

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



Relatori
prof. Andrea Tosin

firma del relatore

.....

Candidato
Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026



Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco



SOMMARIO

Testo in italiano relativo alla modellizzazione della distribuzione della popolazione su reti spaziali[cite: 4, 16].

ABSTRACT

English translation of the summary[cite: 17, 18].



INDICE

1	INTRODUZIONE	1
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	5
2.1	Definizioni miscellanee	5
2.2	Reti e città	6
2.3	Cenni sui dati	7
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	13
3.1	Definizioni preliminari di probabilità	13
3.2	Descrizione cinetica di [tipo] Boltzmann	16
3.2.1	Equazione di Boltzmann omogenea	16
3.2.2	Equazione di Boltzmann disomogenea	21
3.2.3	Equazione di tipo Boltzmann omogenea	22
3.3	Descrizione cinetica urbana su reti	27
3.3.1	Equazione di tipo Boltzmann esatta	27
3.3.2	Equazione di tipo Boltzmann approssimata	32
3.3.3	Altri nessi distinguibile-indistinguibile	37
4	SIMULAZIONI	41
4.1	Metodo Monte Carlo	41
4.2	Rappresentazione dei risultati	42
4.2.1	Intervalli di confidenza	42
4.2.2	Struttura dei dati	43
4.2.3	Definizione dei grafici	45
4.2.4	Sulle fluttuazioni γ	49
4.3	Regole d'emigrazione	49
4.3.1	Regola taglia	49
4.3.2	Regola taglia-gradi	49
4.3.3	Regola frazionata	49
4.3.4	Regola taglia-forza	49
4.3.5	Interpretazioni	49
4.3.6	Il caso dell'Italia	49
5	CONCLUSIONI	51
	APPENDICE	53
A	Codice	53
	ELENCO DELLE FIGURE	55
	ELENCO DELLE TABELLE	57



Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all’inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [17] quasi cinquantanni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1.1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1.1) si può ritrovare in molt’altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se in luogo di f si scrive la popolazione s [17, Fig. 9-2, p. 375]; tuttavia ciò è vero solo qualora $s \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1.1) vale sempre.

Più in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia S la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_S(s)$ la sua funzione di densità di probabilità², la quale permette d’interpretare $f_S(s)ds$ come il numero di città con $s \in (s, s+dt)$; allora si dice che S segue una distribuzione di Pareto nella coda se soddisfa

$$R(s) \equiv \int_s^{+\infty} f_S(t)dt \approx \frac{c}{s^\beta} \quad \text{se } s \gg 1, \quad (1.2)$$

per una certa costante $c \in \mathbb{R}_+$ e con $R(s)$ uguale alla funzione di ripartizione complementare di S : essa rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a s e, qualora l’indice di Pareto β fosse unitario, è analoga al rango r nella (1.1).

Più recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_S(s)$ è ben fittata dalla distribuzione lognormale con densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3)$$

ove $X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$; come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹ In realtà, come Zipf stesso ammette [17, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

² Affinché $f_S(s)$ esista bisogna rigorosamente anche supporre che S sia assolutamente continua, ma qui non è necessario entrare nei dettagli per i quali si rimanda ai §§ 3.1 e 3.3.

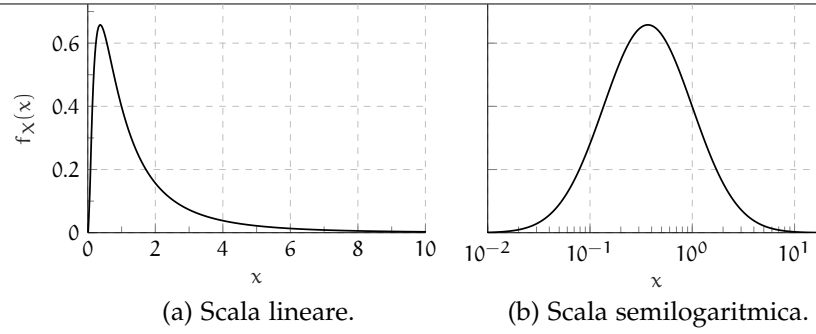


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che l'intera distribuzione è ben fittata da una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (1.3)

$$f_S(s) \approx f_X = \xi f_{S_1}(s) + (1 - \xi) f_{S_2}(s), \quad (1.4)$$

ove $\xi \in (0, 1)$, $S_1, S_2 \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma)$ e $X \sim \text{BiLognormale}(\xi, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)$.

Pertanto l'obiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d'interazione riguardo al fenomeno dell'emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell'autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; piú nel dettaglio gli articoli in letteratura

- ◇ o applicano la TCSMA alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la TCSMA [3];
- ◇ altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate [12];
- ◇ infine, l'articolo che piú si avvicina all'obiettivo di questa tesi applica, tuttavia, la sua teoria nel contesto delle reti sociali [15].

Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della teoria dei grafi applicata alla TCSMA sono stati piuttosto recenti e prin-

³ In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s'intende per *dintorni*.

60 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
61 Dunque l'aspetto piú innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
62 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella piú comune e re-
63 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
64 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

65 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
66 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
67 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la [TCSMA](#) è ap-
68 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
69 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
70 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
71 futuri.

72 Per il lettore interessato è anche presente un'appendice ove il codice di
73 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.



In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descriveranno molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degli indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dalla Fig. 2.1.

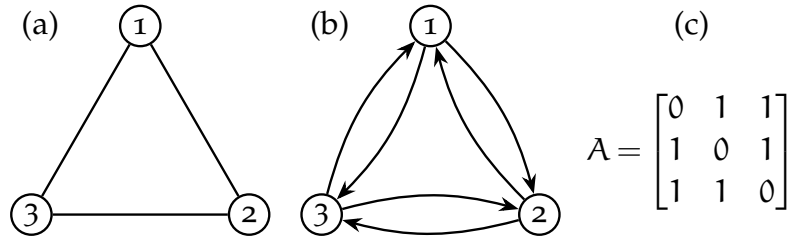


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza). Sia $N \equiv |\mathcal{I}| \in \mathbb{N}_+$ la cardinalità dell'insieme degli indici, ossia il numero di vertici totali, si definisce la matrice d'adiacenza $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ pesata come:

$$w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso associato al lato (i,j) ; nel caso in cui $q_{i,j} \equiv 1 \forall i,j \in \mathcal{I}$ si ha la matrice d'adiacenza unitaria $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Si osserva che, se non altrimenti detto, scrivendo solo «matrice d'adiacenza» si sottintende sempre l'unitarietà.

Definizione 2.4 (Matrice trasposta). Data $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N \in \mathbb{N}_+$, allora s'indica \mathbf{A}^\top la matrice trasposta cosí definita:

$$a_{i,j}^\top = a_{j,i} \quad \forall i,j \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Definizione 2.5 (Matrice simmetrica). Data $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N \in \mathbb{N}_+$, allora

$$\mathbf{A} \text{ è simmetrica} \iff a_{i,j} = a_{j,i} = a_{i,j}^\top \iff \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top. \quad (2.3)$$

Osservazione 2.1. Per i grafi indiretti sia \mathbf{W} che \mathbf{A} sono simmetriche mentre per quelli diretti non è detto che sia cosí.

Definizione 2.6 (Grado e Forza [entrante/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{I}$, in un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i}; \quad (2.4)$$

d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è piú [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado entrante e uscente

$$k_i^- \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^+ \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{I}|} a_{i,j}, \quad (2.5)$$

rispettivamente.

Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di (2.4, 2.5) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

2.2 RETI E CITTÀ

Dopo aver illustrato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il problema di come rappresentare con essi la moltitudine di collegamenti possibili tra le città

Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati e le loro intersezioni come nodi [14, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la rete di trasporto di tram, di bus e della metro [14, § 3.2.1 p. 22]; altri si pongono piú propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [14, § 3.1.3.2 p. 17], navale [14, § 3.1.4 p. 19], aereo [14, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

Tuttavia, da quanto detto nella Cap. 1, è chiaro che per predire la distribuzione della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

1. ogni rappresentazione intraurbana va scartata perché sono troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola città;
2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contemporaneamente e non singolarmente siccome ciascun individuo può scegliere diversi trasporti per muoversi.

Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti pendolari [14, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutt'i possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di grafo con cui si ha a che fare. Eppure qui la risposta è immediata dopo due osservazioni:

1. una città può interagire con un'altra senza che quest'ultima interagisca colla prima: è necessario considerare il senso di direzione;
2. ammesso che una città possa interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposta: le potenziali interazioni sono simmetriche.

Dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta (Def. 2.2), ovvero la sua matrice d'adiacenza \mathbf{A} è simmetrica.

Ipotesi 2.1. Il grafo \mathcal{G} è diretto e simmetrico (\mathbf{A} è simmetrica).

Inoltre in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

Ipotesi 2.2. Il grafo \mathcal{G} è statico: \mathcal{I} e \mathcal{E} sono costanti nel tempo.

In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si distribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connessioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città stesse.

Infine si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 14], ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo, seppure, al momento, sia una caratteristica alquanto formale; tuttavia servirà tenerlo a mente quando si definiranno alcune regole d'interazione nel Cap. 4. Perdi più, contrariamente a quanto si possa pensare di primo acchito, tale grafo non è a invarianza di scala [2] a causa del tipo di grafo [4, 14]; ciò non esclude l'esistenza di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è limitato superiormente proprio dalla natura spaziale del grafo.

2.3 CENNI SUI DATI

La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999 [11] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un *file* di testo formato da una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è necessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento `Pen_91It.txt`:

1 si v. il documento `trapen91.txt` per maggiori informazioni.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond. professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le linee barrate corrispondono a dati trascurati.

1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229», «241», «216», «203», «224», «236», «246».

In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi] sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

00200714212215_____1,

ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in totale 6 città italiane collo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», eppure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizzare che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo; è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il codice del comune di destinazione².

² Si potrebbe scegliere, tra tutt'i comuni collo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella Cap. 4, sono correzioni del tutto innecesarie.

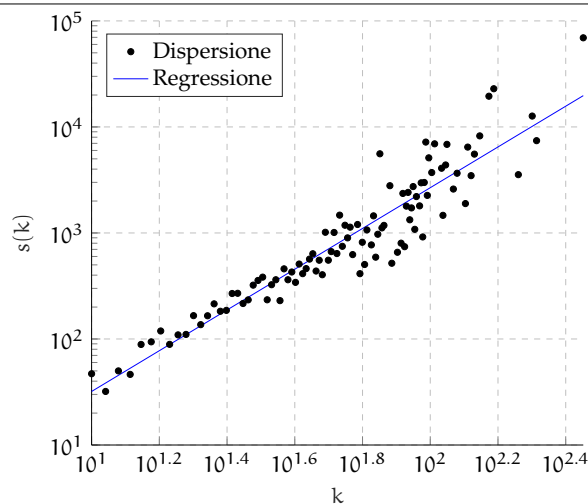


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

Infine nelle Algg. 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle seguenti osservazioni:

- il coefficiente d’aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);
- la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma leggermente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che limiti superiori e inferiori più estesi;
- il coefficiente d’aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ragion per cui si può considerare comunque «circa costante» come afferma [5];
- i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondono: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» sono molto distanti geograficamente³, per cui è ragionevole che i flussi siano bassi.

Connessione	Peso	Connessione	Peso
Cagliari-Quartu SE	14709	Cagliari-Sassari	13953
Cagliari-Selargius	7995	Sassari-Olbia	7246
Assemini-Selargius	4418	Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	4149	Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3865	Cagliari-Capoterra	3731
(a) Pesi maggiori correnti.		(b) Pesi maggiori di [5]	

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-

³ Il primo equivale a percorrere l’intera lunghezza dell’isola ogni giorno.

204 to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva
205 tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. [2.2](#).

