

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della
popolazione tra città su reti spaziali mediante la
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



Relatori
prof. Andrea Tosin

firma del relatore

.....

Candidato
Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

SOMMARIO

La corrente tesi studia la distribuzione della popolazione mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente su reti spaziali, interpretando le città come agenti/vertici e rappresentando le connessioni interurbane come lati. Sono state proposte varie regole d'emigrazione per regolare le interazioni tra agenti, i cui risultati sono principalmente due: l'adattamento lognormale bimodale della distribuzione della popazione tra le città e l'adattamento di Pareto della coda. Nel complesso il modello restituisce dei risultati coerenti colla distribuzione reale dedotta dai dati ISTAT della Sardegna; perdipiù l'adattamento lognormale bimodale segue meglio la coda della distribuzione rispetto a quello di Pareto, sebbene nella prima metà coincidano.

ABSTRACT

The current thesis investigates population distribution through the kinetic theory of multi-agent systems on spatial networks, interpreting cities as agents/vertices and representing interurban links as edges. Various emigration rules have been proposed to regulate the interactions between agents, yielding two primary results: the bimodal log-normal fit of the total population distribution among cities and the Pareto fit of the distribution tail. Overall, the model provides results consistent with the actual distribution derived from ISTAT data of Sardinia; furthermore, the bimodal log-normal fit follows the distribution tail more accurately than the Pareto one, although the two coincide in the first half.

INDICE

1 INTRODUZIONE	1
2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	5
2.1 Definizioni miscellanee	5
2.2 Reti e città	6
2.3 Cenni sui dati	7
3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	13
3.1 Definizioni preliminari di probabilità	13
3.2 Descrizione cinetica di [tipo] Boltzmann	16
3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea	16
3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea	21
3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea	22
3.3 Descrizione cinetica urbana su reti	27
3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta	27
3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata	33
3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile	38
4 SIMULAZIONI	41
4.1 Metodo Monte Carlo	41
4.2 Rappresentazione dei risultati	42
4.2.1 Intervalli di confidenza	42
4.2.2 Struttura dei dati	43
4.2.3 Definizione dei grafici	45
4.2.4 Sulle fluttuazioni γ	49
4.3 Regole d'emigrazione	49
4.3.1 Regola taglia	49
4.3.2 Regola taglia-gradi	51
4.3.3 Regola frazionata	51
4.3.4 Regola taglia-forza	51
4.3.5 Interpretazioni	51
4.4 Altri casi notevoli	51
4.4.1 Varianti delle regole d'interazione	51
4.4.2 Il caso dell'Italia	51
4.4.3 Il caso della Valle d'Aosta	51
5 CONCLUSIONI	53
APPENDICE	55
A Codice	55
ELENCO DELLE FIGURE	57
ELENCO DELLE TABELLE	59
ELENCO DEI LISTATI	61
BIBLIOGRAFIA	63

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [19] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1.1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1.1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se in luogo di f si scrive la popolazione s [19, Fig. 9-2, p. 375]; tuttavia ciò è vero solo qualora $s \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1.1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia S la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_S(s)$ la sua funzione di densità di probabilità², la quale permette d'interpretare $f_S(s)ds$ come il numero di città con $s \in (s, s+dt)$; allora si dice che S segue una distribuzione di Pareto nella coda se soddisfa

$$R(s) \equiv \int_s^{+\infty} f_S(t)dt \approx \frac{c}{s^\beta} \quad \text{se } s \gg 1, \quad (1.2)$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}_+$ e con $R(s)$ uguale alla funzione di ripartizione complementare di S : essa rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a s e, qualora l'indice di Pareto β fosse unitario, è analoga al rango r nella (1.1).

Più recentemente [8, 9] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_S(s)$ è ben fittata dalla distribuzione lognormale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3)$$

ove $X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$; come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹In realtà, come Zipf stesso ammette [19, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

²Affinché $f_S(s)$ esista bisogna rigorosamente anche supporre che S sia assolutamente continua, ma qui non è necessario entrare nei dettagli per i quali si rimanda ai §§ 3.1 e 3.3.

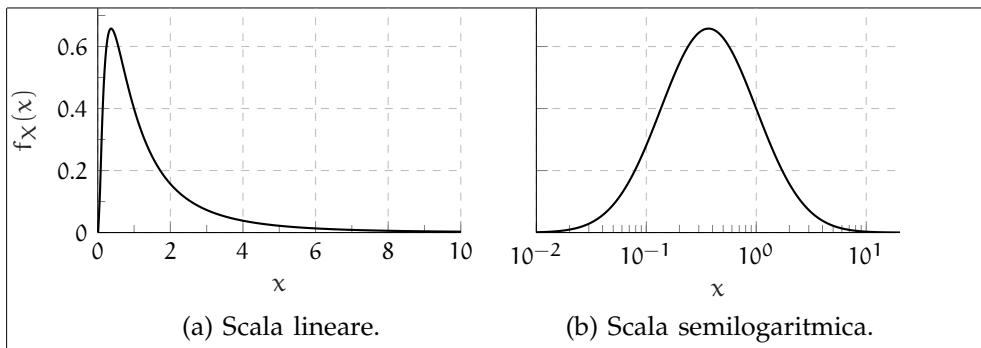


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [9, 10] ci si è poi resi conto che l’intera distribuzione è ben fittata da una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (1.3)

$$f_S(s) \approx f_X = \xi f_{S_1}(s) + (1 - \xi) f_{S_2}(s), \quad (1.4)$$

ove $\xi \in (0,1)$, $S_1, S_2 \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$ e $X \sim \text{BiLognormale}(\xi, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$.

Pertanto l’obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (**TCSMA**) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d’interazione riguardo al fenomeno dell’emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell’autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- o applicano la **TCSMA** alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [10]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la **TCSMA** [4];
- altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [15];
- infine, l’articolo che piú si avvicina all’obbiettivo di questa tesi applica, tuttavia, la sua teoria nel contesto delle reti sociali [17].

Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della teoria dei grafi applicata alla **TCSMA** sono stati piuttosto recenti e prin-

³ In particolare [10], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s’intende per *dintorni*.

60 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
61 Dunque l'aspetto piú innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
62 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella piú comune e re-
63 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
64 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

65 Lo scritto sarà cosí suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
66 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
67 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la **TCSMA** è ap-
68 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
69 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
70 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
71 futuri.

72 Per il lettore interessato è anche presente un'appendice ove il codice di
73 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dalla Fig. 2.1.

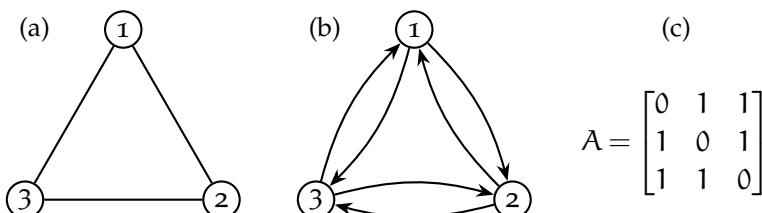


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza). Sia $N \equiv |\mathcal{I}| \in \mathbb{N}_+$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero di vertici totali, si definisce la matrice d'adiacenza $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ pesata come:

$$m_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ove $q_{i,j} \in \mathbb{R}$ è il peso associato al lato (i,j) ; nel caso in cui $q_{i,j} \equiv 1 \forall i,j \in \mathcal{I}$ si ha la matrice d'adiacenza unitaria $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si osserva che, se non altrimenti detto, scrivendo solo «matrice d'adiacenza» si sottintende sempre quella unitaria.

Definizione 2.4 (Matrice trasposta). Data $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N \in \mathbb{N}_+$, allora s'indica \mathbf{M}^\top la matrice trasposta così definita:

$$m_{i,j}^\top = m_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Definizione 2.5 (Matrice simmetrica). Data $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N \in \mathbb{N}_+$, allora

$$\mathbf{M} \text{ è simmetrica} \iff m_{i,j} = m_{j,i} = m_{i,j}^\top \iff \mathbf{M} = \mathbf{M}^\top. \quad (2.3)$$

Osservazione 2.1. Nei grafi indiretti sia \mathbf{M} che \mathbf{A} sono simmetriche mentre per quelli diretti non è detto lo siano.

Definizione 2.6 (Gradi e Forze). In un grafo diretto e pesato si definiscono la forza entrante e uscente come rispettivamente le quantità

$$w_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|J|} m_{j,i} \quad \text{e} \quad w_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|J|} m_{i,j}, \quad \forall i \in J, \quad (2.4)$$

le quali se il grafo è simmetrico queste coincidono: $\mathbf{w} = \mathbf{w}^- = \mathbf{w}^+$. Nel caso unitario $\mathbf{M} \equiv \mathbf{A}$ si è soliti denominare le forze come gradi uscenti ed entranti:

$$k_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j}, \quad \forall i \in J, \quad (2.5)$$

che, come prima, in una rete simmetrica coincidono: $\mathbf{k} = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}^+$.

2.2 RETI E CITTÀ

Dopo aver illustrato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il problema di come rappresentare con essi la moltitudine di collegamenti possibili tra le città

Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati e le loro intersezioni come nodi [3, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la rete di trasporto di tram, di bus e della metro [3, § 3.2.1 p. 22]; altri si pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [3, § 3.1.3.2 p. 17], navale [3, § 3.1.4 p. 19], aereo [3, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

Tuttavia, da quanto detto nella Cap. 1, è chiaro che per predire la distribuzione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

1. ogni rappresentazione intraurbana va scartata perché sono troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ciascun individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [3, § 3.1.3.3 p. 18; 6] tra città che mostrano olisticamente tutti i possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre

126 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché
127 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

128 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di
129 grafo con cui si ha a che fare. Eppure qui la risposta è immediata dopo due
130 osservazioni:

- 131 1. una città può interagire con un'altra senza che quest'ultima interagi-
132 sca colla prima: è necessario considerare il senso di direzione;
- 133 2. ammesso che una città possa interagire con un'altra, allora è sempre
134 possibile l'opposta: le potenziali interazioni sono simmetriche.

135 Dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta (Def. 2.2),
136 ovvero la sua matrice d'adiacenza A è simmetrica.

137 **Ipotesi 2.1.** Il grafo G è diretto e simmetrico (A è simmetrica).

138 Inoltre in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

139 **Ipotesi 2.2.** Il grafo G è statico: \mathcal{J} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

140 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
141 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
142 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connes-
143 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
144 stesse.

145 Infine si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [3, 6], ovvero i suoi
146 nodi occupano un punto nello spazio euclideo, seppure, al momento, sia una
147 caratteristica alquanto formale; tuttavia servirà tenerlo a mente quando si
148 definiranno alcune regole d'interazione nel Cap. 4. Perdipiù, contrariamente
149 a quanto si possa pensare di primo acchito, tale grafo non è a invarianza di
150 scala [2] a causa del tipo di grafo [3, 5]; ciò non esclude l'esistenza di nodi
151 più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato
152 superiormente proprio dalla natura spaziale del grafo.

153 2.3 CENNI SUI DATI

154 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1991
155 [14] seguendo l'esempio di [6]. I dati sono di fatto un file di testo formato da
156 una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

157 I comuni considerati sono tutti quelli italiani (8100) nel 1991, quindi è ne-
158 cessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni
159 e parallelamente quella complessiva dell'Italia. Si possono definire due tipi
160 di matrici:

- 161 1. quella d'adiacenza unitaria in cui un lato esiste se almeno un pendo-
162 lare (cioè il «[n]umero di persone» nella Tab. 2.1) si muove tra i due
163 comuni e
- 164 2. quella d'adiacenza pesata che è analoga alla precedente ma con peso
165 $q_{i,j}$ uguale alla somma totale dei pendolari tra due comuni.

¹ si v. il documento trapen91.txt per maggiori informazioni.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond. professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

166 Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento
 167 Pen_91It.txt:

- 168 1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice
 169 «022008» che però non è elencato nel documento elencom91.xls che
 170 riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
 171 2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici
 172 incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non
 173 la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229»,
 174 «241», «216», «203», «224», «236», «246».

175 In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi]
 176 sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto
 177 raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può
 178 notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

179 00200714212215_____1,

180 ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in tota-
 181 le 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del
 182 Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in
 183 realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», ep-
 184 pure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di
 185 partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizza-
 186 re che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo;
 187 è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il
 188 codice del comune di destinazione.

189 **Osservazione 2.2.** A dire il vero si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni colo
 190 stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia
 191 euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune
 192 sono disponibili nell'ISTAT [13]. In ogni caso il numero così esiguo d'eccezio-
 193 ni rendono una tale "correzione" del tutto innecessaria, oltre che irrilevante
 194 come il Cap. 4 mostrerà.

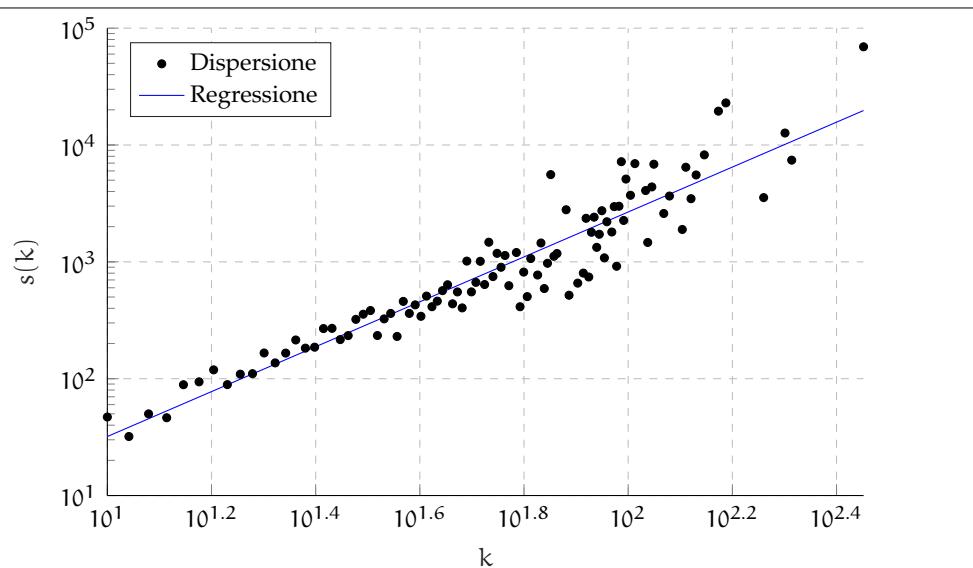


Figura 2.2: Forza contro grado per la Sardegna.

