

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	7
2.1	Definizioni miscellanee	7
2.2	Reti e città	8
2.3	Cenni sui dati	9
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	11
3.1	Descrizione cinetica classica	11
3.2	Descrizione cinetica retale	11
3.2.1	Impostazione	11
3.2.2	Algoritmi d'interazione	12
3.2.3	Interazioni azione-reazione	12
3.3	Derivazione dell'equazioni cinetiche	13
3.3.1	Derivazione esatta	13
3.3.2	Interazioni tra città	15
3.3.3	Derivazione approssimata	17
3.4	Nesso discreto-continuo	17
3.4.1	Ipotesi semplificative	17
3.4.2	Analisi della 1° IS	18
3.4.3	Analisi della 2° IS	18
3.4.4	Analisi della 1°, 2° e 3° IS	19
4	SIMULAZIONI	21
5	CONCLUSIONI	23

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già studiato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf [10] quasi cinquant'anni dopo: nella sua teoria ha introdotto la legge che oggi prende il suo nome.[\(§\)](#)

Aggiungere le formule sul rango[\(§\)](#).

D'altra parte, nella letteratura più recente, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, la maggior parte degli articoli su tale argomento o considerano le città come luoghi ove vivono gli agenti, creando così un modello di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [\(§\)](#), o non considerano una naturale struttura da grafo [\(§\)](#) oltre ad astrarre eccessivamente le città e i loro dintorni [\(§\)](#).

In questo elaborato le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono su mediante la struttura di un grafo spaziale; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

La suddivisione è come segue: nel secondo capitolo si affronteranno brevemente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto quelli pertinenti alla topologia interurbana; nel terzo la teoria cinetica dei sistemi multiagente è approfondita prima da un punto di vista classico, poi mediata dai grafi sia esattamente che approssimativamente; infine nel quarto si illustreranno i principali risultati mentre nel quinto si conclude con delle note finali e potenziali sviluppi futuri.

Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice in Python è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 3 (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso¹ associato al lato (i, j) . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

Definizione 4 (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2), ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

¹ Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

54 Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

55 **Ipotesi 1.** Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

56 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
57 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
58 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle conne-
59 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
60 stesse.

61 2.2 RETI E CITTÀ

62 Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il pro-
63 blema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti
64 possibili tra le città

65 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i
66 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati
67 e le loro intersezioni come nodi [7, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la
68 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [7, § 3.2.1 p. 22]; altri si
69 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in
70 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [7, § 3.1.3.2 p. 17], navale
71 [7, § 3.1.4 p. 19], aereo [7, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

72 Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione
73 della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 74 1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono
75 troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola
76 città;
- 77 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contempora-
78 neamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere
79 diversi trasporti per muoversi.

80 Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti
81 pendolari [7, § 3.1.3.3 p. 18; 4] tra città che mostrano olisticamente tutti i
82 possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre
83 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché
84 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

85 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di
86 grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e immedia-
87 ta dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può interagire
88 con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col primo; si è dun-
89 que di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2) perché il contesto richiede
90 di considerare la direzione d'interazione.

91 Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [4, 7], ov-
92 vero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò tale
93 osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando si
94 definiranno le leggi d'interazione. Perdipiù, contrariamente a quanto si pos-
95 sa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2]
96 proprio a causa della sua natura spaziale [3, 7]; ciò non esclude l'esistenza di

97 nodi piú centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato
 98 superiormente dalla natura spaziale del grafo.

99 2.3 CENNI SUI DATI

100 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT [6] seguendo
 101 l'esempio di [4]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una serie
 102 di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT².

² si v. il *file* «trapeng91.txt» per maggiori informazioni.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

3.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

3.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

3.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o più agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia $X \in \mathcal{J}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{J} è l'insieme dei vertici mentre \mathcal{E} dei lati di \mathcal{G} . Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geq 0}$; la funzione $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è una variabile aleatoria da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popolazioni \mathcal{P} e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geq 0$. Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da \mathcal{E} , definendo così un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{J}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (1)$$

ove $N \equiv |\mathcal{J}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{J},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

129 **3.2.2 Algoritmi d'interazione**

130 Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti intera-
 131 giscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel det-
 132 taglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in$
 133 $\mathcal{J} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un interazione con
 134 un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \quad (2)$$

135 ove $\Theta \in [0, 1]$ è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'in-
 136 terazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ($\Theta = 1$) o no ($\Theta = 0$);
 137 d'altro canto $S'_t \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, V_t) in
 138 seguito a un'interazione avvenuta.

139 Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (3)$$

140 il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzio-
 141 nale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione
 142 $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle
 143 connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

144 dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^* ;
 145 per coerenza è necessario impostare $\Delta t \leq 1$ che impone un limite superiore
 146 al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto
 147 facile da verificare nella pratica.

148 La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria $S'_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ dipen-
 149 dente in generale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4)$$

150 in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

151 **3.2.3 Interazioni azione-reazione**

152 Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con
 153 un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

154 Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si
 155 può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$
 156 mentre quella *in indietro* sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile
 157 in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto
 158 l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga
 159 a quella dell'agente (X, S_t) :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \quad (5)$$

160 ove si osserva che la Θ è la stessa della (2) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$
 161 ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso

162 in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di
 163 simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

164 è definita mediante una funzione $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da
 165 Ψ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [8, § 2.2.1] sarà
 166 identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[\text{AR}] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

167 Si conclude questa sezione osservando che gli agenti (X, S_t) , (X^*, S_t^*) sono
 168 campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

169 3.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

170 3.3.1 Derivazione esatta

171 Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'e-
 172 voluzione per le distribuzioni di probabilità f_i delle opinioni degli agenti;
 173 per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi
 174 multiagente [8, 9].

