

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Ingegneria Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Modellizzazione della distribuzione della popolazione tra città su reti spaziali mediante la teoria cinetica dei sistemi multiagente



Relatori

prof. Andrea Tosin
prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Valerio Taralli

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2025-2026

Ai miei genitori,
Elisabetta e Marco

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	NOTE DI TEORIA DEI GRAFI	9
2.1	Definizioni miscellanee	9
2.2	Reti e città	10
2.3	Cenni sui dati	11
3	TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE	15
3.1	Definizioni preliminari di probabilità	15
3.2	Descrizione cinetica classica	18
3.2.1	Equazione di Boltzmann omogenea	18
3.2.2	Equazione di Boltzmann disomogenea	22
3.2.3	Equazione di tipo Boltzmann omogenea	24
3.3	Descrizione cinetica urbana su reti	25
3.3.1	Impostazione	25
3.3.2	Algoritmi d'interazione	26
3.3.3	Interazioni azione-reazione	27
3.4	Derivazione dell'equazioni cinetiche	27
3.4.1	Derivazione esatta	27
3.4.2	Interazioni tra città	29
3.4.3	Derivazione approssimata	32
3.5	Nesso discreto-continuo	32
3.5.1	Ipotesi semplificative	32
3.5.2	Analisi della IS ₁	32
3.5.3	Analisi della IS ₂	33
3.5.4	Analisi della IS ₁ , IS ₂ e IS ₃	33
4	SIMULAZIONI	35
4.1	Premesse	35
4.1.1	Metodo Monte Carlo	35
4.1.2	Fluttuazioni	35
4.1.3	Grafici	35
4.2	Leggi d'emigrazione	35
4.2.1	Popolazione	35
4.2.2	Popolazione-Connettività	35
4.2.3	Popolazione-Connettività frazionata	35
4.2.4	Popolazione-Forza	35
4.3	Interpretazione	35
5	CONCLUSIONI	37
APPENDICE		39
A	Codice	39

1

INTRODUZIONE

Lo studio della distribuzione della popolazione tra le città è stato un fenomeno già analizzato [sporadicamente] in passato. Il primo fu Auerbach [1] che all'inizio del 19-esimo secolo notò una caratteristica poi formalizzata successivamente da Zipf¹ [16] quasi cinquant'anni dopo, seppure inizialmente in un contesto linguistico; difatti la legge di Zipf è una legge empirica di forma

$$f \propto \frac{1}{r} \quad \text{ove} \begin{cases} f \text{ è la frequenza della parola,} \\ r \text{ è il suo rango nella classifica;} \end{cases} \quad (1)$$

per dare un esempio concreto, se la 10 parola più frequente compare 2000 volte allora esiste una costante C tale che $2000 \approx C/10$. La stessa legge descritta in (1) si può ritrovare in molt'altri contesti, tra i quali figura la distribuzione della popolazione tra le città se si in luogo di f la popolazione t [16, Fig. 9-2, p. 375] (t sta per *taglia*); tuttavia ciò è vero solo qualora $t \gg 1$, ossia nella coda della distribuzione, contrariamente al contesto linguistico originale di Zipf ove (1) vale sempre.

Piú in generale la legge [empirica] di Zipf può essere descritta da una distribuzione di Pareto: sia T la variabile aleatoria legata alla taglia delle città e sia $f_T(t)$ la sua funzione di densità di probabilità², per la quale $f_T(t)dt$ indica il numero di città con $t \in (t, t+dt)$, allora si dice che T segue una distribuzione di Pareto se soddisfa

$$R(t) \approx \frac{1}{t^p} \quad \text{se } t \gg 1, \quad \text{ove } R(t) = \int_t^{+\infty} f_T(\tau)d\tau, \quad (2)$$

che altro non è che la funzione di ripartizione complementare di T , la quale rappresenta matematicamente il numero di città con popolazione maggiore o uguale a t ; si indica con $R(t)$ perché è analoga al rango nella (1) una volta che s'impone l'indice di Pareto p unitario.

Piú recentemente [7, 8] si è scoperto che al di fuori della coda la $f_T(t)$ è ben fissata dalla distribuzione lognormale con funzione di distribuzione di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{ove } X \sim \text{Lognormale}(\mu, \sigma). \quad (3)$$

Come suggerisce il nome, la peculiarità di tale distribuzione è che vale $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ (Fig. 1.1) in cui $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ indica la distribuzione gaussiana.

¹In realtà, come Zipf stesso ammette [16, p. 546], non fu il primo a scoprire tale legge; in ogni caso la popolarizzò a tal punto che oggi è conosciuta col suo nome.

²Affinché $f_T(t)$ esista rigorosamente anche supporre che sia assolutamente continua ma in questa introduzione non è necessario entrare nei dettagli, per i quali si rimanda alla § 3.

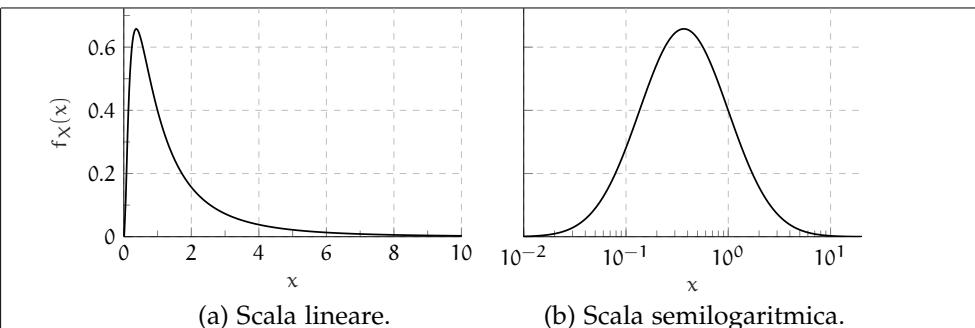


Figura 1.1: Funzione Lognormale(0,1).

Perdipiú da Gualandi *et al.* [8, 9] ci si è poi resi conto che per fissare l’intera distribuzione è sufficiente considerare una lognormale bimodale, vale a dire una combinazione convessa della (3)

$$f_T(t) = \xi f_T^1(t) + (1 - \xi) f_T^2(t), \quad (4)$$

ove $\xi \in [0, 1]$ è un parametro da fissare tanto quanto le medie e le varianze associate a $f_T^1(t)$ e $f_T^2(t)$ per un totale di 5 parametri.

Pertanto l’obbiettivo di questa tesi è il seguente: si vuole simulare attraverso la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) le interazioni tra città su un grafo spaziale, tentando di riprodurre una distribuzione della popolazione con caratteristiche analoghe a quelle realmente misurate (principalmente corpo lognormale e coda di Pareto); una volta raggiunto questo scopo si potrà poi meditare sulle implicazioni della legge d’interazione riguardo al fenomeno dell’emigrazione, che è alla base delle interazioni tra città.

Si sottolinea che qui le città verranno invece considerate come agenti, caratterizzati dalla loro popolazione, che interagiscono attraverso la struttura sottostante di un grafo [spaziale]; tale descrizione, salvo il grafo, non è affatto dissimile a quella classica delle molecole di un gas caratterizzate dalla loro velocità e posizione.

Difatti, in letteratura, perlomeno quella a conoscenza dell’autore, non esistono articoli che trattano contemporaneamente le teorie cinetiche, la distribuzione della città e i grafi, nonostante la rappresentazione di queste su un grafo sia del tutto naturale; più nel dettaglio gli articoli in letteratura

- o applicano la TCSMA alle città senza considerare una naturale topologia sottostante [9]³ o, in senso opposto, considera la struttura da grafo senza applicare la TCSMA[3];
- altri vedono i nodi piú come luoghi ove vivono e interagiscono gli agenti, creando cosí un modello descritto da un sistema di equazioni di Boltzmann elevate e accoppiate[11];
- infine l’articolo che piú si avvicina all’obbiettivo di questa tesi, applica tuttavia la sua teoria nel contesto delle reti sociali[14].

³ In particolare [9], nonostante sia un articolo molto interessante e che giunge a conclusioni altrettanto importanti, astrae eccessivamente le interazioni tra città oltre a non definire con sufficiente chiarezza che cosa s’intende per *dintorni*.

59 Questa lacuna è probabilmente attribuibile al fatto che gli sviluppi della
60 teoria dei grafi applicata alla TCSMA sono stati piuttosto recenti e prin-
61 cipalmente concentrati sulla prospettiva nodo-luogo anziché nodo-agente.
62 Dunque l'aspetto più innovativo di questo lavoro è mostrare che la pro-
63 spettiva nodo-agente è altrettanto valida quanto quella più comune e re-
64 cente del nodo-luogo; per il resto questa tesi dev'essere considerata come
65 un'esplorazione formale applicativa con pochi approfondimenti analitici.

66 Lo scritto sarà così suddiviso: nel secondo capitolo si affronteranno breve-
67 mente e [superficialmente] alcuni concetti della teoria dei grafi, soprattutto
68 quelli pertinenti alla topologia interurbana; quindi nel terzo la TCSMA è ap-
69 profondita prima da un punto di vista classico, e poi mediata dai grafi sia
70 esattamente che approssimativamente; infine negli ultimi due si illustreranno
71 i principali risultati concludendo con delle note finali e potenziali sviluppi
72 futuri.

73 Per il lettore interessato sarà anche presente un'appendice ove il codice di
74 Python dell'implementazione è spiegato a grandi linee.

2

NOTE DI TEORIA DEI GRAFI

In questo capitolo sono prima introdotti alcuni oggetti di base della teoria dei grafi, quindi si discute la natura della rete d'interesse, infine si descrivono molto brevemente i dati usati.

2.1 DEFINIZIONI MISCELLANEE

Innanzitutto s'inizia dando la definizione di rete:

Definizione 2.1 (Grafo). Un grafo è formato dalla coppia $\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{I} è l'insieme degl'indici dei nodi mentre \mathcal{E} è l'insieme dei lati, vale a dire di coppie d'indici \mathcal{I} : due nodi $i, j \in \mathcal{I}$ sono connessi sse $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dall'insieme \mathcal{E} si può poi specializzare il concetto di grafo:

Definizione 2.2 (Grafo [in]diretto). Un grafo è indiretto sse dato $(i, j) \in \mathcal{E}$ allora $(j, i) \in \mathcal{E}$ e la direzione è trascurabile; altrimenti è detto diretto.

La trascurabilità della direzione sarà discussa poco dopo nella § 2.2, anche se è facilmente intuibile dall'esempio.

Definizione 2.3 (Matrice d'adiacenza unitaria e pesata). Sia $|\mathcal{I}|$ la cardinalità dell'insieme degl'indici, ossia il numero d'indici totali, si definiscono la matrice d'adiacenza unitaria $A \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ e pesata $W \in \mathbb{R}^{|\mathcal{I}| \times |\mathcal{I}|}$ come:

$$a_{i,j} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad w_{i,j} \equiv \begin{cases} q_{i,j} & \text{se } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

ove $q_{i,j}$ è il peso¹ associato al lato (i,j) . Si noti che per i grafi indiretti ambo le matrici risultano simmetriche.

