

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea  
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della  
popolazione tra città su reti spaziali mediante la  
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



**Relatori**

prof. Andrea Tosin  
prof. Nome Cognome

*firma dei relatori*

.....  
.....

**Candidato**

Valerio Taralli

*firma del candidato*

.....

Anno Accademico 2025-2026

---

---

Ai miei genitori,  
*Elisabetta e Marco*

# INDICE

1 INTRODUZIONE	5
2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1 Definizioni miscellanee . . . . .	9
2.2 Reti e città . . . . .	10
2.3 Cenni sui dati . . . . .	11
3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	17
3.1 Definizioni preliminari di probabilità . . . . .	17
3.2 Descrizione cinetica di [tipo] Boltzmann . . . . .	20
3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea . . . . .	20
3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea . . . . .	25
3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea . . . . .	26
3.3 Descrizione cinetica urbana su reti . . . . .	29
3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta . . . . .	30
3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata . . . . .	34
3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile . . . . .	40
4 SIMULAZIONI	43
4.1 Premesse . . . . .	43
4.1.1 Metodo Monte Carlo . . . . .	43
4.1.2 Definizione dei grafici . . . . .	44
4.1.3 Sulle fluttuazioni $\gamma$ . . . . .	48
4.2 Regole d'emigrazione . . . . .	48
4.2.1 Regola taglia . . . . .	48
4.2.2 Regola taglia-gradi . . . . .	48
4.2.3 Regola frazionata . . . . .	48
4.2.4 Regola taglia-forza . . . . .	48
4.2.5 Interpretazioni . . . . .	48
4.3 Il caso dell'Italia . . . . .	49
5 CONCLUSIONI	51
APPENDICE	53
A Codice . . . . .	53
ELENCO DELLE FIGURE	55
ELENCO DELLE TABELLE	57



# 1

## INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf<sup>1</sup> [16] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1.1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che  $2000 \approx C/10$ . La stessa legge descritta in (1.1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se in luogo di  $f$  si scrive la popolazione  $s$  [16, Fig. 9-2, p. 375]; tuttavia ciò è vero solo qualora  $s \gg 1$ , ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1.1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia  $S$  la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia  $f_S(s)$  la sua funzione di densità di probabilità<sup>2</sup>, la quale permette d'interpretare  $f_S(s)ds$  come il numero di città con  $s \in (s, s+dt)$ ; allora si dice che  $S$  segue una distribuzione di Pareto nella coda se soddisfa

$$R(s) \equiv \int_s^{+\infty} f_S(t)dt \approx \frac{c}{s^p} \quad \text{se } s \gg 1, \quad (1.2)$$

per una certa costante  $c \in \mathbb{R}_+$  e con  $R(s)$  uguale alla funzione di ripartizione complementare di  $S$ : essa rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a  $s$  e, qualora l'indice di Pareto  $p$  fosse unitario, è analoga al rango  $r$  nella (1.1).

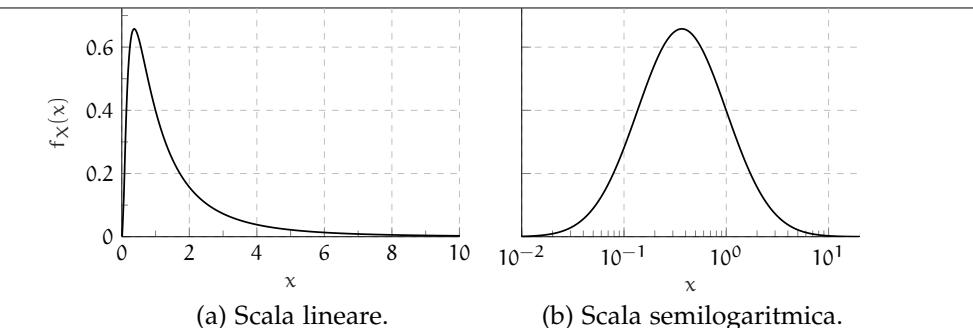
Più recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la  $f_S(s)$  è ben fittata dalla distribuzione lognormale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3)$$

ove  $X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$ ; come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale  $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  (Fig. 1.1) in cui  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  indica la distribuzione gaussiana.

<sup>1</sup> In realtà, come Zipf stesso ammette [16, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

<sup>2</sup> Affinché  $f_S(s)$  esista bisogna rigorosamente anche supporre che  $S$  sia assolutamente continua, ma qui non è necessario entrare nei dettagli per i quali si rimanda ai §§ 3.1 e 3.3.



**Figura 1.1:** Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiù da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che l'intera distribuzione è ben fittata da una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (1.3)

$$f_S(s) \approx f_X = \xi f_{S_1}(s) + (1 - \xi) f_{S_2}(s), \quad (1.4)$$

ove  $\xi \in (0, 1)$ ,  $S_1, S_2 \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$  e  $X \sim \text{BiLognormale}(\xi, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$ .

Pertanto l'obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (**TCSMA**) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d'interazione riguardo al fenomeno dell'emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- ◊ o applicano la **TCSMA** alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]<sup>3</sup> o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la **TCSMA** [3];
- ◊ altri vedono i nodi più come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando così un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [11];
- ◊ infine, l'articolo che più si avvicina all'obbiettivo di questa tesi applica, tuttavia, la sua teoria nel contesto delle reti sociali [14].

Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della teoria dei grafi applicata alla **TCSMA** sono stati piuttosto recenti e prin-

<sup>3</sup> In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s'intende per *dintorni*.

60 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.  
61 Dunque l'aspetto piú innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-  
62 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella piú comune e re-  
63 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come  
64 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

65 Lo scritto sarà cosí suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-  
66 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto  
67 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la **TCSMA** è ap-  
68 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia  
69 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno  
70 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi  
71 futuri.

72 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di  
73 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.



# 2

## NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivono molto brevemente i dati usati.

### 2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

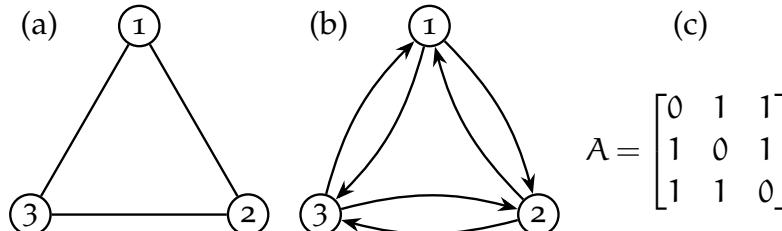
Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

**Definizione 2.1** (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia  $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$ , ove  $\mathcal{I}$  è l'insieme degl'indici dei nodi mentre  $\mathcal{E}$  è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici  $\mathcal{I}$ : due nodi  $i, j \in \mathcal{I}$  sono connessi sse  $(i, j) \in \mathcal{E}$ .

Dall'insieme  $\mathcal{E}$  si può poi specializzare il concetto di grafo:

**Definizione 2.2** (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato  $(i, j) \in \mathcal{E}$  allora  $(j, i) \in \mathcal{E}$  e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dalla Fig. 2.1.



**Figura 2.1:** Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

**Definizione 2.3** (Matrice d'adiacenza). Sia  $N \equiv |\mathcal{I}| \in \mathbb{N}_+$  la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero di vertici totali, si definisce la matrice d'adiacenza  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  pesata come:

$$w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ove  $q_{i,j}$  è il peso associato al lato  $(i,j)$ ; nel caso in cui  $q_{i,j} \equiv 1 \forall i,j \in \mathcal{I}$  si ha la matrice d'adiacenza unitaria  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ :

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si osserva che, se non altrimenti detto, scrivendo solo «matrice d'adiacenza» si sottintende sempre l'unitarietà.

95 **Definizione 2.4** (Matrice trasposta). Data  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , con  $N \in \mathbb{N}_+$ , allora  
 96 s'indica  $A^\top$  la matrice trasposta così definita:

$$a_{i,j}^\top = a_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

97 **Definizione 2.5** (Matrice simmetrica). Data  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , con  $N \in \mathbb{N}_+$ , allora

$$A \text{ è simmetrica} \iff a_{i,j} = a_{j,i} = a_{i,j}^\top \iff A = A^\top. \quad (2.3)$$

98 **Osservazione 2.1.** Per i grafi indiretti sia  $W$  che  $A$  sono simmetriche mentre  
 99 per quelli diretti non è detto che sia così.

100 **Definizione 2.6** (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice  $i \in J$ , in  
 101 un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i}; \quad (2.4)$$

102 d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più  
 103 [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado  
 104 entrante e uscente

$$k_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j}, \quad (2.5)$$

105 rispettivamente.

106 Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2.4, 2.5) ma con  
 107  $w_{i,j}/w_{j,i}$  in luogo di  $a_{i,j}/a_{j,i}$ .

## 108 2.2 RETI E CITTÀ

109 Dopo aver illustrato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il proble-  
 110 ma di come rappresentare con essi la moltitudine di collegamenti possibili  
 111 tra le città

112 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i  
 113 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati  
 114 e le loro intersezioni come nodi [13, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la  
 115 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [13, § 3.2.1 p. 22]; altri si  
 116 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in  
 117 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [13, § 3.1.3.2 p. 17], navale  
 118 [13, § 3.1.4 p. 19], aereo [13, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

119 Tuttavia, da quanto detto nella Cap. 1, è chiaro che per predire la distribu-  
 120 zione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 121 1. ogni rappresentazione intraurbana va scartata perché sono troppo  
   fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
- 122 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ciascun individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [13, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutti i possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di grafo con cui si ha a che fare. Eppure qui la risposta è immediata dopo due osservazioni:

1. una città può interagire con un'altra senza che quest'ultima interagisca colla prima: è necessario considerare il senso di direzione;
2. ammesso che una città possa interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposta: le potenziali interazioni sono simmetriche.

Dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta (Def. 2.2), ovvero la sua matrice d'adiacenza  $\mathbf{A}$  è simmetrica.

**Ipotesi 2.1.** Il grafo  $\mathcal{G}$  è diretto e simmetrico ( $\mathbf{A}$  è simmetrica).

Inoltre in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

**Ipotesi 2.2.** Il grafo  $\mathcal{G}$  è statico:  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{E}$  sono costanti nel tempo.

In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si distribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connessioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città stesse.

Infine si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 13], ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo, seppure, al momento, sia una caratteristica alquanto formale; tuttavia servirà tenerlo a mente quando si definiranno alcune regole d'interazione nel Cap. 4. Perdiú, contrariamente a quanto si possa pensare di primo acchito, tale grafo non è a invarianza di scala [2] a causa del tipo di grafo [4, 13]; ciò non esclude l'esistenza di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato superiormente proprio dalla natura spaziale del grafo.

## 2.3 CENNI SUI DATI

La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [10] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un file di testo formato da una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

I comuni considerati sono tutti quelli italiani (8100) nel 1999, quindi è necessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento `Pen_91It.txt`:

<sup>1</sup> si v. il documento `trapen91.txt` per maggiori informazioni.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond. professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT<sup>1</sup>; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

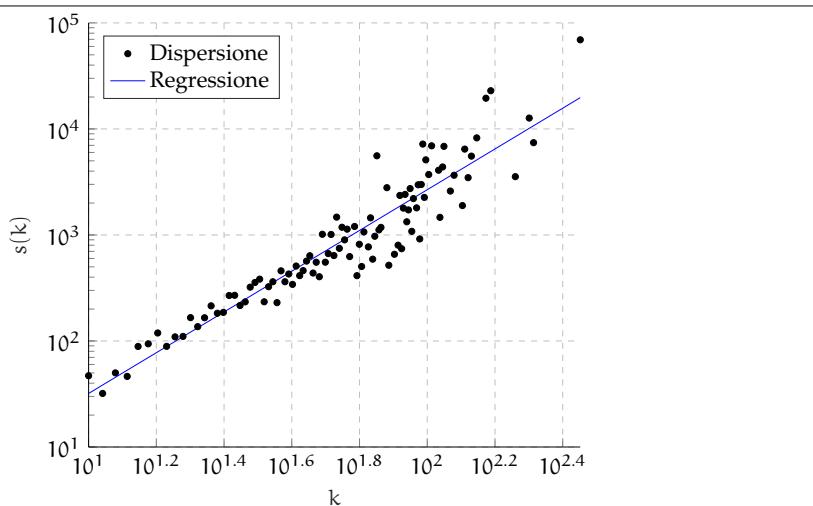
- 165 1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice  
 166 «022008» che però non è elencato nel documento *elencom91.xls* che  
 167 riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;  
 168 2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici  
 169 incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non  
 170 la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229»,  
 171 «241», «216», «203», «224», «236», «246».

