

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

**Modellizzazione della distribuzione della
popolazione tra città su reti spaziali mediante la
teoria cinetica dei sistemi multiagente**



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1 INTRODUZIONE	5
2 NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1 Definizioni miscellanee	9
2.2 Reti e città	10
2.3 Cenni sui dati	11
3 TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	17
3.1 Definizioni preliminari di probabilità	17
3.2 Descrizione cinetica di [tipo] Boltzmann	20
3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea	20
3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea	25
3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea	26
3.3 Descrizione cinetica urbana su reti	29
3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta	30
3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata	34
3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile	40
4 SIMULAZIONI	43
4.1 Premesse	43
4.1.1 Metodo Monte Carlo	43
4.1.2 Definizione dei grafici	44
4.1.3 Sulle fluttuazioni γ	44
4.2 Regole d'emigrazione	44
4.2.1 Popolazione	44
4.2.2 Popolazione-Connettività	45
4.2.3 Popolazione-Connettività frazionata	45
4.2.4 Popolazione-Forza	45
4.2.5 Interpretazioni	45
4.3 Il caso dell'Italia	45
5 CONCLUSIONI	47
APPENDICE	49
A Codice	49
ELENCO DELLE FIGURE	51
ELENCO DELLE TABELLE	53

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [16] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1.1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1.1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se in luogo di f si scrive la popolazione s [16, Fig. 9-2, p. 375]; tuttavia ciò è vero solo qualora $s \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1.1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia S la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_S(s)$ la sua funzione di densità di probabilità², la quale permette d'interpretare $f_S(s)ds$ come il numero di città con $s \in (s, s+dt)$; allora si dice che S segue una distribuzione di Pareto nella coda se soddisfa

$$R(s) \equiv \int_s^{+\infty} f_S(t)dt \approx \frac{c}{s^p} \quad \text{se } s \gg 1, \quad (1.2)$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}_+$ e con $R(s)$ uguale alla funzione di ripartizione complementare di S : essa rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a s e, qualora l'indice di Pareto p fosse unitario, è analoga al rango r nella (1.1).

Più recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_S(s)$ è ben fittata dalla distribuzione lognormale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3)$$

ove $X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$; come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹ In realtà, come Zipf stesso ammette [16, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

² Affinché $f_S(s)$ esista bisogna rigorosamente anche supporre che S sia assolutamente continua, ma qui non è necessario entrare nei dettagli per i quali si rimanda ai §§ 3.1 e 3.3.

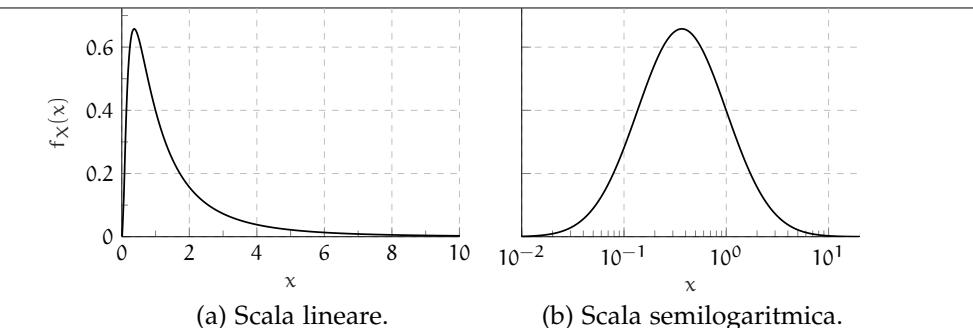


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che per fissare l’intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (1.3)

$$f_S(s) = \xi f_{S_1}(s) + (1-\xi) f_{S_2}(s), \quad (1.4)$$

ove $\xi \in (0,1)$ è un parametro da fissare tanto quanto le medie e le varianze associate a $S_1, S_2 \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$, per un totale di 5 parametri.

Pertanto l’obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (**TCSMA**) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d’interazione riguardo al fenomeno dell’emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell’autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- o applicano la **TCSMA** alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la **TCSMA** [3];
- altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [11];
- infine, l’articolo che piú si avvicina all’obbiettivo di questa tesi applica, tuttavia, la sua teoria nel contesto delle reti sociali [14].

³ In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s’intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della
60 teoria dei grafi applicata alla **TCSMA** sono stati piuttosto recenti e prin-
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la **TCSMA** è ap-
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dalla Fig. 2.1.

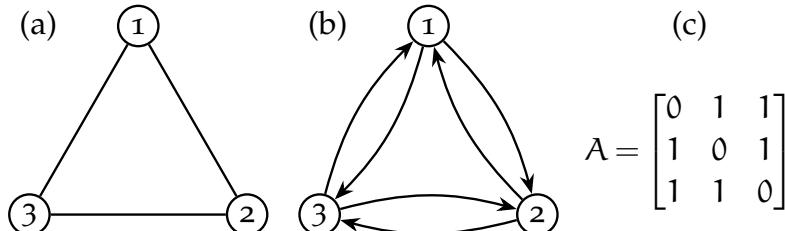


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza). Sia $N \equiv |\mathcal{I}| \in \mathbb{N}_+$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero di vertici totali, si definisce la matrice d'adiacenza $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ pesata come:

$$w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso associato al lato (i,j) ; nel caso in cui $q_{i,j} \equiv 1 \forall i,j \in \mathcal{I}$ si ha la matrice d'adiacenza unitaria $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si osserva che, se non altrimenti detto, scrivendo solo «matrice d'adiacenza» si sottintende sempre l'unitarietà.

96 **Definizione 2.4** (Matrice trasposta). Data $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N \in \mathbb{N}_+$, allora
 97 s'indica A^\top la matrice trasposta così definita:

$$a_{i,j}^\top = a_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

98 **Definizione 2.5** (Matrice simmetrica). Data $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N \in \mathbb{N}_+$, allora

$$A \text{ è simmetrica} \iff a_{i,j} = a_{j,i} = a_{i,j}^\top \iff A = A^\top. \quad (2.3)$$

99 **Osservazione 2.1.** Per i grafi indiretti sia W che A sono simmetriche mentre
 100 per quelli diretti non è detto che sia così.

101 **Definizione 2.6** (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice $i \in J$, in
 102 un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i}; \quad (2.4)$$

103 d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più
 104 [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado
 105 entrante e uscente

$$k_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|J|} a_{i,j}, \quad (2.5)$$

106 rispettivamente.

107 Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2.4, 2.5) ma con
 108 $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

109 2.2 RETI E CITTÀ

110 Dopo aver illustrato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il proble-
 111 ma di come rappresentare con essi la moltitudine di collegamenti possibili
 112 tra le città

113 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i
 114 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati
 115 e le loro intersezioni come nodi [13, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la
 116 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [13, § 3.2.1 p. 22]; altri si
 117 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in
 118 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [13, § 3.1.3.2 p. 17], navale
 119 [13, § 3.1.4 p. 19], aereo [13, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

120 Tuttavia, da quanto detto nella Cap. 1, è chiaro che per predire la distribu-
 121 zione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 122 1. ogni rappresentazione intraurbana va scartata perché sono troppo
 123 fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
- 124 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ciascun individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

127 Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti
 128 pendolari [13, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutt'i
 129 possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre
 130 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché
 131 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

132 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di
 133 grafo con cui si ha a che fare. Eppure qui la risposta è immediata dopo due
 134 osservazioni:

- 135 1. una città può interagire con un'altra senza che quest'ultima interagi-
 136 sca colla prima: è necessario considerare il senso di direzione;
- 137 2. ammesso che una città possa interagire con un'altra, allora è sempre
 138 possibile l'opposta: le potenziali interazioni sono simmetriche.

139 Dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta (Def. 2.2),
 140 ovvero la sua matrice d'adiacenza \mathbf{A} è simmetrica.

141 **Ipotesi 2.1.** Il grafo \mathcal{G} è diretto e simmetrico (\mathbf{A} è simmetrica).

142 Inoltre in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

143 **Ipotesi 2.2.** Il grafo \mathcal{G} è statico: \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

144 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
 145 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
 146 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connes-
 147 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
 148 stesse.

149 Infine si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 13], ovvero i suoi
 150 nodi occupano un punto nello spazio euclideo, seppure, al momento, sia una
 151 caratteristica alquanto formale; tuttavia servirà tenerlo a mente quando si
 152 definiranno alcune regole d'interazione nel Cap. 4. Perdiú, contrariamente
 153 a quanto si possa pensare di primo acchito, tale grafo non è a invarianza di
 154 scala [2] a causa del tipo di grafo [4, 13]; ciò non esclude l'esistenza di nodi
 155 più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato
 156 superiormente proprio dalla natura spaziale del grafo.

157 2.3 CENNI SUI DATI

158 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999
 159 [10] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un file di testo formato da
 160 una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

161 I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è ne-
 162 cessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni
 163 e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

164 Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento
 165 `Pen_91It.txt`:

¹ si v. il documento `trapen91.txt` per maggiori informazioni.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond. professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

- 165 1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice
 166 «022008» che però non è elencato nel documento *elencom91.xls* che
 167 riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
 168
 169 2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici
 170 incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non
 171 la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229»,
 172 «241», «216», «203», «224», «236», «246».