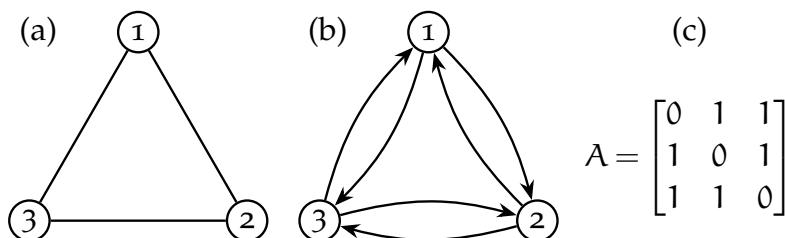


Figura 2.1: Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.

¹ Per es. la matrice d'adiacenza unitaria può essere vista come pesata ponendo $q_{i,j} \equiv 1$.

94 **Definizione 2.4** (Grado e Forza [entrate/uscente]). Dato un indice $i \in \mathcal{J}$, in
95 un grafo indiretto non pesato si definisce grado la somma

$$k_i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{j,i}; \quad (2)$$

96 d'altra parte in un grafo diretto non pesato la seconda equivalenza non è più
97 [necessariamente] valida, ragion per cui è necessario specializzare il grado
98 in entrante e uscente

$$k_i^i \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{j,i} \quad \text{e} \quad k_i^o \equiv \sum_{j=1}^{|\mathcal{J}|} a_{i,j}, \quad (3)$$

99 rispettivamente. Se il grafo è invece pesato le definizioni sono le stesse di
100 (2, 3) ma con $w_{i,j}/w_{j,i}$ in luogo di $a_{i,j}/a_{j,i}$.

101 Infine in questa trattazione vale la seguente fondamentale ipotesi:

102 **Ipotesi 2.1.** Il grafo \mathcal{G} è assunto statico: in altre parole, \mathcal{J} e \mathcal{E} sono costanti
103 nel tempo.

104 In altre parole si è solo interessati a prevedere come la popolazione si di-
105 stribuisce rispetto a una topologia prestabilita *a priori*; ovviamente si tratta
106 di una forte semplificazione dato che nella realtà la topologia delle connes-
107 sioni interurbane si è chiaramente coevoluta assieme allo sviluppo delle città
108 stesse.

109 2.2 RETI E CITTÀ

110 Dopo aver studiato un po' di teoria sui grafi sorge successivamente il pro-
111 blema di come rappresentare mediante i grafi la moltitudine di collegamenti
112 possibili tra le città

113 Difatti vi sono molti modi di rappresentare le città mediante i grafi: i
114 primi si pongono a livello *intraurbano*, o considerando le strade come lati
115 e le loro intersezioni come nodi [13, § 3.1.3.1 p. 17], o rappresentando la
116 rete di trasporto di tram, di bus e della metro [13, § 3.2.1 p. 22]; altri si
117 pongono più propriamente a livello *interurbano* prendono singolarmente in
118 considerazione varie reti dei trasporti (ferroviario [13, § 3.1.3.2 p. 17], navale
119 [13, § 3.1.4 p. 19], aereo [13, § 3.1.2 p. 13], ecc.).

120 Tuttavia, da quanto detto nella § 1, è chiaro che per predire la distribuzione
121 della popolazione tra città valgono le seguenti osservazioni:

- 122 1. tutte le rappresentazioni intraurbane vanno scartate perché sono
123 troppo fini, oltre a considerare movimenti limitatamente a una sola
124 città;
- 125 2. d'altra parte tutte quelle interurbane vanno considerate contempora-
126 neamente e non singolarmente siccome ogn'individuo può scegliere
127 diversi trasporti per muoversi.

128 Ecco perché la corretta rete da considerare è quella legata ai movimenti
 129 pendolari [13, § 3.1.3.3 p. 18; 5] tra città che mostrano olisticamente tutt'i
 130 possibili collegamenti tra le città a prescindere del trasporto scelto; inoltre
 131 essa mostra collegamenti realistici associati a movimenti quotidiani anziché
 132 straordinari (vacanze, visite mediche, ecc.).

133 Una volta fissata la rappresentazione è necessario comprendere il tipo di
 134 grafo con cui si ha a che fare. Eppure la risposta è molto semplice e im-
 135 mediata dopo una semplice osservazione: un ente, ovvero una città, può
 136 interagire con un secondo senza che questo interagisca a sua volta col pri-
 137 mo; si è dunque di fronte a un grafo diretto ma simmetrico (2.2) perché il
 138 contesto richiede di considerare la direzione d'interazione.

139 Come nota finale si osserva che questo tipo di grafo è spaziale [5, 13],
 140 ovvero i suoi nodi occupano un punto nello spazio euclideo; oltre a ciò
 141 tale osservazione è puramente formale, ma servirà successivamente quando
 142 si definiranno le leggi d'interazione. Perdipiù, contrariamente a quanto si
 143 possa pensare di primo inizialmente, tale grafo non è a invarianza di scala [2]
 144 proprio a causa della sua natura spaziale [4, 13]; ciò non esclude l'esistenza
 145 di nodi più centrali di altri, ma solo che il massimo grado di un nodo è
 146 limitato superiormente dalla natura spaziale del grafo.

147 2.3 CENNI SUI DATI

148 La matrice di pendolarismo costruita è quella fornita dall'ISTAT del 1999
 149 [10] seguendo l'esempio di [5]. I dati sono di fatto un file di testo formato da
 150 una serie di righe di 29 numeri il cui significato è spiegato dalla Tab. 2.1.

Dato	Col. iniziale	Lunghezza
Provincia di partenza	1	3
Comune di partenza	4	3
Sesso	7	1
Mezzo di trasporto	8	1
Cond.professionale	9	1
Orario di uscita	10	1
Tempo di percorrenza	11	1
Provincia di arrivo	12	3
Comune di arrivo	15	3
Numero di persone	18	12

Tabella 2.1: Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT²; le
 linee barrate corrispondono a dati trascurati.

151 I comuni considerati sono tutt'i quell'italiani (8100) nel 1999, quindi è ne-
 152 cessario estrapolare da essi le matrici di pendolarismo delle singole regioni
 153 e parallelamente quella complessiva dell'Italia.

154 Si notano tuttavia due principali difetti dei dati contenuti nel documento
 155 Pen_91It.txt:

² si v. il documento trapen91.txt per maggiori informazioni.

- 156 1. in alcune linee come comune di destinazione è segnato il codice
 157 «022008» che però non è elencato nel documento `elencom91.xls` che
 158 riassume tutti gli 8100 comuni italiani nel 1991;
 159 2. in molte linee come comune di destinazione sono segnati dei codici
 160 incompleti contenenti solo l'ultima metà (codice comune) ma non
 161 la prima (codice provincia), e questi sono in totale 8: «215», «229»,
 162 «241», «216», «203», «224», «236», «246».

163 In entrambi i casi i dati relativi [a quelli che sono potenzialmente refusi]
 164 sono stati trascurati nella corrente tesi; il primo errore è già di per sé molto
 165 raro, mentre il secondo è eccessivamente ambiguo da risolvere come si può
 166 notare dalla linea successiva relativa al codice «215»:

167 00200714212215_____1,

168 ove _ indica uno spazio, per la quale, tralasciando il fatto che vi sono in tota-
 169 le 6 città italiane colo stesso codice comunale, se ci si limita alla regione del
 170 Piemonte (vale a dire la stessa del comune di partenza «002007») esistono in
 171 realtà ben due città condividenti lo stesso codice: «001215» e «004215», ep-
 172 pure entrambe non hanno lo stesso codice provinciale («002») del comune di
 173 partenza. Da questo piccolo estratto, quindi, non si può nemmeno ipotizza-
 174 re che il codice provinciale sia lo stesso tra il comune di partenza e d'arrivo;
 175 è allora chiaro che sia impossibile scegliere la prima metà per completare il
 176 codice del comune di destinazione³.

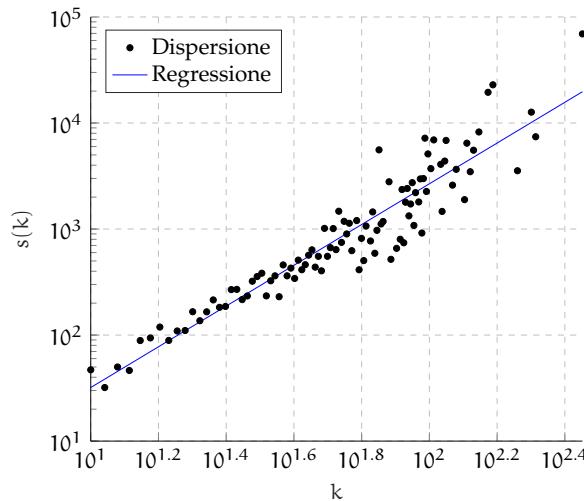


Figura 2.2: Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.

177 Infine nelle Oss.ni 2.2 e 2.3 sono stati anche riprodotti i risultati di [5] colle-
 178 seguenti osservazioni:

- 179 1. il coefficiente d'aggregazione medio $\langle C(k) \rangle = 0.453$ è quasi il doppio
 180 di quello riportato da [5, p. 911] (0.26);

3 Si potrebbe scegliere, tra tutti i comuni colo stesso codice comunale, quello che minimizza la distanza geografica (ossia euleriana) siccome le coordinate dei punti rappresentativi di ogni comune sono disponibili nell'ISTAT; in ogni caso, come si vedrà nella § 4, sono correzioni del tutto innecessarie.

- 181 2. la Fig. 2.3c rispetto alla [5, Fig. 3b] presenta sia una forma legger-
 182 mente diversa, seppure la tendenza a mezza luna sia la stessa, che
 183 limiti superiori e inferiori più estesi;
- 184 3. il coefficiente d'aggregazione pesato rappresentato nella Fig. 2.3g
 185 ha chiaramente una tendenza decrescente, anche se molto lenta, ra-
 186 gion per cui si può considerare comunque «circa costante» come
 187 afferma [5];
- 188 4. i primi due pesi più elevati, riportati nella Tab. 2.2, non corrispondo-
 189 no: ciò si può giustificare molto probabilmente come refuso da parte
 190 di [5] poiché i collegamenti «Cagliari-Sassari» e «Sassari-Olbia» so-
 191 no molto distanti geograficamente⁴, per cui è ragionevole che i flussi
 192 siano bassi.

Connessione	Peso
Cagliari-Quartu	14709
Cagliari-Selargius	7995
Assemini-Selargius	4418
Porto Torres-Sassari	4149
Cagliari-Capoterra	3865

(a) Pesi maggiori correnti.

Connessione	Peso
Cagliari-Sassari	13953
Sassari-Olbia	7246
Cagliari-Assemini	4226
Porto Torres-Sassari	3993
Cagliari-Capoterra	3731

(b) Pesi maggiori di [5]

Tabella 2.2: Confronto con [5] dei pesi maggiori.