195 Infine nelle Figg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [6] colle
196 seguenti osservazioni:

- 197 1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio
198 di quello riportato da [6, p. 911] (0.26);
199 2. la Fig. 2.3c rispetto alla [6, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-
200 mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che
201 limiti superiori e inferiori più estesi;
202 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g
203 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-
204 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come
205 afferma [6];
206 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-
207 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte
208 di [6] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-
209 no molto distanti geograficamente², per cui è ragionevole che i flussi
210 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu SE	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

(b) Pesi maggiori di [6]

Tabella 2.2: Confronto con [6] dei pesi maggiori.

² Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

211 Queste discrepanze sono perché sono lievi e, per quanto concerne questo
212 elaborato, irrilevanti. Inoltre, l'unico risultato di rilievo è la correlazione
213 positiva tra la forza e il grado nella Fig. 2.2.

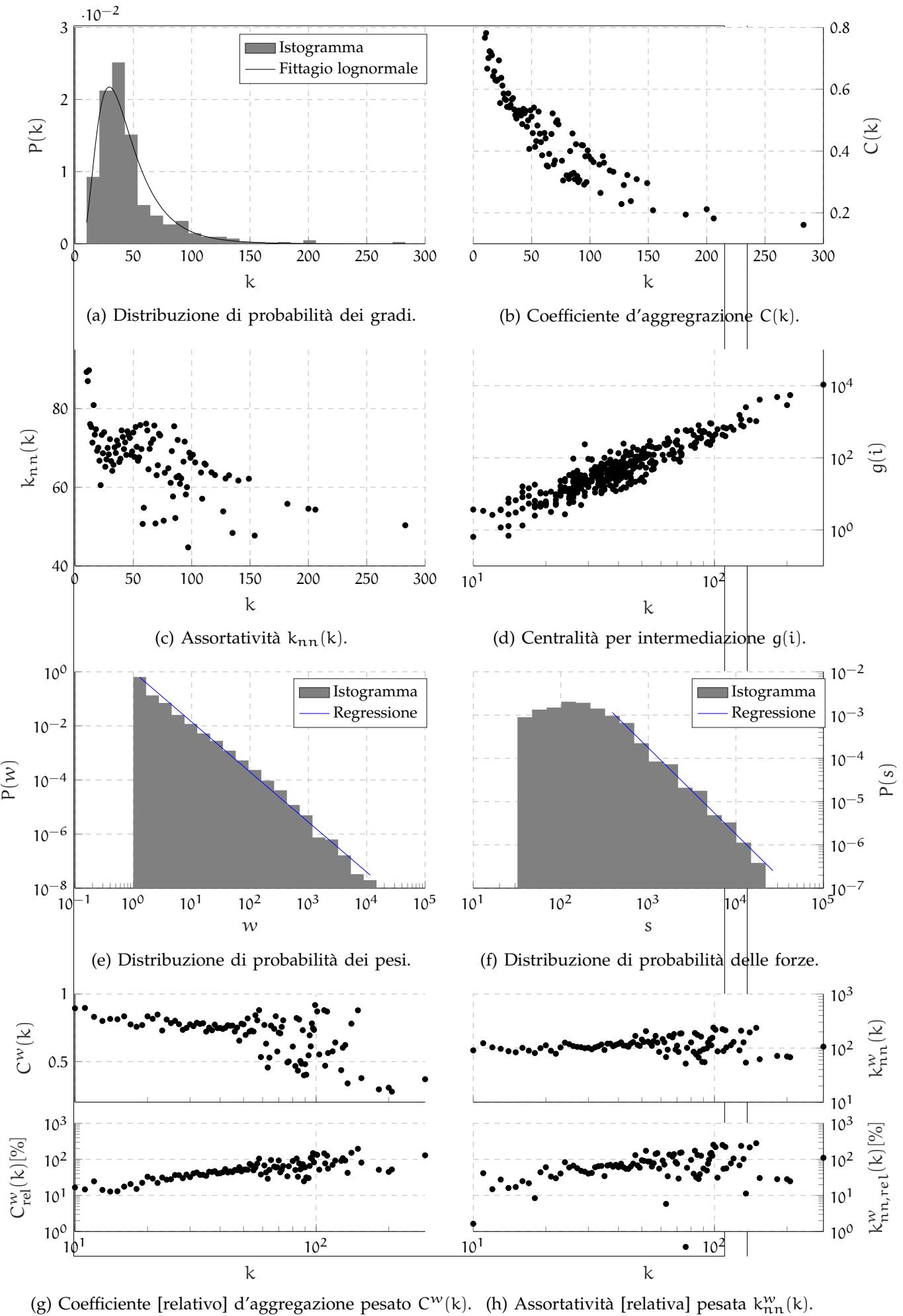


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [6] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la [TCSMA](#) necessaria per ottenere e discutere i risultati nel Cap. 4. S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità dalle quali si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvisando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [7] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Semiretta intera/reale positiva). In tutto questo elaborato si fanno uso dei seguenti sottinsiemi dei numeri reali e naturali:

$$\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \\ \mathbb{N}_+ \equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.$$

Definizione 3.2 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Siccome Ω è uno spazio astratto poco trattabile, in questo scritto si definisce una variabile aleatoria semplicemente evidenziando l'appartenenza al suo codominio e sottintendendo il suo dominio: $X \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.3 (Densità di probabilità di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua, allora la densità di probabilità $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge \mathbb{P}_X di X :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la variabile aleatoria X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x)dx$ va inteso come $f_X(dv)$.

Definizione 3.4 (Densità congiunta di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità congiunta di probabilità $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ di \mathbf{X} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}\end{aligned}$$

Definizione 3.5 (Densità marginale di probabilità di X_i). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità marginale di probabilità $f_{X_i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile così definita:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3.1)$$

essa è a tutti gli effetti la densità di probabilità della variabile aleatoria X_i secondo la Def. 3.3.

Osservazione 3.2. Per brevità, da qui in avanti s'indicheranno le precedenti densità sottintendendo che siano relative alla probabilità: $f_{\mathbf{X}}$ è dunque la densità di \mathbf{X} , f_X la densità congiunta di \mathbf{X} e f_{X_i} la densità marginale di X_i .

Inoltre, qualora il contesto non dia ambiguità, si sottintendono le variabili o i vettori aleatori cui fanno riferimento le relative densità: dunque f è la densità di \mathbf{X} , X e X_i , a seconda del caso; in alternativa si possono usare anche forme più leggere, come f_i per f_{X_i} , se necessario.

Proprietà 3.1 (Densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la densità congiunta di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

Definizione 3.6 (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua e data una funzione misurabile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora il valore atteso di $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Definizione 3.7 (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua a media finita $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra, allora l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una variabile aleatoria Y tale che

274 AC₁ $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

275 AC₂ per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

276 L'insieme delle Y che soddisfanno le AC₁ e AC₂ sono indicate col simbolo
277 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può
278 indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

279 Un'analogia definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti
280 con X scalare e Y vettoriale.

281 **Osservazione 3.3.** Presa una variabile aleatoria $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente defi-
282 nizione \mathcal{G} può essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

283 ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borel relativa allo spazio dei numeri reali mentre
284 $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathbb{R}_+(\Omega)$.

285 Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

286 **Proposizione 3.1.** *Dati*

287 1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;

288 2. un vettore aleatorio $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da
289 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^h$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^k$ con densità congiunta $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e marginali $f_{\mathbf{X}}$ e $f_{\mathbf{Y}}$;

290 3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{Z})] = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] < \infty;$$

291 allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \quad (3.2)$$

292 che soddisfa $h(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y}]$.

293 *Dimostrazione.* Per la AC₁ è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(\mathbf{Y}))$:

$$\sigma(h(\mathbf{Y})) \equiv \sigma(Y^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

294 a parole si considera la controimmagine tramite \mathbf{Y} dei borelliani filtrati da
295 h , ragion per cui la σ -algebra non potrà che essere contenuta in quella non
296 filtrata.

297 Per la AC₂ si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(\mathbf{Y})$ avvalendosi della caratteriz-
298 zazione di $h(\mathbf{Y})$ tramite (3.2):

$$\begin{aligned} \int_A h(\mathbf{Y}) d\mathbb{P} &= \int_B h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \stackrel{(3.1)}{=} \int_B h(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^h} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \stackrel{(3.2)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \chi_B(\mathbf{Y}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \chi_C(\mathbf{Z}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \chi_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

ove χ_A , χ_B e χ_C sono funzioni indicatrici dei rispettivi insiemi, e in piú vale
 $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

□

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione piú pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (3.2), allora $h(y)$ si può cosí riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y=y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y)/f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la densità di X condizionata dall'evento $Y=y$.

La (3.3), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(X, Y)$ rispetto a X dopo aver "fissato" l'evento $Y=y$, vale a dire considerando la Y come fosse un parametro uguale alla realizzazione y .

Successivamente, se s'impone $A=\Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]], \quad (3.4)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(X, Y)$ si calcola mediando rispetto a Y la variabile aleatoria $\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$, ricavata dalla (3.3) ma considerando y arbitrario.

Definizione 3.8 (Processo stocastico). Data una dimensione $n \in \mathbb{N}_+$, un processo stocastico è un insieme di vettori aleatori X_t parametrizzati da un indice $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\{X_t \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} = \{X_t\}_{t \in I},$$

la cui densità congiunta è

$$\mathbb{P}_{X_t}(A) = \mathbb{P}(X_t \in A) = \int_A f_{X_t}(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}$$

Comunemente s'interpreta l'indice t come il tempo ponendo $I \equiv \mathbb{R}_+$, e cosí sarà fatto in questo scritto.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA DI [TIPO] BOLTZMANN

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Descrizione classica

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modelizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

- 327 G₁ è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la
 328 distribuzione statistica delle velocità è la stessa;
 329 G₂ è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver
 330 luogo o, precisamente, sono più frequenti;
 331 G₃ è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;
 332 G₄ le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso
 333 e dell'energia esprimibile, grazie alle G₂ e G₃, binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (\text{CI})$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (\text{CE})$$

334 ove $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle
 335 velocità precollisionali $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti.¹

336 Dalla G₄ si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire
 337 da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le regole d'interazione.

338 **Proposizione 3.2** (Regole d'interazione). *Esistono due funzioni*

$$\psi, \psi_* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

339 *lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

340 *ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .*

341 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

342 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
 343 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] = 0, \end{aligned}$$

344 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

345 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (3.6) diventa allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (3.7)$$

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

348 Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $n \in S^2$, seppure
 349 da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante
 350 per i centri delle particelle collidenti.

351 Si osservi come le regole d'interazione nella 3.5 sono bilineari e simmetri-
 352 che secondo la seguente definizione:

353 **Definizione 3.9.** Se le regole d'interazione del tipo (3.5) verificano

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}' &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}'_* &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v})\end{aligned}$$

354 allora si dicono simmetriche.

355 *Descrizione statistica*

356 Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame:
 357 siano allora $\{\mathbf{V}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ i processi stocastici delle velocità precollisio-
 358 nali, dove $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ sono variabili aleatorie di cui le velocità precedenti, \mathbf{v}
 359 e \mathbf{v}_* , sono due realizzazioni al tempo t ; un simile discorso vale per i processi
 360 stocastici delle velocità poscollisionali $\{\mathbf{V}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}'_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

361 **Osservazione 3.5.** Le variabili aleatorie \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es.
 362 \mathbf{V}_t^i) proprio per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, da cui si
 363 deduce anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

364 Le regole d'interazione nella (3.5) diventano

$$[RI]_V \begin{cases} \mathbf{V}' = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* = \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{cases}$$

365 in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim$
 366 $\mathcal{U}(S^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste
 367 uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

368 Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto
 369 formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad [\text{Ber}]_V$$

370 che è una variabile aleatoria di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui
 371 probabilità è descritta da due termini:

- 372 1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'a-
 373 vere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali
 374 possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
- 375 2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

376 **Osservazione 3.6.** Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$
 377 condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo;
 378 si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale
 379 condizione sarà sempre verificata.

2 Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

380 Colle [RI] \mathbf{v} e [Ber] \mathbf{v} , lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è
 381 dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[AR]_{\mathbf{v}} \begin{cases} \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t, \end{cases}$$

382 che di fatto è una regola che descrive se gli agenti interagiscono a coppie
 383 (modellizzato dalla Θ) e, nel caso, come interagiscono (modellizzato dalle
 384 \mathbf{V}'_t e \mathbf{V}''_t) modificando il loro stato al tempo successivo.

385 ***Derivazione modello***

386 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di me-
 387 diare le [AR] \mathbf{v} attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità
 388 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ o di $\mathbf{V}'_{t+\Delta t}$; pertanto
 389 una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle [AR] \mathbf{v} ,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t), \end{aligned}$$

390 e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t)]; \end{aligned}$$

391 per espandere la media, siccome Θ dipende da $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n})$, bisogna avvalersi
 392 dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t) | \mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n}]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})]\Delta t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

393 e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

394 e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

395 che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \end{aligned} \tag{3.9}$$

³ Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel'3.6 per qualunque valore di $B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})$.

396 in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot d\Omega$$

397 indica la media rispetto a Ω , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega)$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega)$.
 398 e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui densità congiunta è $f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine
 399 necessario sommare le due equazioni in (3.9). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.10)$$

400 infatti dal'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il domi-
 401 nio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo
 402 integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono
 403 necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

404 **Ipotesi 3.2.** Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \Omega) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (3.11)$$

405 una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega|$.

406 **Ipotesi 3.3** (Caos molecolare). Le particelle interagenti secondo le [AR] V so-
 407 no campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare
 408 matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni
 409 caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due par-
 410 ticelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole
 411 dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

412 **Osservazione 3.7.** Dal'Ip. 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la
 413 densità congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{V_t}(\mathbf{v}, t) f_{V_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

414 In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(\mathbf{v}_*)$ nel secondo membro della
 415 seconda equazione della (3.9) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.12)$$

416 seguendo la medesima logica della (3.10). Applicando i due risultati illu-
 417 strati nelle (3.10), (3.12) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann
 418 omogenea asimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \left(\frac{\varphi' + \varphi_*'}{2} - \varphi \right) f f_* d\Omega d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.13)$$

419 ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le
 420 funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi *
 421 (per una spiegazione più dettagliata si legga poco dopo nel § 3.2.3).

