

Д. БРАУЭР, ДЖ. КЛЕМЕНС

*Методы
небесной
механики*

METHODS
OF CELESTIAL MECHANICS

D. BROUWER

*Director of the Observatory
Yale University
New Haven, Connecticut*

G. CLEMENCE

*Scientific Director
United States Naval Observatory
Washington, D. C.*

ACADEMIC PRESS
NEW YORK AND LONDON 1961

Д. БРАУЭР, Дж. КЛЕМЕНС

*Методы
небесной
механики*

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
В. К. АБАЛАКИНА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. А. ЧЕБОТАРЕВА

А Н Н О Т А Ц И Я

Основное содержание книги известных американских астрономов Д. Брауэра и Дж. Клеменса «Методы небесной механики» заключается в подробном изложении основных методов небесной механики, применяющихся при численном решении различных практических задач (движение Луны, планет, искусственных спутников Земли). В каждой главе имеется много примеров, а также подробная аннотированная библиография. Для изучения книги не требуется большой математической (или астрономической) подготовки — вполне достаточно знакомства с основами высшей математики. Необходимые специальные разделы математики (интерполяция, способ наименьших квадратов, численное интегрирование дифференциальных уравнений и т. п.), а также астрономии (аберрация, параллакс, прецессия и др.) изложены в книге со всеми необходимыми подробностями. Книга рассчитана на широкий круг специалистов, работающих над вопросами движения тел солнечной системы, искусственных спутников Земли и космических ракет. Книга написана очень простым и ясным языком. Для советских читателей добавлена обширная библиография на русском языке.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Небесная механика является по существу одним из разделов теоретической механики, изучающим движение тел солнечной системы в гравитационном поле. Так как расстояния между телами солнечной системы очень велики по сравнению с размерами самих тел, то все тела солнечной системы в большинстве задач небесной механики можно рассматривать как материальные точки, притягивающие друг друга по закону Ньютона (так называемая проблема n тел). Поправки, являющиеся следствием теории относительности, очень малы и учитываются дополнительно.

Так как строгое математическое решение проблемы n тел, которое было бы пригодно для конкретных астрономических задач, пока не существует, приходится рассматривать отдельно различные задачи небесной механики, используя при этом некоторые специальные особенности солнечной системы.

После успешного запуска искусственных спутников Земли и космических ракет в Советском Союзе и в США значительно увеличился интерес к классическим методам небесной механики, позволяющим получить окончательный результат решения задач в конкретной числовой форме.

Книга американских астрономов Д. Брауэра и Дж. Клеменса «Методы небесной механики» как раз и отвечает этой задаче. В то время как известные советские и зарубежные руководства по небесной механике обычно только знакомят читателя с основными идеями методов небесной механики, книга Брауэра и Клеменса вводит читателя в самую «кухню» практической работы специалиста, занятого расчетами движения естественных и искусственных небесных тел в солнечной системе. Книга содержит много числовых примеров и насыщена практическими советами, обобщающими многолетний опыт работы в области прикладной небесной механики в США с учетом современной вычислительной техники.

В Советском Союзе было издано несколько книг, посвященных методам небесной механики. Отметим, в частности, трехтомный «Курс небесной механики» М. Ф. Субботина и первые две книги из намеченной серии учебных пособий Г. Н. Дубошина: «Теория притяжения» и «Небесная механика. Основные задачи и методы». Из переведенных на русский язык книг можно указать книгу американского астронома Ф. Мультона «Введение в небесную механику». Книга Брауэра и Клеменса, как уже сказано выше, по характеру изложения и по содержанию значительно отличается от этих изданий ранее руководств. Она строго ограничена вопросами, имеющими непосредственное практическое применение. Теоретические вопросы, связанные с теми или иными методами небесной механики, изложены недостаточно подробно или даже совсем не затронуты. Читателю, интересующемуся чисто математическими вопросами небесной механики, необходимо обратиться к указанным выше книгам Г. Н. Дубошина или М. Ф. Субботина.

Таким образом, книгу Брауэра и Клеменса нужно рассматривать не как теоретический курс небесной механики, а как практическое руководство по этим вопросам. С этой точки зрения книга представляет большой интерес благодаря обилию свежего материала, четкому и ясному изложению трудных вопросов, широкой иллюстрации разбираемых методов численными примерами. Семнадцать глав книги содержат следующий материал.

Главы I—III рассматривают задачу двух тел (невозмущенное движение), причем в третьей главе разобраны вопросы притяжения между телами конечных размеров.

Главы IV—V рассматривают методы численного интегрирования уравнений небесной механики.

Главы VI—VIII излагают вопросы сравнения теории с наблюдениями (аберрация, прецессия, нутация, параллакс). Подробно изложен метод наименьших квадратов, широко применяемый в астрономии и геодезии.

Глава IX содержит изложение метода дифференциального исправления элементов орбиты.

Глава X посвящена знаменитой задаче трех тел.

Глава XI содержит общий метод интегрирования уравнений небесной механики (метод вариации произвольных постоянных).

Главы XII—XVI излагают основные методы небесной механики (метод Хилла, метод вычисления возмущений в координатах, метод Гаузена, метод разложения в ряды возмущающей функции, теорию вековых возмущений, метод Делонэ).

Глава XVII интересна, в частности, тем, что содержит теорию движения искусственных спутников Земли, основанную на методе Делонэ, но в оригинальной переработке Брауэра.

В этой же главе рассматривается связь задачи о движении искусственных спутников в нормальном гравитационном поле Земли с задачей о двух неподвижных центрах.

В конце каждой главы книги содержатся краткие сведения исторического характера. Подробную библиографию литературы по небесной механике на русском языке читатель найдет в приложении.

Г. А. Чеботарев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга по небесной механике предназначается для того, чтобы обеспечить всестороннюю подготовку для практических приложений. Она рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов, а также на инженеров и других лиц, желающих овладеть этим предметом. Специалисты могут использовать ее также как справочное руководство. Расположение излагаемого материала имеет целью по возможности облегчить вычислительную работу. Однако мы стремились к гораздо большему, чем к руководству по вычислениям. Мы изложили предмет логически, исходя из начальных принципов, постарались обосновать применяемые способы и заложить фундамент для будущих самостоятельных исследований другими лицами.

Небесная механика представляет собой отрасль астрономии, посвященную движениям небесных тел. Основной силой, определяющей эти движения (по крайней мере, движения тел внутри нашей собственной Галактики), является тяготение, и это единственная сила, которая рассматривается в этой книге. Почти во всех случаях полагают, что наблюдаемые движения можно описать полностью, не прибегая к помощи негравитационных явлений, и что многочисленные расхождения между наблюдениями и теорией большей частью обусловлены неполнотой существующих в настоящее время теоретических построений; точность наблюдений в течение последних двух столетий увеличивалась, как правило, быстрее точности вычислений. Однако со строго практической точки зрения это убеждение не основано на чем-либо более существенном, чем успехи в прошлом, достигнутые при рассмотрении относительно грубого материала наблюдений, доступного в то время. Громадный объем вычислительной работы, необходимой для более точного исследования этого вопроса, удержал многих исследователей от шагов в указанном направлении. Создание в последнее время более совершенной вычислительной техники уже привело к возрождению деятельности в этой области небесной механики, в которой несомненно остаются еще возможности сделать захватывающие открытия, и желание облегчить такую работу было нашим главным стимулом при написании этой книги.

Наиболее яркими примерами важных негравитационных сил, известных в настоящее время, являются силы, вызывающие неправильные и сезонные изменения в скорости вращения Земли, силы, которые влияют на движение спутников в атмосфере Земли, и силы, действующие на движения комет и компонент тесных двойных систем. Единственным разделом в этой книге, в котором рассматриваются некоторые из этих вопросов, является раздел об атмосферном сопротивлении, поскольку оно влияет на движение искусственного спутника (гл. XVII, разд. 14).

Мы ограничиваемся законом тяготения Ньютона. Случаи, в которых известно, что он неточен, являются движения линий апсид внутренних планет, но их легко рассмотреть, добавляя малые поправки в соответствии с принципами общей теории относительности.

Небесная механика может изучаться либо как абстрактная дисциплина, чтобы получить общее понимание законов и формальных соотношений, либо с целью практических приложений. Мы имели в виду исключительно эту последнюю цель. Мы приводим все основные методы, которые наиболее широко применялись для численных расчетов, и не упоминаем ни одного метода, не соответствующего этому назначению.

Предполагается хорошее знание читателем дифференциального и интегрального исчисления. Кроме того, для полного понимания некоторых выводов необходимо знание алгебры, теории алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, однако отсутствие такого рода знаний не помешает практическому применению методов, изложенных в книге.

Эта книга не построена в логической последовательности, так, чтобы ее необходимо было читать подряд от начала до конца, а написана по более или менее независимым главам; порядок глав можно было бы изменить различными способами, не затрудняя правильного понимания. Исключение составляют гл. I и II, которые должны следовать перед гл. XI—XVII. Подобным образом гл. IV логически предшествует гл. V, а гл. VI—IX связаны друг с другом. Каждая из гл. III и X—XVII является в сущности самостоятельной. Таким образом, разумным подбором глав можно значительно разнообразить пути изучения.

Глава IV дана главным образом как предпосылка к гл. V, чтобы последнюю можно было понять без полного курса исчисления конечных разностей, а также чтобы сделать легко доступными правила интерполяции. В гл. VI—IX мы включили сводку тех разделов сферической и практической астрономии, которые существенны для обработки астрономических наблюдений. Аберрация рассмотрена более подробно, нежели другие разделы, ввиду той небрежной манеры, с которой ее излагают другие авторы.

Что касается самих методов, то они изложены в гл. XI—XVII. В заключительной главе мы подчеркнули важность применения канонических переменных для количественного решения задач в небесной механике. Мы полагали, что будем способствовать осуществлению этой цели наилучшим образом, давая единый общий подход и оставляя в стороне все то, что не является необходимым.

По-видимому, бросается в глаза отсутствие дифференциального уравнения Гамильтона—Якоби с частными производными в его обычной форме, имеющей особое значение для решения проблем, которые допускают разделение переменных. Мы предпочитаем подчеркнуть преимущества более общей формы этого уравнения, предложенной Цейпелем, которая была специально задумана, чтобы служить фундаментом мощного метода теории возмущений. Этот метод содержит метод Делонэ как частный случай. Лица, интересующиеся другими аспектами этого вопроса, найдут многочисленные дополнительные сведения в «Аналитической динамике» Уиттекера и других руководствах.

Обозначения в небесной механике представляют много затруднений, главным образом из-за большого количества требуемых символов. Часто невозможно избежать применения одного символа в двух или более различных смыслах, не вводя обозначений, которые чрезмерно громоздки или настолько новы, что вводят в заблуждение тех, кто уже несколько знаком с предметом. Мы предпочитали, как правило, обозначения, применявшиеся авторами, которые писали больше всего по определенному вопросу, даже вплоть до того, что иногда в различных

главах для обозначения одной и той же величины использовали два символа. Однако мы сделали исключение для наиболее часто встречающихся величин, как, например, средняя аномалия, для обозначения которых всюду применяется единственный символ. Мы надеялись этим по возможности облегчить читателю обращение к оригинальной литературе, не возлагая чрезмерного бремени на ограничивающихся этой книгой.

Считаем нашим приятным долгом выразить сердечную благодарность д-ру Джэн-Ичиго Хори (Отделение астрономии Токийского университета). Первый год его пребывания на Йельской обсерватории совпал с тем периодом, когда в рукописи делались последние штрихи. Его тщательному чтению всей рукописи в целом мы обязаны многими исправлениями и улучшениями. Д-р Хори помог нам в равной степени и при чтении корректур.

*Д. Браузер
Дж. М. Клеменс*

Февраль 1961 г.

Г л а в а I

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Историческое введение. Можно сказать, что предмет небесной механики берет свое начало со времени опубликования Исааком Ньютона в 1687 г. его «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», обычно упоминаемых в ссылках как «Principia». В этом прославленном труде Ньютон сформулировал законы движения и закон всемирного тяготения; он вывел также некоторые из наиболее важных свойств движения планет и спутников.

Выход знаменитых трех законов Кеплера на много лет предшествовал сочинению Ньютона, и поэтому историческое изложение введения в небесную механику следует пути, избранному Ньютоном в разд. II и III книги I, где он выясняет, какие сведения о силе, действующей на планету, могут быть выведены из законов Кеплера, которые можно сформулировать следующим образом:

I. Орбита планеты лежит в плоскости, проходящей через Солнце, и площадь, описанная прямой, соединяющей Солнце и эту планету, пропорциональна протекшему времени.

II. Орбита планеты является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце.

III. Отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси имеет одно и то же значение для всех планет, обращающихся вокруг Солнца.

Из утверждений, что орбита планеты лежит в плоскости, проходящей через Солнце, и что площадь, описанная радиусом-вектором, пропорциональна времени, можно заключить, что сила, действующая на планету, должна быть направлена по прямой, соединяющей эту планету с Солнцем. Эта сила должна быть скорее притягивающей, чем отталкивающей, так как траектория планеты обращена своей вогнутостью к Солнцу. Из утверждения, что орбита планеты является эллипсом с Солнцем в одном из фокусов, следует далее, что сила, удерживающая планету на ее орбите, должна меняться обратно квадрату расстояния планеты от Солнца. Наконец, третий закон Кеплера требует, чтобы силы, действующие на различные планеты, были прямо пропорциональны массам этих планет. Впрочем, поскольку орбиты больших планет приблизительно лежат в одной и той же плоскости, то это рассуждение не может полностью доказать изотропность гравитационного притяжения. Этот довод значительно усиливается при рассмотрении кометных орбит, большинство которых имеет большие наклонности относительно плоскостей орбит больших планет. Все это также было рассмотрено Ньютоном.

Изучение визуально-двойных звезд к концу XVIII столетия повысило интерес к вопросу об универсальности закона тяготения. В большинстве случаев для визуально-двойных звезд ничего неизвестно о движении по лучу зрения, и единственная информация об орбите должна быть получена из наблюдаемого факта, состоящего в том, что проекция истинной относительной орбиты на плоскость, касательную к небесной сфере, является эллипсом, для которого выполняется закон площадей, но в котором фокус не занят центральной звездой. Поэтому возникает вопрос, какому закону гравитационного притяжения соответствуют орбиты, обладающие этим свойством. Ответ гласит, что закон тяготения Ньютона является единственным изотропным законом, удовлетворяющим наблюдениям, но что другие более сложные и анизотропные законы также были бы совместимы с фактами наблюдений. Исследования этого рода производились до введения спектрографа для измерения лучевых скоростей. С помощью сведений о движении по лучу зрения этот ответ можно было бы сделать более определенным.

В эпоху Ньютона существовало достаточное оправдание того, чтобы начинать исследование с установления основных законов из наблюдаемых явлений при помощи метода индукции.

Даже в настоящее время анализ проблемы в таком направлении является поучительным и представляет значительный интерес. В этой книге мы предполагаем, что законы движения и закон тяготения имеются в нашем распоряжении как основные законы небесной механики, и выводим заключения из этих предположений. Это означает, что мы следуем с самого начала принципу освященного веками метода научного исследования: законность основных предположений проверяется сравнением наблюдений с теорией. Ньютон сформулировал этот принцип в своих «Правилах умозаключений в физике» («Principia», книга III) следующим образом: «В опытной физике предположения, выведенные из совершающихся явлений помошь паведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточняются или же окажутся подверженными исключением».

Хорошо известно, что наблюдения движений небесных тел подтвердили законность этих основных предположений с удивительно высокой степенью точности. Вся важность точности количественного согласия между теорией и наблюдениями, очевидно, не осознана многочисленными авторами писем и брошюр, которые из года в год пропагандируют изменения в основаниях небесной механики.

Имеется одно важное исключение: создание общей теории относительности заставило считать ньютонианский фундамент небесной механики некоторым приближением к более фундаментальной системе законов. Трудность релятивистской формулировки и высокая степень точности приближения, достигнутого при помощи законов Ньютона, оправдывают исследования, проведенные на основе классической теории. В тех немногих случаях, когда общая теория относительности требует модификаций, эти последние могут быть введены как малые поправки к результатам классического анализа.

Наиболее значительным наблюдаемым отклонением от теории Ньютона является дополнительное ускорение в движении перигелия Меркурия, которое настолько надежно установлено, что это наблюдательное подтверждение общей теории относительности не может более подвер-

гаться серьезному сомнению. Аналогичное, но гораздо меньшее ускорение в движении перигелия орбиты Земли в настоящее время довольно хорошо подтверждается наблюдениями, однако не с такой уверенностью, как в случае перигелия Меркурия.

2. Законы движения и закон тяготения. Можно сформулировать следующие три закона движения:

I. Каждое тело продолжает сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока не вынуждается приложенной силой изменить это состояние.

II. Скорость изменения количества движения пропорциональна приложенной силе и происходит в направлении, в котором эта сила действует.

III. Каждому действию соответствует равное и противоположное противодействие.

Закон Ньютона для гравитационного притяжения гласит: Всякие две частицы во вселенной притягивают друг друга с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Прежде чем применить эти законы к простейшим задачам небесной механики, можно сделать несколько поясняющих замечаний.

а) Предполагается, что существуют системы координат, в которых применимы эти законы движения. Такого рода координатная система называется ньютоновой системой отсчета.

б) Скорость частицы массы m определяется производной ds/dt — предельным значением $\Delta s/\Delta t$, когда Δt стремится к нулю; Δs есть расстояние, пройденное за промежуток времени Δt .

в) Количество движения определяется произведением mds/dt .

г) Скорость, количество движения и сила являются векторами со следующими компонентами в декартовой системе координат:

$$\text{Скорость} \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

$$\text{Количество движения} \quad m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt};$$

$$\text{Сила} \quad F_x, \quad F_y, \quad F_z.$$

д) Тогда второй закон движения материальной частицы можно установить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = F_x, \quad \frac{d}{dt} \left(m \frac{dy}{dt} \right) = F_y, \quad \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right) = F_z.$$

Поскольку m будет рассматриваться как постоянная, то эти уравнения можно написать в следующем виде:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \quad (1)$$

Для краткости производные по времени будут часто обозначаться точкой. Следовательно, компоненты скорости записутся как \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , а компоненты ускорения \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} .

е) Закон тяготения Ньютона сформулирован только для материальных точек и не относится к телам конечных размеров. Однако можно показать (см. гл. III), что тела, обладающие сферической сим-

метрией, притягивают друг друга так, как будто их массы сосредоточены в их центрах. Как будет показано в гл. III, для тел, распределение масс которых отличается от сферической симметрии, взаимное притяжение близко к тому, которое имело бы место, если бы массы этих тел были сосредоточены в их центрах, при условии, что расстояния между телами велики по сравнению с их размерами.

В солнечной системе Солнце и большие планеты являются сферондами с относительно малыми степенями сжатия, а их взаимные расстояния велики по сравнению с их размерами. Следовательно, притяжение между Солнцем и планетами без спутников можно считать почти таким же, как если бы эти тела были материальными точками, т. е. их массы были бы сосредоточены в их центрах. Для планет, обладающих спутниками, первое приближение дает движение центров масс этих систем. Движение системы Земля – Луна является в некоторых отношениях наиболее интересным. Сначала можно получить движение центра масс системы Земля – Луна в предположении, что масса этой системы сосредоточена в центре тяжести. Следующим шагом является получение малой поправки к этому движению, которая обусловлена распределением масс внутри этой системы. Полное решение этой проблемы требует знания главных особенностей движения Луны вокруг Земли.

Меньшие тела в солнечной системе – малые планеты и метеорные тела – могут иметь очень неправильную форму, но из-за их малых размеров по сравнению с их расстояниями от Солнца и от больших планет допускается, целиком в пределах точности наблюдений, рассматривать эти тела как материальные точки. Для комет это приближение может оказаться менее оправданным в силу их больших размеров в отдельных случаях. Однако даже для комет существует надежное доказательство сплошной концентрации массы в ядрах. Неизвестно ни одного твердо установленного отклонения в движении комет, которое могло бы быть приписано несферическому распределению масс.

Среди планет, обладающих спутниками, имеется несколько примеров спутников с расстояниями от их главных планет, лишь в несколько раз превышающими радиус центральной планеты. Наименьшее известное отношение расстояния спутника к радиусу планеты, а именно 2,54 : 1, имеет V спутник Юпитера. В таких случаях влиянием несферичности планеты на движение спутника, вообще говоря, пренебречь нельзя. Эта проблема подробно изучается в гл. III и XVII также в связи с орбитами искусственных спутников, для которых требуется более сложное решение, чем для естественных спутников в солнечной системе.

ж) Существует еще одно обстоятельство, которое в значительной мере упрощает изучение движений тел в солнечной системе. По сравнению с Солнцем массы больших планет малы. Самой большой массой является масса Юпитера, равная примерно 1/1000 массы Солнца. Следующей наибольшей массой, равной 1/3500 массы Солнца, обладает Сатурн. Следовательно, всегда, за исключением случая тела, близкого к главной планете, притяжение Солнца подавляющим образом превосходит притяжение больших планет. Известно, что массы малых планет, комет и метеорных тел очень малы. Например, общая масса всех малых планет, вместе взятых, оценивается меньшей, чем 1/500 массы Земли.

В силу этих обстоятельств пригодное первое приближение к движению большой планеты, малой планеты, кометы или метеорной частицы

можно получить, рассматривая только взаимное притяжение между Солнцем и телом, движение которого необходимо изучить, и считая оба тела материальными точками. Это — известная задача двух тел, которая будет изучаться в последующих разделах.

3. Уравнения движения задачи двух тел. Рассмотрим две материальные точки m_a и m_b с координатами $\xi_a, \eta_a, \zeta_a; \xi_b, \eta_b, \zeta_b$ в декартовой системе координат. Когда рассматриваются движения в солнечной системе, то выбирается правая система координат. Обозначим расстояние между обеими массами через r . Тогда сила, действующая между этими двумя массами, есть

$$F = k^2 \frac{m_a m_b}{r^2},$$

где значение k зависит от выбранных единиц массы, времени и расстояния. Для численных расчетов выбор единиц обычно определяется единицами, используемыми в национальных эфемериках и вспомогательных таблицах. Для теоретических исследований обычно принимают такие единицы, чтобы $k^2 = 1$, или исключают k из уравнений. Обращая должное внимание на размерность выведенных величин, всегда оказывается возможным восстановить, если требуется, k в окончательных результатах анализа. С точки зрения численных приложений выгодно в выражениях для F писать множитель k^2 , а не множитель f (как, например, делает Тиссеранд¹⁾).

Прямая $\overrightarrow{m_a m_b}$ имеет следующие направляющие косинусы:

$$\frac{\xi_b - \xi_a}{r}, \quad \frac{\eta_b - \eta_a}{r}, \quad \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r}.$$

Следовательно, компоненты силы, действующей на m_a , будут

$$F_{a\xi} = F \frac{\xi_b - \xi_a}{r} = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3},$$

$$F_{a\eta} = F \frac{\eta_b - \eta_a}{r} = k^2 m_a m_b \frac{\eta_b - \eta_a}{r^3},$$

$$F_{a\zeta} = F \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r} = k^2 m_a m_b \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r^3},$$

а компоненты силы, действующей на m_b ,

$$F_{b\xi} = k^2 m_a m_b \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}, \quad F_{b\eta} = k^2 m_a m_b \frac{\eta_a - \eta_b}{r^3}, \quad F_{b\zeta} = k^2 m_a m_b \frac{\zeta_a - \zeta_b}{r^3}.$$

Очевидно, что $F_{a\xi} = -F_{b\xi}$ и т. д. в силу третьего закона движения. Если выражения для $F_{a\xi}, F_{a\eta}, \dots, F_{a\zeta}$ взять в качестве правых частей уравнений движения (1), то уравнения движения примут следующую явную форму:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\xi}_a &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3}, \\ m_a \ddot{\eta}_a &= k^2 m_a m_b \frac{\eta_b - \eta_a}{r^3}, \\ m_a \ddot{\zeta}_a &= k^2 m_a m_b \frac{\zeta_b - \zeta_a}{r^3}; \end{aligned} \tag{2}$$

¹⁾ Tisserand, Mécanique Céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1889.

$$\begin{aligned} m_b \ddot{\xi}_b &= k^2 m_a m_b \frac{\dot{\xi}_a - \dot{\xi}_b}{r^3}, \\ m_b \ddot{\eta}_b &= k^2 m_a m_b \frac{\dot{\eta}_a - \dot{\eta}_b}{r^3}, \\ m_b \ddot{\zeta}_b &= k^2 m_a m_b \frac{\dot{\zeta}_a - \dot{\zeta}_b}{r^3}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$r^2 = (\xi_a - \xi_b)^2 + (\eta_a - \eta_b)^2 + (\zeta_a - \zeta_b)^2.$$

В этой задаче уравнения движения можно было бы написать почти сразу, и задача сводится к системе шести дифференциальных уравнений, каждое из которых второго порядка. Полное интегрирование этой системы требует введения двенадцати постоянных интегрирования.

4. Движение центра масс. Можно получить шесть постоянных интегрирования, используя то, что правые части соответствующих уравнений (2) и (3) равны по величине, но противоположны по знаку. Отсюда почарным сложением получаются уравнения

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\xi}_a + m_b \ddot{\xi}_b &= 0, \\ m_a \ddot{\eta}_a + m_b \ddot{\eta}_b &= 0, \\ m_a \ddot{\zeta}_a + m_b \ddot{\zeta}_b &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрируя их один раз, получаем

$$\begin{aligned} m_a \dot{\xi}_a + m_b \dot{\xi}_b &= a_1, \\ m_a \dot{\eta}_a + m_b \dot{\eta}_b &= a_2, \\ m_a \dot{\zeta}_a + m_b \dot{\zeta}_b &= a_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где a_1 , a_2 и a_3 — произвольные постоянные. Еще одно интегрирование дает

$$\begin{aligned} m_a \xi_a + m_b \xi_b &= a_1 t + \beta_1, \\ m_a \eta_a + m_b \eta_b &= a_2 t + \beta_2, \\ m_a \zeta_a + m_b \zeta_b &= a_3 t + \beta_3, \end{aligned} \quad (6)$$

где β_1 , β_2 и β_3 — три дополнительные произвольные постоянные.

Другую форму для этих выражений можно получить, вводя ξ_g , η_g , ζ_g в качестве координат центра масс. Тогда

$$\begin{aligned} m_a \dot{\xi}_g + m_b \dot{\xi}_g &= (m_a + m_b) \xi_g, \\ m_a \dot{\eta}_g + m_b \dot{\eta}_g &= (m_a + m_b) \eta_g, \\ m_a \dot{\zeta}_g + m_b \dot{\zeta}_g &= (m_a + m_b) \zeta_g. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \xi_g &= \frac{a_1}{m_a + m_b} t + \frac{\beta_1}{m_a + m_b}, \\ \eta_g &= \frac{a_2}{m_a + m_b} t + \frac{\beta_2}{m_a + m_b}, \\ \zeta_g &= \frac{a_3}{m_a + m_b} t + \frac{\beta_3}{m_a + m_b}. \end{aligned} \quad (8)$$

что говорит о том, что центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, причем координаты центра масс в момент времени $t=0$ равны $\beta_1(m_a+m_b)$, $\beta_2(m_a+m_b)$, $\beta_3(m_a+m_b)$, а постоянная скорость дается формулой

$$V_g^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(m_a + m_b)^2}.$$

Направляющие косинусы скорости, очевидно, будут

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Важно ясно понимать смысл постоянных интегрирования. Некоторая путаница может оставаться до тех пор, пока не будет полностью понято их математическое и физическое значения. В данном случае интерпретация ясна непосредственно. С математической точки зрения смысл постоянных интегрирования состоит просто в том, что какие бы значения ни были присвоены a_1 , a_2 , a_3 , β_1 , β_2 , β_3 , решение задачи, в которое входят эти постоянные, будет удовлетворять исходным уравнениям. С физической точки зрения это решение обычно будет применяться для описания движения некоторой физической системы. В этом случае определенная система значений постоянных интегрирования будет служить для отождествления этой физической системы.

В качестве иллюстрации допустим, что солнечная система ограничена двумя телами — Солнцем и Землей. Постоянные β_1 , β_2 , β_3 , разделенные на сумму масс, дают координаты центра масс этой системы при $t=0$. Постоянные a_1 , a_2 , a_3 , разделенные на сумму масс, определяют компоненты скорости центра масс системы.

Известно, что скорость солнечной системы, если ее определять относительно ближайших звезд, равна 19 км/сек и приблизительно направлена в точку с прямым восхождением 18^h и склонением -30° . Направляющие косинусы апекса в экваториальной системе координат, ось ζ которой направлена в северный полюс небесной сферы, суть

$$0,000, \quad -0,866, \quad +0,500,$$

а компоненты скорости движения солнечной системы в км/сек

$$0,0, \quad -16,5, \quad +9,5.$$

Эти числа, очевидно, являются значениями в км/сек выражений

$$\frac{a_1}{m_a + m_b}, \quad \frac{a_2}{m_a + m_b}, \quad \frac{a_3}{m_a + m_b}.$$

Следовательно, постоянные интегрирования a_1 , a_2 , a_3 , β_1 , β_2 , β_3 существенны только для описания положения центра масс системы двух тел; они излишни, если необходимо изучить движение внутри этой системы.

