

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	7
2.1	Definizioni miscellanee	7
2.2	Reti e città	8
2.3	Cenni sui dati	9
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	13
3.1	Descrizione cinetica classica	13
3.2	Descrizione cinetica retale	13
3.2.1	Impostazione	13
3.2.2	Algoritmi d'interazione	14
3.2.3	Interazioni azione-reazione	14
3.3	Derivazione dell'equazioni cinetiche	15
3.3.1	Derivazione esatta	15
3.3.2	Interazioni tra città	17
3.3.3	Derivazione approssimata	19
3.4	Nesso discreto-continuo	19
3.4.1	Ipotesi semplificative	19
3.4.2	Analisi della 1° IS	20
3.4.3	Analisi della 2° IS	20
3.4.4	Analisi della 1°, 2° e 3° IS	21
4	SIMULAZIONI	23
5	CONCLUSIONI	25
	APPENDICE	27
A	Codice	27



1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già studiato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf [10] quasi cinquantanni dopo: nella sua teoria ha introdotto la legge che oggi prende il suo nome. {S}

Aggiungere le formule sul rango {S}.

D'altra parte, nella letteratura più recente, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, la maggior parte degli articoli su tale argomento o considerano le città come luoghi ove vivono gli agenti, creando così un modello di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate {S}, o non considerano una naturale struttura da grafo {S} oltre ad astrarre eccessivamente le città e i loro dintorni {S}.

In questo elaborato le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono su mediante la struttura di un grafo spaziale; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

La suddivisione è come segue: nel secondo capitolo si affronteranno brevemente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto quelli pertinenti alla topologia interurbana; nel terzo la teoria cinetica dei sistemi multiagente è approfondita prima da un punto di vista classico, poi mediata dai grafi sia esattamente che approssimativamente; infine nel quarto si illustreranno i principali risultati mentre nel quinto si conclude con delle note finali e potenziali sviluppi futuri.

Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice in Python è spiegato a grandi linee.



In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descriveranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degli indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 3 (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degli indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso¹ associato al lato (i,j) . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

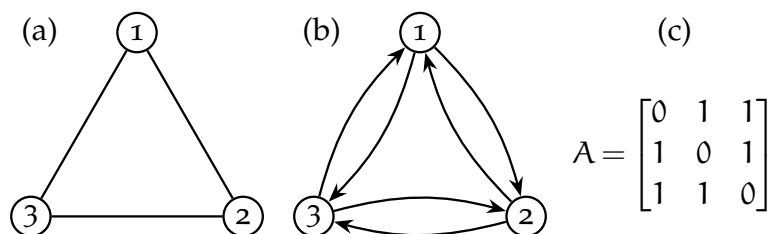


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

¹ Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

Definizione 4 (Grado e Forza [entrante/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2, 3) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

Ipotesi 1. Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si distribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connessioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città stesse.

2.2 RETI E CITTÀ

Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il problema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti possibili tra le città

Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati e le loro intersezioni come nodi [7, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la rete di trasporto di tram, di bus e della metro [7, § 3.2.1 p. 22]; altri si pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [7, § 3.1.3.2 p. 17], navale [7, § 3.1.4 p. 19], aereo [7, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [7, § 3.1.3.3 p. 18; 4] tra città che mostrano olisticamente tutt'i

possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e immediata dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può interagire con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col primo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2) perché il contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [4, 7], ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò tale osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando si definiranno le leggi d'interazione. Perdipiù, contrariamente a quanto si possa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2] proprio a causa della sua natura spaziale [3, 7]; ciò non esclude l'esistenza di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato superiormente dalla natura spaziale del grafo.

2.3 CENNI SUI DATI

La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [6] seguendo l'esempio di [4]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT²; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è necessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento `Pen_91It.txt`:

1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;

² si v. il documento `trapen91.txt` per maggiori informazioni.

2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229», «241», «216», «203», «224», «236», «246».

In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi] sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

00200714212215_____1,

ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in totale 6 città italiane collo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», eppure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizzare che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo; è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il codice del comune di destinazione³.