193 Come si vedrà tra qualche capitolo, ma soprattutto perché sono davvero
 194 lievi, queste discrepanze sono irrilevanti per quanto concerne questo elabora-
 195 to. Inoltre, l'unico risultato importante recuperato è la correlazione positiva
 196 tra la forza e il grado già mostrato nella Fig. 2.2.

⁴ Il primo equivale a percorrere l'intera lunghezza dell'isola ogni giorno.

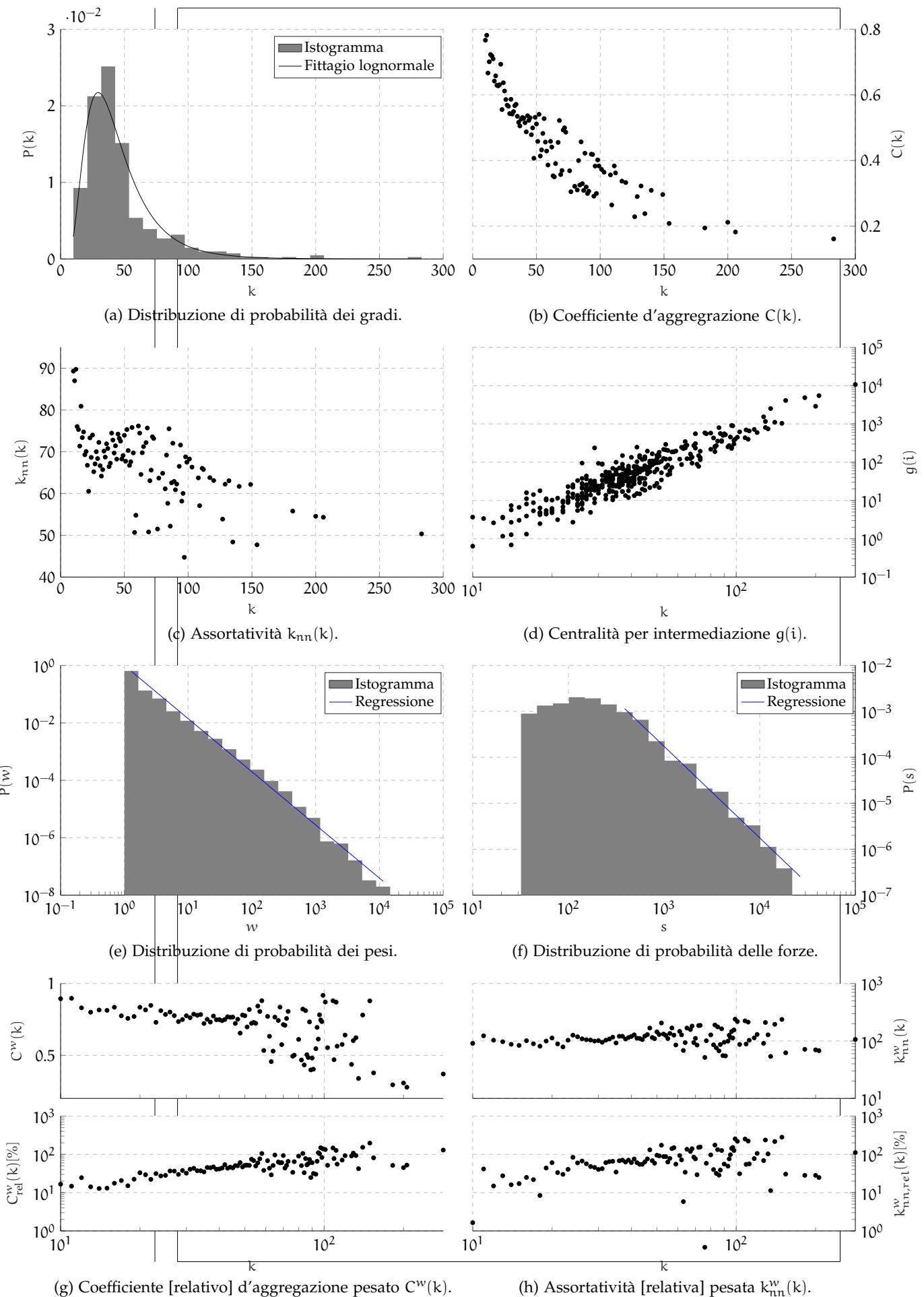


Figura 2.3: Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.

3

TEORIA CINETICA DEI SISTEMI MULTIAGENTE

In questo capitolo è discussa la Teoria Cinetica dei Sistemi MultiAgente (TCSMA) necessaria per ottenere i risultati nella § 4.

S'inizia prima dando delle nozioni generali di teoria della probabilità collegate quali si deriva successivamente la celeberrima equazione di Boltzmann a partire da una descrizione stocastica delle particelle di un gas; quindi si passa a generalizzare tali risultati per mediare le interazioni tramite una struttura topologica sottostante gli agenti, sia in modo esatto che approssimato; successivamente si descrivono le equazioni cinetiche nel caso corrente; infine si conclude analizzando le ipotesi semplificative che portano dalla presente teoria a quella classica di Boltzmann.

3.1 DEFINIZIONI PRELIMINARI DI PROBABILITÀ

Si annoverano ora alcuni concetti e risultati di teoria della probabilità avvisando, però, che per molti di essi è impossibile entrare eccessivamente nei dettagli senza spiegare un intero corso; in ogni caso si rimanda a [6] per gl'interessati.

Definizione 3.1 (Variabile aleatoria). Una variabile aleatoria (v.a.) X è una funzione misurabile $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, il cui dominio è uno spazio astratto Ω di eventi; quest'ultimo definisce a sua volta uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ composto da una σ -algebra \mathcal{F} e una misura \mathbb{P} di massa unitaria.

Definizione 3.2 (Legge di X). Sia $X \in \mathbb{R}$ una v.a. assolutamente continua, allora $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ è detta legge per X sse

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x, t) dx \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ misurabile},$$

e soddisfà la condizione di normalità

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x, t) dx = 1 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Osservazione 3.1. Nella definizione precedente si assume che la v.a. X sia assolutamente continua, in tal modo $f_X(x, t)$ è la sua derivata di Radon-Nikodym, ma la teoria sviluppata in questo paragrafo vale anche per misure più astratte rispetto le quali $f_X(x, t) dv$ va inteso come $f_X(dv, t)$. Tuttavia, nel caso in cui $f_X(x, t)$ sia non negativa e integrabile viene anche detta funzione di densità di probabilità.

Definizione 3.3 (Legge congiunta di X). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la legge congiunta di \mathbf{X} è una funzione $f_Z: \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tale che

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \int_A f_Z(x, t) dx = \int_A f_X(x, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabile},$$

229 e soddisfà la condizione di normalità

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} f_X(x, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = 1 \quad \forall t.$$

230 **Definizione 3.4** (Legge marginale di X). Siano $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

231 un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora la legge marginale di X_i
232 è la funzione $f_{X_i}: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ così definita

$$f_{X_i}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(x, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (1)$$

233 essa è a tutti gli effetti la legge della v.a. X_i secondo la Def. 3.2.

234 **Osservazione 3.2.** Nelle definizioni precedenti il tempo dev'essere visto co-
235 me un parametro che indicizza le varie leggi degli oggetti considerati; è
236 presente per essere coerenti colla corrente trattazione, si in generale si può
237 trascurare: $f_X(x)$ e $f_Z(x)$.

238 **Proprietà 3.1** (Legge congiunta di variabili aleatorie indipendenti). Siano
239 $n \in \mathbb{N}^+$ e

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

240 un vettore aleatorio assolutamente continuo, allora se tutte le variabili alea-
241 torie che lo compongono sono tra loro indipendenti allora la legge congiunta
242 di \mathbf{X} equivale alla produttoria di quelle marginali:

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\} \implies f_{\mathbf{X}} = \prod_{i=1}^n f_{X_i}.$$

243 **Definizione 3.5** (Valore atteso). Sia $X \in \mathbb{R}$ una v.a. assolutamente continua
244 e data una funzione misurabile $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ arbitraria, allora il valore atteso
245 della v.a. $\varphi(X)$ è definito come

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \equiv \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x, t) dx,$$

246 e un simile discorso vale anche per un vettore aleatorio ma con $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
247 preso $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{X})] \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

248 **Definizione 3.6** (Valore atteso condizionato). Sia $X \in \mathbb{R}$ una v.a. assolutamen-
249 te continua a media finita $\mathbb{E}[X] < \infty$ e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra, allora
250 l'attesa di X condizionata a \mathcal{G} è una v.a. Y tale che

251 AC1 $\sigma(Y) \in \mathcal{G}$, ossia Y è \mathcal{G} -misurabile e

252 AC2 per ogni $A \in \mathcal{G}$ la misura di X e Y tramite \mathbb{P} è la stessa:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y \in A)$$

253 L'insieme delle Y che soddisfanno le **AC₁** e **AC₂** sono indicate col simbolo
 254 $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ che ne è anche il suo rappresentante; in effetti una generica Y si può
 255 indicare anche direttamente come $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

256 Un'analogia definizione vale anche per i vettori aleatori e per i caso misti
 257 con X scalare e Y vettoriale.

258 **Osservazione 3.3.** Presa una v.a. $Y \in \mathbb{R}$, nella precedente definizione \mathcal{G} può
 259 essere anche la σ -algebra definita da Y :

$$\sigma(Y) \equiv \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

260 ove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borell relativa allo spazio dei numeri reali mentre
 261 $\sigma(A)$ è la più piccola σ -algebra che contiene $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

262 Un simile risultato vale anche per i vettori aleatori $Y \in \mathbb{R}^n$.

263 **Proposizione 3.1.** *Dati*

- 264 1. $n, h, k \in \mathbb{N}_+$ tali che $n = h + k$;
 - 265 2. un vettore aleatorio $Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^n$ assolutamente continuo costituito da
 266 $X \in \mathbb{R}^h$ e $Y \in \mathbb{R}^k$ con legge congiunta $f_Z(x, y)$ e marginali f_X e f_Y ;
 - 267 3. una funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e tale che $\mathbb{E}[\varphi(Z)] = \mathbb{E}[(X, Y)] < \infty$;
- 268 allora si può definire $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la seguente equazione

$$\int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (2)$$

269 che soddisfa $h(Y) \in \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]$.

270 *Dimostrazione.* Per la **AC₁** è sufficiente esplicitare la forma di $\sigma(h(Y))$:

$$\sigma(h(Y)) \equiv \sigma(Y^{-1}(h^{-1}(B)) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \sigma(Y^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^h)),$$

271 a parole si considera la controimmagine tramite Y dei borelliani filtrati da h ,
 272 ragion per cui la sigma algebra non potrà che essere contenuta in quella non
 273 filtrata.

