

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1	Definizioni miscellanee	9
2.2	Reti e città	10
2.3	Cenni sui dati	11
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	15
3.1	Definizioni preliminari	15
3.2	Descrizione cinetica classica	18
3.2.1	Equazione di Boltzmann omogenea	18
3.2.2	Equazione di Boltzmann disomogenea	22
3.2.3	Equazione di tipo Boltzmann omogenea	22
3.3	Descrizione cinetica retale	22
3.3.1	Impostazione	22
3.3.2	Algoritmi d'interazione	23
3.3.3	Interazioni azione-reazione	24
3.4	Derivazione dell'equazioni cinetiche	25
3.4.1	Derivazione esatta	25
3.4.2	Interazioni tra città	26
3.4.3	Derivazione approssimata	29
3.5	Nesso discreto-continuo	29
3.5.1	Ipotesi semplificative	29
3.5.2	Analisi della IS₁	29
3.5.3	Analisi della IS₂	30
3.5.4	Analisi della IS₁ , IS₂ e IS₃	31
4	SIMULAZIONI	33
4.1	Metodo Monte Carlo	33
5	CONCLUSIONI	35
	APPENDICE	37
A	Codice	37



Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [16] quasi cinquantanni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se si in luogo di f la popolazione t [16, Fig. 9-2, p. 375] (t sta per *taglia*); tuttavia ciò è vero solo qualora $t \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia T la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_T(t)$ la sua funzione di densità di probabilità², per la quale $f_T(t)dt$ indica il numero di città con $t \in (t, t+dt)$, allora si dice che T segue una distribuzione di Pareto se soddisfa

$$R(t) \approx \frac{1}{t^p} \quad \text{se } t \gg 1, \quad \text{ove } R(t) = \int_t^{+\infty} f_T(\tau) d\tau, \quad (2)$$

che altro non è che la funzione di ripartizione complementare di T , la quale rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a t ; si indica con $R(t)$ perché è analoga al rango nella (1) una volta che s'impone l'indice di Pareto p unitario.

Più recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_T(t)$ è ben fittata dalla distribuzione lognormale con funzione di distribuzione di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{ove } X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma). \quad (3)$$

Come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹ In realtà, come Zipf stesso ammette [16, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

² Affinché $f_T(t)$ esista bisogna rigorosamente anche supporre che sia assolutamente continua ma in questa introduzione non è necessario entrare nei dettagli, per i quali si rimanda alla § 3.

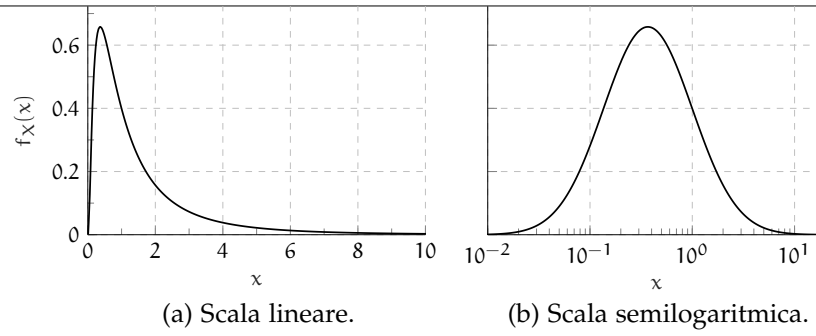


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che per fittare l'intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (3)

$$f_T(t) = \xi f_T^1(t) + (1 - \xi) f_T^2(t), \quad (4)$$

ove $\xi \in [0, 1]$ è un parametro da fittare tanto quanto le medie e le varianze associate a $f_T^1(t)$ e $f_T^2(t)$ per un totale di 5 parametri.

Pertanto l'obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d'interazione riguardo al fenomeno dell'emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; piú nel dettaglio gli articoli in letteratura

- ◇ o applicano la TCSMA alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la TCSMA[3];
- ◇ altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate[11];
- ◇ infine l'articolo che piú si avvicina all'obbiettivo di questa tesi, applica tuttavia la sua teoria nel contesto delle reti sociali[14].

