

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1	Definizioni miscellanee	9
2.2	Reti e città	10
2.3	Cenni sui dati	11
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	15
3.1	Definizioni preliminari di probabilità	15
3.2	Descrizione cinetica di [tipo] Boltzmann	18
3.2.1	Equazione di Boltzmann omogenea	18
3.2.2	Equazione di Boltzmann disomogenea	23
3.2.3	Equazione di tipo Boltzmann omogenea	24
3.3	Descrizione cinetica urbana su reti	27
3.3.1	Equazione di tipo Boltzmann esatta	27
3.3.2	Equazione di tipo Boltzmann approssimata	31
3.3.3	Nesso discreto-continuo	34
4	SIMULAZIONI	37
4.1	Premesse	37
4.1.1	Metodo Monte Carlo	37
4.1.2	Fluttuazioni	37
4.1.3	Grafici	37
4.2	Regole d'emigrazione	37
4.2.1	Popolazione	38
4.2.2	Popolazione-Connettività	38
4.2.3	Popolazione-Connettività frazionata	38
4.2.4	Popolazione-Forza	38
4.3	Interpretazione	38
5	CONCLUSIONI	39
	APPENDICE	41
A	Codice	41
	ELENCO DELLE FIGURE	43
	ELENCO DELLE TABELLE	45

--	--

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [16] quasi cinquantanni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1.1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1.1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se in luogo di f si scrive la popolazione s [16, Fig. 9-2, p. 375]; tuttavia ciò è vero solo qualora $s \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1.1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia S la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_S(s)$ la sua funzione di densità di probabilità², la quale permette d'interpretare $f_S(s)ds$ come il numero di città con $s \in (s, s+dt)$; allora si dice che S segue una distribuzione di Pareto nella coda se soddisfa

$$R(s) \equiv \int_s^{+\infty} f_S(t)dt \approx \frac{c}{s^p} \quad \text{se } s \gg 1, \quad (1.2)$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}_+$ e con $R(s)$ uguale alla funzione di ripartizione complementare di S : essa rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a s e, qualora l'indice di Pareto p fosse unitario, è analoga al rango r nella (1.1).

Più recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_S(s)$ è ben fittata dalla distribuzione lognormale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3)$$

ove $X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$; come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹ In realtà, come Zipf stesso ammette [16, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

² Affinché $f_S(s)$ esista bisogna rigorosamente anche supporre che S sia assolutamente continua, ma qui non è necessario entrare nei dettagli per i quali si rimanda ai §§ 3.1 e 3.3.

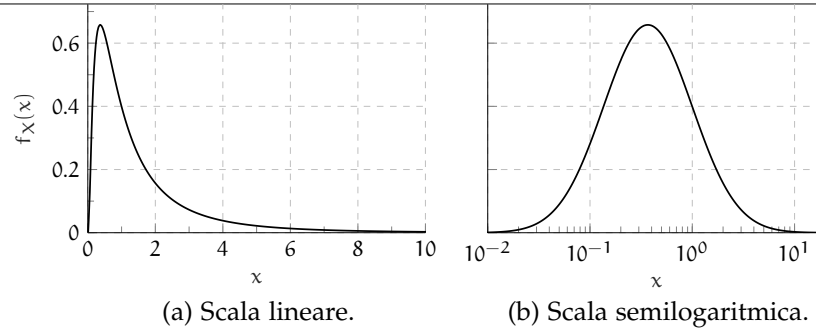


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che per fittare l'intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (1.3)

$$f_S(s) = \xi f_{S_1}(s) + (1 - \xi) f_{S_2}(s), \quad (1.4)$$

ove $\xi \in (0, 1)$ è un parametro da fittare tanto quanto le medie e le varianze associate a $S_1, S_2 \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$, per un totale di 5 parametri.

Pertanto l'obiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d'interazione riguardo al fenomeno dell'emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; piú nel dettaglio gli articoli in letteratura

- ◊ o applicano la TCSMA alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la TCSMA [3];
- ◊ altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [11];
- ◊ infine, l'articolo che piú si avvicina all'obiettivo di questa tesi applica, tuttavia, la sua teoria nel contesto delle reti sociali [14].

³ In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s'intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della
60 la teoria dei grafi applicata alla TCSMA sono stati piuttosto recenti e prin-
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la TCSMA è ap-
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.



In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descriveranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degli indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza). Sia $N \equiv |\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degli indici, ossia il numero di vertici totali, si definisce la matrice d'adiacenza $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ pesata come:

$$w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso associato al lato (i,j) ; nel caso in cui $q_{i,j} \equiv 1 \forall i,j \in \mathcal{I}$ si ha la matrice d'adiacenza unitaria $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si osserva che, se non altrimenti detto, scrivendo solo «matrice d'adiacenza» si sottintende sempre l'unitarietà.

Osservazione 2.1. Per i grafi indiretti sia \mathbf{W} che \mathbf{A} sono simmetriche mentre per quelli diretti non è detto che sia così.

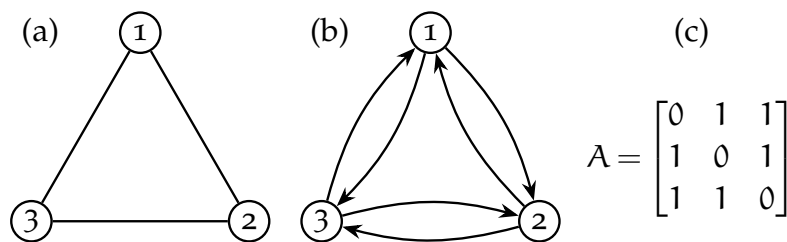


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

Definizione 2.4 (Grado e Forza [entrante/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \quad (2.3)$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è piú [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado entrante e uscente

$$k_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \quad (2.4)$$

rispettivamente.

Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2.3, 2.4) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

2.2 RETI E CITTÀ

Dopo aver illustrato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il problema di come rappresentare con essi la moltitudine di collegamenti possibili tra le città

Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati e le loro intersezioni come nodi [13, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la rete di trasporto di tram, di bus e della metro [13, § 3.2.1 p. 22]; altri si pongono piú propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [13, § 3.1.3.2 p. 17], navale [13, § 3.1.4 p. 19], aereo [13, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

Tuttavia, da quanto detto nella Cap. 1, è chiaro che per predire la distribuzione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [13, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutt'i possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di grafo con cui si ha a che fare; eppure qui la risposta è immediata: un ente, ovvero una città, può interagire con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col primo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2.2) perché il contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

Ipotesi 2.1. Il grafo \mathcal{G} è diretto e simmetrico, per cui la matrice d'adiacenza \mathbf{A} è simmetrica.

Inoltre si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 13], ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo, seppure, al momento, sia una caratteristica alquanto formale; tuttavia servirà tenerlo a mente quando si definiranno alcune regole d'interazione nel Cap. 4. Perdi più, contrariamente a quanto si possa pensare di primo acchito, tale grafo non è a invarianza di scala [2] a causa del tipo di grafo [4, 13]; ciò non esclude l'esistenza di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato superiormente proprio dalla natura spaziale del grafo.

Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

Ipotesi 2.2. Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si distribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connessioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città stesse.

2.3 CENNI SUI DATI

La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [10] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond. professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è necessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento `Pen_91It.txt`:

¹ si v. il documento `trapen91.txt` per maggiori informazioni.

1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229», «241», «216», «203», «224», «236», «246».

In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi] sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

00200714212215_____1,

ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in totale 6 città italiane collo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», eppure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizzare che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo; è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il codice del comune di destinazione².

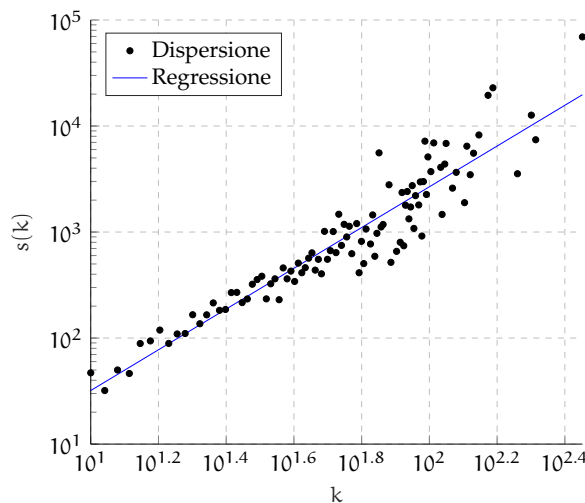


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

Infine nelle Ipp. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle seguenti osservazioni:

1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);
2. Si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni collo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella Cap. 4, sono correzioni del tutto inessenziali.

2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma leggermente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che limiti superiori e inferiori più estesi;
3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ragione per cui si può considerare comunque «circa costante» come afferma [5];
4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondono: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» sono molto distanti geograficamente³, per cui è ragionevole che i flussi siano bassi.

Connessione	Peso	Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709	Cagliari-Sassari	13953
Cagliari-Selargius	7995	Sassari-Olbia	7246
Assemini-Selargius	4418	Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	4149	Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3865	Cagliari-Capoterra	3731
(a) Pesi maggiori correnti.		(b) Pesi maggiori di [5]	

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elaborato. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

³ Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

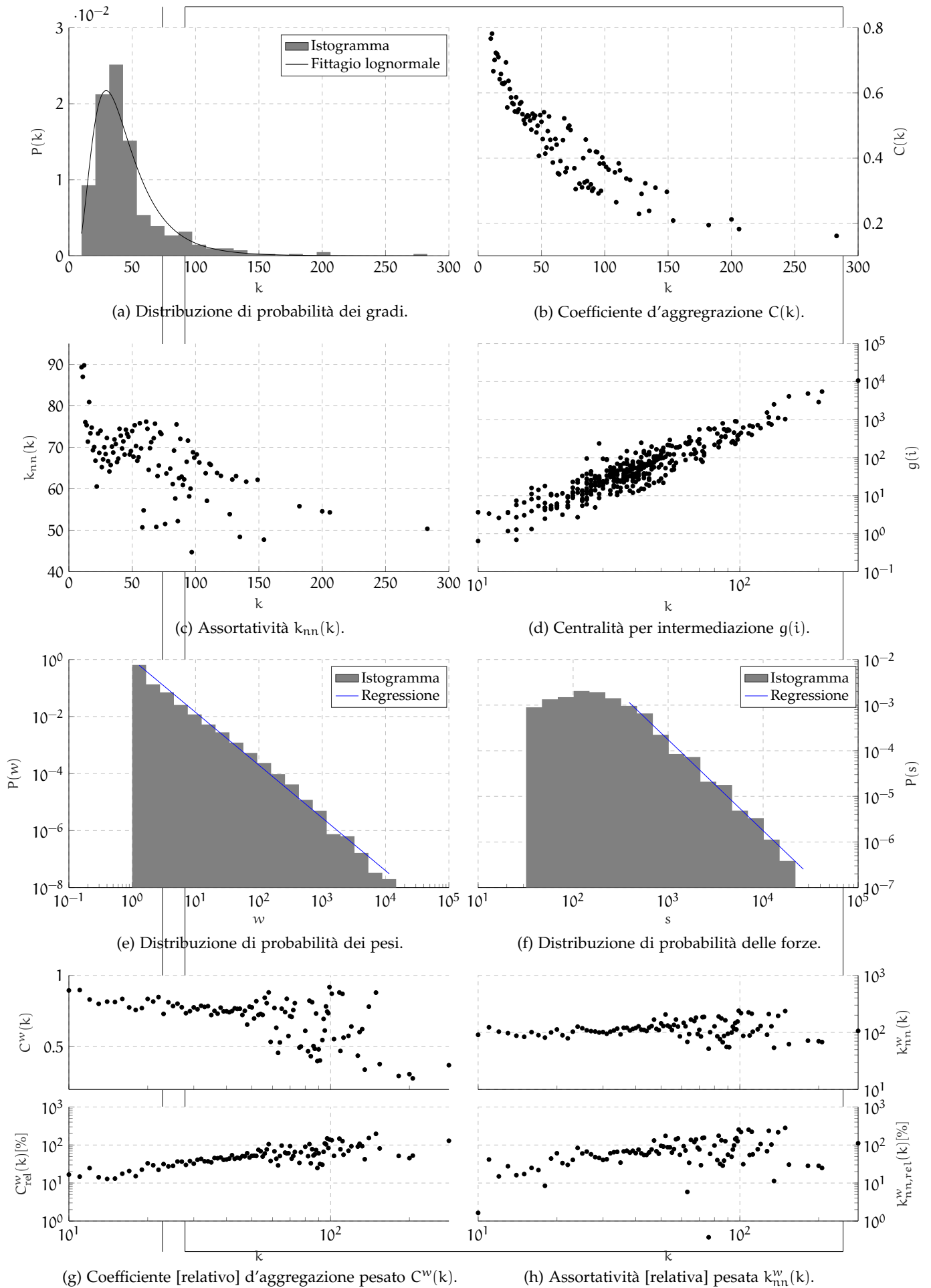


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la [TCSMA](#) necessaria per ottenere e discutere i risultati nel Cap. 4.

S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità colle quali si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvisando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Semiretta intera/reale positiva). In tutto questo elaborato si fanno uso dei seguenti sottinsiemi dei numeri reali e naturali:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+ &\equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \\ \mathbb{N}_+ &\equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Definizione 3.2 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Siccome Ω è uno spazio astratto poco trattabile, in questo scritto si definisce una variabile aleatoria semplicemente evidenziando l'appartenenza al suo codominio e sottintendendo il suo dominio: $X \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.3 (Densità di probabilità di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua, allora la densità di probabilità $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge \mathbb{P}_X di X :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la variabile aleatoria X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x)dv$ va inteso come $f_X(dv)$.

Definizione 3.4 (Densità congiunta di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità congiunta di probabilità $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ di \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.} \end{aligned}$$

Definizione 3.5 (Densità marginale di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità marginale di probabilità $f_{X_i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile così definita:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3.2)$$

essa è a tutti gli effetti la densità di probabilità della variabile aleatoria X_i secondo la Def. 3.3.

Osservazione 3.2. Per brevità, da qui in avanti s'indicheranno le precedenti densità sottintendendo che siano relative alla probabilità: $f_{\mathbf{X}}$ è dunque la densità di \mathbf{X} , $f_{\mathbf{X}}$ la densità congiunta di \mathbf{X} e f_{X_i} la densità marginale di X_i .

Inoltre, qualora il contesto non dia ambiguità, si sottintendono le variabili o i vettori aleatori cui fanno riferimento le relative densità: dunque f è la densità di \mathbf{X} , \mathbf{X} e X_i , a seconda del caso; in alternativa si possono usare anche forme più leggere, come f_i per f_{X_i} , se necessario.

Proprietà 3.1 (Densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la densità congiunta di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

Definizione 3.6 (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua e data una funzione misurabile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora il valore atteso di $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Definizione 3.7 (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua a media finita $\mathbb{E}[X] < \infty$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra, allora l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una variabile aleatoria Y tale che

AC1 $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

AC2 per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

L'insieme delle Y che soddisfanno le AC1 e AC2 sono indicate col simbolo $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Un'analogia definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti con X scalare e Y vettoriale.

Osservazione 3.3. Presa una variabile aleatoria $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente definizione \mathcal{G} può essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borel relativa allo spazio dei numeri reali mentre $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathbb{R}_+(\Omega)$.

Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $Y \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.1. *Dati*

1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;
2. un vettore aleatorio $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da $X \in \mathbb{R}^h$ e $Y \in \mathbb{R}^k$ con densità congiunta $f_Z(x, y)$ e marginali f_X e f_Y ;
3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che $\mathbb{E}[\varphi(Z)] = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] < \infty$;

allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

che soddisfa $h(Y) \in \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$.

Dimostrazione. Per la AC1 è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(Y))$:

$$\sigma(h(Y)) \equiv \sigma(Y^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

a parole si considera la controimmagine tramite Y dei borelliani filtrati da h , ragion per cui la sigma algebra non potrà che essere contenuta in quella non filtrata.

Per la AC2 si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(Y)$ avvalendosi della caratterizzazione di $h(Y)$ tramite (3.3):

$$\begin{aligned} \int_A h(Y) d\mathbb{P} &= \int_B h(y) f_Y(y) dy \stackrel{(3.2)}{=} \int_B h(y) \int_{\mathbb{R}^h} f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx dy \stackrel{(3.3)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(y) \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(Y) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_C(Z) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

ove $B \equiv \mathbf{Y}(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv \mathbf{Z}(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = \mathbf{Y}^{-1}(B) = \mathbf{Z}^{-1}(C).$$

□

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (3.3), allora $h(y)$ si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}=\mathbf{y}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \quad (3.4)$$

in cui

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}=\mathbf{y}} \equiv \begin{cases} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) & \text{se } f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = 0 \end{cases}$$

è la densità di \mathbf{X} condizionata dall'evento $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$.

La (3.4), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ rispetto a \mathbf{X} dopo aver "fissato" l'evento $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, vale a dire considerando la \mathbf{Y} come fosse un parametro uguale a \mathbf{y} .

Successivamente, se s'impone $A = \Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) | \mathbf{Y}]], \quad (3.5)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ si calcola mediando rispetto a \mathbf{Y} la variabile aleatoria $\mathbb{E}[\mathbf{X} | \mathbf{Y}]$, ricavata dalla (3.4) ma considerando \mathbf{y} arbitrario.

Definizione 3.8 (Processo stocastico). Data una dimensione $n \in \mathbb{N}_+$, un processo stocastico è un insieme di vettori aleatori \mathbf{X}_t parametrizzati da un indice $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\{\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} = \{\mathbf{X}_t\}_{t \in I},$$

la cui densità congiunta è

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}_t}(A) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_t \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}$$

Comunemente s'interpreta l'indice t come il tempo ponendo $I \equiv \mathbb{R}_+$, e così sarà fatto in questo scritto.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA DI [TIPO] BOLTZMANN

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Descrizione classica

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

317 G_1 è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la
318 distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

319 G_2 è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver
320 luogo o, precisamente, sono più frequenti;

321 G_3 è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

322 G_4 le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso
323 e dell'energia esprimibile, grazie alle G_2 e G_3 , binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (CI)$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (CE)$$

324 ove $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle
325 velocità precollisionali $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

326 Dalla G_4 si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire
327 da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le regole d'interazione.

