

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della
popolazione tra città su reti spaziali mediante la
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1 INTRODUZIONE	5
2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1 Definizioni miscellanee	9
2.2 Reti e città	10
2.3 Cenni sui dati	11
3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	15
3.1 Descrizione cinetica classica	15
3.1.1 Equazione di Boltzmann omogenea	15
3.1.2 Equazione di Boltzmann disomogenea	17
3.1.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea	17
3.2 Descrizione cinetica retale	17
3.2.1 Impostazione	17
3.2.2 Algoritmi d'interazione	18
3.2.3 Interazioni azione-reazione	18
3.3 Derivazione dell'equazioni cinetiche	19
3.3.1 Derivazione esatta	19
3.3.2 Interazioni tra città	21
3.3.3 Derivazione approssimata	23
3.4 Nesso discreto-continuo	23
3.4.1 Ipotesi semplificative	23
3.4.2 Analisi della IS ₁	24
3.4.3 Analisi della IS ₂	24
3.4.4 Analisi della IS ₁ , IS ₂ e IS ₃	25
4 SIMULAZIONI	27
4.1 Metodo Monte Carlo	27
5 CONCLUSIONI	29
APPENDICE	31
A Codice	31

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [14] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se si in luogo di f la popolazione t [14, Fig. 9-2, p. 375] (t sta per *taglia*); tuttavia ciò è vero solo qualora $t \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1) vale sempre.

Piú in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia T la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_T(t)$ la sua funzione di densità di probabilità², per la quale $f_T(t)dt$ indica il numero di città con $t \in (t, t+dt)$, allora si dice che T segue una distribuzione di Pareto se soddisfa

$$R(t) \approx \frac{1}{t^p} \quad \text{se } t \gg 1, \quad \text{ove } R(t) = \int_t^{+\infty} f_T(\tau)d\tau, \quad (2)$$

che altro non è che la funzione di ripartizione complementare di T , la quale rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a t ; si indica con $R(t)$ perché è analoga al rango nella (1) una volta che s'impone l'indice di Pareto p unitario.

Piú recentemente [6, 7] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_T(t)$ è ben fissata dalla distribuzione lognormale con funzione di distribuzione di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{ove } X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma). \quad (3)$$

Come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹In realtà, come Zipf stesso ammette [14, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

²Affinché $f_T(t)$ esista rigorosamente anche supporre che sia assolutamente continua ma in questa introduzione non è necessario entrare nei dettagli, per i quali si rimanda alla § 3.

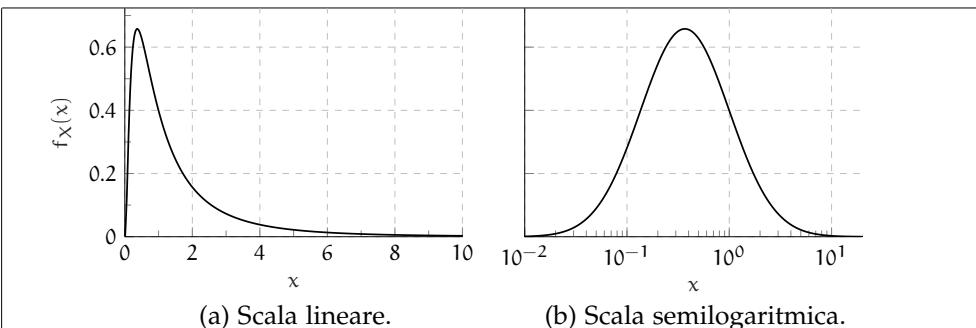


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [7, 8] ci si è poi resi conto che per fissare l’intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (3)

$$f_T(t) = \xi f_T^1(t) + (1 - \xi) f_T^2(t), \quad (4)$$

ove $\xi \in [0, 1]$ è un parametro da fissare tanto quanto le medie e le varianze associate a $f_T^1(t)$ e $f_T^2(t)$ per un totale di 5 parametri.

Pertanto l’obiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d’interazione riguardo al fenomeno dell’emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell’autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- o applicano la TCSMA alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [8]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la TCSMA[3];
- altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate[10];
- infine l’articolo che piú si avvicina all’obiettivo di questa tesi, applica tuttavia la sua teoria nel contesto delle reti sociali[12].