³ In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s'intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della
60 teoria dei grafi applicata alla TCSMA sono stati piuttosto recenti e prin-
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la TCSMA è ap-
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.



In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descriveranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degli indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degli indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso¹ associato al lato (i,j) . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

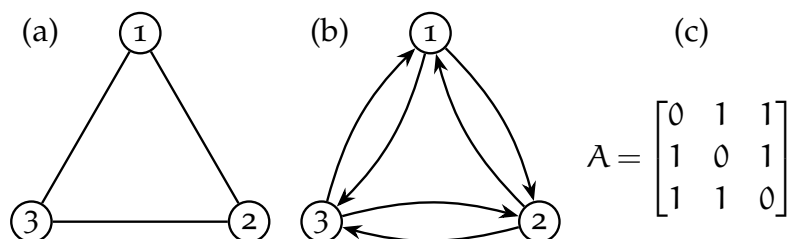


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

¹ Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

Definizione 2.4 (Grado e Forza [entrante/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è piú [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2, 3) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

Ipotesi 2.1. Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si distribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connessioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città stesse.

2.2 RETI E CITTÀ

Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il problema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti possibili tra le città

Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati e le loro intersezioni come nodi [13, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la rete di trasporto di tram, di bus e della metro [13, § 3.2.1 p. 22]; altri si pongono piú propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [13, § 3.1.3.2 p. 17], navale [13, § 3.1.4 p. 19], aereo [13, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [13, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutt'i possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e immediata dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può interagire con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col primo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2.2) perché il contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 13], ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò tale osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando si definiranno le leggi d'interazione. Perdi più, contrariamente a quanto si possa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2] proprio a causa della sua natura spaziale [4, 13]; ciò non esclude l'esistenza di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato superiormente dalla natura spaziale del grafo.

2.3 CENNI SUI DATI

La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [10] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT²; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è necessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento `Pen_91It.txt`:

² si v. il documento `trape91.txt` per maggiori informazioni.

1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229», «241», «216», «203», «224», «236», «246».

In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi] sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

00200714212215_____1,

ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in totale 6 città italiane collo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», eppure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizzare che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo; è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il codice del comune di destinazione³.

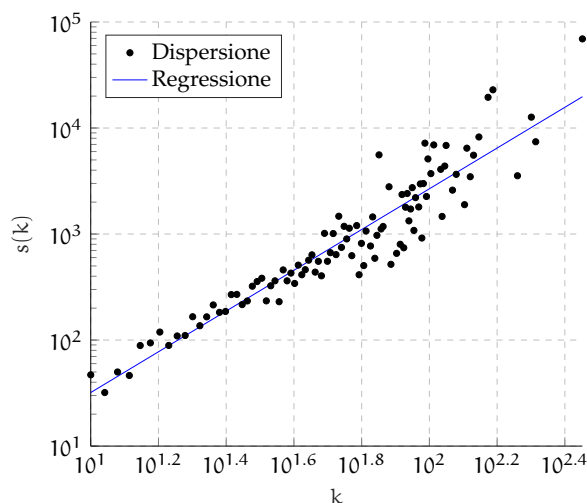


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

Infine nelle Oss.ni 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle seguenti osservazioni:

1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);

³ Si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni collo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella § 4, sono correzioni del tutto innecesarie.

2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma leggermente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che limiti superiori e inferiori più estesi;
3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ragione per cui si può considerare comunque «circa costante» come afferma [5];
4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondono: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» sono molto distanti geograficamente⁴, per cui è ragionevole che i flussi siano bassi.