328 **Proposizione 3.2** (Regole d'interazione). *Esistono due funzioni $\psi, \psi_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow$
329 \mathbb{R}^3 lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

330 ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .

331 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

332 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
333 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \gamma] = 0, \end{aligned}$$

334 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

335 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (3.7) diven-
336 ta allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (3.8)$$

337 □

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $n \in S^2$, seppure da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante per i centri delle particelle collidenti.

Si osservi come le regole d'interazione nella 3.6 sono bilineari e simmetriche secondo la seguente definizione:

Definizione 3.9 (Regole d'interazione simmetriche). Due regole d'interazione del tipo (3.6) si dicono simmetriche sse

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}' &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}'_* &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \end{aligned} \implies$$

Descrizione statistica

Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame: siano allora $\{\mathbf{V}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ i processi stocastici delle velocità precollisionali, dove $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ sono variabili aleatorie di cui le velocità precedenti, \mathbf{v} e \mathbf{v}_* , sono due realizzazioni al tempo t ; un simile discorso vale per i processi stocastici delle velocità poscollisionali $\{\mathbf{V}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}'_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Osservazione 3.5. Le variabili aleatorie \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es. \mathbf{V}_t^i) proprio per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G₃, da cui si deduce anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Le regole d'interazione nella (3.6) diventano

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{v}} \begin{cases} \mathbf{V}' = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* = \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{cases}$$

in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim \mathcal{U}(S^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad [\mathbf{B}]_{\mathbf{v}} \quad (3.7)$$

che è una variabile aleatoria di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui probabilità è descritta da due termini:

1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'avere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

Osservazione 3.6. Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$ condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo; si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale condizione sarà sempre verificata.

² Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

370 Colle $[RI]_v$ e $[B]_v$, lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è
 371 dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[AR]_v \begin{cases} \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}^*_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)\mathbf{V}^*_t + \Theta\mathbf{V}^{*'}_t, \end{cases}$$

372 che di fatto è una regola che descrive se gli agenti interagiscono a coppie
 373 (modellizzato dalla Θ) e, nel caso, come interagiscono (modellizzato dalle
 374 \mathbf{V}'_t e $\mathbf{V}^{*'}_t$) modificando il loro stato al tempo successivo.

375 *Derivazione modello*

376 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di me-
 377 diare le $[AR]_v$ attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità
 378 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ o di $\mathbf{V}^*_{t+\Delta t}$; pertanto
 379 una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle $[AR]_v$,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}^*_{t+\Delta t}) &= \varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}^*_t + \Theta\mathbf{V}^{*'}_t), \end{aligned}$$

380 e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}^*_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}^*_t + \Theta\mathbf{V}^{*'}_t)]; \end{aligned}$$

381 per espandere la media, siccome Θ dipende da $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}^*_t, n)$, bisogna avvalersi
 382 dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t) \mid \mathbf{V}_t, \mathbf{V}^*_t, n]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)\Delta t], \end{aligned} \quad (3.12)$$

383 e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}^*_{t+\Delta t})]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}^*_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}^*_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}^{*'}_t) - \varphi(\mathbf{V}^*_t))], \end{aligned}$$

384 e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}^*_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}^{*'}_t) - \varphi(\mathbf{V}^*_t))], \end{aligned}$$

385 che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)(\varphi(\mathbf{v}'_*) - \varphi(\mathbf{v}_*)) \rangle f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \end{aligned} \quad (3.13)$$

3 Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel 3.6 per qualunque valore di $B((\mathbf{V}^*_t - \mathbf{V}_t) \cdot n)$.

in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot dn$$

indica la media rispetto a n , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n)$ e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui densità congiunta è $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine necessario sommare le due equazioni in (3.13). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.14)$$

infatti dall'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il dominio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

Ipotesi 3.2. Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot n) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (3.15)$$

una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n|$.

Ipotesi 3.3 (*Caos molecolare*). Le particelle interagenti secondo le $[AR]_{\mathbf{v}}$ sono campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due particelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

Osservazione 3.7. Dal'Ip. 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la densità congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(\mathbf{v}_*)$ nel secondo membro della seconda equazione della (3.13) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.16)$$

seguendo la medesima logica della (3.14). Applicando i due risultati illustrati nelle (3.14, 3.16) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann omogenea asimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \left(\frac{\varphi' + \varphi'_*}{2} - \varphi \right) f f_* dnd\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.17)$$

ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi * (per una spiegazione più dettagliata si legga poco dopo nel § 3.2.3).

Tuttavia, qualora le regole d'interazione siano simmetriche secondo la Def. 3.9, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma debole⁴:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad (3.18)$$

Si può anche ricavare la forma forte della (3.18) considerando le regole d'interazione inverse della (3.6) [12, § 2.5, p. 15], ma il conto esula dagli scopi di questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per la sezione a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*. \quad (3.19)$$

3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la (3.19), bensì è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine avvevativo $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*, \quad (3.20)$$

dove l'operatore $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ è il gradiente spaziale e la distribuzione dipende ora anche dallo spazio: $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Essa è un'equazione integro-differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a tempo dato.

Il primo membro della (3.20) non è altro che la derivata materiale della distribuzione f : posto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$, ovvero in mancanza di collisioni, l'equazione involve in una del trasporto lineare con soluzione nota.

Proposizione 3.3. *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.21)$$

ha come soluzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$ in cui $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ è la distribuzione iniziale.

Dimostrazione. Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella (3.21) la velocità \mathbf{v} nell'operatore avvevativo non dipende né dallo spazio né dal tempo, quindi si possono prendere le curve $\mathbf{x}(t)$ tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (3.22)$$

dette, appunto, curve caratteristiche della (3.21); valutando allora la distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lungo di esse si può definire $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$ che derivata equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

da cui si deduce che f è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (3.22) si può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, dunque la soluzione in un generico punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

⁴ Si dice debole siccome essa vale per una una funzione *test* φ arbitraria.

considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo t passa per \mathbf{x} . \square

Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale f_0 semplicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la direzione della velocità costante \mathbf{v} , movimento che rappresenta la variazione medi statistica delle posizioni molecolari.

