Politecnico di Torino

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente

Relatori
prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

Candidato
Valerio Taralli

firma dei relatori

. . . .
. . . .

firma del candidato

. . . .

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e *Marco*

INDICE

1 INTRODUZONE

2 TEORIE CINETICHE DEI SISTEMI MULTIAGENTE

2.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

2.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

2.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o piú agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia $X \in \mathcal{I}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove $\mathcal{I}$ è l'insieme dei vertici mentre $\mathcal{E}$ dei lati di $\mathcal{G}$. Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geqslant 0}$; la funzione $S_t : \Omega \to \mathcal{P}$ è una variabile aleatoria da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popolazioni $\mathcal{P}$ e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geqslant 0$. Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da $\mathcal{E}$, definendo cosí un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x,s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \otimes \delta(x - i), \tag{1}$$

ove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s,t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s,t) ds = 1, \qquad \forall t \geqslant 0, \forall i \in \mathcal{I},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{P}} f(x,s,t) ds dx = 1 \qquad \forall t \geqslant 0$$

2.2.2 Algoritmi d'interazione

Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti interagiscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel dettaglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un interazione con un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S_t', \tag{2}$$

ove $\Theta \in 0,1$ è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'interazione tra i due agenti effettivamente si manifesti $(\Theta = 1)$ o no $(\Theta = 0)$; d'altro canto $S_t' \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, V_t) in seguito a un'interazione avvenuta.

Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \tag{3}$$

il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzionale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^*; per coerenza è necessario imporre $\Delta t \leqslant 1$ che impone un limite superiore al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto facile da verificare nella pratica.

La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria $S_t' : \Omega \to \mathcal{P}$ dipendente in generale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V_t'(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{4}$$

in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \to \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

2.2.3 Interazioni azione-reazione

Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$ mentre quella in indietro sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga a quella dell'agente (X, S_t):

$$S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \tag{5}$$

ove si osserva che la Θ è la stessa della (2) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$ ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S^*_t(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è definita mediante una funzione $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \to \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da Ψ.

Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [1, § 2.2.1] sarà identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[AR] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S^*_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S^*_t + \Theta S^{*\prime}_t. \end{cases}$$

Si conclude questa sezione osservando che gli agenti (X, S_t), (X^*, S^*_t) sono campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

2.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

2.3.1 Derivazione esatta

Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'evoluzione per le distribuzioni di probabiltà f_i delle opinioni degli agenti; per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi multiagente [1, 2].

Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una quantità che si può calcolata sapendo lo stato microscopico di un generico agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR] valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, V_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}\,[\Phi\,(X, (1-\Theta)V_t + \Theta\Psi(V_t, V^*_t, \omega)A(X, X_*)\Delta t)|X, X_*]\,] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}\,[\Phi\,(X, V_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\qquad + \Phi\,(X, \Psi(V_t, V^*_t, \omega))\,A(X, X_*)\Delta t]\,], \end{aligned}$$

da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt, si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, V_{t+\Delta t}) - \mathbb{E}[\Phi(X, V_t)]]}{\Delta t} = \mathbb{E}\,[A(X, X_*)\,(\Phi(X, \Psi(V_t, V^*_t, \omega)) - \Phi(X, V_t))],$$

laddove, prendendo il limite $\Delta t \to 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, V_t)]}{dt} = \mathbb{E}\,[A(X, X^*)\,(\Phi(X, \Psi(V_t, V^*_t, \omega)) - \Phi(X, V_t))]. \tag{7}$$

[...]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = {}& \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(i, j)\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi\rangle f_i f^*_j ds ds_* \\ & + \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(j, i)\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_*\rangle f_j f^*_i ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{8}$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \;\; \forall i \in \mathcal{I}, \;\; \varphi \equiv \varphi(s), \;\; \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \;\; e \;\; \varphi' \equiv \varphi(s').$$

2.3.2 Interazioni tra città

2.3.3 Derivazione approssimata

2.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

È d'interesse esplorare il legame presente tra la (8) coll'equazione classica di Boltzmann §§§ .

2.4.1 Ipotesi semplificative

A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da applicare alla (8):

1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s,t) = f_j(s,t) = f(s,t) \quad \forall i,j \in \mathcal{I}, \tag{9}$$

3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s,s_*) = \Psi_*(s_*,s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s,s_*). \tag{10}$$

2.4.2 Analisi della 1° IS

Con tal'ipotesi la (8) diventa

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N}\left[\sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi\rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j\in\mathcal{I}}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_* - \varphi_*\rangle f_j f_i^* ds ds_*\right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agl'indici

$$F(s,t) \equiv \int_{\mathcal{I}} f(x,s,t)dx = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t) \otimes \int_{\mathcal{I}} \delta(x-i)dx = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t), \tag{11}$$

che corrisponde a una media tra le distribuzione dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi\rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_* - \varphi_*\rangle F f_i^* ds ds_*\right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_*\rangle F F^* ds ds_*, \tag{12}$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann §§§ . Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (11).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio quella media F.

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix $\mathbf{M}$; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

$\tilde{V} \leftarrow V_0$
$t \leftarrow 1$
for $t < T$ **do**
    $\langle\varphi\rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(\tilde{V}(i))$
    $V \leftarrow \tilde{V}$
    $P \leftarrow$ random permutation of $\{1,\dots,N\}$
    $p_1 \leftarrow (P(1),\dots,P(N/2))$
    $p_2 \leftarrow (P(N/2+1),\dots,P(N))$
    $i \leftarrow 1$
    for $i < N/2$ **do**
        $\Theta \sim \mathrm{Bernoulli}(B(p_1(i),p_2(i))\Delta t)$
        $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1-\Theta) + \Psi(V(p_1(i)),V(p_2(i)))\Theta$
        $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1-\Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)),V(p_1(i)))\Theta$
        $i \leftarrow i+1$
    end for
    $t \leftarrow t+\Delta t$
end for

2.4.3 Analisi della 2° IS

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la (8) diventa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f ds &= \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi\rangle f f^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N}\sum_{j\in\mathcal{I}} A(j,i)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi'_* - \varphi_*\rangle f f^* ds ds_*,\end{aligned}$$

che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f ds = \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_*\rangle f f^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i,j\in\mathcal{I}} A(i,j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}}\varphi f ds = \frac{L}{N^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathcal{I}} A(i,j)\int_{\mathcal{P}^2}\langle\varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_*\rangle f f^* ds ds_*\right]. \tag{13}$$

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa[1]; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann §§§ .

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla (8), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la 1° IS.

2.4.4 Analisi della 1°, 2° e 3° IS

Visto che vale 1° IS si può partire dalla (12) nella quale la distribuzione media (11) diventa per 2° IS

$$F(s,t) = \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(s,t) \overset{2^\circ}{=} \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti[2], essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (12) diventa

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$ e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche §§§ usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica tra una popolazione di particelle di un gas.

1 Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore prorio N^2, ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

2 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \to \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

3 SIMULAZIONI

4 CONCLUSIONI

BIBLIOGRAFIA

[1] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0956792524000020.

[2] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.