SUI DATI

147 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [9]  
 148 seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una  
 149 serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

150 **Tabella 2.1:** Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT<sup>2</sup>; le  
 151 linee barrate corrispondono a dati trascurati.

152 I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è ne-  
 153 cessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni  
 154 e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

155 Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento  
 156 `Pen_91It.txt`:

- 157 1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice  
 158 «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che  
 159 riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;

2 si v. il documento `trapen91.txt` per maggiori informazioni.

- 158     2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici  
 159       incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non  
 160       la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229»,  
 161       «241», «216», «203», «224», «236», «246».

162       In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi]  
 163       sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto  
 164       raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può  
 165       notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

166       00200714212215\_\_\_\_\_1,

167       ove \_ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in tota-  
 168       le 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del  
 169       Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in  
 170       realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», ep-  
 171       pure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di  
 172       partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizza-  
 173       re che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo;  
 174       è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il  
 175       codice del comune di destinazione<sup>3</sup>.

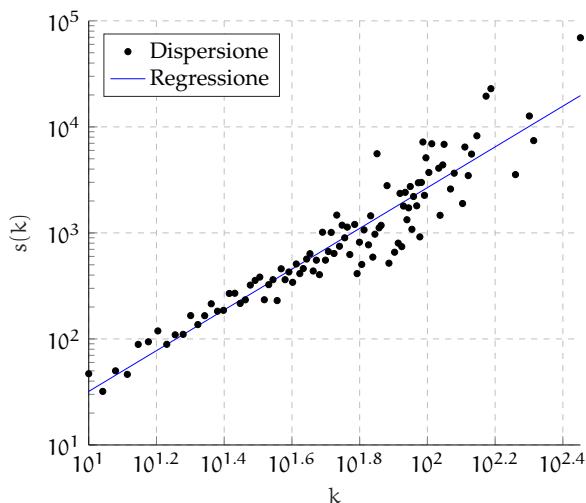


Figura 2.2: Forza contro grado  $s(k)$  per la Sardegna.

176       Infine nelle Figg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle-  
 177       seguenti osservazioni:

- 178     1. il coefficiente d'aggregazione medio  $\langle C(k) \rangle = 0.453$  è quasi il doppio  
 179       di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);  
 180     2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-  
 181       mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che  
 182       limiti superiori e inferiori più estesi;

3 Si potrebbe scegliere, tra tutti i comuni colo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella § 4, sono correzioni del tutto innecessarie.

- 183 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g  
 184 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-  
 185 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come  
 186 afferma [5];
- 187 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-  
 188 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte  
 189 di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-  
 190 no molto distanti geograficamente<sup>4</sup>, per cui è ragionevole che i flussi  
 191 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