D'altra parte il secondo membro della (3.20) rappresenta la variazione media statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò anche chiamato operatore collisionale).

Pertanto la (3.20) descrive una chiara separazione di effetti: il primo membro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

L'obiettivo di Boltzmann tramite la (3.20) era di raccordare due mondi: il mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione f soddisfacente la (3.20); i principali sono

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.}\end{aligned} \quad (3.23)$$

Tali quantità sono definite da f seppure questa sia in genere infattibile da ricavare dalla (3.20), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; eppure, tramite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite [12, 15], è possibile svincolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della f ricavando un sistema chiuso dei soli momenti (3.23). La convergenza di questi a un valore stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione mesoscopica indotta dalla distribuzione f .

3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria è stata sviluppata da Pareschi *et al.* [15]; sono chiamati così per due ragioni:

1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analoghe strutturalmente alla (3.18) e

2. sono applicati a contesti⁵ molto distanti da quello originale delle velocità di particelle di un gas.

Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già visti nel § 3.2.1 senza però riscrivere tutt'i passaggi.

Descrizione e derivazione

Sia $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico relativo allo stato microscopico dell'agente di un sistema, dove $X_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ è il vettore aleatorio⁶ che descrive i suoi $n \in \mathbb{N}_+$ stati microscopici al tempo t ; allora le Ipp. 3.1 e 3.3 si possono così riformulare:

Ipotesi 3.4. Gli agenti sono caratterizzati dalle seguent'ipotesi:

B1 la distribuzione statistica dei microstati è uniforme nello spazio, e quindi non dipende da esso;

B2 gli agenti interagiscono solo binariamente, ovvero le interazioni a coppia sono le più frequenti;

B3 gli agenti sono indistinguibili cosicché ognuno è rappresentativo del loro insieme;

B4 due agenti interagenti sono statisticamente indipendenti.

D'altra parte gli stati poscollisionali (postati), X'_t e $X_t^{*'}$, si legano con quelli precollisionali (prestatati), X_t e X_t^* , tramite

$$[RI]_X \begin{cases} X'_t = \psi(X_t, X_t^*, y), \\ X_t^{*'} = \psi_*(X_t, X_t^*, y_*), \end{cases}$$

ove ora

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{h_*} &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sono generiche regole d'interazione, non necessariamente simmetriche (si veda Def. 3.9) o lineari, mentre $y \in \mathbb{R}^h$ e $y_* \in \mathbb{R}^{h_*}$, con $h, h_* \in \mathbb{N}$, rappresentano dei coefficienti potenzialmente stocastici.

L'interazione tra di essi avviene secondo una variabile aleatoria di Bernoulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(X_t, X_t^*, w, t) \Delta t), \quad [B]_X$$

con tasso/nucleo d'interazione

$$\mu(X_t, X_t^*, w, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

per controllare quant'è "probabile" che i due agenti interagiscano, e coefficienti $w \in \mathbb{R}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, potenzialmente stocastici.

Osservazione 3.8. Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modellistico si può semplicemente porre unitario:

$$\mu \equiv 1, \quad \forall (x, x_*, w, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$$

sottintendendo in tal modo un'uniforme "probabilità" d'interazione.

⁵ Esempi importati sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico, come quello qui considerato delle città

⁶ Si noti che il dominio I degli stati non coincide necessariamente coll'intero spazio reale \mathbb{R}^n .

Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'interazione

$$[AR]_x \begin{cases} \mathbf{x}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{x}_t + \Theta\mathbf{x}'_t, \\ \mathbf{x}^*_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{x}^*_t + \Theta\mathbf{x}^{*'}_t, \end{cases}$$

dove $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

Osservazione 3.9. l'acronimo $[AR]_x$ sta per «Azione-Reazione» poiché si suppone che ogn'interazione (azione), ossia $\Theta = 1$, necessariamente modifica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [14] questa regola può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1 colla quantità osservabile $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si perviene all'equazione di tipo Boltzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (3.27)$$

nella quale $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media rispetto a tutt'i coefficienti potenzialmente stocastici (\mathbf{y} , \mathbf{y}_* e \mathbf{w}), mentre il termine $-\varphi - \varphi_*$ discende dal fatto che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione μ sia pari.

Notazione

Nei previ paragrafi si è fatto spesso uso, specie per le varie equazioni [di tipo] Boltzmann (3.17–3.20, 3.27), di una notazione abbreviata per tutti gli oggetti salvo il tasso d'interazione μ . In questo breve paragrafo si definiscono in maniera più esplicita queste abbreviazioni facendo riferimento al contesto generale sviluppato poco fa.

Innanzitutto la densità congiunta f da sola sottintende la variabile dell'agente interagente \mathbf{x} mentre con un pedice f_* quella dell'agente ricevente \mathbf{x}_* :

$$f \equiv f(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \quad f_* \equiv f(\mathbf{x}_*, t);$$

dopodiché le quantità osservabili φ seguono la medesima logica di prima ma coll'aggiunta di un apice per distinguere le variabili postinterazionali:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \varphi(\mathbf{x}) & \text{e} & & \varphi_* &\equiv \varphi(\mathbf{x}_*), \\ \varphi' &\equiv \varphi(\mathbf{x}') & \text{e} & & \varphi'_* &\equiv \varphi(\mathbf{x}'_*). \end{aligned}$$

Ovviamente questa notazione può essere generalizzata a una qualunque funzione scalare $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione del microstato degli agenti:

$$\begin{aligned} g &\equiv g(\mathbf{x}) & \text{e} & & g_* &\equiv g(\mathbf{x}_*), \\ g' &\equiv g(\mathbf{x}') & \text{e} & & g'_* &\equiv g(\mathbf{x}'_*). \end{aligned}$$

Infine si osserva che qualora vi siano altri pedici o apici nelle funzioni a venire, essi *non* fanno riferimento a questa notazione corta, se non altrimenti specificato. Per esempio giusto nel prossimo paragrafo si lavora con delle densità f_i , in cui i è l'indice del nodo del grafo associato all'agente; è comunque possibile, anche per questi casi, usare la notazione precedente riposizionando lievemente i pedici e gli apici:

$$f^i \equiv f(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \quad f_*^i \equiv f(\mathbf{x}_*, t);$$

Analisi dimensionale

3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI

Si analizza adesso il caso del tessuto interurbano descritto nel § 2.2, considerando le città sia come agenti che come nodi di una rete che ne regola le interazioni: due città possono interagire sse sono connessi; è anche ovvio che l'interazione modifichi, in qualche modo da definire, la loro popolazione.

