# Politecnico di Torino

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica


Tesi di Laurea Magistrale

# Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente


**Relatori**
prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

*firma dei relatori*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Candidato**
Valerio Taralli

*firma del candidato*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .



Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
*Elisabetta* e *Marco*

# INDICE

# 1 INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già studiato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf [10] quasi cinquantanni dopo: nella sua teoria ha introdotto la legge che oggi prende il suo nome.{§}

Aggiungere le formule sul rango{§}.

D'altra parte, nella letteratura piú recente, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, la maggior parte degli articoli su tale argomento o considerano le città come luoghi ove vivono gli agenti, creando cosí un modello di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate {§}, o non considerano una naturale struttura da grafo {§} oltre ad astrarre eccessivamente le città e i loro dintorni {§}.

In questo elaborato le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono su mediante la struttura di un grafo spaziale; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

La suddivisione è come segue: nel secondo capitolo si affronteranno brevemente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto quelli pertinenti alla topologia interurbana; nel terzo la teoria cinetica dei sistemi multiagente è approfondita prima da un punto di vista classico, poi mediata dai grafi sia esattamente che approssimatamente; infine nel quarto si illustreranno i principali risultati mentre nel quinto si conclude con delle note finali e potenziali sviluppi futuri.

Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice in Python è spiegato a grandi linee.

# 2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descriveranno molto brevemente i dati usati.

## 2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

**Definizione 1** (Grafo)**.** Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G}=(\mathcal{I},\mathcal{E})$, ove $\mathcal{I}$ è l'insieme degl'indici dei nodi mentre $\mathcal{I}$ è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici $\mathcal{I}$: due nodi $i,j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i,j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme $\mathcal{E}$ si può poi specializzare il concetto di grafo:

**Definizione 2** (Grafo [in]diretto)**.** Un grafo è indiretto sse dato $(i,j) \in \mathcal{E}$ allora $(j,i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

**Definizione 3** (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata)**.** Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|I|\times|I|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|I|\times|I|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

ove $q_{i,j}$ è il peso[1] associato al lato $(i,j)$. Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

**Definizione 4** (Grado e Forza [entrate/uscente])**.** Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \tag{2}$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è piú [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \tag{3}$$

rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2, 3) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

1 Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

**Ipotesi 1.** *Il grafo $\mathcal{G}$ è assunto statico: in altre parole, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{E}$ sono costanti nel tempo.*

In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si distribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connessioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città stesse.

## 2.2 RETI E CITTÀ

Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il problema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti possibili tra le città

Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati e le loro intersezioni come nodi [7, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la rete di trasporto di tram, di bus e della metro [7, § 3.2.1 p. 22]; altri si pongono piú propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [7, § 3.1.3.2 p. 17], navale [7, § 3.1.4 p. 19], aereo [7, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [7, § 3.1.3.3 p. 18; 4] tra città che mostrano olisticamente tutt'i possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e immediata dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può interagire con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col primo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2) perché il contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [4, 7], ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò tale osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando si definiranno le leggi d'interazione. Perdipiú, contrariamente a quanto si possa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2] proprio a causa della sua natura spaziale [3, 7]; ciò non esclude l'esistenza di nodi piú centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato superiormente dalla natura spaziale del grafo.

## 2.3 CENNI SUI DATI

La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [6] seguendo l'esempio di [4]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

| Dato | Col. iniziale | Lunghezza |
|---|---|---|
| Provincia di partenza | 1 | 3 |
| Comune di partenza | 4 | 3 |
| Sesso | 7 | 1 |
| Mezzo di trasporto | 8 | 1 |
| Cond.professionale | 9 | 1 |
| Orario di uscita | 10 | 1 |
| Tempo di percorrenza | 11 | 1 |
| Provincia di arrivo | 12 | 3 |
| Comune di arrivo | 15 | 3 |
| Numero di persone | 18 | 12 |

**Tabella 2.1**: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT[2].

I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è necessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

Sono stati anche riprodotti i risultati di [4], ma l'unico importante da mostrare è quello relativo alla correlazione positiva tra la forza e il grado del nodo nella Fig. ??, mentre tutti gli altri sono elencati per completezza nella Fig. {§}.

2 si v. il *file* «trapen91.txt» per maggiori informazioni.