422 Tuttavia, qualora le regole d'interazione siano simmetriche secondo la
 423 Def. 3.9, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di
 424 variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

425 da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma de-
426bole⁴:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* dnd\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad [\text{EtB}]_V$$

427 Si può anche ricavare la forma forte della [\[EtB\]_V](#) considerando le regole d'in-
428terazione inverse della [\[RI\]_V](#) [\[16, § 2.5, p. 15\]](#), ma il conto esula dagli scopi di
429 questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per il paragrafo
430 a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*. \quad (3.14)$$

431 3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

432 L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la [\(3.14\)](#), bensì
433 è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine
434 avvettivo $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*, \quad (3.15)$$

435 dove l'operatore $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ è il gradiente spaziale e la distribuzione
436 dipende ora anche dallo spazio: $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Essa è un'equazione integro-
437 differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a
438 tempo dato.

439 Il primo membro della [\(3.15\)](#) non è altro che la derivata materiale del-
440 la distribuzione f : posto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$, ovvero in mancanza di collisioni,
441 l'equazione involve in una del trasporto lineare con soluzione nota.

442 **Proposizione 3.3.** *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.16)$$

443 ha come soluzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$ in cui $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ è la distribuzione
444 iniziale.

445 *Dimostrazione.* Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella [\(3.16\)](#)
446 la velocità \mathbf{v} nell'operatore avvettivo non dipende né dallo spazio né dal
447 tempo, quindi si possono prendere le curve $\mathbf{x}(t)$ tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (3.17)$$

448 dette, appunto, curve caratteristiche della [\(3.16\)](#); valutando allora la distri-
449 buzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lungo di esse si può definire $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$ che derivata
450 equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

⁴ Si dice debole siccome essa vale per una funzione test φ arbitraria.

da cui si deduce che f è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (3.17) si può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, dunque la soluzione in un generico punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo t passa per \mathbf{x} . \square

Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale f_0 semplicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la direzione della velocità costante \mathbf{v} , movimento che rappresenta la variazione medi statistica delle posizioni molecolari.

D'altra parte il secondo membro della (3.15) rappresenta la variazione media statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò anche chiamato operatore collisionale).

Pertanto la (3.15) descrive una chiara separazione di effetti: il primo membro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

L'obbiettivo di Boltzmann tramite la (3.15) era di raccordare due mondi: il mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione f soddisfacente la (3.15); i principali sono

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tali quantità sono definite da f seppure questa sia in genere infattibile da ricavare dalla (3.15), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; ep pure, tramite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite [16, 18], è possibile svicolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della f ricavando un sistema chiuso dei soli momenti (3.18). La convergenza di questi a un valore stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione mesoscopica indotta dalla distribuzione f .

3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria è stata sviluppata da Pareschi *et al.* [18]; sono chiamati così per due ragioni:

- 485 1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analoghe strutturalmente alla [EtB]_v e
 486 2. sono applicati a contesti⁵ molto distanti da quello originale delle velocità di particelle di un gas.

489 Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già visti nel § 3.2.1 senza però riscrivere tutti i passaggi.

491 **Descrizione e derivazione**

492 Sia $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico relativo allo stato microscopico dell'agente di un sistema, dove $X_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ è il vettore aleatorio⁶ che descrive i suoi stati microscopici al tempo t ; allora le Ipp. 3.1 e 3.3 si possono così riformulare:

496 **Ipotesi 3.4.** Gli agenti sono caratterizzati dalle seguenti ipotesi:

- 497 B₁ la distribuzione statistica dei microstati è uniforme nello spazio, e quindi non dipende da esso;
 498 B₂ gli agenti interagiscono solo binariamente, ovvero le interazioni a coppia sono le più frequenti;
 499 B₃ gli agenti sono indistinguibili cosicché ognuno è rappresentativo del loro insieme;
 500 B₄ due agenti interagenti sono statisticamente indipendenti.

504 D'altra parte gli stati poscollisionali (postati), X'_t e $X^{*'}_t$, si legano con quelli precollisionali (prestati), X_t e X^*_t , tramite

$$[RI]_X \begin{cases} X'_t = \psi(X_t, X^*_t, y), \\ X^{*'}_t = \psi_*(X_t, X^*_t, y_*), \end{cases}$$

506 ove ora

$$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{h_*} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

507 sono generiche regole d'interazione, non necessariamente lineari o simmetriche (Def. 3.11), mentre $y \in \mathbb{R}^h$ e $y_* \in \mathbb{R}^{h_*}$, con $h, h_* \in \mathbb{N}$, rappresentano dei coefficienti potenzialmente stocastici.

510 L'interazione tra di essi avviene secondo una variabile aleatoria di Bernoulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(X_t, X^*_t, w, t) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_X$$

512 con tasso/nucleo d'interazione

$$\mu(X_t, X^*_t, w, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad [\text{NI}]_X$$

513 per controllare quant'è "probabile" che i due agenti interagiscano, e coefficienti $w \in \mathbb{R}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, potenzialmente stocastici.

5 Esempi importanti sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico, come quello qui considerato delle città

6 Si noti che il dominio I degli stati non coincide necessariamente col'intero spazio reale \mathbb{R}^n .

515 **Osservazione 3.8.** Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modelli-
 516 stico si può semplicemente porre unitario:

$$\mu \equiv 1, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$$

517 sottintendendo in tal modo un'uniforme "probabilità" d'interazione.

518 Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'intera-
 519 zione

$$[\text{AR}]_{\mathbf{x}} \begin{cases} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}_t + \Theta\mathbf{X}'_t, \\ \mathbf{X}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}'_t + \Theta\mathbf{X}_t, \end{cases}$$

520 dove $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

521 **Osservazione 3.9.** l'acronimo $[\text{AR}]_{\mathbf{x}}$ sta per «Azione-Reazione» poiché si
 522 suppone che ogn'interazione (azione), ossia $\Theta = 1$, necessariamente modi-
 523 fica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [17]
 524 questa regola può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia
 525 modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

526 Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1
 527 colla quantità osservabile $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si perviene all'equazione di tipo Bol-
 528 tzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad [\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$$

529 nella quale $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media rispetto a tutt'i coefficienti potenzial-
 530 mente stocastici (\mathbf{y} , \mathbf{y}_* e \mathbf{w}), mentre il termine $-\varphi - \varphi_*$ discende dal fatto
 531 che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione μ sia pari.

532 **Osservazione 3.10** ($[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ simmetrica). Qualora $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ sia pari (Def. 3.10) e
 533 le regole d'interazione $[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ siano simmetriche (Def. 3.11), la $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ si può
 534 riformulare come

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) (\varphi' - \varphi) \rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (3.19)$$

535 mediante un cambio di variabili atto a invertire \mathbf{x} e \mathbf{x}_* solo per la differenza
 536 $\varphi'_* - \varphi_*$.

537 **Definizione 3.10** ($[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ pari). Se il tasso d'interazione in $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ verifica

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{w}, t) = \mu(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k,$$

538 allora μ si dice pari.

539 **Definizione 3.11** ($[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ simmetriche). Se le regole d'interazione del tipo $[\text{RI}]_{\mathbf{v}}$
 540 verificano

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \psi_*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}) & \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^h, \\ \psi_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}_*) &= \psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}_*) \end{aligned}$$

541 allora si dicono simmetriche. In altre parole, la simmetria implica

$$\mathbf{X}'_t = \psi_*(\mathbf{X}'_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}'^*_t = \psi(\mathbf{X}'_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}_*).$$

542 **Notazione**

543 Nei previ paragrafi si è fatto spesso uso, specie per le varie equazioni [di
 544 tipo] Boltzmann (3.13–3.15), [EtB]_v e [EtB]_x, di una notazione abbreviata per
 545 tutti gli oggetti salvo il tasso d’interazione μ . In questo breve paragrafo si de-
 546 finiscono in maniera più esplicita queste abbreviazioni facendo riferimento
 547 al contesto generale sviluppato poco fa.

548 Innanzitutto la densità congiunta f da sola sottintende la variabile dell’agente
 549 interagente x mentre con un pedice f_* quella dell’agente ricevente
 550 x_* :

$$f \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_* \equiv f(x_*, t);$$

551 dopodiché le quantità osservabili φ seguono la medesima logica di prima
 552 ma coll’aggiunta di un apice per distinguere le variabili postinterazionali:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \varphi(x) & \text{e} & \varphi_* \equiv \varphi(x_*), \\ \varphi' &\equiv \varphi(x') & \text{e} & \varphi'_* \equiv \varphi(x'_*). \end{aligned}$$

553 Ovviamente questa notazione può essere generalizzata a una qualunque
 554 funzione scalare $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione del microstato degli agenti:

$$\begin{aligned} g &\equiv g(x) & \text{e} & g_* \equiv g(x_*), \\ g' &\equiv g(x') & \text{e} & g'_* \equiv g(x'_*). \end{aligned}$$

555 Infine si osserva che qualora vi siano altri pedici o apici nelle funzioni a ve-
 556 nire, essi *non* fanno riferimento a questa notazione corta, se non altrimenti
 557 specificato. Per esempio giusto nel prossimo paragrafo si lavora con del-
 558 le densità f_i , in cui i è l’indice del nodo del grafo associato all’agente; è
 559 comunque possibile, anche per questi casi, usare la notazione precedente
 560 riposizionando lievemente i pedici e gli apici:

$$f^i \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_i^* \equiv f(x_*, t);$$

561 **Analisi dimensionale**

562 Finora tutte le equazioni passate fanno riferimento a un tempo adimensiona-
 563 le, sebbene l’introduzione di un tempo sia una modifica alquanto indolore e
 564 che lasci trasparire un’interessante interpretazione del passo temporale Δt .

565 Sia dunque $\tilde{t} = \tau t$ il tempo dimensionale scomposto nel prodotto di in uno
 566 adimensionale t e della dimensione τ .

567 **Osservazione 3.11.** Seguendo la notazione ISO [11, § 6.2] \tilde{t} dev’essere scrit-
 568 to $\tilde{t} = \{t\} \times [t]$ ma, per leggerezza di notazione, si omettono le parentesi po-
 569 nendo $\tau \equiv [t]$: l’importante è vedere t come il valore numerico variabile e
 570 adimensionale, mentre τ come la dimensione costante e fissa.

571 Detto ciò, mediante la derivata dimensionale

$$\frac{d \cdot}{dt} = \tau \frac{d \cdot}{d \tilde{t}}$$

572 e le riformulazioni

$$\tilde{f}(x, \tilde{t}) \equiv f(x, \tilde{t}/\tau), \quad \text{e} \quad \tilde{f}_*(x_*, \tilde{t}) \equiv f(x_*, \tilde{t}/\tau),$$

abbreviate con \tilde{f} e \tilde{f}_* rispettivamente, la [EtB]_X diventa

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \tilde{f} d\mathbf{x} = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}/\tau) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle \tilde{f} \tilde{f}_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \quad (3.20)$$

Per capire come varia il tasso d'interazione μ è sufficiente dimensionalizzare la [Ber]_X:

$$\Theta \sim \text{Bernoulli} \left(\mu(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t^*, \mathbf{w}, \tilde{t}/\tau) \frac{\Delta\tilde{t}}{\tau}, \right),$$

da cui si deduce il tasso d'interazione dimensionale $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}) \equiv \frac{1}{\tau} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}/\tau),$$

che trasforma la (3.20) nell'equazione di tipo Boltzmann dimensionale

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \tilde{f} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \tilde{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle \tilde{f} \tilde{f}_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*. \quad (3.21)$$

Osservazione 3.12 (frequenza d'interazione). Dall'identità $\Delta\tilde{t} = \tau\Delta t$ si può interpretare Δt come la frazione della dimensione τ dopo la quale può avvenire un'interazione, da cui si deduce che $\Delta\tilde{t}$ è l'intervallo di tempo tra due interazioni.

Di conseguenza si può vedendo l'[AR]_X come un fenomeno periodico di periodo $\Delta\tilde{t}$ e frequenza

$$\tilde{f} \equiv \frac{1}{\Delta\tilde{t}} = \frac{1}{\tau\Delta t} \equiv \frac{1}{\tau} f,$$

in cui, come prima $1/\tau$ è la dimensione della frequenza adimensionale f .

Ecco che il reciproco del passo temporale Δt prende il significato della frequenza d'interazione del fenomeno, nell'unità di tempo sia adimensionale che dimensionale mediante $1/\tau$.

Osservazione 3.13 (Scelta di τ). La precedente osservazione permette anche di esplicitare un metodo con cui decidere la dimensione temporale τ : si consideri $\Delta t = 0.01$, allora la frequenza è di 100 interazioni nell'unità di tempo. In un fenomeno come quello urbano si possono allora escludere due scale:

- 592 ◊ quella dei mesi o superiori, perché è irrealistico che in un arco tem-
593 porale così lungo vi siano solo 100 interazioni tra le città;
- 594 ◊ similmente quella dei secondi o inferiori per un ragionamento simile
595 a quello di prima ma opposto.

È pertanto naturale che la scala ideale in tal contesto sia quella dei giorni.

Ciononostante, in questo scritto non si studia un'equazione di tipo Boltzmann dimensionale analoga alla (3.21) per tre principali motivazioni:

- 599 1. la dimensione va considerata solo se si è interessati a studiare il
600 transitorio, non la distribuzione stazionaria;
- 601 2. lo studio di quest'ultimo è incompatibile coll'Ip. 2.2 di grafo statico;
- 602 3. mancano i dati storici, sia attendibili che su scale temporali adeguate,
603 per poter confrontare il transitorio simulato con quello reale.

Tali sono le ragioni per cui il tempo sarà sempre considerato adimensionale da qui in poi: l'obiettivo è studiare la distribuzione stazionaria raggiunta, non in quanto tempo si raggiunge (tempo di convergenza).

607 3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI

608 Si analizza adesso il caso del tessuto interurbano descritto nel § 2.2, considerando le città sia come agenti che come nodi di una rete che ne regola le 609 interazioni: due città possono interagire se sono connessi; è anche ovvio che 610 l'interazione modifichi, in qualche modo da definire, la loro popolazione. 611

612 In questo paragrafo si applicano i concetti della teoria sviluppata nei §§ 2.1 e 613 3.2.3 e, in particolare, la notazione usata e definita. S'inizia mostrando una 614 derivazione esatta la quale, cioè, considera la topologia esatta; quindi si 615 approfondisce un'approssimazione nella quale si "perde" la topologia indotta 616 dalla rete; infine, si considerano i collegamenti tra la derivazione esatta e 617 quella di tipo Boltzmann sotto determinate ipotesi.