При помощи равенств (6) можно привести систему (2), (3) двенадцатого порядка к системе шестого порядка любым из двух указанных ниже методов.

5. Уравнения движения относительно центра масс. Введем

$$\begin{aligned} x_a &= \xi_a - \xi_g, & y_a &= \eta_a - \eta_g, & z_a &= \zeta_a - \zeta_g, \\ x_b &= \xi_b - \xi_g, & y_b &= \eta_b - \eta_g, & z_b &= \zeta_b - \zeta_g. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\xi_b - \xi_a = x_b - x_a, \quad \eta_b - \eta_a = y_b - y_a, \quad \zeta_b - \zeta_a = z_b - z_a$$

и так как

$$\ddot{\xi}_g = 0, \quad \ddot{\eta}_g = 0, \quad \ddot{\zeta}_g = 0,$$

то уравнения (2) и (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a &= k^2 m_a m_b \frac{x_b - x_a}{r^3}, \\ m_a \ddot{y}_a &= k^2 m_a m_b \frac{y_b - y_a}{r^3}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$m_a \ddot{z}_a = k^2 m_a m_b \frac{z_b - z_a}{r^3};$$

$$m_b \ddot{x}_b = k^2 m_a m_b \frac{x_a - x_b}{r^3},$$

$$m_b \ddot{y}_b = k^2 m_a m_b \frac{y_a - y_b}{r^3}, \quad (10)$$

$$m_b \ddot{z}_b = k^2 m_a m_b \frac{z_a - z_b}{r^3},$$

где

$$r^2 = (x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2.$$

Это равносильно использованию движущегося центра масс как начала системы координат, а сравнение уравнений (2), (3) с уравнениями (9), (10) показывает, что уравнения не изменяются при этом преобразовании. Легко показать самым общим образом, что уравнения остаются неизменными, если новое начало движется равномерно произвольным образом относительно первоначальной системы координат, и что они также остаются неизменными независимо от ориентировки координатной системы.

Теперь уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} m_a x_a + m_b x_b &= 0, \\ m_a y_a + m_b y_b &= 0, \\ m_a z_a + m_b z_b &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, x_b , y_b , z_b можно исключить из уравнений (9) и x_a , y_a , z_a — из (10). Для этого необходимо выразить r только через x_a , y_a , z_a или через x_b , y_b , z_b . Поскольку

$$\begin{aligned} x_a - x_b &= \frac{m_a + m_b}{m_b} x_a - \frac{m_a + m_b}{m_a} x_b, \\ y_a - y_b &= \frac{m_a + m_b}{m_b} y_a - \frac{m_a + m_b}{m_a} y_b, \\ z_a - z_b &= \frac{m_a + m_b}{m_b} z_a - \frac{m_a + m_b}{m_a} z_b, \end{aligned} \quad (12)$$

то отсюда следует, что

$$r^2 = \frac{(m_a + m_b)^2}{m_b^2} (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) = \frac{(m_a + m_b)^2}{m_a^2} (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2),$$

или же, если

$$\begin{aligned} r_a^2 &= x_a^2 + y_a^2 + z_a^2, & r_b^2 &= x_b^2 + y_b^2 + z_b^2, \\ \mu_a &= k^2 \frac{m_b^3}{(m_a + m_b)^2}, & \mu_b &= k^2 \frac{m_a^3}{(m_a + m_b)^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

то уравнения (9) и (10) можно записать в виде

$$\ddot{x}_a = -\mu_a \frac{\dot{x}_a}{r_a^3}, \quad \ddot{y}_a = -\mu_a \frac{\dot{y}_a}{r_a^3}, \quad \ddot{z}_a = -\mu_a \frac{\dot{z}_a}{r_a^3}, \quad (14)$$

$$\ddot{x}_b = -\mu_b \frac{\dot{x}_b}{r_b^3}, \quad \ddot{y}_b = -\mu_b \frac{\dot{y}_b}{r_b^3}, \quad \ddot{z}_b = -\mu_b \frac{\dot{z}_b}{r_b^3}. \quad (15)$$

Очевидно, что решение либо уравнений (14), либо уравнений (15) даст все необходимое. Если при полном решении уравнений (14) x_a, y_a, z_a получаются как функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования, то выражения для x_b, y_b, z_b можно написать при помощи уравнений (11). Следовательно, с помощью применимой методики достигнуто приведение к системе уравнений шестого порядка. Эти уравнения не будут использованы для интегрирования, однако мы обратимся к ним в следующем разделе.

6. Уравнения относительного движения. Более распространенная методика состоит в определении движения массы m_b относительно m_a . Чтобы получить эти уравнения, положим

$$x = x_b - x_a, \quad y = y_b - y_a, \quad z = z_b - z_a.$$

Вычитая уравнения (9), разделенные на m_a , из соответствующих уравнений (10), деленных на m_b , при

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mu = k^2 (m_a + m_b),$$

получаем следующие уравнения:

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3}. \quad (16)$$

Уравнения (16) представляют новую систему, приведенную к системе шестого порядка. Если x, y, z получены интегрированием в виде функций от t и шести постоянных интегрирования, то выражения для $x_a, x_b, y_a, y_b, z_a, z_b$ можно получить из соотношений

$$\begin{aligned} x_a &= -\frac{m_b}{m_a + m_b} x, & x_b &= +\frac{m_a}{m_a + m_b} x, \\ y_a &= -\frac{m_b}{m_a + m_b} y, & y_b &= +\frac{m_a}{m_a + m_b} y, \\ z_a &= -\frac{m_b}{m_a + m_b} z, & z_b &= +\frac{m_a}{m_a + m_b} z, \end{aligned} \quad (17)$$

которые можно вывести при помощи уравнений (11).

7. Интегралы площадей. Очевидно, что если первое уравнение из (16) умножить на y , а второе — на x , то правые части станут одинаковыми. Вычитание дает

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 0.$$

Три уравнения (16) можно сгруппировать попарно тремя различными способами следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{yz} - \ddot{zy} &= 0, \\ \ddot{zx} - \ddot{xz} &= 0, \\ \ddot{xy} - \ddot{yx} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, получая

$$\begin{aligned} \dot{yz} - \dot{zy} &= c_1, \\ \dot{zx} - \dot{xz} &= c_2, \\ \dot{xy} - \dot{yx} &= c_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Эти равенства представляют собой три интеграла площадей, где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Из (19) легко получается следующее уравнение:

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \quad (20)$$

Это — уравнение плоскости, проходящей через начало координат, которому должны удовлетворять координаты в орбите относительного движения. Следовательно, орбита массы m_b при ее движении относительно m_a лежит в неподвижной плоскости, проходящей через m_a . Эта плоскость

является плоскостью орбиты. Ориентировка плоскости орбиты определяется отношениями между c_1, c_2, c_3 .

Положим для краткости

$$G = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

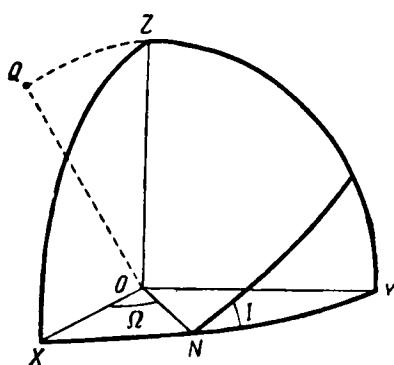
где G всегда следует выбирать положительным. Направляющие косинусы нормали к плоскости орбиты (20) тогда будут

$$\frac{c_1}{G}, \quad \frac{c_2}{G}, \quad \frac{c_3}{G}.$$

Плоскость орбиты обычно определяется геометрически долготой восходящего узла и наклонностью. Если движение по орбите прямое, т. е. против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z , то I выбирается в первом квадранте, а нормаль выбирается с той же стороны плоскости xy , что и положительное направление оси z . Если движение по орбите является обратным, то I выбирают во втором квадранте, а нормаль берется с той стороны от плоскости xy , которая содержит отрицательное направление оси z . Если смотреть с этой стороны, движение по орбите происходит против часовой стрелки, но если смотреть со стороны положительной оси z , то движение происходит по часовой стрелке.

Рис. 1. Ориентация плоскости орбиты и нормаль к ней OQ .

Вообразим сферу (рис. 1) с центром в начале координат. Плоскость орбиты пересечет эту сферу по большому кругу. Точка N является пересечением этого круга с плоскостью xy , где тело переходит на ту



сторону от плоскости xy , которая содержит положительное направление оси z . Пусть нормаль пересекает сферу в точке Q . Рассмотрим сферические треугольники QXN и QYN . Формула косинусов дает

$$\cos X\hat{Q} = \frac{c_1}{G} = \sin \Omega \sin I,$$

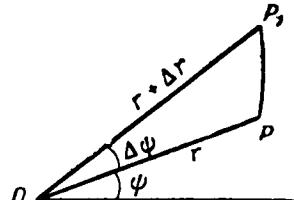
$$\cos Y\hat{Q} = \frac{c_2}{G} = -\cos \Omega \sin I.$$

Кроме того,

$$\cos Z\hat{Q} = \frac{c_3}{G} = \cos I.$$

Теперь покажем, что $\frac{1}{2} c_1, \frac{1}{2} c_2, \frac{1}{2} c_3$ представляют собой проекции соответственно на плоскости yz , zx и xy площади, описанной радиусом-вектором за единицу времени. Рассмотрим сначала движение в плоскости орбиты, и пусть положение m_b относительно m_a определяется полярными координатами r, ψ . Начало отсчета угловой координаты можно выбрать в любом фиксированном направлении на плоскости орбиты. Пусть на рис. 2 P есть положение тела m_b в момент времени t , а P_1 — положение в момент $t + \Delta t$. Тогда площадь треугольника OPP_1 равна

$$\frac{1}{2} r (r + \Delta r) \Delta\psi = \frac{1}{2} r^2 \Delta\psi + \frac{1}{2} r \Delta r \Delta\psi.$$



Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\psi}{dt},$$

Рис. 2. Дифференциал площади.

где dA/dt есть площадь, описанная в единицу времени. Определим теперь прямоугольные координаты в плоскости орбиты формулами

$$(x) = r \cos \psi, \quad (y) = r \sin \psi.$$

Тогда

$$\dot{(x)} = -r\dot{\psi} \sin \psi + \dot{r} \cos \psi, \quad \dot{(y)} = r\dot{\psi} \cos \psi + \dot{r} \sin \psi,$$

и находим, что

$$(x) \dot{(y)} - (y) \dot{(x)} = r^2 \dot{\psi}. \quad (22)$$

Обозначим проекцию r на плоскость yz через r_1 , а проекцию $\Delta\psi$ — через $\Delta\psi_1$; аналогично пусть проекциями на плоскость zx будут $r_2, \Delta\psi_2$, а на плоскость xy — $r_3, \Delta\psi_3$, причем углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 отсчитываются соответственно от осей y, z и x . Тогда отсюда следует, что проекции площади треугольника OPP_1 , если отбросить члены с произведениями вида $\Delta r_j \Delta\psi_j$, равны

$$\frac{1}{2} r_1^2 \Delta\psi_1, \quad \frac{1}{2} r_2^2 \Delta\psi_2, \quad \frac{1}{2} r_3^2 \Delta\psi_3.$$

Поэтому проекции площади, описанной радиусом-вектором в единицу времени, на эти три плоскости будут

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{1}{2} r_1^2 \frac{d\psi_1}{dt}, \quad \frac{dA_2}{dt} = \frac{1}{2} r_2^2 \frac{d\psi_2}{dt}, \quad \frac{dA_3}{dt} = \frac{1}{2} r_3^2 \frac{d\psi_3}{dt}. \quad (23)$$

Переход к прямоугольным координатам может быть выполнен при помощи следующих преобразований:

$$\begin{aligned}y &= r_1 \cos \psi_1, & z &= r_2 \cos \psi_2, & x &= r_3 \cos \psi_3, \\z &= r_1 \sin \psi_1, & x &= r_2 \sin \psi_2, & y &= r_3 \sin \psi_3,\end{aligned}$$

которые окончательно дают выражения, аналогичные (22):

$$\begin{aligned}\dot{yz} - \dot{zy} &= r_1^2 \dot{\psi}_1, \\ \dot{zx} - \dot{xz} &= r_2^2 \dot{\psi}_2, \\ \dot{xy} - \dot{yx} &= r_3^2 \dot{\psi}_3.\end{aligned}\tag{24}$$

Следовательно, из соотношений (24), (23) и (19) получается, что

$$c_1 = 2 \frac{dA_1}{dt}, \quad c_2 = 2 \frac{dA_2}{dt}, \quad c_3 = 2 \frac{dA_3}{dt}.$$

Сумма квадратов трех уравнений (19) равна

$$\begin{aligned}G^2 &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \\&= y^2 z^2 + z^2 y^2 + z^2 x^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2 + y^2 x^2 - 2yz\ddot{z} - 2zx\ddot{x} - 2xy\ddot{y} \\&= (r^2 - x^2) \dot{x}^2 + (r^2 - y^2) \dot{y}^2 + (r^2 - z^2) \dot{z}^2 - 2yz\ddot{z} - 2zx\ddot{x} - 2xy\ddot{y},\end{aligned}$$

или окончательно

$$G^2 = r^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})^2.\tag{25}$$

Поскольку

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = r\dot{r},$$

то из (25) легко видеть, что G не зависит от ориентировки координатной системы. В частном случае, когда $I = 0$, $G = c_3$ представляет удвоенную площадь, описанную радиусом-вектором в плоскости орбиты. В силу независимости G от ориентировки координатной системы это должно выполняться во всех случаях, и отсюда

$$G = r^2 \dot{\psi}.$$

Постоянная интеграла площадей для орбиты при относительном движении может быть представлена вектором, имеющим длину G и направленным по нормали к орбитальной плоскости. Компоненты c_1 , c_2 , c_3 этого вектора представляют постоянные скалярных интегралов площадей для плоскостей, перпендикулярных к трем координатным осям.

8. Интеграл живых сил¹⁾ (интеграл энергии). Уравнения (16), если их умножить последовательно на множители x , y , z и сложить, дают

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = -\mu \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}}{r^3}.$$

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{r^3} \frac{d(r^2)}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

¹⁾ Название «живая сила» является точным эквивалентом латинского выражения *vis viva*, которое часто переводится как «кинетическая энергия».

После интегрирования оно дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2 \left(\frac{\mu}{r} + C \right), \quad (26)$$

где C есть постоянная интегрирования. Левая часть выражения (26) представляет собой квадрат относительной скорости. Поэтому постоянная C не зависит от ориентировки координатной системы. Уравнение (26) показывает, что квадрат скорости одного тела относительно другого обратно пропорционален расстоянию между ними с точностью до аддитивной постоянной.

Полезно написать этот интеграл в другой форме. Полагая $U = \mu/r$, можно записать уравнения (16) в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (27)$$

Поскольку U является функцией только от координат x, y, z , т. е. не зависит от компонентов скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, и независимая переменная t также не входит в U явным образом, то мы имеем

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z},$$

откуда следует, что если три уравнения (27) умножить последовательно на $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и сложить, то

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{dU}{dt}.$$

Интегрирование дает

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = U + C. \quad (28)$$

Этот интеграл можно записать в виде

$$\frac{1}{2}V^2 - U = C.$$

Относительно дальнейшего рассмотрения этого интеграла см. разд. 15 этой главы.

9. Движение в плоскости орбиты. Поскольку движение происходит в плоскости, то можно ввести координатную систему x, y, z такую, что плоскость xy совпадает с плоскостью орбиты. Тогда $z \equiv 0$, и уравнения движения принимают вид

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad (29)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Введем теперь полярные координаты формулами

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

Тогда

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2.$$

Следовательно, интеграл площадей и интеграл живых сил можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\psi} &= G, \\ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 &= 2 \left(\frac{\mu}{r} + C \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Эти уравнения составляют систему второго порядка, однако присутствие двух постоянных интегрирования делает их полностью эквивалентными системе (29), являющейся системой четвертого порядка.

Переменная ψ входит только посредством своей производной. Исключение ψ дает

$$\dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} = 2 \left(\frac{\mu}{r} + C \right),$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\mu}{r} + C \right)}. \quad (31)$$

Это уравнение пригодится в дальнейшем. Чтобы получить уравнение для r , выраженного через угловую координату ψ , удобно исключить t из уравнения (31) и первого уравнения из (30). В результате получится

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \\ &= \frac{dr}{d\psi} \cdot \frac{G}{r^2} = \\ &= -\frac{d}{d\psi} \left(\frac{G}{r} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (31) можно написать в виде

$$-\frac{d}{d\psi} \left(\frac{G}{r} \right) = \sqrt{-\frac{G^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\mu}{r} + C \right)}. \quad (32)$$

Выражение под знаком корня можно записать следующим образом:

$$2C + \frac{\mu^2}{G^2} - \left(-\frac{\mu}{G} + \frac{G}{r} \right)^2.$$

Отсюда, если

$$q = -\frac{\mu}{G} + \frac{G}{r}, \quad Q^2 = 2C + \frac{\mu^2}{G^2},$$

уравнение (32) принимает вид

$$\frac{dq}{d\psi} = -\sqrt{Q^2 - q^2}. \quad (33)$$

Еще одно преобразование

$$\frac{q}{Q} = \sigma$$

дает

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = -\sqrt{1 - \sigma^2},$$

или

$$d\psi = \frac{-d\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$\psi = \arccos \sigma + \gamma, \quad (34)$$

где γ есть постоянная интегрирования. Выражение (34) равносильно

$$\sigma = \cos(\psi - \gamma). \quad (35)$$

Но

$$\sigma = \frac{q}{Q} = \frac{-(\mu/G) + (G/r)}{\sqrt{2C + (\mu^2/G^2)}}.$$

Следовательно, если это выражение для σ ввести в (35), то получится следующее уравнение:

$$-\frac{\mu}{G} + \frac{G}{r} = \sqrt{2C + \frac{\mu^2}{G^2}} \cos(\psi - \gamma),$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2} + \frac{1}{G} \sqrt{2C + \frac{\mu^2}{G^2}} \cos(\psi - \gamma). \quad (36)$$

Это уравнение можно сравнить с уравнением для r в полярных координатах, если орбита является эллипсом с началом координат в фокусе. Тогда

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\psi - \tilde{\omega})}{a(1 - e^2)}, \quad (37)$$

где $\tilde{\omega}$ есть долягота перигелия, a — большая полуось и e — эксцентриситет.

После еще одного незначительного преобразования уравнение (36) переходит в

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{G^2} + \frac{\mu}{G^2} \sqrt{\frac{2G^2C}{\mu^2} + 1} \cos(\psi - \gamma). \quad (38)$$

Тогда сравнение уравнений (37) и (38) дает

$$\begin{aligned} \gamma &= \tilde{\omega}, \\ \frac{\mu}{G^2} &= \frac{1}{a(1 - e^2)}, \\ \frac{2G^2C}{\mu^2} + 1 &= e^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Из этих результатов следует, что значение постоянной интегрирования G , выраженное через обычные постоянные a , e , имеет вид

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \\ &= \sqrt{\mu p}, \end{aligned} \quad (40)$$

где p — параметр орбиты, т. е.

$$p = a(1 - e^2).$$

Подстановка этого выражения вместо G в последнее уравнение (39) дает

$$C = -\frac{\mu}{2a}. \quad (41)$$

При помощи новых постоянных интегрирования a , e интегралы (30) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\psi} &= \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, \\ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 &= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

10. Третий закон Кеплера. Поскольку $G = 2dA/dt$, то площадь, описанная радиусом-вектором в единицу времени, дается формулой

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)}. \quad (42)$$

Площадь всего эллипса равна πab , где b есть малая полуось, или

$$b = a \sqrt{1 - e^2}.$$

Пусть период обращения по эллипсу есть P . Среднее движение n определяется как средняя скорость, с которой угол ψ возрастает в течение периода:

$$n = \frac{2\pi}{P}.$$

Следовательно, секториальная скорость равна

$$\frac{\pi ab}{P} = \frac{nab}{2} = \frac{1}{2} na^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Она должна равняться правой части уравнения (42), откуда

$$na^2 = \sqrt{\mu a},$$

или

$$\mu = n^2 a^3. \quad (43)$$

Это — аналитическое выражение третьего закона Кеплера.

11. Эксцентрическая аномалия. До сих пор были получены только три из четырех постоянных, необходимых для полного интегрирования уравнений (24). Этими тремя постоянными являются или

$$\tilde{\omega}, C, G,$$

или

$$\tilde{\omega}, a, e.$$

Уравнение для орбиты было найдено в следующем виде:

$$r = \frac{a (1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (44)$$

где истинная аномалия f введена равенством

$$f = \psi - \tilde{\omega}.$$

Мы не получили еще выражения, дающего ψ или f как функцию от t . Непосредственным подходом к решению этой задачи была бы подстановка соотношения (37) в первое уравнение из (30), дающее уравнение

$$\sqrt{\mu a (1 - e^2)} = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{\{1 + e \cos (\psi - \tilde{\omega})\}^2} \frac{d\psi}{dt},$$

или при $\mu = n^2 a^3$

$$n dt = - \frac{(1-e^2)^{3/2} d\psi}{\{1+e \cos(\psi-\tilde{\omega})\}^2},$$

интегрирование которого дало бы t как функцию от $\psi - \tilde{\omega}$, откуда можно было бы получить ψ как функцию от t . Хотя этот путь возможен, все же, чтобы достичь нашей цели, лучше вернуться к уравнению (31), которое при помощи (40) и (41) можно написать в виде

$$r \frac{dr}{dt} = \sqrt{-\mu a (1-e^2) + 2\mu r - \frac{\mu r^2}{a}}.$$

При $\mu = a^3 n^2$ это уравнение принимает вид

$$\frac{r}{na} \frac{dr}{dt} = \sqrt{-a^2 + a^2 e^2 + 2ar - r^2} = \\ = \sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2},$$

или

$$na dt = \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}.$$

Интегрирование этого выражения элементарно. Положим

$$r-a = -ae \cos u, \quad (45)$$

где u есть некоторая вспомогательная переменная, называемая эксцентрической аномалией. Имеем

$$dr = -ae \sin u du \quad (46)$$

и

$$a^2 e^2 - (r-a)^2 = a^2 e^2 \sin^2 u.$$

Следовательно, в результате этого преобразования получается

$$n dt = (1-e \cos u) du.$$

Это уравнение после интегрирования дает

$$u - e \sin u = n(t-T), \quad (47)$$

где T — постоянная интегрирования.

12. Средняя аномалия. Из уравнения (44), выражающего r через истинную аномалию, вытекает, что в перигелии

$$f=0, \quad r=a(1-e);$$

в афелии

$$f=\pi, \quad r=a(1+e).$$

Из (45) следует также, что

$$\text{для } u=0 \quad r=a(1-e),$$

$$\text{для } u=\pi \quad r=a(1+e).$$

Следовательно, углы u и f равны при

$$u=f=0 \quad \text{и} \quad u=f=\pi.$$

Пусть в уравнении (47) T соответствует моменту прохождения через перигелий, и положим

$$n(t - T) = l. \quad (48)$$

Это соотношение определяет среднюю аномалию l , которая по определению равна нулю в перигелии. При $u = \pi$ следует, что $l = \pi$. Следовательно, все три аномалии равны нулю в перигелии и равны π в афелии. Теперь уравнение (47) можно записать в следующем виде:

$$u - e \sin u = l. \quad (49)$$

Это — уравнение Кеплера.

Постоянная T , входящая в уравнение (47), является четвертой постоянной интегрирования, необходимой для определения движения в плоскости орбиты. В этом виде она необходима для указания времени прохождения через перигелий. Эта характеристика вместе со значениями постоянных интегрирования a , e , ω и параметром μ определит движение по орбите для любого момента времени. Эта форма часто используется для кометных орбит. Для планетных орбит в качестве четвертой постоянной интегрирования чаще принято применять значение l в начальную эпоху. Пусть эта эпоха есть $t = t_0$. Тогда, если $l = l_0$ при $t = t_0$, выражение для средней аномалии принимает вид

$$l = l_0 + n(t - t_0), \quad (50)$$

где n дается формулой (43) как функция от a и μ .

13. Формулы для определения положения в плоскости орбиты. Чтобы вычислить положение в орбите в любой момент времени, необходимо определить u из уравнения Кеплера, являющегося трансцендентным относительно u . После того как u найдено, можно определить из (45) радиус-вектор

$$r = a(1 - e \cos u). \quad (51)$$

Чтобы получить f , полезно сначала из (44) найти $r \cos f$, что дает

$$\begin{aligned} r \cos f &= -\frac{r}{e} + \frac{a(1 - e^2)}{e} \\ &= a(\cos u - e), \\ \cos f &= \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}. \end{aligned}$$

Тогда легко видеть, что

$$1 + \cos f = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e \cos u},$$

$$1 - \cos f = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{1 - e \cos u}.$$

Эти формулы можно написать в следующем виде:

$$2 \cos^2 \frac{f}{2} = \frac{1 - e}{1 - e \cos u} \cdot 2 \cos^2 \frac{u}{2},$$

$$2 \sin^2 \frac{f}{2} = \frac{1 + e}{1 - e \cos u} \cdot 2 \sin^2 \frac{u}{2}.$$

Деля вторую формулу на первую и извлекая квадратный корень, получим

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \quad (52)$$

Выражения (51) и (52) дают, таким образом, радиус-вектор и истинную аномалию, если известна эксцентрическая аномалия u . Вопрос относительно квадранта f никогда не возникает. Квадрант $f/2$, очевидно, тот же, что и квадрант $u/2$, так как и f одновременно проходят через значения 0 и π . Формула (52) особенно полезна для логарифмических вычислений. Можно упростить множитель $(1+e)^{1/2} \times (1-e)^{-1/2}$, вводя φ равенством

$$e = \sin \varphi.$$

Поэтому для эллиптических орбит

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, если $\varphi' = (\pi/2) - \varphi$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} &= \sqrt{\frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+\cos \varphi'}{1-\cos \varphi'}} = \\ &= \operatorname{ctg} \frac{\varphi'}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \quad (53)$$

При вычислениях с использованием вычислительных машин часто более удобно применять прямоугольные координаты вместо полярных. Чтобы получить требуемое выражение, введем систему координат xy , расположенную в плоскости орбиты, с осью x , направленной в перигелий. Тогда для выражений через эксцентрическую аномалию получим формулы

$$\bar{x} = r \cos f = a(\cos u - e), \quad (54)$$

$$\bar{y} = r \sin f = a \sqrt{1-e^2} \sin u, \quad (55)$$

первая из которых была выведена выше. Последняя получается непосредственно из

$$r^2 - r^2 \cos^2 f = a^2(1 - 2e \cos u + e^2 \cos^2 u - \cos^2 u + 2e \cos u - e^2),$$

$$r^2 \sin^2 f = a^2(1 - e^2) \sin^2 u.$$

Операция извлечения квадратного корня из обеих частей этого уравнения не приводит к неопределенности в смысле выбора знака, так как

$$0 < u < \pi \text{ требует } 0 < f < \pi,$$

$$\pi < u < 2\pi \text{ требует } \pi < f < 2\pi.$$

14. Движение относительно центра масс. На этом этапе необходимо вернуться к некоторым уравнениям, полученным перед уравнениями (16) для относительного движения, на которых основаны рассуждения в разд. 7–13. В разд. 5 было отмечено, что интегрирование задачи двух тел можно было бы основывать либо на системе уравнений

ний (14), либо на системе (15). Сравнение этих уравнений с уравнениями системы (16) показывает, что их интегрирование должно привести к решению того же вида, что и полученное интегрированием (16). Существенная разница состоит в том, что μ следует заменить на μ_a для (14) и на μ_b для (15).

Из соотношений (17) следует, что для того, чтобы выразить x_a , y_a , z_a , необходимо вместо a в выражении для x , y , z ввести

$$a_a = + \frac{m_b}{m_a + m_b} a$$

и заменить $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\omega} + \pi$. Чтобы выразить x_b , y_b , z_b , необходимо заменить a в выражении для x , y , z на

$$a_b = + \frac{m_a}{m_a + m_b} a,$$

оставляя все остальные постоянные интегрирования неизменными. В частности, n остается неизменным. Это даст

$$\begin{aligned} n^2 a_a^3 &= \mu_a = \frac{m_b^3}{(m_a + m_b)^3} \mu, \\ n^2 a_b^3 &= \mu_b = \frac{m_a^3}{(m_a + m_b)^3} \mu, \end{aligned}$$

что согласуется с введенными значениями для μ , μ_a , μ_b .