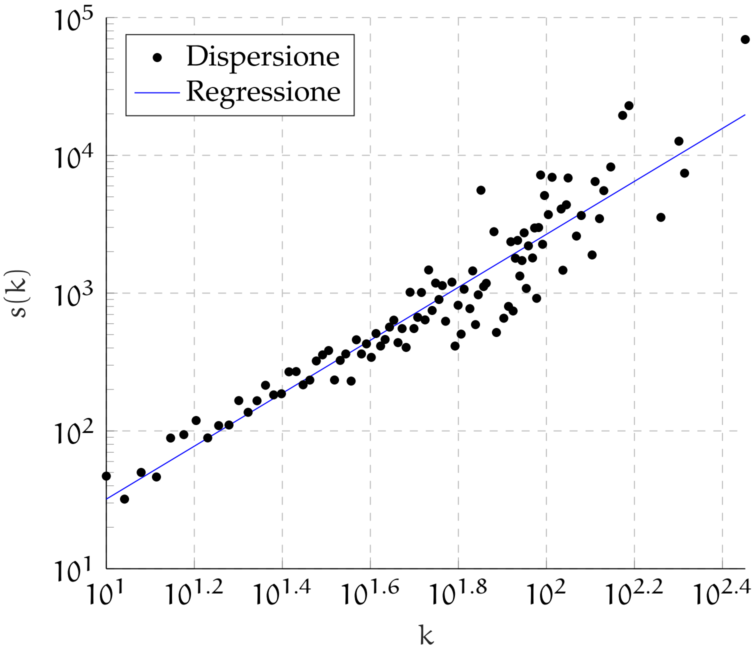


**Figura 2.1:** Forza in funzione del grado per la Sardegna.

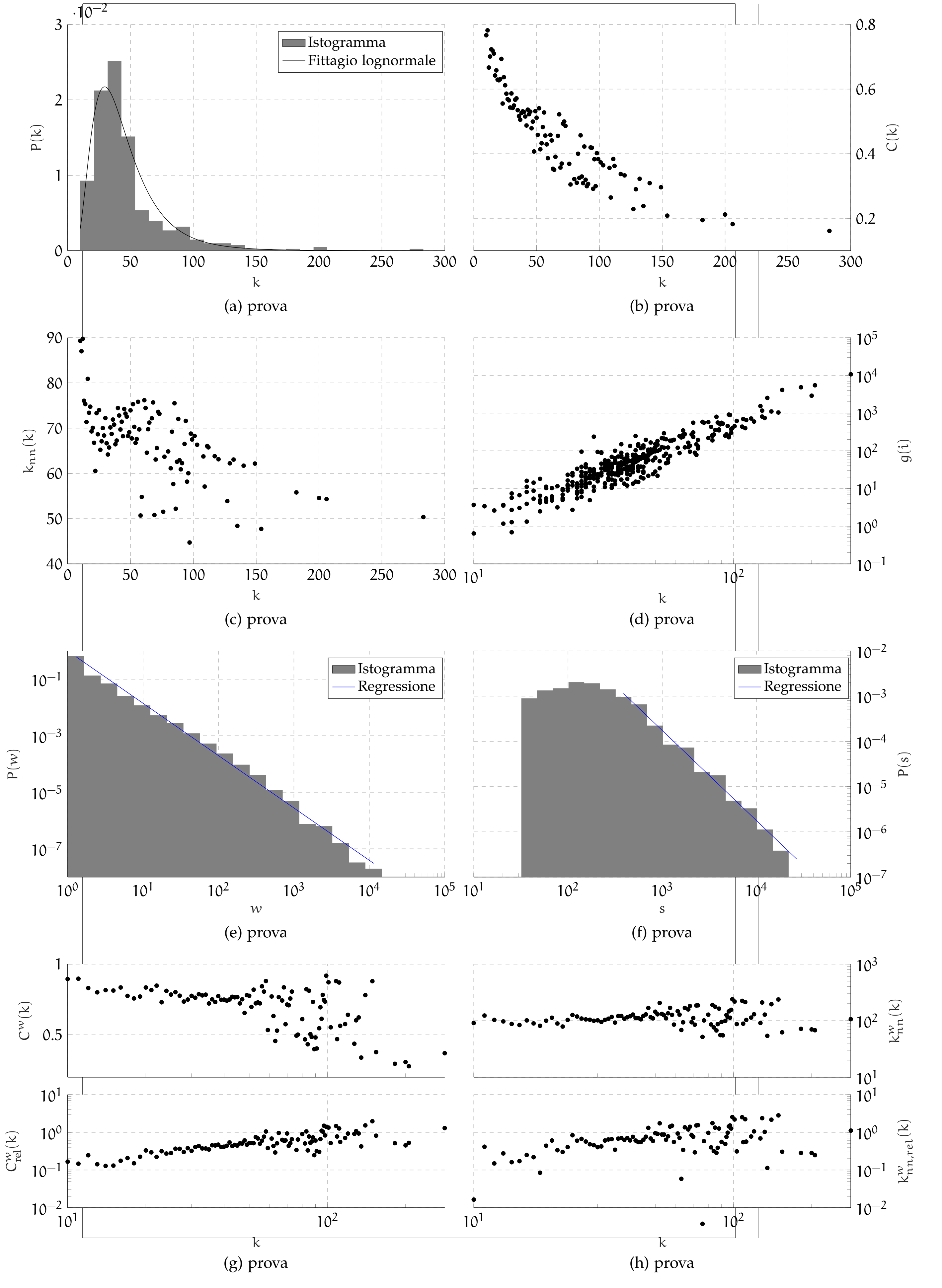


**Figura 2.2:** Prova

# 3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

## 3.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

## 3.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

### 3.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o piú agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia $X \in \mathcal{I}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove $\mathcal{I}$ è l'insieme dei vertici mentre $\mathcal{E}$ dei lati di $\mathcal{G}$. Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geqslant 0}$; la funzione $S_t : \Omega \to \mathcal{P}$ è una variabile aleatoria da uno spazio astratto $\Omega$ allo spazio delle popolazioni $\mathcal{P}$ e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geqslant 0$. Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da $\mathcal{E}$, definendo cosí un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico $X, S_t$ dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla $f$ la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \tag{1}$$

ove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia $S_t$ dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \qquad \forall t \geqslant 0, \forall i \in \mathcal{I},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \qquad \forall t \geqslant 0$$

### 3.2.2 Algoritmi d'interazione

Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti interagiscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel dettaglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un interazione con un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S_t', \tag{2}$$

ove $\Theta \in 0,1$ è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'interazione tra i due agenti effettivamente si manifesti $(\Theta = 1)$ o no $(\Theta = 0)$; d'altro canto $S_t' \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente $(X, V_t)$ in seguito a un'interazione avvenuta.

Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \tag{3}$$

il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzionale al passo temporale d'interazione $\Delta t$ mediante un nucleo d'interazione $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

dove la coppia ordinata $(X, X^*)$ denota il lato dal vertice $X$ al vertice $X^*$; per coerenza è necessario imporre $\Delta t \leqslant 1$ che impone un limite superiore al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto facile da verificare nella pratica.

La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria $S_t' : \Omega \to \mathcal{P}$ dipendente in generale dagli stati preinterazione $V_t$, $V_t^*$ degli agenti integranti:

$$V_t'(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{4}$$

in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \to \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

### 3.2.3 Interazioni azione-reazione

Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