274 Per la **AC₂** si verifica la condizione $\forall A \in \sigma(Y)$ avvalendosi della caratteriz-
 275 zazione di $h(Y)$ tramite (2):

$$\begin{aligned} \int_A h(Y) d\mathbb{P} &= \int_B h(y) f_Y(y) dy \stackrel{(1)}{=} \int_B h(y) \int_{\mathbb{R}^h} f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^h} h(y) f_Z(x, y) dx dy \stackrel{(2)}{=} \int_B \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B(y) \varphi(x, y) f_Z(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \mathbb{1}_B(Y) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_C(Z) \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P} = \int_A \varphi(X, Y) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

276 ove $B \equiv Y(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $C \equiv Z(\mathbb{R}^h \times A) \subseteq \mathbb{R}^n$ dimodoché

$$A = Y^{-1}(B) = Z^{-1}(C).$$

277 \square

Osservazione 3.4. La precedente dimostrazione svela un'interpretazione più pratica dell'attesa condizionata rispetto alla sua definizione alquanto teorica.
Si consideri la (2), allora $h(y)$ si può così riformulare:

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^h} \varphi(x, y) f_{X|Y=y}(x) dx = \mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y=y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^k, \quad (3)$$

in cui

$$f_{X|Y=y} \equiv \begin{cases} f_Z(x, y)/f_Y(y) & \text{se } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

è la legge di X condizionata dall'evento $Y=y$.

La (3), in pratica, si calcola svolgendo la media di $\varphi(X, Y)$ rispetto a X dopo aver "fissato" l'evento $Y=y$, vale a dire considerando la Y come fosse un parametro uguale a y .

Successivamente, se s'impone $A=\Omega$ (sempre lecito essendo \mathcal{G} una σ -algebra) allora dalla AC2 vale

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X, Y)|Y]], \quad (4)$$

il che significa che l'attesa di $\varphi(X, Y)$ si calcola mediando rispetto a Y la v.a. $\mathbb{E}[X|Y]$, ricavata dalla (3) ma considerando y arbitrario.

3.2 DESCRIZIONE CINETICA CLASSICA

3.2.1 Equazione di Boltzmann omogenea

Innanzitutto è necessario caratterizzare alcune proprietà del gas da modellizzare.

Ipotesi 3.1. Si consideri un gas composto da particelle che soddisfaccia le successive importanti ipotesi:

G₁ è uniformemente distribuito nello spazio cosicché in ogni punto la distribuzione statistica delle velocità è la stessa;

G₂ è rarefatto, da cui segue che solo interazioni binarie possono aver luogo o, precisamente, sono più probabili;

G₃ è composto da particelle indistinguibili e aventi ugual massa;

G₄ le collisioni sono elastiche per cui si ha conservazione dell'impulso e dell'energia esprimibile, grazie alle G₂ e G₃, binariamente come

$$v' + v'_* = v + v_*, \quad (\text{CI})$$

$$|v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2, \quad (\text{CE})$$

ove $v', v'_* \in \mathbb{R}^3$ sono le velocità poscollisionali che collidono colle velocità precollisionali $v, v_* \in \mathbb{R}^3$, delle due particelle interagenti¹.

Dalla G₄ si possono in realtà esprimere le velocità poscollisionali a partire da quelle precollisionali, definendo quelle che sono le leggi d'interazione.

¹ In questo contesto non è necessario distinguere quale delle due sia quella interagente e quale quella ricevente, contrariamente a quello delle città.

307 **Proposizione 3.2** (Leggi d'interazione). Esistono due funzioni $\psi, \psi_*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 308 lineari che soddisfanno (CI, CE) e tali che

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}'_* &= \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n},\end{aligned}\quad (5)$$

309 ove $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ è un qualunque vettore appartenente alla sfera unitaria di \mathbb{R}^3 .

310 *Dimostrazione.* Assumendo l'ansatz

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \gamma \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}, \quad (6)$$

311 in cui $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro da determinare, si può notare che la (CI) è già
 312 verificata, mentre imponendo la (CE) si ha

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}'_*|^2 &= |\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}|^2 + |\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}|^2 \\ &= (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v} - \gamma \mathbf{n}) + (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_* + \gamma \mathbf{n}) \\ &= |\mathbf{v}|^2 - 2\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 + |\mathbf{v}_*|^2 + 2\gamma(\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n}) + \gamma^2 \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 - 2\gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + 2\gamma] \\ &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_*|^2 \implies \gamma[(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \gamma] = 0,\end{aligned}$$

313 ma escludendo il caso banale di $\gamma = 0$ (nessuna interazione) si ha

$$\gamma = \Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) \equiv (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n},$$

314 per cui γ è in realtà una funzione delle velocità precollisionali; la (6) diventa
 315 allora

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [(\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'_* = \mathbf{v}_* + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}. \quad (7)$$

316 \square

317 Si noti come la precedente dimostrazione lasci arbitrario $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$, seppure
 318 da un punto di vista fisico sia ragionevole porlo parallelo al vettore passante
 319 per i centri delle particelle collidenti.

320 Si osservi come le leggi d'interazione nella 5 sono bilineari e simmetriche
 321 secondo la seguente definizione:

322 **Definizione 3.7** (Leggi d'interazione simmetriche). Due leggi d'interazione
 323 del tipo (5) si dicono simmetriche sse

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \implies \mathbf{v}' = \psi_*(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \\ \psi_*(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*) &= \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v}) \implies \mathbf{v}'_* = \psi(\mathbf{v}_*, \mathbf{v})\end{aligned}$$

324 Per proseguire è però necessaria una descrizione statistica del gas in esame:
 325 siano allora $\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^* \in \mathbb{R}^3$ le v.a. delle velocità precollisionali, di cui
 326 le \mathbf{v} e \mathbf{v}_* precedenti sono due realizzazioni, al tempo t e similmente per
 327 $\mathbf{V}'_t, \mathbf{V}'_t^* \in \mathbb{R}^3$.

328 **Osservazione 3.5.** Le v.a. \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* non sono indicizzate (per es. \mathbf{V}_t^i) proprio
 329 per l'indistinguibilità delle particelle assunta dalla G3, dalla quale si deduce
 330 anche che le leggi di \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* sono identiche:

$$f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) = f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}, t) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

331 Le leggi d'interazione nella (5) diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \psi(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V} + [(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \\ \mathbf{V}'_* &= \psi_*(\mathbf{V}, \mathbf{V}_*) \equiv \mathbf{V}_* + [(\mathbf{V} - \mathbf{V}_*) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (8)$$

332 in cui anche \mathbf{n} risulta aleatoriamente distribuito; usualmente s'ipotizza $\mathbf{n} \sim$
 333 $\mathcal{U}(\mathbb{S}^2)$, vale a dire che non vi sono direzioni preferenziali essendo queste
 334 uniformemente distribuite sulla sfera unitaria.

335 Tuttavia l'interazione tra due particelle non è detto che avvenga, aspetto
 336 formulabile introducendo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t) \quad (9)$$

337 che è una v.a. di Bernoulli, indipendente da \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_t^* , la cui probabilità è
 338 descritta da due termini:

- 339 1. la funzione $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, detta nucleo di collisione, che permette d'a-
 340 vere una maggiore espressività sulle collisioni molecolari le quali
 341 possono influenzare il tasso d'interazione tra le molecole²;
- 342 2. un passo temporale $\Delta t > 0$ per discretizzare il tempo.

343 **Osservazione 3.6.** Per definizione di Θ , deve valere $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot \mathbf{n}) \Delta t \leq 1$
 344 condizione soddisfacibile anche prendendo un passo temporale Δt adattivo;
 345 si vedrà tra poco, però, che, per quanto concerne il modello analitico, tale
 346 condizione sarà sempre verificata.

347 Colle (8, 23), lo stato dei due agenti al tempo $t + \Delta t$ successivo è dunque
 348 dato dal seguente algoritmo d'interazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{t+\Delta t} &= (1 - \Theta) \mathbf{V}_t + \Theta \mathbf{V}'_t, \\ \mathbf{V}_{t+\Delta t}^* &= (1 - \Theta) \mathbf{V}_t^* + \Theta \mathbf{V}'_t^*, \end{aligned} \quad (10)$$

349 dove l'acronimo 10 sta per «Azione-Reazione» e descrive il fatto che ogni
 350 interazione (azione) necessariamente modifica entrambi gli stati degli agenti
 351 coinvolti (reazione); in alcuni contesti [14] questa regola può essere alterata
 352 dimodoché solo il nodo interagente sia modificato portando alle interazioni
 353 «Azione-Azione».

354 L'idea successiva, al fine di ricavare un modello dell'evoluzione di f , è di
 355 mediare le 10 attraverso una funzione arbitraria $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, detta quantità
 356 osservabile, computabile dalle realizzazioni o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ o di $\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*$; pertanto
 357 una volta applicato $\varphi(\cdot)$ alle 10,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}) &= \varphi((1 - \Theta) \mathbf{V}_t + \Theta \mathbf{V}'_t), \\ \varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*) &= \varphi((1 - \Theta) \mathbf{V}_t^* + \Theta \mathbf{V}'_t^*), \end{aligned}$$

358 e mediando $\mathbb{E}[\cdot]$ si arriva a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta) \mathbf{V}_t + \Theta \mathbf{V}'_t)], \\ \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*)] &= \mathbb{E}[\varphi((1 - \Theta) \mathbf{V}_t^* + \Theta \mathbf{V}'_t^*)]; \end{aligned}$$

² Si noti come B dipenda da $(\mathbf{V}_* - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}$, termine ripreso dalla Prop. 3.2, cosa che permette d'interpretare \mathbf{n} come la direzione lungo la quale le interazioni sono più frequenti.

per espandere la media, siccome Θ dipende da $(\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*, n)$, bisogna avvalersi dell'attesa condizionata, e in particolare della Oss. 3.4, che porta a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t)], \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi((1-\Theta)\mathbf{V}_t + \Theta\mathbf{V}'_t) | \mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*, n]], \\ &= \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)(1 - B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)\Delta t)] \\ &\quad + \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}'_t)B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)]\Delta t,\end{aligned}$$

e similmente per $\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*)]$; riordinando i termini si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_{t+\Delta t}^*)] - \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t^*)]}{\Delta t} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t^*))],\end{aligned}$$

e passando formalmente al tempo continuo col limite $\Delta t \rightarrow 0^+$ ³ si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t))], \\ \frac{d\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{V}_t^*)]}{dt} &= \mathbb{E}[B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)(\varphi(\mathbf{V}'_t) - \varphi(\mathbf{V}_t^*))],\end{aligned}$$

che, dopo aver espanso i valori attesi secondo le loro definizioni, diventano

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v})) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* &= \int_{\mathbb{R}^6} \langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)(\varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v}_*)) \rangle f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,\end{aligned}\tag{11}$$

in cui

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \cdot d\mathbf{n}$$

indica la media rispetto a \mathbf{n} , $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n)$ è una forma breve per $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n)$ e si è posto $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ la cui legge congiunta è $f_V(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t)$. È infine necessario sommare le due equazioni in (11). S'inizi dal primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}^*) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v}_* = 2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \tag{12}$$

infatti dal'Oss. 3.5 le due leggi sono di fatto identiche come lo è il dominio d'integrazione, quindi basta il cambio di variabile $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ nel secondo integrale per rendersi conto dell'equivalenza. Per il secondo membro sono necessarie due ulteriori fondamentali ipotesi:

Ipotesi 3.2. Si assume che il nucleo di collisione sia una funzione pari:

$$B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n) = B((\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \cdot n) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3; \tag{13}$$

una scelta tipica è il valore assoluto $|\cdot|$: $B((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n) \equiv |(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot n|$.