172 In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi]  
 173 sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto  
 174 raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può  
 175 notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

176 00200714212215\_\_\_\_\_1,

177 ove \_ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in tota-  
 178 le 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del  
 179 Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in  
 180 realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», ep-  
 181 pure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di  
 182 partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizza-  
 183 re che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo;  
 184 è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il  
 185 codice del comune di destinazione<sup>2</sup>.

176 2 Si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni colo stesso codice comunale, quello che minimizza la  
 177 distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni  
 178 comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella Cap. 4, sono correzioni  
 179 del tutto innecessarie.



**Figura 2.2:** Forza contro grado  $s(k)$  per la Sardegna.

186 Infine nelle Algg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle  
187 seguenti osservazioni:

- 188 1. il coefficiente d'aggregazione medio  $\langle C(k) \rangle = 0.453$  è quasi il doppio  
189 di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);
- 190 2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-  
191 mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che  
192 limiti superiori e inferiori più estesi;
- 193 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g  
194 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-  
195 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come  
196 afferma [5];
- 197 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-  
198 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte  
199 di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-  
200 no molto distanti geograficamente<sup>3</sup>, per cui è ragionevole che i flussi  
201 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu SE	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

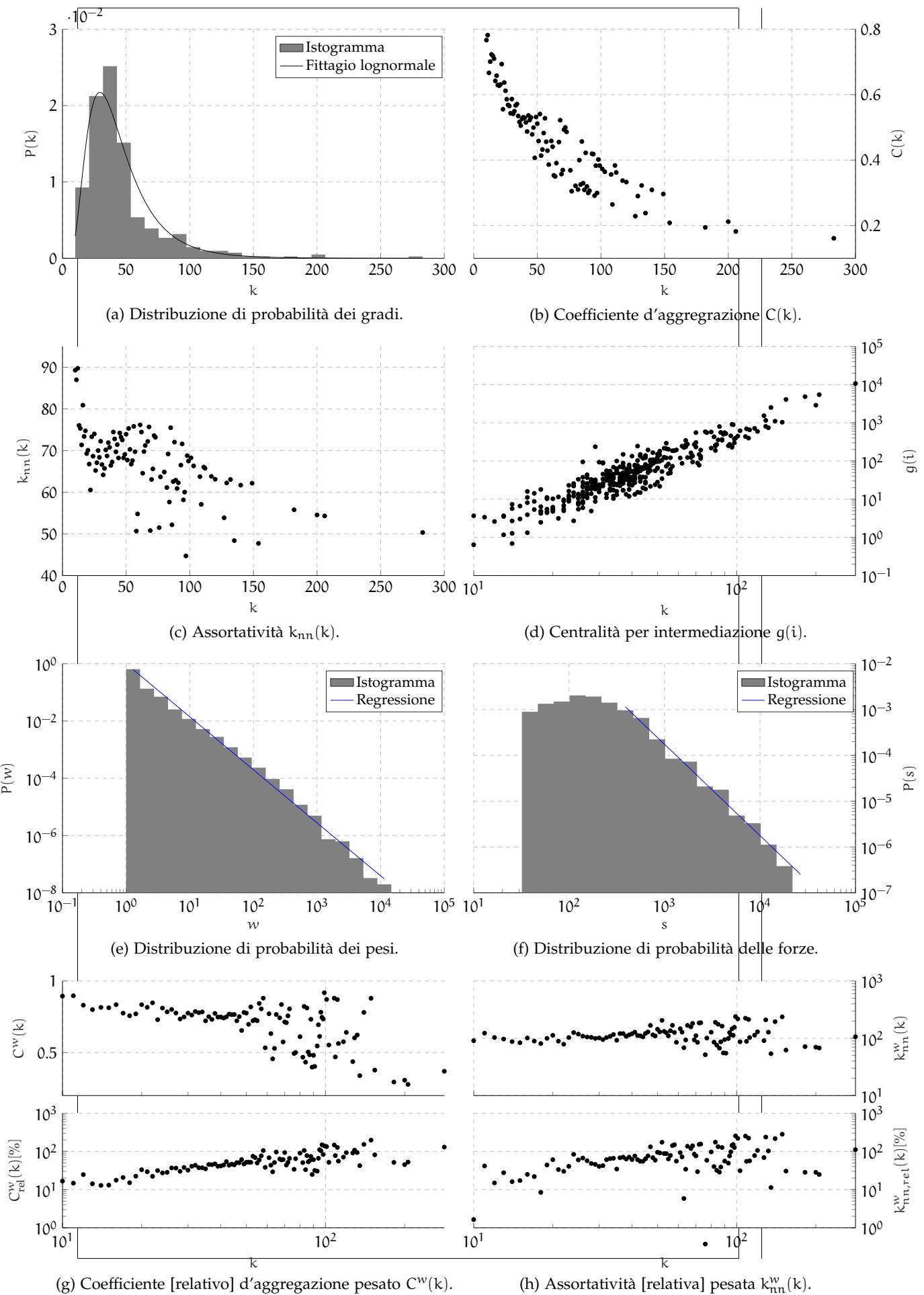
(b) Pesi maggiori di [5]

**Tabella 2.2:** Confronto con [5] dei pesi maggiori.

202 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero  
203 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-

<sup>3</sup> Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

<sup>204</sup>to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva  
<sup>205</sup>tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.



**Figura 2.3:** Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.



# 3

## TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la [TCSMA](#) necessaria per ottenere e discutere i risultati nel Cap. 4.

S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità collegate si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

### 3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvivando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

**Definizione 3.1** (Semiretta intera/reale positiva). In tutto questo elaborato si fanno uso dei seguenti sottinsiemi dei numeri reali e naturali:

$$\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \\ \mathbb{N}_+ \equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.$$

**Definizione 3.2** (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria  $X$  è una funzione misurabile  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , il cui dominio è uno spazio astratto  $\Omega$  di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  composto da una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  e una misura  $\mathbb{P}$  di massa unitaria.

Siccome  $\Omega$  è uno spazio astratto poco trattabile, in questo scritto si definisce una variabile aleatoria semplicemente evidenziando l'appartenenza al suo codominio e sottintendendo il suo dominio:  $X \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 3.3** (Densità di probabilità di  $X$ ). Sia  $X \in \mathbb{R}$  una variabile aleatoria assolutamente continua, allora la densità di probabilità  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  è una funzione misurabile che rappresenta la legge  $\mathbb{P}_X$  di  $X$ :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

**Osservazione 3.1.** Nella definizione precedente si assume che la variabile aleatoria  $X$  sia assolutamente continua, in tal modo  $f_X(x)$  è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali  $f_X(x)dx$  va inteso come  $f_X(dv)$ .

**Definizione 3.4** (Densità congiunta di probabilità di  $\mathbf{X}$ ). Siano  $n \in \mathbb{N}^+$  e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità congiunta di probabilità  $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  è una funzione misurabile che rappresenta la legge  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  di  $\mathbf{X}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}\end{aligned}$$

**Definizione 3.5** (Densità marginale di probabilità di  $X_i$ ). Siano  $n \in \mathbb{N}^+$  e  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità marginale di probabilità  $f_{X_i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  è una funzione misurabile così definita:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3.1)$$

essa è a tutti gli effetti la densità di probabilità della variabile aleatoria  $X_i$  secondo la Def. 3.3.

**Osservazione 3.2.** Per brevità, da qui in avanti s'indicheranno le precedenti densità sottintendendo che siano relative alla probabilità:  $f_{\mathbf{X}}$  è dunque la densità di  $\mathbf{X}$ ,  $f_X$  la densità congiunta di  $\mathbf{X}$  e  $f_{X_i}$  la densità marginale di  $X_i$ .

Inoltre, qualora il contesto non dia ambiguità, si sottintendono le variabili o i vettori aleatori cui fanno riferimento le relative densità: dunque  $f$  è la densità di  $\mathbf{X}$ ,  $X$  e  $X_i$ , a seconda del caso; in alternativa si possono usare anche forme più leggere, come  $f_i$  per  $f_{X_i}$ , se necessario.

**Proprietà 3.1** (Densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano  $n \in \mathbb{N}^+$  e  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la densità congiunta di  $\mathbf{X}$  equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

**Definizione 3.6** (Valore atteso). Sia  $X \in \mathbb{R}$  una variabile aleatoria assolutamente continua e data una funzione misurabile  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraria, allora il valore atteso di  $\varphi(X)$  è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , preso  $n \in \mathbb{N}^+$ :

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

**Definizione 3.7** (Valore atteso condizionato). Sia  $X \in \mathbb{R}$  una variabile aleatoria assolutamente continua a media finita  $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$  e sia  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  una sotto- $\sigma$ -algebra, allora l'attesa di  $X$  condizionata a  $\mathcal{G}$  è una variabile aleatoria  $Y$  tale che

267 AC<sub>1</sub>  $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$ , ossia  $Y$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile e

268 AC<sub>2</sub> per ogni  $A \in \mathcal{G}$  la misura di  $X$  e  $Y$  tramite  $\mathbb{P}$  è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

269 L'insieme delle  $Y$  che soddisfanno le AC<sub>1</sub> e AC<sub>2</sub> sono indicate col simbolo  
270  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica  $Y$  si può  
271 indicare anche direttamente come  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .

272 Un'analogia definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti  
273 con  $X$  scalare e  $Y$  vettoriale.

274 **Osservazione 3.3.** Presa una variabile aleatoria  $Y \in \mathbb{R}$ , nella precedente defi-  
275 nizione  $\mathcal{G}$  può essere anche la  $\sigma$ -algebra definita da  $Y$ :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

276 ove  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  è la  $\sigma$ -algebra di Borel relativa allo spazio dei numeri reali mentre  
277  $\sigma(A)$  è la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene  $A \subset \mathbb{R}_+(\Omega)$ .

278 Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ .

279 **Proposizione 3.1.** *Dati*

280 1.  $n, h, k \in \mathbb{N}_+$  tali che  $n = h + k$ ;

281 2. un vettore aleatorio  $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^n$  assolutamente continuo costituito da  
282    $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^h$  e  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^k$  con densità congiunta  $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  e marginali  $f_{\mathbf{X}}$  e  $f_{\mathbf{Y}}$ ;

283 3. una funzione  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e tale che  $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{Z})] = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] <$   
284    $\infty$ ;

285 allora si può definire  $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \quad (3.2)$$

286 che soddisfa  $h(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y}]$ .

287 *Dimostrazione.* Per la AC<sub>1</sub> è sufficiente esplicitare la forma di  $\sigma(h(\mathbf{Y}))$ :

$$\sigma(h(\mathbf{Y})) \equiv \sigma(\mathbf{Y}^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(\mathbf{Y}^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

288 a parole si considera la controimmagine tramite  $\mathbf{Y}$  dei borelliani filtrati da  
289  $h$ , ragion per cui la  $\sigma$ -algebra non potrà che essere contenuta in quella non  
290 filtrata.

291 Per la AC<sub>2</sub> si verifica la condizione  $\forall A \in \sigma(\mathbf{Y})$  avvalendosi della caratteriz-  
292 zazione di  $h(\mathbf{Y})$  tramite (3.2):

$$\begin{aligned} \int_A h(\mathbf{Y}) d\mathbb{P} &= \int_B h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \stackrel{(3.1)}{=} \int_B h(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^h} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \stackrel{(3.2)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\mathbf{Y}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_C(\mathbf{Z}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

ove  $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$  dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

□

**Osservazione 3.4.** La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (3.2), allora  $h(y)$  si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y=y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y)/f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la densità di  $X$  condizionata dall'evento  $Y=y$ .