In questo paragrafo si applicano i concetti della teoria sviluppata nei §§ 2.1 e 3.2.3 e, in particolare, la notazione usata e definita. S'inizia mostrando una derivazione esatta la quale, cioè, considera la topologia esatta; quindi si approfondisce un'approssimazione nella quale si "perde" la topologia indotta dalla rete; infine, si considerano i collegamenti tra la derivazione esatta e quella di tipo Boltzmann sotto determinate ipotesi.

3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta

Descrizione e derivazione

Visto che si assume che valgono le Ip. 3.4⁷, dalla B₃ sorge un problema non di poco conto: gli agenti sono indistinguibili ma la rete sottostante li rende distinti per via degli indici \mathcal{I} .

Per dipanare la questione è sufficiente considerare l'indice come una variabile aleatoria $I \in \mathcal{I}$ così da definire il processo stocastico come

$$\{\mathbf{X}_t\} \equiv \{I, S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

in cui $S_t \in \mathbb{R}_+$ è la variabile aleatoria relativa alla popolazione dell'agente rappresentativo al tempo t ed è l'unica componente del processo stocastico a variare nel tempo per l'Ip. 2.2.

Così ragionando si può nel complesso descrivere statisticamente lo stato microscopico $\mathbf{X}_t \equiv (I, S_t)$ dell'agente rappresentativo colla densità congiunta

$$f(i, s, t): \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

che è discreta in $i \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathbb{R}_+$, uguale a

$$f(i, s, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(i - j), \quad (3.28)$$

dove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t): \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di S_t dell'agente i -esimo.

⁷ Perdipiù la B₂ è valida a un tempo t , ma nell'unità di tempo dimensionale \tilde{t} le interazioni si possono considerare come non binarie, come già discusso alla fine del § 3.2.3.

In tal modo la densità congiunta f è effettivamente indistinguibile rispetto a tutti gli agenti, soddisfacendo la B₃, e integra sul suo dominio a uno:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_t(\mathcal{I} \times \mathbb{R}_+) &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{I}} f(i, s, t) di ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) ds \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} f_i(s, t) ds = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} 1 = \frac{N}{N} = 1 \quad \forall t \geq 0;\end{aligned}$$

mentre le densità f_i preservano la naturale distinguibilità degli agenti indotta dalla topologia sottostante.

Sempre come conseguenza del grafo, la $[B]_X$ deve dipendere dalla matrice d'adiacenza A :

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(I, I^*)\Delta t), \quad [B]_S$$

ove $A: \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che a ogni coppia d'indici (I, I^*) associa la relativa entrata nella matrice d'adiacenza

$$A(I, I^*) \equiv a_{I, I^*} = \begin{cases} 1 & \text{se } (I, I^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

secondo la (2.2); in tal modo l'interazione non ha possibilità d'avvenire se i due agenti non sono connessi.

Osservazione 3.10. Rispetto al caso generale $[B]_X$ il tasso d'interazione ha forma

$$\mu(X_t, X_t^*, w, t) \equiv A(I, I^*), \quad (3.30)$$

esso, cioè, è per definizione costante sia rispetto agli stati S_t e S_t^* che rispetto al tempo, oltre a non avere coefficienti⁸ w .

Osservazione 3.11. Per definizione della distribuzione di Bernoulli, è necessario imporre $A(I, I^*)\Delta t \leq 1$, ma dato che $A(I, I^*) \in \{0, 1\}$ ciò si traduce nella naturale condizione che $\Delta t \leq 1$.

D'altro canto le regole d'interazione nella $[RI]_X$ diventano

$$[RI]_S \begin{cases} S'_t = \psi(S_t, S_t^*, I, I_*, \sigma), \\ S_{t'}^* = \psi_*(S_t, S_t^*, I, I_*). \end{cases}$$

Osservazione 3.12. Confrontato al caso generale $[RI]_X$, solo la funzione della città interagente ψ presenta un coefficiente stocastico $y \equiv \sigma \in \mathbb{R}$, mentre quella relativa alla città ricevente ψ_* non dipende da potenziali coefficienti y_* ⁹.

Unendo le $[B]_S$ e $[RI]_S$, le $[AR]_X$ si scrivono

$$[AR]_S \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_{t'}^*, \end{cases}$$

coerentemente col fatto che in un cotesto urbano, qualora una città-nodo interagisca con un'altra, entrambe debbano variare il loro stato (Oss. 3.9).

⁸ Questa situazione si può simbolicamente rappresentare ponendo $k = 0$.

⁹ Come nell'Oss. 3.10, tale condizione si può simbolicamente rappresentare ponendo $h_* = 0$.

Osservazione 3.13. Paragonato a $[AR]_X$ ci si potrebbe chiedere perché non si considera l'intero vettore aleatorio X_t , come pure nella $[RI]_S$; la ragione è che I è una componente statica che non varia nel tempo.

In ogni caso, considerando I_t e I_t^* momentaneamente dinamiche, si possono definire le regole d'interazione

$$[RI]_I \begin{cases} I_t' = \psi(S_t, S_t^*, I, I_*) \equiv I_t, \\ I_t^{*'} = \psi_*(S_t, S_t^*, I, I_*) \equiv I_t^*, \end{cases}$$

da cui segue l'algoritmo d'interazione

$$[AR]_I \begin{cases} I_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t' = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t = I_t, \\ I_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^{*'} = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^* = I_t^*, \end{cases}$$

che soddisfa la staticità di I e I_* e completa, assieme a $[AR]_S$, la formulazione $[AR]_X$ più generale.