³ Ciò permette di soddisfare la condizione descritta nel'3.6 per qualunque valore di $B((\mathbf{V}_t^* - \mathbf{V}_t) \cdot n)$.

Ipotesi 3.3 (*Caos molecolare*). Le particelle interagenti secondo le 10 sono campionante indipendentemente. Tal'ipotesi è piú facile da giustificare matematicamente che fisicamente perché semplifica di molto conti; in ogni caso, la G2 la corrobora poiché in un gas rarefatto è naturale che se due particelle interagiscono, prima che ricollidano, avranno perso ogni vicendevole dipendenza a causa delle innumerevoli altre interazioni colle altre particelle.

Osservazione 3.7. Dal'ipotesi 3.3, unitamente alla proprietà 3.1, si deduce che la legge congiunta del vettore aleatorio $\mathbf{V} \equiv (\mathbf{V}_t, \mathbf{V}_t^*)$ è data dal prodotto

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) = f_{\mathbf{V}_t}(\mathbf{v}, t) f_{\mathbf{V}_t^*}(\mathbf{v}_*, t) = f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^3.$$

In tal modo il termine moltiplicato a $\varphi(v_*)$ nel secondo membro della seconda equazione della (11) può essere cosí riformulato:

$$\int_{\mathbb{R}^6} \langle (\varphi(\mathbf{v})) B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \rangle f(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}_*, t) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (14)$$

seguendo la medesima logica della (12). Applicando i due risultati illustrati nelle (12, 14) si perviene finalmente all'equazione di Boltzmann omogenea assimmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \left(\frac{\varphi' + \varphi_*'}{2} - \varphi \right) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*, \quad (15)$$

ove, per brevità di notazione, si sono sottintese le dipendenze per tutte le funzioni, espresse, salvo per il nucleo di collisione, da apici ' e asterischi *. Tuttavia, qualora le leggi d'interazioni siano simmetriche secondo la Def. 3.7, come in questo caso data la Prop. 3.2, sempre con un cambio di variabili e sfruttando la parità del nucleo di collisione vale

$$\int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \varphi' \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_* = \int_{\mathbb{R}^6} (\langle B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) \varphi'_* \rangle) f f_* d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*,$$

da cui segue l'equazione di Boltzmann omogenea simmetrica in forma debole:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi f d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^6} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (\varphi' - \varphi) f f_* d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_*. \quad (16)$$

Si può anche ricavare la forma forte della (16) considerando le leggi d'interazione inverse della (5) [12, § 2.5, p. 15], ma il conto esula dagli scopi di questo elaborato; ciononostante si riporta come riferimento per la sezione a venire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*. \quad (17)$$

3.2.2 Equazione di Boltzmann disomogenea

L'equazione originariamente ricavata da Boltzmann non è la (17), bensí è quella disomogenea la cui unica differenza è la presenza di un termine avvettivo $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ a primo membro:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, n) (f' f'_* - f f_*) d\mathbf{n} d\mathbf{v}_*, \quad (18)$$

402 dove l'operatore $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ è il gradiente spaziale e la distribuzione
 403 dipende ora anche dallo spazio: $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Essa è un'equazione integro-
 404 differenziale della distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità a
 405 tempo dato.

406 Il primo membro della (18) non è altro che la derivata materiale della distri-
 407 buzione f : posto $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}_*, t) \equiv 0$, ovvero in mancanza di collisioni, l'equazione
 408 involve in una del trasporto lineare con soluzione nota.

409 **Proposizione 3.3.** *La soluzione dell'equazione del trasporto lineare*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad (19)$$

410 ha come soluzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$ in cui $f_0 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ è la distribuzione
 411 iniziale.

412 *Dimostrazione.* Si procede usando il metodo delle caratteristiche: nella (19) la
 413 velocità \mathbf{v} nell'operatore avvettivo non dipende né dallo spazio né dal tempo,
 414 quindi si possono prendere le curve $\mathbf{x}(t)$ tali che

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \implies \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t \quad (20)$$

415 dette, appunto, curve caratteristiche della (19); valutando allora la distri-
 416 buzione $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lungo di esse si può definire $\hat{f}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}, t)$ che derivata
 417 equivale a

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \implies \hat{f}(t) = \text{costante} \quad \forall t \geq 0$$

418 da cui si deduce che f è costante lungo le caratteristiche; ma dalla (20) si
 419 può scrivere, trascurando la dipendenza dal tempo, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$, dunque la
 420 soluzione in un generico punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ sarà data da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \hat{f}(t) = \hat{f}(0) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}, 0) = f_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}),$$

421 considerando nella prima uguaglianza la caratteristica che al tempo t passa
 422 per \mathbf{x} . \square

423 Ciò significa che in assenza di collisioni la distribuzione iniziale f_0 sem-
 424 plicemente trasla rigidamente nello spazio allo scorrere del tempo lungo la
 425 direzione della velocità costante \mathbf{v} , movimento che rappresenta la variazione
 426 medi statistica delle posizioni molecolari.

427 D'altra parte il secondo membro della (18) rappresenta la variazione me-
 428 dia statistica dalle velocità molecolari a causa delle collisioni (viene perciò
 429 anche chiamato operatore collisionale).

430 Pertanto la (18) descrive una chiara separazione di effetti: il primo mem-
 431 bro altera solo la posizione delle particelle per il trasporto libero, mentre il
 432 secondo comporta esclusivamente variazioni della velocità per le collisioni.

433 L'obiettivo di Boltzmann tramite la (18) era di raccordare due mondi: il
 434 mondo macroscopico, che all'equilibrio termodinamico restituisce quantità
 435 fisiche stazionarie e ben definite, e quello microscopico la cui descrizione
 436 molecolare implica una continua e caotica variazione delle stesse quantità
 437 fisiche anche in condizioni di equilibrio termodinamico (agitazione termica).

438 Ciò è stato possibile grazie all'introduzione dei momenti statistici, ossia
 439 di quantità macroscopiche calcolabili a partire dalla distribuzione f soddis-
 440 sfacente la (18); i principali sono

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{densità,} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{velocità massica,} \\ E(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \|\mathbf{v}\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia totale,} \\ e(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \int_{\mathbb{R}^3} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} && \text{energia interna,} \\ \theta(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{3} e(\mathbf{x}, t) && \text{temperatura.}\end{aligned}\quad (21)$$

441 Tali quantità sono definite da f ma questa è in genere infattibile da ricavare
 442 dalla (18), vista la difficile trattabilità analitica dell'equazione; eppure, tra-
 443 mite una sua attenta riformulazione in determinati regimi limite [12, 15], è
 444 possibile svincolarsi del tutto dall'evoluzione puntuale della f ricavando un
 445 sistema chiuso dei soli momenti (21). La convergenza di questi a un valore
 446 stazionario è il nesso tra i due mondi attraverso la descrizione mesoscopica
 447 indotta dalla distribuzione f .

448 3.2.3 Equazione di tipo Boltzmann omogenea

449 La derivazione dettagliata nel § 3.2.1 è valida in realtà per una classe di
 450 problemi molto più generali, detti di tipo Boltzmann omogenei, la cui teoria
 451 è stata Pareschi *et al.* [15]; sono chiamati così per due ragioni:

- 452 1. sono formulati per mezzo di equazioni integro-differenziali analo-
 453 ghe strutturalmente alla (16) e
- 454 2. sono applicati a contesti⁴ molto distanti da quello originale delle
 455 velocità di particelle di un gas. ;
- 456 3. non contengono

457 Si ripropongono in questo paragrafo molti risultati analoghi a quelli già
 458 visti nella § 3.2.1 senza però riscrivere tutti i passaggi.

459 Sia $\mathbf{X}_t \in I \subseteq \mathbb{R}^n$ il vettore aleatorio che descrive gli $n \in \mathbb{N}_+$ stati microscopici
 460 degli agenti di un sistema, ove il dominio I degli stati non coincide
 461 necessariamente coll'intero spazio reale \mathbb{R}^n .

462 Campionati due agenti indipendentemente (ipotesi 3.3), allora gli stati po-
 463 scollisionali (postati), \mathbf{X}'_t e \mathbf{X}^*_t , si legano con quelli precollisionali (prestati),
 464 \mathbf{X}_t e \mathbf{X}^*_t , tramite le leggi d'interazione

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'_t &= \psi(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*, \mathbf{y}), \\ \mathbf{X}^*_t &= \psi_*(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*, \mathbf{y}_*),\end{aligned}\quad (22)$$

465 ove ora $\psi, \psi_*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono generiche leggi d'interazione, non
 466 necessariamente simmetriche (si v. Def. 3.7) o lineari, mentre $\mathbf{y}, \mathbf{y}_* \in \mathbb{R}^h$ con
 467 $h \in \mathbb{N}_+$ rappresentano dei coefficienti potenzialmente stocastici.

4 Esempi importanti sono quello sociofisico, come i vari modelli sulle opinioni, ed econofisico,
 come quello qui considerato delle città

468 L'interazione tra di essi avviene secondo una v.a. di Bernoulli del tipo

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(\mu(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t^*, \mathbf{w}, t) \Delta t), \quad (23)$$

469 con

$$\mu(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t^*, \mathbf{W}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

470 tasso d'interazione, per controllare quant'è "probabile"⁵ che i due agenti
471 interagiscano, e un coefficiente $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$ potenzialmente stocastico.

472 Nel complesso i due agenti s'interfacciano mediante l'algoritmo d'intera-
473 zione

$$[\text{AR}] \begin{cases} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = (1-\Theta)\mathbf{X}_t + \Theta\mathbf{X}'_t, \\ \mathbf{X}_{t+\Delta t}^* = (1-\Theta)\mathbf{X}_t^* + \Theta\mathbf{X}'^*_t, \end{cases}$$

474 dove $\Delta t \in \mathbb{R}_+$ è il passo temporale atto a discretizzare il tempo.

475 **Osservazione 3.8.** l'acronimo **[AR]** sta per «Azione-Reazione» poiché si sup-
476 pose che ogni interazione (azione) necessariamente modifica entrambi gli
477 stati degli agenti coinvolti (reazione); in alcuni contesti **[14]** questa rego-
478 la può essere alterata dimodoché solo l'agente interagente sia modificato
479 portando alle interazioni «Azione-Azione».

480 Infine, riapplicando un ragionamento analogo a quello svolto nel § 3.2.1
481 colla quantità osservabile $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si perviene all'equazione di tipo Bol-
482 tzmann omogenea generale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left\langle \mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \frac{\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*}{2} \right\rangle f f_* d\mathbf{x} d\mathbf{x}_*, \quad (25)$$

483 nella quale $\langle \cdot \rangle$ rappresenta la media rispetto a tutti i coefficienti potenzial-
484 mente stocastici (\mathbf{y} , \mathbf{y}_* e \mathbf{w}), mentre il termine $-\varphi - \varphi_*$ discende dal fatto
485 che non si è ipotizzato che il tasso d'interazione μ sia pari.