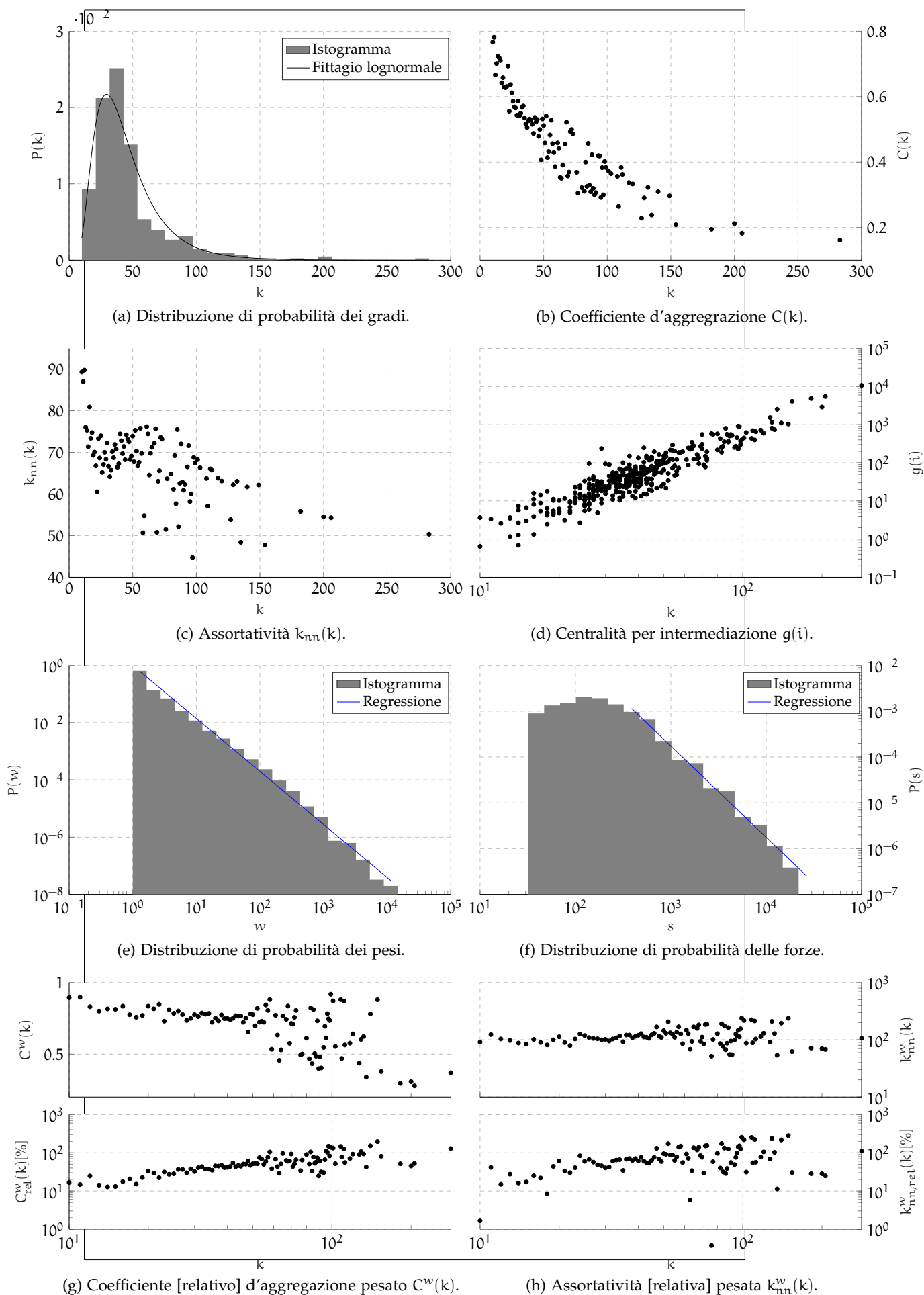


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.



3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la **TCSMA** necessaria per ottenere e discutere i risultati nel Cap. 4. S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità colle quali si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvisando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Semiretta intera/reale positiva). In tutto questo elaborato si fanno uso dei seguenti sottinsiemi dei numeri reali e naturali:

$$\mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R},$$
$$\mathbb{N}_+ \equiv \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subset \mathbb{N}.$$

Definizione 3.2 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Siccome Ω è uno spazio astratto poco trattabile, in questo scritto si definisce una variabile aleatoria semplicemente evidenziando l'appartenenza al suo codominio e sottintendendo il suo dominio: $X \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.3 (Densità di probabilità di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua, allora la densità di probabilità $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge \mathbb{P}_X di X :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la variabile aleatoria X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x)dv$ va inteso come $f_X(dv)$.

Definizione 3.4 (Densità congiunta di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità congiunta di probabilità $f_{\mathbf{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile che rappresenta la legge $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ di \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(A) &= \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_A f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.} \end{aligned}$$

Definizione 3.5 (Densità marginale di probabilità di \mathbf{X}). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la densità marginale di probabilità $f_{X_i}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione misurabile così definita:

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (3.1)$$

essa è a tutti gli effetti la densità di probabilità della variabile aleatoria X_i secondo la Def. 3.3.

Osservazione 3.2. Per brevità, da qui in avanti s'indicheranno le precedenti densità sottintendendo che siano relative alla probabilità: $f_{\mathbf{X}}$ è dunque la densità di \mathbf{X} , $f_{\mathbf{X}}$ la densità congiunta di \mathbf{X} e f_{X_i} la densità marginale di X_i .

Inoltre, qualora il contesto non dia ambiguità, si sottintendono le variabili o i vettori aleatori cui fanno riferimento le relative densità: dunque f è la densità di \mathbf{X} , \mathbf{X} e X_i , a seconda del caso; in alternativa si possono usare anche forme più leggere, come f_i per f_{X_i} , se necessario.

Proprietà 3.1 (Densità congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili aleatorie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la densità congiunta di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

Definizione 3.6 (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua e data una funzione misurabile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora il valore atteso di $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx,$$

e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Definizione 3.7 (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria assolutamente continua a media finita $\mathbb{E}[X]_{\infty}$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra, allora l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una variabile aleatoria Y tale che

AC1 $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

AC2 per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

L'insieme delle Y che soddisfanno le AC1 e AC2 sono indicate col simbolo $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Un'analoga definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti con X scalare e Y vettoriale.

Osservazione 3.3. Presa una variabile aleatoria $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente definizione \mathcal{G} può essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borel relativa allo spazio dei numeri reali mentre $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathbb{R}_+(\Omega)$.

Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $Y \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.1. *Dati*

1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;
2. un vettore aleatorio $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da $X \in \mathbb{R}^h$ e $Y \in \mathbb{R}^k$ con densità congiunta $f_Z(x, y)$ e marginali f_X e f_Y ;
3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che

$$\mathbb{E}[\varphi(Z)] = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)] < \infty;$$

allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.2)$$

che soddisfa $h(Y) \in \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$.

Dimostrazione. Per la AC1 è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(Y))$:

$$\sigma(h(Y)) \equiv \sigma(Y^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

a parole si considera la controimmagine tramite Y dei borelliani filtrati da h , ragion per cui la σ -algebra non potrà che essere contenuta in quella non filtrata.

Per la AC2 si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(Y)$ avvalendosi della caratterizzazione di $h(Y)$ tramite (3.2):

$$\begin{aligned} \int_A h(Y) d\mathbb{P} &= \int_B h(y) f_Y(y) dy \stackrel{(3.1)}{=} \int_B h(y) \int_{\mathbb{R}^h} f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx dy \stackrel{(3.2)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(y) \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \chi_B(Y) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \chi_C(Z) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \chi_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

ove χ_A, χ_B e χ_C sono funzioni indicatrici dei rispettivi insiemi, e in più vale
 $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

□

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.

Si consideri la (3.2), allora $h(y)$ si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y) | Y = y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y) / f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la densità di X condizionata dall'evento $Y = y$.

La (3.3), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(X, Y)$ rispetto a X dopo aver "fissato" l'evento $Y = y$, vale a dire considerando la Y come fosse un parametro uguale alla realizzazione y .

Successivamente, se s'impone $A = \Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y) | Y]], \quad (3.4)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(X, Y)$ si calcola mediando rispetto a Y la variabile aleatoria $\mathbb{E}[\varphi(X, Y) | Y]$, ricavata dalla (3.3) ma considerando y arbitrario.

Definizione 3.8 (Processo stocastico). Data una dimensione $n \in \mathbb{N}_+$, un processo stocastico è un insieme di vettori aleatori X_t parametrizzati da un indice $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\{X_t \in \mathbb{R}^n \mid t \in I\} = \{X_t\}_{t \in I},$$

la cui densità congiunta è

$$\mathbb{P}_{X_t}(A) = \mathbb{P}(X_t \in A) = \int_A f_{X_t}(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile.}$$

Comunemente s'interpreta l'indice t come il tempo ponendo $I \equiv \mathbb{R}_+$, e così sarà fatto in questo scritto.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA DI [TIPO] BOLTZMANN

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Descrizione classica

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfa le successive importanti ipotesi:

G₁ è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

G₂ è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver luogo o, precisamente, sono più frequenti;

G₃ è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

G₄ le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso e dell'energia esprimibile, grazie alle G₂ e G₃, binariamente come

$$\mathbf{v}' + \mathbf{v}'_* = \mathbf{v} + \mathbf{v}_*, \quad (\text{CI})$$

$$|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2, \quad (\text{CE})$$

ove $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle velocità precollisionali $\mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

Dalla G₄ si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le regole d'interazione.

Proposizione 3.2 (Regole d'interazione). *Esistono due funzioni*

$$\psi, \psi_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .

Dimostrazione. Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] + 2\gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] + \gamma^2 = 0, \end{aligned}$$

ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (3.6) diventa allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (3.7)$$

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $n \in S^2$, seppure da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante per i centri delle particelle collidenti.

Si osservi come le regole d'interazione nella 3.5 sono bilineari e simmetriche secondo la seguente definizione:

Definizione 3.9. Se le regole d'interazione del tipo (3.5) verificano

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) = \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) &\implies \mathbf{v}' = \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) = \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) &\implies \mathbf{v}'_* = \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

allora si dicono simmetriche.

Descrizione statistica

Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame: siano allora $\{\mathbf{V}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ i processi stocastici delle velocità precollisionali, dove $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ sono variabili aleatorie di cui le velocità precedenti, \mathbf{v} e \mathbf{v}_* , sono due realizzazioni al tempo t ; un simile discorso vale per i processi stocastici delle velocità poscollisionali $\{\mathbf{V}'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ e $\{\mathbf{V}'_t^*\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Osservazione 3.5. Le variabili aleatorie \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es. \mathbf{V}_t^i) proprio per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, da cui si deduce anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Le regole d'interazione nella (3.5) diventano

$$[\text{RI}]_{\mathbf{v}} \begin{cases} \mathbf{V}' = \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* = \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{cases}$$

in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim \mathcal{U}(S^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad [\text{Ber}]_{\mathbf{v}}$$

che è una variabile aleatoria di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui probabilità è descritta da due termini:

1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'avere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

Osservazione 3.6. Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$ condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo; si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale condizione sarà sempre verificata.

² Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

372 Colle $[RI]_V$ e $[Ber]_V$, lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è
 373 dunque dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$[AR]_V \begin{cases} V_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)V_t + \Theta V'_t, \\ V^*_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)V^*_t + \Theta V^{*'}_t, \end{cases}$$

374 che di fatto è una regola che descrive se gli agenti interagiscono a coppie
 375 (modellizzato dalla Θ) e, nel caso, come interagiscono (modellizzato dalle
 376 V'_t e $V^{*'}_t$) modificando il loro stato al tempo successivo.

377 *Derivazione modello*

378 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di me-
 379 diare le $[AR]_V$ attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità
 380 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $V_{t+\Delta t}$ o di $V^*_{t+\Delta t}$; pertanto
 381 una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle $[AR]_V$,

$$\begin{aligned} \varphi(V_{t+\Delta t}) &= \varphi((1 - \Theta)V_t + \Theta V'_t), \\ \varphi(V^*_{t+\Delta t}) &= \varphi((1 - \Theta)V^*_t + \Theta V^{*'}_t), \end{aligned}$$

382 e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(V_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)V_t + \Theta V'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(V^*_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)V^*_t + \Theta V^{*'}_t)]; \end{aligned}$$

383 per espandere la media, siccome Θ dipende da (V_t, V^*_t, n) , bisogna avvalersi
 384 dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(V_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)V_t + \Theta V'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta)V_t + \Theta V'_t) \mid V_t, V^*_t, n]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(V_t)(1 - B((V^*_t - V_t) \cdot n)\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(V'_t)B((V^*_t - V_t) \cdot n)\Delta t], \end{aligned} \tag{3.8}$$

385 e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(V^*_{t+\Delta t})]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\varphi(V_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(V_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((V^*_t - V_t) \cdot n)(\varphi(V'_t) - \varphi(V_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(V^*_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(V^*_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((V^*_t - V_t) \cdot n)(\varphi(V^{*'}_t) - \varphi(V^*_t))], \end{aligned}$$

386 e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[\varphi(V_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((V^*_t - V_t) \cdot n)(\varphi(V'_t) - \varphi(V_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(V^*_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((V^*_t - V_t) \cdot n)(\varphi(V^{*'}_t) - \varphi(V^*_t))], \end{aligned}$$

387 che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) f(v, t) dv &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(v, v_*, n)(\varphi(v') - \varphi(v)) \rangle f_V(v, v_*, t) dv dv_*, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v^*) f(v_*, t) dv_* &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(v, v_*, n)(\varphi(v'_*) - \varphi(v_*)) \rangle f_V(v, v_*, t) dv dv_*, \end{aligned} \tag{3.9}$$

3 Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel 3.6 per qualunque valore di $B((V^*_t - V_t) \cdot n)$.

in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot dn$$

indica la media rispetto a n , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n)$ e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui densità congiunta è $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine necessario sommare le due equazioni in (3.9). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.10)$$

infatti dall'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il dominio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

Ipotesi 3.2. Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot n) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \quad (3.11)$$

una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n|$.