618 3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta

619 *Descrizione e derivazione*

620 Visto che si assume che valgono le Ip. 3.4⁷, dalla B₃ sorge un problema non 621 di poco conto: gli agenti sono indistinguibili ma la rete sottostante li rende 622 distinti per via degl'indici \mathcal{I} .

623 Per dipanare la questione è sufficiente considerare l'indice come una variabile aleatoria $I \in \mathcal{I}$ così da definire il processo stocastico come 624

$$\{\mathbf{X}_t\} \equiv \{I, S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

625 in cui $S_t \in \mathbb{R}_+$ è la variabile aleatoria relativa alla popolazione dell'agente 626 rappresentativo al tempo t ed è l'unica componente del processo stocastico 627 a variare nel tempo per l'Ip. 2.2.

628 **Osservazione 3.14** (Sulla natura numerica della popolazione). È naturale che 629 non esistano frazioni di persone e che quindi rigorosamente $S_t \in \mathbb{N}$ ma non 630 sempre la scelta più realistica è quella che modellisticamente è più agevole; 631 infatti trattare S_t come una variabile aleatoria discreta impone un codominio, appunto, discreto che è in genere più difficile da manipolare matematicamente rispetto a un intervallo continuo. Tal'è la ragione nel scegliere S_t 632 reale: dopo aver fatto i conti normalmente si può poi approssimare per eccesso o difetto ricavando la taglia intera effettiva; l'errore così commesso è 633 di al più una persona. 634

635 Così ragionando si può nel complesso descrivere statisticamente lo stato 636 microscopico $\mathbf{X}_t \equiv (I, S_t)$ dell'agente rappresentativo colla densità congiunta

$$f(i, s, t) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

637 che è discreta in $i \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathbb{R}_+$, uguale a

$$f(i, s, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(i - j), \quad (3.22)$$

⁷ Perdipiù la B₂ è valida a un tempo t , ma nell'unità di tempo dimensionale ſ le interazioni si possono considerare come non binarie, come già discusso alla fine del § 3.2.3.

dove $N \equiv |\mathcal{J}|$ è il numero totale d'agenti del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di S_t dell'agente i -esimo.

In tal modo la densità congiunta f è effettivamente indistinguibile rispetto a tutti gli agenti, soddisfacendo la [B3](#), e integra sul suo dominio a uno:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(\mathcal{J} \times \mathbb{R}_+) &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f(i, s, t) ds di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f_i(s, t) ds \otimes \delta(i-j) di \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \delta(i-j) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} 1 = \frac{N}{N} = 1, \quad \forall t \geq 0; \end{aligned}$$

mentre le densità f_i preservano la naturale distinguibilità degli agenti indotta dalla topologia sottostante.

Sempre come conseguenza del grafo, la [\[Ber\]x](#) deve dipendere dalla matrice d'adiacenza A :

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(I, I^*) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_S^A$$

ove $A : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che a ogni coppia d'indici (I, I^*) associa la relativa entrata nella matrice d'adiacenza

$$A(I, I^*) \equiv a_{I, I^*} = \begin{cases} 1 & \text{se } (I, I^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

secondo la [\(2.2\)](#); in tal modo l'interazione non ha possibilità d'avvenire se i due agenti non sono connessi.

Osservazione 3.15. Rispetto al caso generale [\[Ber\]x](#) il tasso d'interazione ha forma

$$\mu(i, i_*) \equiv A(i, i_*), \quad (3.23)$$

esso, cioè, è per definizione costante sia rispetto agli stati S_t e S_t^* che rispetto al tempo, oltre a non avere coefficienti⁸ w .

Osservazione 3.16. Per definizione della distribuzione di Bernoulli, è necessario imporre $A(I, I^*) \Delta t \leq 1$, ma dato che $A(I, I^*) \in \{0, 1\}$ ciò si traduce nella naturale condizione che $\Delta t \leq 1$.

D'altro canto le regole d'interazione nella [\[RI\]x](#) diventano

$$[\text{RI}]_S \begin{cases} S'_t = \psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \gamma), \\ S_t^{*'} = \psi_*(S_t, I, S_t^*, I_*). \end{cases}$$

Osservazione 3.17. Confrontato a [\[RI\]x](#), solo la funzione della città interagente ψ presenta un coefficiente stocastico $y \equiv \gamma \in \mathbb{R}$, mentre quella relativa alla città ricevente ψ_* non dipende da potenziali coefficienti⁹ y_* .

⁸ Questa situazione si può simbolicamente rappresentare ponendo $k = 0$.

⁹ Come nell'Oss. [3.15](#), tale condizione si può simbolicamente rappresentare ponendo $h_* = 0$.

664 Unendo le $[Ber]_S^A$ e $[RI]_S$, le $[AR]_X$ si scrivono

$$[AR]_S \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{**}, \end{cases}$$

665 coerentemente col fatto che in un cointesto urbano, qualora una città-nodo
666 interagisca con un'altra, entrambe debbano variare il loro stato (Oss. 3.9).

667 **Osservazione 3.18.** Paragonato a $[AR]_X$ ci si potrebbe chiedere perché non
668 si considera l'intero vettore aleatorio X_t , come pure nella $[RI]_S$; la ragione è
669 che I è una componente statica che non varia nel tempo.

670 In ogni caso, considerando I_t e I_t^* momentaneamente dinamiche, si possono
671 definire le regole d'interazione

$$[RI]_I \begin{cases} I'_t = \psi(S_t, I, S_t^*, I_*) \equiv I_t, \\ I_t^{**} = \psi_*(S_t, I, S_t^*, I_*) \equiv I_t^*, \end{cases}$$

672 da cui segue l'algoritmo d'interazione

$$[AR]_I \begin{cases} I_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I_t + \Theta I'_t = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t = I_t, \\ I_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^{**} = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^* = I_t^*, \end{cases}$$

673 che soddisfa la staticità di I e I_* e completa, assieme a $[AR]_S$, la formulazione
674 $[AR]_X$ più generale.

675 Sia $\Phi: \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un'arbitraria quantità osservabile, dalla $[Ber]_S^A$ l'equa-
676 zione di tipo Boltzmann omogenea $[EtB]_X^A$ ha forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{I}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} A(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi_*' - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} ff_* ds ds_* di di_*, \quad [EtB]_S^A$$

677 ove si è usata la notazione abbreviata illustrata nel § 3.2.3, mentre $\langle \cdot \rangle$ indica
678 il valore atteso rispetto alla variabile aleatoria γ nelle $[RI]_S$.

679 **Osservazione 3.19.** Anche se la derivazione della $[EtB]_S^A$ è già stata spiegata
680 nel dettaglio nel § 3.2.1, rimane interessante riportare la forma del passaggio
681 più difficile, ossia quella della media condizionata (3.8) (qui mostrato solo
682 per $S_{t+\Delta t}$):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(I, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, (1-\Theta)S_t + \Theta\psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma)A(I, I_*)\Delta t) | I, I_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, S_t)(1 - A(I, I_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(I, \psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma))A(I, I_*)\Delta t]]. \end{aligned}$$

683 Si noti come il condizionamento sia solo rispetto a I a I_* , proprio poiché Θ
684 in $[Ber]_S^A$, tramite il tasso d'interazione μ nella (3.23), dipende solo da essi.

685 *Analisi delle regole d'interazione*

686 Si approfondiscono in questo paragrafo le regole d'interazione $[RI]_S$.

687 Innanzitutto, il perché nella $[AR]_S$ si considerano interazioni «Azione-
688 Reazione» (Oss. 3.9) discende da un vincolo fisico: se una città interagisce
689 con un'altra, scambiando popolazione, necessariamente anche l'altra varia il
690 proprio stato.

Dopodiché, passando alle realizzazioni di tutte le variabili aleatorie considerate, vale a dire scrivendole in minuscolo e omettendo la dipendenza dal tempo, le regole d'interazione [RI]_S sono così definite¹⁰

$$[\text{RE}] \begin{cases} \psi(s, i, s_*, i_* \gamma) = s(1 - E(s, i, s_*, i_*) + \gamma) \\ \psi_*(s, i, s_*, i_*) = s_* + sI(s, i, s_*, i_*) \end{cases}$$

ove

$$E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$I: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

sono rispettivamente i tassi d'emigrazione e immigrazione, i cui argomenti sono per brevità sottintesi da qui in poi, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche. Si caratterizza ulteriormente E :

Ipotesi 3.5. Per avere un postato s fisicamente sensato, ossia positivo, quando $\gamma = 0$, si assume che il tasso d'emigrazione E sia superiormente limitato dalla costante $\lambda \equiv \sup E$, tale che $\lambda \in (0, 1)$, e inferiormente limitato dall'origine:

$$0 \leq E \leq \lambda < 1, \quad \forall s, \forall s_*, \forall i, \forall i_*.$$

D'altra parte il postato s'_* [per il momento] non si considera poiché è per definizione sempre positivo qualunque sia il tasso d'immigrazione $I \in [0, +\infty)$.

Se invece γ è non nullo, dev'essere anch'esso limitato:

$$s' = s(1 - E + \gamma) > 0 \implies \gamma > E - 1, \quad \forall E \in [0, \lambda], \quad (3.24)$$

La scelta di $>$ anziché \geq nella (3.24) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città¹¹.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto valgono le seguenti ipotesi:

Ipotesi 3.6. γ deve soddisfare le seguenti caratteristiche:

F₁ può assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (3.24);

F₂ la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;

F₃ seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

1. la distribuzione normale $N(\mu, \gamma)$ non soddisfà la F₁ poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
2. la distribuzione uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfà né F₂ né F₃, mentre F₁ sì;

¹⁰ Sono state in parte ispirate dalla [10, (2.1) p. 223].

¹¹ Ciò non significa che il modello non possa prevedere lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi (Oss. 3.14).

- 722 3. la distribuzione esponenziale $\text{Exp}(\lambda)$ è quella piú promettente per-
 723 ché riflette sia **F2** (dopo un'opportuna traslazione dei valori campio-
 724 nati) che **F3**, ma sfortunatamente non **F1** perché la densità è non
 725 nulla al valore estremo $\gamma = E - 1$;
- 726 4. l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate
 727 è proprio la distribuzione $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

728 Si assume allora $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ con densità

$$f_{\hat{\gamma}}(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

729 ove α e β sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre

$$\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

730 è la funzione gamma

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

731 Imponendo la **F1** si ottiene

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E = \alpha\beta \quad \text{e} \quad \text{var}(\hat{\gamma}) \equiv \sigma^2 = \alpha\beta^2,$$

732 in cui σ^2 indica la varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sigma^2}{1-E}.$$

733 La **F2** si può semplicemente soddisfare traslando i valori campionanti della
 734 $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzione $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

735 D'altra parte per la **F1** bisogna salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
 736 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa $\text{Exp}(\beta)$, mentre se $\alpha < 1$ diverge
 737 all'origine; per avere quindi probabilità nulla di campionare da $\hat{\gamma}$ l'origine
 738 [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} \geq \frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma < |1-\lambda| = 1-\lambda. \quad (3.25)$$

739 La (3.25) implica quindi che non è possibile avere una varianza arbitraria per
 740 poter soddisfare la **F1**, ma che questa è limitata superiormente dal massimo
 741 tasso d'emigrazione λ , interpretabile come attrattività: più grande è λ piú
 742 piccola è la varianza, e viceversa.

743 In realtà la σ non può davvero assumere valori arbitrari tra 0 e $1-\lambda$: difatti
 744 se $\sigma \rightarrow 1-\lambda$ vale $\alpha \rightarrow 1$ e dunque la distribuzione gamma tende a un'espo-
 745 nenziale; questo ha l'effetto d'introdurre una pericolosa asimmetria nella
 746 densità, come si può notare nella la Fig. 3.1: una volta centrata rispetto al-
 747 la media la moda (il valore piú frequente) ha valore negativo portando, in
 748 un orizzonte temporale finito, le perturbazioni negative a essere quelle piú
 749 frequenti.

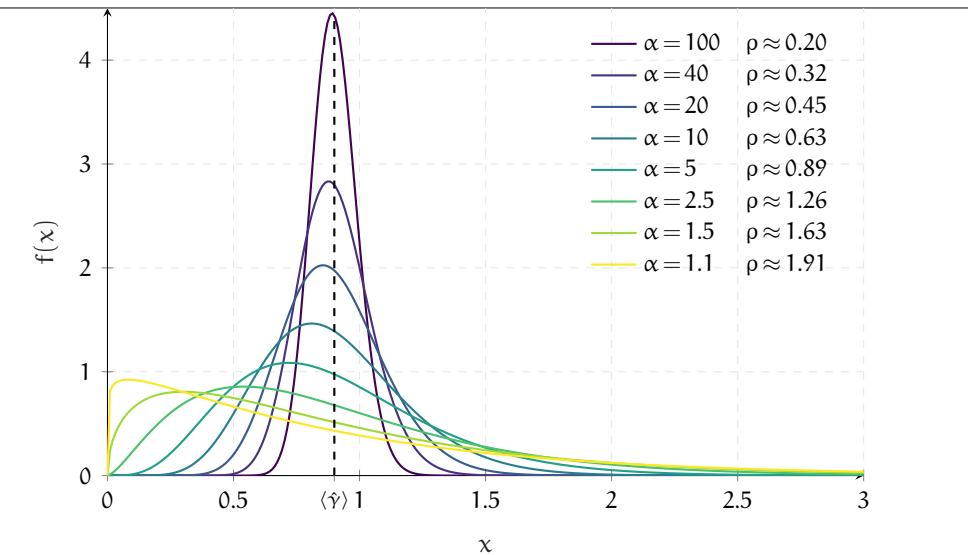


Figura 3.1: Transizione della densità gamma verso l'asimmetria con $\lambda = 0.1$ ed $E = \lambda$, da cui $\langle \hat{\gamma} \rangle = 0.9$ e $\beta = \langle \hat{\gamma} \rangle / \alpha$.

Il risultato è che con σ molto elevato le città tendono a spopolarsi perché v'è una preferenza per fluttuazioni negative. Per ovviare al problema bisogna ulteriormente vincolare σ dimodoché l'indice di asimmetria

$$\rho \equiv \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

sia sufficientemente piccolo; dalla Fig. 3.1 si può perciò imporre $\rho \leq 0.2$, cioè

$$\alpha \geq 100 \implies \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} \geq 100 \implies \sigma \leq \frac{1-\lambda}{10}, \quad (3.26)$$

dove, come nella (3.25), si è imposto nell'ultima implicazione il caso peggiore $E = \lambda$. Dunque il vero limite superiore, per preservare la simmetria, è di un ordine di grandezza inferiore a quello precedentemente stimato.