La (3.3), in pratica, si calcola svolgendo la media di  $\varphi(X, Y)$  rispetto a  $X$  dopo aver "fissato" l'evento  $Y=y$ , vale a dire considerando la  $Y$  come fosse un parametro uguale alla realizzazione  $y$ .

Successivamente, se s'impone  $A = \Omega$  (sempre lecito essendo  $\mathcal{G}$  una  $\sigma$ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]], \quad (3.4)$$

il che significa che l'attesa di  $\varphi(X, Y)$  si calcola mediando rispetto a  $Y$  la variabile aleatoria  $\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$ , ricavata dalla (3.3) ma considerando  $y$  arbitrario.

**Definizione 3.8** (Processo stocastico). Data una dimensione  $n \in \mathbb{N}_+$ , un processo stocastico è un insieme di vettori aleatori  $X_t$  parametrizzati da un indice  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\{X_t \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} = \{X_t\}_{t \in I},$$

la cui densità congiunta è

$$\mathbb{P}_{X_t}(A) = \mathbb{P}(X_t \in A) = \int_A f_{X_t}(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}$$

Comunemente s'interpreta l'indice  $t$  come il tempo ponendo  $I \equiv \mathbb{R}_+$ , e così sarà fatto in questo scritto.

## 3.2 DESCRIZIONE CINETICA DI [TIPO] BOLTZMANN

### 3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

#### *Descrizione classica*

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

**Ipotesi 3.1.** Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

320 G<sub>1</sub> è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la  
 321 distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

322 G<sub>2</sub> è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver  
 323 luogo o, precisamente, sono più frequenti;

324 G<sub>3</sub> è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

325 G<sub>4</sub> le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso  
 326 e dell'energia esprimibile, grazie alle G<sub>2</sub> e G<sub>3</sub>, binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (\text{CI})$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (\text{CE})$$

327 ove  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$  sono le velocità poscollisionali che collidono colle  
 328 velocità precollisionali  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$  delle due particelle interagenti<sup>1</sup>.

329 Dalla G<sub>4</sub> si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire  
 330 da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le regole d'interazione.

331 **Proposizione 3.2** (Regole d'interazione). *Esistono due funzioni*

$$\psi, \psi_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

332 *lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

333 *ove  $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$  è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ .*

334 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

335 in cui  $\gamma \in \mathbb{R}$  è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già  
 336 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] = 0, \end{aligned}$$

337 ma escludendo il caso banale di  $\gamma = 0$  (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

338 per cui  $\gamma$  è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (3.6) diven-  
 339 ta allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (3.7)$$

340  $\square$

<sup>1</sup> In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

341 Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario  $n \in S^2$ , seppure  
 342 da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante  
 343 per i centri delle particelle collidenti.

344 Si osservi come le regole d'interazione nella 3.5 sono bilineari e simmetri-  
 345 che secondo la seguente definizione:

346 **Definizione 3.9.** Se le regole d'interazione del tipo (3.5) verificano

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}' &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}'_* &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v})\end{aligned}$$

347 allora si dicono simmetriche.

348 **Descrizione statistica**

349 Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame;  
 350 siano allora  $\{\mathbf{V}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  e  $\{\mathbf{V}_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  i processi stocastici delle velocità precollisio-  
 351 nali, dove  $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$  sono variabili aleatorie di cui le velocità precedenti,  $\mathbf{v}$   
 352 e  $\mathbf{v}_*$ , sono due realizzazioni al tempo  $t$ ; un simile discorso vale per i processi  
 353 stocastici delle velocità poscollisionali  $\{\mathbf{V}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  e  $\{\mathbf{V}'_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ .

354 **Osservazione 3.5.** Le variabili aleatorie  $\mathbf{V}_t$  e  $\mathbf{V}_t^*$  non sono indicizzate (per es-  
 355  $\mathbf{V}_t^i$ ) proprio per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, da cui si  
 356 deduce anche che le leggi di  $\mathbf{V}_t$  e  $\mathbf{V}_t^*$  sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

357 Le regole d'interazione nella (3.5) diventano

$$[RI]_V \begin{cases} \mathbf{V}' = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* = \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{cases}$$

358 in cui anche  $\mathbf{n}$  risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza  $\mathbf{n} \sim$   
 359  $\mathcal{U}(S^2)$ , vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste  
 360 uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

361 Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto  
 362 formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad [\text{Ber}]_V$$

363 che è una variabile aleatoria di Bernoulli, indipendente da  $\mathbf{V}_t$  e  $\mathbf{V}_t^*$ , la cui  
 364 probabilità è descritta da due termini:

- 365 1. la funzione  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , detta nucleo di collisione, che permette d'a-  
 366 vere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali  
 367 possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole<sup>2</sup>;
- 368 2. un passo temporale  $\Delta t > 0$  per discretizzare il tempo.

369 **Osservazione 3.6.** Per definizione di  $\Theta$ , deve valere  $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$   
 370 condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale  $\Delta t$  adattivo;  
 371 si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale  
 372 condizione sarà sempre verificata.

2 Si noti come  $B$  dipenda da  $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$ , termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare  $\mathbf{n}$  come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

373 Colle [RI] $\mathbf{v}$  e [Ber] $\mathbf{v}$ , lo stato dei due agenti al tempo  $t + \Delta t$  successivo è  
 374 dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[AR]_{\mathbf{v}} \begin{cases} \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t, \end{cases}$$

375 che di fatto è una regola che descrive se gli agenti interagiscono a coppie  
 376 (modellizzato dalla  $\Theta$ ) e, nel caso, come interagiscono (modellizzato dalle  
 377  $\mathbf{V}'_t$  e  $\mathbf{V}''_t$ ) modificando il loro stato al tempo successivo.

378 ***Derivazione modello***

379 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di  $f$ , è di me-  
 380 diare le [AR] $\mathbf{v}$  attraverso una funzione arbitraria  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , detta quantità  
 381 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di  $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$  o di  $\mathbf{V}'_{t+\Delta t}$ ; pertanto  
 382 una volta applicato  $\varphi(\cdot)$  alle [AR] $\mathbf{v}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t), \end{aligned}$$

383 e mediando  $\mathbb{E}[\cdot]$  si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t)]; \end{aligned}$$

384 per espandere la media, siccome  $\Theta$  dipende da  $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n})$ , bisogna avvalersi  
 385 dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t) | \mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n}]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})]\Delta t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

386 e similmente per  $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})]$ ; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

387 e passando formalmente al tempo continuo col limite  $\Delta t \rightarrow 0^+$ <sup>3</sup> si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

388 che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \end{aligned} \tag{3.9}$$

<sup>3</sup> Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel'3.6 per qualunque valore di  $B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})$ .

389 in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot d\Omega$$

390 indica la media rispetto a  $\Omega$ ,  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega)$  è una forma breve per  $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega)$ .  
 391 e si è posto  $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$  la cui densità congiunta è  $f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$ . È infine  
 392 necessario sommare le due equazioni in (3.9). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.10)$$

393 infatti dal'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il domi-  
 394 nio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile  $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$  nel secondo  
 395 integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono  
 396 necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

397 **Ipotesi 3.2.** Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \Omega) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (3.11)$$

398 una scelta tipica è il valore assoluto  $|\cdot|$ :  $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Omega|$ .

399 **Ipotesi 3.3** (Caos molecolare). Le particelle interagenti secondo le [AR] $V$  so-  
 400 no campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare  
 401 matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni  
 402 caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due par-  
 403 ticelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole  
 404 dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

405 **Osservazione 3.7.** Dal'Ip. 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la  
 406 densità congiunta del vettore aleatorio  $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$  è data dal prodotto

$$f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{V_t}(\mathbf{v}, t) f_{V_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

407 In tal modo il termine moltiplicato a  $\varphi(\mathbf{v}_*)$  nel secondo membro della  
 408 seconda equazione della (3.9) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.12)$$

409 seguendo la medesima logica della (3.10). Applicando i due risultati illu-  
 410 strati nelle (3.10), (3.12) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann  
 411 omogenea asimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \left( \frac{\varphi' + \varphi_*'}{2} - \varphi \right) f f_* d\Omega d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.13)$$

412 ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le  
 413 funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi \*  
 414 (per una spiegazione più dettagliata si legga poco dopo nel § 3.2.3).

415 Tuttavia, qualora le regole d'interazione siano simmetriche secondo la  
 416 Def. 3.9, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di  
 417 variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \Omega) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

418 da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma de-  
419bole<sup>4</sup>:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* dnd\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad [\text{EtB}]_V$$

420 Si può anche ricavare la forma forte della [\[EtB\]<sub>V</sub>](#) considerando le regole d'in-  
421terazione inverse della [\[RI\]<sub>V</sub>](#) [\[12, § 2.5, p. 15\]](#), ma il conto esula dagli scopi di  
422questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per il paragrafo  
423a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*. \quad (3.14)$$

### 424 3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

425 L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la [\(3.14\)](#), bensí  
426è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine  
427avvettivo  $\mathbf{v} \cdot \nabla f$  a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*, \quad (3.15)$$

428 dove l'operatore  $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$  è il gradiente spaziale e la distribuzione  
429dipende ora anche dallo spazio:  $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . Essa è un'equazione integro-  
430differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a  
431tempo dato.

432 Il primo membro della [\(3.15\)](#) non è altro che la derivata materiale del-  
433la distribuzione  $f$ : posto  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$ , ovvero in mancanza di collisioni,  
434l'equazione involve in una del trasporto lineare con soluzione nota.

435 **Proposizione 3.3.** *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.16)$$

436 ha come soluzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$  in cui  $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$  è la distribuzione  
437iniziale.

438 *Dimostrazione.* Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella [\(3.16\)](#)  
439la velocità  $\mathbf{v}$  nell'operatore avvettivo non dipende né dallo spazio né dal  
440tempo, quindi si possono prendere le curve  $\mathbf{x}(t)$  tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (3.17)$$

441 dette, appunto, curve caratteristiche della [\(3.16\)](#); valutando allora la distri-  
442buzione  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  lungo di esse si può definire  $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$  che derivata  
443equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

<sup>4</sup> Si dice debole siccome essa vale per una funzione test  $\varphi$  arbitraria.

da cui si deduce che  $f$  è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (3.17) si può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$ , dunque la soluzione in un generico punto  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo  $t$  passa per  $\mathbf{x}$ .  $\square$

Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale  $f_0$  semplicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la direzione della velocità costante  $\mathbf{v}$ , movimento che rappresenta la variazione medi statistica delle posizioni molecolari.

D'altra parte il secondo membro della (3.15) rappresenta la variazione media statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò anche chiamato operatore collisionale).

Pertanto la (3.15) descrive una chiara separazione di effetti: il primo membro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

L'obiettivo di Boltzmann tramite la (3.15) era di raccordare due mondi: il mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione  $f$  soddisfacente la (3.15); i principali sono

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tali quantità sono definite da  $f$  seppure questa sia in genere infattibile da ricavare dalla (3.15), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; ep pure, tramite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite [12, 15], è possibile svicolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della  $f$  ricavando un sistema chiuso dei soli momenti (3.18). La convergenza di questi a un valore stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione mesoscopica indotta dalla distribuzione  $f$ .

### 3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria è stata sviluppata da Pareschi *et al.* [15]; sono chiamati così per due ragioni:

- 478 1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analoghe strutturalmente alla [EtB]<sub>v</sub> e  
 479  
 480 2. sono applicati a contesti<sup>5</sup> molto distanti da quello originale delle velocità di particelle di un gas.

482 Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già visti nel § 3.2.1 senza però riscrivere tutti i passaggi.