Connessione	Peso	Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709	Cagliari-Sassari	13953
Cagliari-Selargius	7995	Sassari-Olbia	7246
Assemini-Selargius	4418	Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	4149	Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3865	Cagliari-Capoterra	3731
(a) Pesi maggiori correnti.		(b) Pesi maggiori di [5]	

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elaborato. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

⁴ Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

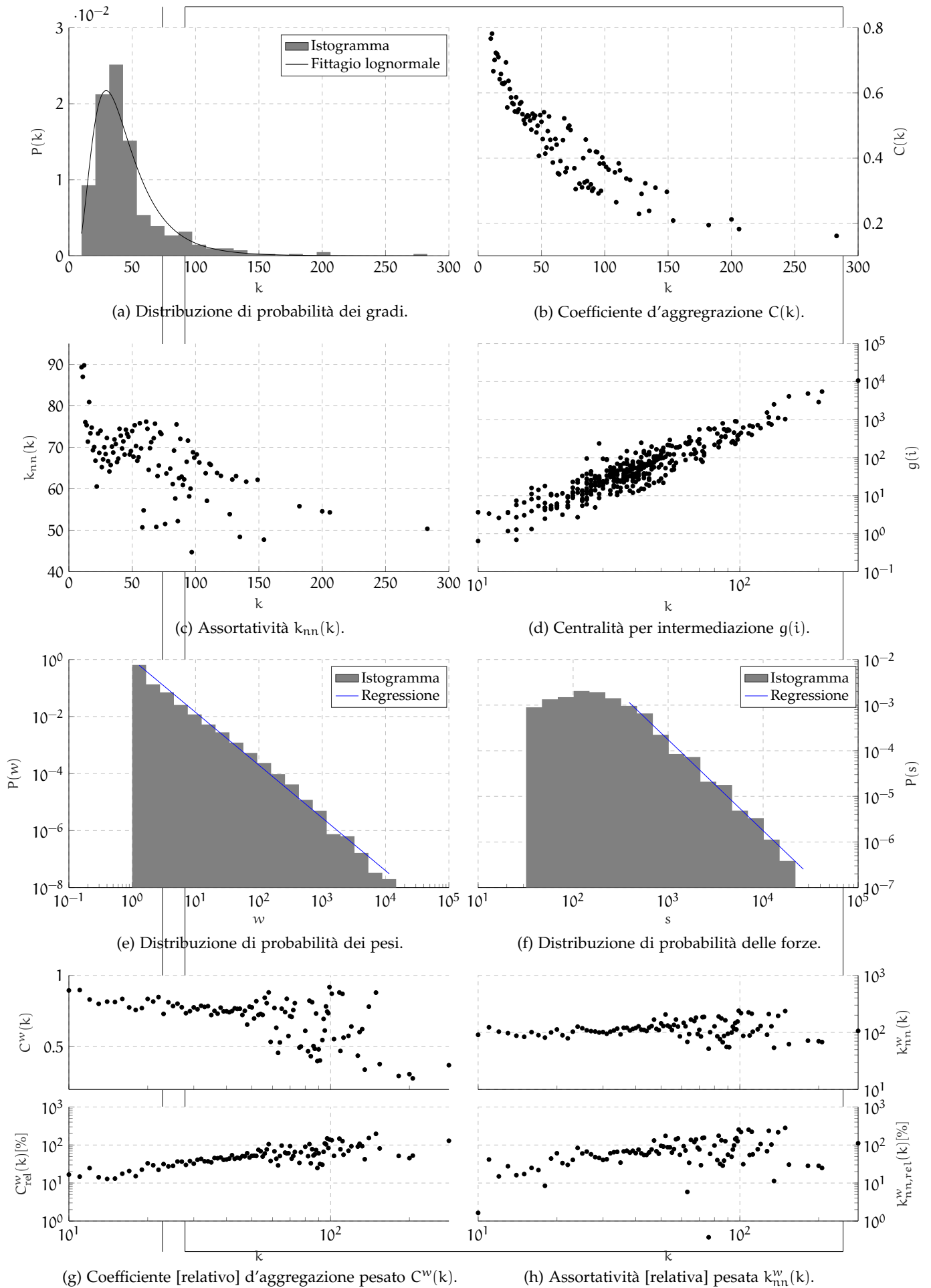


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) necessaria per ottenere i risultati nella § 4.