486 3.3 DESCRIZIONE CINETICA URBANA SU RETI

487 3.3.1 Impostazione

488 La popolazione degli agenti evolve a causa delle interazioni con altri agenti
489 connessi. Seguendo la teoria cinetica collisionale, l'ipotesi fondamentale ipo-
490 tizzata è che solo le interazioni binarie siano rilevanti: le interazioni fra tre o
491 più agenti possono essere trascurate.

492 Dopodiché, sia $X \in \mathcal{J}$ la posizione di un agente sul grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{J}, \mathcal{E})$, ove \mathcal{J} è
493 l'insieme dei vertici mentre \mathcal{E} dei lati di \mathcal{G} . Si assume che il grafico sia statico,
494 ovvero che le connessioni tra agenti non varia nel tempo.

495 Si consideri, allora, un generico agente rappresentativo, il cui stato micro-
496 scopico è descritto dal processo stocastico $(X, S_t)_{t \geq 0}$; la funzione $S_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$
497 è una v.a. da uno spazio astratto Ω allo spazio delle popolazioni \mathcal{P} e indica
498 la popolazione dell'agente al tempo $t \geq 0$. Tale v.a. evolve nel tempo per le

5 Se non si sa o non si vuole toccare quell'aspetto modellistico si può semplicemente porre unitario: $\mu \equiv 1 \forall (\mathbf{x}, \mathbf{x}_*, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, +\infty)$, in tal modo sottintendendo uniforme probabilità d'interazione.

interazioni binarie con altri agenti mediate dalle connessioni descritte da \mathcal{E} , definendo così un processo stocastico $\{S_t, t \in [0, +\infty)\}$.

Nel complesso di descrive statisticamente lo stato microscopico X, S_t dell'agente mediante una probabilità di misura $f = f(x, s, t)$, discreta in $x \in \mathcal{J}$ e continua in $s \in \mathcal{P}$. Pertanto si può dare alla f la seguente forma

$$f(x, s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \delta(x - i), \quad (26)$$

ove $N \equiv |\mathcal{J}|$ è il numero totale d'agenti/vertici del grafo mentre $\delta(\cdot)$ denota la delta di Dirac centrata all'origine; d'altra parte

$$f_i = f_i(s, t) : \mathcal{P} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

è la densità di probabilità della taglia S_t dell'agente $X = i$.

Logicamente si richiede

$$\int_{\mathcal{P}} f_i(s, t) ds = 1, \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \mathcal{J},$$

che implica coerentemente

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} f(x, s, t) ds dx = 1 \quad \forall t \geq 0$$

3.3.2 Algoritmi d'interazione

Un algoritmo d'interazione è una regola che descrive come gli agenti interagiscono a coppie e modificano di conseguenza il loro stato nel tempo; nel dettaglio, in un dato passo temporale $\Delta t > 0$ si assume che un agente $(X, S_t) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$ cambi la sua popolazione a $S_{t+\Delta t} \in \mathcal{P}$ a seguito di un'interazione con un altro agente $(X^*, S_t^*) \in \mathcal{J} \times \mathcal{P}$ secondo il successivo schema

$$S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S'_t, \quad (27)$$

ove $\Theta \in [0, 1]$ è una v.a. che tiene in considerazione qualora l'interazione tra i due agenti effettivamente si manifesti ($\Theta = 1$) o no ($\Theta = 0$); d'altro canto $S'_t \in \mathcal{P}$ è la nuova popolazione ottenuta dall'agente (X, V_t) in seguito a un'interazione avvenuta.

Con maggiore dettaglio si pone

$$\Theta \sim \text{Bernoulli}(A(X, X^*), \Delta t), \quad (28)$$

il che significa che la probabilità che un'interazione avvenga è proporzionale al passo temporale d'interazione Δt mediante un nucleo d'interazione $A(X, X^*) = 1$, che contiene le informazioni sui lati del grafo, e quindi alle connessioni tra gli agenti, ponendo

$$A(X, X^*) = \begin{cases} 1 & \text{se } (X, X^*) \in \mathcal{E}, \\ 0 & \text{se } (X, X^*) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

dove la coppia ordinata (X, X^*) denota il lato dal vertice X al vertice X^* ; per coerenza è necessario impostare $\Delta t \leq 1$ che impone un limite superiore

526 al massimo passo temporale ammissibile, seppure tale condizione sia molto
 527 facile da verificare nella pratica.

528 La popolazione postinterazione è una v.a. $S'_t : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ dipendente in gene-
 529 rale dagli stati preinterazione V_t, V_t^* degli agenti integranti:

$$V'_t(\omega) = \Psi(S_t(\omega), S_t^*(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (29)$$

530 in cui $\Psi : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ è funzione nota potenzialmente stocastica.

531 3.3.3 Interazioni azione-reazione

532 Nel contesto delle città è chiaro che qualora una città-nodo interagisca con
 533 un'altra entrambe debbano variare il loro stato.

534 Sia S la città interagente e S^* quella subente, allora in un grafo diretto si
 535 può distinguere il senso d'interazione: quella *in avanti* avviene sse $(S, S^*) \in \mathcal{E}$
 536 mentre quella *in indietro* sse $(S^*, S) \in \mathcal{E}$; tuttavia questa distinzione è inutile
 537 in questo caso di grafo diretto con matrice d'adiacenza simmetrica. Pertanto
 538 l'agente (X^*, S_t^*) aggiorna la sua popolazione attraverso una regola analoga
 539 a quella dell'agente (X, S_t) :

$$S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}, \quad (30)$$

540 ove si osserva che la Θ è la stessa della (27) la cui legge dipende da $A(X, X^*)$
 541 ma non da $A(X^*, X)$; tale dettaglio è da tenere in considerazione nel caso
 542 in cui la matrice di adiacenza non sia simmetrica, ma in questo caso di
 543 simmetria non è rilevante. L'opinione postinterazione

$$S'_t(\omega) = \Psi_*(S_t^*(\omega), S_t(\omega), \omega), \quad \omega \in \Omega,$$

544 è definita mediante una funzione $\Psi_* : \mathcal{P}^2 \times \Omega \rightarrow \mathcal{P}$ potenzialmente diversa da
 545 Ψ . Questo tipo d'interazione, prendendo come riferimento [14, § 2.2.1] sarà
 546 identificato come azione-reazione, e riassunto dall'algoritmo

$$[AR] \begin{cases} S_{t+\Delta t} = (1 - \Theta)S_t + \Theta S_t', \\ S_{t+\Delta t}^* = (1 - \Theta)S_t^* + \Theta S_t^{*\prime}. \end{cases}$$

547 Si conclude questa sezione osservando che gli agenti (X, S_t) , (X^*, S_t^*) sono
 548 campionati casualmente e uniformemente a ogni passo temporale.

549 3.4 DERIVAZIONE DELL'EQUAZIONI CINETICHE

550 3.4.1 Derivazione esatta

551 Una descrizione cinetica dell'algoritmo [AR] coincide con dell'equazioni d'e-
 552 voluzione per le distribuzioni di probabilità f_i delle opinioni degli agenti;
 553 per derivarle si procede mediante un metodo classico nella teoria dei sistemi
 554 multiagente [14, 15].

555 Sia $\Phi \equiv \Phi(x, s) : \mathcal{I} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ un osservabile arbitrario (funzione *test*), cioè una
 556 quantità che si può calcolare sapendo lo stato microscopico di un generico
 557 agente rappresentativo del sistema. Allora dalla prima equazione in [AR],

558 valutando il valore atteso dell'osservabile postinterazione rispetto agli indici
 559 e alla popolazione a tempo fissato, si ha [\(§\)](#)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, (1-\Theta)S_t + \Theta\Psi(S_t, S_t^*, \omega)A(X, X_*)\Delta t) | X, X_*]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)(1 - A(X, X_*)\Delta t) \\ &\quad + \Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega))A(X, X_*)\Delta t]],\end{aligned}$$

560 da cui, riordinando i termini e dividendo ambo i membri per Δt , si deduce

$$\frac{\mathbb{E}[\Phi(X, S_{t+\Delta t})] - \mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{\Delta t} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))],$$

561 laddove, prendendo il limite $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ricava formalmente

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X_*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) - \Phi(X, S_t))]. \quad (31)$$

562 Si può ricavare una simile equazione ripetendo i precedenti passaggi ma
 563 colla seconda equazione di [\[AR\]](#), da cui

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]}{dt} = \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) - \Phi(X^*, S_t^*))]. \quad (32)$$

564 Osservando che le coppie (X, S_t) e (X^*, S_t^*) fanno riferimento a un agente
 565 rappresentativo generico del sistema, vale

$$\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)] = \mathbb{E}[\Phi(X^*, S_t^*)]$$

566 cosicché, sommando [\(31, 32\)](#), si ha

$$\frac{d\mathbb{E}[\Phi(X, S_t)]}{dt} = \frac{1}{2} \mathbb{E}[A(X, X^*)(\Phi(X, \Psi(S_t, S_t^*, \omega)) + \Phi(X^*, \Psi_*(S_t^*, S_t, \omega)) \\ - \Phi(X, S_t) - \Phi(X^*, S_t^*))],$$

567 ed espandendo la definizione della media si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}} \Phi f d\omega dx = \int_{\mathcal{J}^2} \int_{\mathcal{P}^2} A(x, x_*) \frac{\langle \Phi' + \Phi'_* - \Phi - \Phi_* \rangle}{2} ff_* ds_* ds_* dx_* dx_*, \quad (33)$$

568 ove [per brevità] si sono omessi gli argomenti dell'osservabile e della distri-
 569 buzione [\(26\)](#):

$$f \equiv f(x, s, t), \quad \Phi \equiv \Phi(x, s), \quad \Phi_* \equiv \Phi(x_*, s_*) \quad \Phi' \equiv \Phi(x, s') \quad \text{e} \quad \Phi'_* \equiv \Phi(x_*, s'_*),$$

570 si è inoltre imposto

$$s' = \Psi(s, s_*, \omega) \quad s'_* = \Psi_*(s_*, s, \omega), \quad (34)$$

571 mentre $\langle \cdot \rangle$ indica il valore atteso rispetto alla potenziale stocasticità delle
 572 funzioni Ψ e Ψ_* .

573 Si noti che la [\(33\)](#) è valida per ogni funzione *test* Φ per cui è un'equazione
 574 debole per la distribuzione f . (commento su Fokker-Planck [\(§\)](#))

575 Si osservi anche che la [\(33\)](#) è scritta sotto l'ipotesi della propagazione del
 576 caos: ogni due potenziali agenti interagenti sono tra di loro campionati in-
 577 dipendentemente. Questa assunzione è classicamente usata, per es. nella

teorica cinetica di Boltzmann, per ottenere un'equazione chiusa per la distribuzione f di una particella, siccome permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità congiunta $g(x, x_*, s, s_*, t)$ degli agenti interagenti nel prodotto $f(x, s, t)f(x_*, s_*, t)$.

