Politecnico di Torino

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

# Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente

**Relatori**
prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

**Candidato**
Valerio Taralli

*firma dei relatori*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

*firma del candidato*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
*Elisabetta* e *Marco*

# INDICE

# 1 INTRODUZONE

# 2 TEORIE CINETICHE DEI SISTEMI MULTIAGENTE

## 2.1 DESCRIZIONE CINETICA

La distribuzione totale presenta la seguente forma

$$f(x,v,t) = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(v,t)\otimes\delta(x-i), \tag{1}$$

ove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s,t) : \mathcal{P}\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia $S_t$ dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s,t)ds = 1, \qquad \forall t\geqslant 0, \forall i\in\mathcal{I},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}} f(x,s,t)dsdx = 1$$

a ogn'istante.

[...]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f_i ds &= \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} B(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f_i f_j ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} B(j,i)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_*-\varphi_*\rangle f_j f_i ds ds_*, \quad \forall i\in\mathcal{I}\end{aligned} \tag{2}$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s,t)\ \ \forall i\in\mathcal{I},\ \ \varphi\equiv\varphi(s),\ \ \varphi_*\equiv\varphi(s_*)\ \text{ e }\ \varphi'\equiv\varphi(s').$$

## 2.2 NESSO DISCRETO-CONTINUO

È d'interesse esplorare il legame presente tra la

### 2.2.1 Ipotesi semplificative

### 2.2.2 $2^\circ$ ipotesi

### 2.2.3 $3^\circ$ ipotesi

### 2.2.4 $1^\circ+2^\circ+3^\circ$ ipotesi

Si consideri la distribuzione totale (1), se le particelle sono *indistinguibili* (1° ipotesi) allora vale

$$f_i(s,t)=f_j(s,t)=f(s,t) \quad \forall i,j\in\mathcal{I}, \tag{3}$$

da cui la distribuzione marginale

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}} f(x,s,t)dx &= \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{I}} f_i(s,t)\otimes\delta(x-i)dx\\ &=\frac{1}{N}f(s,t)\otimes\sum_{i\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{I}}\delta(x-i)dx\\ &=\frac{1}{N}f(s,t)\otimes\sum_{i\in\mathcal{I}}1\\ &=\frac{1}{N}f(s,t)N=f(s,t),\end{aligned} \tag{4}$$

e ciò è anche coerente col fatto che in un gas il numero di particelle è molto elevato.

Considerando una *matrice d'adiacenza unitaria* (2° ipotesi) si può scrivere la (2.10) come

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}}\varphi(s)f(s,t)ds &= \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s)-\varphi(s)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*\\ &\quad+\frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s_*')-\varphi(s_*)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*\\ &=\frac{1}{2N}N\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s')-\varphi(s)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*\\ &\quad+\frac{1}{2N}N\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s_*')-\varphi(s_*)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*\\ &=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s')-\varphi(s)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s_*')-\varphi(s_*)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*,\end{aligned} \tag{5}$$

che unita all'ipotesi d'*interazioni simmetriche* (3° ipotesi), ossia tali che

$$s'=\Psi(s,s_*)=\Psi_*(s_*,s) \quad \text{ove } s_*=\Psi_*(s,s_*), \tag{6}$$

porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_*=s$ e $s=s_*$)

$$\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi_*'-\varphi_*\rangle ff_*dsds_*=\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle ff_*dsds_*, \tag{7}$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}}\varphi(s)f(s,t)ds=\int_{\mathcal{O}^2}\langle\varphi(s')-\varphi(s)\rangle f(s,t)f(s_*,t)dsds_*, \tag{8}$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann.

# 3 SIMULAZIONI

# 4 CONCLUSIONI

# BIBLIOGRAFIA

[1] Marco Nurisso, Matteo Raviola e Andrea Tosin. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0956792524000020.