S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità colle quali si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI

Si annoverano ora molti concetti di teoria della probabilità avvisando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria (v.a.) X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Definizione 3.2 (Legge di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una v.a. assolutamente continua, allora $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ è detta legge per X sse

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile},$$

e soddisfa la condizione di normalità

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x, t) dx = 1 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la v.a. X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x, t)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x, t) dv$ va inteso come $f_X(dv, t)$. Tuttavia, nel caso in cui $f_X(x, t)$ sia non negativa e integrabile viene anche detta funzione di densità di probabilità.

Definizione 3.3 (Legge congiunta di X). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la legge congiunta di X è una funzione $f_Z: \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tale che

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x, t) dx = \int_A f_X(x, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile},$$

e soddisfa la condizione di normalità

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1 \quad \forall t.$$

Definizione 3.4 (Legge marginale di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la legge marginale di X_i è la funzione $f_{X_i} : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ così definita

$$f_{X_i}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (1)$$

essa è a tutti gli effetti la legge della v.a. X_i secondo la Def. 3.2.

Osservazione 3.2. Nelle definizioni precedenti il tempo dev'essere visto come un parametro che indicizza le varie leggi degli oggetti considerati; è presente per essere coerenti colla corrente trattazione, si in generale si può trascurare: $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ e $f_Z(\mathbf{x})$.

Proprietà 3.1 (Legge congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la legge congiunta di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

Definizione 3.5 (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una v.a. assolutamente continua e data una funzione misurabile $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora il valore atteso della v.a. $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x, t) dx,$$

e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Definizione 3.6 (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una v.a. assolutamente continua a media finita $\mathbb{E}[X] < \infty$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra, allora l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una v.a. Y tale che

AC1 $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

AC2 per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

L'insieme delle Y che soddisfanno le [AC1](#) e [AC2](#) sono indicate col simbolo $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Un'analoga definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti con X scalare e Y vettoriale.

Osservazione 3.3. Presa una v.a. $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente definizione \mathcal{G} può essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borell relativa allo spazio dei numeri reali mentre $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $Y \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.1. *Dati*

1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;
 2. un vettore aleatorio $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da $X \in \mathbb{R}^h$ e $Y \in \mathbb{R}^k$ con legge congiunta $f_Z(x, y)$ e marginali f_X e f_Y ;
 3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che $\mathbb{E}[\varphi(Z)] = \mathbb{E}[(X, Y)] < \infty$;
- allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (2)$$

che soddisfa $h(Y) \in \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$.

Dimostrazione. Per la [AC1](#) è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(Y))$:

$$\sigma(h(Y)) \equiv \sigma(Y^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

a parole si considera la controimmagine tramite Y dei borelliani filtrati da h , ragion per cui la sigma algebra non potrà che essere contenuta in quella non filtrata.

Per la [AC2](#) si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(Y)$ avvalendosi della caratterizzazione di $h(Y)$ tramite (2):

$$\begin{aligned} \int_A h(Y) d\mathbb{P} &= \int_B h(y) f_Y(y) dy \stackrel{(1)}{=} \int_B h(y) \int_{\mathbb{R}^h} f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx dy \stackrel{(2)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(y) \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(Y) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_C(Z) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(X, Y) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

ove $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

□

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (2), allora $h(y)$ si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y) | Y = y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y) / f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la legge di X condizionata dall'evento $Y = y$.

La (3), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(X, Y)$ rispetto a X dopo aver "fissato" l'evento $Y = y$, vale a dire considerando la Y come fosse un parametro uguale a y .

Successivamente, se s'impone $A = \Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y) | Y]], \quad (4)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(X, Y)$ si calcola mediando rispetto a Y la v.a. $\mathbb{E}[X|Y]$, ricavata dalla (3) ma considerando y arbitrario.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

G_1 è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

G_2 è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver luogo o, precisamente, sono più probabili;

G_3 è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

G_4 le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso e dell'energia esprimibile, grazie alle G_2 e G_3 , binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (CI)$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (CE)$$

ove $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle velocità precollisionali $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

Dalla G_4 si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le leggi d'interazione.