173 In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi]
 174 sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto
 175 raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può
 176 notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

177 00200714212215_____1,

178 ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in tota-
 179 le 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del
 180 Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in
 181 realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», ep-
 182 pure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di
 183 partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizza-
 184 re che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo;
 185 è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il
 186 codice del comune di destinazione².

177 2 Si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni colo stesso codice comunale, quello che minimizza la
 178 distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni
 179 comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella Cap. 4, sono correzioni
 180 del tutto innecessarie.

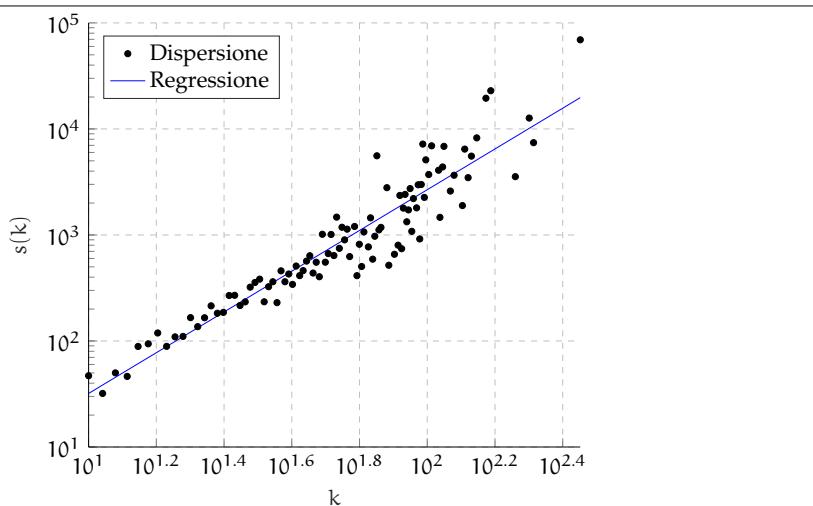


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

187 Infine nelle Algg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle
188 seguenti osservazioni:

- 189 1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio
190 di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);
- 191 2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-
192 mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che
193 limiti superiori e inferiori più estesi;
- 194 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g
195 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-
196 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come
197 afferma [5];
- 198 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-
199 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte
200 di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-
201 no molto distanti geograficamente³, per cui è ragionevole che i flussi
202 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu SE	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

(b) Pesi maggiori di [5]

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

203 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero
204 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-

³ Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

²⁰⁵to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva
²⁰⁶tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

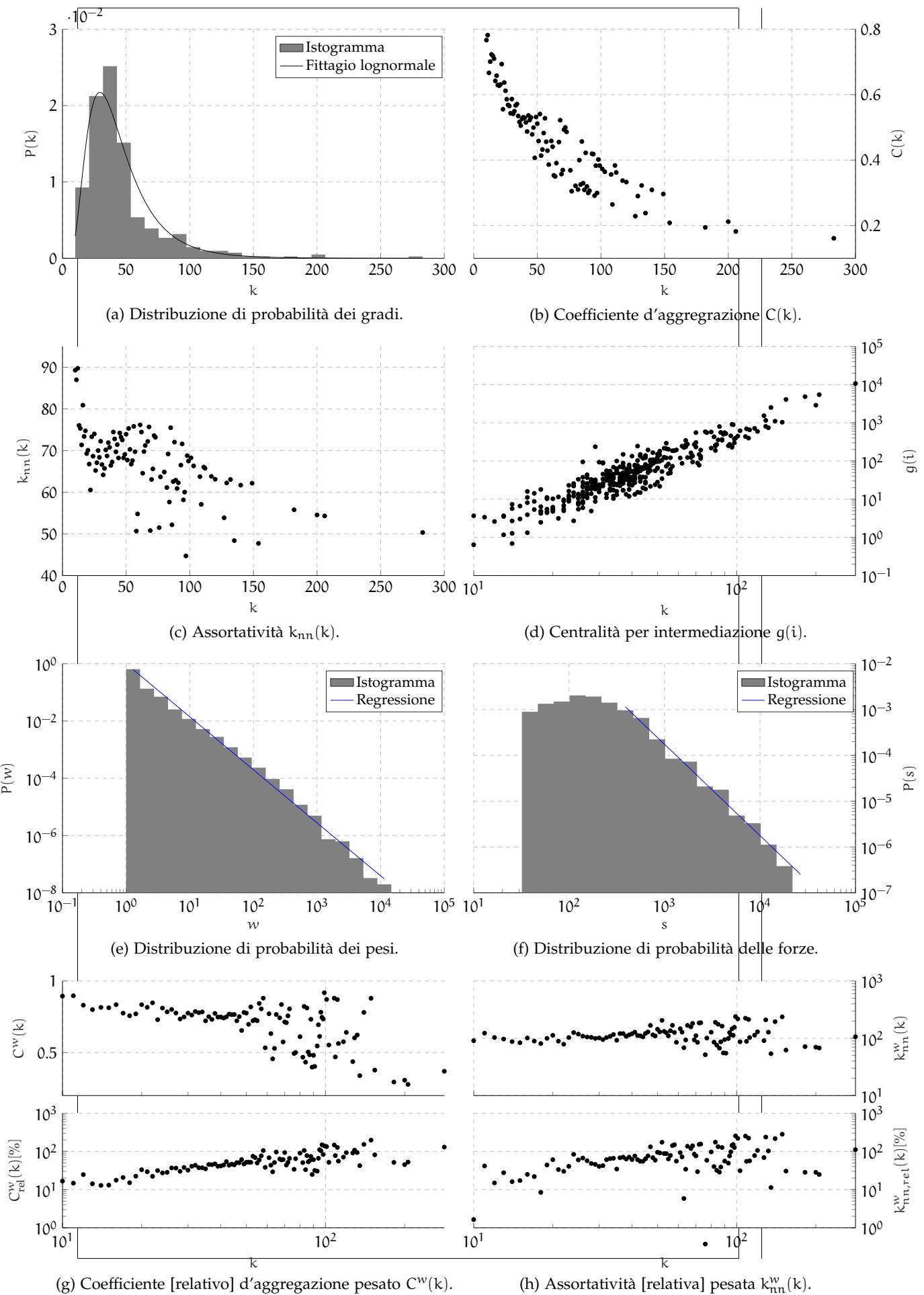


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la [TCSMA](#) necessaria per ottenere e discutere i risultati nel Cap. 4.

S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità collegate si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvivando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Semiretta intera/reale positiva). In tutto questo elaborato si fanno uso dei seguenti sottinsiemi dei numeri reali e naturali:

$$\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}, \\ \mathbb{N}_+ \equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.$$

Definizione 3.2 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Siccome Ω è uno spazio astratto poco trattabile, in questo scritto si definisce una variabile aleatoria semplicemente evidenziando l'appartenenza al suo codominio e sottintendendo il suo dominio: $X \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.3 (Densità di probabilità di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua, allora la densità di probabilità $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge \mathbb{P}_X di X :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la variabile aleatoria X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x)dx$ va inteso come $f_X(dv)$.

Definizione 3.4 (Densità congiunta di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità congiunta di probabilità $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ di \mathbf{X} :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}\end{aligned}$$

Definizione 3.5 (Densità marginale di probabilità di X_i). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità marginale di probabilità $f_{X_i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile così definita:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3.1)$$

essa è a tutti gli effetti la densità di probabilità della variabile aleatoria X_i secondo la Def. 3.3.

Osservazione 3.2. Per brevità, da qui in avanti s'indicheranno le precedenti densità sottintendendo che siano relative alla probabilità: $f_{\mathbf{X}}$ è dunque la densità di \mathbf{X} , f_X la densità congiunta di \mathbf{X} e f_{X_i} la densità marginale di X_i .

Inoltre, qualora il contesto non dia ambiguità, si sottintendono le variabili o i vettori aleatori cui fanno riferimento le relative densità: dunque f è la densità di \mathbf{X} , X e X_i , a seconda del caso; in alternativa si possono usare anche forme più leggere, come f_i per f_{X_i} , se necessario.

Proprietà 3.1 (Densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la densità congiunta di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

Definizione 3.6 (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua e data una funzione misurabile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora il valore atteso di $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Definizione 3.7 (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua a media finita $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra, allora l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una variabile aleatoria Y tale che

268 AC₁ $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

269 AC₂ per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

270 L'insieme delle Y che soddisfanno le AC₁ e AC₂ sono indicate col simbolo
 271 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può
 272 indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

273 Un'analogia definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti
 274 con X scalare e Y vettoriale.

275 **Osservazione 3.3.** Presa una variabile aleatoria $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente defi-
 276 nizione \mathcal{G} può essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

277 ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borel relativa allo spazio dei numeri reali mentre
 278 $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathbb{R}_+(\Omega)$.

279 Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

280 **Proposizione 3.1.** *Dati*

281 1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;

282 2. un vettore aleatorio $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da
 283 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^h$ e $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^k$ con densità congiunta $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e marginali $f_{\mathbf{X}}$ e $f_{\mathbf{Y}}$;

284 3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{Z})] = \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] <$
 285 ∞ ;

286 allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k, \quad (3.2)$$

287 che soddisfa $h(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|\mathbf{Y}]$.