³ In particolare [8], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s’intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della
60 teoria dei grafi applicata alla TCSMA sono stati piuttosto recenti e prin-
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la TCSMA è ap-
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivono molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso¹ associato al lato (i,j) . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

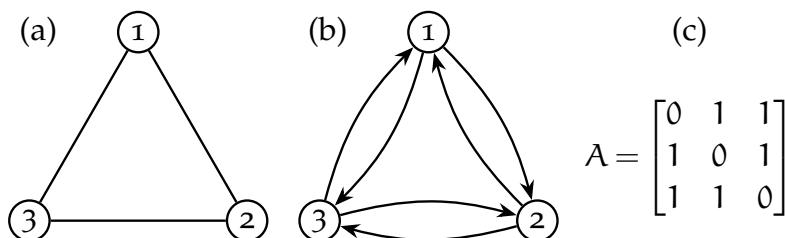


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

¹ Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

94 **Definizione 2.4** (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{J}$, in
95 un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

96 d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più
97 [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado
98 in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

99 rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di
100 (2, 3) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

101 Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

102 **Ipotesi 2.1.** Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{J} e \mathcal{E} sono costanti
103 nel tempo.

104 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
105 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
106 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connes-
107 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
108 stesse.

109 2.2 RETI E CITTÀ

110 Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il pro-
111 blema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti
112 possibili tra le città

113 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i
114 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati
115 e le loro intersezioni come nodi [11, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la
116 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [11, § 3.2.1 p. 22]; altri si
117 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in
118 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [11, § 3.1.3.2 p. 17], navale
119 [11, § 3.1.4 p. 19], aereo [11, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

120 Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione
121 della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 122 1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono
123 troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola
124 città;
- 125 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contempora-
126 neamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere
127 diversi trasporti per muoversi.

128 Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti
 129 pendolari [11, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutt'i
 130 possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre
 131 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché
 132 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

133 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di
 134 grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e im-
 135 mediata dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può
 136 interagire con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col pri-
 137 mo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2.2) perché il
 138 contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

139 Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 11],
 140 ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò
 141 tale osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando
 142 si definiranno le leggi d'interazione. Perdipiù, contrariamente a quanto si
 143 possa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2]
 144 proprio a causa della sua natura spaziale [4, 11]; ciò non esclude l'esistenza
 145 di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è
 146 limitato superiormente dalla natura spaziale del grafo.

147 2.3 CENNI SUI DATI

148 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [9]
 149 seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una
 150 serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT²; le
 linee barrate corrispondono a dati trascurati.

151 I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è ne-
 152 cessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni
 153 e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

154 Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento
 155 Pen_91It.txt:

² si v. il documento trapen91.txt per maggiori informazioni.

- 156 1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice
 157 «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che
 158 riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
 159 2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici
 160 incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non
 161 la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229»,
 162 «241», «216», «203», «224», «236», «246».

163 In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi]
 164 sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto
 165 raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può
 166 notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

167 00200714212215_____1,

168 ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in tota-
 169 le 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del
 170 Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in
 171 realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», ep-
 172 pure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di
 173 partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizza-
 174 re che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo;
 175 è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il
 176 codice del comune di destinazione³.

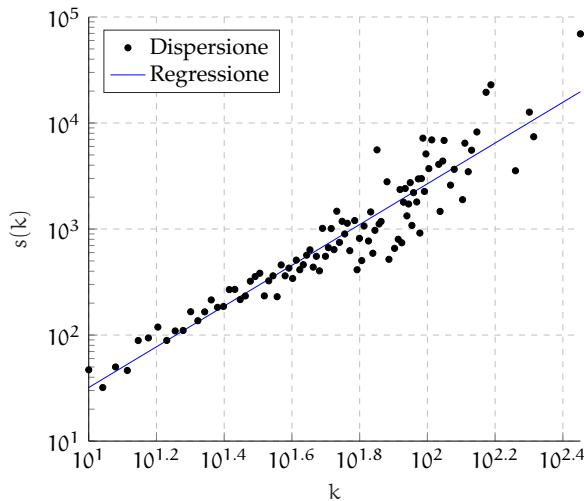


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

177 Infine nelle Figg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle-
 178 seguenti osservazioni:

- 179 1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio
 180 di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);

3 Si potrebbe scegliere, tra tutti i comuni colo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella § 4, sono correzioni del tutto innecessarie.