484 **Descrizione e derivazione**

485 Sia  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  il processo stocastico relativo allo stato microscopico dell'agente  
 486 di un sistema, dove  $X_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$  è il vettore aleatorio<sup>6</sup> che descrive i suoi  
 487  $n \in \mathbb{N}_+$  stati microscopici al tempo  $t$ ; allora le Ipp. 3.1 e 3.3 si possono così  
 488 riformulare:

489 **Ipotesi 3.4.** Gli agenti sono caratterizzati dalle seguenti ipotesi:

- 490 B<sub>1</sub> la distribuzione statistica dei microstati è uniforme nello spazio, e  
 491 quindi non dipende da esso;  
 492 B<sub>2</sub> gli agenti interagiscono solo binariamente, ovvero le interazioni a  
 493 coppia sono le più frequenti;  
 494 B<sub>3</sub> gli agenti sono indistinguibili cosicché ognuno è rappresentativo del  
 495 loro insieme;  
 496 B<sub>4</sub> due agenti interagenti sono statisticamente indipendenti.

497 D'altra parte gli stati poscollisionali (postati),  $X'_t$  e  $X^{*'}_t$ , si legano con quelli  
 498 precollisionali (prestati),  $X_t$  e  $X^*_t$ , tramite

$$[RI]_X \left\{ \begin{array}{l} X'_t = \psi(X_t, X^*_t, y), \\ X^{*'}_t = \psi_*(X_t, X^*_t, y_*), \end{array} \right.$$

499 ove ora

$$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{h_*} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

500 sono generiche regole d'interazione, non necessariamente lineari o simmetriche (Def. 3.11), mentre  $y \in \mathbb{R}^h$  e  $y_* \in \mathbb{R}^{h_*}$ , con  $h, h_* \in \mathbb{N}$ , rappresentano dei  
 501 coefficienti potenzialmente stocastici.  
 502

503 L'interazione tra di essi avviene secondo una variabile aleatoria di Bernoulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(X_t, X^*_t, w, t) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_X$$

505 con tasso/nucleo d'interazione

$$\mu(X_t, X^*_t, w, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad [\text{NI}]_X$$

506 per controllare quant'è "probabile" che i due agenti interagiscano, e coefficienti  $w \in \mathbb{R}^k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , potenzialmente stocastici.

<sup>5</sup> Esempi importanti sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico, come quello qui considerato delle città

<sup>6</sup> Si noti che il dominio  $I$  degli stati non coincide necessariamente col'intero spazio reale  $\mathbb{R}^n$ .

508 **Osservazione 3.8.** Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modelli-  
509 stico si può semplicemente porre unitario:

$$\mu \equiv 1, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$$

510 sottintendendo in tal modo un'uniforme "probabilità" d'interazione.

511 Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'intera-  
512 zione

$$[\text{AR}]_{\mathbf{x}} \begin{cases} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}_t + \Theta\mathbf{X}'_t, \\ \mathbf{X}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}'_t + \Theta\mathbf{X}_t, \end{cases}$$

513 dove  $\Delta t \in \mathbb{R}_+$  è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

514 **Osservazione 3.9.** l'acronimo  $[\text{AR}]_{\mathbf{x}}$  sta per «Azione-Reazione» poiché si  
515 suppone che ogn'interazione (azione), ossia  $\Theta = 1$ , necessariamente modi-  
516 fica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [14]  
517 questa regola può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia  
518 modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

519 Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1  
520 colla quantità osservabile  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si perviene all'equazione di tipo Bol-  
521 tzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad [\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$$

522 nella quale  $\langle \cdot \rangle$  rappresenta la media rispetto a tutt'i coefficienti potenzial-  
523 mente stocastici ( $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}_*$  e  $\mathbf{w}$ ), mentre il termine  $-\varphi - \varphi_*$  discende dal fatto  
524 che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione  $\mu$  sia pari.

525 **Osservazione 3.10** ( $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$  simmetrica). Qualora  $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$  sia pari (Def. 3.10) e  
526 le regole d'interazione  $[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$  siano simmetriche (Def. 3.11), la  $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$  si può  
527 riformulare come

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) (\varphi' - \varphi) \rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (3.19)$$

528 mediante un cambio di variabili atto a invertire  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_*$  solo per la differenza  
529  $\varphi'_* - \varphi_*$ .

530 **Definizione 3.10** ( $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$  pari). Se il tasso d'interazione in  $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$  verifica

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{w}, t) = \mu(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k,$$

531 allora  $\mu$  si dice pari.

532 **Definizione 3.11** ( $[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$  simmetriche). Se le regole d'interazione del tipo  $[\text{RI}]_{\mathbf{v}}$   
533 verificano

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \psi_*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}) & \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^h, \\ \psi_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}_*) &= \psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}_*) \end{aligned}$$

534 allora si dicono simmetriche. In altre parole, la simmetria implica

$$\mathbf{X}'_t = \psi_*(\mathbf{X}'_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}'^*_t = \psi(\mathbf{X}'_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}_*).$$

535 **Notazione**

536 Nei previ paragrafi si è fatto spesso uso, specie per le varie equazioni [di  
537 tipo] Boltzmann (3.13–3.15),  $[EtB]_v$  e  $[EtB]_x$ , di una notazione abbreviata per  
538 tutti gli oggetti salvo il tasso d’interazione  $\mu$ . In questo breve paragrafo si de-  
539 finiscono in maniera più esplicita queste abbreviazioni facendo riferimento  
540 al contesto generale sviluppato poco fa.

541 Innanzitutto la densità congiunta  $f$  da sola sottintende la variabile dell-  
542 l’agente interagente  $x$  mentre con un pedice  $f_*$  quella dell’agente ricevente  
543  $x_*$ :

$$f \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_* \equiv f(x_*, t);$$

544 dopodiché le quantità osservabili  $\varphi$  seguono la medesima logica di prima  
545 ma coll’aggiunta di un apice per distinguere le variabili postinterazionali:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \varphi(x) & \text{e} & \varphi_* \equiv \varphi(x_*), \\ \varphi' &\equiv \varphi(x') & \text{e} & \varphi'_* \equiv \varphi(x'_*). \end{aligned}$$

546 Ovviamente questa notazione può essere generalizzata a una qualunque  
547 funzione scalare  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzione del microstato degli agenti:

$$\begin{aligned} g &\equiv g(x) & \text{e} & g_* \equiv g(x_*), \\ g' &\equiv g(x') & \text{e} & g'_* \equiv g(x'_*). \end{aligned}$$

548 Infine si osserva che qualora vi siano altri pedici o apici nelle funzioni a ve-  
549 nire, essi *non* fanno riferimento a questa notazione corta, se non altrimenti  
550 specificato. Per esempio giusto nel prossimo paragrafo si lavora con del-  
551 le densità  $f_i$ , in cui  $i$  è l’indice del nodo del grafo associato all’agente; è  
552 comunque possibile, anche per questi casi, usare la notazione precedente  
553 riposizionando lievemente i pedici e gli apici:

$$f^i \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_i^* \equiv f(x_*, t);$$

554 **Analisi dimensionale**

555 **3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI**

556 Si analizza adesso il caso del tessuto interurbano descritto nel § 2.2, consi-  
557 derando le città sia come agenti che come nodi di una rete che ne regola le  
558 interazioni: due città possono interagire se sono connessi; è anche ovvio che  
559 l’interazione modifichi, in qualche modo da definire, la loro popolazione.

560 In questo paragrafo si applicano i concetti della teoria sviluppata nei §§ 2.1  
561 e 3.2.3 e, in particolare, la notazione usata e definita. S’inizia mostrando una  
562 derivazione esatta la quale, cioè, considera la topologia esatta; quindi si ap-  
563 profondisce un’approssimazione nella quale si “perde” la topologia indotta  
564 dalla rete; infine, si considerano i collegamenti tra la derivazione esatta e  
565 quella di tipo Boltzmann sotto determinate ipotesi.

566 **3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta**

567 ***Descrizione e derivazione***

568 Visto che si assume che valgono le Ip. 3.4<sup>7</sup>, dalla B3 sorge un problema non  
569 di poco conto: gli agenti sono indistinguibili ma la rete sottostante li rende  
570 distinti per via degl'indici  $\mathcal{J}$ .

571 Per dipanare la questione è sufficiente considerare l'indice come una va-  
572 riabile aleatoria  $I \in \mathcal{J}$  così da definire il processo stocastico come

$$\{X_t\} \equiv \{I, S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

573 in cui  $S_t \in \mathbb{R}_+$  è la variabile aleatoria relativa alla popolazione dell'agente  
574 rappresentativo al tempo  $t$  ed è l'unica componente del processo stocastico  
575 a variare nel tempo per l'Ip. 2.2.

576 **Osservazione 3.11** (Sulla natura numerica della popolazione). È naturale che  
577 non esistano frazioni di persone e che quindi rigorosamente  $S_t \in \mathbb{N}$  ma non  
578 sempre la scelta più realistica è quella che modellisticamente è più agevole;  
579 infatti trattare  $S_t$  come una variabile aleatoria discreta impone un codomi-  
580 nio, appunto, discreto che è in genere più difficile da manipolare matemati-  
581 camente rispetto a un intervallo continuo. Tal'è la ragione nel scegliere  $S_t$   
582 reale: dopo aver fatto i conti normalmente si può poi approssimare per ec-  
583 cesso o difetto ricavando la taglia intera effettiva; l'errore così commesso è  
584 di al più una persona.

585 Così ragionando si può nel complesso descrivere statisticamente lo stato  
586 microscopico  $X_t \equiv (I, S_t)$  dell'agente rappresentativo colla densità congiunta

$$f(i, s, t) : \mathcal{J} \times \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

587 che è discreta in  $i \in \mathcal{J}$  e continua in  $s \in \mathbb{R}_+$ , uguale a

$$f(i, s, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(i - j), \quad (3.20)$$

588 dove  $N \equiv |\mathcal{J}|$  è il numero totale d'agenti del grafo mentre  $\delta(\cdot)$  denota la delta  
589 di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

590 è la densità di  $S_t$  dell'agente  $i$ -esimo.

591 In tal modo la densità congiunta  $f$  è effettivamente indistinguibile rispetto  
592 a tutti gli agenti, soddisfacendo la B3, e integra sul suo dominio a uno:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(\mathcal{J} \times \mathbb{R}_+) &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f(i, s, t) ds di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f_i(s, t) ds \otimes \delta(i - j) di \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \delta(i - j) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} 1 = \frac{N}{N} = 1, \quad \forall t \geq 0; \end{aligned}$$

7 Perdipiù la B2 è valida a un tempo  $t$ , ma nell'unità di tempo dimensionale † le interazioni si possono considerate come non binarie, come già discusso alla fine del § 3.2.3.

593 mentre le densità  $f_i$  preservano la naturale distinguibilità degli agenti indotta dalla topologia sottostante.

595 Sempre come conseguenza del grafo, la  $[Ber]_X$  deve dipendere dalla matrice d'adiacenza  $A$ :

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(I, I^*)\Delta t), \quad [Ber]_S^A$$

597 ove  $A: \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione che a ogni coppia d'indici  $(I, I^*)$  associa la 598 relativa entrata nella matrice d'adiacenza

$$A(I, I^*) \equiv a_{I, I^*} = \begin{cases} 1 & \text{se } (I, I^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

599 secondo la (2.2); in tal modo l'interazione non ha possibilità d'avvenire se i 600 due agenti non sono connessi.

601 **Osservazione 3.12.** Rispetto al caso generale  $[Ber]_X$  il tasso d'interazione ha 602 forma

$$\mu(i, i^*) \equiv A(i, i^*), \quad (3.21)$$

603 esso, cioè, è per definizione costante sia rispetto agli stati  $S_t$  e  $S_t^*$  che rispetto 604 al tempo, oltre a non avere coefficienti<sup>8</sup>  $w$ .

605 **Osservazione 3.13.** Per definizione della distribuzione di Bernoulli, è necessario 606 imporre  $A(I, I^*)\Delta t \leq 1$ , ma dato che  $A(I, I^*) \in \{0, 1\}$  ciò si traduce nella 607 naturale condizione che  $\Delta t \leq 1$ .