Ipotesi 3.3 (Caos molecolare). Le particelle interagenti secondo le $[AR]_{\mathbf{v}}$ sono campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è più facile da giustificare matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due particelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

Osservazione 3.7. Dall'Ip. 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la densità congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(\mathbf{v}_*)$ nel secondo membro della seconda equazione della (3.9) può essere così riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.12)$$

seguendo la medesima logica della (3.10). Applicando i due risultati illustrati nelle (3.10, 3.12) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann omogenea asimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \left(\frac{\varphi' + \varphi'_*}{2} - \varphi \right) f f_* dnd\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (3.13)$$

ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi * (per una spiegazione più dettagliata si legga poco dopo nel § 3.2.3).

Tuttavia, qualora le regole d'interazione siano simmetriche secondo la Def. 3.9, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma debole⁴:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad [\text{EtB}]_{\mathbf{v}}$$

Si può anche ricavare la forma forte della $[\text{EtB}]_{\mathbf{v}}$ considerando le regole d'interazione inverse della $[\text{RL}]_{\mathbf{v}}$ [13, § 2.5, p. 15], ma il conto esula dagli scopi di questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per il paragrafo a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*. \quad (3.14)$$

3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la (3.14), bensì è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine avvevivo $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*, \quad (3.15)$$

dove l'operatore $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ è il gradiente spaziale e la distribuzione dipende ora anche dallo spazio: $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Essa è un'equazione integro-differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a tempo dato.

Il primo membro della (3.15) non è altro che la derivata materiale della distribuzione f : posto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$, ovvero in mancanza di collisioni, l'equazione coinvolge in una del trasporto lineare con soluzione nota.

Proposizione 3.3. *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (3.16)$$

ha come soluzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$ in cui $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ è la distribuzione iniziale.

Dimostrazione. Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella (3.16) la velocità \mathbf{v} nell'operatore avvevivo non dipende né dallo spazio né dal tempo, quindi si possono prendere le curve $\mathbf{x}(t)$ tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (3.17)$$

dette, appunto, curve caratteristiche della (3.16); valutando allora la distribuzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lungo di esse si può definire $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$ che derivata equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

⁴ Si dice debole siccome essa vale per una una funzione *test* φ arbitraria.

da cui si deduce che f è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (3.17) si può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, dunque la soluzione in un generico punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo t passa per \mathbf{x} . \square

Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale f_0 semplicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la direzione della velocità costante \mathbf{v} , movimento che rappresenta la variazione medi statistica delle posizioni molecolari.

D'altra parte il secondo membro della (3.15) rappresenta la variazione media statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò anche chiamato operatore collisionale).

Pertanto la (3.15) descrive una chiara separazione di effetti: il primo membro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

L'obiettivo di Boltzmann tramite la (3.15) era di raccordare due mondi: il mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione f soddisfacente la (3.15); i principali sono

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tali quantità sono definite da f seppure questa sia in genere infattibile da ricavare dalla (3.15), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; eppure, tramite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite [13, 16], è possibile svincolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della f ricavando un sistema chiuso dei soli momenti (3.18). La convergenza di questi a un valore stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione mesoscopica indotta dalla distribuzione f .

3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria è stata sviluppata da Pareschi *et al.* [16]; sono chiamati così per due ragioni:

1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analoghe strutturalmente alla [EtB]_v e
2. sono applicati a contesti⁵ molto distanti da quello originale delle velocità di particelle di un gas.

Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già visti nel § 3.2.1 senza però riscrivere tutt'i passaggi.

Descrizione e derivazione

Sia $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ il processo stocastico relativo allo stato microscopico dell'agente di un sistema, dove $X_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ è il vettore aleatorio⁶ che descrive i suoi $n \in \mathbb{N}_+$ stati microscopici al tempo t ; allora le Ipp. 3.1 e 3.3 si possono così riformulare:

Ipotesi 3.4. Gli agenti sono caratterizzati dalle seguent'ipotesi:

- B₁ la distribuzione statistica dei microstati è uniforme nello spazio, e quindi non dipende da esso;
- B₂ gli agenti interagiscono solo binariamente, ovvero le interazioni a coppia sono le più frequenti;
- B₃ gli agenti sono indistinguibili cosicché ognuno è rappresentativo del loro insieme;
- B₄ due agenti interagenti sono statisticamente indipendenti.

D'altra parte gli stati poscollisionali (postati), X'_t e $X_{t'}^*$, si legano con quelli precollisionali (prestatati), X_t e X_t^* , tramite

$$[RI]_X \begin{cases} X'_t = \psi(X_t, X_t^*, y), \\ X_{t'}^* = \psi_*(X_t, X_t^*, y_*), \end{cases}$$

ove ora

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{h_*} &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sono generiche regole d'interazione, non necessariamente lineari o simmetriche (Def. 3.11), mentre $y \in \mathbb{R}^h$ e $y_* \in \mathbb{R}^{h_*}$, con $h, h_* \in \mathbb{N}$, rappresentano dei coefficienti potenzialmente stocastici.

L'interazione tra di essi avviene secondo una variabile aleatoria di Bernoulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(X_t, X_t^*, w, t) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_X$$

con tasso/nucleo d'interazione

$$\mu(X_t, X_t^*, w, t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad [NI]_X$$

per controllare quant'è "probabile" che i due agenti interagiscano, e coefficienti $w \in \mathbb{R}^k$, con $k \in \mathbb{N}$, potenzialmente stocastici.

⁵ Esempi importati sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico, come quello qui considerato delle città

⁶ Si noti che il dominio I degli stati non coincide necessariamente coll'intero spazio reale \mathbb{R}^n .

Osservazione 3.8. Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modellistico si può semplicemente porre unitario:

$$\mu \equiv 1, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$$

sottintendendo in tal modo un'uniforme "probabilità" d'interazione.

Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'interazione

$$[\text{AR}]_{\mathbf{x}} \begin{cases} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}_t + \Theta\mathbf{X}'_t, \\ \mathbf{X}^*_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}^*_t + \Theta\mathbf{X}^{*'}_t, \end{cases}$$

dove $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

Osservazione 3.9. l'acronimo $[\text{AR}]_{\mathbf{x}}$ sta per «Azione-Reazione» poiché si suppone che ogn'interazione (azione), ossia $\Theta = 1$, necessariamente modifica entrambi gli stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti [15] questa regola può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia modificato portando alle interazioni «Azione-Azione».

Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1 colla quantità osservabile $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si perviene all'equazione di tipo Boltzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad [\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$$

nella quale $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media rispetto a tutt'i coefficienti potenzialmente stocastici (\mathbf{y} , \mathbf{y}_* e \mathbf{w}), mentre il termine $-\varphi - \varphi_*$ discende dal fatto che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione μ sia pari.

Osservazione 3.10 ($[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ simmetrica). Qualora $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ sia pari (Def. 3.10) e le regole d'interazione $[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ siano simmetriche (Def. 3.11), la $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ si può riformulare come

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) (\varphi' - \varphi) \rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (3.19)$$

mediante un cambio di variabili atto a invertire \mathbf{x} e \mathbf{x}_* solo per la differenza $\varphi'_* - \varphi_*$.

Definizione 3.10 ($[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ pari). Se il tasso d'interazione in $[\text{NI}]_{\mathbf{x}}$ verifica

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{w}, t) = \mu(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{w}, t) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^k,$$

allora μ si dice pari.

Definizione 3.11 ($[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ simmetriche). Se le regole d'interazione del tipo $[\text{RI}]_{\mathbf{v}}$ verificano

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \psi_*(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \psi_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*, \mathbf{y}_*) &= \psi(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}, \mathbf{y}_*) \end{aligned} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \in I \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^h,$$

allora si dicono simmetriche. In altre parole, la simmetria implica

$$\mathbf{X}'_t = \psi_*(\mathbf{X}^*_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}^{*'}_t = \psi(\mathbf{X}^*_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{y}_*).$$

534 **Notazione**

535 Nei previ paragrafi si è fatto spesso uso, specie per le varie equazioni [di
536 tipo] Boltzmann (3.13–3.15), [EtB]_v e [EtB]_x, di una notazione abbreviata per
537 tutti gli oggetti salvo il tasso d’interazione μ . In questo breve paragrafo si de-
538 finiscono in maniera piú esplicita queste abbreviazioni facendo riferimento
539 al contesto generale sviluppato poco fa.

540 Innanzitutto la densità congiunta f da sola sottintende la variabile del-
541 l’agente interagente \mathbf{x} mentre con un pedice f_* quella dell’agente ricevente
542 \mathbf{x}_* :

$$f \equiv f(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \quad f_* \equiv f(\mathbf{x}_*, t);$$

543 dopodiché le quantità osservabili φ seguono la medesima logica di prima
544 ma coll’aggiunta di un apice per distinguere le variabili postinterazionali:

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv \varphi(\mathbf{x}) & \text{e} & \quad \varphi_* \equiv \varphi(\mathbf{x}_*), \\ \varphi' &\equiv \varphi(\mathbf{x}') & \text{e} & \quad \varphi'_* \equiv \varphi(\mathbf{x}_*'). \end{aligned}$$

545 Ovviamente questa notazione può essere generalizzata a una qualunque
546 funzione scalare $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione del microstato degli agenti:

$$\begin{aligned} g &\equiv g(\mathbf{x}) & \text{e} & \quad g_* \equiv g(\mathbf{x}_*), \\ g' &\equiv g(\mathbf{x}') & \text{e} & \quad g'_* \equiv g(\mathbf{x}_*'). \end{aligned}$$

547 Infine si osserva che qualora vi siano altri pedici o apici nelle funzioni a ve-
548 nire, essi *non* fanno riferimento a questa notazione corta, se non altrimenti
549 specificato. Per esempio giusto nel prossimo paragrafo si lavora con del-
550 le densità f_i , in cui i è l’indice del nodo del grafo associato all’agente; è
551 comunque possibile, anche per questi casi, usare la notazione precedente
552 riposizionando lievemente i pedici e gli apici:

$$f^i \equiv f(\mathbf{x}, t) \quad \text{e} \quad f_i^* \equiv f(\mathbf{x}_*, t);$$

553 **Analisi dimensionale**

554 Finora tutte le equazioni passate fanno riferimento a un tempo adimensiona-
555 le, sebbene l’introduzione di un tempo sia una modifica alquanto indolore e
556 che lasci trasparire un’interessante interpretazione del passo temporale Δt .

557 Sia dunque $\tilde{t} = \tau t$ il tempo dimensionale scomposto nel prodotto di in uno
558 adimensionale t e della dimensione τ .

559 **Osservazione 3.11.** Seguendo la notazione ISO [10, § 6.2] \tilde{t} dev’essere scrit-
560 to $\tilde{t} = \{t\} \times [t]$ ma, per leggerezza di notazione, si omettono le parentesi po-
561 nendo $\tau \equiv [t]$: l’importante è vedere t come il valore numerico variabile e
562 adimensionale, mentre τ come la dimensione costante e fissa.