15. Интеграл энергии. Мы возвращаемся теперь к уравнениям (2) и (3) — первоначальным уравнениям задачи двух тел — с целью получить интеграл живых сил и интегралы площадей для этих уравнений. Поскольку в этих уравнениях

$$r^2 = (\xi_b - \xi_a)^2 + (\eta_b - \eta_a)^2 + (\zeta_b - \zeta_a)^2,$$

то отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_a} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_b} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}$$

с аналогичными выражениями для переменных η и ζ . Следовательно, если

$$U^* = \frac{k^2 m_a m_b}{r}, \quad (56)$$

то уравнения (2) и (3) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{\xi}_a &= \frac{\partial U^*}{\partial \xi_a}, & m_b \ddot{\xi}_b &= \frac{\partial U^*}{\partial \xi_b}, \\ m_a \ddot{\eta}_a &= \frac{\partial U^*}{\partial \eta_a}, & m_b \ddot{\eta}_b &= \frac{\partial U^*}{\partial \eta_b}, \\ m_a \ddot{\zeta}_a &= \frac{\partial U^*}{\partial \zeta_a}, & m_b \ddot{\zeta}_b &= \frac{\partial U^*}{\partial \zeta_b}. \end{aligned} \quad (57)$$

Важно отметить, что U^* является функцией от шести зависимых переменных ξ_a , η_a , ζ_a , ξ_b , η_b , ζ_b , т. е. U^* не является функцией от компонент скорости, и независимая переменная t не присутствует явно в выражении для U^* . Как следствие этих свойств, выполняется следующее соотношение:

$$\frac{dU^*}{dt} = \frac{\partial U^*}{\partial \xi_a} \dot{\xi}_a + \frac{\partial U^*}{\partial \eta_a} \dot{\eta}_a + \frac{\partial U^*}{\partial \zeta_a} \dot{\zeta}_a + \frac{\partial U^*}{\partial \xi_b} \dot{\xi}_b + \frac{\partial U^*}{\partial \eta_b} \dot{\eta}_b + \frac{\partial U^*}{\partial \zeta_b} \dot{\zeta}_b. \quad (58)$$

Умножая шесть уравнений (57) последовательно на $\dot{\xi}_a, \dot{\eta}_a, \dot{\zeta}_a, \dot{\xi}_b, \dot{\eta}_b, \dot{\zeta}_b$ и складывая, получаем, что правая часть этой суммы равна правой части соотношения (58). Следовательно, этот результат можно написать в следующем виде:

$$m_a (\dot{\xi}_a \ddot{\xi}_a + \dot{\eta}_a \ddot{\eta}_a + \dot{\zeta}_a \ddot{\zeta}_a) + m_b (\dot{\xi}_b \ddot{\xi}_b + \dot{\eta}_b \ddot{\eta}_b + \dot{\zeta}_b \ddot{\zeta}_b) = \frac{dU^*}{dt}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать и получить

$$\frac{1}{2} m_a (\dot{\xi}_a^2 + \dot{\eta}_a^2 + \dot{\zeta}_a^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{\xi}_b^2 + \dot{\eta}_b^2 + \dot{\zeta}_b^2) = U^* + C^*, \quad (59)$$

где C^* есть постоянная интегрирования. Обозначив

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_a^2 + \dot{\eta}_a^2 + \dot{\zeta}_a^2 &= V_a^{*2}, \\ \dot{\xi}_b^2 + \dot{\eta}_b^2 + \dot{\zeta}_b^2 &= V_b^{*2},\end{aligned}$$

можно написать выражение для кинетической энергии T^* системы

$$T^* = \frac{1}{2} m_a V_a^{*2} + \frac{1}{2} m_b V_b^{*2}.$$

Следовательно, интеграл (59) примет вид

$$T^* - U^* = C^*. \quad (60)$$

Это символическая форма уравнения энергии, утверждающего, что сумма кинетической энергии T^* и потенциальной энергии $-U^*$ равна постоянной. Потенциальная энергия отсчитывается от нуля — значения потенциальной энергии, принимаемого для бесконечного удаления обеих масс друг от друга.

16. Потенциальная энергия. Чтобы проверить предыдущее утверждение, рассмотрим работу, которая должна быть совершена, чтобы увеличить расстояние между двумя массами m_a и m_b от r_1 до r_{II} ($r_{II} > r_1$). Совершенная работа, если расстояние увеличилось на величину dr , дается формулой

$$dW = \frac{k^2 m_a m_b}{r^2} dr.$$

После интегрирования она принимает вид

$$W_{I \rightarrow II} = \int_{r_I}^{r_{II}} \frac{k^2 m_a m_b}{r^2} dr = k^2 m_a m_b \left(\frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}} \right).$$

Для $r_{II} = \infty$ совершенная работа равна

$$W_{I \rightarrow \infty} = \frac{k^2 m_a m_b}{r_I},$$

что совпадает с U^* при $r = r_I$. Следовательно, потенциальная энергия равна нулю при $r = \infty$ и отрицательна для конечного расстояния между обоими телами.

Функцию U^* также называют *силовой функцией* системы, так как частные производные от U^* по координатам равны компонентам сил, действующих на массы.

Третьим названием для U^* является слово «потенциал». При употреблении слова «потенциал» необходимо соблюдать осторожность, так как иногда потенциал определяется с обратным знаком, особенно в немецких работах по физике.

17. Переход к системе координат с началом в центре масс. Полученный интеграл энергии применим к любой произвольной системе координат, в которой справедливы ньютоновы законы движения. Допустим теперь, что начало системы отсчета помещено в центр масс и что поэтому используются уравнения (9) и (10) при

$$\begin{aligned}x_a &= \xi_a - \xi_g, & y_a &= \eta_a - \eta_g, & z_a &= \zeta_a - \zeta_g, \\x_b &= \xi_b - \xi_g, & y_b &= \eta_b - \eta_g, & z_b &= \zeta_b - \zeta_g\end{aligned}$$

и

$$\xi_g = \frac{1}{m_a + m_b} (a_1 t + \beta_1),$$

$$\eta_g = \frac{1}{m_a + m_b} (a_2 t + \beta_2),$$

$$\zeta_g = \frac{1}{m_a + m_b} (a_3 t + \beta_3).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_a &= \dot{x}_a + \frac{a_1}{m_a + m_b}, & \dot{\xi}_b &= \dot{x}_b + \frac{a_1}{m_a + m_b}, \\ \dot{\eta}_a &= \dot{y}_a + \frac{a_2}{m_a + m_b}, & \dot{\eta}_b &= \dot{y}_b + \frac{a_2}{m_a + m_b}, \\ \dot{\zeta}_a &= \dot{z}_a + \frac{a_3}{m_a + m_b}, & \dot{\zeta}_b &= \dot{z}_b + \frac{a_3}{m_a + m_b}.\end{aligned}$$

Если теперь

$$V_a^2 = \dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2,$$

$$V_b^2 = \dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2,$$

то мы получаем

$$V_a^{*2} = V_a^2 + \frac{2}{m_a + m_b} (a_1 \dot{x}_a + a_2 \dot{y}_a + a_3 \dot{z}_a) + \frac{1}{(m_a + m_b)^2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

$$V_b^{*2} = V_b^2 + \frac{2}{m_a + m_b} (a_1 \dot{x}_b + a_2 \dot{y}_b + a_3 \dot{z}_b) + \frac{1}{(m_a + m_b)^2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Затем, если

$$T^{**} = \frac{1}{2} m_a V_a^2 + \frac{1}{2} m_b V_b^2,$$

то отсюда вытекает, что

$$T^* = T^{**} + \frac{1}{2(m_a + m_b)} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \quad (61)$$

причем вторые слагаемые выражений для V_a^{*2} , V_b^{*2} взаимно уничтожаются в силу соотношений

$$m_a \dot{x}_a + m_b \dot{x}_b = 0, \quad m_a \dot{y}_a + m_b \dot{y}_b = 0, \quad m_a \dot{z}_a + m_b \dot{z}_b = 0.$$

Если V_g — скорость центра масс в системе координат ξ , η , ζ , то имеем

$$V_g^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{(m_a + m_b)^2}.$$

Отсюда

$$T^* = T^{**} + \frac{1}{2} (m_a + m_b) V_g^2. \quad (62)$$

Интеграл энергии в системе координат с началом в центре масс имеет вид

$$T^{**} - U^* = C^{**}, \quad (63)$$

поскольку U^* не зависит от начала координат. Сравнение T^* и T^{**} при помощи (61) или (62) дает соотношение

$$C^* = C^{**} + \frac{1}{2} (m_a + m_b) V_g^2,$$

показывающее, что полная энергия в системе координат ξ, η, ζ отличается от полной энергии в системе координат с началом в центре масс на половину суммы масс, умноженной на квадрат скорости последнего.

Интересно сравнить интеграл (63) с интегралом (26), полученным для относительного движения. Соотношения (17) после дифференцирования дают

$$V_a^2 = \frac{m_b^2}{(m_a + m_b)^2} V^2, \quad V_b^2 = \frac{m_a^2}{(m_a + m_b)^2} V^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} m_a V_a^2 + \frac{1}{2} m_b V_b^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b^2 + m_a^2 m_b}{(m_a + m_b)^2} V^2 = \frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} V^2.$$

Если это равенство ввести в (63), то получится

$$\frac{1}{2} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} V^2 - \frac{k^2 m_a m_b}{r} = C^{**},$$

тогда как интеграл (26) дает

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{k^2 (m_a + m_b)}{r} = C.$$

Легко видеть, что оба эти выражения одинаковы при условии, что

$$C^{**} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} C.$$

Поскольку интегрирование уравнений относительного движения дало

$$C = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{k^2 (m_a + m_b)}{2a},$$

то отсюда следует, что

$$C^{**} = -\frac{k^2 m_a m_b}{2a}.$$

В таком случае это полная энергия при движении, рассматриваемом в системе координат, начало которой совпадает с центром масс.

18. Интегралы площадей. Если первое из уравнений (2) умножить на $-\eta_a$, а второе — на $+\xi_a$, то сложением получается

$$\begin{aligned} m_a (\ddot{\xi}_a \dot{\eta}_a - \dot{\eta}_a \ddot{\xi}_a) &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_a (\eta_b - \eta_a) - \eta_a (\xi_b - \xi_a)}{r^3} = \\ &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_a \eta_b - \eta_a \xi_b}{r^3}. \end{aligned} \quad (64)$$

Аналогично, если первое из уравнений (3) умножить на $-\eta_b$, а второе на $+\xi_b$ и сложить, то получим

$$\begin{aligned} m_a (\dot{\xi}_b \ddot{\eta}_b - \eta_b \ddot{\xi}_b) &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_b (\eta_a - \eta_b) - \eta_b (\xi_a - \xi_b)}{r^3} = \\ &= k^2 m_a m_b \frac{\xi_b \eta_a - \eta_b \xi_a}{r^3}. \end{aligned} \quad (65)$$

Правые части обоих уравнений (64) и (65) отличаются только знаком. Отсюда, складывая эти уравнения, получаем

$$m_a (\dot{\xi}_a \ddot{\eta}_a - \eta_a \ddot{\xi}_a) + m_b (\dot{\xi}_b \ddot{\eta}_b - \eta_b \ddot{\xi}_b) = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать и получить

$$m_a (\dot{\xi}_a \eta_a - \eta_a \dot{\xi}_a) + m_b (\dot{\xi}_b \eta_b - \eta_b \dot{\xi}_b) = c_3^*. \quad (66)$$

Тем же путем получаются два аналогичных интеграла:

$$m_a (\dot{\eta}_a \dot{\xi}_a - \dot{\xi}_a \dot{\eta}_a) + m_b (\dot{\eta}_b \dot{\xi}_b - \dot{\xi}_b \dot{\eta}_b) = c_1^*, \quad (67)$$

$$m_a (\dot{\zeta}_a \dot{\xi}_a - \dot{\xi}_a \dot{\zeta}_a) + m_b (\dot{\zeta}_b \dot{\xi}_b - \dot{\xi}_b \dot{\zeta}_b) = c_2^*. \quad (68)$$

В этом виде интегралы (66), (67) и (68) выражают постоянство моментов количества движения относительно трех координатных осей. С другой стороны, можно подчеркнуть, что эти интегралы имеют место в произвольной системе координат, в которой справедливы ньютоны законами движения. Читателю предоставляется рассмотреть постоянные c_1^* , c_2^* , c_3^* в системе координат с началом в центре масс, а также сравнить интегралы, относящиеся к этому случаю, с интегралами площадей (19), полученными в проблеме относительного движения.

Формулы, выведенные в предыдущих разделах, дают возможность определить положение в орбите при относительном движении для любого момента времени в системе координат, плоскость $\bar{x}\bar{y}$ которой совпадает с плоскостью орбиты, а ось \bar{x} направлена в перигелий. Предполагается, что известны три элемента a , e , l_0 и что, кроме того, дан параметр $\mu = k^2(m_a + m_b)$.

Требования практических вычислений идут значительно дальше. Мы должны разработать методику для определения положения в системе координат, имеющей то же начало m_a , что и система $\bar{x}\bar{y}$, но ориентированной произвольным образом. В проблемах планетного движения встречаются два частных случая.

19. Координаты, отнесенные к эклиптике. Обозначим координаты через $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$, и пусть плоскость $x^{(e)}y^{(e)}$ совпадает с эклиптикой для заданной даты, например 1950,0, а ось $x^{(e)}$ направлена в среднюю точку весеннего равноденствия для той же даты.

Для удобства дальнейших приложений мы будем рассматривать более общий случай, когда координата z не обязательно равна нулю. Переход от \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} к $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$ можно совершить посредством линейного преобразования

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= P_x^{(e)} \bar{x} + Q_x^{(e)} \bar{y} + R_x^{(e)} \bar{z}, \\ y^{(e)} &= P_y^{(e)} \bar{x} + Q_y^{(e)} \bar{y} + R_y^{(e)} \bar{z}, \\ z^{(e)} &= P_z^{(e)} \bar{x} + Q_z^{(e)} \bar{y} + R_z^{(e)} \bar{z}. \end{aligned} \quad (69)$$

Необходимо найти девять векторных орбитальных постоянных для эклиптики как функции трех элементов I, Ω, ω , определяющих ориентировку системы $x \bar{y} z$ относительно системы $x^{(e)} \bar{y}^{(e)} z^{(e)}$. Эти девять постоянных являются направляющими косинусами осей $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ относительно осей в эклипти-

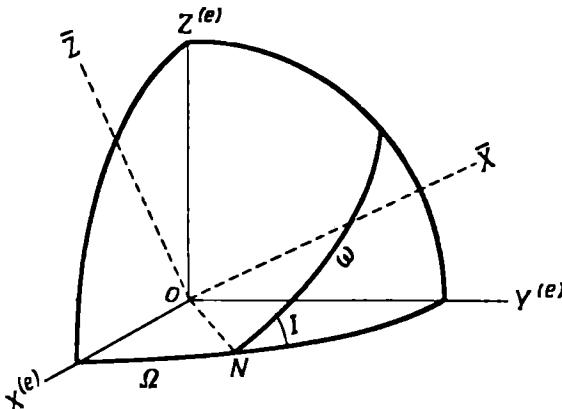


Рис. 3. Направляющие косинусы.

кальной системе; например, тремя направляющими косинусами оси \bar{x} будут $P_x^{(e)}, P_y^{(e)}, P_z^{(e)}$.

Отсюда непосредственно вытекает, что последние соотношения можно обратить

$$\begin{aligned}\bar{x} &= P_x^{(e)} x^{(e)} + P_y^{(e)} y^{(e)} + P_z^{(e)} z^{(e)}, \\ \bar{y} &= Q_x^{(e)} x^{(e)} + Q_y^{(e)} y^{(e)} + Q_z^{(e)} z^{(e)}, \\ \bar{z} &= R_x^{(e)} x^{(e)} + R_y^{(e)} y^{(e)} + R_z^{(e)} z^{(e)}\end{aligned}\quad (70)$$

и что будут иметь место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}P_x^{(e)2} + Q_x^{(e)2} + R_x^{(e)2} &= 1, \\ P_x^{(e)2} + P_y^{(e)2} + P_z^{(e)2} &= 1, \\ P_x^{(e)}Q_y^{(e)} + P_y^{(e)}Q_z^{(e)} + P_z^{(e)}Q_x^{(e)} &= 0, \\ P_x^{(e)}P_y^{(e)} + Q_x^{(e)}Q_y^{(e)} + R_x^{(e)}R_y^{(e)} &= 0,\end{aligned}\quad (71)$$

а также все остальные аналогичные соотношения, которые можно написать путем циклической перестановки x, y, z, P, Q, R .

Направляющие косинусы можно получить по формулам сферической тригонометрии при рассмотрении пересечений координатных плоскостей со сферой единичного радиуса с центром в m_a .

Допустим, что мы хотим получить направляющие косинусы осей $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ относительно оси $x^{(e)}$.

В сферическом треугольнике $x^{(e)} \bar{N} \bar{x}$ стороны $x^{(e)}N = \Omega, \bar{N}x = \omega, \angle x^{(e)} \bar{N} \bar{x} = 180^\circ - I$ (рис. 3). Теорема косинусов дает

$$P_x^{(e)} = \cos x^{(e)} \bar{x} = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I.$$

В сферическом треугольнике $x^{(e)}N\bar{y}$ стороны $x^{(e)}N = \Omega$, $N\bar{y} = 90^\circ + \omega$, $\angle x^{(e)}N\bar{y} = 180^\circ - I$, и теорема косинусов дает

$$Q_x^{(e)} = \cos x^{(e)}\bar{y} = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I.$$

В сферическом треугольнике $x^{(e)}N\bar{z}$ стороны $x^{(e)}N = \Omega$, $N\bar{z} = 90^\circ$, $\angle x^{(e)}N\bar{z} = 90^\circ - I$; теорема косинусов дает

$$R_x^{(e)} = \cos x^{(e)}\bar{z} = \sin \Omega \sin I.$$

Остальные шесть направляющих косинусов можно получить аналогичным образом. Полная система девяти векторных орбитальных постоянных для эклиптики имеет вид

$$\begin{aligned} P_x^{(e)} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I, \\ Q_x^{(e)} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I, \\ R_x^{(e)} &= \sin \Omega \sin I, \\ P_y^{(e)} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I, \\ Q_y^{(e)} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I, \\ R_y^{(e)} &= -\cos \Omega \sin I, \\ P_z^{(e)} &= \sin \omega \sin I, \\ Q_z^{(e)} &= \cos \omega \sin I, \\ R_z^{(e)} &= \cos I. \end{aligned} \tag{72}$$

20. Координаты, отнесенные к экватору. Обозначим координаты через x , y , z , и пусть плоскость xy совпадает со средним экватором

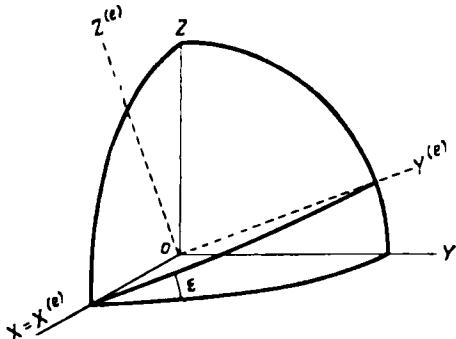


Рис. 4. Эклиптические и экваториальные координаты.

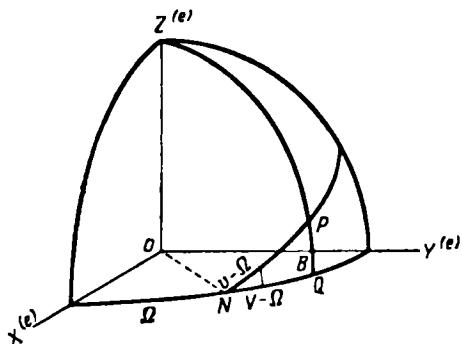


Рис. 5. Координаты в орбите и эклиптические координаты.

для заданной даты, а ось x направлена в среднюю точку весеннего равноденствия для той же даты. Стандартные экватор и равноденствие эпохи 1950,0 широко применяются для определения орбит малых планет и комет.

Если орбитальные элементы I' , Ω' , ω' непосредственно отнесены к стандартному экватору и равноденствию, то векторные орбитальные постоянные для экватора P_x , Q_x , R_x и т. д. можно получить по формулам для $P_x^{(e)}$, $Q_x^{(e)}$, $R_x^{(e)}$ и т. д. простой заменой I на I' , Ω на Ω' и ω на ω' . Однако принято давать элементы I , Ω , ω , отнесенные к эклиптике. Если это эклиптика той же даты, что и экватор и равноденствие системы координат x , y , z , то очевидно, что переход от $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$ к x , y , z можно совершить поворотом системы $x^{(e)}y^{(e)}z^{(e)}$ вокруг оси $x^{(e)}$ в направлении часовой стрелки на угол ϵ — наклонение эклиптики. Это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}x &= x^{(e)}, \\y &= y^{(e)} \cos \epsilon - z^{(e)} \sin \epsilon, \\z &= y^{(e)} \sin \epsilon + z^{(e)} \cos \epsilon.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}P_x &= P_x^{(e)}, \\Q_x &= Q_x^{(e)}, \\R_x &= R_x^{(e)}, \\P_y &= P_y^{(e)} \cos \epsilon - P_z^{(e)} \sin \epsilon, \\Q_y &= Q_y^{(e)} \cos \epsilon - Q_z^{(e)} \sin \epsilon, \\R_y &= R_y^{(e)} \cos \epsilon - R_z^{(e)} \sin \epsilon, \\P_z &= P_y^{(e)} \sin \epsilon + P_z^{(e)} \cos \epsilon, \\Q_z &= Q_y^{(e)} \sin \epsilon + Q_z^{(e)} \cos \epsilon, \\R_z &= R_y^{(e)} \sin \epsilon + R_z^{(e)} \cos \epsilon.\end{aligned}$$

Поэтому полные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos I, \\Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos I, \\R_x &= \sin \Omega \sin I, \\P_y &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I) \cos \epsilon - \sin \omega \sin I \sin \epsilon, \\Q_y &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I) \cos \epsilon - \cos \omega \sin I \sin \epsilon, \\R_y &= -\cos \Omega \sin I \cos \epsilon - \cos I \sin \epsilon, \\P_z &= (\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos I) \sin \epsilon + \sin \omega \sin I \cos \epsilon, \\Q_z &= (-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos I) \sin \epsilon + \cos \omega \sin I \cos \epsilon, \\R_z &= -\cos \Omega \sin I \sin \epsilon + \cos I \cos \epsilon.\end{aligned}\quad (73)$$

Поскольку в эллиптической орбите $\bar{z} = 0$, то формулы, фактически необходимые для вычисления положения, имеют вид

$$\begin{aligned}x &= P_x \bar{x} + Q_x \bar{y}, \\y &= P_y \bar{x} + Q_y \bar{y}, \\z &= P_z \bar{x} + Q_z \bar{y}.\end{aligned}\quad (74)$$

Нередко непосредственно в эти выражения вводят эксцентрическую аномалию. Если мы определим величины A_x, \dots, B_x, \dots формулами

$$\begin{aligned} A_x &= aP_x, & B_x &= a\sqrt{1-e^2}Q_x, \\ A_y &= aP_y, & B_y &= a\sqrt{1-e^2}Q_y, \\ A_z &= aP_z, & B_z &= a\sqrt{1-e^2}Q_z, \end{aligned} \quad (75)$$

то прямоугольные экваториальные координаты можно также получить по формулам

$$\begin{aligned} x &= A_x(\cos u - e) + B_x \sin u, \\ y &= A_y(\cos u - e) + B_y \sin u, \\ z &= A_z(\cos u - e) + B_z \sin u. \end{aligned} \quad (76)$$

Поскольку экваториальные векторные постоянные являются направляющими косинусами, то между этими постоянными справедливы те же соотношения, что и между эллиптическими постоянными. Соответствующие соотношения между постоянными A и B будут

$$\begin{aligned} A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 &= a^2, \\ B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 &= a^2(1 - e^2), \\ A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Иногда важно иметь выражения для производных, аналогичные формулам (76). Это требует выражения \dot{x}, \dot{y} через эксцентрическую аномалию. При помощи соотношения

$$\dot{u} = \frac{an}{r} = \frac{n}{1 - e \cos u}$$

получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin u \dot{u} = -\frac{a^2 n}{r} \sin u = -\frac{an \sin u}{1 - e \cos u}, \\ \dot{y} &= a \sqrt{1 - e^2} \cos u \dot{u} = \frac{a^2 n}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos u = \frac{an \sqrt{1 - e^2} \cos u}{1 - e \cos u}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{an}{r} (-A_x \sin u + B_x \cos u), \\ \dot{y} &= \frac{an}{r} (-A_y \sin u + B_y \cos u), \\ \dot{z} &= \frac{an}{r} (-A_z \sin u + B_z \cos u). \end{aligned} \quad (78)$$

Крайне необходимо подчеркнуть, что n должно быть выражено в радианах за единицу времени и что единица времени, используемая при выражении производных, должна быть той же, что и употребляемая в n .

21. Введение матриц. Выражения для векторных орбитальных постоянных через элементы обнаруживают настолько яркую правильность в структуре, что нетрудно придумать эффективную схему для вычислений. Тем не менее преимуществами обладает другая методика, избегающая применения сферической тригонометрии вообще. Эта мето-

дика связана с применением матриц, введенных в математическую литературу известным английским математиком Кэли. Матричная алгебра является важной ветвью математики. Мы не будем рассматривать ее здесь по существу, а только изложим то, что является необходимым для удобного преобразования координат.

Для наших целей матрицу следует рассматривать как прямоугольную таблицу — набор чисел (обозначаемых здесь символами), с которой производятся операции по простым правилам.

Пусть заданы две матрицы:

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 \end{vmatrix},$$

где верхний индекс у любого элемента означает строку, а нижний индекс — столбец.

Произведение \mathbf{ab} определяется как

$$\mathbf{c} = \mathbf{ab} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_1^2 b_2^1 + a_1^3 b_3^1 & a_1^1 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^3 b_3^2 & a_1^1 b_1^3 + a_1^2 b_2^3 + a_1^3 b_3^3 \\ a_2^1 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + a_2^3 b_3^1 & a_2^1 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^3 b_3^2 & a_2^1 b_1^3 + a_2^2 b_2^3 + a_2^3 b_3^3 \\ a_3^1 b_1^1 + a_3^2 b_2^1 + a_3^3 b_3^1 & a_3^1 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^3 b_3^2 & a_3^1 b_1^3 + a_3^2 b_2^3 + a_3^3 b_3^3 \end{vmatrix},$$

т. е. если общий элемент матрицы \mathbf{a} обозначен через a_k^j , общий элемент \mathbf{b} — через b_k^j , общий элемент \mathbf{c} — через c_k^j , то общий элемент матрицы-произведения \mathbf{ab} равен

$$c_k^j = \sum_p a_p^j b_k^p. \quad (79)$$

Существенной особенностью является то, что строки матрицы \mathbf{a} умножаются на столбцы матрицы \mathbf{b} .

Не обязательно, чтобы две перемножаемые матрицы имели одинаковое число строк и столбцов, но необходимо, чтобы матрица \mathbf{a} имела столько столбцов, сколько строк у матрицы \mathbf{b} . Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2 \\ a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_1^2 \\ a_1^3 b_1^1 + a_2^3 b_1^2 \end{vmatrix},$$

т. е. произведение \mathbf{ab} неизменно имеет столько же строк, что и матрица \mathbf{a} , и столько же столбцов, сколько их у матрицы \mathbf{b} . Если число столбцов матрицы \mathbf{a} отлично от числа строк матрицы \mathbf{b} , то произведение \mathbf{ab} неопределенно. Легко может случиться так, что произведение \mathbf{ab} может быть определенным, тогда как \mathbf{ba} неопределено. Даже когда и \mathbf{ab} , и \mathbf{ba} определены, они, вообще говоря, отличны друг от друга, т. е. умножение матриц в общем случае не коммутативно.

Если строки и столбцы матрицы взаимно перменить местами, то новая матрица называется транспонированной по отношению к старой. Матрица, транспонированная по отношению к \mathbf{a} , обозначается через \mathbf{a}' . Таким образом, если

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}, \quad \text{то } \mathbf{a}' = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_2^3 \end{vmatrix}.$$

Хотя умножение матриц в общем случае не коммутативно, оно ассоциативно, как и в обычной алгебре, т. е.

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

22. Изменение порядка произведений матриц. В последующих приложениях часто будет удобным изменить порядок в произведении матриц. Можно проверить посредством правила умножения, что

$$ab = (b'a)', \quad (80)$$

$$abc = (c'b'a)' = (b'a)'c = a(c'b')' = [(bc)'a']' = [c'(ab')]'. \quad (81)$$

Применяя эти правила, можно перемножать матрицы в любом порядке, который оказывается удобным, при условии, конечно, что количества строк и столбцов таковы, что умножение возможно.