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

306 **Proposizione 3.2** (Leggi d'interazione). *Esistono due funzioni $\psi, \psi_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$*
 307 *che soddisfanno (CI, CE) e tali che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (5)$$

308 *ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .*

309 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (6)$$

310 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
 311 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \gamma] = 0, \end{aligned}$$

312 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

313 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (6) diventa
 314 allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (7)$$

315 □

316 Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$, seppure
 317 da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante
 318 per i centri delle particelle collidenti.

319 Si osservi come le leggi d'interazione nella 5 sono bilineari e simmetriche
 320 secondo la seguente definizione:

321 **Definizione 3.7** (Leggi d'interazione simmetriche). Due leggi d'interazione
 322 del tipo (5) si dicono simmetriche sse

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) = \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) &\implies \mathbf{v}' = \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) = \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) &\implies \mathbf{v}'_* = \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

323 Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in es-
 324 ame: siano allora $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ le v.a. delle velocità precollisionali, di cui
 325 le \mathbf{v} e \mathbf{v}_* precedenti sono due realizzazioni, al tempo t e similmente per
 326 $\mathbf{V}'_t, \mathbf{V}'_t^* \in \mathbb{R}^3$.

327 **Osservazione 3.5.** Le v.a. \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es. \mathbf{V}_t^i) proprio
 328 per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, dalla quale si deduce
 329 anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Le leggi d'interazione nella (5) diventano

$$\begin{aligned}\mathbf{V}' &= \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* &= \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n},\end{aligned}\quad (8)$$

in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t) \quad (9)$$

che è una v.a. di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui probabilità è descritta da due termini:

1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'avere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

Osservazione 3.6. Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t \leq 1$ condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo; si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale condizione sarà sempre verificata.

Colle (8, 9), lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[\text{AR}] \begin{cases} \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)\mathbf{V}_t^* + \Theta\mathbf{V}'_t^*, \end{cases}$$

dove l'acronimo [AR] sta per «Azione-Reazione» e descrive il fatto che ogni interazione (azione) necessariamente modifica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [14] questa regola può essere alterata dimodoché solo il nodo interagente sia modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di mediare le [AR] attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*$; pertanto una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle [AR],

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*) &= \varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t^* + \Theta\mathbf{V}'_t^*),\end{aligned}$$

e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*)] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)\mathbf{V}_t^* + \Theta\mathbf{V}'_t^*)];\end{aligned}$$

² Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

per espandere la media, siccome Θ dipende da $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*, \mathbf{n})$, bisogna avvalersi dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}_t'), \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}_t') \mid \mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*, \mathbf{n}]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t) \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t')B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})]\Delta t,\end{aligned}$$

e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*)]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}_t') - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*)] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t^*)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}_t'^*) - \varphi(\mathbf{V}_t^*))],\end{aligned}$$

e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}_t') - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t^*)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}_t'^*) - \varphi(\mathbf{V}_t^*))],\end{aligned}$$

che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}_*') - \varphi(\mathbf{v}_*)) \rangle f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,\end{aligned} \quad (11)$$

in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot d\mathbf{n}$$

indica la media rispetto a \mathbf{n} , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n})$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n})$ e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui legge congiunta è $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine necessario sommare le due equazioni in (11). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (12)$$

infatti dall'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il dominio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

Ipotesi 3.2. Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (13)$$

una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}|$.

³ Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nell'3.6 per qualunque valore di $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})$.