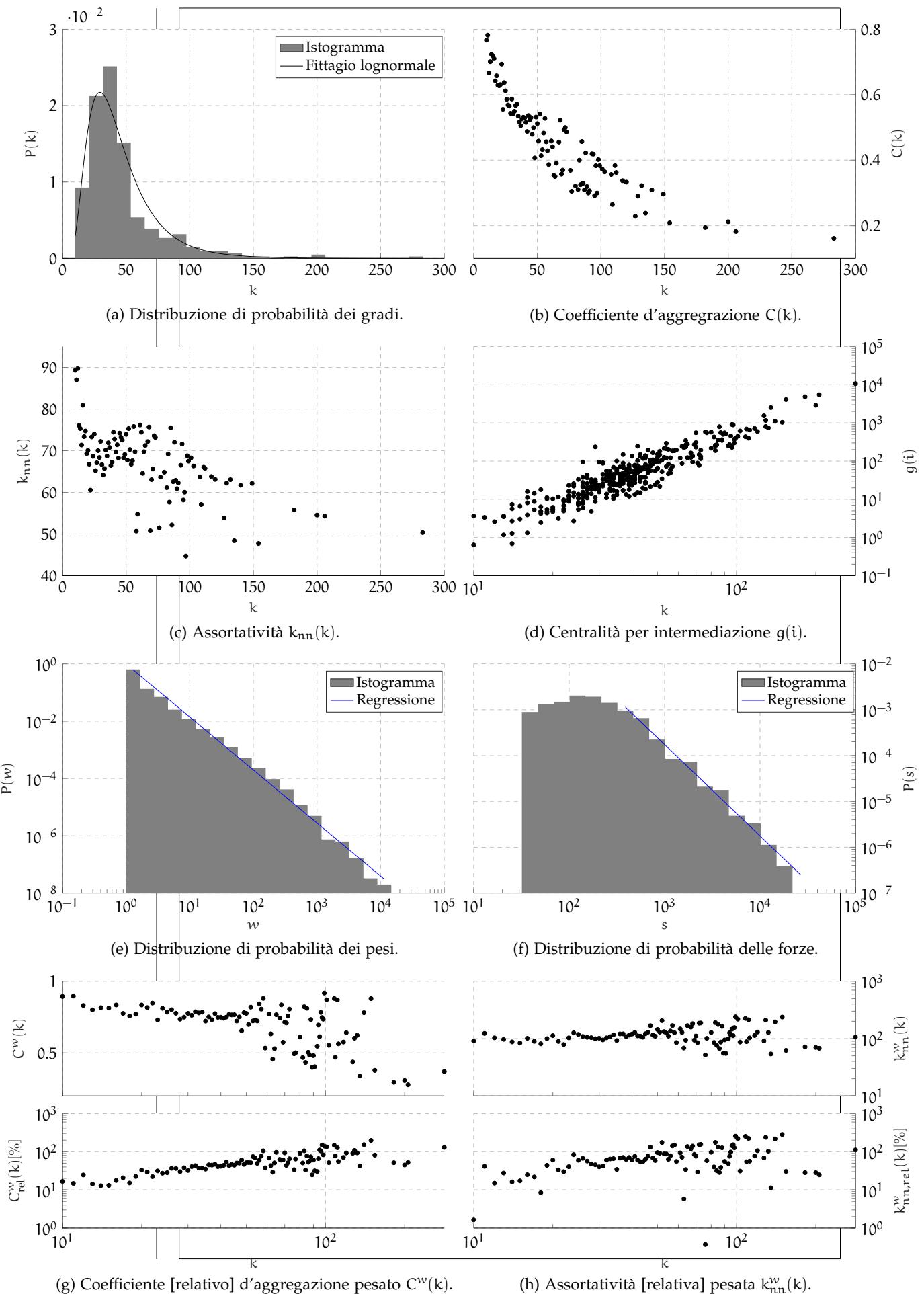
Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

(b) Pesi maggiori di [5]

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

192 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero  
 193 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-  
 194 to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva  
 195 tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

<sup>4</sup> Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.



**Figura 2.3:** Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

# 3

## TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

### 3.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

### 3.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

#### 3.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o più agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia  $X \in \mathcal{J}$  la posizione di un agente sul grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{E})$ , ove  $\mathcal{J}$  è l'insieme dei vertici mentre  $\mathcal{E}$  dei lati di  $\mathcal{G}$ . Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico  $(X, S_t)_{t \geq 0}$ ; la funzione  $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  è una variabile aleatoria da uno spazio astratto  $\Omega$  allo spazio delle popolazioni  $\mathcal{P}$  e indica la popolazione dell'agente al tempo  $t \geq 0$ . Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da  $\mathcal{E}$ , definendo così un processo stocastico  $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$ .

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico  $X, S_t$  dell'agente mediante una probabilità di misura  $f = f(x, s, t)$ , discreta in  $x \in \mathcal{J}$  e continua in  $s \in \mathcal{P}$ . Pertanto si può dare alla  $f$  la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (1)$$

ove  $N \equiv |\mathcal{J}|$  è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre  $\delta(\cdot)$  denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia  $S_t$  dell'agente  $X = i$ .