563 Detto ciò, mediante la derivata dimensionale

$$\frac{d \cdot}{dt} = \tau \frac{d \cdot}{d\tilde{t}}$$

564 e le riformulazioni

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, \tilde{t}) \equiv f(\mathbf{x}, \tilde{t}/\tau), \quad \text{e} \quad \tilde{f}_*(\mathbf{x}_*, \tilde{t}) \equiv f(\mathbf{x}_*, \tilde{t}/\tau),$$

abbreviate con \tilde{f} e \tilde{f}_* rispettivamente, la [EtB] $_{\chi}$ diventa

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \tilde{f} dx = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}/\tau) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle \tilde{f} \tilde{f}_* dx dx_*. \quad (3.20)$$

Per capire come varia il tasso d'interazione μ è sufficiente dimensionalizzare la [Ber] $_{\chi}$:

$$\Theta \sim \text{Bernoulli} \left(\mu(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t^*, \mathbf{w}, \tilde{t}/\tau) \frac{\Delta \tilde{t}}{\tau} \right),$$

da cui si deduce il tasso d'interazione dimensionale $\tilde{\mu}$:

$$\tilde{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}) \equiv \frac{1}{\tau} \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}/\tau),$$

che trasforma la (3.20) nell'equazione di tipo Boltzmann dimensionale

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \tilde{f} dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \tilde{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, \tilde{t}) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle \tilde{f} \tilde{f}_* dx dx_*. \quad (3.21)$$

Osservazione 3.12 (frequenza d'interazione). Dall'identità $\Delta \tilde{t} = \tau \Delta t$ si può interpretare Δt come la frazione della dimensione τ dopo la quale può avvenire un'interazione, da cui si deduce che $\Delta \tilde{t}$ è l'intervallo di tempo tra due interazioni.

Di conseguenza si può vedendo l'[AR] $_{\chi}$ come un fenomeno periodico di periodo $\Delta \tilde{t}$ e frequenza

$$\tilde{f} \equiv \frac{1}{\Delta \tilde{t}} = \frac{1}{\tau \Delta t} \equiv \frac{1}{\tau} f,$$

in cui, come prima $1/\tau$ è la dimensione della frequenza adimensionale f .

Ecco che il reciproco del passo temporale Δt prende il significato della frequenza d'interazione del fenomeno, nell'unità di tempo sia adimensionale che dimensionale mediante $1/\tau$.

Osservazione 3.13 (Scelta di τ). La precedente osservazione permette anche di esplicitare un metodo con cui decidere la dimensione temporale τ : si consideri $\Delta t = 0.01$, allora la frequenza è di 100 interazioni nell'unità di tempo. In un fenomeno come quello urbano si possono allora escludere due scale:

- ◇ quella dei mesi dei mesi o superiori, perché è irrealistico che in un arco temporale così lungo vi siano solo 100 interazioni tra le città;
- ◇ similmente quella dei secondi o inferiori per un ragionamento simile a quello di prima ma opposto.

È pertanto naturale che la scala ideale in tal contesto sia quella dei giorni.

Ciononostante, in questo scritto non si studia un'equazione di tipo Boltzmann dimensionale analoga alla (3.21) per tre principali motivazioni:

1. la dimensione va considerata solo se si è interessati a studiare il transitorio, non la distribuzione stazionaria;
2. lo studio di quest'ultimo è incompatibile coll'Ip. 2.2 di grafo statico;
3. mancano i dati storici, sia attendibili che su scale temporali adeguate, per poter confrontare il transitorio simulato con quello reale.

Tali sono le ragioni per cui il tempo sarà sempre considerato adimensionale da qui in poi: l'obiettivo è studiare la distribuzione stazionaria raggiunta, non in quanto tempo si raggiunge (tempo di convergenza).

3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI

Si analizza adesso il caso del tessuto interurbano descritto nel § 2.2, considerando le città sia come agenti che come nodi di una rete che ne regola le interazioni: due città possono interagire sse sono connessi; è anche ovvio che l'interazione modifichi, in qualche modo da definire, la loro popolazione.

In questo paragrafo si applicano i concetti della teoria sviluppata nei §§ 2.1 e 3.2.3 e, in particolare, la notazione usata e definita. S'inizia mostrando una derivazione esatta la quale, cioè, considera la topologia esatta; quindi si approfondisce un'approssimazione nella quale si "perde" la topologia indotta dalla rete; infine, si considerano i collegamenti tra la derivazione esatta e quella di tipo Boltzmann sotto determinate ipotesi.

3.3.1 Equazione di tipo Boltzmann esatta

Descrizione e derivazione

Visto che si assume che valgono le Ip. 3.4⁷, dalla B₃ sorge un problema non di poco conto: gli agenti sono indistinguibili ma la rete sottostante li rende distinti per via degli indici \mathcal{I} .

Per dipanare la questione è sufficiente considerare l'indice come una variabile aleatoria $I \in \mathcal{I}$ così da definire il processo stocastico come

$$\{\mathbf{X}_t\} \equiv \{I, S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

in cui $S_t \in \mathbb{R}_+$ è la variabile aleatoria relativa alla popolazione dell'agente rappresentativo al tempo t ed è l'unica componente del processo stocastico a variare nel tempo per l'Ip. 2.2.

Osservazione 3.14 (Sulla natura numerica della popolazione). È naturale che non esistano frazioni di persone e che quindi rigorosamente $S_t \in \mathbb{N}$ ma non sempre la scelta più realistica è quella che modellisticamente è più agevole; infatti trattare S_t come una variabile aleatoria discreta impone un codominio, appunto, discreto che è in genere più difficile da manipolare matematicamente rispetto a un intervallo continuo. Tal'è la ragione nel scegliere S_t reale: dopo aver fatto i conti normalmente si può poi approssimare per eccesso o difetto ricavando la taglia intera effettiva; l'errore così commesso è di al più una persona.

Così ragionando si può nel complesso descrivere statisticamente lo stato microscopico $\mathbf{X}_t \equiv (I, S_t)$ dell'agente rappresentativo colla densità congiunta

$$f(i, s, t): \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

che è discreta in $i \in \mathcal{I}$ e continua in $s \in \mathbb{R}_+$, uguale a

$$f(i, s, t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(i - j), \quad (3.22)$$

⁷ Perdi più la B₂ è valida a un tempo t , ma nell'unità di tempo dimensionale \tilde{t} le interazioni si possono considerare come non binarie, come già discusso alla fine del § 3.2.3.

dove $N \equiv |\mathcal{I}|$ è il numero totale d'agenti del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di S_t dell'agente i -esimo.

In tal modo la densità congiunta f è effettivamente indistinguibile rispetto a tutti gli agenti, soddisfacendo la [B3](#), e integra sul suo dominio a uno:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(\mathcal{I} \times \mathbb{R}_+) &= \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} f(i, s, t) ds di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} f_i(s, t) ds \otimes \delta(i-j) di \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} \delta(i-j) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} 1 = \frac{N}{N} = 1, \quad \forall t \geq 0; \end{aligned}$$

mentre le densità f_i preservano la naturale distinguibilità degli agenti indotta dalla topologia sottostante.

Sempre come conseguenza del grafo, la [\[Ber\]_X](#) deve dipendere dalla matrice d'adiacenza A :

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(I, I^*) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_S^A$$

ove $A : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione che a ogni coppia d'indici (I, I^*) associa la relativa entrata nella matrice d'adiacenza

$$A(I, I^*) \equiv a_{I, I^*} = \begin{cases} 1 & \text{se } (I, I^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

secondo la [\(2.2\)](#); in tal modo l'interazione non ha possibilità d'avvenire se i due agenti non sono connessi.

Osservazione 3.15. Rispetto al caso generale [\[Ber\]_X](#) il tasso d'interazione ha forma

$$\mu(i, i_*) \equiv A(i, i_*), \quad (3.23)$$

esso, cioè, è per definizione costante sia rispetto agli stati S_t e S_t^* che rispetto al tempo, oltre a non avere coefficienti⁸ w .

Osservazione 3.16. Per definizione della distribuzione di Bernoulli, è necessario imporre $A(I, I^*) \Delta t \leq 1$, ma dato che $A(I, I^*) \in \{0, 1\}$ ciò si traduce nella naturale condizione che $\Delta t \leq 1$.

D'altro canto le regole d'interazione nella [\[RI\]_X](#) diventano

$$[\text{RI}]_S \begin{cases} S_t' = \psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \gamma), \\ S_t^{*'} = \psi_*(S_t, I, S_t^*, I_*). \end{cases}$$

Osservazione 3.17. Confrontato a [\[RI\]_X](#), solo la funzione della città interagente ψ presenta un coefficiente stocastico $y \equiv \gamma \in \mathbb{R}$, mentre quella relativa alla città ricevente ψ_* non dipende da potenziali coefficienti⁹ y_* .

⁸ Questa situazione si può simbolicamente rappresentare ponendo $k = 0$.

⁹ Come nell'Oss. [3.15](#), tale condizione si può simbolicamente rappresentare ponendo $h_* = 0$.

Unendo le $[\text{Ber}]_S^A$ e $[\text{RI}]_S$, le $[\text{AR}]_X$ si scrivono

$$[\text{AR}]_S \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1-\Theta)S_t + \Theta S'_t, \\ S_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*'}, \end{cases}$$

coerentemente col fatto che in un cotesto urbano, qualora una città-nodo interagisca con un'altra, entrambe debbano variare il loro stato (Oss. 3.9).

Osservazione 3.18. Paragonato a $[\text{AR}]_X$ ci si potrebbe chiedere perché non si considera l'intero vettore aleatorio X_t , come pure nella $[\text{RI}]_S$; la ragione è che I è una componente statica che non varia nel tempo.

In ogni caso, considerando I_t e I_t^* momentaneamente dinamiche, si possono definire le regole d'interazione

$$[\text{RI}]_I \begin{cases} I_t' = \psi(S_t, I, S_t^*, I_*) \equiv I_t, \\ I_t^{*'} = \psi_*(S_t, I, S_t^*, I_*) \equiv I_t^*, \end{cases}$$

da cui segue l'algoritmo d'interazione

$$[\text{AR}]_I \begin{cases} I_{t+\Delta t} = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t' = (1-\Theta)I_t + \Theta I_t = I_t, \\ I_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^{*'} = (1-\Theta)I_t^* + \Theta I_t^* = I_t^*, \end{cases}$$

che soddisfa la staticità di I e I_* e completa, assieme a $[\text{AR}]_S$, la formulazione $[\text{AR}]_X$ più generale.

Sia $\Phi: \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un'arbitraria quantità osservabile, dalla $[\text{Ber}]_S^A$ l'equazione di tipo Boltzmann omogenea $[\text{EtB}]_X$ ha forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi f dv di = \int_{\mathcal{I}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} A(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi_*' - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} ff_* ds ds_* di di_*, \quad [\text{EtB}]_S^A$$

ove si è usata la notazione abbreviata illustrata nel § 3.2.3, mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla variabile aleatoria γ nelle $[\text{RI}]_S$.

Osservazione 3.19. Anche se la derivazione della $[\text{EtB}]_S^A$ è già stata spiegata nel dettaglio nel § 3.2.1, rimane interessante riportare la forma del passaggio più difficile, ossia quella della media condizionata (3.8) (qui mostrato solo per $S_{t+\Delta t}$):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(I, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, (1-\Theta)S_t + \Theta\psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma))A(I, I_*)\Delta t | I, I_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(I, S_t)(1-A(I, I_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(I, \psi(S_t, I, S_t^*, I_*, \sigma))A(I, I_*)\Delta t]]. \end{aligned}$$

Si noti come il condizionamento sia solo rispetto a I a I_* , proprio poiché Θ in $[\text{Ber}]_S^A$, tramite il tasso d'interazione μ nella (3.23), dipende solo da essi.

Analisi delle regole d'interazione

Si approfondiscono in questo paragrafo le regole d'interazione $[\text{RI}]_S$.

Innanzitutto, il perché nella $[\text{AR}]_S$ si considerano interazioni «Azione-Reazione» (Oss. 3.9) discende da un vincolo fisico: se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, necessariamente anche l'altra varia il proprio stato.

Dopodiché, passando alle realizzazioni di tutte le variabili aleatorie considerate, vale a dire scrivendole in minuscolo e omettendo la dipendenza dal tempo, le regole d'interazione $[RI]_s$ sono così definite¹⁰

$$\begin{cases} \psi(s, i, s_*, i_*) = s(1 - E(s, i, s_*, i_*) + \gamma) \\ \psi_*(s, i, s_*, i_*) = s_* + sI(s, i, s_*, i_*) \end{cases} \quad (3.24)$$

ove

$$E: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow [0, 1],$$

$$I: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow [0, 1],$$

sono rispettivamente i tassi d'emigrazione e immigrazione, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche. È perciò chiaro che, per avere un postato fisicamente sensato, γ dev'essere tale che

$$s' = s(1 - E + \gamma) > 0 \quad \forall E \in [0, \lambda] \implies \gamma > E - 1 \quad (3.25)$$

in cui $\lambda \equiv \sup E \leq 1$ è il limite superiore del tasso d'emigrazione i cui argomenti da qui fino alla fine di questo paragrafo sono sottintesi (lo stesso per il tasso d'immigrazione I verso la fine); d'altra parte s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (3.25) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città¹¹.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto valgono le seguenti ipotesi:

Ipotesi 3.5. γ deve soddisfare le seguenti caratteristiche:

- F1 possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del vincolo imposto da (3.25);
- F2 la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
- F3 seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione, è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

1. la distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \gamma)$ non soddisfa la F1 poiché può assumere valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
2. la distribuzione uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ è adeguata solo per intervalli finiti e diventa degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né F2 né F3, mentre F1 sí;
3. la distribuzione esponenziale $\text{Exp}(\lambda)$ è quella più promettente perché riflette sia F2 (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F3, ma sfortunatamente non F1 perché la densità è non nulla al valore estremo $\gamma = E - 1$;
4. l'unica distribuzione che soddisfa tutt'e tre le caratteristiche ricercate è proprio la distribuzione $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

¹⁰ Sono state in parte ispirate dalla [9, (2.1) p. 223].