Osservazione 3.20. Quello qui mostrato è solo un possibile modello stocastico perturbativo; infatti, modificando le Ip. 3.6, se ne può scegliere un altro: ad esempio si può imporre una distribuzione uniforme oppure si può troncare una gaussiana affinché soddisfi il vincolo di positività (3.24).

Non manca che caratterizzare il tasso d'immigrazione I:

Ipotesi 3.7. Si postula che l'interazione 14 conservi [in media] la popolazione totale:

$$s + s_* = \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \stackrel{F2}{=} s - sE + s_* + sI,$$

da cui $E \equiv I$, che è ragionevole siccome l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto).

Osservazione 3.21. Le 14 non sono ancora complete siccome non si è esplicitata la regola d'emigrazione, la cui scelta, tuttavia, si può dunque vedere come la regola d'interazione stessa: è l'ultimo tassello del mosaico. Pertanto si lascia quest'ultima definizione al § 4.3 nel quale se ne propongono varie, si discutono quindi con vari studi parametrici per poi infine interpretarle analizzando cosa queste dicono sul fenomeno della migrazione.

772 **3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata**

773 L'approssimazione si fonda sulla seguente matrice:

774 **Definizione 3.12** (Matrice dei gradi \mathbf{B}). Sia $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di rango
775 uno

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{k}^+(\mathbf{k}^-)^\top}{D_N}$$

776 definite tramite il prodotto diadiaco dei vettori

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^+ &\equiv (k_1^+, k_2^+, \dots, k_N^+)^\top = \mathbf{A}\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{k}^- &\equiv (k_1^-, k_2^-, \dots, k_N^-)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N,\end{aligned}\quad (3.27)$$

777 rispettivamente dei gradi uscenti ed entranti, e la costante¹²

$$D_N \equiv \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^+ = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^+ = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{A}\mathbf{1} = \|\mathbf{A}\|_1. \quad (3.28)$$

778 Allora \mathbf{B} approssima la matrice d'adiacenza \mathbf{A} poiché per definizione vale

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^+(\mathbf{k}^-)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^+ \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^-(\mathbf{k}^+)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^- \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^-\end{aligned}\right\} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}.$$

779 Inoltre, poiché \mathbf{A} è simmetrica (Ip. 2.1) vale $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^\top}{D_N}.$$

780 Tramite la Def. 3.12, la [Ber] $^{\mathbf{A}}_{\mathcal{S}}$ diventa

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(I, I^*)\Delta t), \quad [\text{Ber}]^{\mathbf{B}}_{\mathcal{S}}$$

781 da cui la [EtB] $^{\mathbf{A}}_{\mathcal{S}}$ si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi g dv di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} B(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} gg_* ds ds_* didi_*, \quad [\text{EtB}]^{\mathbf{B}}_{\mathcal{S}}$$

782 dove g e g_* sono densità definite come la (3.22) ma indicate diversamente
783 per distinguerle da quelle esatte f ed f_* .

784 Sorge però spontanea una domanda non di poco conto: perché non si
785 può scegliere un'altra matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ per approssimare la \mathbf{A} , secondo
786 altri criteri analoghi o dissimili alla (3.27)? La risposta non è immediata ma
787 discende in essenza su come la [EtB] $^{\mathbf{B}}_{\mathcal{S}}$ può essere riformulata. A tal scopo si
788 necessita di un osservazione:

789 **Osservazione 3.22** (Teoria e Pratica). Come detto nel Cap. 1, l'interesse è di
790 studiare la distribuzione della popolazione tra città; perciò, non a torto, si
791 può vedere la densità f nella (3.22) come eccessivamente dettagliata, con-
792 tenendo informazioni legate ai vertici: ai fini pratici è quindi sufficiente rica-
793 vare in qualche modo la densità marginale $\tilde{f}(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di$, $\forall t \geq 0$, che è
794 esattamente quanto fatto nel § 4.1 per i risultati delle venture simulazioni.

¹² La $\|\cdot\|$ è la norma uno applicata alle matrici: $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} |a_{i,j}|$.

Dall'Oss. 3.22 si possono pertanto specializzare gli osservabili:

Ipotesi 3.8 (Osservabili puntuali). Si considera la seguente classe di osservabili: $\Phi(i,s) \equiv \delta(i-j)\varphi(s)$, $\forall j \in J$, dove $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria.

Con tale scelta è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le g_i : usando, infatti, l'Ip. 3.8 nella [EtB]_S^B porta a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi \rangle}{2} g_j \sum_{i \in J} B(j,i) g_i^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} s_j^* \sum_{i \in J} B(i,j) g_i ds ds_*, \quad \forall j \in J, \end{aligned}$$

ma essendo \mathbf{B} simmetrica vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} g_j \sum_{i \in J} B(j,i) g_i^* ds ds_* \quad \forall j \in J,$$

che in forma matriciale, introducendo le densità vettoriali

$$\mathbf{g} \equiv (g_i)_{i \in J} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_* \equiv (g_i^*)_{i \in J},$$

si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g} \odot \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad (3.29)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard (prodotto per elementi).

Il prossimo passo è introdurre la densità globale delle taglie, ossia la densità marginale della (3.22) rispetto alla popolazione s :

$$\bar{g}_N(s,t) \equiv \int_J g(i,s,t) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in J} g_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{g}, \quad (3.30)$$

ove $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$, che non è che la media tra le densità di S_t tra tutti i vertici¹³; premoltiplicando la (3.29) per $\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top$ e usando la (3.30) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad [\mathbf{E}\bar{g}]$$

Osservazione 3.23. La [Eg] si può anche ottenere usando, in luogo dell'Ip. 3.8, direttamente un osservabile indipendente dall'indice i : $\Phi(i,s) \equiv \varphi(s)$, confermando quanto premesso nell'Oss. 3.22, cioè che la [Eg] si ricava perdendo le informazioni legati agli indici negli osservabili.

La [Eg] non è ancora un'equazione chiusa per \bar{g} per via del secondo membro nel quale $\mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_*$ richiede sia di conoscere nel dettaglio le connessioni sottostanti del grafo che le distribuzioni della popolazione di ogni città. Tuttavia, avvalendosi della definizione della \mathbf{B} , la [Eg] diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g}_N ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2 D_N} (\mathbf{k}^\top \mathbf{g})(\mathbf{k}^\top \mathbf{g}_*) ds ds_*, \quad (3.31)$$

che richiede d'introdurre una nuova densità di probabilità:

¹³ La medesima definizione vale anche per f_N della [EtB]_S^A.

817 **Definizione 3.13** (Densità dei gradi \mathbf{k}). Sia

$$d_N : \mathbb{R}_+ \times \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

818 la densità di probabilità dell'evento che al tempo t un agente abbia popola-
819 zione s e grado k , definizione che la lega alle g_i dalla relazione

$$d_N(s, k, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t),$$

820 ove

$$\mathcal{J}_k \equiv \{i \in \mathcal{J} \mid k_i = k\} \subseteq \mathcal{J} \quad (3.32)$$

821 è l'insieme dei nodi con grado k ; da essa ne seguono altre due:

$$\bar{g}_N(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N d_N(s, k, t), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{g}(s, t) = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = N \sum_{k=0}^N k d_N(s, k, t).$$

822 Un analogo discorso vale per le f_i in luogo delle g_i .

823 E dalla Def. 3.13 segue la sua normalizzazione:

824 **Definizione 3.14** (Densità dei gradi \mathbf{k} normalizzati). Siano

$$\hat{k}_i \equiv \frac{k_i}{N} \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{J},$$

825 i gradi normalizzati di un generico nodo rappresentativo di \mathcal{G} , in cui

$$\mathcal{K} \equiv \left\{ \frac{k}{N} \mid k = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

826 è l'insieme discreto dei gradi normalizzati; allora la densità dei gradi norma-
827 lizzati

$$\hat{d}_N : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

828 è così definita

$$\hat{d}_N(s, \hat{k}, t) \equiv N d_N(s, N \hat{k}, t). \quad (3.34)$$

829 **Osservazione 3.24.** Visto che due elementi consecutivi dell'insieme \mathcal{K} sono
830 separati da un passo costante e uguale a $1/N$, si può definire $\Delta \hat{k} \equiv 1/N$ che
831 da (3.34) implica

$$\sum_{\hat{k} \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} \hat{d}_N(s, \hat{k}, t) ds \Delta \hat{k} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} d_N(s, k, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

832 cosa che permette di vedere la \hat{d}_N come funzione costante a tratti dei gradi
833 normalizzati \hat{k} , e similmente per d_N (basta definire $\Delta k \equiv 1$) essendone un
834 numero riscalamento.

835 **Osservazione 3.25.** L'Oss. 3.24 dà la possibilità anche d'interpretare la (3.33)
836 come un uguaglianza tra densità marginali: $\bar{g}_N = \bar{d}_N = \hat{d}_N$.

Con tutte queste definizioni e osservazioni, la (3.31) si può riformulare in termini di \hat{d}_N

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d_N ds = N^2 \sum_{k,k_*=0}^N \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{D_N} d_N d_N^* ds ds_*,$$

dove k_* è il grado associato a g_N^* , e poi in termini di \hat{d}_N

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d_N ds \Delta k}_{\textcircled{I}} = \underbrace{\sum_{k, k_* \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{D_N} d_N d_N^* ds ds_*}_{\textcircled{II}}$$

Il secondo membro si può ulteriormente manipolare moltiplicando e dividendo per N^2 e definendo il grado normalizzato medio

$$\bar{D}_N \equiv \frac{D_N}{N^2} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} k d_N ds \Delta k, \quad (3.35)$$

da cui

$$\textcircled{II} = \sum_{k, k_* \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}_N} d_N d_N^* ds ds_* \Delta k \Delta k_*.$$

Valutando il limite $N \rightarrow \infty$ alla (3.35) e ai membri \textcircled{I} e \textcircled{II}

$$\begin{aligned} (3.35) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{D} \equiv \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} k \hat{d} ds dk, \quad \textcircled{I} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d} ds dk \\ &\textcircled{II} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}} \hat{d} \hat{d}^* ds ds_* dk dk_*, \end{aligned}$$

si perviene infine a un'equazione di tipo Boltzmann:

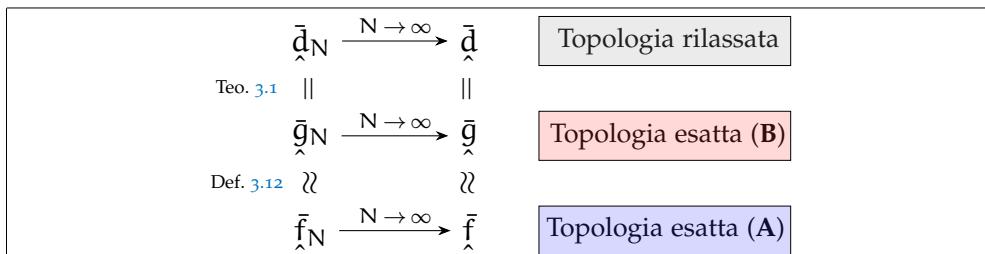
$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d} ds dk = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}} \hat{d} \hat{d}^* ds ds_* dk dk_*. \quad [\text{EtB}]_S^k$$

Si è dunque dimostrato il seguente teorema:

Teorema 3.1 (di rilassamento della topologia). La $[\text{EtB}]_S^B$ è formalmente equivalente nel limite $N \rightarrow \infty$ a un'equazione di tipo Boltzmann di forma $[\text{EtB}]_X$ con microstato $\mathbf{X}_t \equiv \{\zeta, S_t\}$, ove $\zeta \in [0, 1]$ è la variabile aleatoria dei gradi normalizzati, osservabili $\varphi(s)$ indipendenti da ζ e nucleo d'interazione $\mu(\zeta, k_*) \equiv (kk_*)/\bar{D}$.

Il significato del Teo. 3.1 è profondo: approssimare $[\text{EtB}]_S^A$ con $[\text{EtB}]_S^B$ coincide col perdere la distinguibilità indotta dal grafo, rilassando in tal modo la topologia la quale non scompare ma rimane solo come distribuzione dei gradi; tale riduzione è come sfocare i dettagli delle connessioni tra i vertici: si passa da uno specifico grafo a una classe di grafi. Nella Fig. 3.2 è presente uno schema riassuntivo del corrente paragrafo.

Osservazione 3.26. Il Teo. 3.1 motiva anche il perché non si possa considerare una generica matrice C che approssima la A : non è detto che rilassi la topologia portando a un'equazione analoga alla $[\text{EtB}]_S^k$.

**Figura 3.2:** Schema riassuntivo del § 3.3.2.

859 **Osservazione 3.27.** La Fig. 3.2 contiene al suo interno \hat{f} che ha un'analogia
 860 definizione alla Def. 3.14, ma normalizzando gl'indici: siano

$$\hat{i} \equiv \frac{i}{N} \in \mathcal{J}, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

861 gl'indici normalizzati di un generico nodo rappresentativo di \mathcal{G} , in cui

$$\mathcal{J} \equiv \left\{ \frac{i}{N} \mid i = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

862 è l'insieme discreto degl'indici normalizzati. Allora la (3.22) normalizzata,
 863 per analogia colla (3.34), si può definire

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = N f(N \hat{i}, s, t) = \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(N \hat{i} - j),$$

864 ma per la condizione di normalità $\mathbb{P}([0, 1] \times \mathbb{R}_+) = 1, \forall t \geq 0$, deve valere¹⁴

$$f_j(s, t) = N f_j(s, t) \quad \text{ove } j = N \hat{j},$$

865 anch'essa analoga alla (3.34); difatti con questa la \hat{f} si scrive

$$f(\hat{i}, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(N(\hat{i} - \hat{j})) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - \hat{j}).$$

866 Con tali definizioni la densità marginale \bar{f} si può riformulare mediante il
 867 cambio di variabili $i = Ni$:

$$\bar{f}_N = \int_{\mathcal{J}} f(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \int_{\mathcal{J}} N f(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \int_{\mathcal{J}} \hat{f}(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \bar{f}_N = \frac{1}{N} \sum_{\hat{i} \in \mathcal{J}} f_{\hat{i}}(s, t),$$

868 e, definendo il passo $\Delta \hat{i} \equiv 1/N$ tra due indici normalizzati consecutivi, si
 869 arriva al limite $N \rightarrow \infty$ a

$$\bar{f}_N = \bar{f}_N = \sum_{\hat{i} \in \mathcal{J}} f_{\hat{i}}(s, t) \Delta \hat{i} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{f} = \bar{f} = \int_0^1 f_{\hat{i}}(s, t) d\hat{i},$$

870 mentre la \hat{f} diventa

$$f(\hat{i}, s, t) = \int_0^1 f_{\hat{j}}(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - \hat{j}) d\hat{j} = f_{\hat{i}}(s, t).$$

871 Similmente vale per \bar{g} .

¹⁴ Si ricordi che l'indice j non è un argomento della densità f_j , quindi può essere cambiato con un altro indice purché sia distinto da tutti gli altri secondo la trasformazione scelta.