23. Матрицы поворота. Пусть даны две декартовы системы координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x', y', z' , имеющие общее начало, и допустим, что известны направляющие косинусы. Тогда

$$\begin{aligned} x' &= P'_x \bar{x} + Q'_x \bar{y} + R'_x \bar{z}, \\ y' &= P'_y \bar{x} + Q'_y \bar{y} + R'_y \bar{z}, \\ z' &= P'_z \bar{x} + Q'_z \bar{y} + R'_z \bar{z}. \end{aligned} \quad (82)$$

Предположим, что система x', y', z' поворачивается против часовой стрелки вокруг оси x' на угол α , если смотреть со стороны положительного конца оси x' . Если новые координаты обозначить через x'', y'', z'' , то можно написать

$$\begin{aligned} x'' &= P''_x \bar{x} + Q''_x \bar{y} + R''_x \bar{z}, \\ y'' &= P''_y \bar{x} + Q''_y \bar{y} + R''_y \bar{z}, \\ z'' &= P''_z \bar{x} + Q''_z \bar{y} + R''_z \bar{z}. \end{aligned} \quad (83)$$

Соотношения между координатами x', y', z' и x'', y'', z'' имеют вид

$$\begin{aligned} x'' &= x', \\ y'' &= y' \cos \alpha + z' \sin \alpha, \\ z'' &= -y' \sin \alpha + z' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Если их подставить в левую часть формул (83), то при помощи (82) получится

$$\begin{aligned} P''_x &= P'_x, \\ P''_y &= P'_y \cos \alpha + P'_z \sin \alpha, \\ P''_z &= -P'_y \sin \alpha + P'_z \cos \alpha, \\ Q''_x &= Q'_x, \\ Q''_y &= Q'_y \cos \alpha + Q'_z \sin \alpha, \\ Q''_z &= -Q'_y \sin \alpha + Q'_z \cos \alpha, \\ R''_x &= R'_x, \\ R''_y &= R'_y \cos \alpha + R'_z \sin \alpha, \\ R''_z &= -R'_y \sin \alpha + R'_z \cos \alpha. \end{aligned}$$

Это преобразование можно совершить посредством умножения двух матриц:

$$\begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Преобразование от x' , y' , z' к x'' , y'' , z'' дается формулой

$$\|x''y''z''\| = \|x'y'z'\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

или, что равносильно,

$$\begin{vmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}.$$

В последующем мы будем применять первую из этих взаимоисключающих форм. Условившись преобразуемые координаты писать слева от матрицы преобразования, мы будем обозначать последнюю через $p(\alpha)$:

$$p(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

что соответствует положительному (против часовой стрелки, если смотреть из положительного конца оси) повороту вокруг оси x' на угол α .

Аналогично положительный поворот вокруг оси y' соответствует следующему преобразованию:

$$x'' = x' \cos \alpha - z' \sin \alpha,$$

$$y'' = y',$$

$$z'' = x' \sin \alpha + z' \cos \alpha,$$

или

$$\|x''y''z''\| = \|x'y'z'\| \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

и мы полагаем

$$q(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Наконец, положительный поворот вокруг оси z' соответствует следующему преобразованию:

$$x'' = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha,$$

$$y'' = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

$$z'' = z',$$

или

$$\|xyz\| = \|x'y'z'\| \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

и мы полагаем

$$r(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что

$$p(-\alpha) = p'(\alpha), \quad q(-\alpha) = q'(\alpha), \quad r(-\alpha) = r'(\alpha).$$

24. Общие повороты координатных систем. Любой поворот какой угодно системы координат можно разложить на последовательность поворотов вокруг различных осей. Рассмотрим, например, преобразование координат в системе $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ к экваториальной системе x, y, z , рассмотренной в разд. 20. Это преобразование можно совершить следующим образом:

1. Поворот на угол $-\omega$ вокруг оси \bar{z} , $r(-\omega)$,
2. Поворот на угол $-I$ вокруг оси x' , $p(-I)$,
3. Поворот на угол $-\Omega$ вокруг оси z'' , $r(-\Omega)$,
4. Поворот на угол $-\varepsilon$ вокруг оси $x^{(e)}$, $p(-\varepsilon)$.

Тогда это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \|xyz\| &= \|\bar{x}\bar{y}\bar{z}\| \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{vmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{vmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В численных приложениях сначала перемножают последние четыре матрицы, получая векторные постоянные в матричной форме, которые затем используются так, как этого требует задача. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = r(-\omega)p(-I)r(-\Omega)p(-\varepsilon),$$

$$\|xyz\| = \|\bar{x}\bar{y}\bar{z}\| \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}.$$

В качестве примера использования этих матриц поворота приводится вычисление поисковой эфемериды.

Вычисление эфемериды

Требуется вычислить поисковую эфемериду для периодической кометы Харрингтона, используя орбитальные элементы из Г. А. У.

Circular No. 1713 и приведенные ниже:

$$\left. \begin{array}{ll} T 1960 Июнь 28,8327 \omega 232^\circ,8391 \\ e 0,559273 & \Omega 119,1327 \\ a 3,590373 & I 8,6838 \end{array} \right\} \text{Равноденствие } 1950,0$$

$$n = ka^{-3/2} = \frac{0,01720209895}{(3,590373)^{3/2}} = 0,002528553$$

$$n^\circ = 57^\circ,29577951 \times n = 0^\circ,1448754$$

$$e^\circ = 57,29577951 \times e = 32^\circ,0440$$

$$a\sqrt{1-e^2} = 3,590373 \times 0,828984 = 2,976360$$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,60406 & -0,79694 & 0 \\ +0,79694 & -0,60406 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0,98854 & +0,15098 \\ 0 & -0,15098 & +0,98854 \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} -0,48683 & +0,87349 & 0 \\ -0,87349 & -0,48683 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0,91744 & +0,39788 \\ 0 & -0,39788 & +0,91744 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -0,60406 & -0,78781 & -0,12032 \\ +0,79604 & -0,59714 & -0,09120 \\ 0 & -0,15098 & +0,98854 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -0,48683 & +0,87349 & 0 \\ -0,87349 & -0,48683 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0,91744 & +0,39788 \\ 0 & -0,39788 & +0,91744 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} +0,98222 & -0,14411 & -0,12032 \\ +0,13362 & +0,93682 & -0,09120 \\ +0,13188 & +0,07350 & +0,98854 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +0,91744 & +0,39788 \\ 0 & -0,39788 & +0,91744 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} +0,98222 & -0,08434 & -0,16772 \\ +0,13362 & +0,94163 & +0,30897 \\ +0,11388 & -0,32589 & +0,93617 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Контроль:

$$\sum P^2 = \sum Q^2 = \sum R^2 = 1,$$

$$\sum PQ = \sum QR = \sum RP = 0,$$

$$\begin{aligned}
 \|x, y, z\| &= \|\bar{x}, \bar{y}, 0\| \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\
 &= \|a(\cos u - e), a\sqrt{1-e^2}\sin u, 0\| \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\
 &= \|\cos u - e, \sin u, 0\| \begin{vmatrix} aP_x & aP_y & aP_z \\ a\sqrt{1-e^2}Q_x & a\sqrt{1-e^2}Q_y & a\sqrt{1-e^2}Q_z \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\
 &= \|\cos u - e, \sin u, 0\| \begin{vmatrix} +3,52653 & -0,30280 & -0,60220 \\ +0,39768 & +2,80266 & +0,91960 \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \\
 \|\xi, \eta, \zeta\| &= \|\varrho \cos \alpha \cos \delta, \varrho \sin \alpha \cos \delta, \varrho \sin \delta\| = \\
 &= \|x, y, z\| + \|X, Y, Z\|,
 \end{aligned}$$

где X, Y, Z — геоцентрические экваториальные координаты Солнца — можно взять из «Astronomical Ephemeris». Тогда

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \alpha &= \eta/\xi, \\
 \operatorname{tg} \delta &= \zeta/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\
 \varrho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \\
 &= a(1 - e \cos u).
 \end{aligned}$$

$t 1960$	Июнь 5,0	Июнь 15,0	Июнь 25,0	Июль 5,0	Июль 15,0	Июль 25,0
$t-T$	-23,833	-13,833	-3,833	+6,167	+16,167	+26,167
l	-3,4528	-2,0041	-0,5553	+0,8934	+2,3422	+3,7910
u	-7,803	-4,540	-1,259	+2,028	+5,306	+8,563
$\cos u$	+0,9907	+0,9969	+0,9998	+0,9994	+0,9957	+0,9889
$\cos u - e$	+0,4314	+0,4376	+0,4405	+0,4401	+0,4364	+0,4296
$\sin u$	-0,1358	-0,0792	-0,0220	+0,0354	+0,0925	+0,1489
x	+1,4673	+1,5117	+1,5447	+1,5661	+1,5758	+1,5742
y	-0,5112	-0,3545	-0,1950	-0,0341	+0,1271	+0,2872
z	-0,3847	-0,3364	-0,2855	-0,2325	-0,1777	-0,1218
X	+0,2764	+0,1106	-0,0584	-0,2257	-0,3866	-0,5368
Y	+0,8957	+0,9264	+0,9311	+0,9095	+0,8625	+0,7911
Z	+0,3884	+0,4018	+0,4038	+0,3944	+0,3740	+0,3431
ξ	+1,7437	+1,6223	+1,4863	+1,3404	+1,1892	+1,0374
η	+0,3845	+0,5719	+0,7361	+0,8754	+0,9896	+1,0783
ζ	+0,0037	+0,0654	+0,1183	+0,1619	+0,1963	+0,2213
α	0 ^h 49 ^m , 6	1 ^h 17 ^m , 6	1 ^h 45 ^m , 4	2 ^h 12 ^m , 6	2 ^h 39 ^m , 1	3 ^h 04 ^m , 4
δ	+0°07'	+2°11'	+4°05'	+5°46'	+7°14'	+8°25'
ϱ	1,7856	1,7214	1,6628	1,6091	1,5595	1,5126
r	1,6007	1,5887	1,5829	1,5836	1,5909	1,6048

В перигелии $r = q = a(1 - e) = 1,582376$.

25. Применение полярных координат. Для аналитических разложений полезно получить выражения для $x^{(e)}$, $y^{(e)}$, $z^{(e)}$ через полярные координаты r и f в плоскости орбиты. В этих выражениях сохраняются элементы ориентации ω , Ω и I . Мы исходим из формул

$$x^{(e)} = P_x^{(e)} r \cos f + Q_x^{(e)} r \sin f,$$

$$y^{(e)} = P_y^{(e)} r \cos f + Q_y^{(e)} r \sin f,$$

$$z^{(e)} = P_z^{(e)} r \cos f + Q_z^{(e)} r \sin f,$$

в которых вместо постоянных P и Q должны быть подставлены их явные выражения (72). Тогда мы найдем, что

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= (r \cos f \cos \omega - r \sin f \sin \omega) \cos \Omega - \\ &\quad - (r \cos f \sin \omega + r \sin f \cos \omega) \sin \Omega \cos I, \\ y^{(e)} &= (r \cos f \cos \omega - r \sin f \sin \omega) \sin \Omega + \\ &\quad + (r \cos f \sin \omega + r \sin f \cos \omega) \cos \Omega \cos I, \\ z^{(e)} &= (r \cos f \sin \omega + r \sin f \cos \omega) \sin I. \end{aligned}$$

Эти формулы можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= r \cos(f + \omega) \cos \Omega - r \sin(f + \omega) \sin \Omega \cos I, \\ y^{(e)} &= r \cos(f + \omega) \sin \Omega + r \sin(f + \omega) \cos \Omega \cos I, \\ z^{(e)} &= r \sin(f + \omega) \sin I. \end{aligned} \tag{84}$$

Используя тождества

$$\cos^2 \frac{I}{2} + \sin^2 \frac{I}{2} = 1, \quad \cos^2 \frac{I}{2} - \sin^2 \frac{I}{2} = \cos I,$$

можно в $x^{(e)}$ и $y^{(e)}$ произвести еще одну группировку членов и получить

$$x^{(e)} = r \cos^2 \frac{I}{2} \cos(f + \omega + \Omega) + r \sin^2 \frac{I}{2} \cos(f + \omega - \Omega),$$

$$y^{(e)} = r \cos^2 \frac{I}{2} \sin(f + \omega + \Omega) - r \sin^2 \frac{I}{2} \sin(f + \omega - \Omega),$$

$$z^{(e)} = r \sin I \sin(f + \omega).$$

Часто оказывается полезным выразить аргументы через

истинную долготу в орбите $v = f + \omega + \Omega$;

долготу перигелия $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$;

долготу восходящего узла Ω .

Тогда эти выражения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} x^{(e)} &= r \cos^2 \frac{I}{2} \cos v + r \sin^2 \frac{I}{2} \cos(v - 2\Omega), \\ y^{(e)} &= r \cos^2 \frac{I}{2} \sin v - r \sin^2 \frac{I}{2} \sin(v - 2\Omega), \\ z^{(e)} &= r \sin I \sin(v - \Omega). \end{aligned} \tag{85}$$

Аргумент $f + \omega = v - \Omega$, входящий в $z^{(e)}$, называется аргументом широты. Если B есть широта планеты, отсчитываемая от плоскости $x^{(e)}y^{(e)}$, то

$$z^{(e)} = r \sin B.$$

Сферический треугольник NPQ на сфере единичного радиуса дает

$$\begin{aligned}\sin B &= \sin I \sin(f + \omega) = \\ &= \sin I \sin(v - \Omega),\end{aligned}$$

в согласии с выражением для $z^{(e)}$ в формулах (85).

Угол v отсчитывается как сумма дуг $x^{(e)}N + NP$, что является незначительным неудобством, которое можно устранить, выбирая в плоскости орбиты такую начальную точку отсчета O' , что $O'N = -x^{(e)}N = \Omega$. Использование начальной точки отсчета в плоскости орбиты распространено в некоторых формах планетных теорий. Однако в подобных случаях плоскость орбиты находится в постоянном движении, и определение начальной точки отсчета не является столь же простым делом, как приравнивание дуг $O'N$ и $x^{(e)}N$. Оно зависит от решения некоторого дифференциального уравнения.

26. Приведение к эклиптике. Наконец, может понадобиться получить истинные полярные координаты. В этом случае положение планеты можно определить тремя координатами: r , V , B , где V есть дуга $x^{(e)}Q$. Если наклонность мала, то очевидно, что и разность $V - v$ всегда мала. Эта величина известна под названием «приведение к эклиптике». Аналитическое решение этой задачи получается из сферического треугольника NPQ с помощью следующей формулы:

$$\operatorname{tg}(V - \Omega) = \cos I \operatorname{tg}(v - \Omega).$$

Положим для краткости $V - \Omega = p$, $v - \Omega = q$, и пусть

$$\cos I = \frac{1 - \beta}{1 + \beta},$$

или

$$\beta = \frac{1 - \cos I}{1 + \cos I} = \operatorname{tg}^2 \frac{I}{2}.$$

Тогда уравнение принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} p = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \operatorname{tg} q.$$

Это уравнение рассматривается в гл. II и имеет решение

$$p - q = - \left(\beta \sin 2q - \frac{1}{2} \beta^2 \sin 4q + \frac{1}{3} \beta^3 \sin 6q - \dots \right)$$

или после подстановки первоначальных значений для p , q , β

$$V - v = - \operatorname{tg}^2 \frac{I}{2} \sin 2(v - \Omega) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{I}{2} \sin 4(v - \Omega) - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \frac{I}{2} \sin 6(v - \Omega) + \dots \quad (86)$$

Для малых значений I это выражение для приведения к эклиптике быстро сходится, и во многих приложениях требуются только один или два члена этого разложения.

27. Вычисление элементов по координатам и компонентам скорости в заданный момент времени. В разд. 20 по элементам орбиты были получены прямоугольные координаты и компоненты скорости. Часто необ-

ходимо решать обратную задачу: для определенной эпохи даны $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; требуется найти элементы орбиты.

Чтобы упростить вычисления, необходимо исключить из формул μ . Рассматривая уравнения (16), легко видеть, что это можно выполнить, используя вместо t такую переменную τ , что

$$\sqrt{\mu} dt = d\tau.$$

Тогда уравнения (16) принимают вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}, \quad (87)$$

и μ не может появиться ни в одном из результатов, полученных из этих уравнений. Поскольку переход от t к τ как к независимой переменной равносителен допущению $\mu = 1$, то все формулы относительного движения в задаче двух тел, выведенные в разд. 6—13, применимы к уравнениям (87) при условии, что сделана подстановка $\mu = 1$.

Для орбит астероидов и комет m_a представляет собой массу Солнца, которую принимают равной единице, а массу m_b полагают равной нулю; следовательно,

$$\mu = k^2.$$

Если единицей времени, в которой выражается t , являются средние солнечные сутки, то введение переменной τ равносильно употреблению в качестве единицы k^{-1} средних солнечных суток. Численное значение k дается в разд. 31. Если компоненты скорости получены с единицей времени, равной w средних солнечных суток, то их значения должны быть сначала разделены на wk или, с большей общностью, на $w\sqrt{\mu}$. В последующем предполагается, что $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ разделены на должный делитель и выражены в единице времени, необходимой для исключения μ из формул.

Задачу вычисления элементов удобно разделить на две части:

а) Вычисление элементов a, e, l_0 , определяющих положение в плоскости орбиты относительно перигелия орбиты. Первый шаг заключается в вычислении для заданной даты t значений

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \\ \dot{rr} &= \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}. \end{aligned}$$

Затем используются следующие соотношения:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2, \quad (88)$$

$$e \sin u = a^{-1/2} \dot{rr}, \quad (89)$$

$$e \cos u = rV^2 - 1, \quad (90)$$

$$l = u - e \sin u. \quad (91)$$

Среднее суточное движение определяется по формуле

$$n = \sqrt{\mu} a^{-3/2} \quad (92)$$

в общем случае или

$$n = ka^{-3/2} \quad (93)$$

для малых планет и комет. Наконец, соотношение

$$l_0 = l - n(t - t_0) \quad (94)$$

дает среднюю аномалию при $t = t_0$.

Уравнение (88) является интегралом живых сил (26) при $\mu = 1$, $C = -\mu^2 a$. Уравнение (89) вытекает из (46); (90) получается из (45), записанного в виде

$$r \cos u = 1 - \frac{r}{a},$$

где r/a заменено на

$$\frac{r}{a} = 2 - rV^2,$$

что следует из (88).

Можно заметить, что интеграл площадей (25), который при $\mu = 1$ принимает следующий вид:

$$a(1 - e^2) = r^2 V^2 - (r \dot{r})^2, \quad (95)$$

можно было бы использовать вместе с (88) для получения a и e . Неудобство этого пути состоит в том, что он привел бы к определению численного значения e по разности $1 - e^2$, которая плохо определяет e , если эксцентриситет мал. Применение (89) и (90) для определения e и u устраняет эту потерю значащих цифр.

б) Вычисление элементов ориентации ω , Ω , I . Постоянные A_x , A_y , A_z , B_x , B_y , B_z и, следовательно, векторные орбитальные постоянные P_x , P_y , P_z , Q_x , Q_y , Q_z получаются по формулам

$$\begin{aligned} aP_x &= A_x = x(a/r) \cos u - \dot{x}a^{3/2} \sin u, \\ aP_y &= A_y = y(a/r) \cos u - \dot{y}a^{3/2} \sin u, \end{aligned} \quad (96)$$

$$aP_z = A_z = z(a/r) \cos u - \dot{z}a^{3/2} \sin u;$$

$$bQ_x = B_x = x(a/r) \sin u + \dot{x}a^{3/2}(\cos u - e),$$

$$bQ_y = B_y = y(a/r) \sin u + \dot{y}a^{3/2}(\cos u - e), \quad (97)$$

$$bQ_z = B_z = z(a/r) \sin u + \dot{z}a^{3/2}(\cos u - e),$$

где

$$b = a \cos \varphi = a \sqrt{1 - e^2}.$$

Эти формулы вытекают из (76) и (78). Например, первые формулы каждой из указанных систем дают

$$A_x(\cos u - e) + B_x \sin u = x,$$

$$-A_x \sin u + B_x \cos u = \dot{x}ra^{3/2},$$

если в выражении для x множитель r/an заменен на $ra^{1/2}$. Решение относительно A_x , B_x дает формулы

$$A_x(1 - e \cos u) - x \cos u - \dot{x}ra^{1/2} \sin u,$$

$$B_x(1 - e \cos u) - x \sin u + \dot{x}ra^{1/2}(\cos u - e),$$

которые можно привести к виду уравнений (96), (97).

Наконец, элементы орбиты ω , Ω , I могут быть вычислены по векторным орбитальным постоянным посредством следующих формул:

$$\begin{aligned}\sin I \sin \omega &= -P_y \sin \epsilon + P_z \cos \epsilon, \\ \sin I \cos \omega &= -Q_y \sin \epsilon + Q_z \cos \epsilon,\end{aligned}\quad (98)$$

которые дают I и ω , и

$$\begin{aligned}\sin \Omega &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \epsilon, \\ \cos \Omega &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega,\end{aligned}\quad (99)$$

дающих Ω . Эти соотношения вытекают из явных выражений (73) для векторных орбитальных постоянных.

Соотношения (77) можно использовать для контроля постоянных A и B , или соответствующие соотношения (71) — для контроля P и Q . Из них наиболее полезным является

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0.$$

Полный контроль элементов ω , Ω , I следует провести вычислением векторных постоянных в матричной форме (см. разд. 24), после того как найдены эти углы.

28. Точность элементов. Представляет интерес исследовать точность определения e и u из уравнений (89) и (90). Существует несомненная потеря точности, обусловленная тем обстоятельством, что оба эти уравнения содержат множителем эксцентриситет. Максимальное численное значение правых частей этих уравнений равно e . Следовательно, если e мало, то правые части будут иметь меньше значащих цифр, чем координаты и компоненты скорости, использованные при их получении. Эта потеря значащих цифр передается посредством $\operatorname{tg} u$ самому углу u .

Допустим, что правые части вычислены с точностью до шести десятичных знаков. Их максимальная погрешность равна, скажем, $\epsilon = 5 \cdot 10^{-7}$. Максимальная погрешность в $\operatorname{tg} u$ и u равна поэтому $e^{-1}\epsilon$. Например, если $e = 0,01$, то формулы (89) и (90) дают $\operatorname{tg} u$ с точностью только до четырех десятичных знаков, и неточность u становится равной $5 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 0^{\circ}, 003 = 10''$, тогда как неточность, обычно ожидаемая при использовании шести десятичных знаков, порядка $0'', 1$.

Неточность u и порядка $e^{-1}\epsilon$ вносится затем в l и влияет на любой угол, отсчитываемый от перигелия. Это является отражением неопределенности положения перигелия в случае круговых орбит и того, что степень определенности в положении перигелия, можно сказать, пропорциональна эксцентриситету орбиты. Однако это не влияет на точность, с которой положение планеты определяется в пространстве, как это можно проверить при помощи выражений

$$u = l + e \sin u, \quad r/a = 1 - e \cos u,$$

которые показывают, что отклонение от равномерного кругового движения выражается тригонометрическими функциями от u , имеющими эксцентриситет множителем. Тем не менее важно использовать u при вычислении l из уравнения (91) и при определении элементов ориентации (96), (97) с полным числом десятичных знаков, требуемым для этих элементов.

Аналогичная неточность встречается при вычислении значения ω из уравнений (98), если I мало, и она вносится в определение Ω по формулам (99). Если либо e , либо I , или оба эти элемента малы, то использование полного числа значащих цифр в значениях i и ω обеспечит точное определение суммы углов $\Omega + \omega + l$ — средней долготы в орбите — независимо от того, что каждый из трех углов: Ω , ω , l — в отдельности известен со значительно меньшей точностью. Важность этих рассуждений можно иллюстрировать выражениями в полярных координатах (85).

29. Экваториальные постоянные. Из формул (84) без труда получаются соответствующие выражения для прямоугольных экваториальных координат:

$$x = r \cos(f + \omega) \cos \Omega - r \sin(f + \omega) \sin \Omega \cos I,$$

$$y = r \cos(f + \omega) \sin \Omega \cos \epsilon + r \sin(f + \omega) (\cos \Omega \cos I \cos \epsilon - \sin I \sin \epsilon),$$

$$z = r \cos(f + \omega) \sin \Omega \sin \epsilon + r \sin(f + \omega) (\cos \Omega \cos I \sin \epsilon + \sin I \cos \epsilon).$$

Эти формулы можно привести к виду

$$x = r \sin a \sin(A + f + \omega),$$

$$y = r \sin b \sin(B + f + \omega),$$

$$z = r \sin c \sin(C + f + \omega),$$

если определить $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ и A , B , C следующим образом:

$$\sin a \cos A = \cos \Omega,$$

$$\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos I,$$

$$\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \epsilon,$$

$$\sin b \cos B = \cos \Omega \cos I \cos \epsilon - \sin I \sin \epsilon,$$

$$\sin c \sin C = \sin \Omega \sin \epsilon,$$

$$\sin c \cos C = \cos \Omega \cos I \sin \epsilon + \sin I \cos \epsilon.$$

Наконец, если

$$A' = A + \omega,$$

$$B' = B + \omega,$$

$$C' = C + \omega,$$

то эти выражения принимают следующий вид:

$$x = r \sin a \sin(A' + f),$$

$$y = r \sin b \sin(B' + f),$$

$$z = r \sin c \sin(C' + f).$$

Эти формулы широко применялись в прошлом для вычислений с логарифмами. Постоянные $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A' , B' , C' называются экваториальными постоянными.

30. Выражения через начальные координаты и компоненты скорости. Пусть x_0 , y_0 , z_0 суть координаты и \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 — компоненты скорости при $t = t_0$ в относительном движении в задаче двух тел. Решение

этой задачи имеет вид

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Целью этого раздела является найти эти выражения с $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ в качестве постоянных интегрирования.

Для коротких интервалов времени можно считать, что эти функции от времени могут быть разложены в ряды Тейлора

$$\ddot{x}(t) = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{x}_0(t - t_0)^2 + \dots$$

с аналогичными выражениями для y и z .

Запишем дифференциальные уравнения

$$\ddot{x} = -\mu x r^{-3}, \quad \ddot{y} = -\mu y r^{-3}, \quad \ddot{z} = -\mu z r^{-3}$$

в следующем виде:

$$\ddot{x} = F_1 x, \quad \ddot{y} = F_1 y, \quad \ddot{z} = F_1 z.$$

Тогда последовательным дифференцированием получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{F}_1 x + F_1 \dot{x} = F_2 x + G_2 \dot{x}, \\ \ddot{x} &= \dot{F}_2 x + (F_2 + \dot{G}_2) \dot{x} + G_2 \ddot{x} = \\ &= (\dot{F}_2 + G_2 F_1) x + (F_2 + \dot{G}_2) \dot{x} = F_3 x + G_3 \dot{x}. \end{aligned}$$

Эта последовательность производных может быть продолжена неограниченно. Те же функции F_p, G_p получаются для y и z . Подстановка в ряды Тейлора дает

$$\begin{aligned} x &= f(t) x_0 + g(t) \dot{x}_0, \\ y &= f(t) y_0 + g(t) \dot{y}_0, \\ z &= f(t) z_0 + g(t) \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{100}$$

Из способа образования этих соотношений очевидно, что $f(t), g(t)$ получаются как функции времени следующего вида:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j, \\ g(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j (t - t_0)^j, \end{aligned} \tag{101}$$

в которых коэффициенты a_j, b_j с самого начала выражены как функции от величины μr^{-3} и ее последовательных производных, вычисленных при $t = t_0$. Дифференцируя выражения (100) дважды, находим, что

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{f} x_0 + \dot{g} \dot{x}_0 = \\ &= -\frac{\mu}{r^3} x = -\frac{\mu}{r^3} (f x_0 + g \dot{x}_0). \end{aligned}$$

Таким образом, f и g должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\dot{f} + \mu f r^{-3} = 0, \quad \dot{g} + \mu g r^{-3} = 0.$$

Поэтому они являются частными решениями этих дифференциальных уравнений со следующими начальными условиями при $t = t_0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= +1, \quad g(0) = 0, \\ \dot{f}(0) &= 0, \quad \dot{g}(0) = +1, \end{aligned} \tag{102}$$

которые вытекают из выражений (100) и их первых производных.