¹¹ Ciò non significa che il modello non possa prevedere lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi (Oss. 3.14).

Si assuma allora $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ con densità

$$f_{\gamma}(x) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right),$$

ove α e β sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre

$$\Gamma(\alpha): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la funzione gamma

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

Imponendo la [F3](#) si ottiene

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E = \alpha\beta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle \equiv \sigma^2 = \alpha\beta^2,$$

in cui σ^2 indica la varianza, da cui

$$\alpha = \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sigma^2}{1-E}.$$

La [F2](#) si può semplicemente soddisfare traslando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzione $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

D'altra parte per la [F1](#) bisogna salvaguardarsi dai casi degeneri della distribuzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa $\text{Exp}(\beta)$, mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi probabilità nulla di campionare da $\hat{\gamma}$ l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1-E)^2}{\sigma^2} > 1,$$

ma nel caso peggiore $1 - E = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1-\lambda)^2 \implies \sigma < |1-\lambda| = 1-\lambda, \quad (3.26)$$

siccome $E \in [0, \lambda] \forall s, s_* \in \mathbb{R}_+$. La (3.26) implica quindi che non è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la [F1](#), ma che questa è limitata superiormente dal massimo tasso d'emigrazione λ , interpretabile come attrattività: più grande è λ più piccola è la varianza, e viceversa.

Si conclude osservando come sia naturale che l'interazione, ossia lo scambio di popolazione descritto dalle (3.24), debba conservare [in media] la popolazione totale:

$$s + s_* = \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle = s - sE + s_* + sI \implies E \equiv I,$$

il che ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto).

Osservazione 3.20. Le (3.24) non sono ancora complete siccome non si è esplicitata la regola d'emigrazione, la cui scelta, tuttavia, si può dunque vedere come la regola d'interazione stessa: è l'ultimo tassello del mosaico. Pertanto si lascia quest'ultima definizione al Cap. 4 nel quale se ne propongono varie, si discutono quindi con vari studi parametrici per poi infine interpretarle analizzando cosa queste dicono sul fenomeno della migrazione.

3.3.2 Equazione di tipo Boltzmann approssimata

L'approssimazione si fonda sulla seguente matrice:

Definizione 3.12 (Matrice dei gradi **B**). Sia $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice di rango uno

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top}{D_N}$$

definite tramite il prodotto diadico dei vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^+ &\equiv (k_1^+, k_2^+, \dots, k_N^+)^\top = \mathbf{A} \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \\ \mathbf{k}^- &\equiv (k_1^-, k_2^-, \dots, k_N^-)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{1} \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (3.27)$$

rispettivamente dei gradi uscenti ed entranti, e la costante¹²

$$D_N \equiv \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^+ = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^+ = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{k}^- = \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} = \|\mathbf{A}\|_1. \quad (3.28)$$

Allora **B** approssima la matrice d'adiacenza **A** poiché per definizione vale

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^+ (\mathbf{k}^-)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^+ \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^+ \\ \mathbf{B}^\top \mathbf{1} &= \frac{1}{D_N} \mathbf{k}^- (\mathbf{k}^+)^\top \mathbf{1} = \mathbf{k}^- \frac{D_N}{D_N} = \mathbf{k}^- \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{B} \approx \mathbf{A}.$$

Inoltre, poiché **A** è simmetrica (Ip. 2.1) vale $\mathbf{k}^+ = \mathbf{k}^- = \mathbf{k}$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}^\top}{D_N}.$$

Tramite la Def. 3.12, la $[\text{Ber}]_S^{\mathbf{A}}$ diventa

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mathbf{B}(\mathbf{I}, \mathbf{I}^*) \Delta t), \quad [\text{Ber}]_S^{\mathbf{B}}$$

da cui la $[\text{EtB}]_S^{\mathbf{A}}$ si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}_+} \Phi g dv di = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbf{B}(i, i_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} g g_* ds ds_* di di_*, \quad [\text{EtB}]_S^{\mathbf{B}}$$

dove g e g_* sono densità definite come la (3.22) ma indicate diversamente per distinguerle da quelle esatte f ed f_* .

Sorge però spontanea una domanda non di poco conto: perché non si può scegliere un'altra matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ per approssimare la **A**, secondo altri criteri analoghi o dissimili alla (3.27)? La risposta non è immediata ma discende in essenza su come la $[\text{EtB}]_S^{\mathbf{B}}$ può essere riformulata. A tal scopo si necessita di un'osservazione:

Osservazione 3.21 (Teoria e Pratica). Come detto nel Cap. 1, l'interesse è di studiare la distribuzione della popolazione tra città; perciò, non a torto, si può vedere la densità f nella (3.22) come eccessivamente dettagliata, contenendo informazioni legate ai vertici: ai fini pratici è quindi sufficiente ricavare in qualche modo la densità marginale $\bar{f}(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(i, s, t) di, \forall t \geq 0$, che è esattamente quanto fatto nel § 4.1 per i risultati delle venture simulazioni.

¹² La $\|\cdot\|$ è la norma uno applicata alle matrici: $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} |a_{i,j}|$.

Dall'Oss. 3.21 si possono pertanto specializzare gli osservabili:

Ipotesi 3.6 (Osservabili puntuali). Si considera la seguente classe di osservabili: $\Phi(i, s) \equiv \delta(i - j)\varphi(s)$, $\forall j \in \mathcal{J}$, dove $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria.

Con tale scelta è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le g_i : usando, infatti, l'Ip. 3.6 nella [EtB]_S^B porta a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi \rangle}{2} g_j \sum_{i \in \mathcal{J}} B(j, i) g_i^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} s_j^* \sum_{i \in \mathcal{J}} B(i, j) g_i ds ds_*, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

ma essendo **B** simmetrica vale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi g_j ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} g_j \sum_{i \in \mathcal{J}} B(j, i) g_i^* ds ds_* \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

che in forma matriciale, introducendo le densità vettoriali

$$\mathbf{g} \equiv (g_i)_{i \in \mathcal{J}} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_* \equiv (g_i^*)_{i \in \mathcal{J}},$$

si legge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \mathbf{g} ds = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g} \odot \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad (3.29)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard (prodotto per elementi).

Il prossimo passo è introdurre la densità globale delle taglie, ossia la densità marginale della (3.22) rispetto alla popolazione s :

$$\bar{g}_N(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} g(i, s, t) di = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i = \frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{g}, \quad (3.30)$$

ove $\mathbf{1} \equiv (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, che non è che la media tra le densità di S_t tra tutti i vertici¹³; premoltiplicando la (3.29) per $\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top$ e usando la (3.30) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g} ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_* ds ds_*, \quad [\text{E}\bar{g}]$$

Osservazione 3.22. La [E \bar{g}] si può anche ottenere usando, in luogo dell'Ip. 3.6, direttamente un osservabile indipendente dall'indice i : $\Phi(i, s) \equiv \varphi(s)$, confermando quanto premesso nell'Oss. 3.21, cioè che la [E \bar{g}] si ricava perdendo le informazioni legati agli indici negli osservabili.

La [E \bar{g}] non è ancora un'equazione chiusa per \bar{g} per via del secondo membro nel quale $\mathbf{g}^\top \mathbf{B} \mathbf{g}_*$ richiede sia di conoscere nel dettaglio le connessioni sottostanti del grafo che le distribuzioni della popolazione di ogni città. Tuttavia, avvalendosi della definizione della **B**, la [E \bar{g}] diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{g}_N ds = \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2 D_N} (\mathbf{k}^\top \mathbf{g})(\mathbf{k}^\top \mathbf{g}_*) ds ds_*, \quad (3.31)$$

che richiede d'introdurre una nuova densità di probabilità:

¹³ La medesima definizione vale anche per \bar{f}_N della [EtB]_S^A.

Definizione 3.13 (Densità dei gradi k). Sia

$$d_N: \mathbb{R}_+ \times \{0, 1, \dots, N\} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

la densità di probabilità dell'evento che al tempo t un agente abbia popolazione s e grado k , definizione che la lega alle g_i dalla relazione

$$d_N(s, k, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t),$$

ove

$$\mathcal{J}_k \equiv \{i \in \mathcal{J} \mid k_i = k\} \subseteq \mathcal{J} \quad (3.32)$$

è l'insieme dei nodi con grado k ; da essa ne seguono altre due:

$$\bar{g}_N(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N d_N(s, k, t), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{k}^\top \mathbf{g}(s, t) = \sum_{i \in \mathcal{J}} k_i g_i(s, t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{i \in \mathcal{J}_k} g_i(s, t) = N \sum_{k=0}^N k d_N(s, k, t).$$

Un analogo discorso vale per le f_i in luogo delle g_i .

E dalla Def. 3.13 segue la sua normalizzazione:

Definizione 3.14 (Densità dei gradi k normalizzati). Siano

$$k_{\hat{N}} \equiv \frac{k_i}{N} \in \mathcal{K}, \quad \forall i \in \mathcal{J},$$

i gradi normalizzati di un generico nodo rappresentativo di \mathcal{G} , in cui

$$\mathcal{K} \equiv \left\{ \frac{k}{N} \mid k = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

è l'insieme discreto dei gradi normalizzati; allora la densità dei gradi normalizzati

$$\hat{d}_N: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{K} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

è così definita

$$\hat{d}_N(s, k_{\hat{N}}, t) \equiv N d_N(s, N k_{\hat{N}}, t). \quad (3.34)$$

Osservazione 3.23. Visto che due elementi consecutivi dell'insieme \mathcal{K} sono separati da un passo costante e uguale a $1/N$, si può definire $\Delta k_{\hat{N}} \equiv 1/N$ che da (3.34) implica

$$\sum_{k_{\hat{N}} \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} \hat{d}_N(s, k_{\hat{N}}, t) ds \Delta k_{\hat{N}} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} d_N(s, k, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0,$$

cosa che permette di vedere la \hat{d}_N come funzione costante a tratti dei gradi normalizzati $k_{\hat{N}}$, e similmente per d_N (basta definire $\Delta k \equiv 1$) essendone un mero riscaldamento.

Osservazione 3.24. L'Oss. 3.23 dà la possibilità anche d'interpretare la (3.33) come un'uguaglianza tra densità marginali: $\bar{g}_N = \bar{d}_N = \bar{\hat{d}}_N$.

Con tutte queste definizioni e osservazioni, la (3.31) si può riformulare in termini di \hat{d}_N

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}_+} \varphi d_N ds = N^2 \sum_{k, k_*=0}^N \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k k_*}{D_N} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} d_N d_N^* ds ds_*,$$

dove k_* è il grado associato a g_N^* , e poi in termini di \hat{d}_N

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d}_N ds \Delta k}_{\text{I}} = \underbrace{\sum_{k, k_* \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k \hat{k}_*}{\bar{D}_N} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \hat{d}_N \hat{d}_N^* ds ds_*}_{\text{II}}.$$

Il secondo membro si può ulteriormente manipolare moltiplicando e dividendo per N^2 e definendo il grado normalizzato medio

$$\bar{D}_N \equiv \frac{D_N}{N^2} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+} k \hat{d}_N ds \Delta k, \quad (3.35)$$

da cui

$$\text{II} = \sum_{k, k_* \in \mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k \hat{k}_*}{\bar{D}_N} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \hat{d}_N \hat{d}_N^* ds ds_* \Delta k \Delta k_*.$$

Valutando il limite $N \rightarrow \infty$ alla (3.35) e ai membri I e II

$$\begin{aligned} (3.35) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{D} &\equiv \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} k \hat{d} ds dk, & \text{I} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d} ds dk \\ \text{II} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} &\int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k \hat{k}_*}{\bar{D}} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \hat{d} \hat{d}^* ds ds_* dk dk_*, \end{aligned}$$

si perviene infine a un'equazione di tipo Boltzmann:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \hat{d} ds dk = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{k \hat{k}_*}{\bar{D}} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \hat{d} \hat{d}^* ds ds_* dk dk_*. \quad [\text{EtB}]_S^k$$

Si è dunque dimostrato il seguente teorema:

Teorema 3.1 (di rilassamento della topologia). La $[\text{EtB}]_S^B$ è formalmente equivalente nel limite $N \rightarrow \infty$ a un'equazione di tipo Boltzmann di forma $[\text{EtB}]_X$ con microstato $\mathbf{X}_t \equiv \{\mathcal{K}, S_t\}$, ove $\mathcal{K} \in [0, 1]$ è la variabile aleatoria dei gradi normalizzati, osservabili $\varphi(s)$ indipendenti da \mathcal{K} e nucleo d'interazione $\mu(\mathcal{K}, \mathcal{K}_*) \equiv (k \hat{k}_*) / \bar{D}$.