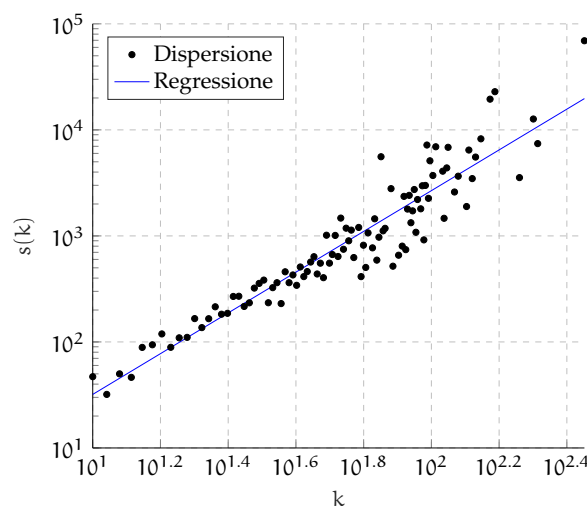


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

Infine nelle Figg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [4] colle seguenti osservazioni:

1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio di quello riportato da [4, p. 911] (0.26);
2. la Fig. 2.3c rispetto alla [4, Fig. 3b] presenta sia una forma leggermente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che limiti superiori e inferiori più estesi;

³ Si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni collo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella § 4, sono correzioni del tutto innecesarie.

- 136 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g
 137 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-
 138 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come
 139 afferma [4];
- 140 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-
 141 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte
 142 di [4] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-
 143 no molto distanti geograficamente⁴, per cui è ragionevole che i flussi
 144 siano bassi.

Connessione	Peso	Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709	Cagliari-Sassari	13953
Cagliari-Selargius	7995	Sassari-Olbia	7246
Assemini-Selargius	4418	Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	4149	Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3865	Cagliari-Capoterra	3731
(a) Pesi maggiori correnti.		(b) Pesi maggiori di [4]	

Tabella 2.2: Confronto con [4] dei pesi maggiori.

145 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero
 146 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-
 147 to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva
 148 tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

4 Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

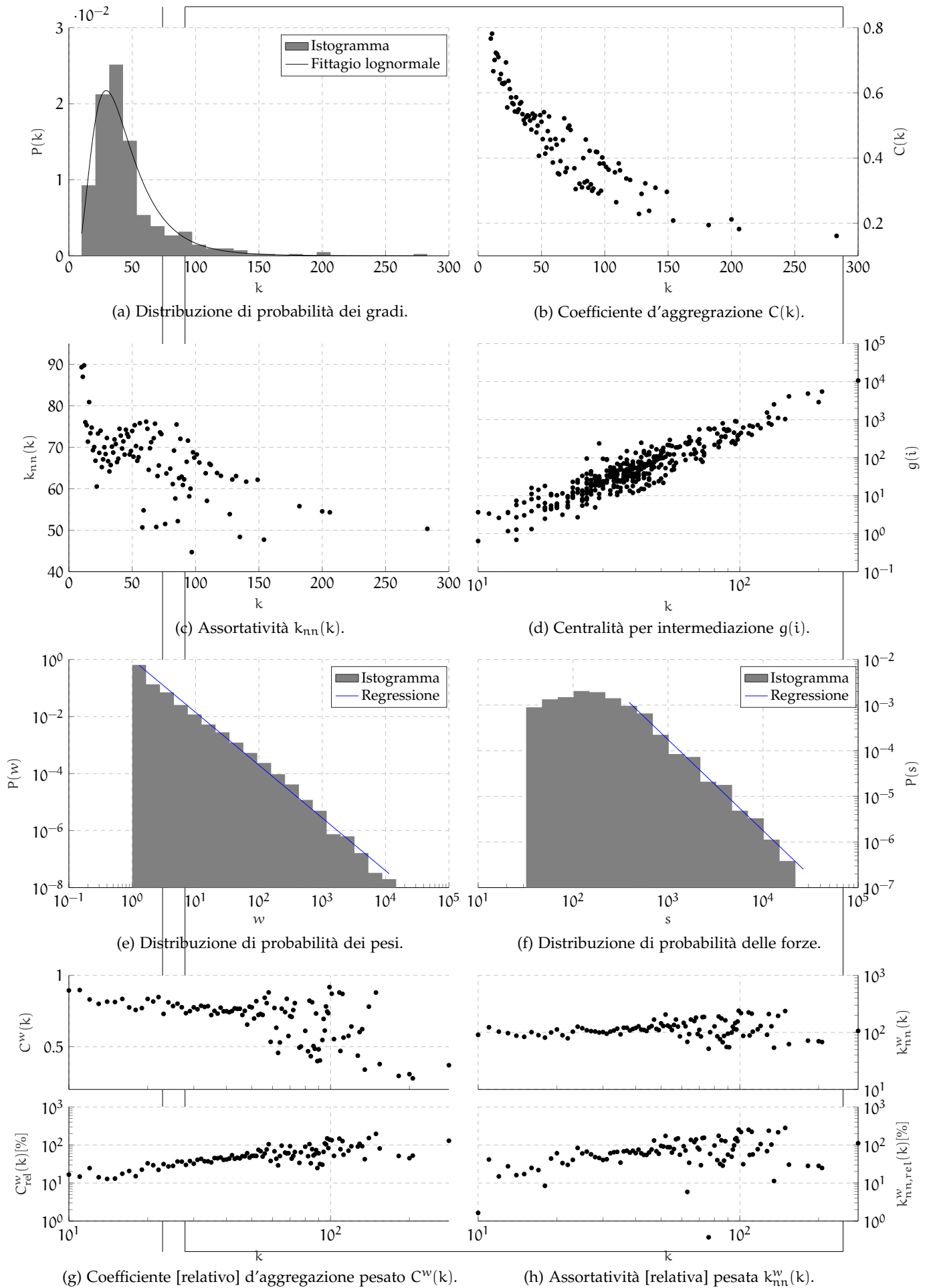


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [4] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

