

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea  
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

## Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



### Relatori

prof. Andrea Tosin  
prof. Nome Cognome

*firma dei relatori*

.....  
.....

### Candidato

Valerio Taralli

*firma del candidato*

.....

Anno Accademico 2025-2026



Si consideri la distribuzione totale

$$f(x, v, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(v, t) \otimes \delta(x - i), \quad (1)$$

se le particelle sono *indistinguibili* (1° ipotesi) allora vale

$$f_i(v, t) = f_j(v, t) = f(v, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J}, \quad (2)$$

da cui la distribuzione marginale

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}} f(x, v, t) dx &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} f_i(v, t) \otimes \delta(x - i) dx \\ &= \frac{1}{N} f(v, t) \otimes \sum_{i \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx \\ &= \frac{1}{N} f(v, t) \otimes \sum_{i \in \mathcal{J}} 1 \\ &= \frac{1}{N} f(v, t) N = f(v, t), \end{aligned} \quad (3)$$

e ciò è anche coerente col fatto che in un gas il numero di particelle è molto elevato.

Considerando una *matrice d'adiacenza unitaria* (2° ipotesi) si può scrivere la (2.10) come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \varphi(v) f(v, t) dv &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v'_*) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\ &= \frac{1}{2N} N \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} N \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v'_*) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v'_*) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_*, \end{aligned} \quad (4)$$

che unita all'ipotesi d'interazioni *simmetriche* (3° ipotesi), ossia tali che

$$v' = \Psi(v, v_*) = \Psi_*(v_*, v) \quad \text{ove } v_* = \Psi_*(v, v_*), \quad (5)$$

porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili  $v_* = v$  e  $v = v_*$ )

$$\int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v'_*) - \varphi(v_*) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_* = \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_*, \quad (6)$$

e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \varphi(v) f(v, t) dv = \int_{\mathcal{O}^2} \langle \varphi(v') - \varphi(v) \rangle f(v, t) f(v_*, t) dv dv_*, \quad (7)$$

che equivale alla formula classica di Boltzmann.