Osservazione 3.28 (Sulla bontà di $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$). Su un aspetto è al momento non ci si può esprimere: quanto bene la \mathbf{B} approssima la matrice \mathbf{A} in generale? Sarebbe necessario elaborare ulteriormente la teoria per trovare una risposta, obiettivo, come già detto, non di questa tesi. Tuttavia, euristicamente, si può riflettere in questo modo: con $N \gg 1$ le singole connessioni sono meno importanti, per cui vengono meno i dettagli, mentre la panoramica può essere ragionevolmente colta da \mathbf{B} ; ciò suggerirebbe che più sono i nodi migliore è l'approssimazione $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$. Tale breve riflessione è però solo un intuito, *non* una dimostrazione rigorosa, e dunque anche potenzialmente falsa.

Osservazione 3.29. Si veda [17] per la dimostrazione del Teo. 3.1 in un contesto delle reti sociali e nel caso di un grafo diretto, non necessariamente simmetrico, oltre che di $[RI]_X$ lineari e simmetriche.

3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile

Nel precedente paragrafo si è esplorato come si può "perdere" la struttura sottostante indotta dal grafo passando a una densità dipendente dal grado dei nodi, recuperando in tal modo un'equazione classica di tipo Boltzmann. Risulta perciò stimolante esplorare se sussitano certe ipotesi che permettano di trasformare la $[E\bar{g}]$ in una forma della $[EtB]_X$, approfondendo così i legami tra la teoria retale sviluppata nei due previ due paragrafi e la teoria di tipo Boltzmann.

Ipotesi semplificative

A questo scopo valgono le seguenti:

Ipotesi 3.9. Esistono tre principali ipotesi semplificative della $[E\bar{g}]$:

S1 Il grafo è completamente connesso con matrice d'adiacenza unitaria:

$$\mathbf{A} = \mathbb{1} \iff a_{i,j} = 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{J}.$$

S2 Gli agenti sono indistinguibili rispetto al grafo:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J},$$

S3 Le regole d'interazione $[RI]_S$ sono simmetriche (Def. 3.11).

Analisi della S1

Notando che $\mathbf{A} = \mathbb{1} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$, la $[E\bar{g}]$ diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} (\mathbf{1}^\top \mathbf{f})(\mathbf{1}^\top \mathbf{f}_*) ds ds_* \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f} \right) \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* \right) ds ds_*, \end{aligned}$$

ma ricordando (3.30) si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \bar{f} \bar{f}_* ds ds_*, \quad (3.36)$$

la quale è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann [EtB]_X con microstato $X_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [RI]_S e nucleo d'interazione unitario¹⁵ $\mu \equiv 1$ nella [Ber]_X. Ciò significa che con **S1** gli agenti, nonostante siano distinti per il grafo, si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (3.30).

Analisi della **S2**

Sotto tal'ipotesi, che equivale coll'assumere

$$\mathbf{f} = \mathbf{1} \mathbf{f} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_* = \mathbf{1} \mathbf{f}_*,$$

la [Eg] diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{\mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1}}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}_* ds ds_* \end{aligned}$$

e rimembrando (3.28) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{D_N}{N^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_*.$$

In questo contesto il rapporto $D_N/N^2 \in [0, 1]$ (grado medio normalizzato della rete) rappresenta quanto la rete è topologicamente simile a una completamente connessa¹⁶.

Per il resto l'equazione è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann [EtB]_X con microstato $X_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [RI]_S e nucleo d'interazione nella [Ber]_X costante $\mu \equiv D_N/N^2 = \bar{D}_N$.

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla [Eg]: riassume l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente \bar{D}_N il quale, dunque, ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la **S1**.

Analisi della **S1**, **S2** e **S3**

Visto che vale la **S1** si può partire dalla (3.36) nella quale la densità media (3.30) diventa per **S2**

$$\bar{f}(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in J} f_i(s, t) \stackrel{\text{S2}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in J} f(s, t) = f(s, t),$$

¹⁵Tale risultato implica anche che un nucleo di collisione unitario nella [EtB]_X è il corrispettivo di una matrice unitaria nella [EtB]_S^A.

¹⁶Difatti D_N è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore prorio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

ossia la \bar{f} coincide con quella di tutti gli agenti¹⁷, essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (3.36) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} ff^* ds ds_*,$$

che unita all'[S3](#) porta all'equivalenza

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff_* ds ds_* = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_*,$$

dalla quale si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_*.$$

Quest'equazione, come per gli altri casi, è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann simmetrica (3.19) con microstato $X_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [\[RI\]s](#) e nucleo d'interazione nella [\[Ber\]x](#) unitario $\mu \equiv 1$.

¹⁷ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente col limite $N \rightarrow \infty$, sempre ben approssimabile nei casi classici con un numero di agenti $N \gg 1$ [come lo studio di un gas].

4

SIMULAZIONI

In questo capitolo si applica tutta la teoria affrontata in quello precedente. Innanzitutto si descrive l'algoritmo con cui sono stati svolte le simulazioni; quindi si spiegano le formule che definiscono i grafici per analizzare i risultati per poi motivare rapidamente il perché le fluttuazioni possono [anzi devono] essere trascurate. Per le simulazioni si propongono varie leggi d'emigrazione che studiate tramite dei studi parametrici, cercando successivamente d'interpretare cosa queste dicono sul fenomeno della migrazione in sé. Infine si mostra brevemente una simulazione per l'Italia, confermando che i risultati migliorano col numero d'agenti.

4.1 METODO MONTE CARLO

Nel contesto delle TCSMA l'obbiettivo, com'è chiaro dal Cap. 3, è quello di ricavare la densità $f(\mathbf{x}, t)$ nella $[EtB]_X$ al variare del tempo. Si potrebbe allora pensare di discretizzare quest'ultima equazione mediante il Metodo delle Differenze Finite, degli Elementi Finiti o dei Volumi Finiti; tuttavia, vi sono due principali problemi:

1. l'impossibilità, in generale, di ricavare la forma forte della $[EtB]_X$, specie nel caso di $[RI]_X$ non lineari;
2. anche ipotizzando di trovare la forma forte a cui applicare i precedenti metodi, la sua natura integro differenziale la rende complessa da manipolare dato che l'operatore collisionale¹, come

$$Q(f, f)(\mathbf{v}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) (f(\mathbf{v}', t)f(\mathbf{v}'_*, t) - f(\mathbf{v}, t)f(\mathbf{v}_*, t)) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*$$

nella (3.15), dipende dalla densità medesima.

Per tali ragioni si procede in maniera più semplice: conoscendo $[AR]_X$, che governa le interazioni binarie tra agenti, si possono quindi direttamente simulare tutte le molteplici collisioni mediante un metodo di Monte Carlo di tipo Nanbu-Babovsky, descritto nel dettaglio nell'Alg. 1 nel quale $T > 0$ è il tempo finale di simulazione, mentre P è la popolazione totale.

Osservazione 4.1. Nella linea 18, \bar{f} è una densità arbitraria: va intesa come \bar{f} se l'approccio è esatto e come \bar{g} se è approssimato.

Osservazione 4.2. Più in generale, nella linea 1, \mathcal{S}_0 si può campionare da una densità $\bar{\mathcal{S}}_0$ iniziale; tuttavia non conoscendone alcuna per la distribuzione della popolazione, si è deciso di definire \mathcal{S}^0 come un vettore uniforme rispetto a una popolazione totale P iniziale.

¹ Vale a dire la parte integrale della forma forte dell'equazione di tipo Boltzmann, in genere scritta a secondo membro.

Algoritmo 1: Algoritmo [AR]_S di tipo Nanbu-Babovsky

```

Dati:  $N \in \mathbb{N}_+$ ,  $\Delta t \leq 1$ ,  $\sigma$ ,  $T > 0$ ,  $P$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  ;
1  $\mathcal{S}^0 \leftarrow (s_1^0, s_2^0, \dots, s_N^0) \equiv (P/N)\mathbf{1} \in \mathbb{R}_+^N$ ;
2 per  $n = 0, 1, 2, \dots, \lfloor T/\Delta t \rfloor - 1$  fai
3    $P \leftarrow$  permutazione indipendente di  $\{1, 2, \dots, N\}$ ;
4   per  $i = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$  fai
5      $j \leftarrow \lfloor N/2 \rfloor + i$ ,  $s_i^n \leftarrow P(i)$  e  $s_j^n \leftarrow P(j)$ ;
6     se esatto allora
7        $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(A(i,j)(\Delta t))$ ;
8     altrimenti # è approssimato
9        $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(B(i,j)(\Delta t))$ ;
10    se  $\Theta = 1$  allora
11       $E \leftarrow E(s_i^n, i, s_j^n, j)$ ;
12       $\gamma \leftarrow \text{Gamma}((1-E)^2/\sigma^2, \sigma^2/(1-E))$ ;
13       $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n(1-E+\gamma)$ ; # città interangente
14       $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n + s_i^n E$ ; # città ricevente
15    altrimenti
16       $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n$  e  $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n$ ;
17     $\mathcal{S}^{n+1} \leftarrow (s_1^{n+1}, s_2^{n+1}, \dots, s_N^{n+1})$ ;
18     $\bar{l}(s, (n+1)\Delta t) \leftarrow$  istogramma di  $\mathcal{S}^{n+1}$ ;

```

964 4.2 RAPPRESENTAZIONE DEI RISULTATI

965 Per analizzare i risultati delle simulazioni è opportuno descrivere nel dettaglio le funzioni usate per descriverli; per farlo, però, si devono prima approfondire le conseguenze della natura stocastica dell'Alg. 1 e la struttura dei risultati. Verso la fine, si motiva anche l'omissione delle fluttuazioni γ .

969 4.2.1 Intervalli di confidenza

970 Innanzitutto simulando la [EtB]_S mediante Alg. 1, e quindi l'algoritmo [AR]_X,
971 si sta introducendo nei risultati un rumore di natura stocastica: più simulazioni
972 daranno risultati diversi per cui la singola non ha rilevanza statistica;
973 bisogna cioè calcolarne molteplici e valutare gli intervalli di confidenza per
974 conoscere l'incertezza sulla stima della media.

975 Sia $R \in \mathbb{N}_+$ il numero di simulazioni eseguite e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^R$ il vettore aleatorio
976 della popolazione di una città relativa a ciascuna simulazione.

977 **Ipotesi 4.1** (Numero di simulazioni). In questo elaborato si assume $R = 100$
978 per avere un numero statisticamente significativo di dati.

979 Per l'Alg. 1 le componenti (S_1, S_2, \dots, S_R) di \mathbf{S} sono indipendenti e identicamente
980 distribuite dalla densità q , proprietà che permette di definire

$$\bar{S} \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R S_r \quad \text{e} \quad V \equiv \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (S_r - \bar{S})^2,$$

rispettivamente la media e la varianza campionarie. Allora, data μ la *vera*² media della densità \mathbf{l} , la distribuzione T di Student con parametro $R-1$ si scrive

$$T = \frac{\bar{S} - \mu}{\sqrt{V/R}} \sim \text{Student}(R-1).$$

Da questa si può definire l'intervallo di confidenza [simmetrico] con livello di confidenza α ponendo

$$\mathbb{P}\left(-t_{R-1}^{\alpha/2} \leq T \leq t_{R-1}^{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

ove $t_{R-1}^{\alpha/2} \in \mathbb{R}$ è quel valore reale tale che

$$\mathbb{P}\left(T < t_{R-1}^{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Esplicitando la T nella (4.1) e isolando la media μ si ha

$$\mathbb{P}\left(\bar{S} - t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}} \leq \mu \leq \bar{S} + t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}}\right) = 1 - \alpha,$$

da cui

$$IC_R^\alpha(\mathbf{S}) \equiv \left[\bar{S} - t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}}, \bar{S} + t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}} \right]$$

è la stima intervallare che definisce l'intervallo di confidenza ricercato, esprimibile anche più compattamente come

$$IC_R^\alpha(\mathbf{S}) \equiv \bar{S} \pm t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{V/R}. \quad (4.2)$$

Ipotesi 4.2 (livello di confidenza). Si sceglie $\alpha = 0.05$ così d'avere un intervallo con livello di confidenza 0.95.

Il significato dell'intervallo di confidenza in essenza è l'errore statistico commesso: esso valuta quanto è probabile che la stima intervallare (4.2) contenga il parametro μ ; in altre parole IC_R^α misura l'incertezza sulla stima della media: preso un campione \mathbf{s} , più l'intervallo di confidenza è esteso più la media campionaria \bar{s} è una stima incerta dell'effettiva media μ ; viceversa più è stretto, più la stima \bar{s} è precisa nel senso che μ si trova in un intorno piccolo della media campionaria. Sotto questo punto di vista è concettualmente analogo alla precisione di uno strumento di misura.

Osservazione 4.3. La stima intervallare (4.2) appena ricavata vale tanto per il vettore aleatorio \mathbf{S} che per le sue realizzazioni \mathbf{s} , le quali sono, appunto, il risultato delle R simulazioni.

4.2.2 Struttura dei dati

I dati presentano una struttura di un tensore del quart'ordine $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^{N_f \times 2 \times N \times R}$ i cui indici hanno il seguente significato

$$s_{i,r}^{n,a} \begin{cases} n = \text{istante temporale}, & a = \text{tipo di simulazione}, \\ i = \text{indice della città}, & r = \text{numero della simulazione}. \end{cases}$$

L'istante temporale è definito tramite tre parametri in \mathbb{N}_+ :

² Vale a dire μ non è una variabile aleatoria ma l'esatto parametro della media di \mathbf{l} .

- 1008 ◊ $N_t \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$ è il numero totale di tempi simulati;
 1009 ◊ $N_s \ll N_t$ è il numero di catture dai tempi simulati;
 1010 ◊ $N_f < N_s$ è il numero di tempi ridotti dalle catture.