Il significato del Teo. 3.1 è profondo: approssimare $[\text{EtB}]_S^A$ con $[\text{EtB}]_S^B$ coincide col perdere la distinguibilità indotta dal grafo, rilassando in tal modo la topologia la quale non scompare ma rimane solo come distribuzione dei gradi; tale riduzione è come sfocare i dettagli delle connessioni tra i vertici: si passa da uno specifico grafo a una classe di grafi. Nella Fig. 3.1 è presente uno schema riassuntivo del corrente paragrafo.

Osservazione 3.25. Il Teo. 3.1 motiva anche il perché non si possa considerare una generica matrice \mathbf{C} che approssima la \mathbf{A} : non è detto che rilassi la topologia portando a un'equazione analoga alla $[\text{EtB}]_S^k$.

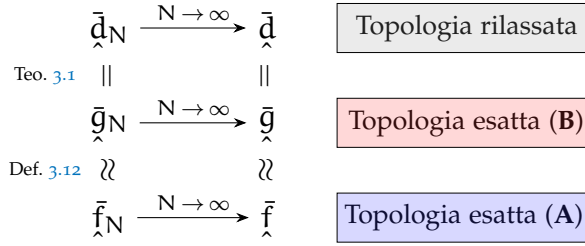


Figura 3.1: Schema riassuntivo del § 3.3.2.

Osservazione 3.26. La Fig. 3.1 contiene al suo interno \hat{f} che ha un'analogia definizione alla Def. 3.14, ma normalizzando gl'indici: siano

$$\hat{i} \equiv \frac{i}{N} \in \mathcal{I}, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

gl'indici normalizzati di un generico nodo rappresentativo di \mathcal{G} , in cui

$$\mathcal{I} \equiv \left\{ \frac{i}{N} \mid i = 0, 1, \dots, N \right\} \subseteq [0, 1]$$

è l'insieme discreto degl'indici normalizzati. Allora la (3.22) normalizzata, per analogia colla (3.34), si può definire

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = N f(N\hat{i}, s, t) = \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(N\hat{i} - j),$$

ma per la condizione di normalità $\mathbb{P}([0, 1] \times \mathbb{R}_+) = 1, \forall t \geq 0$, deve valere¹⁴

$$\hat{f}_j(s, t) = N f_j(s, t) \quad \text{ove } j = N\hat{j},$$

anch'essa analoga alla (3.34); difatti con questa la \hat{f} si scrive

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(N(\hat{i} - \hat{j})) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \mathcal{I}} f_j(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - \hat{j}).$$

Con tali definizioni la densità marginale \bar{f} si può riformulare mediante il cambio di variabili $i = N\hat{i}$:

$$\bar{f}_N = \int_{\mathcal{I}} f(i, s, t) di = \int_{\hat{\mathcal{I}}} N f(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \int_{\hat{\mathcal{I}}} \hat{f}(\hat{i}, s, t) d\hat{i} = \bar{f}_N = \frac{1}{N} \sum_{\hat{i} \in \hat{\mathcal{I}}} \hat{f}_{\hat{i}}(s, t),$$

e, definendo il passo $\Delta\hat{i} \equiv 1/N$ tra due indici normalizzati consecutivi, si arriva al limite $N \rightarrow \infty$ a

$$\bar{f}_N = \bar{f}_N = \sum_{\hat{i} \in \hat{\mathcal{I}}} \hat{f}_{\hat{i}}(s, t) \Delta\hat{i} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \bar{f} = \bar{f} = \int_0^1 \hat{f}_{\hat{i}}(s, t) d\hat{i},$$

mentre la \hat{f} diventa

$$\hat{f}(\hat{i}, s, t) = \int_0^1 \hat{f}_{\hat{j}}(s, t) \otimes \delta(\hat{i} - \hat{j}) d\hat{j} = \hat{f}_{\hat{i}}(s, t).$$

Similmente vale per \bar{g} .

¹⁴ Si ricordi che l'indice j non è un argomento della densità f_j , quindi può essere cambiato con un altro indice purché sia distinto da tutti gli altri secondo la trasformazione scelta.

Osservazione 3.27 (Sulla bontà di $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$). Su un aspetto è al momento non ci si può esprimere: quanto bene la \mathbf{B} approssima la matrice \mathbf{A} in generale? Sarebbe necessario elaborare ulteriormente la teoria per trovare una risposta, obbiettivo, come già detto, non di questa tesi. Tuttavia, euristicamente, si può riflettere in questo modo: con $N \gg 1$ le singole connessioni sono meno importati, per cui vengono meno i dettagli, mentre la panoramica può essere ragionevolmente colta da \mathbf{B} ; ciò suggerirebbe che più sono i nodi migliore è l'approssimazione $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$. Tale breve riflessione è però solo un intuito, *non* una dimostrazione rigorosa, e dunque anche potenzialmente falsa.

Osservazione 3.28. Si veda [15] per la dimostrazione del Teo. 3.1 in un contesto delle reti sociali e nel caso di un grafo diretto, non necessariamente simmetrico, oltre che di $[\mathbf{RI}]_X$ lineari e simmetriche.

3.3.3 Altri nessi distinguibile-indistinguibile

Nel precedente paragrafo si è esplorato come si può "perdere" la struttura sottostante indotta dal grafo passando a una densità dipendente dal grado dei nodi, recuperando in tal modo un'equazione classica di tipo Boltzmann. Risulta perciò stimolante esplorare se sussistano certe ipotesi che permettano di trasformare la $[\mathbf{Eg}]$ in una forma della $[\mathbf{EtB}]_X$, approfondendo così i legami tra la teoria retale sviluppata nei due previ due paragrafi e la teoria di tipo Boltzmann.

Ipotesi semplificative

A questo scopo valgono le seguenti:

Ipotesi 3.7. Esistono tre principali ipotesi semplificative della $[\mathbf{Eg}]$:

S1 Il grafo è completamente connesso con matrice d'adiacenza unitaria:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{1} \iff a_{i,j} \equiv 1 \quad \forall i,j \in \mathcal{J}.$$

S2 Gli agenti sono indistinguibili rispetto al grafo:

$$f_i(s,t) = f_j(s,t) = f(s,t) \quad \forall i,j \in \mathcal{J},$$

S3 Le regole d'interazione $[\mathbf{RI}]_S$ sono simmetriche (Def. 3.11).

Analisi della S1

Notando che $\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$, la $[\mathbf{Eg}]$ diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} (\mathbf{1}^\top \mathbf{f})(\mathbf{1}^\top \mathbf{f}_*) ds ds_* \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f} \right) \left(\frac{1}{N} \mathbf{1}^\top \mathbf{f}_* \right) ds ds_*, \end{aligned}$$

ma ricordando (3.30) si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} \bar{f} f_* ds ds_*, \quad (3.36)$$

la quale è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann [EtB]_X con microstato $\mathbf{X}_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [RI]_S e nucleo d'interazione unitario¹⁵ $\mu \equiv 1$ nella [Ber]_X. Ciò significa che con S₁ gli agenti, nonostante siano distinti per il grafo, si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media (3.30).

Analisi della S2

Sotto tal'ipotesi, che equivale coll'assumere

$$\mathbf{f} = \mathbf{1}f \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_* = \mathbf{1}f_*,$$

la [Eg] diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi \bar{f} ds &= \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} \mathbf{f} \mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1} f_* ds ds_* \\ &= \frac{\mathbf{1}^\top \mathbf{A} \mathbf{1}}{N^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_* \end{aligned}$$

e rimembrando (3.28) si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{D_N}{N^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_*.$$

In questo contesto il rapporto $D_N/N^2 \in [0,1]$ (grado medio normalizzato della rete) rappresenta quanto la rete è topologicamente simile a una completamente connessa¹⁶.

Per il resto l'equazione è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann [EtB]_X con microstato $\mathbf{X}_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione [RI]_S e nucleo d'interazione nella [Ber]_X costante $\mu \equiv D_N/N^2 = \bar{D}_N$.

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla [Eg]: riassume l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente \bar{D}_N il quale, dunque, ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la S₁.

Analisi della S1, S2 e S3

Visto che vale la S₁ si può partire dalla (3.36) nella quale la densità media (3.30) diventa per S₂

$$\bar{f}(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(s,t) \stackrel{S2}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{I}} f(s,t) = f(s,t),$$

¹⁵ Tale risultato implica anche che un nucleo di collisione unitario nella [EtB]_X è il corrispettivo di una matrice unitaria nella [EtB]_S^A.

¹⁶ Difatti D_N è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore proprio N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

ossia la \bar{f} coincide con quella di tutti gli agenti¹⁷, essendo questi, appunto, indistinguibili.

In tal modo la (3.36) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle}{2} f f_* ds ds_*,$$

che unita all' S_3 porta all'equivalenza

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f_* ds ds_* = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f_* ds ds_*,$$

dalla quale si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi f ds = \int_{\mathbb{R}_+^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f_* ds ds_*.$$

Quest'equazione, come per gli altri casi, è analoga alla classica equazione di tipo Boltzmann simmetrica (3.19) con microstato $\mathbf{X}_t \equiv S_t$ scalare, regole d'interazione $[RI]_S$ e nucleo d'interazione nella $[Ber]_X$ unitario $\mu \equiv 1$.

¹⁷ Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente col limite $N \rightarrow \infty$, sempre ben approssimabile nei casi classici con un numero di agenti $N \gg 1$ [come lo studio di un gas].



4

SIMULAZIONI

In questo capitolo si applica tutta la teoria affrontata in quello precedente. Innanzitutto si descrive l'algoritmo con cui sono stati svolte le simulazioni; quindi si spiegano le formule che definiscono i grafici per analizzare i risultati per poi motivare rapidamente il perché le fluttuazioni possono [anzi devono] essere trascurate. Per le simulazioni si propongono varie leggi d'emigrazione che studiate tramite dei studi parametrici, cercando successivamente d'interpretare cosa queste dicono sul fenomeno della migrazione in sé. Infine si mostra brevemente una simulazione per l'Italia, confermando che i risultati migliorano col numero d'agenti.

4.1 METODO MONTE CARLO

Nel contesto delle TCSMA l'obiettivo, com'è chiaro dal Cap. 3, è quello di ricavare la densità $f(\mathbf{x}, t)$ nella $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$ al variare del tempo. Si potrebbe allora pensare di discretizzare quest'ultima equazione mediante il Metodo delle Differenze Finite, degli Elementi Finiti o dei Volumi Finiti; tuttavia, vi sono due principali problemi:

1. l'impossibilità, in generale, di ricavare la forma forte della $[\text{EtB}]_{\mathbf{x}}$, specie nel caso di $[\text{RI}]_{\mathbf{x}}$ non lineari;
2. anche ipotizzando di trovare la forma forte a cui applicare i precedenti metodi, la sua natura integro differenziale la rende complessa da manipolare dato che l'operatore collisionale¹, come

$$Q(f, f)(\mathbf{v}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f(\mathbf{v}', t) f(\mathbf{v}'_*, t) - f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t)) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*$$

nella (3.15), dipende dalla densità medesima.

Per tali ragioni si procede in maniera più semplice: conoscendo $[\text{AR}]_{\mathbf{x}}$, che governa le interazioni binarie tra agenti, si possono quindi direttamente simulare tutte le molteplici collisioni mediante un metodo di Monte Carlo di tipo Nanbu-Babovsky, descritto nel dettaglio nell'Alg. 1 nel quale $T > 0$ è il tempo finale di simulazione, mentre P è la popolazione totale.

Osservazione 4.1. Nella linea 18, \bar{l} è una densità arbitraria: va intesa come \bar{f} se l'approccio è esatto e come \bar{g} se è approssimato.