Sia $S$ la città interagente e $S^*$ quella subente, allora in un grafo diretto si può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$ mentre quella in indietro sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto l'agente $(X^*, S_t^*)$ aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga a quella dell'agente $(X, S_t)$:

$$S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \tag{5}$$

ove si osserva che la $\Theta$ è la stessa della (2) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$ ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S_t'(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è definita mediante una funzione $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \to \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da $\Psi$. Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [8, § 2.2.1] sarà identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[AR] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S_t', \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

Si conclude questa sezione osservando che gli agenti $(X, S_t)$, $(X^*, S_t^*)$ sono campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

## 3.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

### 3.3.1 Derivazione esatta

Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'evoluzione per le distribuzioni di probabiltà $f_i$ delle opinioni degli agenti; per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi multiagente [8, 9].

Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR], valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agl'indici e alla popolazione a tempo fissato, si ha {§}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega) A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\qquad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per $\Delta t$, si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t}) - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

laddove, prendendo il limite $\Delta t \to 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \tag{7}$$

Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \tag{8}$$

Osservando che le coppie $(X, S_t)$ e $(X^*, S_t^*)$ fanno riferimento a un agente rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (7, 8), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X,S_t)]}{dt} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[A(X,X^*)\big(\Phi(X,\Psi(S_t,S_t^*,\omega)) + \Phi(X^*,\Psi_*(S_t^*,S_t,\omega)) - \Phi(X,S_t) - \Phi(X^*,S_t^*)\big)\Big],$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}} \Phi f dv dx = \int_{\mathcal{I}^2}\int_{\mathcal{P}^2} A(x,x_*)\frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_*\rangle}{2} ff_* ds ds_* dx dx_*, \tag{9}$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (1):

$$f \equiv f(x,s,t), \ \ \Phi \equiv \Phi(x,s), \ \ \Phi_* \equiv \Phi(x_*,s_*) \ \ \Phi' \equiv \Phi(x,s') \ \text{ e } \ \Phi'_* \equiv \Phi(x_*,s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s,s_*,\omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*,s,\omega), \tag{10}$$

mentre $\langle\cdot\rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni $\Psi$ e $\Psi_*$.