288 *Dimostrazione.* Per la AC₁ è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(\mathbf{Y}))$:

$$\sigma(h(\mathbf{Y})) \equiv \sigma(\mathbf{Y}^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(\mathbf{Y}^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

289 a parole si considera la controimmagine tramite \mathbf{Y} dei borelliani filtrati da
 290 h , ragion per cui la σ -algebra non potrà che essere contenuta in quella non
 291 filtrata.

292 Per la AC₂ si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(\mathbf{Y})$ avvalendosi della caratteriz-
 293 zazione di $h(\mathbf{Y})$ tramite (3.2):

$$\begin{aligned} \int_A h(\mathbf{Y}) d\mathbb{P} &= \int_B h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \stackrel{(3.1)}{=} \int_B h(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^h} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(\mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \stackrel{(3.2)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(\mathbf{Y}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_C(\mathbf{Z}) \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

ove $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

□

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (3.2), allora $h(y)$ si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y=y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y)/f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la densità di X condizionata dall'evento $Y=y$.

La (3.3), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(X, Y)$ rispetto a X dopo aver "fissato" l'evento $Y=y$, vale a dire considerando la Y come fosse un parametro uguale a y .

Successivamente, se s'impone $A=\Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]], \quad (3.4)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(X, Y)$ si calcola mediando rispetto a Y la variabile aleatoria $\mathbb{E}[X|Y]$, ricavata dalla (3.3) ma considerando y arbitrario.

Definizione 3.8 (Processo stocastico). Data una dimensione $n \in \mathbb{N}_+$, un processo stocastico è un insieme di vettori aleatori X_t parametrizzati da un indice $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\{X_t \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} = \{X_t\}_{t \in I},$$

la cui densità congiunta è

$$\mathbb{P}_{X_t}(A) = \mathbb{P}(X_t \in A) = \int_A f_{X_t}(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}$$

Comunemente s'interpreta l'indice t come il tempo ponendo $I \equiv \mathbb{R}_+$, e così sarà fatto in questo scritto.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA DI [TIPO] BOLTZMANN

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Descrizione classica

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

321 G₁ è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la
 322 distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

323 G₂ è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver
 324 luogo o, precisamente, sono più frequenti;

325 G₃ è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

326 G₄ le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso
 327 e dell'energia esprimibile, grazie alle G₂ e G₃, binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (\text{CI})$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (\text{CE})$$

328 ove $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle
 329 velocità precollisionali $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

330 Dalla G₄ si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire
 331 da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le regole d'interazione.

332 **Proposizione 3.2** (Regole d'interazione). *Esistono due funzioni*

$$\psi, \psi_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

333 *lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

334 ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .

335 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

336 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
 337 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \gamma] = 0, \end{aligned}$$

338 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

339 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (3.6) diven-
 340 ta allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (3.7)$$

341 \square

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $n \in S^2$, seppure da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante per i centri delle particelle collidenti.

Si osservi come le regole d'interazione nella 3.5 sono bilineari e simmetriche secondo la seguente definizione:

Definizione 3.9. Se le regole d'interazione del tipo (3.5) verificano

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}' &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) & \mathbf{v}'_* &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v})\end{aligned}$$

allora si dicono simmetriche.

349 *Descrizione statistica*

Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame: siano allora $\{\mathbf{V}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ i processi stocastici delle velocità precollisonali, dove $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ sono variabili aleatorie di cui le velocità precedenti, \mathbf{v} e \mathbf{v}_* , sono due realizzazioni al tempo t ; un simile discorso vale per i processi stocastici delle velocità poscollisionali $\{\mathbf{V}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}'_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Osservazione 3.5. Le variabili aleatorie \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es. \mathbf{V}_t^i) proprio per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, da cui si deduce anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Le regole d'interazione nella (3.5) diventano

$$[RI]_V \begin{cases} \mathbf{V}' = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* = \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{cases}$$

in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim U(S^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad [\text{Ber}]_V$$

che è una variabile aleatoria di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui probabilità è descritta da due termini:

- 366 1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'aver 367 una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali 368 possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
- 369 2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

Osservazione 3.6. Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$: condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo; si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale condizione sarà sempre verificata.

² Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

374 Colle [RI] \mathbf{v} e [Ber] \mathbf{v} , lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è
 375 dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[AR]_{\mathbf{v}} \begin{cases} \mathbf{V}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t, \end{cases}$$

376 che di fatto è una regola che descrive se gli agenti interagiscono a coppie
 377 (modellizzato dalla Θ) e, nel caso, come interagiscono (modellizzato dalle
 378 \mathbf{V}'_t e \mathbf{V}''_t) modificando il loro stato al tempo successivo.

379 ***Derivazione modello***

380 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di me-
 381 diare le [AR] \mathbf{v} attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità
 382 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ o di $\mathbf{V}'_{t+\Delta t}$; pertanto
 383 una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle [AR] \mathbf{v} ,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t}) &= \varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t), \end{aligned}$$

384 e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}'_t + \Theta\mathbf{V}''_t)]; \end{aligned}$$

385 per espandere la media, siccome Θ dipende da $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n})$, bisogna avvalersi
 386 dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t) | \mathbf{V}_t, \mathbf{V}'_t, \mathbf{n}]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})]\Delta t, \end{aligned} \tag{3.8}$$

387 e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

388 e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}'_t))], \end{aligned}$$

389 che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}' &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{n})(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \end{aligned} \tag{3.9}$$

³ Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel'3.6 per qualunque valore di $B((\mathbf{V}'_t - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n})$.

390 in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot d\mathbf{n}$$

391 indica la media rispetto a \mathbf{n} , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n})$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n})$.
 392 e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui densità congiunta è $f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine
 393 necessario sommare le due equazioni in (3.9). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.10)$$

394 infatti dal'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il domi-
 395 nio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo
 396 integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono
 397 necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

398 **Ipotesi 3.2.** Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (3.11)$$

399 una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}|$.

400 **Ipotesi 3.3** (Caos molecolare). Le particelle interagenti secondo le [AR] $_{\mathbf{v}}$ so-
 401 no campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare
 402 matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni
 403 caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due par-
 404 ticelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole
 405 dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

406 **Osservazione 3.7.** Dal'Ip. 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la
 407 densità congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

408 In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(\mathbf{v}_*)$ nel secondo membro della
 409 seconda equazione della (3.9) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.12)$$

410 seguendo la medesima logica della (3.10). Applicando i due risultati illu-
 411 strati nelle (3.10), (3.12) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann
 412 omogenea asimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \left(\frac{\varphi' + \varphi'_*}{2} - \varphi \right) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.13)$$

413 ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le
 414 funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi *
 415 (per una spiegazione più dettagliata si legga poco dopo nel § 3.2.3).

416 Tuttavia, qualora le regole d'interazione siano simmetriche secondo la
 417 Def. 3.9, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di
 418 variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

419 da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma de-
420bole⁴:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* dnd\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad [\text{EtB}]_V$$

421 Si può anche ricavare la forma forte della [\[EtB\]_V](#) considerando le regole d'in-
422terazione inverse della [\[RI\]_V](#) [\[12, § 2.5, p. 15\]](#), ma il conto esula dagli scopi di
423 questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per il paragrafo
424 a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*. \quad (3.14)$$

425 3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

426 L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la [\(3.14\)](#), bensì
427 è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine
428 avvettivo $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) dnd\mathbf{v}_*, \quad (3.15)$$

429 dove l'operatore $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ è il gradiente spaziale e la distribuzione
430 dipende ora anche dallo spazio: $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Essa è un'equazione integro-
431 differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a
432 tempo dato.

433 Il primo membro della [\(3.15\)](#) non è altro che la derivata materiale del-
434 la distribuzione f : posto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$, ovvero in mancanza di collisioni,
435 l'equazione involve in una del trasporto lineare con soluzione nota.

436 **Proposizione 3.3.** *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.16)$$

437 ha come soluzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$ in cui $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ è la distribuzione
438 iniziale.

439 *Dimostrazione.* Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella [\(3.16\)](#)
440 la velocità \mathbf{v} nell'operatore avvettivo non dipende né dallo spazio né dal
441 tempo, quindi si possono prendere le curve $\mathbf{x}(t)$ tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (3.17)$$

442 dette, appunto, curve caratteristiche della [\(3.16\)](#); valutando allora la distri-
443 buzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lungo di esse si può definire $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$ che derivata
444 equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

⁴ Si dice debole siccome essa vale per una funzione test φ arbitraria.

da cui si deduce che f è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (3.17) si può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, dunque la soluzione in un generico punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo t passa per \mathbf{x} . \square

Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale f_0 semplicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la direzione della velocità costante \mathbf{v} , movimento che rappresenta la variazione medi statistica delle posizioni molecolari.

D'altra parte il secondo membro della (3.15) rappresenta la variazione media statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò anche chiamato operatore collisionale).