Простой метод для получения разложений f и g в ряды по степеням разности $t - t_0$ требует сначала определения коэффициентов c_k в следующем разложении:

$$\frac{\mu}{r^3} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k.$$

Коэффициенты c_k получаются повторным дифференцированием величины μr^{-3} при $t = t_0$. Все производные можно выразить через r_0 , \dot{r}_0 , используя соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (rr) &= \frac{d}{dt} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \\ &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \\ &= V^2 - \frac{\mu}{r}. \end{aligned}$$

Интеграл энергии дает

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} (rr) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Для коэффициентов c_k получаются следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} c_0 &= \mu r_0^{-3}, \\ c_1 &= -3\mu r_0^{-5} (\dot{r}_0), \\ c_2 &= +\frac{15}{2} \mu r_0^{-7} (\dot{r}_0)^2 - \frac{3}{2} \mu^2 r_0^{-6} + \frac{3}{2} \mu^2 r_0^{-5} a^{-1}, \\ c_3 &= -\frac{35}{2} \mu r_0^{-9} (\dot{r}_0)^3 + 8\mu^2 r_0^{-8} (\dot{r}_0) - \frac{15}{2} \mu^2 r_0^{-7} a^{-1} (\dot{r}_0), \\ c_4 &= +\frac{315}{8} \mu r_0^{-11} (\dot{r}_0)^4 - \frac{233}{8} \mu^2 r_0^{-10} (\dot{r}_0)^2 + \frac{105}{4} \mu^2 r_0^{-9} a^{-1} (\dot{r}_0)^2 + \\ &\quad + 2\mu^3 r_0^{-9} - \frac{31}{8} \mu^3 r_0^{-8} a^{-1} + \frac{15}{8} \mu^3 r_0^{-7} a^{-2}. \end{aligned}$$

Если этот ряд подставить в уравнения

$$\ddot{f} + \mu f r^{-3} = 0, \quad \ddot{g} + \mu g r^{-3} = 0,$$

заменив f , g рядами (101), то получается следующее уравнение:

$$\sum (j+1)(j+2) a_{j+2} (t - t_0)^j = - \sum c_k (t - t_0)^k \sum a_j (t - t_0)^j.$$

Приравнивая коэффициенты при $(t - t_0)^j$ в обеих частях, получаем

$$a_{j+2} = -\frac{1}{(j+1)(j+2)} [c_0 a_j + c_1 a_{j-1} + c_2 a_{j-2} + \dots] \quad (103)$$

и аналогично для b

$$b_{j+2} = -\frac{1}{(j+1)(j+2)} [c_0 b_j + c_1 b_{j-1} + c_2 b_{j-2} + \dots]. \quad (104)$$

Значения a_0 , a_1 , b_0 , b_1 непосредственно следуют из начальных условий (102) для f , g и их первых производных. В результате имеем

$$a_0 = \pm 1,$$

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} \mu r_0^{-3},$$

$$a_3 = \pm \frac{1}{2} \mu r_0^{-4} \dot{r}_0,$$

$$a_4 = -\frac{1}{8} \mu^2 r_0^{-5} a^{-1} - \frac{5}{8} \mu r_0^{-5} \dot{r}_0^2 + \frac{1}{6} \mu^2 r_0^{-6},$$

$$a_5 = \pm \frac{3}{8} \mu^2 r_0^{-6} \dot{r}_0 a^{-1} + \frac{7}{8} \mu r_0^{-6} \dot{r}_0^3 - \frac{1}{2} \mu^2 r_0^{-7} \ddot{r}_0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{16} \mu^3 r_0^{-7} a^{-2} - \frac{7}{8} \mu^2 r_0^{-7} \dot{r}_0^2 a^{-1} - \frac{21}{16} \mu r_0^{-7} \dot{r}_0^4 + \frac{19}{120} \mu^3 r_0^{-8} a^{-1} + \frac{7}{6} \mu^2 r_0^{-8} \dot{r}_0^2 - \frac{7}{72} \mu^3 r_0^{-9},$$

$$b_0 = 0,$$

$$b_1 = \pm 1,$$

$$b_2 = 0,$$

$$b_3 = -\frac{1}{6} \mu r_0^{-3}, \quad b_4 = \pm \frac{1}{4} \mu r_0^{-4} \dot{r}_0,$$

$$b_5 = -\frac{3}{40} \mu^2 r_0^{-5} a^{-1} - \frac{3}{8} \mu r_0^{-5} \dot{r}_0^2 + \frac{1}{12} \mu^2 r_0^{-6},$$

$$b_6 = +\frac{1}{4} \mu^2 r_0^{-6} \dot{r}_0 a^{-1} + \frac{7}{12} \mu r_0^{-6} \dot{r}_0^3 - \frac{7}{24} \mu^2 r_0^{-7} \ddot{r}_0.$$

Примером полезности разложений функций f и g в ряды может служить проблема определения орбиты вновь открытого объекта. Вычисления дают гелиоцентрические координаты и компоненты скорости для даты, лежащей вблизи средней эпохи наблюдений. Следующим шагом могло бы быть определение элементов, например, методом, приведенным в разд. 27 этой главы. Однако часто крайне необходимым является вычисление эфемериды на период в несколько недель или месяцев. Очевидно, разложения функций f и g в ряды могут с успехом служить для этой цели. Это вычисление можно выполнить до определения всех элементов, за исключением большой полуоси, входящей в выражения для коэффициентов.

Еще одно применение эти ряды находят в начале численного интегрирования.

Форма, в которой даются коэффициенты a и b , делает ряды для f и g применимыми к любому коническому сечению. Если эти ряды применяются к эллиптической орбите, то может иметь преимущества модифицированная форма. Если ввести обозначение D вместо $d/n dt$, то

дифференциальные уравнения для f и g можно написать в виде

$$D^2f + \frac{a^3}{r^3} f = 0, \quad D^2g + \frac{a^3}{r^3} g = 0.$$

Разложения в ряд Тейлора превращаются в степенные ряды по степеням $l - l_0$, т. е. по степеням приращений средней аномалии вместо степеней разности $t - t_0$. В частности, разложение a^3/r^3 принимает вид

$$\frac{a^3}{r^3} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (l - l_0)^k.$$

Если теперь

$$p = \frac{a}{r_0}, \quad q = \frac{r_0}{an},$$

то

$$C_0 = +p^3,$$

$$C_1 = -3p^4q,$$

$$C_2 = +\frac{3}{2} p^5 (1 + 5q^2) - \frac{3}{2} p^6,$$

$$C_3 = -\frac{5}{2} p^6 q (3 + 7q^2) + 8p^7 q,$$

$$C_4 = +\frac{15}{8} p^7 (1 + 14q^2 + 21q^4) - \frac{1}{8} p^8 (31 + 233q^2) + 2p^9.$$

Выражения для этих членов легко проверить, если заметить, что

$$Dp^j = -jp^{j+1}q,$$

$$Dq^j = jq^{j-1}(-p - pq^2 + p^3).$$

Точно такие же рекуррентные соотношения имеют место среди коэффициентов A , B , C в разложениях f и g , что и найденные для a , b , c . Окончательно получаем

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{1}{2} p^3 (l - l_0)^2 + \frac{1}{2} p^4 q (l - l_0)^3 + \\ &+ \left[-\frac{1}{8} p^5 (1 + 5q^2) + \frac{1}{6} p^6 \right] (l - l_0)^4 + \left[+\frac{1}{8} p^6 q (3 + 7q^2) - \frac{1}{2} p^7 q \right] (l - l_0)^5 + \\ &+ \left[-\frac{1}{16} p^7 (1 + 14q^2 + 21q^4) + \frac{1}{120} p^8 (19 + 140q^2) - \frac{7}{72} p^9 \right] (l - l_0)^6 + \dots; \\ g &= l - l_0 - \frac{1}{6} p^3 (l - l_0)^3 + \frac{1}{4} p^4 q (l - l_0)^4 + \\ &+ \left[-\frac{3}{40} p^5 (1 + 5q^2) + \frac{1}{12} p^6 \right] (l - l_0)^5 + \\ &+ \left[+\frac{1}{12} p^6 q (3 + 7q^2) - \frac{7}{24} p^7 q \right] (l - l_0)^6 + \dots. \end{aligned}$$

Для круговых орбит $p = 1$ и $q = 0$, и эти разложения приводятся соответственно к разложениям $\cos(l - l_0)$ и $\sin(l - l_0)$.

В этой форме, кроме a , необходимо получить еще и $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$.

Для функций f и g можно вывести замкнутые выражения, используя их применимость также к системе координат X , Y в орбитальной

плоскости, ось X которой направлена в перигелий. Тогда

$$X(t) = f(t) X_0 + g(t) \dot{X}_0,$$

$$Y(t) = f(t) Y_0 + g(t) \dot{Y}_0.$$

Решением этих уравнений относительно f и g является

$$f(t) = G^{-1} (X \dot{Y}_0 - Y \dot{X}_0),$$

$$g(t) = G^{-1} (Y X_0 - X Y_0),$$

где

$$G = X_0 \dot{Y}_0 - Y_0 \dot{X}_0 = [\mu a (1 - e^2)]^{1/2} = n a^2 (1 - e^2)^{1/2} = n a b.$$

Теперь удобно выразить f и g через эксцентрическую аномалию, используя формулы

$$X = a (\cos u - e), \quad \dot{X} = -an \sin u (1 - e \cos u)^{-1},$$

$$Y = a (1 - e^2)^{1/2} \sin u, \quad \dot{Y} = +an (1 - e^2)^{1/2} \cos u (1 - e \cos u)^{-1}.$$

Пусть u_0 есть значение эксцентрической аномалии при $t = t_0$, а u — ее значение при $t = t$. Тогда легко найти, что

$$X \dot{Y}_0 - Y \dot{X}_0 = abn [\cos(u - u_0) - e \cos u_0] (1 - e \cos u)^{-1},$$

$$Y X_0 - X Y_0 = ab [\sin(u - u_0) - e (\sin u - \sin u_0)].$$

В результате получается

$$f = \frac{\cos(u - u_0) - e \cos u_0}{1 - e \cos u_0} =$$

$$= 1 - \frac{1 - \cos(u - u_0)}{1 - e \cos u_0},$$

$$g = \frac{\sin(u - u_0) - e (\sin u - \sin u_0)}{n} =$$

$$= t - t_0 - \frac{u - u_0 - \sin(u - u_0)}{n}.$$

31. Гауссова постоянная. В разд. 2 было отмечено, что численное значение гравитационной постоянной зависит от выбранных единиц массы, времени и расстояния. Третий закон Кеплера

$$k^2 (m_a + m_b) = n^2 a^3,$$

или, полагая $n = 2\pi/P$,

$$k^2 (m_a + m_b) = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2}$$

является простым соотношением между массой, временем и расстоянием, которое можно с успехом использовать в практических приложениях формул эллиптического движения, чтобы найти любую из этих трех величин, если известны две остальные. Можно было бы выбрать единицы массы, времени и расстояния произвольным образом, а затем определить k из наблюдений. В частности, может показаться логичным принять за эти единицы грамм, сантиметр и эфемеридную секунду, как это сделано в физике. Однако подобный выбор единиц оказался бы исключительно неудобным. Если бы в качестве единицы массы был

взят грамм, то сначала необходимо было бы определить массу Земли в граммах (что является геофизической, а не астрономической задачей), а затем выразить при помощи полученного значения массы остальных небесных тел. Результат содержал бы большое количество цифр, а пользы от этого не получилось бы никакой: в небесной механике нет ни одной практической задачи, требующей знания массы какого-либо тела в граммах. Еще большие трудности встретились бы с единицей расстояния. Расстояния между телами в солнечной системе не могут быть измерены непосредственно в сантиметрах с высокой точностью. Например, расстояние от Земли до Солнца в сантиметрах известно только с точностью до трех или четырех значащих цифр и не является результатом непосредственных измерений, а выведено при помощи сложных вычислений.

Поэтому исключительно в целях удобства эти единицы выбираются так, чтобы массы, промежутки времени и расстояния, связанные с астрономическими задачами, можно было легко измерить и выразить. В большинстве приложений небесной механики к движениям тел в солнечной системе за единицу массы выбрана масса Солнца и все остальные массы выражаются в ее долях. Таким образом, если m_a есть масса Солнца, то мы принимаем $m_a = 1$ и пишем $m = m_b/m_a$. Тогда

$$k^2(1+m) = n^2a^3.$$

В качестве единицы времени выбраны эфемеридные сутки, так как периоды обращений тел в солнечной системе легко и точно можно измерить в эфемеридных сутках. Таким образом, в выражении третьего закона Кеплера P обычно измеряется в эфемеридных сутках, а n — в радианах за эфемеридные сутки.

Далее, в силу трудности измерения расстояний, расстояние не определяется в абсолютных физических единицах или каких-нибудь произвольных единицах, а вместо этого произвольным образом выбирается k . Это значение k , равное $0,017\,202\,098\,950\,000\,000$, известно как *гауссова постоянная*. Поэтому единица расстояния является производной единицей, полученной из гауссовой постоянной и единиц массы и времени. Она называется *астрономической единицей* и в сокращенной записи часто обозначается как а. е. Тогда размерность k равна $M^{-1/2}L^{3/2}T^{-1}$.

Важно помнить, что определение астрономической единицы дается третьим законом Кеплера при оговоренном численном значении k , массе Солнца в качестве единицы массы и эфемеридных сутках в качестве единицы времени. Часто утверждают, что астрономическая единица является расстоянием от Солнца до тела бесконечно малой массы, обращающегося по круговой орбите с периодом, равным 365,24 + эфемеридных суток, но это лишь описание, а не определение. Даже в качестве описания это утверждение оставляет желать лучшего.

С исторической точки зрения интересно заметить, что Гаусс предполагал выбрать k таким образом, чтобы единица расстояния получилась равной половине большой оси орбиты Земли. Фактически же, поскольку Гаусс использовал значение для массы Земли, которое, как известно нам, занижено на 7%, то получается, что большая полуось земной орбиты, выведенная из третьего закона Кеплера с гауссовым значением k , равна 1,000 000 03 а. е. Большая путаница была вызвана небрежным употреблением слов «большая полуось» и «среднее расстояние» в астрономической литературе. В действительности третий закон Кеплера теряет свое геометрическое значение, когда в систему вводится третье тело

заметной массы. В таких случаях этот закон следует рассматривать просто как определение единицы расстояния, каковым он фактически является. Например, из-за возмущающего влияния остальных планет эллипс, у которого большая полуось равна около 1,000 000 2 а. е., дает лучшее приближение к действительной орбите Земли, чем эллипс, выведенный из третьего закона Кеплера.

Замечания. Литература

Теория эпициклов Гиппарха явилась первой попыткой представить движения планет при помощи чисто математической теории независимо от физических причин, вызывающих эти движения. По форме теория эпициклов похожа на те разложения в тригонометрические ряды, которые до сих пор необходимы для представления движений планет и занимают много места в этой книге. Однако между ампирическим представлением Гиппарха и его последователей и современным представлением посредством тригонометрических рядов, удовлетворяющих уравнениям движения, существует громадная разница. В теории Гиппарха амплитуды и фазовые постоянные всех эпициклов получались независимо друг от друга из наблюдений; в современных методах количество имеющихся в распоряжении постоянных строго ограничено. До эпохи Кеплера было принято представлять годичный параллакс планеты одним эпициклом, а эксцентриситет ее орбиты — другим. В Рудольфовых таблицах Кеплера («Tabulae Rudolphinae»), изданных в 1627 г., уравнение центра впервые выводится при помощи эллиптической формулы, и этим был указан современный путь преобразования гелиоцентрических положений в геоцентрические.

Кеплер пришел к своей теории эллиптического движения путем анализа наблюдений Марса — единственной планеты с достаточно большим эксцентриситетом и быстрым движением, нуждавшейся в его эпоху более чем в одном эпицикле для представления эксцентриситета. Его знаменитому уравнению было посвящено в астрономии больше внимания, чем какому-нибудь другому.

Первое вполне точное рассмотрение эллиптического движения было выполнено Ньютона в «Математических началах» в 1687 г. с применением геометрических методов. Подробное аналитическое рассмотрение было дано Эйлером в «Теории движения планет и комет» в 1744 г. Эйлер первым предпринял также вычисление взаимных возмущений Юпитера и Сатурна в соответствии с законом тяготения Ньютона.

Глава II

РАЗЛОЖЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

1. Введение. Методы, изложенные в гл. I, достаточны для вычисления координат планеты в эллиптической орбите для любого момента времени по элементам этой орбиты. Для различных приложений в небесной механике необходимо иметь в распоряжении методы, которые позволяют разложить координаты и функции от координат в эллиптической орбите в периодические ряды. При движении по эллипсу все конечные и непрерывные функции от координат после полного обращения тела возвращаются к исходным значениям. Поэтому такие функции разложимы в периодические ряды по любой непрерывно возрастающей угловой переменной, которая за время полного обращения тела увеличивается на 2π . Угловыми переменными, представляющими в этой связи особый интерес, являются средняя аномалия I , эксцентрисическая аномалия i и истинная аномалия f . Они не являются единственными аргументами, которые могут быть рассмотрены; в некоторых приложениях используются другие аргументы. Функциями, которые представляются наиболее естественными для этой цели, являются или четные, или нечетные периодические функции от этих переменных, порождающие либо ряды косинусов, либо ряды синусов. Поскольку обычно удобнее оперировать степенными рядами, чем тригонометрическими разложениями, то полезно познакомиться с разложениями в экспоненциальной форме.

2. Разложения в ряд Фурье. Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π по x , разложение которой имеет вид

$$f(x) = a_0 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos px + 2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin px. \quad (1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos px dx, \\ b_p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin px dx, \quad p = +1, +2, \dots \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $f(x)$ является четной периодической функцией, то

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos px, \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \\ a_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos px dx, \quad p = +1, +2, \dots \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Если $f(x)$ является нечетной периодической функцией, то

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin px, \\ b_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin px dx, \quad p = +1, +2, \dots \infty \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть теперь в экспоненциальной форме

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p E^{pix}, \tag{5}$$

где E есть основание натуральных логарифмов, а $i^2 = -1$; тогда

$$A_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) E^{-pix} dx, \quad p = -\infty, \dots, +\infty. \tag{6}$$

Интегральные выражения для коэффициентов A_p в случае приложения к действительным функциям $f(x)$ следует рассматривать просто как сокращенную форму соответствующего выражения

$$A_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (\cos px - i \sin px) dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0, \\ A_p &= a_p - i b_p, \\ A_{-p} &= a_p + i b_p, \quad p = +1, +2, \dots \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Если периодический ряд выражается в виде

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a'_p \cos px + \sum_{p=+\infty}^{+\infty} b'_p \sin px, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_0, \\ a'_{-p} &= a'_p = a_p, \\ b'_{-p} &= -b'_p = -b_p, \end{aligned} \tag{9}$$

то для всех значений p , положительных, отрицательных и равных нулю, справедливо одно-единственное соотношение

$$A_p = a'_p - i b'_p. \quad (10)$$

Разложения по показательным функциям можно написать в особенности удобной форме, если ввести следующие обозначения:

$$E^{il} = \Lambda, \quad E^{iu} = \Upsilon, \quad E^{if} = \Phi, \quad (11)$$

так что имеем

$$\begin{aligned} 2 \cos l &= \Lambda + \Lambda^{-1}, & 2 \cos u &= \Upsilon + \Upsilon^{-1}, & 2 \cos f &= \Phi + \Phi^{-1}, \\ 2i \sin l &= \Lambda - \Lambda^{-1}, & 2i \sin u &= \Upsilon - \Upsilon^{-1}, & 2i \sin f &= \Phi - \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

3. Выражение истинной аномалии через эксцентрическую аномалию. Уравнение, связывающее истинную аномалию с эксцентрической, имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} f = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u. \quad (12)$$

Для получения решения необходимо ввести β соотношением

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

так что получается

$$e = \sin \varphi = \frac{2\beta}{1+\beta^2}, \quad (13)$$

$$\beta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1-e^2}), \quad (14)$$

и уравнение (12) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} f = \frac{1+\beta}{1-\beta} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u. \quad (15)$$

Поскольку β как функция от e получается как корень квадратного уравнения, то имеются два решения, второе из которых, а именно $\beta' = e^{-1}(1 + \sqrt{1-e^2})$, рассматриваться не будет. Очевидно, что если e мало, то β приблизительно равно $\frac{1}{2}e$, тогда как $\beta' = \beta^{-1}$ приблизительно равно $2e^{-1}$.

Для последующих приложений полезны следующие разложения степеней β по степеням e :

$$\beta = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \frac{5}{128}e^7,$$

$$\beta^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6,$$

$$\beta^3 = \frac{1}{8}e^3 + \frac{3}{32}e^5 + \frac{9}{128}e^7,$$

$$\beta^4 = \frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6,$$

$$\beta^5 = \frac{1}{32}e^5 + \frac{5}{128}e^7,$$

$$\beta^6 = \frac{1}{64}e^6,$$

$$\beta^7 = \frac{1}{128}e^7.$$

Если уравнение (12) записано в экспоненциальной форме и использовано обозначение (11), то это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{\Phi^{1/2} - \Phi^{-1/2}}{\Phi^{1/2} + \Phi^{-1/2}} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{\Upsilon^{1/2} - \Upsilon^{-1/2}}{\Upsilon^{1/2} + \Upsilon^{-1/2}}, \quad (16)$$

что можно записать в следующем виде:

$$\frac{\Phi - 1}{\Phi + 1} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{\Upsilon - 1}{\Upsilon + 1}. \quad (17)$$

Из этого уравнения можно выразить Φ через β и Υ по формуле

$$\Phi = \Upsilon \frac{1 - \beta \Upsilon^{-1}}{1 + \beta \Upsilon}. \quad (18)$$

Найдя натуральные логарифмы обеих частей формулы (18), получаем

$$\begin{aligned} i f &= i u + \ln(1 - \beta \Upsilon^{-1}) - \ln(1 - \beta \Upsilon) = \\ &= i u - \left(\beta \Upsilon^{-1} + \frac{\beta^2}{2} \Upsilon^{-2} + \frac{\beta^3}{3} \Upsilon^{-3} + \dots \right) + \\ &\quad + \left(\beta \Upsilon + \frac{\beta^2}{2} \Upsilon^2 + \frac{\beta^3}{3} \Upsilon^3 + \dots \right), \end{aligned}$$

$$f = u + 2 \left(\beta \sin u + \frac{\beta^2}{2} \sin 2u + \frac{\beta^3}{3} \sin 3u + \dots \right). \quad (19)$$

Это соотношение можно обратить, поскольку уравнение (15) не меняется при замене β на $-\beta$ одновременно со взаимной заменой u на f . Следовательно, соотношение (19) принимает вид

$$u = f - 2 \left(\beta \sin f - \frac{\beta^2}{2} \sin 2f + \frac{\beta^3}{3} \sin 3f + \dots \right). \quad (20)$$

Соотношением, соответствующим (18), является

$$\Upsilon = \Phi \frac{1 + \beta \Phi^{-1}}{1 + \beta \Phi}. \quad (21)$$

Уравнения, подобные уравнениям (12) или (15), встречаются также в совсем иных областях. Например, результат, полученный в этом разделе, использовался при выводе разложения в ряд приведения к эллиптике в разд. 26 гл. I.

4. Выражение средней аномалии через истинную аномалию. Чтобы получить выражение l через f , можно подставить в уравнение Кеплера выражение u через f или выражение Υ через Φ . Уравнение Кеплера

$$l = u - e \sin u \quad (22)$$

можно написать в виде

$$\begin{aligned} l &= u - \frac{e}{2i} (\Upsilon - \Upsilon^{-1}) = \\ &= u + i \frac{\beta}{1 + \beta^2} (\Upsilon - \Upsilon^{-1}). \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношения (21) мы получаем

$$\begin{aligned} \Upsilon - \Upsilon^{-1} &= \frac{\Phi + \beta}{1 + \beta \Phi} - \frac{\Phi^{-1} + \beta}{1 + \beta \Phi^{-1}} = \\ &= (1 - \beta^2) \frac{\Phi - \Phi^{-1}}{(1 + \beta \Phi)(1 + \beta \Phi^{-1})}. \end{aligned}$$

Это соотношение можно написать в виде

$$\Gamma - \Gamma^{-1} = (1 - \beta^2) \left(\frac{\Phi}{1 + \beta\Phi} - \frac{\Phi^{-1}}{1 + \beta\Phi^{-1}} \right)$$

и, разлагая правую его часть по теореме бинома, получить

$$\begin{aligned} \Gamma - \Gamma^{-1} &= (1 - \beta^2)(\Phi - \beta\Phi^2 + \beta^2\Phi^3 - \beta^3\Phi^4 + \dots \\ &\quad - \Phi^{-1} + \beta\Phi^{-2} - \beta^2\Phi^{-3} + \beta^3\Phi^{-4} - \dots) = \\ &= 2i(1 - \beta^2)(\sin f - \beta \sin 2f + \beta^2 \sin 3f - \dots). \end{aligned}$$

Подстановка в (23) дает

$$l = u - \frac{2(1 - \beta^2)}{1 + \beta^2} (\beta \sin f - \beta^2 \sin 2f + \beta^3 \sin 3f - \dots). \quad (24)$$

В это выражение можно подставить разложение (20), дающее u через f . Поскольку

$$\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} = \cos \varphi = \sqrt{1 - e^2},$$

то окончательный результат можно написать в виде

$$\begin{aligned} l &= f - 2 \left[\beta(1 + \cos \varphi) \sin f - \beta^2 \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) \sin 2f + \right. \\ &\quad \left. + \beta^3 \left(\frac{1}{3} + \cos \varphi \right) \sin 3f - \dots \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

5. Введение функций Бесселя. Хотя соотношения, полученные в предыдущем разделе, являются весьма полезными, более общее значение имеет разложение функций в периодические ряды по средней аномалии. Первой задачей, которую необходимо рассмотреть, является решение уравнения Кеплера относительно u в виде ряда Фурье по средней аномалии.

Из уравнения

$$u - l = e \sin u$$

очевидно, что разность $u - l$ является нечетной периодической функцией от u и, следовательно, от l . Поэтому она может быть разложена в ряд Фурье вида

$$e \sin u = 2 \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin sl,$$

так что

$$b_s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e \sin u \sin sl \, dl.$$

Интегрированием по частям находим

$$b_s = \left[-\frac{1}{s\pi} e \sin u \cos sl + \frac{1}{s\pi} \int \cos sl \, d(e \sin u) \right]_{u=0}^\pi.$$

Первое слагаемое равно нулю, а второе посредством подстановки $u - l$ вместо $e \sin u$ можно представить в виде

$$b_s = \frac{1}{s\pi} \int_0^\pi \cos sl \, dl + \frac{1}{s\pi} \int_0^\pi \cos sl \, du.$$

Первый интеграл снова обращается в нуль, и после подстановки во втором интеграле $u = e \sin u$ вместо l получается

$$b_s = \frac{1}{s\pi} \int_0^\pi \cos(su - se \sin u) du. \quad (26)$$

В соответствии с принятыми обозначениями для бесселевых функций положим

$$J_s(se) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(su - se \sin u) du, \quad (27)$$

так что

$$b_s = \frac{1}{s} J_s(se) \quad (28)$$

и

$$e \sin u = 2 \sum_1^\infty \frac{1}{s} J_s(se) \sin sl, \quad (29)$$

$$u = l + 2 \sum_1^\infty \frac{1}{s} J_s(se) \sin sl. \quad (30)$$

Необходимо изучить подробно свойства бесселевых функций первого рода, определенных формулой (27); их можно записать в следующем виде:

$$J_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(s\varphi - x \sin \varphi) d\varphi. \quad (31)$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} -i \int_0^{2\pi} E^{-i(s\varphi - x \sin \varphi)} d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s\varphi - x \sin \varphi) d\varphi - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(s\varphi - x \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Очевидно, что для $\varphi = 2\pi - \varphi'$

$$\sin(s\varphi - x \sin \varphi) = \sin(2s\pi - s\varphi' + x \sin \varphi') = -\sin(s\varphi' - x \sin \varphi').$$

Следовательно, значение подынтегральной функции второго интеграла при $\varphi' = 2\pi - \varphi$ равно по величине, но обратно по знаку значению этой подынтегральной функции для φ . Поэтому результат интегрирования в пределах от 0 до π взаимно уничтожается с результатом интегрирования в пределах от π до 2π . Следовательно, выражением, эквивалентным формуле (31), является

$$J_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E^{-i(s\varphi - x \sin \varphi)} d\varphi. \quad (32)$$

Если его записать в виде

$$J_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^{-is\varphi} \cdot E^{ix \sin \varphi} d\varphi, \quad (33)$$

то легко видеть из (33), что $J_s(x)$ является коэффициентом при $E^{si\varphi}$ в следующем разложении Фурье:

$$E^{ix \sin \varphi} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x) E^{si\varphi}. \quad (34)$$

Если теперь ввести z посредством

$$E^{i\varphi} = z,$$

так что

$$2i \sin \varphi = z - \frac{1}{z},$$

то разложение (34) можно переписать так:

$$E^{(x/2)(z-1/z)} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x) z^s. \quad (35)$$

Следовательно, $J_s(x)$ является коэффициентом при z^s в разложении функции

$$F(x, z) = E^{(x/2)(z-1/z)} \quad (36)$$

в ряд по положительным и отрицательным степеням z .

Этот ряд для $F(x, z)$ можно получить перемножением двух степенных рядов:

$$\begin{aligned} F(x, z) &= E^{xz/2} \cdot E^{-x/2z} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\alpha}}{\alpha!} z^{\alpha} \cdot \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{\beta}}{\beta!} z^{-\beta} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{\alpha+\beta}}{\alpha! \beta!} z^{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Подстановка

$$\alpha - \beta = s$$

дает

$$F(x, z) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{s+2\beta}}{(s+\beta)! \beta!} z^s = \quad (37)$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(x) z^s. \quad (38)$$

В двойном ряде (37) в качестве нижнего предела суммирования по s выбрано $-\infty$ вместо предела, соответствующего $\alpha = 0$, что было бы эквивалентно $s + \beta = 0$. Поскольку для отрицательных значений $s + \beta$ факториал $(s + \beta)!$ бесконечен, то легко видеть, что распространение суммирования до $s = -\infty$ является допустимым. Это отсутствие членов,

для которых сумма $s+\beta$ отрицательна, очевидно, равносильно тому, что следующий ряд по степеням $x/2$

$$J_s(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{s+2\beta}}{(s+\beta)! \beta!} \quad (39)$$

содержит только положительные степени $x/2$, как это легко видеть из обоих степенных рядов, перемноженных для получения $F(x, z)$.