Dalla (33) con una scelta adeguata della funzione *test* Ψ , è possibile recuperare un sistema di equazioni debole per le f_i . Sia $\Psi(x, s) = \phi_i(x)\varphi(s)$, dove $\phi_i : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\phi_i(i) = 1$ mentre $\phi_i(x) = 0$ per ogni $x \in \mathcal{I} \setminus \{i\}$ e $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ è arbitrario. Allora usando la (26) dentro la (33) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds &= \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{I}} A(i, j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f_i f_j^* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{I}} A(j, i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f_j f_i^* ds ds_*, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (35)$$

ove gli argomenti di tutte le funzioni sono stati sottintesi, vale a dire

$$f_i \equiv f_i(s, t) \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad \varphi \equiv \varphi(s), \quad \varphi_* \equiv \varphi(s_*) \quad \text{e} \quad \varphi' \equiv \varphi(s').$$

Tal'equazione si può anche derivare, sempre sotto l'ipotesi della propagazione del caos, dalla gerarchia tipo BBGKY (v. se aggiungere il riferimento [\(§\)](#)). In aggiunta si può convertire in forma matriciale introducendo la distribuzione vettoriale $\mathbf{f} \equiv (f_i(s, t))_{i \in \mathcal{I}}$ e la matrice $\mathbf{M} \equiv (A(i, j))_{i, j \in \mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi \mathbf{f} ds &= \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle \mathbf{f} \odot \mathbf{M} \mathbf{f}_* ds ds_* \\ &\quad + \frac{1}{2N} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle \mathbf{M}^\top \mathbf{f} \odot \mathbf{f}_* ds ds_*, \end{aligned} \quad (36)$$

ove \odot indica il prodotto di Hadamard e \mathbf{M}^\top al trasposta di \mathbf{M} . Si noti che \mathbf{M} altro non è che la matrice d'adiacenza di \mathcal{G} .

3.4.2 Interazioni tra città

Si può ora approfondire il tipo d'interazioni ipotizzate tra città su grafi.

Innanzitutto, è chiaro che l'interazione d'interesse sia di tipo «azione-reazione» descritta da [AR]: infatti, se una città interagisce con un'altra, scambiando popolazione, entrambi variano il proprio stato ma non è detto che la seconda interagisca a sua volta colla prima.

Tuttavia, se una città può interagire con un'altra, allora è sempre possibile l'opposto; dunque il grafo in questione è diretto ma con struttura indiretta, ovvero la sua matrice d'adiacenza è simmetrica; a livello matematico, ciò implica che la matrice d'adiacenza \mathbf{M} è simmetrica.

Gli stati postinterazione (34) prendono come riferimento leggi d'interazione lineari

$$\begin{cases} S'_t = pS_t + qS_t^*, \\ S_t'^* = p_*S_t + q_*S_t^*, \end{cases} \quad (37)$$

le quali, specializzate, presentano invece la seguente forma:

$$\begin{cases} s' = s(1 - E(s, s_*) + \gamma) \\ s_*' = s_* + sI(s, s_*) \end{cases} \quad (38)$$

ove s e s_* sono le città interagente e subente rispettivamente, $E(s,s_*)$ e $I(s,s_*)$ sono rispettivamente i tassi di emigrazione e immigrazione, mentre γ rappresenta fluttuazioni stocastiche da definire; rispetto alle leggi d'interazione lineari (37) le (38) soddisfanno

$$\begin{aligned} p(s,s_*) &\equiv s[1 - E(s,s_*) + \gamma] & p_*(s,s_*) &\equiv s_* \\ q(s,s_*) &\equiv 0, & q_*(s,s_*) &\equiv sI(s,s_*), \end{aligned} \quad (39)$$

rispettivamente per la prima e seconda legge. Ovviamente questo scambio deve conservare [in media] la popolazione totale da cui

$$\begin{aligned} s + s_* &= \langle s + s_* \rangle = \langle s' + s'_* \rangle \\ &= s - sE(s,s_*) + s_* + sI(s,s_*) \end{aligned} \implies E(s,s_*) = I(s,s_*), \quad (40)$$

ciò ha senso perché l'emigrazione e l'immigrazione sono fenomeni relativi (invertendo s ed s_* sarebbe l'opposto). La scelta di $E(s,s_*)$ dipende da come si vuole modellizzare il fenomeno dell'immigrazione, e in questo manoscritto si è modificata la [9, (2.2), § 2, p. 223] mediante la [9, (4.5), § 4, p. 228]:

$$E(s,s_*) \equiv \lambda \frac{(s_*/s)^\alpha}{1 + (s_*/s)^\alpha}, \quad (41)$$

che in essenza è una funzione di Hill di ordine α , in cui v'è un tasso di emigrazione maggiore verso città con popolazione relativa, data dal rapporto s_*/s , maggiore; gli unici due parametri presenti, invece, presentano il seguente significato:

- ◊ $\lambda \in (0,1)$ rappresenta l'attrattività dei poli, ossia la frazione che le città più popolose riescono al massimo ad attrarre in un'interazione;
- ◊ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indica la rapidità d'emigrazione e influenza quanto rapidamente il rapporto s_*/s raggiunge la massima attrattività λ .

In poche parole la (41) descrive la tendenza degl'individui di aggregarsi per i più svariati motivi: lavoro, sicurezza, famiglia, eccetera.

In questo caso si hanno quindi interazioni non simmetriche, poiché dalla (39) $p \neq q$ e $q \neq p$, e non lineari, a causa della (41).

Non manca che caratterizzare il tipo di perturbazione γ per avere uno stato postinterazione fisicamente sensato; difatti, è chiaro che rigorosamente $\mathcal{P} \equiv \mathbb{N}$ ma è più agevole supporre $\mathcal{P} \equiv \mathbb{R}^+$ per poi approssimare per eccesso o difetto il numero intero effettivo; pertanto, dalla (38), si ha

$$s' > 0 \implies \gamma > E(s,s_*) - 1 \quad (42)$$

mentre s'_* è per definizione sempre positivo. La scelta di $>$ anziché \geq nella (42) è ben fondata: di fatto si sta supponendo che le fluttuazioni non possono annullare la popolazione di una città; difatti qualora $\gamma = E(s,s_*) - 1$ si avrebbe $s' = 0$ dalla (38), situazione che si vuole evitare⁶ dato che nella (41) compare il rapporto tra popolazioni delle città interagenti.

Perdipiù, le fluttuazioni rappresentano a grandi linee quei fenomeni complessivi di nascita e di morte che vengono considerati ma non direttamente modellati; pertanto γ deve soddisfare le seguenti due caratteristiche:

⁶ Ciò non significa che il modello non possa modellare lo spopolamento di una città, poiché la sua taglia può arbitrariamente avvicinarsi a zero [ma mai esserne uguale], raggiungendolo solo *a posteriori* dopo l'approssimazione dai numeri reali a quelli interi.

- 642 F₁ possono assumere sia valori positivi che negativi, ma non minori del
 643 vincolo imposto da (42);
 644 F₂ la media è scelta arbitrariamente posta allo zero, ossia $\langle \gamma \rangle = 0$;
 645 F₃ seppure non vi siano limiti superiori per l'entità della fluttuazione,
 646 è chiaro che più grande questa è meno è probabile.

647 Con queste si possono allora analizzare alcune distribuzioni continue:

- 648 ◊ la distribuzione normale non soddisfa la F₁ poiché può assumere
 649 valori reali arbitrari con probabilità non nulla;
- 650 ◊ la distribuzione uniforme è adeguata solo per intervalli finiti e diven-
 651 ta degenere quando un suo estremo diverge, per cui non soddisfa né
 652 F₂ né F₃, mentre F₁ si;
- 653 ◊ la distribuzione esponenziale è quella più promettente perché riflette
 654 sia F₂ (dopo un'opportuna traslazione dei valori campionati) che F₃,
 655 ma sfortunatamente non F₁ perché il valore estremo $\gamma = E(s, s_*) - 1$
 656 ha probabilità non nulla [anzi massima] d'essere campionato;
- 657 ◊ l'unica distribuzione che soddisfa tutte le tre le caratteristiche ricercate
 658 è proprio la distribuzione gamma.

659 Si consideri allora una distribuzione gamma avente la seguente funzione
 660 di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\theta \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad (43)$$

661 ove α e θ sono i parametri rispettivamente di forma e di scala, mentre $\Gamma(\alpha)$:
 662 $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ è la funzione gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^{+\infty} y^{\alpha+1} e^{-y} dy. \quad (44)$$

663 Si scelga $\hat{\gamma} \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$, che soddisfa per definizione la F₃, e s'imponga

$$\langle \hat{\gamma} \rangle = 1 - E(s, s_*) = \alpha \theta \quad \text{e} \quad \langle \hat{\gamma}^2 \rangle = \sigma^2 = \alpha \theta^2, \quad (45)$$

664 con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ equivalente alla deviazione *standard* mentre σ^2 alla varianza, da
 665 cui

$$\alpha = \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\sigma^2}{1 - E(s, s_*)}. \quad (46)$$

666 Con tale scelta dei parametri è possibile soddisfare la F₂ semplicemente tra-
 667 slando i valori campionanti della $\hat{\gamma}$ di $-\langle \hat{\gamma} \rangle$, ossia si considera la distribuzio-
 668 ne $\gamma \sim \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle$:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \hat{\gamma} - \langle \hat{\gamma} \rangle \rangle = \langle \hat{\gamma} \rangle - \langle \hat{\gamma} \rangle = 0.$$

669 D'altra parte la F₁ necessita di salvaguardarsi dai casi degeneri della distri-
 670 buzione gamma: essa infatti se $\alpha = 1$ diventa un'esponenziale di parametro
 671 θ , mentre se $\alpha < 1$ diverge all'origine; per avere quindi una probabilità nulla
 672 di campionare l'origine [e quindi $-\langle \hat{\gamma} \rangle$ dopo la traslazione] è necessario porre

$$\alpha > 1 \implies \frac{(1 - E(s, s_*))^2}{\sigma^2} > 1,$$

ma nel caso peggiore $1 - E(s, s_*) = 1 - \lambda$ da cui

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2} > 1 \implies \sigma^2 < (1-\lambda)^2 \implies \sigma < |1-\lambda| = 1-\lambda, \quad (47)$$

siccome $E(s, s_*) \in (0, \lambda) \forall s, s_* \in \mathcal{P}$ e $\lambda \in (0, 1)$. La (47) implica quindi che non è possibile avere una varianza arbitraria per poter soddisfare la F1, ma che questa è limitata superiormente dall'attrattività dei poli: più è grande λ più piccola è la varianza, e viceversa.

3.4.3 Derivazione approssimata

3.5 NESSO DISCRETO-CONTINUO

È d'interesse esplorare il legame presente tra la (35) coll'equazione classica di Boltzmann {§}.