- 181 2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-
 182 mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che
 183 limiti superiori e inferiori più estesi;
- 184 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g
 185 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-
 186 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come
 187 afferma [5];
- 188 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-
 189 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte
 190 di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-
 191 no molto distanti geograficamente⁴, per cui è ragionevole che i flussi
 192 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

(b) Pesi maggiori di [5]

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

193 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero
 194 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-
 195 to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva
 196 tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

⁴ Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

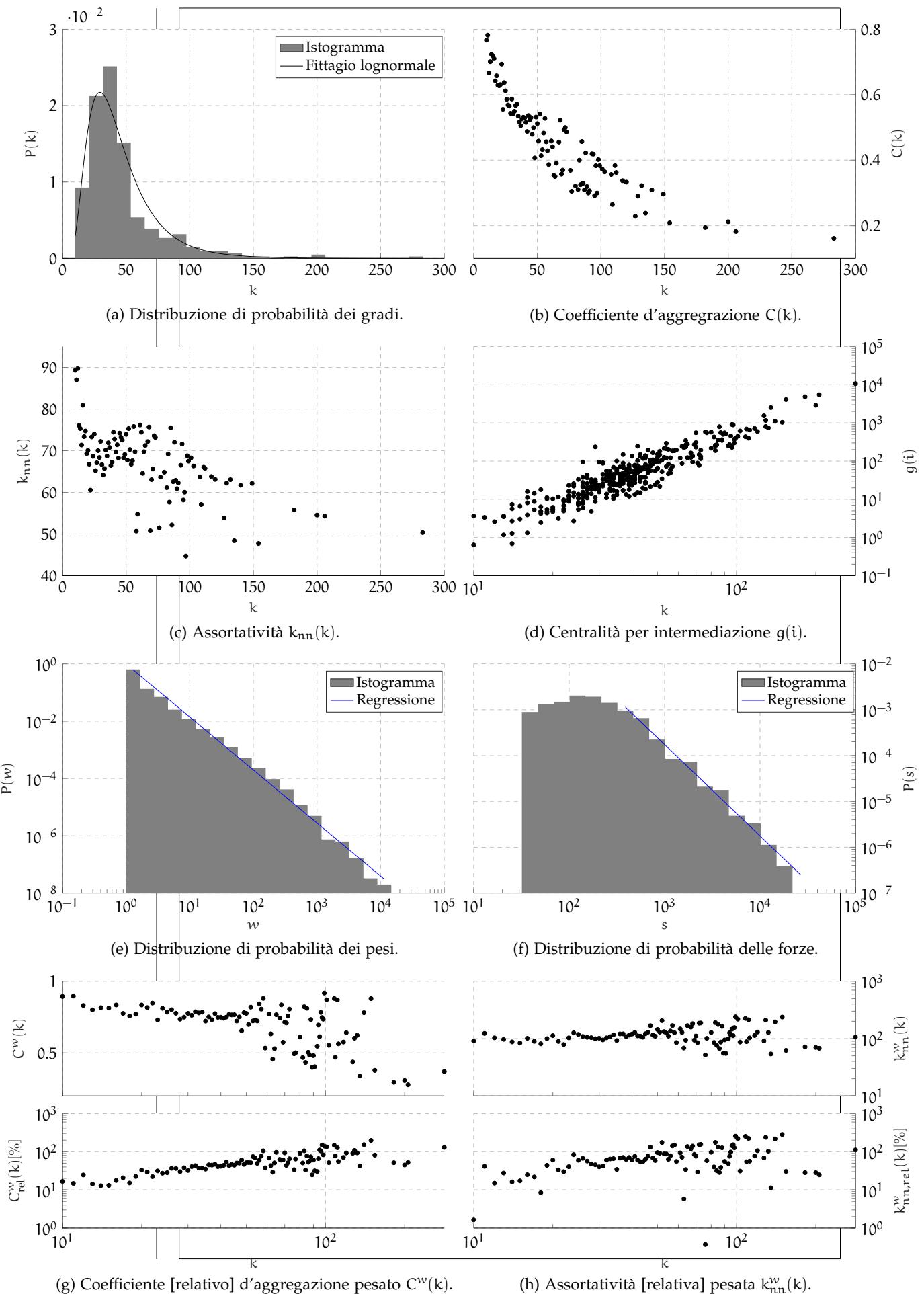


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) necessaria per ottenere i risultati nella § 4.

In esso si deriva prima la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

3.1.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Prima di procedere è necessario definire il tipo di gas che si sta considerando.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

G₁ è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

G₂ è rarefatto, da cui si può assumere che solo interazioni binarie possono aver luogo;

G₃ è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

G₄ le collisioni sono elastiche per cui, unito alla G₂, porta alla conservazione dell'impulso e dell'energia:

$$v' + v'_* = v + v_*, \quad (\text{CI})$$

$$|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2, \quad (\text{CE})$$

ove $v', v'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle velocità precollisionali $v, v_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

Dalla G₄ si possono in realtà caratterizzare pienamente le velocità poscollisionali.