Для случая эллиптического движения x можно считать действительным, а s — целым.

Поскольку $F(x, z)$ не изменяется, если заменить x на $-x$ и z на $-z$, то из (38) вытекает, что

$$J_s(-x) = (-1)^s J_s(x). \quad (40)$$

Аналогично $F(x, z)$ не изменяется, если z заменить на $-z^{-1}$, что дает

$$J_{-s}(x) = (-1)^s J_s(x). \quad (41)$$

Комбинация соотношений (40) и (41) дает

$$J_{-s}(-x) = J_s(x). \quad (42)$$

Из этих соотношений вытекает, что необходимо рассматривать только положительные значения индекса s . Для положительных значений s ряд (39) можно написать в следующем виде:

$$J_s(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^{\beta} \frac{(x/2)^{2\beta}}{\beta!(s+1)(s+2)\dots(s+\beta)}. \quad (43)$$

Отношение любого члена к предшествующему равно

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(\beta+1)(s+\beta+1)},$$

численное значение которого меньше единицы независимо от значения x при условии, что β выбрано достаточно большим. Следовательно, ряд (43) для J_s сходится абсолютно для всех значений x . Можно также прийти к выводу, что ряд (38) для $F(x, z)$ абсолютно сходится независимо от значения x для всех значений z , исключая 0 и ∞ . Это следует из того, что $F(x, z)$ не имеет полюсов в комплексной плоскости, за исключением $z=0$ и $z=\infty$.

Дифференцирование формулы (35) по z дает

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{-\infty}^{+\infty} J_s(x) z^s = \sum_{-\infty}^{+\infty} s J_s(x) z^{s-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{s-1} в обеих частях этого равенства, получаем

$$\frac{x}{2} [J_{s-1}(x) + J_{s+1}(x)] = s J_s(x). \quad (44)$$

Дифференцирование (35) по x дает

$$\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right) \sum_{-\infty}^{+\infty} J_s(x) z^s = \sum_{-\infty}^{+\infty} J'_s(x) z^s,$$

если ввести следующее обозначение:

$$J'_s(x) = \frac{d}{dx} J_s(x).$$

Приравнивание коэффициентов при z^s в обеих частях дает

$$\frac{1}{2} [J_{s-1}(x) - J_{s+1}(x)] = J'_s(x). \quad (45)$$

Из (44) и (45) легко видеть, что

$$\begin{aligned} J_{s-1}(x) &= \frac{s}{x} J_s(x) + J'_s(x), \\ J_{s+1}(x) &= \frac{s}{x} J_s(x) - J'_s(x). \end{aligned} \quad (46)$$

Замена s соответственно на $s-1$ и $s+1$ в (44) дает

$$\begin{aligned} J_s(x) + J_{s-2}(x) &= \frac{2(s-1)}{x} J_{s-1}(x), \\ J_s(x) + J_{s+2}(x) &= \frac{2(s+1)}{x} J_{s+1}(x), \end{aligned}$$

или, с учетом (46),

$$\begin{aligned} J_{s-2}(x) &= \left[\frac{2s(s-1)}{x^2} - 1 \right] J_s(x) + \frac{2(s-1)}{x} J'_s(x), \\ J_{s+2}(x) &= \left[\frac{2s(s+1)}{x^2} - 1 \right] J_s(x) - \frac{2(s+1)}{x} J'_s(x). \end{aligned} \quad (47)$$

Этот процесс можно продолжить и прийти к выводу, что любая бесселева функция с аргументом x и индексом $s+k$, где k — произвольное положительное или отрицательное целое число, может быть выражена в виде линейной комбинации $J_s(x)$ и $J'_s(x)$, коэффициенты которой есть функции от этого аргумента x . В равной степени важным свойством является то, что $J_s(x)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами. Это дифференциальное уравнение можно получить дифференцированием соотношения (45) и исключением $J'_{s-1}(x)$ и $J'_{s+1}(x)$, а именно

$$J''_s(x) = \frac{1}{2} [J'_{s-1}(x) - J'_{s+1}(x)].$$

При помощи (45) это уравнение можно написать в виде

$$J''_s(x) = \frac{1}{4} [J_{s-2}(x) - 2J_s(x) + J_{s+2}(x)],$$

а учитывая (47), получаем

$$J''_s(x) = -\frac{1}{2} J_s(x) + \left(\frac{s^2}{x^2} - \frac{1}{2} \right) J_s(x) - \frac{1}{x} J'_s(x),$$

или

$$J''_s(x) + \frac{1}{x} J'_s(x) + \left(1 - \frac{s^2}{x^2} \right) J_s(x) = 0. \quad (48)$$

Это дифференциальное уравнение можно использовать для того, чтобы дать определение функций Бесселя. Математическая теория показывает, что, кроме функций Бесселя первого рода, введенных в предыдущем разделе, этому дифференциальному уравнению удовлетворяет еще один класс функций. Для приложений в этой главе необходимы только бес-

селевые функции первого рода с действительным аргументом x и целочисленным индексом s .

Интересное свойство функций $J_s(x)$ можно получить перемножением следующих двух рядов:

$$\begin{aligned} E^{(x/2)(z-1/z)} &= J_0(x) + J_1(x)z + J_2(x)z^2 + J_3(x)z^3 + \dots \\ &\quad - J_1(x)z^{-1} + J_2(x)z^{-2} - J_3(x)z^{-3} + \dots; \\ E^{(-x/2)(z-1/z)} &= J_0(x) - J_1(x)z + J_2(x)z^2 - J_3(x)z^3 + \dots \\ &\quad + J_1(x)z^{-1} + J_2(x)z^{-2} + J_3(x)z^{-3} + \dots, \end{aligned}$$

коэффициенты которых выражены как бесселевые функции аргумента $+x$ и положительного индекса при помощи соотношений (40), (41) и (42). Произведение этих двух рядов находим в виде

$$\begin{aligned} 1 &= [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + 2[J_3(x)]^2 + \dots = \\ &= [J_0(x)]^2 + 2 \sum_1^{\infty} [J_s(x)]^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Для действительного аргумента x все функции $J_s(x)$ при целочисленных значениях индекса действительны. Следовательно, отсюда вытекает, что ни один член в правой части (49) не может превосходить единицы, т. е.

$$|J_0(x)| \leq 1; \quad |J_s(x)| \leq 1/\sqrt{2}, \quad s \neq 0.$$

6. Приложение бесселевых функций. Функция E^{piu} разлагается в ряд Фурье по l следующим образом:

$$E^{piu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s E^{sil}. \quad (50)$$

Коэффициенты A_s получаются из равенства

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^{piu} E^{-sil} dl = \\ &= \frac{i}{2\pi s} \int_0^{2\pi} E^{piu} d(E^{-sil}). \end{aligned} \quad (51)$$

Интегрирование по частям дает

$$A_s = \frac{i}{2\pi s} E^{-sil} E^{piu} \Big|_0^{2\pi} + \frac{p}{2\pi s} \int_0^{2\pi} E^{piu} E^{-sil} du.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль, и тогда можно написать

$$A_s = \frac{p}{2\pi s} \int_0^{2\pi} E^{-i[(s-p)u - se \sin u]} du.$$

Согласно определению (32), это можно записать в виде

$$A_s = \frac{p}{s} J_{s-p}(se), \quad s \neq 0, \quad (52)$$

Для $s = 0$ разложение (50) дает

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^{piu} dl,$$

или, поскольку

$$\begin{aligned} dl &= (1 - e \cos u) du = \\ &= \left[1 - \frac{e}{2} (E^{iu} + E^{-iu}) \right] du, \end{aligned}$$

то

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(E^{piu} - \frac{e}{2} E^{(p+1)iu} - \frac{e}{2} E^{(p-1)iu} \right) du.$$

Показательные функции в подынтегральном выражении порождают члены, отличные от нуля, только если p , $p+1$ или $p-1$ равны нулю. Поэтому необходимо рассмотреть следующие различные случаи:

$$\begin{aligned} p &= 0, & A_0 &= 1; \\ p &= \pm 1, & A_0 &= -e/2; \\ p &\neq 0, \neq \pm 1, & A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Результаты (52), (53), дающие

$$E^{piu} = A_0 + p \sum_{-\infty}^{+\infty}' \frac{1}{s} J_{s-p}(se) E^{sil} \quad (54)$$

или

$$Y^p = A_0 + p \sum_{-\infty}^{+\infty}' \frac{1}{s} J_{s-p}(se) \Lambda^s,$$

где символ \sum' указывает, что отброшен член для $s=0$, можно применить к тригонометрическим разложениям. Поскольку разложение (50) можно написать в виде

$$\cos pu + i \sin pu = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \cos sl + i \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \sin sl,$$

то отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \cos pu &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \cos sl = \\ &= A_0 + p \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} J_{s-p}(se) \cos sl, \end{aligned} \quad (55)$$

где постоянный член определяется посредством (53). Можно объединить члены с равными, но противоположными по знаку аргументами:

$$\begin{aligned} \cos pu &= A_0 + p \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{s} J_{s-p}(se) + \frac{1}{-s} I_{-s-p}(-se) \right] \cos sl = \\ &= A_0 + p \sum_1^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-p}(se) - J_{s+p}(se)] \cos sl, \end{aligned} \quad (56)$$

где A_0 определяется условиями (53). Так же имеем

$$\begin{aligned} \sin pu &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \sin sl = \\ &= p \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} J_{s-p}(se) \sin sl, \end{aligned} \quad (57)$$

что можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin pu &= p \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{s} J_{s-p}(se) - \frac{1}{-s} J_{-s-p}(-se) \right] \sin sl = \\ &= p \sum_1^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-p}(se) + J_{s+p}(se)] \sin sl. \end{aligned} \quad (58)$$

Для $p = 1$ частными случаями являются разложения

$$\begin{aligned} \cos u &= -\frac{e}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} J_{s-1}(se) \cos sl = \\ &= -\frac{e}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-1}(se) - J_{s+1}(se)] \cos sl, \end{aligned}$$

которое при помощи (45) переходит в

$$\cos u = -\frac{e}{2} + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{s} J'_s(se) \cos sl, \quad (59)$$

и

$$\begin{aligned} \sin u &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} J_{s-1}(se) \sin sl = \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{s} [J_{s-1}(se) + J_{s+1}(se)] \sin sl, \end{aligned}$$

которое при помощи (44) можно написать в виде

$$\sin u = \frac{2}{e} \sum_1^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin sl. \quad (60)$$

Эти результаты можно было бы получить, конечно, введением вместо разложения (50) тригонометрических рядов Фурье для $\cos pu$, $\sin pu$.

Разложения E^{nu} , $\cos pu$ и $\sin pu$ имеют большое значение в приложениях к проблемам небесной механики. Большинство функций от координат в эллиптическом движении легко выражается через периодические ряды по эксцентрической аномалии. Можно затем использовать ряды (54), (55), (57) для перехода к рядам, выраженным через среднюю

аномалию. Рассмотрим, например,

$$f(u) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} B_p E^{piu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_p Y^p. \quad (61)$$

Применяя (54), это разложение можно представить в следующем виде:

$$f(u) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s E^{sil} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s \Lambda^s, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{s} \sum_p p B_p J_{s-p}(se), \quad s \neq 0, \\ A_0 &= B_0 - \frac{\epsilon}{2} (B_1 + B_{-1}). \end{aligned} \quad (63)$$

Аналогичным образом при помощи (55) разложение

$$f(u) = a_0 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos pu \quad (64)$$

дает

$$f(u) = c_0 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} c_s \cos sl, \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{1}{s} \sum_{p=1}^{\infty} p a_p [J_{s-p}(se) - J_{s+p}(se)], \\ c_0 &= a_0 - ea_1. \end{aligned} \quad (66)$$

Также разложение

$$f(u) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin pu \quad (67)$$

с учетом (57) дает

$$f(u) = 2 \sum_{s=1}^{\infty} d_s \sin sl, \quad (68)$$

$$d_s = \frac{1}{s} \sum_{p=1}^{\infty} p b_p [J_{s-p}(se) + J_{s+p}(se)]. \quad (69)$$

Для дальнейших приложений будут полезны следующие разложения, полученные из общего ряда (43):

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} - \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left[1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \frac{x^6}{9216} + \dots \right],$$

$$J_2(x) = \frac{x^2}{8} \left[1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{384} - \frac{x^6}{23040} + \dots \right],$$

$$J_3(x) = \frac{x^3}{48} \left[1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{640} - \dots \right],$$

$$J_4(x) = \frac{x^4}{384} \left[1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{960} - \dots \right],$$

$$J_5(x) = \frac{x^5}{3840} \left[1 - \frac{x^2}{24} + \dots \right],$$

$$J_6(x) = \frac{x^6}{46080} \left[1 - \frac{x^2}{28} + \dots \right],$$

$$J_7(x) = \frac{x^7}{645120} [1 - \dots],$$

$$J'_0(x) = 0 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} - \dots,$$

$$J'_1(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{192}x^4 - \frac{7}{9216}x^6 + \dots \right],$$

$$J'_2(x) = \frac{x}{4} \left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{128}x^4 - \frac{1}{5760}x^6 + \dots \right],$$

$$J'_3(x) = \frac{x^2}{16} \left[1 - \frac{5}{48}x^2 + \frac{7}{1920}x^4 - \dots \right],$$

$$J'_4(x) = \frac{x^3}{96} \left[1 - \frac{3}{40}x^2 + \frac{1}{480}x^4 - \dots \right],$$

$$J'_5(x) = \frac{x^4}{768} \left[1 - \frac{7}{120}x^2 + \dots \right],$$

$$J'_6(x) = \frac{x^5}{7680} \left[1 - \frac{1}{21}x^2 + \dots \right],$$

$$J'_7(x) = \frac{x^6}{92160} [1 - \dots].$$

Теперь будет подробно решено несколько примеров.

а) Посредством (30) решение уравнения Кеплера было найдено в виде

$$u = l + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin sl. \quad (70)$$

При помощи разложений для $J_s(x)$, данных в настоящем разделе, находим с точностью до седьмой степени e

$$\begin{aligned} u = l &+ \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 - \frac{1}{9216}e^7 \right) \sin l + \\ &+ \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6 \right) \sin 2l + \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 + \frac{243}{5120}e^7 \right) \sin 3l + \\ &+ \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6 \right) \sin 4l + \left(\frac{125}{384}e^5 - \frac{3125}{9216}e^7 \right) \sin 5l + \\ &+ \frac{27}{80}e^6 \sin 6l + \frac{16807}{46080}e^7 \sin 7l. \end{aligned} \quad (71)$$

б) Отношение радиуса-вектора к большой полуоси

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u$$

посредством (59) приводится к следующему виду:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J'_s(se) \cos sl, \quad (72)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 + \\ + \left[-e + \frac{3}{8} e^3 - \frac{5}{192} e^5 + \frac{7}{9216} e^7 \right] \cos l + \\ + \left[-\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{3} e^4 - \frac{1}{16} e^6 \right] \cos 2l + \left[-\frac{3}{8} e^3 + \frac{45}{128} e^5 - \frac{567}{5120} e^7 \right] \cos 3l + \\ + \left[-\frac{1}{3} e^4 + \frac{2}{5} e^6 \right] \cos 4l + \left[-\frac{125}{384} e^5 + \frac{4375}{9216} e^7 \right] \cos 5l - \\ - \frac{27}{80} e^6 \cos 6l - \frac{16807}{46080} e^7 \cos 7l. \end{aligned} \quad (73)$$

Только что рассмотренные два случая являются примерами разложений, в которых коэффициенты можно получить в виде конечных выражений через бесселевы функции. Это верно только для очень ограниченного числа функций от координат в эллиптическом движении. Среди разложений, для которых в качестве коэффициентов выступают бесконечные ряды бесселевых функций, одним из важнейших является разложение f по l .

в) Уравнение центра. Если применить (67), то выражение (19) для f через u дает

$$f = u + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p [J_{s-p}(se) + J_{s+p}(se)] \sin sl.$$

Если ввести выражение u через l , то ряд для f примет вид

$$f = l + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left\{ J_s(se) + \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p [J_{s-p}(se) + J_{s+p}(se)] \right\} \sin sl. \quad (74)$$

Расписывая это разложение в более явной форме, получим

$$\begin{aligned} f = l + \frac{2}{1} \{J_1(e) + \beta [J_0(e) + J_2(e)] + \beta^2 [J_{-1}(e) + J_3(e)] + \dots\} \sin l + \\ + \frac{2}{2} \{J_2(2e) + \beta [J_1(2e)] + J_3(2e)] + \beta^2 [J_0(2e) + J_4(2e)] + \dots\} \sin 2l + \dots \end{aligned}$$

Бесселевы функции и различные степени β в этом ряде можно заменить выражениями по степеням e . Результат с точностью до седьмой степени относительно e имеет вид

$$\begin{aligned} f = l + \left(2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 + \frac{107}{4608} e^7 \right) \sin l + \\ + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 + \frac{17}{192} e^6 \right) \sin 2l + \left(\frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5 + \frac{95}{512} e^7 \right) \sin 3l + \\ + \left(\frac{103}{96} e^4 - \frac{451}{480} e^6 \right) \sin 4l + \left(\frac{1097}{960} e^5 - \frac{5957}{4608} e^7 \right) \sin 5l + \\ + \frac{1223}{960} e^6 \sin 6l + \frac{47273}{32256} e^7 \sin 7l. \end{aligned} \quad (75)$$

г) Логарифм радиуса-вектора. Задача заключается в разложении

$$\begin{aligned} \ln \frac{r}{a} = \ln (1 - e \cos u) = \\ = \ln \left(1 - \frac{e}{2} Y - \frac{e}{2} Y^{-1} \right). \end{aligned}$$

Чтобы разложить этот логарифм по положительным и отрицательным степеням Υ , введем C и x посредством соотношения

$$1 - \frac{e}{2}\Upsilon - \frac{e}{2}\Upsilon^{-1} = C(1 - x\Upsilon)(1 - x\Upsilon^{-1}) = \\ = C(1 + x^2) - Cx\Upsilon - Cx\Upsilon^{-1}.$$

Это дает

$$Cx = \frac{e}{2}, \quad C(1 + x^2) = 1,$$

или

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{e}{2}.$$

Это то же соотношение, что и определяемое уравнением (13) между β и e . Отсюда

$$x = \beta = \frac{1}{e}(1 - \sqrt{1 - e^2}) = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \\ C = \frac{e}{2\beta} = \frac{1}{1 + \beta^2} = \\ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - e^2}).$$

Тогда задача сводится к разложению

$$\ln \frac{r}{a} = -\ln(1 + \beta^2) + \ln(1 - \beta\Upsilon) + \ln(1 - \beta\Upsilon^{-1}) = \\ = -\ln(1 + \beta^2) - \beta\Upsilon - \frac{\beta^2}{2}\Upsilon^2 - \frac{\beta^3}{3}\Upsilon^3 - \dots \\ - \beta\Upsilon^{-1} - \frac{\beta^2}{2}\Upsilon^{-2} - \frac{\beta^3}{3}\Upsilon^{-3} - \dots = \\ = -\ln(1 + \beta^2) - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta^p}{p} \cos pu.$$

При помощи (64) разложение принимает вид

$$\ln \frac{r}{a} = -\ln(1 + \beta^2) + e\beta - \\ - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \sum_{p=1}^{\infty} \beta^p [J_{s-p}(se) - J_{s+p}(se)] \cos sl. \quad (76)$$

Постоянный член этого разложения, выраженный через e , равен

$$+ \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \right) + 1 - \sqrt{1 - e^2}.$$

Разворачивая этот ряд, получаем

$$\ln \frac{r}{a} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{32}e^4 + \frac{1}{96}e^6 + \dots \\ + \left(-e + \frac{3}{8}e^3 + \frac{1}{64}e^5 + \frac{127}{9216}e^7 \right) \cos l + \\ + \left(-\frac{3}{4}e^2 + \frac{11}{24}e^4 - \frac{3}{64}e^6 \right) \cos 2l + \left(-\frac{17}{24}e^3 + \frac{77}{128}e^5 - \frac{743}{5120}e^7 \right) \cos 3l + \\ + \left(-\frac{71}{96}e^4 + \frac{129}{160}e^6 \right) \cos 4l + \left(-\frac{523}{640}e^5 + \frac{10039}{9216}e^7 \right) \cos 5l - \\ - \frac{899}{960}e^6 \cos 6l - \frac{1355081}{322560}e^7 \cos 7l. \quad (77)$$

Важное свойство четырех функций, которые были разложены в ряды Фурье с кратными l в качестве аргументов и степенными рядами по e в качестве коэффициентов, заключается в том, что самая низкая степень e , входящая в коэффициент при синусе или косинусе, равна кратности l в аргументе этого члена. Степенные ряды идут далее по степеням e^2 , так что в коэффициент при косинусе или синусе нечетного аргумента входят только нечетные степени e , а в коэффициенте члена с четным аргументом встречаются только четные степени e . Это свойство тесно связано со свойствами разложений бесселевых функций. Оно впервые было особо отмечено Даламбером. По этой причине Браун назвал его далаамберовой характеристикой.

Легко видеть, что то же свойство относится и к функциям типа

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n E^{im(f-l)}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos m(f-l), \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin m(f-l),$$

где n и m — положительные или отрицательные целые числа. С другой стороны, в разложении в ряды Фурье по средней аномалии функций типа

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n E^{imf}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mf, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mf$$

нарушится указанное соотношение между самой низшей степенью e в коэффициенте и кратностью l в аргументе. Однако можно обнаружить другие соотношения, как это видно из следующих примеров.

д) Разложение $(r/a)\cos f = \bar{x}/a = \cos u - e$. Ряд (59) для $\cos u$ дает, если пренебречь степенями e выше седьмой,

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos f = & -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6\right) \cos l + \\ & + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{16}e^5 - \frac{1}{180}e^7\right) \cos 2l + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4 + \frac{567}{5120}e^6\right) \cos 3l + \\ & + \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{5}e^5 + \frac{8}{45}e^7\right) \cos 4l + \left(\frac{125}{384}e^4 - \frac{4375}{9216}e^6\right) \cos 5l + \\ & + \left(\frac{27}{80}e^5 - \frac{81}{140}e^7\right) \cos 6l + \frac{16807}{46080}e^6 \cos 7l. \end{aligned}$$

е) Разложение $(r/a)\sin f = \bar{y}/a = \sqrt{1-e^2} \sin u$. Ряд (60) для $\sin u$ необходимо умножить на ряд

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \dots$$

В результате, снова с точностью до седьмой степени e , получим

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \sin f = & \left(1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4 - \frac{457}{9216}e^6\right) \sin l + \\ & + \left(\frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3 + \frac{1}{24}e^5 - \frac{1}{45}e^7\right) \sin 2l + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{51}{128}e^4 + \frac{543}{5120}e^6\right) \sin 3l + \\ & + \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{13}{30}e^5 + \frac{13}{72}e^7\right) \sin 4l + \left(\frac{125}{384}e^4 - \frac{4625}{9216}e^6\right) \sin 5l + \\ & + \left(\frac{27}{80}e^5 - \frac{135}{224}e^7\right) \sin 6l + \frac{16807}{46080}e^6 \sin 7l. \end{aligned}$$

Обширная табуляция рядов в эллиптическом движении была дана Леверье¹⁾.

Основными рядами Леверье являются ряды по кратным средней аномалии для

$$x = \frac{r}{a} - 1, \quad y = f - l,$$

из которых он выводит ряды для $x^p, y^q; p, q = 0, 1, \dots, 7, p+q \leq 7$. Эти ряды в свою очередь используются для получения рядов для $x^p \sin hy, x^p \cos hy$ с коэффициентами, выраженными в виде полиномов относительно h .

На этой работе Лаверрье основаны чрезвычайно полезные таблицы разложений функций в теории эллиптического движения, составленные Кэли²⁾. С точностью до седьмой степени e Кэли дает разложения

$$x^p \cos jf, \quad x^p \sin jf, \quad j, p = 0, 1, \dots, 7,$$

$$\ln \frac{r}{a}, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^q \cos jf, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^q \sin jf,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, 5; q = -5, -4, \dots, -1, +1, \dots, +4.$$

Разложения Ньюкома³⁾ фактически основаны на рядах для

$$\beta = \ln \frac{r}{a}, \quad \eta = i(f - l),$$

расположенных по положительным и отрицательным степеням $\Lambda = E^{\pm i}$. Тогда

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\beta = E^{\beta\eta} = 1 + \beta\eta + \frac{\beta^2\eta^2}{2!} + \frac{\beta^3\eta^3}{3!} + \dots,$$

$$E^{\gamma\eta} = 1 + \gamma\eta + \frac{\gamma^2\eta^2}{2!} + \frac{\gamma^3\eta^3}{3!} + \dots,$$

и окончательно получается

$$\left(\frac{r}{a}\right)^\beta E^{\gamma\eta} = \sum_{m, q} \Pi_q^m(\beta, \gamma) e^m \Lambda^q,$$

$$m = 0, 1, \dots, \infty, \quad m - |\beta| = 0, 2, 4, \dots$$

Коэффициенты $\Pi_q^m(\beta, \gamma)$ являются полиномами относительно β и степени m как по β , так и по γ . Они играют важную роль в методе Ньюкома разложения возмущающей функции (см. гл. XIII).

7. Вычисление бесселевых функций. В принципе можно использовать формулу (44), чтобы получить бесселевые функции всех порядков, необходимых для данного аргумента, если только любые две из них известны. Однако этот путь, хотя и являющийся точным с алгебраической точки зрения, ведет к быстрому накоплению ошибок в последнем десятичном знаке, если его использовать последовательно несколько раз. При вычислительной работе предпочтительнее либо непосредственно применить формулу (43), либо определить значения этих функций интерполяцией из таблиц бесселевых функций. Для систематиче-

¹⁾ U. J. J. Leverrier, Ann. Obs. Paris, 1, 343—357 (1855).

²⁾ A. Cayley, Mem. Roy. Astron. Soc., 29, 191—306 (1861).

³⁾ S. Newcomb, Astron. Papers, 5, 1—48 (1895).

ских вычислений, особенно с применением автоматических вычислительных машин, еще лучше получить $J_0(x)$ любым из двух указанных способов, а затем вычислить $J_s(x)$ последовательным умножением $J_0(x)$ на множители, которые очень легко вычисляются.

Обозначая отношение $J_s(x)$ к $J_{s-1}(x)$ через p_s , мы получаем из уравнения (44)

$$\frac{2s}{x} = \frac{1}{p_s} + p_{s+1},$$

или

$$p_s = \frac{1}{(2s/x - p_{s+1})},$$

откуда мы получаем следующую непрерывную дробь:

$$p_s = \cfrac{1}{\cfrac{2s}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2(s+1)}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{2(s+2)}{x} - \dots}}}.$$

Чтобы использовать эту непрерывную дробь в вычислениях, выведем p_s из равенства

$$\frac{1}{p_s} = r_s - p_{s+1},$$

где

$$r_s = \frac{s}{\frac{1}{2}x},$$

начиная с такого большого значения s , чтобы для первого приближения можно было бы положить $p_{s+1}=0$, и продолжая продвигаться вплоть до p_1 . Тогда получим

$$J_1(x) = p_1 J_0(x),$$

$$J_2(x) = p_2 J_1(x),$$

$$J_3(x) = p_3 J_2(x) \text{ и т. д.},$$

и формула (49) может быть использована как контроль. Наибольшее значение s , необходимое для первого приближения, можно определить путем проб, используя то наибольшее значение x , которое должно быть применено в данной задаче; тогда то же самое значение s будет достаточным для всех меньших значений x .

В качестве примера мы приводим в табл. 1 числа, необходимые для вычисления $J_s(e)$, где e есть эксцентриситет Марса, равный 0,0932 6685. Применяя (43), находим, что $J_0(e)=0,99782\,65057$.