Pertanto la (3.15) descrive una chiara separazione di effetti: il primo membro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

L'obbiettivo di Boltzmann tramite la (3.15) era di raccordare due mondi: il mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione f soddisfacente la (3.15); i principali sono

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tali quantità sono definite da f seppure questa sia in genere infattibile da ricavare dalla (3.15), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; ep pure, tramite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite [12, 15], è possibile svicolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della f ricavando un sistema chiuso dei soli momenti (3.18). La convergenza di questi a un valore stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione mesoscopica indotta dalla distribuzione f .

3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria è stata sviluppata da Pareschi *et al.* [15]; sono chiamati così per due ragioni:

- 479 1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analoghe strutturalmente alla [EtB]_v e
 480 2. sono applicati a contesti⁵ molto distanti da quello originale delle velocità di particelle di un gas.

483 Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già visti nel § 3.2.1 senza però riscrivere tutti i passaggi.

485 **Descrizione e derivazione**

486 Sia $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico relativo allo stato microscopico dell'agente di un sistema, dove $X_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ è il vettore aleatorio⁶ che descrive i suoi stati microscopici al tempo t ; allora le Ipp. 3.1 e 3.3 si possono così riformulare:

490 **Ipotesi 3.4.** Gli agenti sono caratterizzati dalle seguenti ipotesi:

- 491 B₁ la distribuzione statistica dei microstati è uniforme nello spazio, e quindi non dipende da esso;
 492 B₂ gli agenti interagiscono solo binariamente, ovvero le interazioni a coppia sono le più frequenti;
 493 B₃ gli agenti sono indistinguibili cosicché ognuno è rappresentativo del loro insieme;
 494 B₄ due agenti interagenti sono statisticamente indipendenti.

498 D'altra parte gli stati poscollisionali (postati), X'_t e $X^{*'}_t$, si legano con quelli precollisionali (prestati), X_t e X^*_t , tramite

$$[RI]_X \begin{cases} X'_t = \psi(X_t, X^*_t, y), \\ X^{*'}_t = \psi_*(X_t, X^*_t, y_*), \end{cases}$$

500 ove ora

$$\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{h_*} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

501 sono generiche regole d'interazione, non necessariamente lineari o simmetriche (Def. 3.11), mentre $y \in \mathbb{R}^h$ e $y_* \in \mathbb{R}^{h_*}$, con $h, h_* \in \mathbb{N}$, rappresentano dei coefficienti potenzialmente stocastici.

504 L'interazione tra di essi avviene secondo una variabile aleatoria di Bernoulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(X_t, X^*_t, w, t) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_X$$

506 con tasso/nucleo d'interazione

$$\mu(X_t, X^*_t, w, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad [\text{NI}]_X$$

507 per controllare quant'è "probabile" che i due agenti interagiscano, e coefficienti $w \in \mathbb{R}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, potenzialmente stocastici.

⁵ Esempi importanti sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico, come quello qui considerato delle città

⁶ Si noti che il dominio I degli stati non coincide necessariamente col'intero spazio reale \mathbb{R}^n .

509 **Osservazione 3.8.** Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modelli-
 510 stico si può semplicemente porre unitario:

$$\mu \equiv 1, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$$

511 sottintendendo in tal modo un'uniforme "probabilità" d'interazione.

512 Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'intera-
 513 zione

$$[\text{AR}]_{\mathbf{x}} \begin{cases} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}_t + \Theta\mathbf{X}'_t, \\ \mathbf{X}'_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}'_t + \Theta\mathbf{X}_t, \end{cases}$$

514 dove $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

515 **Osservazione 3.9.** l'acronimo $[\text{AR}]_{\mathbf{x}}$ sta per «Azione-Reazione» poiché si
 516 suppone che ogn'interazione (azione), ossia $\Theta = 1$, necessariamente modi-
 517 fica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [14]
 518 questa regola può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia
 519 modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

520 Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1
 521 colla quantità osservabile $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si perviene all'equazione di tipo Bol-
 522 tzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad [\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$$

523 nella quale $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media rispetto a tutt'i coefficienti potenzial-
 524 mente stocastici (\mathbf{y} , \mathbf{y}_* e \mathbf{w}), mentre il termine $-\varphi - \varphi_*$ discende dal fatto
 525 che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione μ sia pari.

526 **Osservazione 3.10** ($[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ simmetrica). Qualora $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ sia pari (Def. 3.10) e
 527 le regole d'interazione $[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ siano simmetriche (Def. 3.11), la $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ si può
 528 riformulare come

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) (\varphi' - \varphi) \rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (3.19)$$

529 mediante un cambio di variabili atto a invertire \mathbf{x} e \mathbf{x}_* solo per la differenza
 530 $\varphi'_* - \varphi_*$.

531 **Definizione 3.10** ($[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ pari). Se il tasso d'interazione in $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ verifica

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{w}, t) = \mu(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k,$$

532 allora μ si dice pari.

533 **Definizione 3.11** ($[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ simmetriche). Se le regole d'interazione del tipo $[\text{RI}]_{\mathbf{v}}$
 534 verificano

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \psi_*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}) & \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^h, \\ \psi_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}_*) &= \psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}_*) \end{aligned}$$

535 allora si dicono simmetriche. In altre parole, la simmetria implica

$$\mathbf{X}'_t = \psi_*(\mathbf{X}'_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}'^*_t = \psi(\mathbf{X}'_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}_*).$$

536 **Notazione**

537 Nei previ paragrafi si è fatto spesso uso, specie per le varie equazioni [di
538 tipo] Boltzmann ([3.13–3.15](#)), [EtB_v] e [EtB_x], di una notazione abbreviata per
539 tutti gli oggetti salvo il tasso d'interazione μ . In questo breve paragrafo si de-
540 finiscono in maniera più esplicita queste abbreviazioni facendo riferimento
541 al contesto generale sviluppato poco fa.

542 Innanzitutto la densità congiunta f da sola sottintende la variabile dell'-
543 l'agente interagente x mentre con un pedice f_* quella dell'agente ricevente
544 x_* :

$$f \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_* \equiv f(x_*, t);$$

545 dopodiché le quantità osservabili φ seguono la medesima logica di prima
546 ma coll'aggiunta di un apice per distinguere le variabili postinterazionali:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \varphi(x) & \text{e} & \varphi_* \equiv \varphi(x_*), \\ \varphi' &\equiv \varphi(x') & \text{e} & \varphi'_* \equiv \varphi(x'_*). \end{aligned}$$

547 Ovviamente questa notazione può essere generalizzata a una qualunque
548 funzione scalare $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione del microstato degli agenti:

$$\begin{aligned} g &\equiv g(x) & \text{e} & g_* \equiv g(x_*), \\ g' &\equiv g(x') & \text{e} & g'_* \equiv g(x'_*). \end{aligned}$$

549 Infine si osserva che qualora vi siano altri pedici o apici nelle funzioni a ve-
550 nire, essi *non* fanno riferimento a questa notazione corta, se non altrimenti
551 specificato. Per esempio giusto nel prossimo paragrafo si lavora con del-
552 le densità f_i , in cui i è l'indice del nodo del grafo associato all'agente; è
553 comunque possibile, anche per questi casi, usare la notazione precedente
554 riposizionando lievemente i pedici e gli apici:

$$f^i \equiv f(x, t) \quad \text{e} \quad f_i^* \equiv f(x_*, t);$$

555 **Analisi dimensionale**

556 **3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI**

557 Si analizza adesso il caso del tessuto interurbano descritto nel § [2.2](#), consi-
558 derando le città sia come agenti che come nodi di una rete che ne regola le
559 interazioni: due città possono interagire se sono connessi; è anche ovvio che
560 l'interazione modifichi, in qualche modo da definire, la loro popolazione.

561 In questo paragrafo si applicano i concetti della teoria sviluppata nei §§ [2.1](#)
562 e [3.2.3](#) e, in particolare, la notazione usata e definita. S'inizia mostrando una
563 derivazione esatta la quale, cioè, considera la topologia esatta; quindi si ap-
564 profondisce un'approssimazione nella quale si "perde" la topologia indotta
565 dalla rete; infine, si considerano i collegamenti tra la derivazione esatta e
566 quella di tipo Boltzmann sotto determinate ipotesi.

567 **3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta**

568 ***Descrizione e derivazione***

569 Visto che si assume che valgono le Ip. 3.4⁷, dalla B3 sorge un problema non
570 di poco conto: gli agenti sono indistinguibili ma la rete sottostante li rende
571 distinti per via degl'indici \mathcal{J} .

572 Per dipanare la questione è sufficiente considerare l'indice come una va-
573 riabile aleatoria $I \in \mathcal{J}$ così da definire il processo stocastico come

$$\{X_t\} \equiv \{I, S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

574 in cui $S_t \in \mathbb{R}_+$ è la variabile aleatoria relativa alla popolazione dell'agente
575 rappresentativo al tempo t ed è l'unica componente del processo stocastico
576 a variare nel tempo per l'Ip. 2.2.