175 Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una
 176 quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico
 177 agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR],
 178 valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agli indici
 179 e alla popolazione a tempo fissato, si ha {§}

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

180 da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

181 laddove, prendendo il limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (7)$$

182 Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma
 183 colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (8)$$

184 Osservando che le coppie (X, S_t) e (X^*, S_t^*) fanno riferimento a un agente
 185 rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (7, 8), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E}[A(X, X^*) (\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f dv dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (9)$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (1):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*) \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (10)$$

mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni Ψ e Ψ_* .

Si noti che la (9) è valida per ogni funzione *test* Φ per cui è un'equazione debole per la distribuzione f . (commento su Fokker-Planck (S))

Si osservi anche che la (9) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione f di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta $g(x, x_*, s, s_*, t)$ degli agenti interagenti nel prodotto $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$.

Dalla (9) con una scelta adeguata della funzione *test* Ψ , è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i . Sia $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$, dove $\phi_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$ e $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ è arbitrario. Allora usando la (1) dentro la (9) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (11)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento (S)). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (12)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard e \mathbf{M}^\top al trasposta di \mathbf{M} . Si noti che \mathbf{M} altro non è che la matrice d'adiacenza di \mathcal{G} .

214 **3.3.2 Interazioni tra città**

215 Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

216 Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-
217 reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra,
218 scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto
219 che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

220 Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile
221 l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta,
222 ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò
223 implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

224 Gli stati postinterazione (10) prendono come riferimento leggi d'interazio-
225 ni lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS^*_t, \\ S^{*'}_t = p_*S_t + q_*S^*_t, \end{cases} \quad (13)$$

226 le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s'_* = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (14)$$

227 ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$
228 sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rap-
229 presenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni
230 lineari (13) le (14) soddisfano

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e \quad p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e \quad q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (15)$$

231 rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio
232 deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \end{aligned} \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \quad (16)$$

233 ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relati-
234 vi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da
235 come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo ma-
236 nuscrutto si è modificata la [5, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [5, (4.5), § 4, p.
237 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (17)$$

238 che in essenza è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di
239 emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rappor-
240 to s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il
241 seguente significato:

242 $\diamond \lambda \in (0, 1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le
243 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;

244 $\diamond \alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapida-
245 mente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (17) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i piú svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (15) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (17).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è piú agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (14), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (18)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (18) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (14), situazione che si vuole evitare¹ dato che nella (17) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiú, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (18);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che piú grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 si;
- ◊ la distribuzione esponenziale è quella piú promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◊ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (19)$$

ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (20)$$

¹ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

283 Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la [F₃](#), e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (21)$$

284 con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da
285 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (22)$$

286 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la [F₂](#) semplicemente tra-
287 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzio-
288 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

289 D'altra parte la [F₁](#) necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
290 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
291 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
292 di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

293 ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (23)$$

294 siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0, 1)$. La [\(23\)](#) implica quindi che non
295 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la [F₁](#), ma che
296 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ più
297 piccola è la varianza, e viceversa.

298 3.3.3 Derivazione approssimata

299 3.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

300 È d'interesse esplorare il legame presente tra la [\(11\)](#) coll'equazione classica
301 di Boltzmann [{§}](#).

302 3.4.1 Ipotesi semplificative

303 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-
304 care alla [\(11\)](#):

305 1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la
306 matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

307 2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (24)$$

308 3° IS Si ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (25)$$

309 **3.4.2 Analisi della 1° IS**

310 Con tal'ipotesi la (11) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

311 e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agl'indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (26)$$

312 che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

313 mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle FF^* ds ds_*, \quad (27)$$

314 la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann {§}. Ciò
315 significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano di-
316 stinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la
317 distribuzione media (26).

318 Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una
319 matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a
320 quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio
321 quella media F.

322 **3.4.3 Analisi della 2° IS**

323 La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti
324 siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme
325 alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente.
326 Pertanto la (11) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*, \end{aligned}$$

327 che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

328 e definendo $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_* \right]. \quad (28)$$

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix \mathbf{M} ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

- 1: $\tilde{V} \leftarrow V_0$
- 2: $t \leftarrow 1$
- 3: **for** $t < T$ **do**
- 4: $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
- 5: $V \leftarrow \tilde{V}$
- 6: $P \leftarrow$ random permutation of $\{1, \dots, N\}$
- 7: $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
- 8: $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
- 9: $i \leftarrow 1$
- 10: **for** $i < N/2$ **do**
- 11: $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i)) \Delta t)$
- 12: $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
- 13: $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
- 14: $i \leftarrow i + 1$
- 15: **end for**
- 16: $t \leftarrow t + \Delta t$
- 17: **end for**

329 In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente si-
 330 mile è la rete a una completamente connessa²; d'altra parte l'equazione è
 331 analoga a quella classica di Boltzmann [\[§\]](#).

332 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla
 333 (11), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2
 334 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scom-
 335 parsa per la [1° IS](#).

3.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS

337 Visto che vale [1° IS](#) si può partire dalla (27) nella quale la distribuzione
 338 media (26) diventa per [2° IS](#)

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

339 ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti³, essendo questi, appunto,
 340 indistinguibili.

341 In tal modo la (27) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

² Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

³ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

342 che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
343 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

344 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

345 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche

346 **{S}** usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
347 tra una popolazione di particelle di un gas.

349

5 | CONCLUSIONI

350 Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-
351 Planck per la distribuzione stazionaria.

352 Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della
353 rete statica.

354 Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [4] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [5] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [6] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [7] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [8] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- [9] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- [10] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.