Osservazione 4.2. Più in generale, nella linea 1, S_0 si può campionare da una densità \bar{l}_0 iniziale; tuttavia non conoscendone alcuna per la distribuzione della popolazione, si è deciso di definire S^0 come un vettore uniforme rispetto a una popolazione massima P iniziale.

¹ Vale a dire la parte integrale della forma forte dell'equazione di tipo Boltzmann, in genere scritta a secondo membro.

Algoritmo 1: Algoritmo [AR]_S di tipo Nanbu-Babovsky

Dati: $N \in \mathbb{N}_+$, $\Delta t \leq 1$, $\sigma, T > 0$, P, A e B ;

- 1 $S^0 \leftarrow (s_1^0, s_2^0, \dots, s_N^0) \equiv (P/N)\mathbf{1} \in \mathbb{R}_+^N$;
- 2 **per** $n=0, 1, 2, \dots, \lfloor T/\Delta t \rfloor - 1$ **fai**
- 3 $P \leftarrow$ permutazione indipendente di $\{1, 2, \dots, N\}$;
- 4 **per** $i=1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ **fai**
- 5 $j \leftarrow \lfloor N/2 \rfloor + i$, $s_i^n \leftarrow P(i)$ e $s_j^n \leftarrow P(j)$;
- 6 **se** *esatto* **allora**
- 7 $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(A(i, j)(\Delta t))$;
- 8 **altrimenti** # è approssimato
- 9 $\Theta \leftarrow \text{Bernoulli}(B(i, j)(\Delta t))$;
- 10 **se** $\Theta = 1$ **allora**
- 11 $E \leftarrow E(s_i^n, i, s_j^n, j)$;
- 12 $\gamma \leftarrow \text{Gamma}((1-E)^2/\sigma^2, \sigma^2/(1-E))$;
- 13 $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n(1-E+\gamma)$;
- 14 $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n + s_i^n E$;
- 15 # città interangente
- 16 # città ricevente
- 15 **altrimenti**
- 16 $s_i^{n+1} \leftarrow s_i^n$ e $s_j^{n+1} \leftarrow s_j^n$;
- 17 $S^{n+1} \leftarrow (s_1^{n+1}, s_2^{n+1}, \dots, s_N^{n+1})$;
- 18 $\bar{l}(s, (n+1)\Delta t) \leftarrow$ istogramma di S^{n+1} ;

4.2 RAPPRESENTAZIONE DEI RISULTATI

Per analizzare i risultati delle simulazioni è opportuno descrivere nel dettaglio le funzioni usate per descriverli; per farlo, però, si devono prima approfondire le conseguenze della natura stocastica dell'Alg. 1 e la struttura dei risultati. Verso la fine, si motiva anche l'omissione delle fluttuazioni γ .

4.2.1 Intervalli di confidenza

Innanzitutto simulando la [EtB]_S^A mediante Alg. 1, e quindi l'algoritmo [AR]_X, si sta introducendo nei risultati un rumore di natura stocastica: più simulazioni daranno risultati diversi per cui la singola non ha rilevanza statistica; bisogna cioè calcolarne molteplici e valutare gl'intervalli di confidenza per conoscere l'incertezza sulla stima della media.

Sia $R \in \mathbb{N}_+$ il numero di simulazioni eseguite e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^R$ il vettore aleatorio della popolazione di una città relativa a ciascuna simulazione.

Ipotesi 4.1 (Numero di simulazioni). In questo elaborato si assume $R = 100$ per avere un numero statisticamente significativo di dati.

Per l'Alg. 1 le componenti (S_1, S_2, \dots, S_R) di \mathbf{S} sono indipendenti e identicamente distribuite dalla densità q , proprietà che permette di definire

$$\bar{S} \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R S_r \quad \text{e} \quad V \equiv \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (S_r - \bar{S})^2,$$

rispettivamente la media e la varianza campionarie. Allora, data μ la vera² media della densità l , la distribuzione T di Student con parametro $R-1$ si scrive

$$T = \frac{\bar{S} - \mu}{\sqrt{V/R}} \sim \text{Student}(R-1).$$

Da questa si può definire l'intervallo di confidenza [simmetrico] con livello di confidenza α ponendo

$$\mathbb{P}\left(-t_{R-1}^{\alpha/2} \leq T \leq t_{R-1}^{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (4.1)$$

ove $t_{R-1}^{\alpha/2} \in \mathbb{R}$ è quel valore reale tale che

$$\mathbb{P}\left(T < t_{R-1}^{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Esplicitando la T nella (4.1) e isolando la media μ si ha

$$\mathbb{P}\left(\bar{S} - t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}} \leq \mu \leq \bar{S} + t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}}\right) = 1 - \alpha,$$

da cui

$$IC_R^\alpha(\mathbf{S}) \equiv \left[\bar{S} - t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}}, \bar{S} + t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{V}{R}} \right]$$

è la stima intervallare che definisce l'intervallo di confidenza ricercato, esprimibile anche più compattamente come

$$IC_R^\alpha(\mathbf{S}) \equiv \bar{S} \pm t_{R-1}^{\alpha/2} \sqrt{V/R}. \quad (4.2)$$

Ipotesi 4.2 (livello di confidenza). Si sceglie $\alpha \equiv 0.05$ così d'avere un intervallo con livello di confidenza 0.95.

Il significato dell'intervallo di confidenza in essenza è l'errore statistico commesso: esso valuta quanto è probabile che la stima intervallare (4.2) contenga il parametro μ ; in altre parole IC_R^α misura l'incertezza sulla stima della media: preso un campione \mathbf{s} , più l'intervallo di confidenza è esteso più la media campionaria \bar{s} è una stima incerta dell'effettiva media μ ; viceversa più è stretto, più la stima \bar{s} è precisa nel senso che μ si trova in un intorno piccolo della media campionaria. Sotto questo punto di vista è concettualmente analogo alla precisione di uno strumento di misura.

Osservazione 4.3. La stima intervallare (4.2) appena ricavata vale tanto per il vettore aleatorio \mathbf{S} che per le sue realizzazioni \mathbf{s} , le quali sono, appunto, il risultato delle R simulazioni.

4.2.2 Struttura dei dati

I dati presentano una struttura di un tensore del quart'ordine $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^{N_f \times 2 \times N \times R}$ i cui indici hanno il seguente significato

$$s_{i,r}^{n,a} \begin{cases} n = \text{istante temporale,} & a = \text{tipo di simulazione,} \\ i = \text{indice della città,} & r = \text{numero della simulazione.} \end{cases}$$

L'istante temporale è definito tramite tre parametri in \mathbb{N}_+ :

² Vale a dire μ non è una variabile aleatoria ma l'esatto parametro della media di l .

- ◇ $N_t \equiv \lfloor T/\Delta t \rfloor$ è il numero totale di tempi simulati;
- ◇ $N_s \ll N_t$ è il numero di catture dai tempi simulati;
- ◇ $N_f < N_s$ è il numero di tempi ridotti dalle catture.

Sia le catture che la riduzione sono campinate in intervalli equispaziati con passi

$$\Delta s = N_t/N_s \quad \text{e} \quad \Delta f = N_s/N_f$$

ove si suppone, per semplicità, che N_s e N_f siano divisori ordinatamente di N_t e N_s , da cui

$$N_t/N_s - \lfloor N_t/N_s \rfloor = 0 \quad \text{e} \quad N_s/N_f - \lfloor N_s/N_f \rfloor = 0,$$

e ugualmente si assume per Δt e T .

Tramite l'Alg. 1 si simulano in totale N_t tempi con passo Δt di cui N_s sono salvati nel tensore $\mathfrak{s} \in \mathbb{R}_+^{N_s \times 2 \times N \times R}$ delle catture:

$$\mathfrak{s}_{:,r}^{n,a} \equiv \mathcal{S}_{:,r}^{n\Delta s,a} \quad \forall n, \forall a, \forall r,$$

dove $\mathcal{S}_{:,r}^{n\Delta s,a}$ va intesa come il vettore delle popolazioni predette nell' r -esima simulazione esatta, se $a=1$, o approssimata, se $a=2$; successivamente si convolve \mathfrak{s} rispetto all'indice del tempo:

$$s_{i,r}^{n,a} \equiv \frac{1}{N_f} \sum_{j=1}^{N_f} \mathfrak{s}_i^{(n-1)N_f+j,a} r, \quad \forall n, \forall a, \forall i, \forall r,$$

vale a dire si mediano ogni Δf elementi delle N_s catture. Tale mollificazione è necessaria per rendere \mathfrak{s} meno rumoroso rispetto a \mathfrak{s} e quindi più leggibile una volta raffigurato.

Per quanto riguarda gl'istanti temporali considerati, si hanno tre forme a seconda di come s'intende l'indice n :

$$\begin{aligned} t_n &= n\Delta t, & \forall n \in \{1, 2, \dots, N_t\}, \\ t_n^s &= t_n \Delta s, & \forall n \in \{1, 2, \dots, N_s\}, \\ t_n^f &= t_n^s \Delta f, & \forall n \in \{1, 2, \dots, N_f\}, \end{aligned}$$

rispettivamente per i tempi discretizzati, campionanti e ridotti; a prescindere vale comunque $t_{N_t} = t_{N_s}^s = t_{N_f}^f = T$.

Osservazione 4.4. I parametri temporali N_t , N_s ed N_f non contano il tempo iniziale perché fa riferimento alla distribuzione iniziale $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}_+^N$.

Ipotesi 4.3. In questa trattazione si considerano $N_f = 50$, $N_s = 1000$ mentre N_t viene scelto per essere poco superiore al tempo di convergenza della simulazione, se i risultati convergono, ma sicuramente è un multiplo di 10 per garantire che N_s sia un suo divisore.

Osservazione 4.5. Per la maggior parte dei grafici si considera esclusivamente la distribuzione al tempo finale T senza convoluzione, cosicché, per leggerezza di notazione, si può impropriamente denotare con $\mathbf{s}^T \in \mathbb{R}_+^{2 \times N \times R}$ il tensore del terz'ordine tale che $\mathbf{s}^T \equiv \mathfrak{s}^{N_s}$.

4.2.3 Definizione dei grafici

Istogrammi

I primi grafici considerano gl'istogrammi [normalizzati] della distribuzione al tempo finale T .

Si inizia considerando il massimo e il minimo elemento del tensore \mathbf{s}^T ,

$$s_{\max} \equiv \max_{a,i,r} s_{i,r}^{T,a} \quad \text{e} \quad s_{\min} \equiv \min_{a,i,r} s_{i,r}^{T,a},$$

coi quali si può definire una griglia comune equispaziata su cui costruire gl'istogrammi. Siano N_c il numero di intervalli della griglia, ossia il numero di classi, allora definita Istogramma: $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_c}$ come la funzione che restituisce i valori [normalizzati] delle classi dell'istogramma, il tensore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}_+^{2 \times N_c \times R}$ si scrive

$$\mathbf{h}_{:,r}^a \equiv \text{Istogramma}(\mathbf{s}_{:,r}^{T,a}), \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

Valutati gl'intervalli di confidenza

$$\text{IC}_R^{0.05}(\mathbf{h}_c^a) = \bar{h}_c^a \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v_c^a}{R}}, \quad \forall a \text{ e } \forall c,$$

si possono rappresentare con \bar{h}^a l'istogramma medio della simulazione esatta e approssimata, e con $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{v_c^a/R}$ l'errore stocastico sulle stime dei valori medi delle classi.

Lognormale bimodale

Per quanto riguarda i fittaggi lognormali bimodali la logica è simile agl'istogrammi: sia

$$\mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{:,r}^{T,a}): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

la densità di una distribuzione lognormale bimodale, con densità (1.4), fittata dal vettore $\mathbf{s}_{:,r}^{T,a}$ e sia

$$\mathcal{L}(x; \mathbf{s}^{T,a}): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^R$$

la funzione vettoriale tale che

$$\mathcal{L}(x; \mathbf{s}^{T,a}) \equiv \left[\mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{:,1}^{T,a}) \quad \mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{:,2}^{T,a}) \quad \cdots \quad \mathcal{L}(x; \mathbf{s}_{:,R}^{T,a}) \right]^T,$$

che in essenza raccoglie puntualmente tutt'i fittaggi in un unico vettore. Allora gl'intervalli di confidenza hanno forma

$$\text{IC}_R^{0.05}(\mathcal{L}(x; \mathbf{s}^{T,a})) = \bar{\mathcal{L}}^a(x) \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v^a(x)}{R}}, \quad \forall x \in [s_{\min}, s_{\max}] \text{ e } \forall a,$$

in cui, come prima, $\bar{\mathcal{L}}^a(x)$ è la funzione media mentre $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{v^a(x)/R}$ la sua incertezza stocastica.

