Politecnico di Torino

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente

Relatori
prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

Candidato
Valerio Taralli

firma dei relatori

. . . .
. . . .

firma del candidato

. . . .

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e *Marco*.

INDICE

1 INTRODUZIONE

2 TEORIE CINETICHE DEI SISTEMI MULTIAGENTE

2.1 NESSO DISCRETO–CONTINUO

Si consideri la distribuzione totale

$$f(x, v, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(v, t) \otimes \delta(x - i), \tag{1}$$

se le particelle sono *indistinguibili* (1° ipotesi) allora vale

$$f_i(v, t) = f_j(v, t) = f(v, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \tag{2}$$

da cui la distribuzione marginale

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}} f(x, v, t) dx &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} f_i(v, t) \otimes \delta(x - i) dx \\
&= \frac{1}{N} f(v, t) \otimes \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} \delta(x - i) dx \\
&= \frac{1}{N} f(v, t) \otimes \sum_{i \in \mathcal{I}} 1 \\
&= \frac{1}{N} f(v, t) N = f(v, t),
\end{aligned} \tag{3}$$

e ciò è anche coerente col fatto che in un gas il numero di particelle è molto elevato.

Considerando una *matrice d'adiacenza unitaria* (2° ipotesi) si può scrivere la (2.10) come

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \varphi(v) f(v, t) dv &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v^{'}) - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\
&+ \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v_*^{'}) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\
&= \frac{1}{2N} N \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v^{'}) - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\
&+ \frac{1}{2N} N \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v_*^{'}) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v^{'}) - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v_*^{'}) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_*,
\end{aligned} \tag{4}$$

che unita all'ipotesi d'*interazioni simmetriche* (3° ipotesi), ossia tali che

$$v^{'} = \Psi(v, v_*) = \Psi_*(v_*, v) \quad \text{ove } v_* = \Psi_*(v, v_*), \tag{5}$$

porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $v_* = v$ e $v = v_*$)

$$\int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v'_*) - \varphi(v_*) \rangle f(v,t) f(v_*,t)\, dv dv_* = \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v,t) f(v_*,t)\, dv dv_*, \tag{6}$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \varphi(v) f(v,t)\, dv = \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v,t) f(v_*,t)\, dv dv_*, \tag{7}$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann.

3 SIMULAZIONI