608 D'altro canto le regole d'interazione nella  $[RI]_X$  diventano

$$[RI]_S \begin{cases} S'_t = \psi(S_t, I, S_t^*, I^*, \gamma), \\ S_t^{*\prime} = \psi^*(S_t, I, S_t^*, I^*). \end{cases}$$

609 **Osservazione 3.14.** Confrontato al caso generale  $[RI]_X$ , solo la funzione della 610 città interagente  $\psi$  presenta un coefficiente stocastico  $y \equiv \gamma \in \mathbb{R}$ , mentre 611 quella relativa alla città ricevente  $\psi^*$  non dipende da potenziali coefficienti<sup>9</sup> 612  $y^*$ .

613 Unendo le  $[Ber]_S^A$  e  $[RI]_S$ , le  $[AR]_X$  si scrivono

$$[AR]_S \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \end{cases}$$

614 coerentemente col fatto che in un contesto urbano, qualora una città-nodo 615 interagisca con un'altra, entrambe debbano variare il loro stato (Oss. 3.9).

616 **Osservazione 3.15.** Paragonato a  $[AR]_X$  ci si potrebbe chiedere perché non 617 si considera l'intero vettore aleatorio  $X_t$ , come pure nella  $[RI]_S$ ; la ragione è 618 che  $I$  è una componente statica che non varia nel tempo.

619 In ogni caso, considerando  $I_t$  e  $I_t^*$  momentaneamente dinamiche, si possono 620 definire le regole d'interazione

$$[RI]_I \begin{cases} I'_t = \psi(S_t, I, S_t^*, I^*) \equiv I_t, \\ I_t^{*\prime} = \psi^*(S_t, I, S_t^*, I^*) \equiv I_t^*, \end{cases}$$

<sup>8</sup> Questa situazione si può simbolicamente rappresentare ponendo  $k=0$ .

<sup>9</sup> Come nell'Oss. 3.12, tale condizione si può simbolicamente rappresentare ponendo  $h^*=0$ .

da cui segue l'algoritmo d'interazione

$$[\text{AR}]_I \begin{cases} I_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I_t + \Theta I'_t = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t = I_t, \\ I^*_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I^*_t + \Theta I^{**}_t = (1-\Theta)I^*_t + \Theta I^*_t = I^*_t, \end{cases}$$

che soddisfa la staticità di  $I$  e  $I^*$  e completa, assieme a  $[\text{AR}]_S$ , la formulazione  $[\text{AR}]_X$  più generale.

Sia  $\Phi: \mathcal{J} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  un'arbitraria quantità osservabile, dalla  $[\text{Ber}]_S^A$  l'equazione di tipo Boltzmann omogenea  $[\text{EtB}]_X$  ha forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} A(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* di di_*, \quad [\text{EtB}]_S^A$$

ove si è usata la notazione abbreviata illustrata nel § 3.2.3, mentre  $\langle \cdot \rangle$  indica il valore atteso rispetto alla variabile aleatoria  $\gamma$  nelle  $[\text{RI}]_S$ .

**Osservazione 3.16.** Anche se la derivazione della  $[\text{EtB}]_S^A$  è già stata spiegata nel dettaglio nel § 3.2.1, rimane interessante riportare la forma del passaggio più difficile, ossia quella della media condizionata (3.8) (qui mostrato solo per  $S_{t+\Delta t}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(I, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, (1-\Theta)S_t + \Theta\psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma)A(I, I_*)\Delta t) | I, I_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, S_t)(1 - A(I, I_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(I, \psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma))A(I, I_*)\Delta t]]. \end{aligned}$$

Si noti come il condizionamento sia solo rispetto a  $I$  a  $I_*$ , proprio poiché  $\Theta$  in  $[\text{Ber}]_S^A$ , tramite il tasso d'interazione  $\mu$  nella (3.21), dipende solo da essi.

### Analisi delle regole d'interazione

Si approfondiscono in questo paragrafo le regole d'interazione  $[\text{RI}]_S$ .

Innanzitutto, il perché nella  $[\text{AR}]_S$  si considerano interazioni «Azione-Reazione» (Oss. 3.9) discende da un vincolo fisico: se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, necessariamente anche l'altra varia il proprio stato.

Dopodiché, passando alle realizzazioni di tutte le variabili aleatorie considerate, vale a dire scrivendole in minuscolo e omettendo la dipendenza dal tempo, le regole d'interazione  $[\text{RI}]_S$  sono così definite<sup>10</sup>

$$\begin{cases} \psi(s, i, s_*, i_* \gamma) = s(1 - E(s, i, s_*, i_*) + \gamma) \\ \psi_*(s, i, s_*, i_*) = s_* + sI(s, i, s_*, i_*) \end{cases} \quad (3.22)$$

ove

$$E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow [0, 1],$$

$$I: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow [0, 1],$$

sono rispettivamente i tassi d'emigrazione e immigrazione, mentre  $\gamma$  rappresenta fluttuazioni stocastiche. È perciò chiaro che, per avere un postato fisicamente sensato,  $\gamma$  dev'essere tale che

$$s' = s(1 - E + \gamma) > 0 \quad \forall E \in [0, \lambda] \implies \gamma > E - 1 \quad (3.23)$$

<sup>10</sup> Sono state in parte ispirate dalla [9, (2.1), p. 223].

in cui  $\lambda \equiv \sup E \leq 1$  è il limite superiore del tasso d'emigrazione i cui argomenti da qui fino alla fine di questo paragrafo sono sottintesi (lo stesso per il tasso d'immigrazione I verso la fine); d'altra parte  $s'_*$  è per definizione sempre positivo. La scelta di  $>$  anziché  $\geq$  nella (3.23) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città<sup>11</sup>.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto valgono le seguenti ipotesi:

**Ipotesi 3.5.**  $\gamma$  deve soddisfare le seguenti caratteristiche:

F<sub>1</sub> possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (3.23);

F<sub>2</sub> la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia  $\langle \gamma \rangle = 0$ ;

F<sub>3</sub> seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

1. la distribuzione normale  $N(\mu, \gamma)$  non soddisfà la F<sub>1</sub> poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;

2. la distribuzione uniforme  $U([a, b])$  è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfà né F<sub>2</sub> né F<sub>3</sub>, mentre F<sub>1</sub> sì;

3. la distribuzione esponenziale  $Exp(\lambda)$  è quella più promettente perché riflette sia F<sub>2</sub> (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F<sub>3</sub>, ma sfortunatamente non F<sub>1</sub> perché la densità è non nulla al valore estremo  $\gamma = E - 1$ ;

4. l'unica distribuzione che soddisfà tutte e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma  $Gamma(\alpha, \beta)$ .

Si assume allora  $\hat{\gamma} \sim Gamma(\alpha, \beta)$  con densità

$$f_{\hat{\gamma}}(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

ove  $\alpha$  e  $\beta$  sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre

$$\Gamma(\alpha): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la funzione gamma

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Imponendo la F<sub>3</sub> si ottiene

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E = \alpha\beta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle \equiv \sigma^2 = \alpha\beta^2,$$

<sup>11</sup> Ciò non significa che il modello non possa prevedere lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi (Oss. 3.11).

678 in cui  $\sigma^2$  indica la varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sigma^2}{1-E}.$$

679 La **F2** si può semplicemente soddisfare traslando i valori campionanti della  
680  $\hat{\gamma}$  di  $-\langle\hat{\gamma}\rangle$ , ossia si considera la distribuzione  $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle$ :

$$\langle\gamma\rangle = \langle\hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle\rangle = \langle\hat{\gamma}\rangle - \langle\hat{\gamma}\rangle = 0.$$

681 D'altra parte per la **F1** bisogna salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-  
682 buzione gamma: essa infatti se  $\alpha = 1$  diventa  $\text{Exp}(\beta)$ , mentre se  $\alpha < 1$  diverge  
683 all'origine; per avere quindi probabilità nulla di campionare da  $\hat{\gamma}$  l'origine  
684 [e quindi  $-\langle\hat{\gamma}\rangle$  dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} > 1,$$

685 ma nel caso peggiore  $1-E=1-\lambda$  da cui

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1-\lambda)^2 \implies \sigma < |1-\lambda| = 1-\lambda, \quad (3.24)$$

686 siccome  $E \in [0, \lambda]$   $\forall s, s_* \in \mathbb{R}_+$ . La (3.24) implica quindi che non è possibile  
687 avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la **F1**, ma che questa è  
688 limitata superiormente dal massimo tasso d'emigrazione  $\lambda$ , interpretabile  
689 come attrattività: più grande è  $\lambda$  più piccola è la varianza, e viceversa.

690 Si conclude osservando come sia naturale che l'interazione, ossia lo scam-  
691 bio di popolazione descritto dalle (3.22), debba conservare [in media] la  
692 popolazione totale:

$$s + s_* = \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle = s - sE + s_* + sI \implies E \equiv I,$$

693 il che ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi  
694 (invertendo  $s$  ed  $s_*$  sarebbe l'opposto).

695 **Osservazione 3.17.** Le (3.22) non sono ancora complete siccome non si è  
696 esplicitata la regola d'emigrazione, la cui scelta, tuttavia, si può dunque  
697 vedere come la regola d'interazione stessa: è l'ultimo tassello del mosaico.  
698 Pertanto si lascia quest'ultima definizione al Cap. 4 nel quale se ne pro-  
699 pongono varie, si discutono quindi con vari studi parametrici per poi infine  
700 interpretarle analizzando cosa dicono sul fenomeno della migrazione.

### 701 3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata

702 L'approssimazione si fonda sulla seguente matrice:

703 **Definizione 3.12** (Matrice dei gradi  $\mathbf{B}$ ). Sia  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  una matrice di rango  
704 uno

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{k}^+(\mathbf{k}^-)^\top}{D_N}$$

705 definite tramite il prodotto diadioco dei vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^+ &\equiv (k_1^+, k_2^+, \dots, k_N^+)^\top = \mathbf{A}\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{k}^- &\equiv (k_1^-, k_2^-, \dots, k_N^-)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (3.25)$$

rispettivamente dei gradi uscenti ed entranti, e la costante<sup>12</sup>

$$D_N \equiv \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^+ = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^+ = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} = \|\mathbf{A}\|_1. \quad (3.26)$$

Allora  $\mathbf{B}$  approssima la matrice d'adiacenza  $\mathbf{A}$  poiché per definizione vale

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^+ \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^- (\mathbf{k}^+)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^- \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^- \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}.$$

Inoltre, poiché  $\mathbf{A}$  è simmetrica (Ip. 2.1) vale  $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$  e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}^\top}{D_N}.$$

Tramite la Def. 3.12, la  $[\text{Ber}]_S^A$  diventa

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(I, I^*) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_S^B$$

da cui la  $[\text{EtB}]_S^A$  si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi g dv di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} B(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} gg_* ds ds_* didi_*, \quad [\text{EtB}]_S^B$$

dove  $g$  e  $g_*$  sono densità definite come la (3.20) ma indicate diversamente per distinguerle da quelle esatte  $f$  ed  $f_*$ .

Sorge però spontanea una domanda non di poco conto: perché non si può scegliere un'altra matrice  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  per approssimare la  $\mathbf{A}$ , secondo altri criteri analoghi o dissimili alla (3.25)? La risposta non è immediata ma discende in essenza su come la  $[\text{EtB}]_S^B$  può essere riformulata. A tal scopo si necessita di un osservazione:

**Osservazione 3.18** (Teoria e Pratica). Come detto nel Cap. 1, l'interesse è di studiare la distribuzione della popolazione tra città; perciò, non a torto, si può vedere la densità  $f$  nella (3.20) come eccessivamente dettagliata, contenendo informazioni legate ai vertici: ai fini pratici è quindi sufficiente ricavare in qualche modo la densità marginale  $\tilde{f}(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di$ ,  $\forall t \geq 0$ , che è esattamente quanto fatto nel § 4.1.1 per i risultati delle venture simulazioni.

Dall'Oss. 3.18 si possono pertanto specializzare gli osservabili:

**Ipotesi 3.6** (Osservabili puntuali). Si considera la seguente classe di osservabili:  $\Phi(i, s) \equiv \delta(i - j)\varphi(s)$ ,  $\forall j \in \mathcal{J}$ , dove  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione arbitraria.