Proposizione 3.1. Esistono due funzioni $\hat{v}, \hat{v}_* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfanno (CI, CE) e tali che

$$\begin{aligned} v' &= \hat{v}(v, v_*) \equiv v + [(v_* - v) \cdot n]n, \\ v'_* &= \hat{v}_*(v, v_*) \equiv v_* + [(v - v_*) \cdot n]n, \end{aligned} \quad (1)$$

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

226 ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .

227 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$v' = v - \gamma n \quad \text{e} \quad v'_* = v_* + \gamma n, \quad (2)$$

228 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
229 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |v'|^2 + |v'_*|^2 &= |v - \gamma n|^2 + |v_* + \gamma n|^2 \\ &= (v - \gamma n) \cdot (v - \gamma n) + (v_* + \gamma n) \cdot (v_* + \gamma n) \\ &= |v|^2 - 2\gamma(v \cdot n) + \gamma^2 + |v_*|^2 + 2\gamma(v_* \cdot n) + \gamma^2 \\ &= |v|^2 + |v_*|^2 - 2\gamma[(v_* - v) \cdot n + 2\gamma] \\ &= |v|^2 + |v_*|^2 \implies \gamma[(v_* - v) \cdot n + 2\gamma] = 0, \end{aligned}$$

230 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \hat{\gamma}(v, v_*) \equiv (v - v_*) \cdot n,$$

231 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (2) diventa
232 allora

$$v' = v + [(v_* - v) \cdot n]n \quad \text{e} \quad v'_* = v_* + [(v - v_*) \cdot n]n. \quad (3)$$

□

234 Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $n \in \mathbb{S}^2$, seppure
235 da un punto di vista sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante per i
236 centri delle particelle collidenti.

237 Per poter dedurre l'equazione di Boltzmann omogenea è però necessa-
238 ria una descrizione statistica del precedente gas: sia $V_t, V_t^* \in \mathbb{R}^3$ le variabili
239 aleatorie² delle velocità precollisionali, di cui le v e v_* precedenti sono due
240 realizzazioni, al tempo t e similmente per $V'_t, V_t^{*\prime} \in \mathbb{R}^3$.

241 Le leggi d'interazione nella (1) diventano

$$\begin{aligned} V' &= \hat{V}(V, V_*) \equiv V + [(V_* - V) \cdot n]n, \\ V'_* &= \hat{V}_*(V, V_*) \equiv V_* + [(V - V_*) \cdot n]n, \end{aligned} \quad (4)$$

242 in cui anche n risulta essere aleatoriamente distribuita; usualmente s'ipo-
243 tizza $n \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo
244 queste uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

245 Invece per modellare la dinamica basata su interazioni binarie si fissa un
246 passo temporale $\Delta t > 0$, si campionano indipendentemente due agenti e si
247 presuppone che questi interagiscano con una certa probabilità, ovvero

$$[\text{AR}] \begin{cases} V_{t+\Delta t} = (1-\Theta)V_t + \Theta V'_t, \\ V_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)V_t^* + \Theta V_t^{*\prime}. \end{cases}$$

248 ove

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((V_t^* - V_t) \cdot n) \Delta t)$$

² Si noti come queste non dipendano dall'indice proprio per l'ipotesi G₃ d'indistinguibilità delle particelle.

249 è una variabile aleatoria, indipendente da V_t e V_t^* , che indica se l'interazione
 250 avviene o no; essa dipende dalla funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di colli-
 251 sione, che permette d'avere una maggiore espressività sulle collisioni mole-
 252 colari le quali possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole. Per
 253 definizione di Θ deve valere $B((V_t^* - V_t) \cdot n) \Delta t \leq 1$ condizione soddisfacibile
 254 anche prendendo un passo temporale Δt adattivo.

255 Si noti come B dipenda da $(V_* - V) \cdot n$ cosa che permette d'interpretare n
 256 come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

257 3.1.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

258 3.1.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

259 3.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

260 3.2.1 Impostazione

261 La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti
 262 connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipo-
 263 tizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o
 264 più agenti possono essere trascurate.