Sia $\Phi: \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un'arbitraria quantità osservabile, dalla $[B]_S$ l'equazione di tipo Boltzmann omogenea (3.27) ha forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{I}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} A(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi_*' - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* di di_*, \quad (3.33)$$

ove si è usata la notazione abbreviata illustrata nel § 3.2.3, mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla variabile aleatoria σ nelle $[RI]_S$.

Osservazione 3.14. Anche se la derivazione della (3.33) è già stata spiegata nel dettaglio nel § 3.2.1, rimane interessante riportare la forma del passaggio più difficile, ossia quella della media condizionata (3.12):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(I, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(I, I_*)\Delta t) | I, I_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, S_t)(1-A(I, I_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(I, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(I, I_*)\Delta t] | I, I_*]]. \end{aligned}$$

Si noti come il condizionamento sia solo rispetto a I e I_* , proprio poiché Θ in $[B]_S$, tramite il tasso d'interazione μ nella (3.30), dipende solo da quegli stati.

Analisi delle regole d'interazione

Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-reazione» descritta da $[AR]_X$: infatti, se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta, ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

Gli stati postinterazione (??) prendono come riferimento regole d'interazione lineari

$$\begin{cases} S_t' = p S_t + q S_t^*, \\ S_t^{*'} = p_* S_t + q_* S_t^*, \end{cases} \quad (3.34)$$

le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (3.35)$$

ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$ sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle regole d'interazione lineari (3.34) le (3.35) soddisfanno

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e & & p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e & & q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (3.36)$$

rispettivamente per la prima e seconda legge d'interazione. Ovviamente questo scambio deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \end{aligned} \quad (3.37)$$

ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{N}$ ma è più agevole supporre $\mathbb{R}_+ \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (3.35), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (3.38)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (3.38) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (3.35), situazione che si vuole evitare¹⁰ dato che nella (4.1) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (3.38);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◇ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◇ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenerare quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 sì;

¹⁰ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

- ◇ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia **F2** (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che **F3**, ma sfortunatamente non **F1** perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◇ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente densità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (3.39)$$

ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (3.40)$$

Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la **F3**, e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (3.41)$$

con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (3.42)$$

Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la **F2** semplicemente traslando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzione $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

D'altra parte la **F1** necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distribuzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (3.43)$$

siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \quad \forall s, s_* \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda \in (0, 1)$. La (3.43) implica quindi che non è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la **F1**, ma che questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: piú è grande λ piú piccola è la varianza, e viceversa.

3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata

Si premette innanzitutto che con approssimazione s'intende di abbandonare la topologia indotta dal grafo, ovvero sia a trascurare la variabile aleatoria I

sostituendola con qualche informazione che non permetta più di distinguere i nodi, tornando dunque a tutti gli effetti a una descrizione classica di tipo di Boltzmann seppure solo in maniera approssimata.

Per questo obiettivo è però prima necessario riformulare la (3.33) tramite una scelta oculata delle Φ :

Ipotesi 3.5. Si considera la seguente classe di osservabili:

$$\Phi(i, s) \equiv \delta(i - j) \varphi(s) \quad \forall j \in \mathcal{J}, \quad (3.44)$$

dove $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria.

Con tale scelta è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i : usando, infatti, la (3.44) nella (3.33) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_j ds = & \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi \rangle}{2} f_j \sum_{i \in \mathcal{J}} A(j, i) f_i^* ds ds_* \\ & + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} f_j^* \sum_{i \in \mathcal{J}} A(i, j) f_i ds ds_*, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

ma essendo \mathbf{A} simmetrica (Ip. 2.1) vale

$$A(i, j) = A(j, i) \iff \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top,$$

con \mathbf{A}^\top indicante la matrice trasposta, da cui

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_j ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} f_j \sum_{i \in \mathcal{J}} A(j, i) f_i^* ds ds_* \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

che in forma matriciale, introducendo le densità vettoriali

$$\mathbf{f} \equiv (f_i)_{i \in \mathcal{J}} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_* \equiv (f_i^*)_{i \in \mathcal{J}},$$

si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \mathbf{f} ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \odot \mathbf{A} \mathbf{f}_* ds ds_*, \quad (3.45)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard (prodotto per elementi).

Il prossimo passo è introdurre la densità globale delle taglie, ossia la densità marginale della (3.28) rispetto alla popolazione s :

$$\bar{f}(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}, \quad (3.46)$$

ove $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, che non è che la media tra le densità di S_t tra tutti i vertici; premoltiplicando la (3.45) per $\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top$ e usando la (3.46) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{A} \mathbf{f}_* ds ds_*, \quad (3.47)$$

Osservazione 3.15. La (3.47) si può anche direttamente ricavare usando, anziché la (3.44), direttamente un osservabile indipendente dall'indice i :

$$\Phi(i, s) \equiv \varphi(s).$$

La (3.47) non è ancora un'equazione chiusa per \bar{f} per via del secondo membro nel quale $\mathbf{f}^\top \mathbf{A} \mathbf{f}_*$ richiede sia di conoscere nel dettaglio le connessioni sottostanti del grafo che le distribuzioni della popolazione di ogni città.

Purtroppo la natura arbitraria delle $[\mathbf{R}\mathbf{I}]_s$ non permette procedere esattamente, per cui sono necessarie delle approssimazioni:

Definizione 3.10 (Approssimazione della \mathbf{A}). Sia $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di rango uno

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top}{D}$$

definite tramite il prodotto diadico dei vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^+ &\equiv (k_1^+, k_2^+, \dots, k_N^+)^\top = \mathbf{A} \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{k}^- &\equiv (k_1^-, k_2^-, \dots, k_N^-)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

dei gradi uscenti ed entranti rispettivamente, e la costante¹¹

$$D \equiv \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^+ = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^+ = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^- = \|\mathbf{A}\|_1.$$

Allora \mathbf{B} approssima la matrice d'adiacenza \mathbf{A} poiché per definizione vale

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{1} &= \frac{1}{D} \mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^+ \frac{D}{D} = \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{1} &= \frac{1}{D} \mathbf{k}^- (\mathbf{k}^+)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^- \frac{D}{D} = \mathbf{k}^- \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{B} \approx \mathbf{A}.$$