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{J},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

222 **3.2.2 Algoritmi d'interazione**

223 Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti intera-  
 224 giscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel det-  
 225 taglio, in un dato passo temporale  $\Delta t > 0$  si assume che un agente  $(X, S_t) \in$   
 226  $\mathcal{J} \times \mathcal{P}$  cambi la sua popolazione a  $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$  a seguito di un interazione con  
 227 un altro agente  $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$  secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \quad (2)$$

228 ove  $\Theta \in [0, 1]$  è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'in-  
 229 terazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ( $\Theta = 1$ ) o no ( $\Theta = 0$ );  
 230 d'altro canto  $S'_t \in \mathcal{P}$  è la nuova popolazione ottenuta dall'agente  $(X, V_t)$  in  
 231 seguito a un'interazione avvenuta.

232 Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (3)$$

233 il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzio-  
 234 nale al passo temporale d'interazione  $\Delta t$  mediante un nucleo d'interazione  
 235  $A(X, X^*) = 1$ , che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle  
 236 connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

237 dove la coppia ordinata  $(X, X^*)$  denota il lato dal vertice  $X$  al vertice  $X^*$ ;  
 238 per coerenza è necessario impostare  $\Delta t \leq 1$  che impone un limite superiore  
 239 al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto  
 240 facile da verificare nella pratica.

241 La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria  $S'_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  dipen-  
 242 dente in generale dagli stati preinterazione  $V_t, V_t^*$  degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4)$$

243 in cui  $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  è funzione nota potenzialmente stocastica.

244 **3.2.3 Interazioni azione-reazione**

245 Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con  
 246 un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

247 Sia  $S$  la città interagente e  $S^*$  quella subente, allora in un grafo diretto si  
 248 può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse  $(S, S^*) \in \mathcal{E}$   
 249 mentre quella *in indietro* sse  $(S^*, S) \in \mathcal{E}$ ; tuttavia questa distinzione è inutile  
 250 in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto  
 251 l'agente  $(X^*, S_t^*)$  aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga  
 252 a quella dell'agente  $(X, S_t)$ :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \quad (5)$$

253 ove si osserva che la  $\Theta$  è la stessa della (2) la cui legge dipende da  $A(X, X^*)$   
 254 ma non da  $A(X^*, X)$ ; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso

255 in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di  
 256 simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

257 è definita mediante una funzione  $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  potenzialmente diversa da  
 258  $\Psi$ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [12, § 2.2.1] sarà  
 259 identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[AR] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

260 Si conclude questa sezione osservando che gli agenti  $(X, S_t)$ ,  $(X^*, S_t^*)$  sono  
 261 campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

## 262 3.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

### 263 3.3.1 Derivazione esatta

264 Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'e-  
 265 voluzione per le distribuzioni di probabilità  $f_i$  delle opinioni degli agenti;  
 266 per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi  
 267 multiagente [12, 13].

268 Sia  $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una  
 269 quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico  
 270 agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR],  
 271 valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agli indici  
 272 e alla popolazione a tempo fissato, si ha {§}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

273 da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per  $\Delta t$ , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

274 laddove, prendendo il limite  $\Delta t \rightarrow 0^+$ , si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (7)$$

275 Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma  
 276 colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (8)$$

277 Osservando che le coppie  $(X, S_t)$  e  $(X^*, S_t^*)$  fanno riferimento a un agente  
 278 rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (7, 8), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E}[A(X, X^*) (\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f d\nu dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (9)$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (1):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*) \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (10)$$

mentre  $\langle \cdot \rangle$  indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni  $\Psi$  e  $\Psi_*$ .

Si noti che la (9) è valida per ogni funzione *test*  $\Phi$  per cui è un'equazione debole per la distribuzione  $f$ . (commento su Fokker-Planck (S))

Si osservi anche che la (9) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione  $f$  di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta  $g(x, x_*, s, s_*, t)$  degli agenti interagenti nel prodotto  $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$ .