Con tale scelta è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le  $g_i$ : usando, infatti, l'Ip. 3.6 nella  $[\text{EtB}]_S^B$  porta a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi \rangle}{2} g_j \sum_{i \in \mathcal{J}} B(j, i) g_i^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} s_j^* \sum_{i \in \mathcal{J}} B(i, j) g_i ds ds_*, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

<sup>12</sup> La  $\|\cdot\|$  è la norma uno applicata alle matrici:  $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} |a_{i,j}|$ .

ma essendo  $\mathbf{B}$  simmetrica vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} g_j \sum_{i \in \mathcal{J}} B(j,i) g_i^* ds ds_* \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

che in forma matriciale, introducendo le densità vettoriali

$$\mathbf{g} \equiv (g_i)_{i \in \mathcal{J}} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_* \equiv (g_i^*)_{i \in \mathcal{J}},$$

si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g} \odot \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad (3.27)$$

ove  $\odot$  indica il prodotto di Hadamard (prodotto per elementi).

Il prossimo passo è introdurre la densità globale delle taglie, ossia la densità marginale della (3.20) rispetto alla popolazione  $s$ :

$$\bar{g}_N(s,t) \equiv \int_{\mathcal{J}} g(i,s,t) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{g}, \quad (3.28)$$

ove  $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ , che non è che la media tra le densità di  $S_t$  tra tutti i vertici<sup>13</sup>; premoltiplicando la (3.27) per  $\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top$  e usando la (3.28) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad [\text{E}\bar{g}]$$

**Osservazione 3.19.** La [E $\bar{g}$ ] si può anche ottenere usando, in luogo del'Ip. 3.6, direttamente un osservabile indipendente dall'indice  $i$ :  $\Phi(i,s) \equiv \varphi(s)$ , confermando quanto premesso nell'Oss. 3.18, cioè che la [E $\bar{g}$ ] si ricava perdendo le informazioni legati agli indici negli osservabili.

La [E $\bar{g}$ ] non è ancora un'equazione chiusa per  $\bar{g}$  per via del secondo membro nel quale  $\mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_*$  richiede sia di conoscere nel dettaglio le connessioni sottostanti del grafo che le distribuzioni della popolazione di ogni città. Tuttavia, avvalendosi della definizione della  $\mathbf{B}$ , la [E $\bar{g}$ ] diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g}_N ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2 D_N} (\mathbf{k}^\top \mathbf{g})(\mathbf{k}^\top \mathbf{g}_*) ds ds_*, \quad (3.29)$$

che richiede d'introdurre una nuova densità di probabilità:

**Definizione 3.13** (Densità dei gradi  $\mathbf{k}$ ). Sia

$$d_N : \mathbb{R}_+ \times \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

la densità di probabilità dell'evento che al tempo  $t$  un agente abbia popolazione  $s$  e grado  $k$ , definizione che la lega alle  $g_i$  dalla relazione

$$d_N(s, k, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t),$$

ove

$$\mathcal{J}_k \equiv \{i \in \mathcal{J} \mid k_i = k\} \subseteq \mathcal{J}$$

<sup>13</sup> La medesima definizione vale anche per  $f_N$  della [EtB]<sup>A</sup>.

750 è l'insieme dei nodi con grado  $k$ ; da essa ne seguono altre due:

$$\bar{g}_N(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N d_N(s, k, t), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{g}(s, t) = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = N \sum_{k=0}^N k d_N(s, k, t).$$

751 Un analogo discorso vale per le  $f_i$  in luogo delle  $g_i$ .

752 E dalla Def. 3.13 segue la sua normalizzazione:

753 **Definizione 3.14** (Densità dei gradi  $\mathbf{k}$  normalizzati). Siano

$$\hat{k}_i \equiv \frac{k_i}{N} \in \hat{\mathcal{K}}, \quad \forall i \in \mathcal{J},$$

754 i gradi normalizzati di un generico nodo rappresentativo di  $\mathcal{G}$ , in cui

$$\hat{\mathcal{K}} \equiv \left\{ \frac{k}{N} \mid k = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

755 è l'insieme discreto dei gradi normalizzati; allora la densità dei gradi norma-  
756 lizzati

$$\hat{d}_N : \mathbb{R}_+ \times \hat{\mathcal{K}} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

757 è così definita

$$\hat{d}_N(s, \hat{k}, t) \equiv N d_N(s, N \hat{k}, t). \quad (3.31)$$

758 **Osservazione 3.20.** Visto che due elementi consecutivi dell'insieme  $\hat{\mathcal{K}}$  sono  
759 separati da un passo costante e uguale a  $1/N$ , si può definire  $\Delta \hat{k} \equiv 1/N$  che  
760 da (3.31) implica

$$\sum_{\hat{k} \in \hat{\mathcal{K}}} \int_{\mathbb{R}_+} \hat{d}_N(s, \hat{k}, t) ds \Delta \hat{k} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} d_N(s, k, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

761 cosa che permette di vedere la  $\hat{d}_N$  come funzione costante a tratti dei gradi  
762 normalizzati  $\hat{k}$ , e similmente per  $d_N$  (basta definire  $\Delta k \equiv 1$ ) essendone un  
763 mero riscalamento.

764 **Osservazione 3.21.** L'Oss. 3.20 dà la possibilità anche d'interpretare la (3.30)  
765 come un uguaglianza tra densità marginali:  $\bar{g}_N = \bar{d}_N = \hat{d}_N$ .

766 Con tutte queste definizioni e osservazioni, la (3.29) si può riformulare in  
767 termini di  $\hat{d}_N$

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d_N ds = N^2 \sum_{k, k_*=0}^N \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{D_N} d_N d_N^* ds ds_*,$$

768 dove  $k_*$  è il grado associato a  $g_N^*$ , e poi in termini di  $\hat{d}_N$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{\hat{k} \in \hat{\mathcal{K}}} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d}_N ds \Delta \hat{k}}_{(I)} = \underbrace{\sum_{\hat{k}, \hat{k}_* \in \hat{\mathcal{K}}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\hat{k}\hat{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{D_N} \hat{d}_N \hat{d}_N^* ds ds_*}_{(II)}.$$

Il secondo membro si può ulteriormente manipolare moltiplicando e dividendo per  $N^2$  e definendo il grado normalizzato medio

$$\bar{D}_N \equiv \frac{D_N}{N^2} = \sum_{\underline{k} \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \underline{k} d_N ds \Delta \underline{k}, \quad (3.32)$$

da cui

$$(II) = \sum_{\underline{k}, \underline{k}_* \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\underline{k} \underline{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}_N} d_N d_N^* ds ds_* \Delta \underline{k} \Delta \underline{k}_*,$$

Valutando il limite  $N \rightarrow \infty$  alla (3.32) e ai membri (I) e (II)

$$\begin{aligned} (3.32) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{D} \equiv \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \underline{k} d \ ds dk, \quad (I) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d \ ds dk \\ (II) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\underline{k} \underline{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}} d \underline{k}^* ds ds_* dk dk_*, \end{aligned}$$

si perviene infine a un'equazione di tipo Boltzmann:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d \ ds dk = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\underline{k} \underline{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}} d \underline{k}^* ds ds_* dk dk_*. \quad [EtB]_S^k$$

Si è dunque dimostrato il seguente teorema:

**Teorema 3.1** (di rilassamento della topologia). La  $[EtB]_S^B$  è formalmente equivalente nel limite  $N \rightarrow \infty$  a un'equazione di tipo Boltzmann di forma  $[EtB]_X$  con microstato  $\mathbf{X}_t \equiv \{\underline{k}, s_t\}$ , ove  $\underline{k} \in [0, 1]$  è la variabile aleatoria dei gradi normalizzati osservabili  $\varphi(s)$  indipendenti da  $\underline{k}$  e nucleo d'interazione  $\mu(\underline{k}, \underline{k}_*) \equiv (\underline{k} \underline{k}_*) / \bar{D}$ .

Il significato del Teo. 3.1 è profondo: approssimare  $[EtB]_S^A$  con  $[EtB]_S^B$  coincide col perdere la distinguibilità indotta dal grafo, rilassando in tal modo la topologia la quale non scompare ma rimane solo come distribuzione dei gradi; tale riduzione è come sfocare i dettagli delle connessioni tra i vertici: si passa da uno specifico grafo a una classe di grafi. Nella Fig. 3.1 è presente uno schema riassuntivo del corrente paragrafo.

**Osservazione 3.22.** Il Teo. 3.1 motiva anche il perché non si possa considerare una generica matrice  $C$  che approssima la  $A$ : non è detto che rilassi la topologia portando a un'equazione analoga alla  $[EtB]_S^k$ .

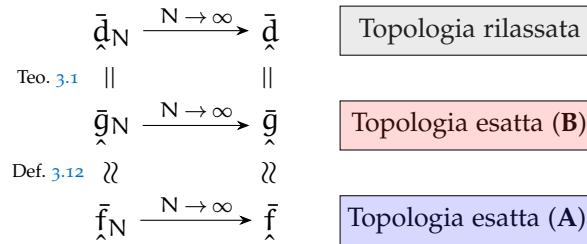


Figura 3.1: Schema riassuntivo del § 3.3.2.

788 **Osservazione 3.23.** La Fig. 3.1 contiene al suo interno  $\hat{f}$  che ha un'analogia  
789 definizione alla Def. 3.14, ma normalizzando gli indici: siano

$$\hat{i} \equiv \frac{i}{N} \in \mathcal{J}, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

790 gli indici normalizzati di un generico nodo rappresentativo di  $\mathcal{G}$ , in cui

$$\mathcal{J} \equiv \left\{ \frac{i}{N} \mid i = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

791 è l'insieme discreto degli indici normalizzati. Allora la (3.20) normalizzata,  
792 per analogia colla (3.31), si può definire

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = N f(N \hat{i}, s, t) = \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(N \hat{i} - j),$$

793 ma per la condizione di normalità  $\mathbb{P}([0, 1] \times \mathbb{R}_+) = 1, \forall t \geq 0$ , deve valere<sup>14</sup>

$$f_j(s, t) = N f_j(s, t) \quad \text{ove } j = N \hat{j},$$

794 anch'essa analoga alla (3.31); difatti con questa la  $\hat{f}$  si scrive

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(N(\hat{i} - j)) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - j).$$

795 Con tali definizioni la densità marginale  $\bar{f}$  si può riformulare mediante il  
796 cambio di variabili  $i = N \hat{i}$ :

$$\bar{f}_N = \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di = \int_{\mathcal{J}} N f(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \int_{\mathcal{J}} \hat{f}(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \bar{f}_{\hat{N}} = \frac{1}{N} \sum_{\hat{i} \in \mathcal{J}} f_{\hat{i}}(s, t),$$

797 e, definendo il passo  $\Delta \hat{i} \equiv 1/N$  tra due indici normalizzati consecutivi, si  
798 arriva al limite  $N \rightarrow \infty$  a

$$\bar{f}_N = \bar{f}_{\hat{N}} = \sum_{\hat{i} \in \mathcal{J}} f_{\hat{i}}(s, t) \Delta \hat{i} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{f} = \bar{f}_{\hat{N}} = \int_0^1 f_{\hat{i}}(s, t) d\hat{i},$$

799 mentre la  $\hat{f}$  diventa

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = \int_0^1 f_j(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - j) dj = f_{\hat{i}}(s, t).$$

800 Similmente vale per  $\bar{g}$ .

801 **Osservazione 3.24** (Sulla bontà di  $A \approx B$ ). Su un aspetto è al momento non  
802 ci si può esprimere: quanto bene la  $B$  approssima la matrice  $A$  in generale?  
803 Sarebbe necessario elaborare ulteriormente la teoria per trovare una risposta,  
804 obiettivo, come già detto, non di questa tesi. Tuttavia, euristicamente, si  
805 può riflettere in questo modo: con  $N \gg 1$  le singole connessioni sono meno  
806 importanti, per cui vengono meno i dettagli, mentre la panoramica può essere  
807 ragionevolmente colta da  $B$ ; ciò suggerirebbe che più sono i nodi migliore è  
808 l'approssimazione  $A \approx B$ . Tale breve riflessione è però solo un intuito, *non*  
809 una dimostrazione rigorosa, e dunque anche potenzialmente falsa.