577 **Osservazione 3.11** (Sulla natura numerica della popolazione). È naturale che
578 non esistano frazioni di persone e che quindi rigorosamente $S_t \in \mathbb{N}$ ma non
579 sempre la scelta più realistica è quella che modellisticamente è più agevole;
580 infatti trattare S_t come una variabile aleatoria discreta impone un codomi-
581 nio, appunto, discreto che è in genere più difficile da manipolare matemati-
582 camente rispetto a un intervallo continuo. Tal'è la ragione nel scegliere S_t
583 reale: dopo aver fatto i conti normalmente si può poi approssimare per ec-
584 cesso o difetto ricavando la taglia intera effettiva; l'errore così commesso è
585 di al più una persona.

586 Così ragionando si può nel complesso descrivere statisticamente lo stato
587 microscopico $X_t \equiv (I, S_t)$ dell'agente rappresentativo colla densità congiunta

$$f(i, s, t) : \mathcal{J} \times \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

588 che è discreta in $i \in \mathcal{J}$ e continua in $s \in \mathbb{R}_+$, uguale a

$$f(i, s, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(i - j), \quad (3.20)$$

589 dove $N \equiv |\mathcal{J}|$ è il numero totale d'agenti del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta
590 di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

591 è la densità di S_t dell'agente i -esimo.

592 In tal modo la densità congiunta f è effettivamente indistinguibile rispetto
593 a tutti gli agenti, soddisfacendo la B3, e integra sul suo dominio a uno:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(\mathcal{J} \times \mathbb{R}_+) &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f(i, s, t) ds di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} f_i(s, t) ds \otimes \delta(i - j) di \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \delta(i - j) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} 1 = \frac{N}{N} = 1, \quad \forall t \geq 0; \end{aligned}$$

7 Perdipiù la B2 è valida a un tempo t , ma nell'unità di tempo dimensionale † le interazioni si possono considerate come non binarie, come già discusso alla fine del § 3.2.3.

594 mentre le densità f_i preservano la naturale distinguibilità degli agenti indot-
595 ta dalla topologia sottostante.

596 Sempre come conseguenza del grafo, la $[Ber]_X$ deve dipendere dalla matri-
597 ce d'adiacenza A :

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(I, I^*)\Delta t), \quad [Ber]_S^A$$

598 ove $A: \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che a ogni coppia d'indici (I, I^*) associa la
599 relativa entrata nella matrice d'adiacenza

$$A(I, I^*) \equiv a_{I, I^*} = \begin{cases} 1 & \text{se } (I, I^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

600 secondo la (2.2); in tal modo l'interazione non ha possibilità d'avvenire se i
601 due agenti non sono connessi.

602 **Osservazione 3.12.** Rispetto al caso generale $[Ber]_X$ il tasso d'interazione ha
603 forma

$$\mu(i, i^*) \equiv A(i, i^*), \quad (3.21)$$

604 esso, cioè, è per definizione costante sia rispetto agli stati S_t e S_t^* che rispetto
605 al tempo, oltre a non avere coefficienti⁸ w .

606 **Osservazione 3.13.** Per definizione della distribuzione di Bernoulli, è neces-
607 sario imporre $A(I, I^*)\Delta t \leq 1$, ma dato che $A(I, I^*) \in \{0, 1\}$ ciò si traduce nella
608 naturale condizione che $\Delta t \leq 1$.

609 D'altro canto le regole d'interazione nella $[RI]_X$ diventano

$$[RI]_S \begin{cases} S'_t = \psi(S_t, I, S_t^*, I^*, \gamma), \\ S_t^{*\prime} = \psi^*(S_t, I, S_t^*, I^*). \end{cases}$$

610 **Osservazione 3.14.** Confrontato al caso generale $[RI]_X$, solo la funzione del-
611 la città interagente ψ presenta un coefficiente stocastico $y \equiv \gamma \in \mathbb{R}$, mentre
612 quella relativa alla città ricevente ψ^* non dipende da potenziali coefficienti⁹
613 y^* .

614 Unendo le $[Ber]_S^A$ e $[RI]_S$, le $[AR]_X$ si scrivono

$$[AR]_S \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \end{cases}$$

615 coerentemente col fatto che in un contesto urbano, qualora una città-nodo
616 interagisca con un'altra, entrambe debbano variare il loro stato (Oss. 3.9).

617 **Osservazione 3.15.** Paragonato a $[AR]_X$ ci si potrebbe chiedere perché non
618 si considera l'intero vettore aleatorio X_t , come pure nella $[RI]_S$; la ragione è
619 che I è una componente statica che non varia nel tempo.

620 In ogni caso, considerando I_t e I_t^* momentaneamente dinamiche, si posso-
621 no definire le regole d'interazione

$$[RI]_I \begin{cases} I'_t = \psi(S_t, I, S_t^*, I^*) \equiv I_t, \\ I_t^{*\prime} = \psi^*(S_t, I, S_t^*, I^*) \equiv I_t^*, \end{cases}$$

⁸ Questa situazione si può simbolicamente rappresentare ponendo $k=0$.

⁹ Come nell'Oss. 3.12, tale condizione si può simbolicamente rappresentare ponendo $h^*=0$.

622 da cui segue l'algoritmo d'interazione

$$[AR]_I \begin{cases} I_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I_t + \Theta I'_t = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t = I_t, \\ I^*_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I^*_t + \Theta I^{**}_t = (1-\Theta)I^*_t + \Theta I^*_t = I^*_t, \end{cases}$$

623 che soddisfa la staticità di I e I^* e completa, assieme a $[AR]_S$, la formulazione
624 $[AR]_X$ più generale.

625 Sia $\Phi: \mathcal{J} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un'arbitraria quantità osservabile, dalla $[Ber]_S^A$ l'equa-
626 zione di tipo Boltzmann omogenea $[EtB]_X$ ha forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} A(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* di di_*, \quad [EtB]_S^A$$

627 ove si è usata la notazione abbreviata illustrata nel § 3.2.3, mentre $\langle \cdot \rangle$ indica
628 il valore atteso rispetto alla variabile aleatoria γ nelle $[RI]_S$.

629 **Osservazione 3.16.** Anche se la derivazione della $[EtB]_S^A$ è già stata spiegata
630 nel dettaglio nel § 3.2.1, rimane interessante riportare la forma del passaggio
631 più difficile, ossia quella della media condizionata (3.8) (qui mostrato solo
632 per $S_{t+\Delta t}$):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(I, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, (1-\Theta)S_t + \Theta\psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma)A(I, I_*)\Delta t) | I, I_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, S_t)(1 - A(I, I_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(I, \psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma))A(I, I_*)\Delta t]]. \end{aligned}$$

633 Si noti come il condizionamento sia solo rispetto a I a I_* , proprio poiché Θ
634 in $[Ber]_S^A$, tramite il tasso d'interazione μ nella (3.21), dipende solo da essi.

635 *Analisi delle regole d'interazione*

636 Si approfondiscono in questo paragrafo le regole d'interazione $[RI]_S$.

637 Innanzitutto, il perché nella $[AR]_S$ si considerano interazioni «Azione-
638 Reazione» (Oss. 3.9) discende da un vincolo fisico: se una città interagisce
639 con un'altra, scambiando popolazione, necessariamente anche l'altra varia il
640 proprio stato.

641 Dopodiché, passando alle realizzazioni di tutte le variabili aleatorie consi-
642 derate, vale a dire scrivendole in minuscolo e omettendo la dipendenza dal
643 tempo, le regole d'interazione $[RI]_S$ sono così definite¹⁰

$$\begin{cases} \psi(s, i, s_*, i_* \gamma) = s(1 - E(s, i, s_*, i_*) + \gamma) \\ \psi_*(s, i, s_*, i_*) = s_* + s I(s, i, s_*, i_*) \end{cases} \quad (3.22)$$

644 ove

$$E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow [0, 1],$$

$$I: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow [0, 1],$$

645 sono rispettivamente i tassi d'emigrazione e immigrazione, mentre γ rap-
646 presenta fluttuazioni stocastiche. È perciò chiaro che, per avere un postato
647 fisicamente sensato, γ dev'essere tale che

$$s' = s(1 - E + \gamma) > 0 \quad \forall E \in [0, \lambda] \implies \gamma > E - 1 \quad (3.23)$$

¹⁰ Sono state in parte ispirate dalla [9, (2.1), p. 223].

in cui $\lambda \equiv \sup E \leq 1$ è il limite superiore del tasso d'emigrazione i cui argomenti da qui fino alla fine di questo paragrafo sono sottintesi (lo stesso per il tasso d'immigrazione I verso la fine); d'altra parte s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (3.23) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città¹¹.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto valgono le seguenti ipotesi:

Ipotesi 3.5. γ deve soddisfare le seguenti caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (3.23);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

1. la distribuzione normale $N(\mu, \gamma)$ non soddisfà la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
2. la distribuzione uniforme $U([a, b])$ è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfà né F2 né F3, mentre F1 sì;
3. la distribuzione esponenziale $Exp(\lambda)$ è quella più promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché la densità è non nulla al valore estremo $\gamma = E - 1$;
4. l'unica distribuzione che soddisfa tutte e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma $Gamma(\alpha, \beta)$.