Dalla (9) con una scelta adeguata della funzione *test*  $\Psi$ , è possibile recuperare un sistema di equazioni deboli per le  $f_i$ . Sia  $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$ , dove  $\phi_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $\phi_i(i) = 1$  mentre  $\phi_i(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$  e  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  è arbitrario. Allora usando la (1) dentro la (9) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (11)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento (S)). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale  $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$  e la matrice  $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (12)$$

ove  $\odot$  indica il prodotto di Hadamard e  $\mathbf{M}^\top$  al trasposta di  $\mathbf{M}$ . Si noti che  $\mathbf{M}$  altro non è che la matrice d'adiacenza di  $\mathcal{G}$ .

307 **3.3.2 Interazioni tra città**

308 Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

309 Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-  
310 reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra,  
311 scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto  
312 che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

313 Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile  
314 l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,  
315 ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò  
316 implica che la matrice d'adiacenza  $\mathbf{M}$  è simmetrica.

317 Gli stati postinterazione (10) prendono come riferimento leggi d'interazio-  
318 ni lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS^*_t, \\ S^{*'}_t = p_*S_t + q_*S^*_t, \end{cases} \quad (13)$$

319 le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (14)$$

320 ove  $s$  e  $s_*$  sono le città interagente e subente rispettivamente,  $E(s, s_*)$  e  $I(s, s_*)$   
321 sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre  $\gamma$  rap-  
322 presenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni  
323 lineari (13) le (14) soddisfano

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e \quad p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e \quad q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (15)$$

324 rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio  
325 deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \end{aligned} \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \quad (16)$$

326 ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relati-  
327 vi (invertendo  $s$  ed  $s_*$  sarebbe l'opposto). La scelta di  $E(s, s_*)$  dipende da  
328 come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo ma-  
329 nuscrutto si è modificata la [8, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [8, (4.5), § 4, p.  
330 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (17)$$

331 che in essenza è una funzione di Hill di ordine  $\alpha$ , in cui v'è un tasso di  
332 emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rappor-  
333 to  $s_*/s$ , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il  
334 seguente significato:

- 335  $\diamond \lambda \in (0, 1)$  rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le  
336 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 337  $\diamond \alpha \in \mathbb{R}^+$  indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapida-  
338 mente il rapporto  $s_*/s$  raggiunge la massima attrattività  $\lambda$ .

In poche parole la (17) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i piú svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (15)  $p \neq q$  e  $q \neq p$ , e non lineari, a causa della (17).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione  $\gamma$  per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente  $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$  ma è piú agevole supporre  $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$  per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (14), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (18)$$

mentre  $s'_*$  è per definizione sempre positivo. La scelta di  $>$  anziché  $\geq$  nella (18) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora  $\gamma = E(s, s_*) - 1$  si avrebbe  $s' = 0$  dalla (14), situazione che si vuole evitare<sup>1</sup> dato che nella (17) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiú, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto  $\gamma$  deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (18);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia  $\langle \gamma \rangle = 0$ ;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che piú grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 si;
- ◊ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo  $\gamma = E(s, s_*) - 1$  ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◊ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (19)$$

ove  $\alpha$  e  $\theta$  sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre  $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (20)$$

<sup>1</sup> Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

376 Si scelga  $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$ , che soddisfa per definizione la [F<sub>3</sub>](#), e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (21)$$

377 con  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  equivalente alla deviazione *standard* mentre  $\sigma^2$  alla varianza, da  
378 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (22)$$

379 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la [F<sub>2</sub>](#) semplicemente tra-  
380 slando i valori campionanti della  $\hat{\gamma}$  di  $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ , ossia si considera la distribuzio-  
381 ne  $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$ :

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

382 D'altra parte la [F<sub>1</sub>](#) necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-  
383 buzione gamma: essa infatti se  $\alpha = 1$  diventa un'esponenziale di parametro  
384  $\theta$ , mentre se  $\alpha < 1$  diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla  
385 di campionare l'origine [e quindi  $-\langle \hat{\gamma} \rangle$  dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

386 ma nel caso peggiore  $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$  da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (23)$$

387 siccome  $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$  e  $\lambda \in (0, 1)$ . La [\(23\)](#) implica quindi che non  
388 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la [F<sub>1</sub>](#), ma che  
389 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande  $\lambda$  più  
390 piccola è la varianza, e viceversa.