Ipotesi 3.3 (*Caos molecolare*). Le particelle interagenti secondo le [AR] sono campionate indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due particelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

Osservazione 3.7. Dal'ipotesi 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la legge congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(\mathbf{v}_*)$ nel secondo membro della seconda equazione della (11) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (14)$$

seguendo la medesima logica della (12). Applicando i due risultati illustrati nelle (12, 14) si perviene finalmente alla forma debole dell'equazione di Boltzmann omogenea asimmetrica:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \left(\frac{\varphi' - \varphi'_*}{2} - \varphi \right) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v}_* d\mathbf{v}, \quad (15)$$

ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi *. Tuttavia, qualora le leggi d'interazioni siano simmetriche secondo la Def. 3.7, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v}_* d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v}_* d\mathbf{v},$$

da cui segue la forma debole dell'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) (\varphi' - \varphi) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v}_* d\mathbf{v}. \quad (16)$$

Si può anche ricavare la forma forte considerando la funzione invertendo le leggi d'interazione (5) [12, § 2.5, p. 15], ma il conto esula dagli scopi di questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento la forma forte dell'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*. \quad (17)$$

3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

3.3 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

3.3.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipo-

tizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o più agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia $X \in \mathcal{I}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme dei vertici mentre \mathcal{E} dei lati di \mathcal{G} . Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geq 0}$; la funzione $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è una v.a. da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popolazioni \mathcal{P} e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geq 0$. Tale v.a. evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da \mathcal{E} , definendo così un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso si descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (18)$$

ove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{I},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

3.3.2 Algoritmi d'interazione

Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti interagiscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel dettaglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un'interazione con un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S_t', \quad (19)$$

ove $\Theta \in [0, 1]$ è una v.a. che tiene in considerazione qualora l'interazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ($\Theta = 1$) o no ($\Theta = 0$); d'altro canto $S_t' \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, S_t) in seguito a un'interazione avvenuta.

Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (20)$$

il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzionale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^* ; per coerenza è necessario imporre $\Delta t \leq 1$ che impone un limite superiore al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto facile da verificare nella pratica.

La popolazione postinterazione è una v.a. $S'_t: \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ dipendente in generale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (21)$$

in cui $\Psi: \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

3.3.3 Interazioni azione-reazione

Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$ mentre quella *in indietro* sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga a quella dell'agente (X, S_t) :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t', \quad (22)$$

ove si osserva che la Θ è la stessa della (19) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$ ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è definita mediante una funzione $\Psi_*: \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da Ψ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [14, § 2.2.1] sarà identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[\text{AR}] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S_t', \\ S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t'. \end{cases}$$

Si conclude questa sezione osservando che gli agenti $(X, S_t), (X^*, S_t^*)$ sono campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

3.4 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

3.4.1 Derivazione esatta

Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'evoluzione per le distribuzioni di probabilità f_i delle opinioni degli agenti; per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi multiagente [14, 15].

Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{J} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR], valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agl'indici e alla popolazione a tempo fissato, si ha [S]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

laddove, prendendo il limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (23)$$

Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (24)$$

Osservando che le coppie (X, S_t) e (X^*, S_t^*) fanno riferimento a un agente rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (23, 24), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) \\ &\quad - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))], \end{aligned}$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f dv dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (25)$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (18):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*), \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (26)$$

mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni Ψ e Ψ_* .

Si noti che la (25) è valida per ogni funzione *test* Φ per cui è un'equazione debole per la distribuzione f . (commento su Fokker-Planck {S})

Si osservi anche che la (25) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione f di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta $g(x, x_*, s, s_*, t)$ degli agenti interagenti nel prodotto $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$.

Dalla (25) con una scelta adeguata della funzione *test* Ψ , è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i . Sia $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$, dove $\phi_i: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$ e $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ è arbitrario. Allora usando la (18) dentro la (25) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = & \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ & + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (27)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento {S}). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi \mathbf{f} ds = & \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ & + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^T \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (28)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard e \mathbf{M}^T la trasposta di \mathbf{M} . Si noti che \mathbf{M} altro non è che la matrice d'adiacenza di \mathcal{G} .