Si assume allora $\hat{\gamma} \sim Gamma(\alpha, \beta)$ con densità

$$f_{\hat{\gamma}}(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

ove α e β sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre

$$\Gamma(\alpha): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la funzione gamma

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Imponendo la F3 si ottiene

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E = \alpha\beta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle \equiv \sigma^2 = \alpha\beta^2,$$

¹¹ Ciò non significa che il modello non possa prevedere lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi (Oss. 3.11).

679 in cui σ^2 indica la varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sigma^2}{1-E}.$$

680 La **F2** si può semplicemente soddisfare traslando i valori campionanti della
681 $\hat{\gamma}$ di $-\langle\hat{\gamma}\rangle$, ossia si considera la distribuzione $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle$:

$$\langle\gamma\rangle = \langle\hat{\gamma} - \langle\hat{\gamma}\rangle\rangle = \langle\hat{\gamma}\rangle - \langle\hat{\gamma}\rangle = 0.$$

682 D'altra parte per la **F1** bisogna salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
683 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa $\text{Exp}(\beta)$, mentre se $\alpha < 1$ diverge
684 all'origine; per avere quindi probabilità nulla di campionare da $\hat{\gamma}$ l'origine
685 [e quindi $-\langle\hat{\gamma}\rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} > 1,$$

686 ma nel caso peggiore $1-E=1-\lambda$ da cui

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1-\lambda)^2 \implies \sigma < |1-\lambda| = 1-\lambda, \quad (3.24)$$

687 siccome $E \in [0, \lambda]$ $\forall s, s_* \in \mathbb{R}_+$. La (3.24) implica quindi che non è possibile
688 avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la **F1**, ma che questa è
689 limitata superiormente dal massimo tasso d'emigrazione λ , interpretabile
690 come attrattività: più grande è λ più piccola è la varianza, e viceversa.

691 Si conclude osservando come sia naturale che l'interazione, ossia lo scam-
692 bio di popolazione descritto dalle (3.22), debba conservare [in media] la
693 popolazione totale:

$$s + s_* = \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle = s - sE + s_* + sI \implies E \equiv I,$$

694 il che ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi
695 (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto).

696 **Osservazione 3.17.** Le (3.22) non sono ancora complete siccome non si è
697 esplicitata la regola d'emigrazione, la cui scelta, tuttavia, si può dunque
698 vedere come la regola d'interazione stessa: è l'ultimo tassello del mosaico.
699 Pertanto si lascia quest'ultima definizione al Cap. 4 nel quale se ne pro-
700 pongono varie, si discutono quindi con vari studi parametrici per poi infine
701 interpretarle analizzando cosa dicono sul fenomeno della migrazione.

702 3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata

703 L'approssimazione si fonda sulla seguente matrice:

704 **Definizione 3.12** (Matrice dei gradi \mathbf{B}). Sia $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di rango
705 uno

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{k}^+(\mathbf{k}^-)^\top}{D_N}$$

706 definite tramite il prodotto diadioco dei vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^+ &\equiv (k_1^+, k_2^+, \dots, k_N^+)^\top = \mathbf{A}\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{k}^- &\equiv (k_1^-, k_2^-, \dots, k_N^-)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (3.25)$$

707 rispettivamente dei gradi uscenti ed entranti, e la costante¹²

$$D_N \equiv \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^+ = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^+ = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} = \|\mathbf{A}\|_1. \quad (3.26)$$

708 Allora \mathbf{B} approssima la matrice d'adiacenza \mathbf{A} poiché per definizione vale

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^+ \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^- (\mathbf{k}^+)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^- \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^- \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{B} \approx \mathbf{A}.$$

709 Inoltre, poiché \mathbf{A} è simmetrica (Ip. 2.1) vale $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}^\top}{D_N}.$$

710 Tramite la Def. 3.12, la $[\text{Ber}]_S^A$ diventa

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(I, I^*) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_S^B$$

711 da cui la $[\text{EtB}]_S^A$ si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi g dv di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} B(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} gg_* ds ds_* didi_*, \quad [\text{EtB}]_S^B$$

712 dove g e g_* sono densità definite come la (3.20) ma indicate diversamente
713 per distinguerle da quelle esatte f ed f_* .

714 Sorge però spontanea una domanda non di poco conto: perché non si
715 può scegliere un'altra matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ per approssimare la \mathbf{A} , secondo
716 altri criteri analoghi o dissimili alla (3.25)? La risposta non è immediata ma
717 discende in essenza su come la $[\text{EtB}]_S^B$ può essere riformulata. A tal scopo si
718 necessita di un osservazione:

719 **Osservazione 3.18** (Teoria e Pratica). Come detto nel Cap. 1, l'interesse è di
720 studiare la distribuzione della popolazione tra città; perciò, non a torto, si
721 può vedere la densità f nella (3.20) come eccessivamente dettagliata, conte-
722 nendo informazioni legate ai vertici: ai fini pratici è quindi sufficiente rica-
723 vare in qualche modo la densità marginale $\tilde{f}(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di$, $\forall t \geq 0$, che è
724 esattamente quanto fatto nel § 4.1.1 per i risultati delle venture simulazioni.

725 Dall'Oss. 3.18 si possono pertanto specializzare gli osservabili:

726 **Ipotesi 3.6** (Osservabili puntuali). Si considera la seguente classe di osserva-
727 bili: $\Phi(i, s) \equiv \delta(i - j)\varphi(s)$, $\forall j \in \mathcal{J}$, dove $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria.

728 Con tale scelta è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per
729 le g_i : usando, infatti, l'Ip. 3.6 nella $[\text{EtB}]_S^B$ porta a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi \rangle}{2} g_j \sum_{i \in \mathcal{J}} B(j, i) g_i^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} s_j^* \sum_{i \in \mathcal{J}} B(i, j) g_i ds ds_*, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

¹² La $\|\cdot\|$ è la norma uno applicata alle matrici: $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} |a_{i,j}|$.

ma essendo \mathbf{B} simmetrica vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} g_j \sum_{i \in \mathcal{J}} B(j,i) g_i^* ds ds_* \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

che in forma matriciale, introducendo le densità vettoriali

$$\mathbf{g} \equiv (g_i)_{i \in \mathcal{J}} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_* \equiv (g_i^*)_{i \in \mathcal{J}},$$

si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g} \odot \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad (3.27)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard (prodotto per elementi).

Il prossimo passo è introdurre la densità globale delle taglie, ossia la densità marginale della (3.20) rispetto alla popolazione s :

$$\bar{g}_N(s,t) \equiv \int_{\mathcal{J}} g(i,s,t) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{g}, \quad (3.28)$$

ove $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, che non è che la media tra le densità di S_t tra tutti i vertici¹³; premoltiplicando la (3.27) per $\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top$ e usando la (3.28) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad [\text{E}\bar{g}]$$

Osservazione 3.19. La [E \bar{g}] si può anche ottenere usando, in luogo del'Ip. 3.6, direttamente un osservabile indipendente dall'indice i : $\Phi(i,s) \equiv \varphi(s)$, confermando quanto premesso nell'Oss. 3.18, cioè che la [E \bar{g}] si ricava perdendo le informazioni legati agli indici negli osservabili.

La [E \bar{g}] non è ancora un'equazione chiusa per \bar{g} per via del secondo membro nel quale $\mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_*$ richiede sia di conoscere nel dettaglio le connessioni sottostanti del grafo che le distribuzioni della popolazione di ogni città. Tuttavia, avvalendosi della definizione della \mathbf{B} , la [E \bar{g}] diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g}_N ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2 D_N} (\mathbf{k}^\top \mathbf{g})(\mathbf{k}^\top \mathbf{g}_*) ds ds_*, \quad (3.29)$$

che richiede d'introdurre una nuova densità di probabilità:

Definizione 3.13 (Densità dei gradi \mathbf{k}). Sia

$$d_N : \mathbb{R}_+ \times \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

la densità di probabilità dell'evento che al tempo t un agente abbia popolazione s e grado k , definizione che la lega alle g_i dalla relazione

$$d_N(s, k, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t),$$

ove

$$\mathcal{J}_k \equiv \{i \in \mathcal{J} \mid k_i = k\} \subseteq \mathcal{J}$$

¹³ La medesima definizione vale anche per f_N della [EtB]^A.

751 è l'insieme dei nodi con grado k ; da essa ne seguono altre due:

$$\bar{g}_N(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N d_N(s, k, t), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{g}(s, t) = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = N \sum_{k=0}^N k d_N(s, k, t).$$

752 Un analogo discorso vale per le f_i in luogo delle g_i .

753 E dalla Def. 3.13 segue la sua normalizzazione:

754 **Definizione 3.14** (Densità dei gradi \mathbf{k} normalizzati). Siano

$$\hat{k}_i \equiv \frac{k_i}{N} \in \hat{\mathcal{K}}, \quad \forall i \in \mathcal{J},$$

755 i gradi normalizzati di un generico nodo rappresentativo di \mathcal{G} , in cui

$$\hat{\mathcal{K}} \equiv \left\{ \frac{k}{N} \mid k = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

756 è l'insieme discreto dei gradi normalizzati; allora la densità dei gradi norma-
757 lizzati

$$\hat{d}_N : \mathbb{R}_+ \times \hat{\mathcal{K}} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

758 è così definita

$$\hat{d}_N(s, \hat{k}, t) \equiv N d_N(s, N \hat{k}, t). \quad (3.31)$$

759 **Osservazione 3.20.** Visto che due elementi consecutivi dell'insieme $\hat{\mathcal{K}}$ sono
760 separati da un passo costante e uguale a $1/N$, si può definire $\Delta \hat{k} \equiv 1/N$ che
761 da (3.31) implica

$$\sum_{\hat{k} \in \hat{\mathcal{K}}} \int_{\mathbb{R}_+} \hat{d}_N(s, \hat{k}, t) ds \Delta \hat{k} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} d_N(s, k, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

762 cosa che permette di vedere la \hat{d}_N come funzione costante a tratti dei gradi
763 normalizzati \hat{k} , e similmente per d_N (basta definire $\Delta k \equiv 1$) essendone un
764 mero riscalamento.