### 3.3.3 Derivazione approssimata

## 3.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

393 È d'interesse esplorare il legame presente tra la [\(11\)](#) coll'equazione classica  
394 di Boltzmann [{§}](#).

### 3.4.1 Ipotesi semplificative

396 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-  
397 care alla [\(11\)](#):

398 1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la  
399 matrice d'adiacenza sia unitaria  $A \equiv I$ .

400 2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (24)$$

401 3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (25)$$

402 **3.4.2 Analisi della 1° IS**

403 Con tal'ipotesi la (11) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[ \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

404 e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agl'indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (26)$$

405 che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

406 mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (27)$$

407 la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann {§}. Ciò  
408 significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano di-  
409 stinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la  
410 distribuzione media (26).

411 Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una  
412 matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a  
413 quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio  
414 quella media F.

415 **3.4.3 Analisi della 2° IS**

416 La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti  
417 siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme  
418 alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente.  
419 Pertanto la (11) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

420 che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

421 e definendo  $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$  si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (28)$$

**Algorithm 1** Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

**Require:** adjacency matrix  $\mathbf{M}$ ; initial state  $V_0 \in \mathcal{O}^N$ ; time step  $\Delta t > 0$ ; final time  $T > 0$

- 1:  $\tilde{V} \leftarrow V_0$
- 2:  $t \leftarrow 1$
- 3: **for**  $t < T$  **do**
- 4:    $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
- 5:    $V \leftarrow \tilde{V}$
- 6:    $P \leftarrow$  random permutation of  $\{1, \dots, N\}$
- 7:    $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
- 8:    $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
- 9:    $i \leftarrow 1$
- 10:   **for**  $i < N/2$  **do**
- 11:      $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i)) \Delta t)$
- 12:      $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
- 13:      $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
- 14:      $i \leftarrow i + 1$
- 15:   **end for**
- 16:    $t \leftarrow t + \Delta t$
- 17: **end for**

422 In questo contesto il rapporto  $L/N^2 \in [0,1]$  rappresenta topologicamente si-  
 423 mile è la rete a una completamente connessa<sup>2</sup>; d'altra parte l'equazione è  
 424 analoga a quella classica di Boltzmann [\[§\]](#).

425 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla  
 426 (11), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente  $L/N^2$   
 427 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scom-  
 428 parsa per la [1° IS](#).

429 **3.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS**

430 Visto che vale [1° IS](#) si può partire dalla (27) nella quale la distribuzione  
 431 media (26) diventa per [2° IS](#)

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

432 ossia la  $F$  coincide con quella di tutti gli agenti<sup>3</sup>, essendo questi, appunto,  
 433 indistinguibili.

434 In tal modo la (27) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

<sup>2</sup> Difatti  $L$  è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio  $N^2$ , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati  $N$  nodi.

<sup>3</sup> Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi  $N$  è coerente colla situazione in cui  $N \rightarrow \infty$ , condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale  $N \gg 1$  ben approssima il limite.

435 che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili  $s_* = s$   
436 e  $s = s_*$ )

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

437 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

438 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche  
439 {S} usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica  
440 tra una popolazione di particelle di un gas.





442

## 5 | CONCLUSIONI

443 Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-  
444 Planck per la distribuzione stazionaria.

445 Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della  
446 rete statica.

447 Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.



---

---

448 APPENDICE

449 A CODICE



---

---

450

## ELENCO DELLE FIGURE

451	Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1). . . . .	6
452	Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza. . . . .	9
454	Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna. . . . .	12
456	Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	14
458			



---

---

459

## ELENCO DELLE TABELLE

460

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT<sup>1</sup>; le  
linee barrate corrispondono a dati trascurati. . . . . 11

461

462

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. . . . . 13



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berlant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Eeckhout, Jan. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [7] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [9] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [10] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
- [11] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [12] Nuriacco, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- [13] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- [14] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.