265 Dopodiché, sia $X \in \mathcal{I}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è
 266 l'insieme dei vertici mentre \mathcal{E} dei lati di \mathcal{G} . Si assume che il grafico sia statico,
 267 ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

268 Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato micro-
 269 scopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geq 0}$; la funzione $S_t: \Omega \rightarrow \mathcal{P}$
 270 è una variabile aleatoria da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popo-
 271 lazioni \mathcal{P} e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geq 0$. Tale variabile
 272 aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti media-
 273 te dalle connessioni descritte da \mathcal{E} , definendo così un processo stocastico
 274 $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

275 Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'
 276 agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{I}$ e
 277 continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (6)$$

278 ove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la
 279 delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t): \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

280 è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

281 Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{I},$$

282 che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

283 **3.2.2 Algoritmi d'interazione**

284 Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti intera-
 285 giscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel det-
 286 taglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in$
 287 $\mathcal{J} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un interazione con
 288 un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \quad (7)$$

289 ove $\Theta \in [0, 1]$ è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'in-
 290 terazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ($\Theta = 1$) o no ($\Theta = 0$);
 291 d'altro canto $S'_t \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, V_t) in
 292 seguito a un'interazione avvenuta.

293 Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (8)$$

294 il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzio-
 295 nale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione
 296 $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle
 297 connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

298 dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^* ;
 299 per coerenza è necessario impostare $\Delta t \leq 1$ che impone un limite superiore
 300 al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto
 301 facile da verificare nella pratica.

302 La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria $S'_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ dipen-
 303 dente in generale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (9)$$

304 in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

305 **3.2.3 Interazioni azione-reazione**

306 Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con
 307 un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

308 Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si
 309 può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$
 310 mentre quella *in indietro* sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile
 311 in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto
 312 l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga
 313 a quella dell'agente (X, S_t) :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \quad (10)$$

314 ove si osserva che la Θ è la stessa della (7) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$
 315 ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso

316 in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di
 317 simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

318 è definita mediante una funzione $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da
 319 Ψ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [12, § 2.2.1] sarà
 320 identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[AR] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

321 Si conclude questa sezione osservando che gli agenti (X, S_t) , (X^*, S_t^*) sono
 322 campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

3.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

3.3.1 Derivazione esatta

325 Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'e-
 326 voluzione per le distribuzioni di probabilità f_i delle opinioni degli agenti;
 327 per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi
 328 multiagente [12, 13].

329 Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una
 330 quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico
 331 agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR],
 332 valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agli indici
 333 e alla popolazione a tempo fissato, si ha {§}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

334 da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t}) - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

335 laddove, prendendo il limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (11)$$

336 Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma
 337 colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (12)$$

338 Osservando che le coppie (X, S_t) e (X^*, S_t^*) fanno riferimento a un agente
 339 rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

340 cosicché, sommando (11, 12), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E} [A(X, X^*) (\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) \\ - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

341 ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f dv dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (13)$$

342 ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distri-
343 buzione (6):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*) \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

344 si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (14)$$

345 mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle
346 funzioni Ψ e Ψ_* .

347 Si noti che la (13) è valida per ogni funzione *test* Φ per cui è un'equazione
348 debole per la distribuzione f . (commento su Fokker-Planck (§))

349 Si osservi anche che la (13) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del
350 caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati in-
351 dipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella
352 teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distri-
353 buzione f di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione
354 di probabilità congiunta $g(x, x_*, s, s_*, t)$ degli agenti interagenti nel prodotto
355 $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$.

356 Dalla (13) con una scelta adeguata della funzione *test* Ψ , è possibile recu-
357 perare un sistema di equazioni deboli per le f_i . Sia $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$, dove
358 $\phi_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$ e $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$
359 è arbitrario. Allora usando la (6) dentro la (13) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (15)$$

360 ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

361 Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propaga-
362 zione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimen-
363 to (§)). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo
364 la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:
365

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (16)$$

366 ove \odot indica il prodotto di Hadamard e \mathbf{M}^\top al trasposta di \mathbf{M} . Si noti che
367 \mathbf{M} altro non è che la matrice d'adiacenza di \mathcal{G} .