1011 Sia le catture che la riduzione sono campinate in intervalli equispaziati
 1012 con passi

$$\Delta s = N_t / N_s \quad \text{e} \quad \Delta f = N_s / N_f$$

1013 ove si suppone, per semplicità, che N_s e N_f siano divisori ordinatamente di
 1014 N_t e N_s , da cui

$$N_t / N_s - \lfloor N_t / N_s \rfloor = 0 \quad \text{e} \quad N_s / N_f - \lfloor N_s / N_f \rfloor = 0,$$

1015 e ugualmente si assume per Δt e T .

1016 Tramite l'Alg. 1 si simulano in totale N_t tempi con passo Δt di cui N_s
 1017 sono salvati nel tensore $\underline{s} \in \mathbb{R}_+^{N_s \times 2 \times N \times R}$ delle catture:

$$\underline{s}_{\cdot, r}^{n, a} \equiv \mathcal{S}_{\cdot, r}^{n \Delta s, a} \quad \forall n, \forall a, \forall r,$$

1018 dove $\mathcal{S}_{\cdot, r}^{n \Delta s, a}$ va intesa come il vettore delle popolazioni predette nell' r -esima
 1019 simulazione esatta, se $a=1$, o approssimata, se $a=2$; successivamente si
 1020 convolve \underline{s} rispetto all'indice del tempo:

$$s_{i, r}^{n, a} \equiv \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} \underline{s}_i^{(n-1)N_f + j, a} r, \quad \forall n, \forall a, \forall i, \forall r,$$

1021 vale a dire si mediano ogni Δf elementi delle N_s catture. Tale mollificazione
 1022 è necessaria per rendere s meno rumoroso rispetto a \underline{s} e quindi più leggibile
 1023 una volta raffigurato.

1024 Per quanto riguarda gl'istanti temporali considerati, si hanno tre forme a
 1025 seconda di come s'intende l'indice n :

$$t_n = n \Delta t, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N_t\},$$

$$t_n^s = t_n \Delta s, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N_s\},$$

$$t_n^f = t_n^s \Delta f, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N_f\},$$

1026 rispettivamente per i tempi discretizzati, campionanti e ridotti; a prescindere
 1027 vale comunque $t_{N_t} = t_{N_s}^s = t_{N_f}^f = T$.

1028 **Osservazione 4.4.** I parametri temporali N_t , N_s ed N_f non contano il tempo
 1029 iniziale perché fa riferimento alla distribuzione iniziale $s_0 \in \mathbb{R}_+^N$.

1030 **Ipotesi 4.3.** In questa trattazione si considerano $\Delta t = 0.01$, $N_s = 1000$, $N_f = 50$
 1031 mentre N_t viene scelto per essere poco superiore al tempo di convergenza
 1032 della simulazione, se i risultati convergono, ma sicuramente è un multiplo
 1033 di 10 per garantire che N_s sia un suo divisore.

1034 **Osservazione 4.5.** Per la maggior parte dei grafici si considera esclusiva-
 1035 mente la distribuzione al tempo finale T senza convoluzione, cosicché, per
 1036 leggerezza di notazione, si può impropriamente denotare con $s^T \in \mathbb{R}_+^{2 \times N \times R}$
 1037 il tensore del terz'ordine tale che $s^T \equiv s^{N_s}$.

1038 **4.2.3 Definizione dei grafici**

1039 **Istogrammi**

1040 I primi grafici considerano gl'istogrammi [normalizzati] della distribuzione
1041 al tempo finale T .

1042 Si inizia considerando il massimo e il minimo elemento del tensore \mathbf{s}^T ,

$$s_{\max} \equiv \max_{a,i,r} s_{i,r}^{T,a} \quad \text{e} \quad s_{\min} \equiv \min_{a,i,r} s_{i,r}^{T,a},$$

1043 coi quali si può definire una griglia comune equispaziata su cui costruire
1044 gl'istogrammi. Siano N_c il numero di intervalli della griglia, ossia il
1045 numero di classi, allora definita Istogramma: $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_c}$ come la funzione
1046 che restituisce i valori [normalizzati] delle classi dell'istogramma, il tensore
1047 $\mathbf{h} \in \mathbb{R}_+^{2 \times N_c \times R}$ si scrive

$$\mathbf{h}_{\cdot,r}^a \equiv \text{Istogramma}(\mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}), \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

1048 Valutati gl'intervalli di confidenza

$$IC_R^{0.05}(\mathbf{h}_c^a) = \bar{h}_c^a \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v_c^a}{R}}, \quad \forall a \text{ e } \forall c,$$

1049 si possono rappresentare con \bar{h}^a l'istogramma medio della simulazione esatta
1050 e approssimata, e con $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{v_c^a/R}$ l'errore stocastico sulle stime dei
1051 valori medi delle classi.

1052 **Lognormale bimodale**

1053 Per quanto riguarda i fittaggi lognormali bimodali la logica è simile agl'isto-
1054 grammi: sia

$$\mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

1055 la densità di una distribuzione lognormale bimodale, con densità (1.4), fittata
1056 dal vettore $\mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}$ e sia

$$\mathcal{L}(x; \mathbf{s}^{T,a}) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^R$$

1057 la funzione vettoriale tale che

$$\mathcal{L}(x; \mathbf{s}^{T,a}) \equiv [\mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{\cdot,1}^{T,a}) \quad \mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{\cdot,2}^{T,a}) \quad \dots \quad \mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{\cdot,R}^{T,a})]^T,$$

1058 che in essenza raccoglie puntualmente tutti i fittaggi in un unico vettore.
1059 Allora gl'intervalli di confidenza hanno forma

$$IC_R^{0.05}(\mathcal{L}(x; \mathbf{s}^{T,a})) = \bar{\mathcal{L}}^a(x) \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v^a(x)}{R}}, \quad \forall x \in [s_{\min}, s_{\max}] \text{ e } \forall a,$$

1060 in cui, come prima, $\bar{\mathcal{L}}^a(x)$ è la funzione media mentre $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{v^a(x)/R}$ la
1061 sua incertezza stocastica.

1062 **Osservazione 4.6.** Essendo x continuo, l'insieme degl'intervalli di confidenza
1063 forma per le funzioni un fascio di confidenza.

1064 Si nota, in conclusione, che i tre grafici sono in scala semilogaritmica per
1065 far emergere la distribuzione normale dalla lognormale bimodale.

1066 ***Funzione di ripartizione empirica***

1067 La distribuzione di Pareto è fittata a partire dalla funzione di ripartizione
 1068 complementare (FRC) empirica che quindi va prima analizzata, ma solo
 1069 nella coda della distribuzione della popolazione.

1070 Il dominio in questo caso viene definito mediante l'ultimo quartile, ossia
 1071 quel valore $s_{3/4}$ tale che $\mathbb{P}(S \leq s_{3/4}) = 3/4$, data una qualunque variabile alea-
 1072 toria S ; ciò corrisponde nella pratica a trovare quell'elemento di $\mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}$ tale
 1073 che

$$\left| \left\{ s_{i,r}^{T,a} \geq s_{3/4} \mid i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} \right| = \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil, \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

1074 che a parole vuol dire che *almeno* $1/4$ di tutti gli elementi di $\mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}$ sono
 1075 superiori a $s_{3/4}$. Allora l'intervallo $[s_{3/4}, s_{\max}]$ caratterizza la coda.

1076 La FRC empirica, che approssima la FRC $\mathbb{P}(S > x)$, si scrive

$$\mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{\cdot,r}^a) \equiv 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{[0,x]}(s_{i,r}^{T,a}), \quad \forall a \text{ e } \forall r, \quad (4.3)$$

1077 dove $\chi_{[0,x]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ è la funzione indicatrice dell'insieme $[0,x]$:

$$\chi_{[0,x]}(w) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } w \in [0,x], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1078 Tuttavia, siccome la (4.3) dev'essere valutata in $x \in [s_{3/4}, s_{\max}]$, e in particolare
 1079 nel tensore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2 \times N_{1/4} \times R}$ di \mathbf{s} ristretto alla coda

$$p_{i,r}^a \equiv s_{N-N_{1/4}+i,r}^{T,a} \quad \forall a, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_{1/4}\} \text{ e } \forall r$$

1080 nel quale $N_{1/4} \equiv \lceil N/4 \rceil$, vale il seguente riscalamento:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}) &= 1 - \frac{N - N_{1/4}}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{1/4}} \chi_{[0,x]}(s_{N-N_{1/4}+i,r}^{T,a}) \\ &= \frac{N_{1/4}}{N} \left[1 - \frac{1}{N_{1/4}} \sum_{i=1}^{N_{1/4}} \chi_{[0,x]}(p_{i,r}^{T,a}) \right] = \frac{N_{1/4}}{N} \mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a), \quad \forall a \text{ e } \forall r, \end{aligned}$$

1081 Vale a dire che $\mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a)$ è uguale a $\mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a})$ a meno di un riscalamento
 1082 $N_{1/4}/N$. Tuttavia l'indice di Pareto è invariante rispetto ai riscalamenti:

1083 **Osservazione 4.7.** In scala logaritmica la (1.2) si scrive

$$\log(R) = \log(c) - \beta \log(s),$$

1084 che equivale a una retta traslata di $\log(c)$; indicando con R' il rapporto R/c
 1085 segue

$$\log(R') \equiv \log(R) - \log(c) = -\beta \log(s),$$

1086 per la quale il coefficiente di Pareto β è invariato.

1087 Da quest'osservazione si può pertanto scegliere $\mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a})$ in scala logarit-
 1088 mica per una maggiore leggibilità dei valori i quali altrimenti, con $\mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a)$,

1089 sarebbero bassi. L'uso di tale scala introduce però un lieve problema: l'ultimo
 1090 elemento $p_{N_{1/4},r}^a$ ha ordinata nulla ed è dunque non visibile; per ovviare
 1091 il problema si può traslare la FRC empirica in scala lineare

$$\mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a) + \frac{1}{2N_{1/4}}, \quad \forall a \text{ e } \forall r, \quad (4.4)$$

1092 ciò corrisponde in scala logaritmica a una traslazione non uniforme dei valori
 1093 che quindi vengono falsati, seppure di poco essendo $1/2N_{1/4}$ una quantità
 1094 piccola; per tale ragione tale modifica è valida *solo graficamente* e non per il
 1095 calcolo dell'indice di Pareto.

1096 Di conseguenza, nel complesso, la FRC empirica è raffigurata in scala
 1097 logaritmica dal diagramma a dispersione delle coppie

$$\left(\frac{N}{N_{1/4}} \mathcal{F}(\bar{p}_i^a; \mathbf{s}_{\cdot,r}^{T,a}) + \frac{1}{2N_{1/4}}, \bar{p}_i^a \right) = \left(\mathcal{F}(\bar{p}_i^a; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a) + \frac{1}{2N_{1/4}}, \bar{p}_i^a \right) \quad \forall a \text{ e } \forall i,$$

1098 ove \bar{p}_i^a viene dagl'intervalli di confidenza

$$IC_R^{0.05}(\mathbf{p}_i^a) = \bar{p}_i^a \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v_i^a}{R}}, \quad \forall a \text{ e } \forall i.$$

1099 **Osservazione 4.8.** Si noti che, contrariamente ai casi precedenti, l'intervallo
 1100 di confidenza è orizzontale e non verticale; difatti l'immagine della FRC em-
 1101 pirica è invariata rispetto alle simulazioni che modificano solo le popolazioni
 1102 dei centri maggiori, ossia l'ascissa della FRC empirica.

1103 *Pareto e relativo indice*

1104 Per quanto riguarda il fintaggio della distribuzione di Pareto il ragionamento
 1105 è analogo a quello visto per la lognormale bimodale: sia

$$\mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

1106 la densità di distribuzione di Pareto, con FRC (1.2), fissata dal vettore $\mathbf{p}_{\cdot,r}^a$ e
 1107 sia

$$\mathcal{P}(x; \mathbf{p}^a): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^R$$

1108 la funzione vettoriale tale che

$$\mathcal{P}(x; \mathbf{p}^a) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,1}^a) & \mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,2}^a) & \dots & \mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,R}^a) \end{bmatrix}^\top.$$

1109 Allora gl'intervalli di confidenza hanno forma

$$IC_R^{0.05} \left(\frac{N}{N_{1/4}} \mathcal{P}(x; \mathbf{p}^a) \right) = \bar{\mathcal{P}}^a(x) \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v^a(x)}{R}}, \quad \forall x \in [s_{3/4}, s_{\max}] \text{ e } \forall a,$$

1110 ove $N/N_{1/4}$ è il fattore di riscalamento descritto nel § 4.2.3 necessario per
 1111 confrontare l'adattamento colla FRC empirica.

1112 **Osservazione 4.9.** È fissando i dati \mathbf{p} alla distribuzione di Pareto che si ricava
 1113 il relativo indice β , non dalla FRC empirica: ecco perché, essendo puramente
 1114 grafiche, le modifiche nella (4.4) sono tollerabili.

1115 **Evoluzione della taglia media**

1116 Si esprima con $\bar{s} \in \mathbb{R}_+^{N_f \times 2 \times R}$ il tensore delle taglie medie rispetto ai nodi

$$\bar{s}_r^{n,a} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_{i,r}^{n,a}, \quad \forall n, \forall a \text{ e } \forall r,$$

1117 allora gl'intervallo di confidenza di \bar{s} sono

$$IC_R^{0.05}(\bar{s}^{n,a}) = \bar{s}^{n,a} \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v^{n,a}}{R}}, \quad \forall n \text{ e } \forall a.$$

1118 L'andamento della taglia media totale è raffigurato interpolando linearmente
1119 le coppie

$$(t_n^f, \bar{s}^{n,a}), \quad \forall n \text{ e } \forall a,$$

1120 a istanti temporali contingui; lo stesso vale per gli estremi degl'intervalli di
1121 confidenza $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{v^{n,a}/R}$, che quindi diventano un fascio di confidenza.

1122 **Taglie medie vs gradi**

1123 S'indichi ora con $\bar{s} \in \mathbb{R}_+^{2 \times R}$ il tensore delle taglie medie rispetto alle simula-
1124 zioni

$$\bar{s}_i^a \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R s_{i,r}^{T,a}, \quad \forall a \text{ e } \forall i,$$

1125 allora dalle coppie

$$(k_i, \bar{s}_i^a), \quad \forall a \text{ e } \forall i,$$

1126 si può definire il grafico a dispersione che lega la taglia media tra tutte le
1127 simulazioni di un nodo al suo grado.

1128 **Osservazione 4.10.** In questo caso non si disegnano gl'intervalli di confiden-
1129 za erché il grafico è già molto denso e aggiungere ulteriori barre verticali/orizzontali lo renderebbe difficilmente leggibile.