3.4.2 Interazioni tra città

Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,

ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

Gli stati postinterazione (26) prendono come riferimento leggi d'interazione lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS_t^*, \\ S_t^{*'} = p_*S_t + q_*S_t^*, \end{cases} \quad (29)$$

le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s_*' = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (30)$$

ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$ sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazione lineari (29) le (30) soddisfanno

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e & & p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e & & q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (31)$$

rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s_*' \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \end{aligned} \quad (32)$$

ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo manoscritto si è modificata la [9, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [9, (4.5), § 4, p. 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (33)$$

che in essenza è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- ◇ $\lambda \in (0, 1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città più popolate riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- ◇ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (33) descrive la tendenza degli individui di aggregarsi per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (31) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (33).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è più agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (30), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (34)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (34) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (30), situazione che si vuole evitare⁴ dato che nella (33) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (34);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◇ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◇ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenerare quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 sì;
- ◇ la distribuzione esponenziale è quella più promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◇ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (35)$$

ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (36)$$

Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la F3, e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (37)$$

con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (38)$$

⁴ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

579 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la **F2** semplicemente tra-
 580 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle\hat{\gamma}\rangle$, ossia si considera la distribuzio-
 581 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle$:

$$\langle\gamma\rangle = \langle\hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle\rangle = \langle\hat{\gamma}\rangle - \langle\hat{\gamma}\rangle = 0.$$

582 D'altra parte la **F1** necessità di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
 583 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
 584 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
 585 di campionare l'origine [e quindi $-\langle\hat{\gamma}\rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

586 ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (39)$$

587 siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0, 1)$. La (39) implica quindi che non
 588 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la **F1**, ma che
 589 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ più
 590 piccola è la varianza, e viceversa.

591 3.4.3 Derivazione approssimata

592 3.5 NESSO DISCRETO-CONTINUO

593 È d'interesse esplorare il legame presente tra la (27) coll'equazione classica
 594 di Boltzmann **{S}**.

595 3.5.1 Ipotesi semplificative

596 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-
 597 care alla (27):

598 **IS1** Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi
 599 che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

600 **IS2** Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J}, \quad (40)$$

601 **IS3** S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (41)$$

602 3.5.2 Analisi della **IS1**

603 Con tal'ipotesi la (27) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (18) rispetto agli indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (42)$$

che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (43)$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann (8). Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (42).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1, illustrato nel paragrafo a venire, ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio quella media F .

3.5.3 Analisi della IS2

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la (27) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

che sommata su tutti gli indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (44)$$

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0, 1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa⁵; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann (8).

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla (27), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la IS1.

⁵ Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

629 3.5.4 Analisi della IS1, IS2 e IS3

630 Visto che vale IS1 si può partire dalla (43) nella quale la distribuzione media
 631 (42) diventa per IS2

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in J} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in J} f(s,t) = f(s,t),$$

632 ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti⁶, essendo questi, appunto,
 633 indistinguibili.

634 In tal modo la (43) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

635 che unita all'IS3 porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
 636 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

637 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

638 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche
 639 (S) usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
 640 tra una popolazione di particelle di un gas.

6 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.



Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix \mathbf{M} ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

```
1:  $\tilde{V} \leftarrow V_0$ 
2:  $t \leftarrow 1$ 
3: for  $t < T$  do
4:    $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$ 
5:    $V \leftarrow \tilde{V}$ 
6:    $P \leftarrow$  random permutation of  $\{1, \dots, N\}$ 
7:    $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$ 
8:    $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$ 
9:    $i \leftarrow 1$ 
10:  for  $i < N/2$  do
11:     $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i))\Delta t)$ 
12:     $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1-\Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$ 
13:     $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1-\Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$ 
14:     $i \leftarrow i+1$ 
15:  end for
16:   $t \leftarrow t + \Delta t$ 
17: end for
```

4

SIMULAZIONI

4.1 METODO MONTE CARLO



643

5

CONCLUSIONI

644

Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.

645

646

Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della rete statica.

647

648

Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.



649

APPENDICE

650

A CODICE



651

652
653
654
655
656
657
658
659

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	6
Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.	9
Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.	12
Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	14



660

ELENCO DELLE TABELLE

661

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
linee barrate corrispondono a dati trascurati. 11

662

663

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 13



BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berliant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélemy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat’s law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [11] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025).
- [13] Marc Barthélemy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [14] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).

- 705 [15] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*
706 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 707 [16] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An*
708 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.