368 **3.3.2 Interazioni tra città**

369 Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

370 Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-
371 reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra,
372 scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto
373 che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

374 Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile
375 l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,
376 ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò
377 implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

378 Gli stati postinterazione (14) prendono come riferimento leggi d'interazio-
379 ni lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS^*_t, \\ S^{*'}_t = p_*S_t + q_*S^*_t, \end{cases} \quad (17)$$

380 le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (18)$$

381 ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$
382 sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rap-
383 presenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni
384 lineari (17) le (18) soddisfano

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & \text{e} & \quad p_*(s, s_*) \equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & \text{e} & \quad q_*(s, s_*) \equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (19)$$

385 rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio
386 deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \end{aligned} \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \quad (20)$$

387 ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relati-
388 vi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da
389 come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo ma-
390 nuscrutto si è modificata la [8, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [8, (4.5), § 4, p.
391 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (21)$$

392 che in essenza è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di
393 emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rappor-
394 to s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il
395 seguente significato:

- 396 $\diamond \lambda \in (0, 1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le
397 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 398 $\diamond \alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapida-
399 mente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (21) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i piú svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (19) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (21).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è piú agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (18), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (22)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (22) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (18), situazione che si vuole evitare³ dato che nella (21) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiú, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F₁ possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (22);
- F₂ la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F₃ seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che piú grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F₁ poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F₂ né F₃, mentre F₁ si;
- ◊ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia F₂ (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F₃, ma sfortunatamente non F₁ poiché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◊ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (23)$$

ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (24)$$

³ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

437 Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la F₃, e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (25)$$

438 con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da
439 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (26)$$

440 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la F₂ semplicemente tra-
441 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzio-
442 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

443 D'altra parte la F₁ necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
444 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
445 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
446 di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

447 ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (27)$$

448 siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0, 1)$. La (27) implica quindi che non
449 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la F₁, ma che
450 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ più
451 piccola è la varianza, e viceversa.

452 3.3.3 Derivazione approssimata

453 3.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

454 È d'interesse esplorare il legame presente tra la (15) coll'equazione classica
455 di Boltzmann {S}.

456 3.4.1 Ipotesi semplificative

457 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-
458 care alla (15):

459 IS1 Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi
460 che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

461 IS2 Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (28)$$

462 IS3 S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (29)$$

463 3.4.2 Analisi della IS1

464 Con tal'ipotesi la (15) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

465 e valutando la distribuzione marginale della (6) rispetto agl'indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (30)$$

466 che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

467 mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (31)$$

468 la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann [\(§\)](#). Ciò
469 significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano di-
470 stinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la
471 distribuzione media (30).

472 Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1, illu-
473 strato nel paragrafo a venire, ove una matrice d'adiacenza unitaria porta
474 ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica
475 distribuzione che può calcolare 1 è proprio quella media F.

476 3.4.3 Analisi della IS2

477 La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti
478 siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme
479 alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente.
480 Pertanto la (15) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

481 che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

482 e definendo $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (32)$$

483 In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente si-
 484 mile è la rete a una completamente connessa⁴; d'altra parte l'equazione è
 485 analoga a quella classica di Boltzmann {§}.

486 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla
 487 (15), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2
 488 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scom-
 489 parsia per la IS1.

490 3.4.4 Analisi della IS1, IS2 e IS3

491 Visto che vale IS1 si può partire dalla (31) nella quale la distribuzione media
 492 (30) diventa per IS2

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

493 ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti⁵, essendo questi, appunto,
 494 indistinguibili.

495 In tal modo la (31) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

496 che unita all'IS3 porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
 497 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

498 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

499 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche
 500 {§} usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
 501 tra una popolazione di particelle di un gas.

⁴ Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

⁵ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix M ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

1: $\tilde{V} \leftarrow V_0$
2: $t \leftarrow 1$
3: **for** $t < T$ **do**
4: $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
5: $V \leftarrow \tilde{V}$
6: $P \leftarrow$ random permutation of $\{1, \dots, N\}$
7: $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
8: $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
9: $i \leftarrow 1$
10: **for** $i < N/2$ **do**
11: $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i))\Delta t)$
12: $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
13: $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
14: $i \leftarrow i + 1$
15: **end for**
16: $t \leftarrow t + \Delta t$
17: **end for**

502 4 | SIMULAZIONI

503 4.1 METODO MONTE CARLO

504

5 | CONCLUSIONI

505 Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-
506 Planck per la distribuzione stazionaria.

507 Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della
508 rete statica.

509 Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

510 APPENDICE

511 A CODICE

512

ELENCO DELLE FIGURE

513	Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	6
514	Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.	9
516	Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.	12
518	Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	14
519			
520			

521

ELENCO DELLE TABELLE

522

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
linee barrate corrispondono a dati trascurati. 11

523

524

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 13

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berlant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Eeckhout, Jan. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [7] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [9] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [10] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
- [11] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [12] Nuriacco, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- [13] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- [14] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.