765 **Osservazione 3.21.** L'Oss. 3.20 dà la possibilità anche d'interpretare la (3.30)
766 come un uguaglianza tra densità marginali: $\bar{g}_N = \bar{d}_N = \hat{d}_N$.

767 Con tutte queste definizioni e osservazioni, la (3.29) si può riformulare in
768 termini di \hat{d}_N

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d_N ds = N^2 \sum_{k, k_*=0}^N \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{kk_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{D_N} d_N d_N^* ds ds_*,$$

769 dove k_* è il grado associato a g_N^* , e poi in termini di \hat{d}_N

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{\hat{k} \in \hat{\mathcal{K}}} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d}_N ds \Delta \hat{k}}_{(I)} = \underbrace{\sum_{\hat{k}, \hat{k}_* \in \hat{\mathcal{K}}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\hat{k}\hat{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{D_N} \hat{d}_N \hat{d}_N^* ds ds_*}_{(II)}.$$

Il secondo membro si può ulteriormente manipolare moltiplicando e dividendo per N^2 e definendo il grado normalizzato medio

$$\bar{D}_N \equiv \frac{D_N}{N^2} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} k d_N ds \Delta k, \quad (3.32)$$

da cui

$$(II) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_* \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}_N} d_N d_N^* ds ds_* \Delta k \Delta k_*,$$

Valutando il limite $N \rightarrow \infty$ alla (3.32) e ai membri (I) e (II)

$$\begin{aligned} (3.32) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{D} \equiv \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} k d ds dk, \quad (I) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d ds dk \\ (II) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}} d \mathbf{d}^* ds ds_* dk dk_*, \end{aligned}$$

si perviene infine a un'equazione di tipo Boltzmann:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d ds dk = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_* \langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{\bar{D}} d \mathbf{d}^* ds ds_* dk dk_*. \quad [EtB]_S^k$$

Si è dunque dimostrato il seguente teorema:

Teorema 3.1 (di rilassamento della topologia). La $[EtB]_S^B$ è formalmente equivalente nel limite $N \rightarrow \infty$ a un'equazione di tipo Boltzmann di forma $[EtB]_X$ con microstato $\mathbf{X}_t \equiv \{\mathbf{K}, S_t\}$, ove $\mathbf{K} \in [0, 1]$ è la variabile aleatoria dei gradi normalizzati osservabili $\varphi(s)$ indipendenti da k e nucleo d'interazione $\mu(k, k_*) \equiv (\mathbf{k} \mathbf{k}_*)/\bar{D}$.

Il significato del Teo. 3.1 è profondo: approssimare $[EtB]_S^A$ con $[EtB]_S^B$ coincide col perdere la distinguibilità indotta dal grafo, rilassando in tal modo la topologia la quale non scompare ma rimane solo come distribuzione dei gradi; tale riduzione è come sfocare i dettagli delle connessioni tra i vertici: si passa da uno specifico grafo a una classe di grafi. Nella Fig. 3.1 è presente uno schema riassuntivo del corrente paragrafo.

Osservazione 3.22. Il Teo. 3.1 motiva anche il perché non si possa considerare una generica matrice C che approssima la A : non è detto che rilassi la topologia portando a un'equazione analoga alla $[EtB]_S^k$.

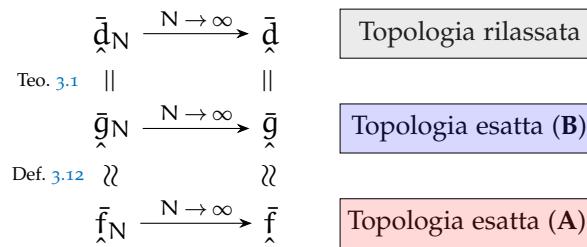


Figura 3.1: Schema riassuntivo del § 3.3.2.

789 **Osservazione 3.23.** La Fig. 3.1 contiene al suo interno \hat{f} che ha un'analogia
 790 definizione alla Def. 3.14, ma normalizzando gli indici: siano

$$\hat{i} \equiv \frac{i}{N} \in \hat{\mathcal{J}}, \quad \forall i \in \mathcal{J},$$

791 gli indici normalizzati di un generico nodo rappresentativo di \mathcal{G} , in cui

$$\hat{\mathcal{J}} \equiv \left\{ \frac{i}{N} \mid i = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

792 è l'insieme discreto degli indici normalizzati. Allora la (3.20) normalizzata,
 793 per analogia colla (3.31), si può definire

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = N f(N \hat{i}, s, t) = \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(N \hat{i} - j),$$

794 ma per la condizione di normalità $\mathbb{P}([0, 1] \times \mathbb{R}_+) = 1, \forall t \geq 0$, deve valere¹⁴

$$f_j(s, t) = N f_j(s, t) \quad \text{ove } j = N \hat{j},$$

795 anch'essa analoga alla (3.31); difatti con questa la \hat{f} si scrive

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(N(\hat{i} - \hat{j})) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{J}} f_j(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - \hat{j}).$$

796 Con tali definizioni la densità marginale \bar{f} si può riformulare mediante il
 797 cambio di variabili $i = Ni$:

$$\bar{f}_N = \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di = \int_{\mathcal{J}} N f(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \int_{\mathcal{J}} \hat{f}(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \bar{f}_{\hat{N}} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t),$$

798 e, definendo il passo $\Delta \hat{i} \equiv 1/N$ tra due indici normalizzati consecutivi, si
 799 arriva al limite $N \rightarrow \infty$ a

$$\bar{f}_N = \bar{f}_{\hat{N}} = \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \Delta \hat{i} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{f} = \bar{f} = \int_0^1 f_{\hat{i}}(s, t) d\hat{i},$$

800 mentre la \hat{f} diventa

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = \int_0^1 f_j(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - \hat{j}) d\hat{j} = f_{\hat{i}}(s, t).$$

801 Similmente vale per \bar{g} .

802 **Osservazione 3.24 (Sulla bontà di $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$).** Su un aspetto è al momento non
 803 ci si può esprimere: quanto bene la \mathbf{B} approssima la matrice \mathbf{A} in generale?
 804 Sarebbe necessario elaborare ulteriormente la teoria per trovare una risposta,
 805 obiettivo, come già detto, non di questa tesi. Tuttavia, euristicamente, si
 806 può riflettere in questo modo: con $N \gg 1$ le singole connessioni sono meno
 807 importanti, per cui vengono meno i dettagli, mentre la panoramica può essere
 808 ragionevolmente colta da \mathbf{B} ; ciò suggerirebbe che più sono i nodi migliore è
 809 l'approssimazione $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$. Tale breve riflessione è però solo un intuito, *non*
 810 una dimostrazione rigorosa, e dunque anche potenzialmente falsa.

¹⁴ Si ricordi che l'indice j non è un argomento della densità f_j , quindi può essere cambiato con un altro indice purché sia distinto da tutti gli altri secondo la trasformazione scelta.

3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile

Nel precedente paragrafo si è esplorato come si può "perdere" la struttura sottostante indotta dal grafo passando a una densità dipendente dal grado dei nodi, recuperando in tal modo un'equazione classica di tipo Boltzmann. Risulta perciò stimolante esplorare se sussitano certe ipotesi che permettano di trasformare la [Eg] in una forma della [EtB]_X, approfondendo così i legami tra la teoria retale sviluppata nei due previ due paragrafi e la teoria di tipo Boltzmann.

Ipotesi semplificative

A questo scopo valgono le seguenti:

Ipotesi 3.7. Esistono tre principali ipotesi semplificative della [Eg]:

S₁ Il grafo è completamente connesso con matrice d'adiacenza unitaria:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{1} \iff a_{i,j} \equiv 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{J}.$$

S₂ Gli agenti sono indistinguibili rispetto al grafo:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J},$$

S₃ Le regole d'interazione [RI]_S sono simmetriche (Def. 3.11).

Analisi della S₁

Notando che $\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$, la [Eg] diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} (\mathbf{1}^\top \mathbf{f})(\mathbf{1}^\top \mathbf{f}_*) ds ds_* \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f} \right) \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* \right) ds ds_*, \end{aligned}$$

ma ricordando (3.28) si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \bar{f} \bar{f}_* ds ds_*, \quad (3.33)$$

la quale è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann [EtB]_X con microstato $X_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [RI]_S e nucleo d'interazione unitario¹⁵ $\mu \equiv 1$ nella [Ber]_X. Ciò significa che con S₁ gli agenti, nonostante siano distinti per il grafo, si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (3.28).