810 **Osservazione 3.25.** Si veda [14] per la dimostrazione del Teo. 3.1 in un  
811 contesto delle reti sociali e nel caso di un grafo diretto, non necessariamente  
812 simmetrico, oltre che di  $[RI]_X$  lineari e simmetriche.

14 Si ricordi che l'indice  $j$  non è un argomento della densità  $f_j$ , quindi può essere cambiato con un altro indice purché sia distinto da tutti gli altri secondo la trasformazione scelta.

### 3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile

Nel precedente paragrafo si è esplorato come si può "perdere" la struttura sottostante indotta dal grafo passando a una densità dipendente dal grado dei nodi, recuperando in tal modo un'equazione classica di tipo Boltzmann. Risulta perciò stimolante esplorare se sussitano certe ipotesi che permettano di trasformare la [Eg] in una forma della [EtB]<sub>X</sub>, approfondendo così i legami tra la teoria retale sviluppata nei due previ due paragrafi e la teoria di tipo Boltzmann.

#### *Ipotesi semplificative*

A questo scopo valgono le seguenti:

**Ipotesi 3.7.** Esistono tre principali ipotesi semplificative della [Eg]:

S<sub>1</sub> Il grafo è completamente connesso con matrice d'adiacenza unitaria:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{1} \iff a_{i,j} \equiv 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{J}.$$

S<sub>2</sub> Gli agenti sono indistinguibili rispetto al grafo:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J},$$

S<sub>3</sub> Le regole d'interazione [RI]<sub>S</sub> sono simmetriche (Def. 3.11).

#### *Analisi della S<sub>1</sub>*

Notando che  $\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ , la [Eg] diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} (\mathbf{1}^\top \mathbf{f})(\mathbf{1}^\top \mathbf{f}_*) ds ds_* \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \left( \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f} \right) \left( \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* \right) ds ds_*, \end{aligned}$$

ma ricordando (3.28) si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \bar{f} \bar{f}_* ds ds_*, \quad (3.33)$$

la quale è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann [EtB]<sub>X</sub> con microstato  $X_t \equiv S_t$  scalare, regole d'interazione [RI]<sub>S</sub> e nucleo d'interazione unitario<sup>15</sup>  $\mu \equiv 1$  nella [Ber]<sub>X</sub>. Ciò significa che con S<sub>1</sub> gli agenti, nonostante siano distinti per il grafo, si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (3.28).

<sup>15</sup> Tale risultato implica anche che un nucleo di collisione unitario nella [EtB]<sub>X</sub> è il corrispettivo di una matrice unitaria nella [EtB]<sub>S</sub><sup>A</sup>.

835 **Analisi della S2**

836 Sotto tal'ipotesi, che equivale coll'assumere

$$\mathbf{f} = \mathbf{1}\mathbf{f} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_* = \mathbf{1}\mathbf{f}_*,$$

837 la [Eg] diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{\mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1}}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}_* ds ds_* \end{aligned}$$

838 e rimembrando (3.26) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{D_N}{N^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}^* ds ds_*.$$

839 In questo contesto il rapporto  $D_N/N^2 \in [0, 1]$  (grado medio normalizzato del-  
840 la rete) rappresenta quanto la rete è topologicamente simile a una completa-  
841 mente connessa<sup>16</sup>.

842 Per il resto l'equazione è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann  
843 [EtB]<sub>X</sub> con microstato  $\mathbf{X}_t \equiv S_t$  scalare, regole d'interazione [RI]<sub>S</sub> e nucleo  
844 d'interazione nella [Ber]<sub>X</sub> costante  $\mu \equiv D_N/N^2 = \bar{D}_N$ .

845 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla  
846 [Eg]: riassume l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente  $\bar{D}_N$  il quale,  
847 dunque, ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa  
848 per la S1.

849 **Analisi della S1, S2 e S3**

850 Visto che vale la S1 si può partire dalla (3.33) nella quale la densità media  
851 (3.28) diventa per S2

$$\bar{f}(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \stackrel{S2}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f(s, t) = f(s, t),$$

852 ossia la  $\bar{f}$  coincide con quella di tutti gli agenti<sup>17</sup>, essendo questi, appunto,  
853 indistinguibili.

854 In tal modo la (3.33) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}^* ds ds_*,$$

855 che unita all'S3 porta all'equivalenza

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{f} \mathbf{f}_* ds ds_* = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \mathbf{f}^* ds ds_*,$$

<sup>16</sup> Difatti  $D_N$  è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio  $N^2$ , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati  $N$  nodi.

<sup>17</sup> Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi  $N$  è coerente col limite  $N \rightarrow \infty$ , sempre ben approssimabile nei casi classici con un numero di agenti  $N \gg 1$  [come lo studio di un gas].

856 dalla quale si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*.$$

857 Quest'equazione, come per gli altri casi, è analoga alla classica equazione  
858 di tipo Boltzmann simmetrica (3.19) con microstato  $X_t \equiv S_t$  scalare, regole  
859 d'interazione [RI]<sub>S</sub> e nucleo d'interazione nella [Ber]<sub>X</sub> unitario  $\mu \equiv 1$ .

# 4

## SIMULAZIONI

In questo capitolo si applicheranno tutta la teoria affrontata in quello precedente. Innanzitutto si descrive l'algoritmo con cui sono stati svolte le simulazioni; quindi si spiegano le formule che definiscono i grafici a venire per poi motivare rapidamente il perché le fluttuazioni possono [anzi devono] essere trascurate. Per i risultati, invece, si propongono varie leggi d'emigrazione che s'illustrano tramite dei studi parametrici, cercando successivamente d'interpretare cosa queste dicono sul fenomeno della migrazione in sé. Infine si mostrano brevemente alcuni risultati per l'Italia, confermando che i risultati migliorano col numero d'agenti.

### 4.1 PREMESSE

#### 4.1.1 Metodo Monte Carlo

Nel contesto delle [TCSMA](#) l'obiettivo, com'è chiaro dal Cap. 3, è quello di ricavare la densità  $f(\mathbf{x}, t)$  nella [\[EtB\]<sub>X</sub>](#) al variare del tempo. Si potrebbe allora pensare di discretizzare quest'ultima equazione mediante il Metodo delle Differenze Finite, degli Elementi Finiti o dei Volumi Finiti; tuttavia, vi sono due principali problemi:

1. l'impossibilità, in generale, di ricavare la forma forte della [\[EtB\]<sub>X</sub>](#), specie nel caso di [\[RI\]<sub>X</sub>](#) non lineari;
2. anche ipotizzando di trovare la forma forte a cui applicare i precedenti metodi, la sua natura integro differenziale la rende complessa da manipolare dato che l'operatore collisionale<sup>1</sup>, come

$$Q(f, f)(\mathbf{v}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f(\mathbf{v}', t)f(\mathbf{v}_*, t) - f(\mathbf{v}, t)f(\mathbf{v}_*, t)) dnd\mathbf{v}_*$$

nella (3.15), dipende dalla densità medesima.

Per tali ragioni si procede in maniera più semplice: conoscendo [\[AR\]<sub>X</sub>](#), che governa le interazioni binarie tra agenti, si possono quindi direttamente simulare tutte le molteplici collisioni mediante un metodo di Monte Carlo di tipo Nanbu-Babovsky, descritto nel dettaglio nell'Alg. 1 nel quale  $T > 0$  è il tempo finale di simulazione, mentre  $P$  è la popolazione totale.

**Osservazione 4.1.** Nella linea 18  $\bar{q}$  è una densità generale: va intesa come  $\bar{f}$  se l'approssimazione è esatta e come  $\bar{g}$  se è approssimato.

<sup>1</sup> Vale a dire la parte integrale della forma forte dell'equazione di tipo Boltzmann, in genere scritta a secondo membro.

**Algoritmo 1:** Algoritmo [AR]<sub>S</sub> di tipo Nanbu-Babovsky

```

Dati:  $N \in \mathbb{N}_+$ ,  $\Delta t \leq 1$ ,  $\sigma$ ,  $T > 0$ ,  $P$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  ;
1  $\mathcal{S}^0 \leftarrow (s_1^0, s_2^0, \dots, s_N^0) \equiv (P/N)\mathbf{1} \in \mathbb{R}_+^N$ ;
2 per  $n = 0, 1, 2, \dots, \lfloor T/\Delta t \rfloor - 1$  fai
3    $P \leftarrow$  permutazione indipendente di  $\{1, 2, \dots, N\}$ ;
4   per  $i = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$  fai
5      $j \leftarrow \lfloor N/2 \rfloor + i$ ,  $s_i^n \leftarrow P(i)$  e  $s_j^n \leftarrow P(j)$ ;
6     se esatto allora
7        $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(A(i,j)(\Delta t))$ ;
8     altrimenti # è approssimato
9        $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(B(i,j)(\Delta t))$ ;
10    se  $\Theta = 1$  allora
11       $E \leftarrow E(s_i^n, i, s_j^n, j)$ ;
12       $\gamma \leftarrow \text{Gamma}((1-E)^2/\sigma^2, \sigma^2/(1-E))$ ;
13       $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n(1-E+\gamma)$ ; # città interangente
14       $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n + s_i^n E$ ; # città ricevente
15    altrimenti
16       $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n$  e  $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n$ ;
17     $\mathcal{S}^{n+1} \leftarrow (s_1^{n+1}, s_2^{n+1}, \dots, s_N^{n+1})$ ;
18     $\bar{q}(s, (n+1)\Delta t) \leftarrow$  istogramma di  $\mathcal{S}^{n+1}$ ;

```

890 **Osservazione 4.2.** Più in generale nella linea Alg. 1  $\mathcal{S}_0$  si può campionare  
891 da una densità  $\bar{q}_0$  iniziale; tuttavia non conoscendone alcuna per la distribu-  
892 zione della popolazione, si è deciso di definire  $\mathcal{S}^0$  come un vettore uniforme  
893 rispetto a una popolazione massima  $P$  iniziale.

894 **4.1.2 Definizione dei grafici**

895 Per analizzare i risultati delle simulazioni è opportuno descrivere nel det-  
896 taglio i grafici che li descrivono; prima, però, si scrivono un paio di parole  
897 sulla natura stocastica dell'Alg. 1 e sulla struttura dei risultati.

898 **Intervallo di confidenza**

899 Innanzitutto simulando la [EtB]<sub>S</sub><sup>A</sup> mediante Alg. 1, e quindi l'algoritmo [AR]<sub>X</sub>,  
900 si sta introducendo nei risultati un rumore di natura stocastica: più simula-  
901 zioni daranno risultati diversi per cui la singola non ha rilevanza statistica;  
902 bisogna cioè calcolarne molteplici e valutare sugli intervalli di confidenza per  
903 conoscere l'incertezza della stima della media.

904 Sia  $R \in \mathbb{N}_+$  il numero di simulazioni eseguite e  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^R$  il vettore aleatorio  
905 della popolazione di una città relativa a ciascuna simulazione. Per l'Alg. 1 le  
906 componenti  $(S_1, S_2, \dots, S_R)$  di  $\mathbf{S}$  sono indipendenti e identicamente distribuite  
907 dalla densità  $q$ , proprietà che permette di definire

$$\bar{S} \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R S_r \quad \text{e} \quad V \equiv \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (S_r - \bar{S})^2,$$

rispettivamente la media e la varianza campionarie. Allora, data  $\mu$  la *vera*<sup>2</sup> media di  $q$ , la distribuzione  $T$  di Student con parametro  $R-1$  si scrive

$$T = \frac{\bar{S} - \mu}{\sqrt{V/R}} \sim \text{Student}(R-1).$$

Da questa si può definire l'intervallo di confidenza [simmetrico] con livello di confidenza  $\alpha$  ponendo

$$\mathbb{P}\left(-t_{R-1}^{\alpha/2} \leq T \leq t_{R-1}^{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

ove  $t_{R-1}^{\alpha/2} \in \mathbb{R}$  è quel valore reale tale che

$$\mathbb{P}\left(T < t_{R-1}^{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Esplicitando la  $T$  nella (4.1) e isolando la media  $\mu$  si ha

$$\mathbb{P}\left(\bar{S} - t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}} \leq \mu \leq \bar{S} + t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}}\right) = 1 - \alpha,$$

da cui

$$IC_R^\alpha(\mathbf{S}) \equiv \left[ \bar{S} - t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}}, \bar{S} + t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}} \right] \quad (4.2)$$

è la stima intervallare che definisce l'intervallo di confidenza ricercato, esprimibile anche più compattamente come  $IC_R^\alpha(\mathbf{S}) \equiv \bar{S} \pm t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{V/R}$ .