Osservazione 4.6. Essendo x continuo, l'insieme degl'intervalli di confidenza forma per le funzioni un fascio di confidenza.

Si nota, in conclusione, che i tre grafici sono in scala semilogaritmica per far emergere la distribuzione normale dalla lognormale bimodale.

Funzione di ripartizione empirica

La distribuzione di Pareto è fittata a partire dalla funzione di ripartizione complementare (FRC) empirica che quindi va prima analizzata, ma solo nella coda della distribuzione della popolazione.

Il dominio in questo caso viene definito mediante l'ultimo quartile, ossia quel valore $s_{3/4}$ tale che $\mathbb{P}(S \leq s_{3/4}) = 3/4$, data una qualunque variabile aleatoria S ; ciò corrisponde nella pratica a trovare quell'elemento di $\mathbf{s}_{i,r}^{T,a}$ tale che

$$\left| \left\{ s_{i,r}^{T,a} \geq s_{3/4} \mid i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\} \right| = \left\lceil \frac{N}{4} \right\rceil, \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

che a parole vuol dire che *almeno* $1/4$ di tutti gli elementi di $\mathbf{s}_{i,r}^{T,a}$ sono superiori a $s_{3/4}$. Allora l'intervallo $[s_{3/4}, s_{\max}]$ caratterizza la coda.

La FRC empirica, che approssima la FRC $\mathbb{P}(S > x)$, si scrive

$$\mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{i,r}^{T,a}) \equiv 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{[0,x]}(s_{i,r}^{T,a}), \quad \forall a \text{ e } \forall r, \quad (4.3)$$

dove $\chi_{[0,x]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ è la funzione indicatrice dell'insieme $[0, x]$:

$$\chi_{[0,x]}(w) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } w \in [0, x], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tuttavia, siccome la (4.3) dev'essere valutata in $x \in [s_{3/4}, s_{\max}]$, e in particolare nel tensore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2 \times N_{1/4} \times R}$ di \mathbf{s} ristretto alla coda

$$\mathbf{p}_{i,r}^a \equiv s_{N-N_{1/4}+i,r}^{T,a} \quad \forall a, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_{1/4}\} \text{ e } \forall r$$

nel quale $N_{1/4} \equiv \lceil N/4 \rceil$, vale il seguente riscalamiento:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{i,r}^{T,a}) &= 1 - \frac{N - N_{1/4}}{N} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_{1/4}} \chi_{[0,x]}(s_{N-N_{1/4}+i,r}^{T,a}) \\ &= \frac{N_{1/4}}{N} \left[1 - \frac{1}{N_{1/4}} \sum_{i=1}^{N_{1/4}} \chi_{[0,x]}(p_{i,r}^{T,a}) \right] = \frac{N_{1/4}}{N} \mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{i,r}^a), \quad \forall a \text{ e } \forall r, \end{aligned}$$

Vale a dire che $\mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{i,r}^a)$ è uguale a $\mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{i,r}^{T,a})$ a meno di un riscalamiento $N_{1/4}/N$. Tuttavia l'indice di Pareto è invariante rispetto ai riscalamenti:

Osservazione 4.7. In scala logaritmica la (1.2) si scrive

$$\log(R) = \log(c) - \beta \log(s),$$

che equivale a una retta traslata di $\log(c)$; indicando con R' il rapporto R/c segue

$$\log(R') \equiv \log(R) - \log(c) = -\beta \log(s),$$

per la quale il coefficiente di Pareto β è invariato.

Da quest'osservazione si può pertanto scegliere $\mathcal{F}(x; \mathbf{s}_{i,r}^{T,a})$ in scala logaritmica per una maggiore leggibilità dei valori i quali altrimenti, con $\mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{i,r}^a)$,

sarebbero bassi. L'uso di tale scala introduce però un lieve problema: l'ultimo elemento $p_{N_{1/4},r}^a$ ha ordinata nulla ed è dunque non visibile; per ovviare il problema si può traslare la FRC empirica in scala lineare

$$\mathcal{F}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a) + \frac{1}{2N_{1/4}}, \quad \forall a \text{ e } \forall r, \quad (4.4)$$

ciò corrisponde in scala logaritmica a una traslazione non uniforme dei valori che quindi vengono falsati, seppure di poco essendo $1/2N_{1/4}$ una quantità piccola; per tale ragione tale modifica è valida *solo graficamente* e non per il calcolo dell'indice di Pareto.

Di conseguenza, nel complesso, la FRC empirica è raffigurata in scala logaritmica dal diagramma a dispersione delle coppie

$$\left(\frac{N}{N_{1/4}} \mathcal{F}(\bar{p}_i^a; \mathbf{s}_{\cdot,r}^a) + \frac{1}{2N_{1/4}}, \bar{p}_i^a \right) = \left(\mathcal{F}(\bar{p}_i^a; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a) + \frac{1}{2N_{1/4}}, \bar{p}_i^a \right) \quad \forall a \text{ e } \forall i,$$

ove \bar{p}_i^a viene dagli intervalli di confidenza

$$IC_R^{0.05}(\mathbf{p}_i^a) = \bar{p}_i^a \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v_i^a}{R}}, \quad \forall a \text{ e } \forall i.$$

Osservazione 4.8. Si noti che, contrariamente ai casi precedenti, l'intervallo di confidenza è orizzontale e non verticale; difatti l'immagine della FRC empirica è invariata rispetto alle simulazioni che modificano solo le popolazioni dei centri maggiori, ossia l'ascissa della FRC empirica.

Pareto e relativo indice

Per quanto riguarda il fittaggio della distribuzione di Pareto il ragionamento è analogo a quello visto per la lognormale bimodale: sia

$$\mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,r}^a): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \forall a \text{ e } \forall r,$$

la densità di distribuzione di Pareto, con FRC (1.2), fittata dal vettore $\mathbf{p}_{\cdot,r}^a$ e sia

$$\mathcal{P}(x; \mathbf{p}^a): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^R$$

la funzione vettoriale tale che

$$\mathcal{P}(x; \mathbf{p}^a) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,1}^a) & \mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,2}^a) & \cdots & \mathcal{P}(x; \mathbf{p}_{\cdot,R}^a) \end{bmatrix}^\top.$$

Allora gl'intervalli di confidenza hanno forma

$$IC_R^{0.05} \left(\frac{N}{N_{1/4}} \mathcal{P}(x; \mathbf{p}^a) \right) = \bar{\mathcal{P}}^a(x) \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v^a(x)}{R}}, \quad \forall x \in [s_{3/4}, s_{\max}] \text{ e } \forall a,$$

ove $N/N_{1/4}$ è il fattore di riscaldamento descritto nel § 4.2.3 necessario per confrontare l'adattamento colla FRC empirica.

Osservazione 4.9. È fittando i dati \mathbf{p} alla distribuzione di Pareto che si ricava il relativo indice β , non dalla FRC empirica: ecco perché, essendo puramente grafiche, le modifiche nella (4.4) sono tollerabili.

1087 *Evoluzione della taglia media*

1088 Si esprima con $\bar{s} \in \mathbb{R}_+^{N_f \times 2 \times R}$ il tensore delle taglie medie rispetto ai nodi

$$\bar{s}_r^{n,a} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_{i,r}^{n,a}, \quad \forall n, \forall a \text{ e } \forall r,$$

1089 allora gl'intervallo di confidenza di \bar{s} sono

$$IC_R^{0.05}(\bar{s}^{n,a}) = \bar{s}^{n,a} \pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{\frac{v^{n,a}}{R}}, \quad \forall n \text{ e } \forall a.$$

1090 L'andamento della taglia media totale è raffigurato interpolando linearmente
1091 le coppie

$$(t_n^f, \bar{s}^{n,a}), \quad \forall n \text{ e } \forall a,$$

1092 a istanti temporali contingui; lo stesso vale per gli estremi degl'intervalli di
1093 confidenza $\pm t_{R-1}^{0.025} \sqrt{v^{n,a}/R}$, che quindi diventano un fascio di confidenza.

1094 *Taglie medie vs gradi*

1095 S'indichi ora con $\bar{s} \in \mathbb{R}_+^{2 \times R}$ il tensore delle taglie medie rispetto alle simula-
1096 zioni

$$\bar{s}_i^a \equiv \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R s_{i,r}^{T,a}, \quad \forall a \text{ e } \forall i,$$

1097 allora dalle coppie

$$(k_i, \bar{s}_i^a), \quad \forall a \text{ e } \forall i,$$

1098 si può definire il grafico a dispersione che lega la taglia media tra tutte le
1099 simulazioni di un nodo al suo grado.

1100 **Osservazione 4.10.** In questo caso non si disegnano gl'intervalli di confiden-
1101 za erché il grafico è già molto denso e aggiungere ulteriori barre vertica-
1102 li/orizzontali lo renderebbe difficilmente leggibile.

1103 *Evoluzioni delle taglie medie delle classi dei gradi*

1104 Sia $\mathcal{K} \subset \{1, 2, \dots, N\}$ l'insieme dei gradi distinti di \mathbf{k} , si denoti con $\bar{s} \in \mathbb{R}^{N_f \times 2 \times |\mathcal{K}|}$
1105 il tensore

$$\bar{s}_k^{n,a} \equiv \frac{1}{|\mathcal{J}_k|} \sum_{i \in \mathcal{J}_k} \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R s_{i,r}^{n,a}, \quad \forall n, \forall a \text{ e } \forall k,$$

1106 ove \mathcal{J}_k viene dalla (3.32) e rappresenta l'insieme degl'indici con grado k .
1107 Pertanto interpolando linearmente le coppie

$$(t_n^f, \bar{s}_k^{n,a}), \quad \forall n, \forall a \text{ e } \forall k,$$

1108 a istanti temporali contingui, si può rappresentare l'andamento temporale
1109 della popolazione media della classe k -esima tra tutte le simulazioni.

1110 Si conclude notando che non si disegnano gl'intervalli di confidenza per
1111 la medesima ragione chiarita nell'Oss. 4.10.

4.2.4 Sulle fluttuazioni γ

4.3 REGOLE D'EMIGRAZIONE

s e s_* vanno intese come la città interagente e ricevente rispettivamente

La scelta di $E(s, s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione.

Si vuole evitare lo spopolamento delle città a causa delle fluttuazioni nella (3.25) dato che nella (4.5) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti

Infine si avvisa che per tutte le regioni italiane, Italia inclusa, sono stati ottenuti analoghi risultati a quelli venturi della Sardegna; questa è la ragione per cui in questo paragrafo ci si concentrerà solo su quella regione, sebbene alcuni sono analizzati anche per l'Italia alla fine.

4.3.1 Regola taglia

Una prima possibilità consiste nella

$$E(s, s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (4.5)$$

che in essenza è la [9, (2.2), § 2, p. 223] modificata mediante la [9, (4.5), § 4, p. 228], ossia è una funzione di Hill di ordine α , in cui v è un tasso di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- ◇ $\lambda \in (0, 1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città più popolate riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- ◇ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche e non lineari, a causa della (4.5).

4.3.2 Regola taglia-gradì

4.3.3 Regola frazionata

4.3.4 Regola taglia-forza

4.3.5 Interpretazioni

In poche parole la (4.5) descrive la tendenza degli individui di aggregarsi per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

4.3.6 Il caso dell'Italia



5

CONCLUSIONI

1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa della rete statica.
3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.



1150

APPENDICE

1151

A CODICE



1152

1153
1154
1155
1156
1157
1158
1159
1160
1161

ELENCO DELLE FIGURE

Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	2
Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalen- te forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d’adiacenza.	5
Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.	9
Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si ri- manda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] re- lativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	11
Figura 3.1	Schema riassuntivo del § 3.3.2.	36



1162

ELENCO DELLE TABELLE

1163

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le
linee barrate corrispondono a dati trascurati. 8

1164

1165

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 9



BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berliant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélemy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat’s law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] International Standards Organisation. *ISO 80000-3 Quantities and units—Part 3: Space and time*.
- [11] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021). URL: <https://arxiv.org/abs/2104.12107>.
- [13] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025). URL: <https://arxiv.org/abs/2503.11554>.
- [14] Marc Barthélemy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.

- 1207 [15] Nurisso, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-
1208 based kinetic models: Emergence of a statistical description of the gra-
1209 ph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–
1210 22. DOI: [10.1017/S0956792524000020](https://doi.org/10.1017/S0956792524000020).
- 1211 [16] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:
1212 kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 1213 [17] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An
1214 introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.