¹⁵ Tale risultato implica anche che un nucleo di collisione unitario nella [EtB]_X è il corrispettivo di una matrice unitaria nella [EtB]_S^A.

833 **Analisi della S2**

834 Sotto tal'ipotesi, che equivale coll'assumere

$$\mathbf{f} = \mathbf{1}\mathbf{f} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_* = \mathbf{1}\mathbf{f}_*,$$

835 la [Eg] diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{\mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1}}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}_* ds ds_* \end{aligned}$$

836 e rimembrando (3.26) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{D_N}{N^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}^* ds ds_*.$$

837 In questo contesto il rapporto $D_N/N^2 \in [0, 1]$ (grado medio normalizzato del-
838 la rete) rappresenta quanto la rete è topologicamente simile a una completa-
839 mente connessa¹⁶.840 Per il resto l'equazione è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann
841 [EtB]_X con microstato $X_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [RI]_S e nucleo
842 d'interazione nella [Ber]_X costante $\mu \equiv D_N/N^2 = \bar{D}_N$.843 Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla
844 [Eg]: riassume l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente \bar{D}_N il quale,
845 dunque, ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa
846 per la S1.847 **Analisi della S1, S2 e S3**848 Visto che vale la S1 si può partire dalla (3.33) nella quale la densità media
849 (3.28) diventa per S2

$$\bar{f}(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) \stackrel{S2}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s, t) = f(s, t),$$

850 ossia la \bar{f} coincide con quella di tutti gli agenti¹⁷, essendo questi, appunto,
851 indistinguibili.

852 In tal modo la (3.33) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{f}^* ds ds_*,$$

853 che unita all'S3 porta all'equivalenza

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{f} \mathbf{f}_* ds ds_* = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \mathbf{f}^* ds ds_*,$$

16 Difatti D_N è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.17 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente col limite $N \rightarrow \infty$, sempre ben approssimabile nei casi classici con un numero di agenti $N \gg 1$ [come lo studio di un gas].

854 dalla quale si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*.$$

855 Quest'equazione, come per gli altri casi, è analoga alla classica equazione
856 di tipo Boltzmann simmetrica (3.19) con microstato $X_t \equiv S_t$ scalare, regole
857 d'interazione [RI]_S e nucleo d'interazione nella [Ber]_X unitario $\mu \equiv 1$.

4 | SIMULAZIONI

In questo capitolo si applicheranno tutta la teoria affrontata in quello precedente. Come consuetudine, è prima necessario un paragrafo propedeutico per approfondire l'algoritmo con cui sono stati svolte le simulazioni; questo è seguito dalle definizioni dei grafici da analizzare e da una rapida spiegazione del perché le fluttuazioni possono [anzi devono] essere trascurate in questa trattazione. Per i risultati, invece, si propongono varie leggi d'immigrazione che si studiano tramite dei studi parametrici concludendo cercando d'interpretare cosa queste dicono sul fenomeno della migrazione in sé. Infine si mostrano brevemente alcuni risultati per l'Italia, mostrando che tutta la teoria scala bene col numero d'agenti.

4.1 PREMESSE

4.1.1 Metodo Monte Carlo

Nel contesto delle [TCSMA](#) l'obbiettivo, com'è chiaro dal Cap. 3, è quello di ricavare la densità $f(\mathbf{x}, t)$ nella [\[EtB\] \$\mathbf{x}\$](#) al variare del tempo. Si potrebbe allora pensare di discretizzare quest'ultima equazione mediante il Metodo delle Differenze Finite, degli Elementi Finiti o dei Volumi Finiti; tuttavia, vi sono due principali problemi:

1. l'impossibilità, in generale, di ricavare la forma forte della [\[EtB\] \$\mathbf{x}\$](#) , specie nel caso di [\[RI\] \$\mathbf{x}\$](#) non lineari;
2. anche ipotizzando di trovare la forma forte a cui applicare i precedenti metodi, la sua natura integro differenziale la rende complessa da manipolare dato che l'operatore collisionale¹, come

$$Q(f, f)(\mathbf{v}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, \mathbf{n}) (f(\mathbf{v}', t)f(\mathbf{v}_*, t) - f(\mathbf{v}, t)f(\mathbf{v}_*, t)) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*$$

nella (3.15), dipende dalla densità medesima.

Per tali ragioni si procede in maniera più diretta: conoscendo l'algoritmo d'interazione [\[AR\] \$\mathbf{x}\$](#) , che governa le interazioni binarie tra agenti, si possono quindi direttamente simulare tutte le molteplici collisioni mediante un metodo di Monte Carlo di tipo Nanbu-Babovsky, descritto nel dettaglio nell'Alg. 1.

¹ Vale a dire la parte integrale della forma forte dell'equazione di tipo Boltzmann, in genere scritta a secondo membro.

Algoritmo 1: Algoritmo [AR]s di tipo Nanbu-Babovsky

Dati: $N \in \mathbb{N}_+$ (numero d'agenti); $\Delta t \leq 1$ (passo temporale); σ (fluttuazione); $T > 0$ (tempo finale); $\bar{q}_0(s)$ (densità iniziale); \mathbf{A} (matrice d'adiacenza); \mathbf{B} (matrice d'adiacenza approssimata);

- 1 $S^0 \leftarrow \{s_1^0, s_2^0, \dots, s_N^0\} \subseteq \mathbb{R}_+$ campionati da \bar{q}_0 ;
- 2 **per** $n = 0, 1, 2, \dots, \lfloor T/\Delta t \rfloor - 1$ **fai**
- 3 $P \leftarrow$ permutazione indipendente di $\{1, 2, \dots, N\}$;
- 4 **per** $i = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ **fai**
- 5 $j \leftarrow \lfloor N/2 \rfloor + i$, $s_i^n \leftarrow P(i)$ e $s_j^n \leftarrow P(j)$;
- 6 **se** esatto **allora**
- 7 $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(\mathbf{A}(i,j)(\Delta t))$;
- 8 **altrimenti** # è approssimato
- 9 $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(\mathbf{B}(i,j)(\Delta t))$;
- 10 **se** $\Theta = 1$ **allora**
- 11 $E \leftarrow E(s_i^n, i, s_j^n, j)$;
- 12 $\gamma \leftarrow \text{Gamma}((1-E)^2/\sigma^2, \sigma^2/(1-E))$;
- 13 $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n(1-E+\gamma)$; # città interagente
- 14 $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n + s_i^n E$; # città ricevente
- 15 **altrimenti**
- 16 $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n$ e $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n$;
- 17 $S^{n+1} \leftarrow \{s_1^{n+1}, s_2^{n+1}, \dots, s_N^{n+1}\}$;
- 18 $\bar{q}(s, (n+1)\Delta t) \leftarrow$ istogramma di S^{n+1} ;

887 4.1.2 Definizione dei grafici

888 4.1.3 Sulle fluttuazioni γ

889 4.2 REGOLE D'EMIGRAZIONE

890 s e s_* vanno intese come la città interagente e ricevente rispettivamente

891 La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno
892 dell'immigrazione.

893 Si vuole evitare lo spopolamento delle città a causa delle fluttuazioni nella
894 (3.23) dato che nella (4.1) compare il rapporto tra popolazioni delle città
895 interagenti

896 Si avvisa anche sono stati ottenuti dei risultati analoghi a quelli della Sar-
897 degna per tutte le regioni italiane, Italia inclusa; questa è la ragione per cui
898 in questo paragrafo ci si concentrerà solo su quella regione, mostrandone
899 anche alcuni per l'Italia.

900 4.2.1 Popolazione

901 Una prima possibilità consiste nella

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (4.1)$$

902 che in essenza è la [9, (2.2), § 2, p. 223] modificata mediante la [9, (4.5), § 4, p.
 903 228], ossia è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di emigra-
 904 zione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s ,
 905 maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente
 906 significato:

- 907 ◊ $\lambda \in (0,1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le
 908 città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- 909 ◊ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente
 910 il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

911 In poche parole la (4.1) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi
 912 per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

913 In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla
 914 (??) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (4.1).

915 4.2.2 Popolazione-Connettività

916 4.2.3 Popolazione-Connettività frazionata

917 4.2.4 Popolazione-Forza

918 4.2.5 Interpretazioni

919 4.3 IL CASO DELL'ITALIA

920

5 | CONCLUSIONI

- 921 1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di
922 Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
- 923 2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa
924 della rete statica.
- 925 3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

926 APPENDICE

927 A CODICE

ELENCO DELLE FIGURE

929	Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	6
930	Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.	9
932	Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.	13
933	Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	15
937	Figura 3.1	Schema riassuntivo del § 3.3.2.	38

938

ELENCO DELLE TABELLE

939

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
linee barrate corrispondono a dati trascurati. 12

940

941

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 13

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berlant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [11] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021). URL: <https://arxiv.org/abs/2104.12107>.
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025). URL: <https://arxiv.org/abs/2503.11554>.
- [13] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.

- [981] [14] Nuriuso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-
982 based kinetic models: Emergence of a statistical description of the gra-
983 ph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1-
984 22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- [985] [15] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*
986 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- [987] [16] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An*
988 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.