Частичный контроль получается использованием соотношения (49), записанного в следующем виде:

$$[J_0(x)]^2 \cdot [1 + 2(p_1^2 + p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_2^2 p_3^2 + \dots)] = 1.$$

Таблица 1

Вычисление $J_s(e)$

s	$r_s = 2s/e$	p_{s+1}	$J_s(e)$
11	235,8823 097	0,0	—
10	214,4384 634	0,00423 94	—
9	192,9946 171	0,00466 34	—
8	171,5507 707	0,00518 16169	—
7	150,1069 244	0,00582 93542	—
6	128,6630 780	0,00666 21766	0,00000 00000
5	107,2192 317	0,00777 26400	0,00000 00018
4	85,7753 8536	0,00932 73612	0,00000 01970
3	64,3315 3902	0,01165 96241	0,00001 68929
2	42,8876 9268	0,01554 72928	0,00108 65502
1	21,4438 4634	0,02332 51681	0,04658 27370
0	—	0,04668 42049	0,99782 65057

Этот частный пример дает

$$1 = 1,00000 00000 0$$

$$p_1^2 = 0,00217 94149 9 \quad 2p_1^2 = 0,00435 88299 8$$

$$p_2^2 = 0,00054 40634 7 \quad 2p_1^2 p_2^2 = \quad 23714 8$$

$$p_3^2 = 0,00024 17183 1 \quad 2p_1^2 p_2^2 p_3^2 = \quad 5 7$$

$$p_4^2 = 0,00013 59468 3 \quad 2p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 = \quad 0$$

$$\text{Сумма} = [J_0(e)]^{-2} = 1,00436 12020 3$$

$$J_0(e) = 0,99782 65057$$

в согласии до десятого десятичного знака со значением, полученным при помощи ряда.

В большинстве приложений необходимо также вычислять $J_s(2e)$, $J_s(3e)$ и т. д. Численная сходимость ряда для J_0 и процесса вычислений значений p_s остается удовлетворительной даже для больших значений аргумента, возникающих при высоких степенях e .

Рассмотрим теперь пример использования бесселевых функций для преобразования аргументов от эксцентрической аномалии к средней. При разложении в ряд a'/Δ , где $2a'$ есть большая ось орбиты Юпитера, а Δ — значение расстояния между Юпитером и Марсом (предполагая эллиптическое движение для обеих планет), находим следующие члены, вместе с соответствующими бесселевыми функциями, вычисленные со значением эксцентриситета Марса, равным 0,09326685, и необходимые для вычисления коэффициента при $\cos(l' - l)$ по формулам (55), (57). Все числа выражены в единицах восьмого десятичного знака (табл. 2). В этих выражениях символы со штрихами относятся к Юпитеру, а остальные — к Марсу. Перемножая попарно числа в строке и складывая их с произведениями, стоящими справа, мы получаем для коэффициента при $\cos(l' - l)$ значение, равное +0,23531250. Те же бесселевые функции будут достаточны для вычисления коэффициентов

Таблица 2

Члены в a'/Δ	Бесселевы функции	Произведе- ния
$+396 \cos(l' + 2u)$	$-2J_{-3}(-e) = -3379$	0
$+41206 \cos(l' + u)$	$-J_{-2}(-e) = -108655$	-45
$+2879796 \cos l'$	$0J_{-1}(-e) = 0$	0
$+23572402 \cos(l' - u)$	$J_0(-e) = +99782651$	+23521168
$-108643 \cos(l' - 2u)$	$2J_1(-e) = -9316547$	+10122
$+1677 \cos(l' - 3u)$	$3J_2(-e) = +325965$	+5
$-17 \cos(l' - 4u)$	$4J_3(-e) = -6757$	0

при $\cos(jl' - l)$ и $\sin(jl' - l)$, где j есть любое целое число или нуль. Для остальных кратностей l понадобятся другие бесселевы функции.

8. Решение уравнения Кеплера. Численному решению уравнения Кеплера

$$l = u - e \sin u$$

относительно u при заданных значениях e и l было посвящено много внимания, что было естественным для одного из наиболее древних трансцендентных уравнений в астрономии, часто требующего решения. Были опубликованы сотни методов решения этого уравнения. Уравнение (70) может быть использовано для вычислительной работы в тех случаях, когда эксцентриситет мал. Здесь мы опишем два общих метода, достаточных для всех нужд практического вычислителя. Первым является метод дифференциального исправления, который особенно полезен, когда под рукой нет счетной машины.

По приближенному значению u , соответствующему заданным значениям e и l , более точное значение находится путем последовательных приближений. Мы обозначаем приближенное значение u через u_0 , а начальную поправку к нему — через Δu_0 , так что $u_0 + \Delta u_0$ является лучшим приближением к u , чем u_0 . Вычислим значение l , соответствующее u_0 , из уравнения Кеплера и, называя его l_0 , обозначим разность $l - l_0$ через Δl_0 . Мы имеем строго

$$l_0 = u_0 - e \sin u_0.$$

Тогда, согласно теореме Тэйлора, отбрасывая квадраты и высшие степени Δu_0 , получаем следующее приближенное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta l_0 &= \frac{\partial l_0}{\partial u_0} \Delta u_0 = \\ &= (1 - e \cos u_0) \Delta u_0, \end{aligned}$$

или

$$\Delta u_0 = \frac{\Delta l_0}{1 - e \cos u_0}.$$

Теперь положим $u_1 = u_0 + \Delta u_0$; вычислим значение l , соответствующее u_1 , и, называя его l_1 , положим $l - l_1 = \Delta l_1$. Тогда при помощи того же процесса, как и прежде, получим

$$\Delta u_1 = \frac{\Delta l_1}{1 - e \cos u_1},$$

и эту процедуру можно повторить сколь угодно большое число раз. Мы обнаружим, что последовательные значения Δu , быстро уменьшаются, так что понадобится лишь несколько повторений.

В качестве первого приближения u_0 удобно использовать следующую сокращенную форму уравнения (70) или (71):

$$u = l + e \sin l + \frac{1}{2} e^2 \sin 2l.$$

В качестве численного примера мы приводим числа при вычислении u , когда точно $l = 30^\circ$ и $e = 0,3$. Для удобства при использовании тригонометрическими таблицами мы умножаем уравнения на число градусов в радиане, полагая, таким образом, 17,18873 вместо e и 2,57831 вместо $\frac{1}{2}e^2$. Однако при определении делителя выражения для Δu необходимо использовать само e . Таким образом, мы имеем

u_j	$\sin u_j$	l_j	Δl_j	$1 - e \cos u_j$	Δu_j
40°,82725	0,6537806	29°,58959	+0°,41041	0,77300	+0°,53093
41°,35818	0,6607642	30°,00048	-0°,00048	0,775	-0°,00062
41°,35756	0,6607560	30°,00000			

Если в распоряжении имеется настольная счетная машина, то цель будет достигнута гораздо быстрее при использовании другого метода, не требующего записи никаких чисел, если под рукой имеется таблица синусов для аргумента с десятичным делением градуса или в радианах. Если используется десятичное деление градуса, то умножим e на число градусов в радиане; тогда все углы будут выражены в градусах и десятичных долях градуса.

Напишем формулу

$$u = l + e \sin u.$$

Установим l в результирующем счетчике и e на клавиатуре. Затем повторными сложениями и вычитаниями к l добавляются или вычитываются из l различные кратности e до тех пор, пока не будет выполнено условие, что число, появляющееся в счетчике оборотов и дающее приближение к $\sin u$, равно синусу угла, набранного в результирующем счетчике и являющегося приближением к u . На каждом этапе необходимо посмотреть синус угла, набранного в результирующем счетчике, и увеличивать или уменьшать число в счетчике оборотов указанным образом. Для предыдущего примера можно привести следующие числа, стоящие на машине на последовательных этапах.

Счетчик оборотов	Результи- рующий счетчик	Счетчик оборотов	Результи- рующий счетчик
0,0	30,00000	0,6603	41,34972
0,5	38,59437	0,6607	41,35659
0,62	40,65701	0,66075	41,35745
0,652	41,20705	0,6607560	41,35756
0,6588	41,32394		

На практике к окончательному результату приходят гораздо быстрее, чем показывают вышеприведенные числа. Вычислитель быстро овладевает умением «взять в вилку», делая последовательные прибли-

жения, так что фактическое число приближений уменьшается до трех или четырех.

Любой из описанных методов применим к быстродействующей автоматической вычислительной машине, причем тригонометрические функции вычисляются в машине вместо того, чтобы считывать их с напечатанных таблиц. Как и в большинстве вычислений подобного рода, число необходимых последовательных приближений в значительной степени зависит от искусства вычислителя.

9. Решение уравнений движения в функции средней аномалии. В предыдущих разделах были получены разложения координат в эллиптическом движении в виде рядов Фурье, аргументами которых являются дуги, кратные средней аномалии, а коэффициенты выражаются рядами по степеням эксцентриситета. Теперь мы рассмотрим разложения координат, которые могут быть получены непосредственно из уравнений движения. Методика состоит в получении координат в виде рядов по степеням эксцентриситета, коэффициентами которых являются ряды Фурье по средней аномалии.

Уравнения движения планеты по орбите, плоскость которой совпадает с плоскостью отсчета, можно записать в полярных координатах в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= 0, \\ r^2 \frac{dv}{dt} &= G. \end{aligned} \quad (78)$$

Этим уравнениям удовлетворяет круговая орбита радиуса a . Тогда угловое движение является равномерным и $v = \lambda = nt + \lambda_0$. Оба уравнения дают

$$\begin{aligned} \mu &= a^3 n^2, \\ G_c &= a^2 n, \end{aligned} \quad (79)$$

если через G_c обозначить значение постоянной интеграла площадей для круговой орбиты радиуса a .

Рассмотрим затем некруговые орбиты с тем же периодом, т. е. орбиты со средним движением n и большой полуосью a . Введем

$$\begin{aligned} r &= a(1 + \varrho), \\ v - \lambda &= \xi, \\ G &= G_c(1 + \gamma) \end{aligned} \quad (80)$$

и используем в качестве независимой переменной

$$\lambda = nt + \lambda_0.$$

Уравнения, записанные в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r/a)}{d\lambda^2} - \frac{r}{a} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 + \frac{a^2}{r^2} &= 0, \\ \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{dv}{d\lambda} &= \frac{G}{a^2 n}, \end{aligned} \quad (81)$$

если средний член в левой части первого уравнения представить следующим образом:

$$\frac{r}{a} \left(\frac{dv}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{G^2}{a^4 n^2} = \\ = \frac{(1+\gamma)^2}{(1+\varrho)^3},$$

можно преобразовать к виду

$$\frac{d^2\varrho}{d\lambda^2} - \frac{(1+\gamma)^2}{(1+\varrho)^3} + \frac{1}{(1+\varrho)^2} = 0, \\ \frac{dv}{d\lambda} = \frac{1+\gamma}{(1+\varrho)^2}. \quad (82)$$

Для круговой орбиты эти уравнения удовлетворяются при

$$\varrho = \gamma = 0.$$

Разложение по степеням ϱ и γ дает

$$\frac{d^2\varrho}{d\lambda^2} + \varrho = 3\varrho^2 - 6\varrho^3 + 10\varrho^4 - \dots \\ + \gamma(2 - 6\varrho + 12\varrho^2 - 20\varrho^3 + \dots) + \\ + \gamma^2(1 - 3\varrho + 6\varrho^2 - \dots), \quad (83)$$

и, если уравнение центра $v - \lambda = \mathcal{E}$, то

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\lambda} = -2\varrho + 3\varrho^2 - 4\varrho^3 + 5\varrho^4 - \dots \\ + \gamma(1 - 2\varrho + 3\varrho^2 - 4\varrho^3 + \dots). \quad (84)$$

Будем считать ϱ и γ малыми величинами первого порядка. Пренебрегая вторыми степенями и произведениями этих величин в правых частях, положим

$$\frac{d^2\varrho_1}{d\lambda^2} + \varrho_1 = 2\gamma_1,$$

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{d\lambda} = \gamma_1 - 2\varrho_1,$$

откуда последовательно получаем

$$\varrho_1 = 2\gamma_1 - e \cos(\lambda - \tilde{\omega}), \quad (85)$$

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{d\lambda} = -3\gamma_1 + 2e \cos(\lambda - \tilde{\omega}),$$

$$\mathcal{E}_1 = -3\gamma_1 \lambda + c_1 + 2e \sin(\lambda - \tilde{\omega}). \quad (86)$$

Это решение является совершенно общим; e и $\tilde{\omega}$ представляют собой две необходимые постоянные интегрирования уравнения для ϱ_1 . Очевидно, что необходимо условие $\gamma_1 = 0$ для того, чтобы избежать члена, пропорционального λ , в разности $v_1 - \lambda = \mathcal{E}_1$, которая должна выражаться периодической функцией от λ . Постоянная c_1 выбирается равной нулю, так чтобы среднее значение \mathcal{E} равнялось нулю. Для краткости мы вводим l вместо $\lambda - \tilde{\omega}$.

Следующим шагом является подстановка $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, $\gamma = \gamma_2$ в правые части при сохранении членов порядка квадрата ϱ_1 и первой степени

пени Q_2 и γ_2 . В результате получается

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q_2}{d\lambda^2} + Q_2 &= 3Q_1^2 + 2\gamma_2, \\ \frac{dE_2}{d\lambda} &= 3Q_1^2 + \gamma_2 - 2Q_2.\end{aligned}\tag{87}$$

Значение

$$Q_1 = -e \cos l$$

подставляется в члены $3Q_1^2$, входящие в правые части, что дает

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q_2}{d\lambda^2} + Q_2 &= +2\gamma_2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^2 \cos 2l, \\ \frac{dE_2}{d\lambda} &= +\gamma_2 - 2Q_2 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^2 \cos 2l.\end{aligned}$$

Интегрирование первого уравнения дает

$$Q_2 = 2\gamma_2 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 \cos 2l.$$

Подставляя это значение Q_2 во второе уравнение, получаем

$$\begin{aligned}\frac{dE_2}{d\lambda} &= -3\gamma_2 - \frac{3}{2}e^2 + \frac{5}{2}e^2 \cos 2l, \\ E_2 &= -3\left(\gamma_2 + \frac{1}{2}e^2\right)\lambda + \frac{5}{4}e^2 \sin 2l,\end{aligned}$$

где в выражении для E_2 отброшена постоянная c_2 .

Чтобы избежать векового члена в E_2 , необходимо положить

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2}e^2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}Q_2 &= +\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 \cos 2l, \\ E_2 &= +\frac{5}{4}e^2 \sin 2l.\end{aligned}\tag{88}$$

Можно было бы к этому решению для Q_2 прибавить член $a \cos l + b \sin l$. Однако это нарушило бы даламберов характер решения. Кроме того, легко видеть, что величина e , введенная как постоянная интегрирования в Q_1 , соответствует эксцентриситету, так что в перигелии ($l=0$)

$$Q = -e, \quad Q_1 = -e, \quad Q_2 = 0$$

и в афелии ($l=\pi$)

$$Q = +e, \quad Q_1 = +e, \quad Q_2 = 0.$$

Любой член вида $a \cos l$, прибавленный к Q_2 , изменил бы смысл величины e , а синусоидальный член вида $b \sin l$ — смысл величины $\tilde{\omega}$.

Приступая теперь к определению Q_3 , E_3 , находим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2Q_3}{d\lambda^2} + Q_3 &= 6Q_1Q_2 - 6Q_1^3 - 6\gamma_2Q_1 + 2\gamma_3, \\ \frac{dE_3}{d\lambda} &= -2Q_3 + 6Q_1Q_2 - 4Q_1^3 - 2\gamma_2Q_1 + \gamma_3.\end{aligned}\tag{89}$$

Вычисления можно расположить, как указано в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Вычисление Q_3

	$e^3 \cos l$	$e^3 \cos 3l$
$-6Q_1 Q_2 =$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-6Q_1^3 =$	$+\frac{9}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-6\gamma_2 Q_1 =$	$-\frac{3}{2}$	
$+2\gamma_3 = +2\gamma_3$		
$\frac{d^2 Q_3}{d\lambda^2} + Q_3 = +2\gamma_3$		$+3e^3 \cos 3l$
$Q_3 = +2\gamma_3$	$+x e^3 \cos l$	$-\frac{3}{8} e^3 \cos 3l$

Таблица 4

Вычисление \mathcal{E}_3

	$e^3 \cos l$	$e^3 \cos 3l$
$-2Q_3 + \gamma_3 = -3\gamma_3$	$-2x$	$+\frac{3}{4}$
$+6Q_1 Q_2 =$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{2}$
$-4Q_1^3 =$	$+\frac{3}{2}$	$+1$
$-2\gamma_2 Q_1 =$	-1	$-$
$\frac{d\mathcal{E}_3}{d\lambda} = -3\gamma_3$	$+\left(\frac{1}{2} - 2x\right) e^3 \cos l$	$+\frac{13}{4} e^3 \cos 3l$
$\mathcal{E}_3 = -3\gamma_3 \lambda$	$+\left(\frac{1}{2} - 2x\right) e^3 \sin l$	$+\frac{13}{12} e^3 \sin 3l$

В выражении для \mathcal{E}_3 опущена постоянная c_3 .

Выражение для \mathcal{E}_3 требует, чтобы было $\gamma_3 = 0$. Тогда, чтобы в перигелии и в афелии получить $Q_3 = 0$, мы принимаем $x = +\frac{3}{8}$. В таком случае окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} Q_3 &= +\frac{3}{8} e^3 \cos l - \frac{3}{8} e^3 \cos 3l, \\ \mathcal{E}_3 &= -\frac{1}{4} e^3 \sin l + \frac{13}{12} e^3 \sin 3l. \end{aligned} \tag{90}$$

Теперь стал очевидным общий характер решения: ряд для Q содержит только четные степени e , тогда как члены в Q нечетного порядка могут потребовать дополнительных членов с аргументом $\cos l$, чтобы удовлетворить условию обращения в нуль всех членов в Q , следующих

за Q_1 , в перигелии и в афелии. Можно заметить, что эти члены в Q нечетного порядка необходимы только для того, чтобы величина e соответствовала эксцентриситету. Допустим, что такие члены в Q_3 отсутствуют. Обозначим величину e в этом случае через e_1 . Тогда выражение для Q приняло бы следующий вид:

$$(A) \quad Q = \frac{1}{2} e_1^2 + (-e_1 + 0 \cdot e_1^3) \cos l - \frac{1}{2} e_1^2 \cos 2l - \frac{3}{8} e_1^3 \cos 3l$$

вместо

$$(B) \quad Q = \frac{1}{2} e^2 + \left(-e + \frac{3}{8} e^3 \right) \cos l - \frac{1}{2} e^2 \cos 2l - \frac{3}{8} e^3 \cos 3l,$$

и преобразование от (A) к (B), точное до членов третьего порядка относительно e , могло бы быть выполнено после этого при помощи следующей подстановки:

$$e_1 = e - \frac{3}{8} e^3.$$

Наконец, разложение можно было бы выполнить, подставляя в (82) выражения

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots,$$

$$\gamma = \gamma_2 + \gamma_4 + \dots,$$

при этом используется тот факт, что в γ входят только члены четного порядка. Собирая члены соответствующего порядка, можно написать в начале интегрирования следующие уравнения до любого порядка:

$$\frac{d^2 Q_1}{d\lambda^2} + Q_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 Q_2}{d\lambda^2} + Q_2 = 3Q_1^2 + 2\gamma_2,$$

$$\frac{d^2 Q_3}{d\lambda^2} + Q_3 = 6Q_1Q_2 - 6Q_1^3 - 6\gamma_2Q_1,$$

$$\frac{d^2 Q_4}{d\lambda^2} + Q_4 = 6Q_1Q_3 + 3Q_2^2 - 18Q_1^2Q_2 + 10Q_1^4 + 2\gamma_4 - 6\gamma_2Q_2 + 12\gamma_2Q_1^2 + \gamma_2^2;$$

$$\frac{d\dot{Q}_1}{d\lambda} = -2Q_1,$$

$$\frac{d\dot{Q}_2}{d\lambda} = -2Q_2 + 3Q_1^2 + \gamma_2,$$

$$\frac{d\dot{Q}_3}{d\lambda} = -2Q_3 + 6Q_1Q_2 - 4Q_1^3 - 2\gamma_2Q_1,$$

$$\frac{d\dot{Q}_4}{d\lambda} = -2Q_4 + 3Q_2^2 + 6Q_1Q_3 - 12Q_1^2Q_2 + 5Q_1^4 + \gamma_4 - 2\gamma_2Q_2 + 3\gamma_2Q_1^2.$$

Вычисление членов четвертого порядка выполняется так, как указано в табл. 5 и 6.

Это требует, чтобы

$$\gamma_4 = -\frac{1}{8} e^4.$$

Таблица 5

Вычисление Q_4

	e^4	$e^4 \cos 2l$	$e^4 \cos 4l$
$+6Q_1Q_3 =$	$-\frac{9}{8}$		$+\frac{9}{8}$
$+3Q_2^2 =$	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$
$-18Q_1^2Q_2 =$	$-\frac{9}{4}$		$+\frac{9}{4}$
$+10Q_1^4 =$	$+\frac{15}{4}$	$+5$	$+\frac{5}{4}$
$-6\gamma_2Q_2 =$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
$+12\gamma_2Q_1^2 =$	-3	-3	
$+\gamma_2^2 =$	$+\frac{1}{4}$		
$+2\gamma_4 = +2\gamma_4$			
$\frac{d^2Q_4}{d\lambda^2} + Q_4 = +2\gamma_4$	$+\frac{1}{4} e^4$	$-e^4 \cos 2l$	$+5e^4 \cos 4l$
$Q_4 = +2\gamma_4$	$+\frac{1}{4} e^4$	$+\frac{1}{3} e^4 \cos 2l$	$-\frac{1}{3} e^4 \cos 4l$

Таблица 6

Вычисление E_4

	e^4	$e^4 \cos 2l$	$e^4 \cos 4l$
$-2Q_4 = -4\gamma_4$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$+\gamma_4 = +\gamma_4$			
$+3Q_2^2 =$	$+\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$+\frac{3}{8}$
$+6Q_1Q_3 =$	$-\frac{9}{8}$		$+\frac{9}{8}$
$-12Q_1^2Q_2 =$	$-\frac{3}{2}$		$+\frac{3}{2}$
$+5Q_1^4 =$	$+\frac{15}{8}$	$+\frac{5}{2}$	$+\frac{5}{8}$
$-2\gamma_2Q_2 =$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
$+3\gamma_2Q_1^2 =$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	
$\frac{dE_4}{d\lambda} = -3\gamma_4$	$-\frac{3}{8} e^4$	$-\frac{11}{12} e^4 \cos 2l$	$+\frac{103}{24} e^4 \cos 4l$
$E_4 = -3(\gamma_4)$	$+\frac{1}{8} e^4 \lambda$	$-\frac{11}{24} e^4 \sin 2l$	$+\frac{103}{96} e^4 \sin 4l$

Поэтому окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} Q_4 &= +\frac{1}{3}e^4 \cos 2l - \frac{1}{3}e^4 \cos 4l, \\ \mathcal{E}_4 &= -\frac{11}{24}e^4 \sin 2l + \frac{103}{96}e^4 \sin 4l. \end{aligned} \quad (91)$$

В Q_4 не содержится постоянного члена, и в приближениях более высокого порядка также не должны появиться другие постоянные члены, поскольку постоянный член разложения r/a равен $1 + \frac{1}{2}e^2$, как было найдено в разд. 6.

Вычисления несколько упростятся, если ввести вместо G его значение

$$G = a^2 n \sqrt{1 - e^2},$$

что дает следующее уравнение относительно Q :

$$\frac{d^2 Q}{d \lambda^2} - \frac{1 - e^2}{(1 + Q)^3} + \frac{1}{(1 + Q)^2} = 0,$$

которое можно проинтегрировать независимо от уравнения для \mathcal{E} . Недостаток этой методики состоит в том, что исключаются некоторые характерные особенности, которые возникли в ходе интегрирования в связи с вычислением последовательных членов в γ . Эти особенности имеют существенное значение в приложениях к задачам, в которых вначале отсутствует постоянная интегрирования, соответствующая γ .

Следует заметить, что ряд

$$\gamma = \gamma_2 e^2 + \gamma_4 e^4 + \dots$$

илюстрирует разложение постоянной интегрирования γ по постоянной e , которая введена в ходе решения. Эта процедура потребовалась для того, чтобы удовлетворить условию, что \mathcal{E} должна быть периодической функцией от l без линейного члена. Если в \mathcal{E} допускается присутствие линейного члена относительно λ , то решение будет соответствовать движению по орбите со средним движением, отличным от указанного наперед.

Уравнения эллиптического движения в плоскости орбиты образуют систему четвертого порядка. Следовательно, для общего решения необходимы четыре постоянные. Разложение, полученное в этом разделе, содержит четыре постоянные: a , e , ω и λ_0 . Постоянная a входит как постоянная, дающая размеры орбиты и (посредством n) период, однако разложения Q и \mathcal{E} не зависят от значения a . Следовательно, полученные разложения, позволяя менять значение a , представляют полное решение этих дифференциальных уравнений.

10. Вращающаяся система координат. Мы уже видели, что разложение прямоугольных координат при помощи бесселевых функций значительно проще, чем разложение уравнения центра. Это наводит на мысль о том, что то же положение вещей сохранится и при непосредственном разложении решения, исходя из дифференциальных уравнений. Использование прямоугольных координат открывает также возможность введения показательных функций вместо тригонометрических функций, что может упростить операции. Чтобы получить координаты, тесно связанные с Q и \mathcal{E} , равными нулю в случае кругового движения, рекомендуется ввести прямоугольную систему координат, равномерно вра-

щающуюся с угловой скоростью n , равной среднему движению по круговой орбите, отклонения от которой мы должны определить.