3.1 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

3.2 DESCRIZIONE CINETICA RETALE

3.2.1 Impostazione

La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipotizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o più agenti possono essere trascurate.

Dopodiché, sia $X \in \mathcal{I}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme dei vertici mentre \mathcal{E} dei lati di \mathcal{G} . Si assume che il grafico sia statico, ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato microscopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geq 0}$; la funzione $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è una variabile aleatoria da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popolazioni \mathcal{P} e indica la popolazione dell'agente al tempo $t \geq 0$. Tale variabile aleatoria evolve nel tempo per le interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da \mathcal{E} , definendo così un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso si descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (1)$$

ove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{I},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

3.2.2 Algoritmi d'interazione

Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti interagiscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel dettaglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un'interazione con un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S_t', \quad (2)$$

ove $\Theta \in [0, 1]$ è una variabile aleatoria che tiene in considerazione qualora l'interazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ($\Theta = 1$) o no ($\Theta = 0$); d'altro canto $S_t' \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, V_t) in seguito a un'interazione avvenuta.

Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (3)$$

il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzionale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^* ; per coerenza è necessario imporre $\Delta t \leq 1$ che impone un limite superiore al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto facile da verificare nella pratica.

La popolazione postinterazione è una variabile aleatoria $S_t' : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ dipendente in generale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V_t'(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4)$$

in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

3.2.3 Interazioni azione-reazione

Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$ mentre quella *in indietro* sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga a quella dell'agente (X, S_t) :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t', \quad (5)$$

ove si osserva che la Θ è la stessa della (2) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$ ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso

in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è definita mediante una funzione $\Psi_*: \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da Ψ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [8, § 2.2.1] sarà identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[\text{AR}] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*'} \end{cases}$$

Si conclude questa sezione osservando che gli agenti (X, S_t) , (X^*, S_t^*) sono campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

3.3 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

3.3.1 Derivazione esatta

Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'evoluzione per le distribuzioni di probabilità f_i delle opinioni degli agenti; per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi multiagente [8, 9].

Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s): \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR], valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agl'indici e alla popolazione a tempo fissato, si ha §

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1-A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]], \end{aligned}$$

da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

laddove, prendendo il limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (7)$$

Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma colla seconda equazione di [AR], da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (8)$$

Osservando che le coppie (X, S_t) e (X^*, S_t^*) fanno riferimento a un agente rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

cosicché, sommando (7, 8), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E} [A(X, X^*) (\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f dv dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* dx dx_*, \quad (9)$$

ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distribuzione (1):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*), \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s'), \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (10)$$

mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle funzioni Ψ e Ψ_* .

Si noti che la (9) è valida per ogni funzione *test* Φ per cui è un'equazione debole per la distribuzione f . (commento su Fokker-Planck {S})

Si osservi anche che la (9) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati indipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione f di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta $g(x, x_*, s, s_*, t)$ degli agenti interagenti nel prodotto $f(x, s, t) f(x_*, s_*, t)$.

Dalla (9) con una scelta adeguata della funzione *test* Ψ , è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i . Sia $\Psi(x, s) = \phi_i(x) \varphi(s)$, dove $\phi_i: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{J} \setminus \{i\}$ e $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ è arbitrario. Allora usando la (1) dentro la (9) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{J}, \end{aligned} \quad (11)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{J}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento {S}). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{J}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi \mathbf{f} ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (12)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard e \mathbf{M}^\top al trasposto di \mathbf{M} . Si noti che \mathbf{M} altro non è che la matrice d'adiacenza di \mathcal{G} .