**Ipotesi 4.1** (livello di confidenza). Si sceglie  $\alpha \equiv 0.05$  così d'avere un intervallo con livello di confidenza 0.95.

Il significato dell'intervallo di confidenza in essenza è l'errore statistico commesso: esso valuta quanto è probabile che la stima intervallare (4.2) contenga il parametro  $\mu$ ; in altre parole  $IC_R^\alpha$  misura l'incertezza sulla stima della media: preso un campione  $\mathbf{s}$ , più l'intervallo di confidenza è esteso più la media campionaria  $\bar{s}$  è una stima incerta dell'effettiva media  $\mu$ ; viceversa più è stretto, più la stima  $\bar{s}$  è precisa nel senso che  $\mu$  si trova in un intorno piccolo della media campionaria. Sotto questo punto di vista è concettualmente analogo alla precisione di uno strumento di misura.

**Osservazione 4.3.** La stima intervallare (4.2) appena ricavata vale tanto per il vettore aleatorio  $\mathbf{S}$  che per le sue realizzazioni  $\mathbf{s}$ , le quali sono, appunto, il risultato delle  $R$  simulazioni.

### 930 Struttura dei risultati

I dati presentano una struttura di un tensore del quart'ordine  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^{N_f \times 2 \times N \times R}$  i cui indici hanno il seguente significato

$$s_{i,r}^{n,a} \left\{ \begin{array}{l} n = \text{istante temporale}, \\ a = \text{tipo di simulazione}, \\ i = \text{indice della città}, \\ r = \text{numero della simulazione}. \end{array} \right.$$

L'istante temporale è definito tramite tre parametri in  $\mathbb{N}_+$ :

<sup>2</sup> Vale a dire  $\mu$  non è una variabile aleatoria ma l'esatto parametro della media di  $q$ .

- 934     ◊  $N_t \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$  è il numero totale di tempi simulati;  
 935     ◊  $N_s \ll N_t$  è il numero di catture dai tempi simulati;  
 936     ◊  $N_f < N_s$  è il numero di tempi ridotti dalle catture.

937     Sia le catture che la riduzione sono campinate in intervalli equispaziati  
 938     con passi

$$\Delta s = N_t / N_s \quad \text{e} \quad \Delta f = N_s / N_f$$

939     ove si suppone, per semplicità, che  $N_s$  e  $N_f$  siano divisori ordinatamente di  
 940      $N_t$  e  $N_s$ , da cui

$$N_t / N_s - \lfloor N_t / N_s \rfloor = 0 \quad \text{e} \quad N_s / N_f - \lfloor N_s / N_f \rfloor = 0,$$

941     e ugualmente si assume per  $\Delta t$  e  $T$ .

942     Tramite l'Alg. 1 si simulano in totale  $N_t$  tempi con passo  $\Delta t$  di cui  $N_s$   
 943     sono salvati nel tensore

$$\underline{s} \in \mathbb{R}_+^{N_s} \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^R$$

944     delle catture:

$$\underline{s}_{i,r}^{n,a} \equiv S^{n\Delta s} \quad \forall n, \forall a, \forall i, \forall r;$$

945     successivamente si convolve  $\underline{s}$  rispetto all'indice del tempo:

$$s_{i,r}^{n,a} \equiv \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} \underline{s}_i^{(n-1)N_f+j,a} r, \quad \forall n, \forall a, \forall i, \forall r,$$

946     vale a dire si mediano ogni  $\Delta f$  elementi delle  $N_s$  catture. Tale mollificazione  
 947     è necessaria per rendere  $s$  meno rumoroso rispetto a  $\underline{s}$  e quindi più leggibile  
 948     una volta raffigurato.

949     Per quanto riguarda gl'istanti temporali considerati, si hanno tre forme a  
 950     seconda di come s'intende l'indice  $n$ :

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t & \forall n \in \{1, 2, \dots, N_t\}, \\ t_n^s &= t_n \Delta s & \forall n \in \{1, 2, \dots, N_s\}, \\ t_n^f &= t_n^s \Delta f & \forall n \in \{1, 2, \dots, N_f\}, \end{aligned}$$

951     rispettivamente per i tempi discretizzati, campionanti e ridotti; a prescindere  
 952     vale comunque  $t_{N_t} = t_{N_s}^s = t_{N_f}^f = T$ .

953     **Osservazione 4.4.** I parametri temporali  $N_t$ ,  $N_s$  ed  $N_f$  non contano il tempo  
 954     iniziale perché fa riferimento alla distribuzione iniziale  $s_0 \in \mathbb{R}_+^N$ .

955     **Osservazione 4.5.** Per molti grafici si considera solo la distribuzione al tem-  
 956     po finale  $T$ , cosicché  $s^{N_f} \in \mathbb{R}_+^{2 \times N \times R}$  è un tensore del terz'ordine; inoltre  
 957     s'indica impropriamente  $s^{N_f}$  con  $s^T$  per leggerezza di notazione.

958     **Ipotesi 4.2.** In questa trattazione si considerano  $N_f = 100$ ,  $N_s = 1000$  mentre  
 959      $N_t$  viene scelto per essere poco superiore al tempo di convergenza della  
 960     simulazione, se i risultati convergono, ma sicuramente è un multiplo di 10  
 961     per garantire che  $N_s$  sia un suo divisore.

962 **Istogrammi e lognormale bimodale**

963 Il primo grafico riguarda gl'istogrammi [normalizzati] della distribuzione al  
 964 tempo finale T. Si inizia considerando il massimo e il minimo elemento del  
 965 tensore  $s^T$ ,

$$s_{\max} \equiv \max_{a,i,r} s_{i,r}^{T,a} \quad \text{e} \quad s_{\min} \equiv \min_{a,i,r} s_{i,r}^{T,a},$$

966 coi quali si può definire una griglia comune equispaziata su cui costruire  
 967 gl'istogrammi. Siano  $N_c$  il numero di intervalli della griglia, ossia il  
 968 numero di classi, allora definita Istogramma:  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_c}$  come la funzione  
 969 che restituisce i valori [normalizzati] delle classi dell'istogramma, il tensore  
 970 degl'istogrammi  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}_+^{2 \times N_c \times R}$  si scrive

$$\mathbf{h}_{\cdot,r}^a \equiv \text{Istogramma}(s_{\cdot,r}^{T,a}), \quad \forall a, \forall r.$$

971 Valutati gl'intervalli di confidenza

$$IC_R^{0.05}(\mathbf{h}_c^a) = \bar{h}_c^a \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{V_c^a}{R}}, \quad \forall a, \forall c,$$

972 si possono rappresentare con  $\bar{h}^a$  l'istogramma medio della simulazione esatta  
 973 e approssimata, e con  $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{V_c^a/R}$  l'errore stocastico sulle stime dei  
 974 valori medi delle classi.

975 Per quanto riguarda i fittaggi lognormali bimodali la logica è simile: sia

$$\mathcal{L}(x; s_{\cdot,r}^{T,a}) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \forall a, \forall r,$$

976 la densità di una lognormale bimodale fittata dal vettore  $s_{\cdot,r}^{T,a}$ , la cui forma  
 977 esplicita è la (1.4), e sia

$$\mathcal{L}(x; s^{T,a}) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^R$$

978 la funzione vettoriale tale che

$$\mathcal{L}(x; s^{T,a}) \equiv [\mathcal{L}(x; s_{\cdot,1}^{T,a}) \quad \mathcal{L}(x; s_{\cdot,2}^{T,a}) \quad \dots \quad \mathcal{L}(x; s_{\cdot,R}^{T,a})]^T,$$

979 che in essenza raccoglie tutt'i fittaggi in un unico vettore. Allora gl'intervalli  
 980 di confidenza hanno forma

$$IC_R^{0.05}(\mathcal{L}(x; s^{T,a})) = \bar{\mathcal{L}}^a(x) \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{V^a(x)}{R}}, \quad \forall x \in [s_{\min}, s_{\max}], \forall a,$$

981 in cui, come prima,  $\bar{\mathcal{L}}^a(x)$  è la funzione media mentre  $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{V^a(x)/R}$  la  
 982 sua incertezza stocastica.

983 **Osservazione 4.6.** Essendo x continuo, l'insieme degl'intervalli di confidenza  
 984 forma per le funzioni un fascio di confidenza.

985 **Pareto vs lognormale bimodale**

986 **Pareto e relativi indici**

987 **Taglia media**

988 **Taglie vs gradi**

989 L'intervallo di confidenza non è applicato a tutt'i grafici perché molti sono  
 990 già troppo affollati e l'aggiunta di un ulteriore barra verticale/orizzontale li  
 991 renderebbe eccessivamente densi.

992 **Evoluzioni delle taglie**

993 **4.1.3 Sulle fluttuazioni  $\gamma$**

994 **4.2 REGOLE D'EMIGRAZIONE**

995  $s$  e  $s_*$  vanno intese come la città interagente e ricevente rispettivamente

996 La scelta di  $E(s,s_*)$  dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno  
997 dell'immigrazione.

998 Si vuole evitare lo spopolamento delle città a causa delle fluttuazioni nella  
999 (3.23) dato che nella (4.3) compare il rapporto tra popolazioni delle città  
1000 interagenti

1001 Si avvisa anche sono stati ottenuti dei risultati analoghi a quelli della Sar-  
1002 degna per tutte le regioni italiane, Italia inclusa; questa è la ragione per cui  
1003 in questo paragrafo ci si concentrerà solo su quella regione, mostrandone  
1004 anche alcuni per l'Italia.

1005 **4.2.1 Regola taglia**

1006 Una prima possibilità consiste nella

$$1007 E(s,s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (4.3)$$

1008 che in essenza è la [9, (2.2), § 2, p. 223] modificata mediante la [9, (4.5), § 4, p.  
1009 228], ossia è una funzione di Hill di ordine  $\alpha$ , in cui v'è un tasso di emigra-  
1010 zione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto  $s_*/s$ ,  
1011 maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente  
significato:

- 1012  $\diamond \lambda \in (0,1)$  rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le  
1013 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 1014  $\diamond \alpha \in \mathbb{R}^+$  indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapida-  
1015 mente il rapporto  $s_*/s$  raggiunge la massima attrattività  $\lambda$ .

1016 In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche e non lineari,  
1017 a causa della (4.3).

1018 **4.2.2 Regola taglia-gradi**

1019 **4.2.3 Regola frazionata**

1020 **4.2.4 Regola taglia-forza**

1021 **4.2.5 Interpretazioni**

1022 In poche parole la (4.3) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per  
1023 i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

1024 **4.3 IL CASO DELL'ITALIA**

---



---

---

1025

## 5 | CONCLUSIONI

- 1026 1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di  
1027 Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
- 1028 2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa  
1029 della rete statica.
- 1030 3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.



1031

## APPENDICE

1032

### A CODICE



---

---

1033

## ELENCO DELLE FIGURE

1034	Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1). . . . .	6
1035	Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza. . . . .	9
1037	Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna. . . . .	13
1039	Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	15
1041	Figura 3.1	Schema riassuntivo del § 3.3.2. . . . .	38



---

---

1043

## ELENCO DELLE TABELLE

1044

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT<sup>1</sup>; le  
linee barrate corrispondono a dati trascurati. . . . . 12

1045

1046

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. . . . . 13



1047

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berlant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [11] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021). URL: <https://arxiv.org/abs/2104.12107>.
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025). URL: <https://arxiv.org/abs/2503.11554>.
- [13] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.

- 1086 [14] Nuriacco, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-  
1087 based kinetic models: Emergence of a statistical description of the gra-  
1088 ph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1-  
1089 22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- 1090 [15] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*  
1091 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 1092 [16] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An*  
1093 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.