Inoltre, poiché \mathbf{A} è simmetrica (Ip. 2.1) vale $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}^\top}{D}.$$

Approssimando la \mathbf{A} colla Def. 3.10, la (3.47) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{h} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{h}^\top \mathbf{B} \mathbf{h}_* ds ds_*,$$

ove sono state rinominate le densità \bar{f} , \mathbf{f} e \mathbf{f}_* per distinguerle da quelle esatte; espandendo \mathbf{B} si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{h} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2D} (\mathbf{k}^\top \mathbf{h})(\mathbf{k}^\top \mathbf{h}_*) ds ds_*.$$

S'introduca poi una nuova densità:

Definizione 3.11 (Densità dei gradi \mathbf{k}). Sia

$$g_N: \mathbb{R}_+ \times \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

la densità di probabilità che al tempo t un agente abbia popolazione s e grado k , definizione che la lega alle f_i nella (3.28) dalla relazione

$$g_N(s, k, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} f_i(s, t),$$

¹¹ La $\|\cdot\|$ è la norma uno applicata alle matrici: $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} |a_{i,j}|$.

ove

$$\mathcal{I}_k \equiv \{i \in \mathcal{I}_k \mid k_i = k\}$$

è l'insieme dei nodi con grado k ; da essa ne seguono altre due:

$$\begin{aligned} \bar{f}(s, t) &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}_k} f_i(s, t) = \sum_{k=0}^N g_N(s, k, t), \\ \mathbf{k}^\top \mathbf{f}(s, t) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} k_i f_i(s, t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{i \in \mathcal{I}_k} f_i(s, t) = N \sum_{k=0}^N k g_N(s, k, t). \end{aligned}$$

Avvalendosi della Def. 3.11 si può riformulare la precedente equazione in termini di g_N :

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_N(s, k, t) ds = \sum_{k, k_*=0}^N \int_{\mathbb{R}_+^2} k k_* \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2D} g_N g_N^* ds ds_*,$$

dove si è aggiunto un asterisco al grado moltiplicato a g_N^* per distinguerlo da quello moltiplicato a g_N .

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{I}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} B(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* di di_*,$$

3.3.3 Nesso discreto-continuo

È d'interesse esplorare il legame presente tra la (??) coll'equazione classica di Boltzmann §.

Ipotesi semplificative

A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da applicare alla (??):

S₁ Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv \mathbb{1}$.

S₂ Si assume che gli agenti siano indistinguibili rispetto al grafo:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (3.48)$$

S₃ S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (3.49)$$

Analisi della S1

Con tal'ipotesi la (??) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (3.28) rispetto agli indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{I}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{I}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t), \quad (3.50)$$

che corrisponde a una media tra le distribuzione dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle F F^* ds ds_*, \quad (3.51)$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann [\[S\]](#). Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (3.50).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo [1](#), illustrato nel paragrafo a venire, ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare [1](#) è proprio quella media F .

Analisi della [S2](#)

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la [\(??\)](#) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*, \end{aligned}$$

che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_* \right]. \quad (3.52)$$

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0, 1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa^{[12](#)}; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann [\[S\]](#).

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla [\(??\)](#), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la [S1](#).

¹² Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

Analisi della S1, S2 e S3

Visto che vale S1 si può partire dalla (3.51) nella quale la distribuzione media (3.50) diventa per S2

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti¹³, essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (3.51) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

che unita all S3 porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$ e $s = s_*$)

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche [S] usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica tra una popolazione di particelle di un gas.

¹³ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix \mathbf{M} ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

```
1:  $\tilde{V} \leftarrow V_0$ 
2:  $t \leftarrow 1$ 
3: for  $t < T$  do
4:    $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$ 
5:    $V \leftarrow \tilde{V}$ 
6:    $P \leftarrow$  random permutation of  $\{1, \dots, N\}$ 
7:    $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$ 
8:    $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$ 
9:    $i \leftarrow 1$ 
10:  for  $i < N/2$  do
11:     $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i))\Delta t)$ 
12:     $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1-\Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$ 
13:     $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1-\Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$ 
14:     $i \leftarrow i+1$ 
15:  end for
16:   $t \leftarrow t + \Delta t$ 
17: end for
```

4

SIMULAZIONI

Quello che ho riscontrato è che i risultati ottenuti per la Sardegna sono di fatto gli stessi per tutte le regioni, inclusa l'Italia; questa è la ragione per cui in questa sezione ci si concentrerà solo su quella regione. Alla fine, però, si mostrano alcuni grafici anche per l'Italia intera.

4.1 PREMESSE

4.1.1 Metodo Monte Carlo

4.1.2 Fluttuazioni

4.1.3 Grafici

4.2 REGOLE D'EMIGRAZIONE

La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione.

4.2.1 Popolazione

Una prima possibilità consiste nella

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (4.1)$$

che in essenza è la [9, (2.2), § 2, p. 223] modificata mediante la [9, (4.5), § 4, p. 228], ossia è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- ◇ $\lambda \in (0,1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città più popolate riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- ◇ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (4.1) descrive la tendenza degli individui di aggregarsi per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (3.36) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (4.1).

4.2.2 Popolazione-Connettività

4.2.3 Popolazione-Connettività frazionata

4.2.4 Popolazione-Forza

4.3 INTERPRETAZIONE

807

5

CONCLUSIONI

808

809

810

811

812

1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della rete statica.
3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.



813 APPENDICE

814 A CODICE



815

ELENCO DELLE FIGURE

816

Figura 1.1 Funzione Lognormale(0,1). 6

817

Figura 2.1 Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen-
818 te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica]
819 matrice d'adiacenza. 9

820

Figura 2.2 Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna. 12

821

Figura 2.3 Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri-
822 manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re-
823 lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda. 14

--

824

ELENCO DELLE TABELLE

825

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
826 linee barrate corrispondono a dati trascurati. 11

827

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 13

--

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berliant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélemy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat’s law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [11] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025).
- [13] Marc Barthélemy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [14] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).

- 869 [15] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*
870 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 871 [16] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An*
872 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.