3.3.2 Interazioni tra città

Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta, ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

Gli stati postinterazione (10) prendono come riferimento leggi d'interazioni lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS_t^*, \\ S_t^{*'} = p_*S_t + q_*S_t^*, \end{cases} \quad (13)$$

le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s_*' = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (14)$$

ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s, s_*)$ e $I(s, s_*)$ sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazioni lineari (13) le (14) soddisfano

$$\begin{aligned} p(s, s_*) &\equiv s[1 - E(s, s_*) + \gamma] & e & & p_*(s, s_*) &\equiv s_* \\ q(s, s_*) &\equiv 0, & e & & q_*(s, s_*) &\equiv sI(s, s_*), \end{aligned} \quad (15)$$

rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s_*' \rangle \\ &= s - sE(s, s_*) + s_* + sI(s, s_*) \implies E(s, s_*) = I(s, s_*), \end{aligned} \quad (16)$$

ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo manoscritto si è modificata la [5, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [5, (4.5), § 4, p. 228]:

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (17)$$

che in essenza è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- ◇ $\lambda \in (0, 1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- ◇ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (17) descrive la tendenza degli individui di aggregarsi per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (15) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (17).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è più agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (14), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s, s_*) - 1 \quad (18)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (18) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s, s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (14), situazione che si vuole evitare¹ dato che nella (17) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (18);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- ◇ la distribuzione normale non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- ◇ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenerare quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 si;
- ◇ la distribuzione esponenziale è quella più promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$ ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- ◇ l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione gamma.

Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (19)$$

ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy. \quad (20)$$

¹ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

329 Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la F3, e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha\theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha\theta^2, \quad (21)$$

330 con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da
331 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (22)$$

332 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la F2 semplicemente tra-
333 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzio-
334 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

335 D'altra parte la F1 necessità di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
336 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
337 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
338 di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

339 ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1 - \lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1 - \lambda)^2 \implies \sigma < |1 - \lambda| = 1 - \lambda, \quad (23)$$

340 siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \quad \forall s, s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0, 1)$. La (23) implica quindi che non
341 è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la F1, ma che
342 questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ più
343 piccola è la varianza, e viceversa.

344 3.3.3 Derivazione approssimata

345 3.4 NESSO DISCRETO-CONTINUO

346 È d'interesse esplorare il legame presente tra la (11) coll'equazione classica
347 di Boltzmann [8].

348 3.4.1 Ipotesi semplificative

349 A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da appli-
350 care alla (11):

351 1° IS Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la
352 matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

353 2° IS Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad (24)$$

354 3° IS S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (25)$$

3.4.2 Analisi della 1° IS

Con tal'ipotesi la (11) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (1) rispetto agli indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (26)$$

che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle F f_i^* ds ds_* \right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle F F^* ds ds_*, \quad (27)$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann [8]. Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (26).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo 1 ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare 1 è proprio quella media F.

3.4.3 Analisi della 2° IS

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la (11) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*, \end{aligned}$$

che sommata su tutti gli indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i, j \in \mathcal{J}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_* \right]. \quad (28)$$

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix \mathbf{M} ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

```

1:  $\tilde{V} \leftarrow V_0$ 
2:  $t \leftarrow 1$ 
3: for  $t < T$  do
4:    $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$ 
5:    $V \leftarrow \tilde{V}$ 
6:    $P \leftarrow$  random permutation of  $\{1, \dots, N\}$ 
7:    $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$ 
8:    $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$ 
9:    $i \leftarrow 1$ 
10:  for  $i < N/2$  do
11:     $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i))\Delta t)$ 
12:     $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1-\Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$ 
13:     $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1-\Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$ 
14:     $i \leftarrow i+1$ 
15:  end for
16:   $t \leftarrow t + \Delta t$ 
17: end for
```

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa²; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann [§](#).

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla [\(11\)](#), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la [1° IS](#).

3.4.4 Analisi della [1°](#), [2°](#) e [3° IS](#)

Visto che vale [1° IS](#) si può partire dalla [\(27\)](#) nella quale la distribuzione media [\(26\)](#) diventa per [2° IS](#)

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti³, essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la [\(27\)](#) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

² Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

³ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

388 che unita all 3° IS porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
 389 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

390 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_*,$$

391 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche
 392 [S] usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
 393 tra una popolazione di particelle di un gas.

4

SIMULAZIONI



395

5

CONCLUSIONI

396

397

398

399

400

Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.

Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della rete statica.

Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.



401 APPENDICE

402 A CODICE



403

ELENCO DELLE FIGURE

404

Figura 2.1 Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen-
te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica]
matrice d'adiacenza. 7

405

406

407

Figura 2.2 Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna. 10

408

409

410

Figura 2.3 Riproduzione dei principali grafici di [4] [a cui si ri-
manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re-
lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda. 12



411

ELENCO DELLE TABELLE

412

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
413 linee barrate corrispondono a dati trascurati. 9

414

Tabella 2.2 Confronto con [4] dei pesi maggiori. 11



415

BIBLIOGRAFIA

416

417

418

419

420

421

422

423

424

425

426

427

428

429

430

431

432

433

434

435

436

437

438

439

440

441

442

443

444

445

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [4] De Montis, Andrea and Barthélemy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [5] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [6] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [7] Marc Barthélemy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [8] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- [9] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- [10] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.