3.5.1 Ipotesi semplificative

A questo scopo si possono fare tre principali ipotesi semplificative da applicare alla (35):

IS1 Si presuppone che il grafo sia completamente connesso e quindi che la matrice d'adiacenza sia unitaria $A \equiv I$.

IS2 Si assume che gli agenti siano indistinguibili:

$$f_i(s, t) = f_j(s, t) = f(s, t) \quad \forall i, j \in \mathcal{J}, \quad (48)$$

IS3 S'ipotizza che le interazioni siano simmetriche:

$$s' = \Psi(s, s_*) = \Psi_*(s_*, s), \text{ ove } s_* = \Psi_*(s, s_*). \quad (49)$$

3.5.2 Analisi della IS1

Con tal'ipotesi la (35) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2N} \left[\sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} (\varphi' - \varphi) f_i f_j^* ds ds_* + \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}^2} (\varphi'_* - \varphi_*) f_j f_i^* ds ds_* \right],$$

e valutando la distribuzione marginale della (26) rispetto agli indici

$$F(s, t) \equiv \int_{\mathcal{J}} f(x, s, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t) \otimes \int_{\mathcal{J}} \delta(x - i) dx = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s, t), \quad (50)$$

che corrisponde a una media tra le distribuzioni dei singoli agenti, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f_i ds = \frac{1}{2} \left[\int_{\mathcal{P}^2} (\varphi' - \varphi) f_i F^* ds ds_* + \int_{\mathcal{P}^2} (\varphi'_* - \varphi_*) F f_i^* ds ds_* \right];$$

mediando ora rispetto a tutti gli agenti, si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi F ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} (\varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_*) F F^* ds ds_*, \quad (51)$$

la quale è formalmente analoga a quella classica di Boltzmann [{§}](#). Ciò significa che con tal'ipotesi semplificativa, nonostante gli agenti siano distinti, questi si possono vedere come indistinguibili purché si consideri la distribuzione media [\(50\)](#).

Tale risultato è anche confermato a livello pratico nell'algoritmo [1](#), illustrato nel paragrafo a venire, ove una matrice d'adiacenza unitaria porta ad avere un algoritmo del tutto analogo a quello classico; pertanto l'unica distribuzione che può calcolare [1](#) è proprio quella media F .

3.5.3 Analisi della [IS2](#)

La previa discussione suggerisce di studiare anche il caso in cui gli agenti siano effettivamente indistinguibili; tuttavia, prima di affrontarlo assieme alla prima ipotesi risulta interessante analizzare tale ipotesi isolatamente. Pertanto la [\(35\)](#) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = & \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(i,j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle f f^* ds ds_* \\ & + \frac{1}{2N} \sum_{j \in \mathcal{J}} A(j,i) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*, \end{aligned}$$

che sommata su tutti gl'indici porta a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2N^2} \sum_{i,j \in \mathcal{J}} A(i,j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_*,$$

e definendo $L \equiv \sum_{i,j \in \mathcal{J}} A(i,j)$ si arriva a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{L}{N^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{J}} A(i,j) \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle f f^* ds ds_* \right]. \quad (52)$$

In questo contesto il rapporto $L/N^2 \in [0,1]$ rappresenta topologicamente simile è la rete a una completamente connessa⁷; d'altra parte l'equazione è analoga a quella classica di Boltzmann [{§}](#).

Dunque l'indistinguibilità degli agenti ha una notevole conseguenza sulla [\(35\)](#), riassumendo l'effetto complessivo del grafo al solo coefficiente L/N^2 che quindi ne rappresenta gli ultimi bagliori prima di una sua totale scomparsa per la [IS1](#).

3.5.4 Analisi della [IS1](#), [IS2](#) e [IS3](#)

Visto che vale [IS1](#) si può partire dalla [\(51\)](#) nella quale la distribuzione media [\(50\)](#) diventa per [IS2](#)

$$F(s,t) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f_i(s,t) \stackrel{2^\circ}{=} \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}} f(s,t) = f(s,t),$$

⁷ Difatti L è interpretabile come il numero di lati presenti in un grafo diretto e che ha come limite superiore N^2 , ossia il numero totale di coppie [e quindi lati] dati N nodi.

719 ossia la F coincide con quella di tutti gli agenti⁸, essendo questi, appunto,
 720 indistinguibili.

721 In tal modo la (51) diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi + \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff^* ds ds_*,$$

722 che unita all IS3 porta all'equivalenza (mediante il cambio di variabili $s_* = s$
 723 e $s = s_*$)

$$\int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi'_* - \varphi_* \rangle ff_* ds ds_* = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_*,$$

724 e quindi a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \varphi f ds = \int_{\mathcal{P}^2} \langle \varphi' - \varphi \rangle ff^* ds ds_*,$$

725 che equivale alla formula classica di Boltzmann con interazioni simmetriche
 726 {S} usata classicamente per modellizzare la distribuzione dell'energia cinetica
 727 tra una popolazione di particelle di un gas.

8 Si noti anche che la perdita della dipendenza della distribuzione media dal numero di nodi N è coerente colla situazione in cui $N \rightarrow \infty$, condizione fondamentale analoga a casi classici come lo studio del gas nel quale $N \gg 1$ ben approssima il limite.

Algorithm 1 Algoritmo di Monte Carlo per equazioni di tipo su un grafo

Require: adjacency matrix M ; initial state $V_0 \in \mathcal{O}^N$; time step $\Delta t > 0$; final time $T > 0$

1: $\tilde{V} \leftarrow V_0$
2: $t \leftarrow 1$
3: **for** $t < T$ **do**
4: $\langle \varphi \rangle(t) \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\tilde{V}(i))$
5: $V \leftarrow \tilde{V}$
6: $P \leftarrow$ random permutation of $\{1, \dots, N\}$
7: $p_1 \leftarrow (P(1), \dots, P(N/2))$
8: $p_2 \leftarrow (P(N/2+1), \dots, P(N))$
9: $i \leftarrow 1$
10: **for** $i < N/2$ **do**
11: $\Theta \sim \text{Bernoulli}(B(p_1(i), p_2(i))\Delta t)$
12: $\tilde{V}(p_1(i)) \leftarrow V(p_1(i))(1 - \Theta) + \Psi(V(p_1(i)), V(p_2(i)))\Theta$
13: $\tilde{V}(p_2(i)) \leftarrow V(p_2(i))(1 - \Theta) + \Psi_*(V(p_2(i)), V(p_1(i)))\Theta$
14: $i \leftarrow i + 1$
15: **end for**
16: $t \leftarrow t + \Delta t$
17: **end for**

728 **4** | SIMULAZIONI

729 **4.1 PREMESSE**

730 **4.1.1 Metodo Monte Carlo**

731 **4.1.2 Fluttuazioni**

732 **4.1.3 Grafici**

733 **4.2 LEGGI D'EMIGRAZIONE**

734 **4.2.1 Popolazione**

735 **4.2.2 Popolazione-Connettività**

736 **4.2.3 Popolazione-Connettività frazionata**

737 **4.2.4 Popolazione-Forza**

738 **4.3 INTERPRETAZIONE**

739

5 | CONCLUSIONI

- 740 1. Maggiori sviluppi teorici, specialmente per ricavare un'equazione di
741 Fokker-Planck per la distribuzione stazionaria.
- 742 2. Maggiori sviluppi pratici per abbandonare l'ipotesi semplificativa
743 della rete statica.
- 744 3. Applicare questa teoria anche a reti europee o internazionali.

745 APPENDICE

746 A CODICE

747

ELENCO DELLE FIGURE

748	Figura 1.1	Funzione Lognormale(0,1).	6
749	Figura 2.1	Esempio di un grafo indiretto, della sua equivalente forma diretta [simmetrica] e della loro [identica] matrice d'adiacenza.	9
750			
751	Figura 2.2	Forza contro grado $s(k)$ per la Sardegna.	12
752			
753	Figura 2.3	Riproduzione dei principali grafici di [5] [a cui si rimanda per maggiori dettagli sui vari coefficienti] relativi alla topologia della rete del pendolarismo sarda.	14
754			
755			

756

ELENCO DELLE TABELLE

757

Tabella 2.1 Formattazione di una sola riga nei dati ISTAT¹; le linee barrate corrispondono a dati trascurati. 11

758

759

Tabella 2.2 Confronto con [5] dei pesi maggiori. 13

760

BIBLIOGRAFIA

- [1] Auerbach, Felix. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration [The law of population concentration]». In: *Petermanns Geographische Mitteilungen* 59 (1913), pp. 74–76.
- [2] Barabási, Albert-László and Albert, Réka and Jeong, Hawoong. «Mean-field theory for scale-free random networks». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 272.1-2 (1999), pp. 173–187.
- [3] Berlant, Marcus and Watanabe, Axel H. «A scale-free transportation network explains the city-size distribution». In: *Quantitative Economics* 9.3 (2018), pp. 1419–1451.
- [4] Broido, Anna D and Clauset, Aaron. «Scale-free networks are rare». In: *Nature communications* 10.1 (2019), p. 1017.
- [5] De Montis, Andrea and Barthélémy, Marc and Chessa, Alessandro and Vespignani, Alessandro. «The structure of interurban traffic: a weighted network analysis». In: *Environment and Planning B: Planning and Design* 34.5 (2007), pp. 905–924.
- [6] Durrett, Rick. *Probability: theory and examples*. Vol. 49. Cambridge university press, 2019.
- [7] Eeckhout, Jan. «Gibrat's law for (all) cities». In: *American Economic Review* 94.5 (2004), pp. 1429–1451.
- [8] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Human behavior and lognormal distribution. A kinetic description». In: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29.04 (2019), pp. 717–753.
- [9] Gualandi, Stefano and Toscani, Giuseppe. «Size distribution of cities: A kinetic explanation». In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 524 (2019), pp. 221–234.
- [10] ISTAT. *Matrici di contiguità, distanza e pendolarismo*. 2023. URL: <https://www.istat.it/notizia/matrici-di-contiguita-distanza-e-pendolarismo/> (visitato il giorno 12/01/2026).
- [11] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «A viral load-based model for epidemic spread on spatial networks». In: *arXiv preprint arXiv:2104.12107* (2021).
- [12] Loy, Nadia and Tosin, Andrea. «Essentials of the kinetic theory of multi-agent systems». In: *arXiv preprint arXiv:2503.11554* (2025).
- [13] Marc Barthélémy. «Spatial networks». In: *Physics Reports* 499.1 (2011), pp. 1–101. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2010.11.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015731000308X>.
- [14] Nuriacco, Marco and Raviola, Matteo and Tosin, Andrea. «Network-based kinetic models: Emergence of a statistical description of the graph topology». In: *European Journal of Applied Mathematics* (2024), pp. 1–22. DOI: <10.1017/S0956792524000020>.

- 801 [15] Pareschi, Lorenzo and Toscani, Giuseppe. *Interacting multiagent systems:*
802 *kinetic equations and Monte Carlo methods*. OUP Oxford, 2013.
- 803 [16] Zipf, George Kingsley. *Human behavior and the principle of least effort: An*
804 *introduction to human ecology*. Ravenio books, 2016.