1131 **Evoluzioni delle taglie medie delle classi dei gradi**

1132 Sia $\mathcal{K} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ l'insieme dei gradi distinti di k , si denoti con $\bar{s} \in \mathbb{R}^{N_f \times 2 \times |\mathcal{K}|}$
1133 il tensore

$$\bar{s}_k^{n,a} \equiv \frac{1}{|\mathcal{J}_k|} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R s_{i,r}^{n,a}, \quad \forall n, \forall a \text{ e } \forall k,$$

1134 ove \mathcal{J}_k viene dalla (3.32) e rappresenta l'insieme degl'indici con grado k .
1135 Pertanto interpolando linearmente le coppie

$$(t_n^f, \bar{s}_k^{n,a}), \quad \forall n, \forall a \text{ e } \forall k,$$

1136 a istanti temporali contigui, si può rappresentare l'andamento temporale
1137 della popolazione media della classe k -esima tra tutte le simulazioni.

1138 Si conclude notando che non si disegnano gl'intervalli di confidenza per
1139 la medesima ragione chiarita nell'Oss. 4.10.

1140 **4.2.4 Sulle fluttuazioni γ**

1141 Nelle [RE] è stato introdotto per completezza il termine γ legato alle fluttuazioni,
 1142 ossia a quei fenomeni di morte e nascita che caratterizzano la naturale
 1143 variazione di una popolazione intorno a una media. Si argomenta adesso
 1144 che è possibile trascurarle per due ragioni:

- 1145 1. si è interessati solo alla predizione della distribuzione stazionaria da
 confrontare con quella reale del 1991 e
- 1146 2. dal vincolo (3.26) le uniche perturbazioni simmetriche sono per loro
 1147 natura piccole, essendo concentrate in un intorno dell'origine.

1149 In effetti la Fig. 4.1 conferma che γ introduce solo una lieve incertezza sui
 1150 risultati, simulati coi parametri nella Tab. 4.1 e colla regola d'interazione

$$E(s, s_*, i, i_*) \equiv (1 - \zeta)\lambda \frac{\frac{(s_*/s)(w_{i_*}/w_i)}{\alpha}}{1 + \frac{(s_*/s)(w_{i_*}/w_i)}{\alpha}} + \zeta\lambda \frac{\frac{(s/s_*)(w_i/w_{i_*})}{\alpha}}{1 + \frac{(s/s_*)(w_i/w_{i_*})}{\alpha}}, \quad (4.5)$$

1151 che è spiegata implicitamente nel corso del § 4.3 ed è brevemente discussa
 1152 più nel dettaglio nel § 4.4.1.

	λ	α	ζ	σ	N_t
Senza γ	0.1	1	0.1	—	10^6
Con γ	0.1	1	0.1	0.05	10^6

Tabella 4.1: Parametri della Fig. 4.1.

1153 Dunque γ introduce solo del lieve rumore che, sebbene abbia il nobile
 1154 scopo di rendere più realistico il modello, non aiuta a interpretare i risultati
 1155 rispetto a quelli reali.

1156 **4.3 REGOLE D'EMIGRAZIONE**

1157 La scelta di E dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione. In tutte le regole a venire s e s_* vanno intese come rispettivamente
 1158 la città interagente e ricevente

1159 Infine si avvisa che per tutte le regioni italiane, Italia inclusa, sono stati
 1160 ottenuti analoghi risultati a quelli venturi della Sardegna; questa è la ragione
 1161 per cui in questo paragrafo ci si concentrerà solo su quella regione, sebbene
 1162 alcuni sono analizzati anche per l'Italia alla fine.

1164 **4.3.1 Regola taglia**

1165 Una prima possibilità consiste nella

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad [RE]_T$$

1166 che in essenza è la [10, (2.2), § 2, p. 223] modificata mediante la [10, (4.5),
 1167 § 4, p. 228], ossia è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso

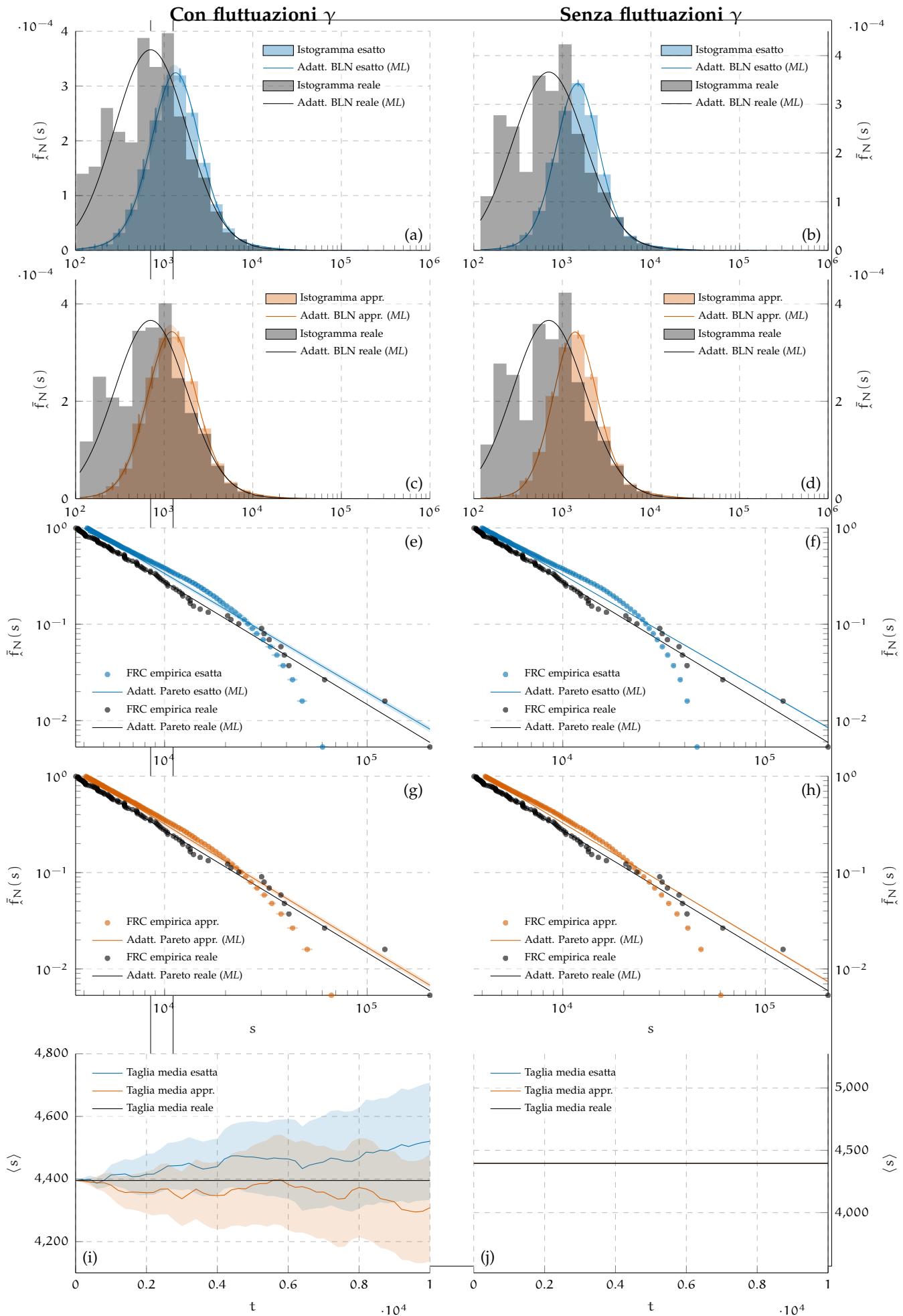


Figura 4.1: Confronto di una simulazione con e senza fluttuazioni; la regola d'immigrazione è la (4.5) mentre i parametri sono illustrati nella Tab. 4.1.

di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- ◇ $\lambda \in (0,1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- ◇ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche e non lineari, a causa della (??).

Si vuole evitare lo spopolamento delle città a causa delle fluttuazioni nella (3.24) dato che nella (??) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti

4.3.2 Regola taglia-gradi

$$E_{TD}(s, s_*, i, i_*) \equiv \lambda \frac{[(s_*/s)(k_{i_*}/k_i)]^\alpha}{1 + [(s_*/s)(k_{i_*}/k_i)]^\alpha}, \quad [RE]_{TD}$$

4.3.3 Regola frazionata

$$E_{TD}^f(s, s_*, i, i_*) \equiv (1 - \zeta) E_{TD}(s, s_*, k_i, k_{i_*}) + \zeta E_{TD}(s_*, s, k_{i_*}, k_i) \quad [RE]_{TD}^f$$

4.3.4 Regola taglia-forza

$$E_{TD}(s, s_*, i, i_*) \equiv \lambda \frac{[(s_*/s)(w_{i_*}/w_i)]^\alpha}{1 + [(s_*/s)(w_{i_*}/w_i)]^\alpha}, \quad [RE]_{TF}$$

4.3.5 Interpretazioni

In poche parole la ([RE]_T) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

4.4 ALTRI CASI NOTEVOLI

4.4.1 Varianti delle regole d'interazione

4.4.2 Il caso dell'Italia

4.4.3 Il caso della Valle d'Aosta

1190

5 | CONCLUSIONI

1191

1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della rete statica.
3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

1192

1193

1194

1195

APPENDICE

A CODICE

Listato 1: Codice «main.py»

```
1  from multiprocessing import freeze_support
2
3
4
5  def main():
6      import libGUIs
7      import libData as libD
8      import libNetworks as libN
9      import libKTMAS as libK
10
11
12      ### Graphic User Interface ###
13      clsGUI = libGUIs.ParametersGUI()
14      clsPrm = clsGUI.GatherParameters() # Parameters
15
16
17      if clsPrm.simFlag:
18
19          ### Data extraction ###
20          if clsPrm.extraction: libD.ExtractRegionData()
21
22
23          ### Matrices extraction ###
24          clsReg = libD.LoadRegionData(clsPrm.region)
25
26
27          ### Network analysis ###
28          if clsPrm.analysis:
29              clsNA = libN.NetworkAnalysis(clsPrm,clsReg)
30
31              clsNA.DegreeDistributionFig()
32              clsNA.WeightDistributionFig()
33              clsNA.StrengthDistributionFig()
34
35              clsNA.BetweennessCentralityFig()
36              clsNA.StrengthVsDegreeFig()
37
38              clsNA.ACoefficientFig()
39              clsNA.WClusteringCoefficientFig()
40
41              clsNA.AAssortativityFig()
42              clsNA.WAssortativityFig()
43
44              # clsNA.ShowFig()
45
46
47          ### Kinetic simulation ###
48          if clsPrm.parametricStudy:
49              clsKS = libK.ParametricStudy(clsPrm,clsReg)
50          else:
51              clsKS = libK.KineticSimulation(clsPrm,clsReg)
52
53              clsKS.MonteCarloSimulation()
54
55              clsKS.SizeDistrFittingsFig()
56              clsKS.AverageSizeFig()
```

```
1254
1255     clsKS.SizeVsDegreeFig()
1256     clsKS.SizeDistrEvolutionFig()
1257     clsKS.SizeEvolutionsFig()
1258
1259     # clsKS.ShowFig()
1260
1261 if __name__ == "__main__":
1262     freeze_support()
1263     main()
```

1263

ELENCO DELLE FIGURE

1264 Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	2
1265 Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.	5
1267 Figura 2.2	Forza contro grado per la Sardegna.	9
1269 Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [6] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	11
1272 Figura 3.1	Transizione della densità gamma verso l'asimmetria con $\lambda = 0.1$ ed $E = \lambda$, da cui $\langle \hat{\gamma} \rangle = 0.9$ e $\beta = \langle \hat{\gamma} \rangle / \alpha$	32
1274 Figura 3.2	Schema riassuntivo del § 3.3.2.	37
1275 Figura 4.1	Confronto di una simulazione con e senza fluttuazioni; la regola d'emigrazione è la (4.5) mentre i parametri sono illustrati nella Tab. 4.1.	50

ELENCO DELLE TABELLE

1278	Tabella 2.1	Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT ¹ ; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.	8
1280	Tabella 2.2	Confronto con [6] dei pesi maggiori.	9
1281	Tabella 4.1	Parametri della Fig. 4.1.	49

1283

ELENCO DEI LISTATI

1284

- | | | |
|---|----------------------------|----|
| 1 | Codice «main.py» | 55 |
|---|----------------------------|----|

BIBLIOGRAFIA

- [1] Felix Auerbach. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Albert-László Barabási, Réka Albert & Hawoong Jeong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [4] Marcus Berliant & Axel H Watanabe. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [5] Anna D Broido & Aaron Clauset. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [6] Andrea De Montis et al. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [7] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [8] Jan Eeckhout. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [9] Stefano Gualandi & Giuseppe Toscani. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [10] Stefano Gualandi & Giuseppe Toscani. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [11] International Standards Organisation. *ISO 80000-3 Quantities and units—Part 3: Space and time*.
- [12] ISTAT. *Basi territoriali e variabili censuarie*. Riferimento specifico al censimento della popolazione e delle abitazioni del 1991. 2024. URL: <http://www.istat.it/notizia/basi-territoriali-e-variabili-censuarie/> (visitato il giorno 12/02/2026).
- [13] ISTAT. *Confini delle unità amministrative a fini statistici al 1° gennaio 2018. Dati storici (1991)*. Riferimento specifico ai dati del 1991. 2025. URL: <http://www.istat.it/notizia/confini-delle-unita-amministrative-a-fini-statistici-al-1-gennaio-2018-2/> (visitato il giorno 12/02/2026).

- 1325 [14] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo. Dati storici (1991)*.
1326 Riferimento specifico ai dati della matrice di pendolarismo del 1991.
1327 2025. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- 1329 [15] Nadia Loy & Andrea Tosin. «A viral load-based model for epidemic
1330 spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
1331 URL: <https://arxiv.org/abs/2104.12107>.
- 1332 [16] Nadia Loy & Andrea Tosin. «Essentials of the kinetic theory of multi-
1333 agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025). URL: <https://arxiv.org/abs/2503.11554>.
- 1335 [17] Marco Nurisso, Matteo Raviola & Andrea Tosin. «Network-based ki-
1336 netic models: Emergence of a statistical description of the graph topo-
1337 logy». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI:
1338 [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- 1339 [18] Lorenzo Pareschi & Giuseppe Toscani. *Interacting multiagent systems:*
1340 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 1341 [19] George Kingsley Zipf. *Human behavior and the principle of least effort: An*
1342 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.