Si noti che la (9) è valida per ogni funzione *test* $\Phi$ per cui è un'equazione debole per la distribuzione $f$. (commento su Fokker-Planck {§})

Si osservi anche che la (9) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione $f$ di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta $g(x,x_*,s,s_*,t)$ degli agenti interagenti nel prodotto $f(x,s,t)f(x_*,s_*,t)$.

Dalla (9) con una scelta adeguata della funzione *test* $\Psi$, è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le $f_i$. Sia $\Psi(x,s) = \phi_i(x)\varphi(s)$, dove $\phi_i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{I}\setminus\{i\}$ e $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ è arbitrario. Allora usando la (1) dentro la (9) si ricava

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = &\frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle \varphi' - \varphi\rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &+ \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(j,i)\int_{\mathcal{P}^2}\langle \varphi'_* - \varphi_*\rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{I},\end{aligned} \tag{11}$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s,t) \ \ \forall i \in \mathcal{I}, \ \ \varphi \equiv \varphi(s), \ \ \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \ \text{ e } \ \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento {§}). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv \big(f_i(s,t)\big)_{i\in\mathcal{I}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv \big(A(i,j)\big)_{i,j\in\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi \mathbf{f} ds = &\frac{1}{2N}\int_{\mathcal{P}^2}\langle \varphi' - \varphi\rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M}\mathbf{f}_* ds ds_* \\ &+ \frac{1}{2N}\int_{\mathcal{P}^2}\langle \varphi'_* - \varphi_*\rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*,\end{aligned} \tag{12}$$

ove $\odot$ indica il prodotto di Hadamard e $\mathbf{M}^\top$ al trasposta di $\mathbf{M}$. Si noti che $\mathbf{M}$ altro non è che la matrice d'adiacenza di $\mathcal{G}$.

### 3.3.2 Interazioni tra città

Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta, ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò implica che la matrice d'adiacenza $\mathbf{M}$ è simmetrica.

Gli stati postinterazione (10) prendono come riferimento leggi d'interazioni lineari

$$\begin{cases} S_t' = pS_t \; + qS_t^*, \\ S_t^{*\prime} = p_*S_t + q_*S_t^*, \end{cases} \tag{13}$$

le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s\big(1 - E(s,s_*) + \gamma\big) \\ s_*' = s_* + sI(s,s_*) \end{cases} \tag{14}$$

ove $s$ e $s_*$ sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s,s_*)$ e $I(s,s_*)$ sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre $\gamma$ rappresenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni lineari (13) le (14) soddisfano

$$\begin{aligned} &p(s,s_*) \equiv s[1 - E(s,s_*) + \gamma] \quad &&\text{e} \quad p_*(s,s_*) \equiv s_* \\ &q(s,s_*) \equiv 0, &&\text{e} \quad q_*(s,s_*) \equiv sI(s,s_*), \end{aligned} \tag{15}$$

rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* = \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s_*' \rangle \\ = s - sE(s,s_*) + s_* + sI(s,s_*) \end{aligned} \implies E(s,s_*) = I(s,s_*), \tag{16}$$

ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo $s$ ed $s_*$ sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s,s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo manuscritto si è modificata la [5, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [5, (4.5), § 4, p. 228]:

$$E(s,s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \tag{17}$$

che in essenza è una funzione di Hill di ordine $\alpha$, in cui v'è un tasso di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto $s_*/s$, maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- $\lambda \in (0,1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città piú popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto $s_*/s$ raggiunge la massima attrattività $\lambda$.

In poche parole la (17) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i piú svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (15) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (17).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione $\gamma$ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è piú agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (14), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \tag{18}$$

mentre $s'_*$ è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché $\geqslant$ nella (18) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (14), situazione che si vuole evitare[1] dato che nella (17) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiú, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto $\gamma$ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (18);

F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;

F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che piú grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 si;
- la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \tag{19}$$

ove $\alpha$ e $\theta$ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha+1} e^{-y} \, dy. \tag{20}$$

1 Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

Si scelga $\hat{\gamma} \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\theta)$, che soddisfa per definizione la F3, e s'imponga

$$\langle\hat{\gamma}\rangle = 1 - E(s,s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle\hat{\gamma}^2\rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \tag{21}$$

con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre $\sigma^2$ alla varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s,s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s,s_*)}. \tag{22}$$

Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la F2 semplicemente traslando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle\hat{\gamma}\rangle$, ossia si considera la distribuzione $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle$:

$$\langle\gamma\rangle = \langle\hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle\rangle = \langle\hat{\gamma}\rangle - \langle\hat{\gamma}\rangle = 0.$$

D'altra parte la F1 necessità di salvaguardarsi dai casi degeneri della distribuzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro $\theta$, mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla di campionare l'origine [e quindi -$\langle\hat{\gamma}\rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s,s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

ma nel caso peggiore $1 - E(s,s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1-\lambda)^2 \implies \sigma < |1-\lambda| = 1-\lambda, \tag{23}$$

siccome $E(s,s_*) \in (0,\lambda)$ $\forall s,s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0,1)$. La (23) implica quindi che non è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la F1, ma che questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: piú è grande $\lambda$ piú piccola è la varianza, e viceversa.

### 3.3.3 Derivazione approssimata

## 3.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

È d'interesse esplorare il legame presente tra la (11) coll'equazione classica di Boltzmann {§}.

### 3.4.1 Ipotesi semplificative

A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da applicare alla (11):

1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s,t) = f_j(s,t) = f(s,t) \quad \forall i,j \in \mathcal{I}, \tag{24}$$

3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s,s_*) = \Psi_*(s_*,s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s,s_*). \tag{25}$$

### 3.4.2 Analisi della 1° IS

Con tal'ipotesi la (11) diventa

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N}\left[\sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi_*'-\varphi_*\rangle f_j f_i^* ds ds_*\right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agl'indici

$$F(s,t) \equiv \int_{\mathcal{I}} f(x,s,t)dx = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t)\otimes\int_{\mathcal{I}}\delta(x-i)dx = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t), \tag{26}$$

che corrisponde a una media tra le distribuzione dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi_*'-\varphi_*\rangle F f_i^* ds ds_*\right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi+\varphi_*'-\varphi_*\rangle F F^* ds ds_*, \tag{27}$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann {§}. Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (26).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio quella media $F$.

### 3.4.3 Analisi della 2° IS

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la (11) diventa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = {} & \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi\rangle f f^* ds ds_* \\ & + \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(j,i)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi_*'-\varphi_*\rangle f f^* ds ds_*,\end{aligned}$$

che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi+\varphi_*'-\varphi_*\rangle f f^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i,j\in\mathcal{I}} A(i,j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'-\varphi+\varphi_*'-\varphi_*\rangle f f^* ds ds_*\right]. \tag{28}$$

**Algorithm 1** Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

**Require:** adjacency matrix **M**; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

```
Ṽ ← V_0
t ← 1
for t < T do
    ⟨φ⟩(t) ← (1/N) Σ_{i=1}^{N} φ(Ṽ(i))
    V ← Ṽ
    P ← random permutation of {1,...,N}
    p_1 ← (P(1),...,P(N/2))
    p_2 ← (P(N/2+1),...,P(N))
    i ← 1
    for i < N/2 do
        Θ ~ Bernoulli(B(p_1(i),p_2(i))Δt)
        Ṽ(p_1(i)) ← V(p_1(i))(1−Θ) + Ψ(V(p_1(i)),V(p_2(i)))Θ
        Ṽ(p_2(i)) ← V(p_2(i))(1−Θ) + Ψ_*(V(p_2(i)),V(p_1(i)))Θ
        i ← i+1
    end for
    t ← t+Δt
end for
```

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa[2]; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann {§}.

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla (11), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente $L/N^2$ che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la 1° IS.

### 3.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS

Visto che vale 1° IS si può partire dalla (27) nella quale la distribuzione media (26) diventa per 2° IS

$$F(s,t) = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t) \overset{2°}{=} \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti[3], essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (27) diventa

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

2 Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore prorio $N^2$, ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

3 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \to \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$ e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche {§} usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica tra una popolazione di particelle di un gas.

# 4 SIMULAZIONI

# 5 CONCLUSIONI

Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.

Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della rete statica.

Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

# APPENDICE

## A CODICE

# ELENCO DELLE FIGURE

# ELENCO DELLE TABELLE

# BIBLIOGRAFIA


[1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.

[2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.

[3] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.

[4] De Montis, Andrea and Barthélemy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.

[5] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.

[6] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/ (visitato il giorno 12/01/2026).

[7] Marc Barthélemy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X.

[8] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0956792524000020.

[9] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.

[10] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.