Исходные уравнения в прямоугольных координатах для орбиты, плоскость которой совпадает с плоскостью xy , имеют вид

$$\ddot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$F = \frac{\mu}{r}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Введем систему координат XY , вращающуюся с угловой скоростью n в направлении движения планеты. Если

$$\lambda = nt + \lambda_0,$$

то

$$X = x \cos \lambda + y \sin \lambda, \quad (92)$$

$$Y = -x \sin \lambda + y \cos \lambda;$$

$$x = X \cos \lambda - Y \sin \lambda,$$

$$y = X \sin \lambda + Y \cos \lambda. \quad (93)$$

Последовательное дифференцирование дает

$$\dot{X} = \dot{x} \cos \lambda + \dot{y} \sin \lambda - nx \sin \lambda + ny \cos \lambda = \dot{x} \cos \lambda + \dot{y} \sin \lambda + nY,$$

$$\dot{Y} = -\dot{x} \sin \lambda + \dot{y} \cos \lambda - nx \cos \lambda - ny \sin \lambda = -\dot{x} \sin \lambda + \dot{y} \cos \lambda - nX,$$

$$\ddot{X} = \ddot{x} \cos \lambda + \ddot{y} \sin \lambda - n\dot{x} \sin \lambda + n\dot{y} \cos \lambda + n\dot{Y},$$

$$\ddot{Y} = -\ddot{x} \sin \lambda + \ddot{y} \cos \lambda - n\dot{x} \cos \lambda - n\dot{y} \sin \lambda - n\dot{X}.$$

Подставляя

$$-n\dot{x} \sin \lambda + n\dot{y} \cos \lambda = n\dot{Y} + n^2X,$$

$$-n\dot{x} \cos \lambda - n\dot{y} \sin \lambda = -n\dot{X} + n^2Y,$$

мы получаем

$$\ddot{X} = \ddot{x} \cos \lambda + \ddot{y} \sin \lambda + 2n\dot{Y} + n^2X,$$

$$\ddot{Y} = -\ddot{x} \sin \lambda + \ddot{y} \cos \lambda - 2n\dot{X} + n^2Y.$$

Поэтому уравнения можно написать в виде

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X = \frac{\partial F}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \lambda, \quad (94)$$

$$\ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y = -\frac{\partial F}{\partial x} \sin \lambda + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \lambda.$$

Теперь

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \lambda,$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial Y} =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial x} \sin \lambda + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \lambda$$

Но эти выражения тождественны правым частям уравнений (94). В таком случае последние можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2X &= \frac{\partial F}{\partial X}, \\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2Y &= \frac{\partial F}{\partial Y},\end{aligned}\quad (95)$$

где

$$F = \frac{\mu}{r}, \quad r^2 = X^2 + Y^2.$$

Третий члены в левых частях можно включить в частные производные в правых частях, полагая

$$\begin{aligned}F' &= F + \frac{1}{2}n^2(X^2 + Y^2), \\ \ddot{X} - 2n\dot{Y} &= \frac{\partial F'}{\partial X}, \\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} &= \frac{\partial F'}{\partial Y}.\end{aligned}\quad (96)$$

Допустим, что мы желаем рассмотреть эллиптические орбиты со средним движением n . Этим уравнениям можно удовлетворить круговой орбитой радиуса a , связанного с n посредством соотношения

$$\mu = a^3n^2.$$

Если надлежащим образом выбрана постоянная λ_0 , то ось X постоянно направлена в планету, и для этой круговой орбиты мы имеем

$$X = a, \quad Y = 0.$$

Чтобы изучить отклонения от кругового движения в случае эллиптических орбит, мы можем ввести

$$X = a(1 + \xi), \quad Y = a\eta,$$

и использовать ξ и η в качестве новых переменных. Подстановка в уравнения (96) дает

$$\begin{aligned}a\ddot{\xi} - 2an\dot{\eta} &= \frac{1}{a} \frac{\partial F'}{\partial \xi}, \\ a\ddot{\eta} + 2an\dot{\xi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial F'}{\partial \eta}.\end{aligned}\quad (97)$$

Если, далее, в качестве независимой переменной используется средняя долгота λ , то эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}an^2 \frac{d^2\xi}{d\lambda^2} - 2an^2 \frac{d\eta}{d\lambda} &= \frac{1}{a} \frac{\partial F'}{\partial \xi}, \\ an^2 \frac{d^2\eta}{d\lambda^2} + 2an^2 \frac{d\xi}{d\lambda} &= \frac{1}{a} \frac{\partial F'}{\partial \eta}.\end{aligned}\quad (98)$$

Следовательно, если

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{a^2n^2} F' = \\ &= \frac{1}{a^2n^2} \left\{ \frac{1}{2} a^2n^2 [(1 + \xi)^2 + \eta^2] + \frac{a^2n^2}{\sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2}} \right\} = \\ &= + \frac{1}{2} (1 + \xi)^2 + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi)^2 + \eta^2}},\end{aligned}\quad (99)$$

то уравнения примут следующую форму:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\lambda^2} - 2 \frac{d\eta}{d\lambda} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \frac{d^2\eta}{d\lambda^2} + 2 \frac{d\xi}{d\lambda} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}.\end{aligned}\quad (100)$$

Представляет интерес выразить переменные ξ и η через величины ϱ и \mathcal{E} , введенные в разд. 9. Поскольку

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v,$$

то из соотношений (92) следует, что

$$\begin{aligned}X &= r \cos(v - \lambda) = r \cos \mathcal{E} = a(1 + \varrho) \cos \mathcal{E}, \\ Y &= r \sin(v - \lambda) = r \sin \mathcal{E} = a(1 + \varrho) \sin \mathcal{E}.\end{aligned}\quad (101)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{X}{a} - 1 = (1 + \varrho) \cos \mathcal{E} - 1 = \\ &= (1 + \varrho) \left(1 - \frac{\mathcal{E}^2}{2} + \frac{\mathcal{E}^4}{24} - \dots \right) - 1 = \\ &= \varrho - \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 - \frac{1}{2} \varrho \mathcal{E}^2 + \frac{1}{24} \mathcal{E}^4 - \dots, \\ \eta &= \frac{Y}{a} = (1 + \varrho) \sin \mathcal{E} = \\ &= (1 + \varrho) \left(\mathcal{E} - \frac{1}{6} \mathcal{E}^3 + \dots \right) = \\ &= \mathcal{E} + \varrho \mathcal{E} - \frac{1}{6} \mathcal{E}^3 - \frac{1}{6} \varrho \mathcal{E}^3 + \dots,\end{aligned}\quad (102)$$

или, наоборот,

$$\begin{aligned}(1 + \varrho)^2 &= (1 + \xi)^2 + \eta^2, \\ \varrho &= \sqrt{1 + 2\xi + \xi^2 + \eta^2} - 1 = \\ &= \xi + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \xi \eta^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{8} \eta^4 + \dots, \\ \operatorname{tg} \mathcal{E} &= \frac{\eta}{1 + \xi}, \\ \mathcal{E} &= \frac{\eta}{1 + \xi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{1 + \xi} \right)^3 + \dots = \\ &= \eta - \xi \eta + \xi^2 \eta - \frac{1}{2} \eta^3 - \xi^3 \eta + \xi \eta^3 + \dots\end{aligned}\quad (103)$$

Мы замечаем, что в перигелии и в афелии $\mathcal{E} = 0$, так что для этих точек орбиты $\xi = \varrho$, $\eta = 0$, и, следовательно, в перигелии ($l = 0$)

$$\xi = -e, \quad \eta = 0,$$

в афелии ($l = \pi$)

$$\xi = +e, \quad \eta = 0.$$

Для разложения правых частей уравнений (103), например с точностью до четвертой степени относительно ξ и η , можно с успехом воспользоваться тем, что эти правые части являются частными производными от одной и той же функции Ω . Следовательно, достаточно

разложить Ω по степеням ξ и η с точностью до пятой степени, а затем взять производные по ξ и η . Мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2}} &= \frac{1}{1+\xi} \left[1 + \frac{\eta^2}{(1+\xi)^2} \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{(1+\xi)^3} + \frac{3}{8} \frac{\eta^4}{(1+\xi)^5} = \\ &= 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \xi^4 - \xi^5 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \xi \eta^2 - 3 \xi^2 \eta^2 + 5 \xi^3 \eta^2 + \\ &\quad + \frac{3}{8} \eta^4 - \frac{15}{8} \xi \eta^4. \end{aligned}$$

Чтобы получить Ω , необходимо прибавить следующие члены:

$$+ \frac{1}{2} + \xi + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \eta^2.$$

Следовательно,

$$\Omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \xi^2 - \xi^3 + \frac{3}{2} \xi \eta^2 + \xi^4 - 3 \xi^2 \eta^2 + \frac{3}{8} \eta^4 - \xi^5 + 5 \xi^3 \eta^2 - \frac{15}{8} \xi \eta^4 + \dots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = +3\xi - 3\xi^2 + \frac{3}{2} \eta^2 + 4\xi^3 - 6\xi \eta^2 - 5\xi^4 + 15\xi^2 \eta^2 - \frac{15}{8} \eta^4 + \dots,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = +3\xi \eta - 6\xi^2 \eta + \frac{3}{2} \eta^3 + 10\xi^3 \eta - \frac{15}{2} \xi \eta^3 + \dots$$

Теперь мы подставляем

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4,$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$$

и собираем в уравнениях члены одинаковых порядков. В результате получается

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\lambda^2} - 2 \frac{d \xi_1}{d\lambda} - 3 \xi_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 \eta_1}{d\lambda^2} + 2 \frac{d \xi_1}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{d\lambda^2} - 2 \frac{d \eta_2}{d\lambda} - 3 \xi_2 = -3 \xi_1^2 + \frac{3}{2} \eta_1^2,$$

$$\frac{d^2 \eta_2}{d\lambda^2} + 2 \frac{d \xi_2}{d\lambda} = +3 \xi_1 \eta_1,$$

$$\frac{d^2 \xi_3}{d\lambda^2} - 2 \frac{d \eta_3}{d\lambda} - 3 \xi_3 = -6 \xi_1 \xi_2 + 3 \eta_1 \eta_2 + 4 \xi_1^3 - 6 \xi_1 \eta_1^2,$$

$$\frac{d^2 \eta_3}{d\lambda^2} + 2 \frac{d \xi_3}{d\lambda} = +3 \xi_1 \eta_2 + 3 \xi_2 \eta_1 - 6 \xi_1^2 \eta_1 + \frac{3}{2} \eta_1^3,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_4}{d\lambda^2} - 2 \frac{d \eta_4}{d\lambda} - 3 \xi_4 &= -6 \xi_1 \xi_3 - 3 \xi_2^2 + 3 \eta_1 \eta_3 + \frac{3}{2} \eta_2^2 + 12 \xi_1^2 \xi_2 - 6 \xi_2 \eta_1^2 - \\ &\quad - 12 \xi_1 \eta_1 \eta_2 - 5 \xi_1^4 + 15 \xi_1^2 \eta_1^2 - \frac{15}{8} \eta_1^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta_4}{d\lambda^2} + 2 \frac{d \xi_4}{d\lambda} &= +3 \xi_1 \eta_3 + 3 \xi_2 \eta_2 + 3 \xi_3 \eta_1 - 6 \xi_1^2 \eta_2 - 12 \xi_1 \xi_2 \eta_1 + \\ &\quad + \frac{9}{2} \eta_1^2 \eta_2 + 10 \xi_1^3 \eta_1 - \frac{15}{2} \xi_1 \eta_1^3. \end{aligned}$$

Легко видеть, что уравнения для каждого порядка имеют одинаковые левые части, тогда как правые части снова являются функциями от величин ξ и η , полученных в предыдущих приближениях.

Уравнения относительно ξ_1 , η_2 можно разрешить следующим образом. Первым интегралом второго уравнения является

$$\frac{d\eta_1}{d\lambda} + 2\xi_1 = C_1.$$

Если его умножить на 2 и сложить с первым уравнением, то получится следующее уравнение:

$$\frac{d^2\xi_1}{d\lambda^2} + \xi_1 = 2C_1$$

с интегралом

$$\xi_1 = 2C_1 + A \cos(\lambda - B),$$

где A и B суть постоянные интегрирования. Подстановка в уравнение для η_1 дает

$$\frac{d\eta_1}{d\lambda} = -3C_1 - 2A \cos(\lambda - B),$$

$$\eta_1 = -3C_1\lambda + C'_1 - 2A \sin(\lambda - B).$$

Нам необходимо решение, в котором η_1 является чисто периодической функцией с нулевым средним значением. Для этого необходимо

$$C_1 = 0, \quad C'_1 = 0.$$

Далее, условия для ξ_1 в афелии и перигелии требуют

$$A = -e, \quad B = \tilde{\omega}.$$

Вводя среднюю аномалию $l = \lambda - \tilde{\omega}$, мы окончательно получаем

$$\xi_1 = -e \cos l, \quad \eta_1 = +2e \sin l.$$

Во всех дальнейших приближениях следует стремиться к тому, чтобы в перигелии и в афелии было $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ и т. д.

Для любого последовательного приближения, например ξ_j , η_j , уравнения будут иметь вид

$$\frac{d^2\xi_j}{d\lambda^2} - 2 \frac{d\eta_j}{d\lambda} - 3\xi_j = X_j,$$

$$\frac{d^2\eta_j}{d\lambda^2} + 2 \frac{d\xi_j}{d\lambda} = Y_j,$$

где X_j , Y_j являются правыми частями, разложенными, как мы увидим, в ряды соответственно косинусов и синусов по l . Это непосредственно видно для X_2 , Y_2 при подстановке выражений для ξ_1 , η_1 . Следовательно, Y_j не будет иметь постоянного члена, и интеграл второго уравнения дает

$$\frac{d\eta_j}{d\lambda} + 2\xi_j = C_j + \int Y_j d\lambda, \tag{104}$$

где C_j — постоянная интегрирования. Умножая этот интеграл на 2 и складывая с уравнением для ξ_j , мы получаем

$$\frac{d^2\xi_j}{d\lambda^2} + \xi_j = 2C_j + X_j + 2 \int Y_j d\lambda. \tag{105}$$

Постоянный член для ξ_j , определенный из этого уравнения, равен

$$\xi_{j0} = 2C_j + X_{j0}, \quad (106)$$

где X_{j0} означает постоянный член в X_j . Подстановка в (104) дает постоянный член в $d\eta_j/d\lambda$, равный

$$-3C_j - 2X_{j0}.$$

Поскольку он должен быть равен нулю, то C_j определяется формулой

$$C_j = -\frac{2}{3} X_{j0}.$$

Если это значение подставить в правую часть уравнения (106), то легко видеть, что постоянный член в этой правой части, а следовательно и постоянный член в ξ_j , принимает вид

$$\xi_{j0} = -\frac{1}{3} X_{j0}. \quad (107)$$

Это будет иметь место для каждого приближения, и поэтому становится ненужным нахождение C_j в явном виде. Процедура состоит просто в определении этой постоянной в ξ_j посредством (107) и отбрасывании постоянной, возникающей в $d\eta_j/d\lambda$ в силу (104).

Для второго приближения мы получаем

$$\begin{aligned} X_2 &= +\frac{3}{2} e^2 - \frac{9}{2} e^2 \cos 2l, \\ Y_2 &= -3e^2 \sin 2l, \\ \int Y_2 d\lambda &= +\frac{3}{2} e^2 \cos 2l, \\ X_2 + 2 \int Y_2 d\lambda &= +\frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} e^2 \cos 2l, \\ \xi_2 &= -\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos 2l, \\ C_2 - 2\xi_2 + \int Y_2 d\lambda &= +\frac{1}{2} e^2 \cos 2l, \\ \eta_2 &= +\frac{1}{4} e^2 \sin 2l. \end{aligned}$$

Для третьего приближения мы получаем

$$\begin{array}{lll} e^3 \cos l & e^3 \cos 3l \\ \hline -6\xi_1\xi_2 & -\frac{3}{2} & +\frac{3}{2} \\ +3\eta_1\eta_2 & +\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ +4\xi_1^3 & -3 & -1 \\ -6\xi_1\eta_1^2 & +6 & -6 \\ \hline X_3 & +\frac{9}{4} e^3 \cos l & -\frac{25}{4} e^3 \cos 3l, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & e^3 \sin l & e^3 \sin 3l \\
 + 3\xi_1\eta_2 = & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\
 + 3\xi_2\eta_1 = & -\frac{9}{2} & +\frac{3}{2} \\
 - 6\xi_1^2\eta_1 = & -3 & -3 \\
 + \frac{3}{2}\eta_1^3 = & +9 & -3 \\
 \hline
 Y_3 = & +\frac{9}{8}e^3 \sin l & -\frac{39}{8}e^3 \sin 3l. \\
 \int Y_3 d\lambda = & -\frac{9}{8}e^3 \cos l + \frac{13}{8}e^3 \cos 3l, \\
 X_3 + 2 \int Y_3 d\lambda = & & -3e^3 \cos 3l, \\
 \xi_3 = & -\frac{3}{8}e^3 \cos l + \frac{3}{8}e^3 \cos 3l.
 \end{array}$$

Член $-\frac{3}{8}e^3 \cos l$ прибавлен для того, чтобы обратить ξ_3 в нуль вperi-

гелии и афелии.

$$\begin{aligned}
 C_3 - 2\xi_3 + \int Y_3 d\lambda &= -\frac{3}{8}e^3 \cos l + \frac{7}{8}e^3 \cos 3l, \\
 \eta_3 &= -\frac{3}{8}e^3 \sin l + \frac{7}{24}e^3 \sin 3l.
 \end{aligned}$$

Для определения ξ_4 , η_4 мы имеем табл. 7 и 8.

Таблица 7

Вычисление X_4

	e^4	$e^4 \cos 2l$	$e^4 \cos 4l$
$-6\xi_1\xi_3 =$	$-\frac{9}{8}$		$+\frac{9}{8}$
$-3\xi_2^2 =$	$-\frac{9}{8}$	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$
$+3\eta_1\eta_3 =$	$-\frac{9}{8}$	$+2$	$-\frac{7}{8}$
$+\frac{3}{2}\eta_2^2 =$	$+\frac{3}{64}$		$-\frac{3}{64}$
$+12\xi_1^2\xi_2 =$	$-\frac{3}{2}$		$+\frac{3}{2}$
$-6\xi_2\eta_1^2 =$	$+\frac{9}{2}$	-12	$+\frac{3}{2}$
$-12\xi_1\eta_1\eta_2 =$	$+\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$
$-5\xi_1^4 =$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{8}$
$+15\xi_1^2\eta_1^2 =$	$+\frac{15}{2}$		$-\frac{15}{2}$
$-\frac{15}{8}\eta_1^4 =$	$-\frac{45}{4}$	$+15$	$-\frac{15}{4}$
$X_4 =$	$+\frac{3}{64}e^4$	$+4e^4 \cos 2l$	$-\frac{579}{64}e^4 \cos 4l$

Полезно в качестве упражнения проверить, что результаты для ξ и η , полученные этим методом, согласуются с рядами для $(r/a) \cos f$ и $(r/a) \sin f$, данными в разд. 6 этой главы.

Вычисление членов четвертого порядка при помощи подстановки предшествующих решений, выраженных в тригонометрической форме,

Таблица 8
Вычисление Y_4

		$e^4 \sin 2l$	$e^4 \sin 4l$
$+3\xi_1\eta_3$	=	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{16}$
$+3\xi_2\eta_2$	=	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{3}{16}$
$+3\xi_3\eta_1$	=	$-\frac{9}{4}$	$+\frac{9}{8}$
$-6\xi_1^2\eta_2$	=	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$
$-12\xi_1\xi_2\eta_1$	=	-6	$+\frac{3}{2}$
$+\frac{9}{2}\eta_1^2\eta_2$	=	$+\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{8}$
$+10\xi_1^3\eta_1$	=	-5	$-\frac{5}{2}$
$-\frac{15}{2}\xi_1\eta_1^3$	=	$+15$	$-\frac{15}{2}$
$Y_4 =$		$+3e^4 \sin 2l$	$-\frac{61}{8} e^4 \sin 4l$
$\int Y_4 d\lambda =$		$-\frac{3}{2} e^4 \cos 2l$	$+\frac{61}{32} e^4 \cos 4l$
$X_4 + 2 \int Y_4 d\lambda = + \frac{3}{64} e^4$		$+e^4 \cos 2l$	$-\frac{335}{64} e^4 \cos 4l$
$\xi_4 = - \frac{1}{64} e^4$		$-\frac{1}{3} e^4 \cos 2l$	$+\frac{67}{192} e^4 \cos 4l$
$C_4 - 2\xi_4 + \int Y_4 d\lambda =$		$-\frac{5}{6} e^4 \cos 2l$	$+\frac{29}{24} e^4 \cos 4l$
$\eta_4 =$		$-\frac{5}{12} e^4 \cos 2l$	$+\frac{29}{96} e^4 \sin 4l$

в правые части X_4, Y_4 является, по крайней мере для некоторых из этих членов, довольно утомительным. Рекомендуется применение комплексных показательных функций. Например, если $\Lambda = \exp il$, то

$$\xi_1 = -\frac{e}{2} (\Lambda + \Lambda^{-1}),$$

$$\xi_3 = +\frac{3}{16} e^3 (\Lambda^3 - \Lambda - \Lambda^{-1} + \Lambda^{-3}).$$

Тогда, перемножая, получим

$$\begin{aligned} -6\xi_1\xi_3 &= \pm \frac{9}{16}e^4(\Lambda^4 - 2 + \Lambda^{-4}) = \\ &= e^4 \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{8} \cos 4l \right). \end{aligned}$$

Таким же образом

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{e}{i}(\Lambda - \Lambda^{-1}), \\ \eta_3 &= \frac{e^3}{48i}(7\Lambda^3 - 9\Lambda + 9\Lambda^{-1} - 7\Lambda^{-3}), \\ 3\eta_1\eta_3 &= -\frac{e^4}{16}(7\Lambda^4 - 16\Lambda^2 + 18 - 16\Lambda^{-2} + 7\Lambda^{-4}) = \\ &= e^4 \left(-\frac{9}{8} + 2 \cos 2l - \frac{7}{8} \cos 4l \right). \end{aligned}$$

11. Комплексные прямоугольные координаты. Большая легкость при выполнении операций с комплексными показательными функциями по сравнению с тригонометрическими функциями подсказывает идею использования в дифференциальных уравнениях комплексных переменных. Переменными, которые, по-видимому, обладают особыми преимуществами, являются

$$u = \xi + i\eta = \frac{r}{a} E^{i(f-l)} - 1,$$

$$s = \xi - i\eta = \frac{r}{a} E^{-i(f-l)} - 1,$$

так что

$$\xi = \frac{u+s}{2}, \quad \eta = \frac{u-s}{2i}.$$

Тогда уравнения (100) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2(u+s)}{d\lambda^2} + i \frac{d(u+s)}{d\lambda} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \frac{1}{2} \frac{d^2(u-s)}{d\lambda^2} + i \frac{d(u-s)}{d\lambda} &= i \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{108}$$

Путем сложения и вычитания этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\lambda^2} + 2i \frac{du}{d\lambda} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + i \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \frac{d^2s}{d\lambda^2} - 2i \frac{ds}{d\lambda} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - i \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Производные от Ω по u и s можно легко выразить так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= \frac{d\Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{d\Omega}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{1}{2i} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - i \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right), \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + i \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right).$$

Это приводит уравнения (108) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + 2i \frac{du}{d\lambda} &= 2 \frac{\partial \Omega}{\partial s}, \\ \frac{d^2 s}{d\lambda^2} - 2i \frac{ds}{d\lambda} &= 2 \frac{\partial \Omega}{\partial u}. \end{aligned} \quad (109)$$

Поскольку

$$\xi^2 + \eta^2 = us,$$

то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (1 + \xi)^2 + \eta^2 &= 1 + 2\xi + \xi^2 + \eta^2 = \\ &= 1 + u + s + us = \\ &= (1 + u)(1 + s). \end{aligned} \quad (110)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u + s) + \frac{1}{2}us + \frac{1}{\sqrt{1+u+s+us}} = \\ &= \frac{1}{2}(1 + u)(1 + s) + (1 + u)^{-1/2}(1 + s)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Следуя Хиллу, мы вводим следующее обозначение:

$$D = \frac{d}{id\lambda},$$

так что

$$D^2 = -\frac{d^2}{d\lambda^2}.$$

Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} D^2 u + 2Du &= -2 \frac{\partial \Omega}{\partial s}, \\ D^2 s - 2Ds &= -2 \frac{\partial \Omega}{\partial u}. \end{aligned} \quad (112)$$

Главное преимущество этой формы уравнений заключается в том, что мнимая единица не входит и не должна войти в решение, если разложения выполняются при помощи комплексных показательных функций. Важной особенностью переменных u и s является то, что они суть сопряженные комплексные числа. Следовательно, необходимо получить решение только для одной из них; другая переменная может быть найдена переходом к сопряженной величине.

Глава XIV содержит пример использования комплексных прямоугольных координат в задаче о движении Луны. Поэтому подробное приложение к проблеме эллиптического движения опускается и указываются лишь первые шаги.

Разложение функции Ω , заданной формулой (111), по степеням u и s дает

$$\Omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{4}us + \frac{3}{8}s^2 - \frac{5}{16}u^3 - \frac{3}{16}u^2s - \frac{3}{16}us^2 - \frac{5}{16}s^3 + \dots$$

В таком случае

$$-2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} = -\frac{3}{2} u - \frac{3}{2} s + \frac{3}{8} u^2 + \frac{3}{4} us + \frac{15}{8} s^2 + \dots$$

Это выражение мы подставляем в первое из уравнений (112). Тогда это уравнение разделяется на отдельные уравнения для членов первого порядка, второго порядка и т. д. путем введения следующих разложений:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \\ s &= s_1 + s_2 + s_3 + \dots \end{aligned}$$

При этом получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} D^2 u_1 + 2Du_1 + \frac{3}{2}(u_1 + s_1) &= 0, \\ D^2 u_2 + 2Du_2 + \frac{3}{2}(u_2 + s_2) &= +\frac{3}{8}u_1^2 + \frac{3}{4}u_1s_1 + \frac{15}{8}s_1^2. \end{aligned}$$

Соответствующие уравнения для s_1 и s_2 можно написать в виде

$$\begin{aligned} D^2 s_1 - 2Ds_1 + \frac{3}{2}(u_1 + s_1) &= 0, \\ D^2 s_2 - 2Ds_2 + \frac{3}{2}(u_2 + s_2) &= +\frac{15}{8}u_1^2 + \frac{3}{4}u_1s_1 + \frac{3}{8}s_1^2 \dots \end{aligned}$$

при помощи простой взаимной замены u и s всюду в правых частях.
Искомое решение для u_1 , s_1 имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= a\Lambda + b\Lambda^{-1}, \\ s_1 &= b\Lambda + a\Lambda^{-1}, \end{aligned} \tag{113}$$

где $\Lambda = E^{il}$, $l = \lambda - \tilde{\omega}$, а a и b — действительные множители, которые надлежит определить.

Определение дифференциального оператора D показывает, что

$$DE^{ip\lambda} = pE^{ip\lambda}, \quad D^2E^{ip\lambda} = p^2E^{ip\lambda}.$$

Отсюда

$$D\Lambda^p = p\Lambda^p, \quad D^2\Lambda^p = p^2\Lambda^p.$$

Подстановка этого решения в уравнения для u_1 и s_1 дает

$$\begin{aligned} D^2 u_1 &= a\Lambda + b\Lambda^{-1} \\ 2Du_1 &= 2a\Lambda - 2b\Lambda^{-1} \\ \frac{3}{2}(u_1 + s_1) &= \frac{3}{2}(a + b)\Lambda + \frac{3}{2}(a + b)\Lambda^{-1} \\ 0 &= \left(\frac{9}{2}a + \frac{3}{2}b\right)\Lambda + \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b\right)\Lambda^{-1}, \\ D^2 s_1 &= b\Lambda + a\Lambda^{-1} \\ -2Ds_1 &= -2b\Lambda + 2a\Lambda^{-1} \\ \frac{3}{2}(u_1 + s_1) &= \frac{3}{2}(a + b)\Lambda + \frac{3}{2}(a + b)\Lambda^{-1} \\ 0 &= \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b\right)\Lambda + \left(\frac{9}{2}a + \frac{3}{2}b\right)\Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить этим уравнениям, можно выбрать произвольным либо a , либо b , однако обе эти постоянные должны удовлетворять соотношению

$$3a + b = 0.$$

Мы выбираем

$$a = +\frac{1}{2}e, \quad b = -\frac{3}{2}e,$$

так что решение принимает вид

$$u_1 = +\frac{1}{2}e\Lambda - \frac{3}{2}e\Lambda^{-1},$$

$$s_1 = -\frac{3}{2}e\Lambda + \frac{1}{2}e\Lambda^{-1}.$$

Легко видеть, что это решение соответствует

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{u_1 + s_1}{2} = -\frac{e}{2}(\Lambda + \Lambda^{-1}) = -e \cos l, \\ \eta_1 &= \frac{u_1 - s_1}{2i} = +\frac{e}{i}(\Lambda - \Lambda^{-1}) = +2e \sin l\end{aligned}\tag{114}$$

и поэтому согласуется с требованием, чтобы величина e была эксцентриситетом орбиты. Чтобы гарантировать это для приближений более высоких порядков, для перигелия ($l = 0$) необходимо ввести следующие условия:

$$\Lambda = E^{i0} = +1, \quad u = \xi = -e, \quad s = \xi = -e,$$

а для афелия ($l = \pi$)

$$\Lambda = E^{i\pi} = -1, \quad u = \xi = +e, \quad s = \xi = +e.$$

Поскольку первое приближение в перигелии дает

$$u_1 = -e, \quad s_1 = -e,$$

а в афелии

$$u_1 = +e, \quad s_1 = +e,$$

то необходимо, чтобы в перигелии и в афелии было соответственно

$$u_2 = u_3 = u_4 = \dots = 0,$$

$$s_2 = s_3 = s_4 = \dots = 0.$$

Эти условия достаточны для вычисления коэффициентов Λ^0 в приближениях четного порядка и Λ^1, Λ^{-1} — в нечетных приближениях.

12. Разложения при помощи гармонического анализа. При любом практическом приложении методов небесной механики конечной целью является получение результатов в численном виде. При этом всегда представляется возможным, по крайней мере в принципе, решить конкретную задачу, требующую обширных вычислений, сохраняя некоторые или все связанные с ней параметры (например, элементы эллиптической орбиты) в буквенном виде вплоть до последнего шага. Со временем изобретения вычислительных машин, с постепенным ростом их мощности и продуктивности оказалось более эффективным вводить численные разложения на более ранних этапах решения задачи, а иногда

и в самом начале, как, например, при численном интегрировании уравнений движения. Для специалиста, работающего в этой области, важно быть знакомым как с буквенным, так и с численным методами, так чтобы он мог применить метод, наиболее подходящий в конкретном случае; часто бывает так, что оказывается полезной комбинация обоих методов. Простым примером является разложение в ряд Фурье, при котором аргументы сохраняются в виде буквенных величин, тогда как коэффициенты выражаются в виде чисел.

Численные коэффициенты рядов, приведенных в предыдущих разделах этой главы, могут быть легко вычислены, если эксцентризитет достаточно мал; в тех же случаях, когда эксцентризитет значительно больше, чем 0,1 или 0,2, численные коэффициенты легче найти при помощи гармонического анализа. Разложения в ряды таких функций, как $r^m \cos^n f$, где m и n суть любые целые числа, также могут быть намного облегчены при помощи гармонического анализа.

Пусть θ есть любая независимая угловая переменная, а F — некоторая периодическая функция от θ , которую требуется выразить в виде

$$F = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos \theta + c_2 \cos 2\theta + \dots + \frac{1}{2} c_n \cos n\theta + \\ + s_1 \sin \theta + s_2 \sin 2\theta + \dots + \frac{1}{2} s_n \sin n\theta,$$

где коэффициенты являются числами. Если выбраны $2n+1$ частных значений θ и если для каждого частного значения вычислено значение F , а также значения тригонометрических функций, то тогда получается $2n+1$ линейных уравнений, из которых, если они независимы, можно вычислить эти коэффициенты. Чтобы сделать эти уравнения независимыми, достаточно разделить период по θ на четное число равных частей. Если начальное значение θ выбрано равным нулю, то мы находим, что достаточно $2n$ частей для определения всех коэффициентов, за исключением s_n .

Если $F(\theta) = F(-\theta)$, то ряд состоит исключительно из постоянного и косинусоидальных членов, и в этом случае только первые $n+1$ частных значений F , включая $F(0)$ и $F(\pi)$, отличны от остальных. Если $F(\theta) = -F(-\theta)$, то ряд содержит исключительно синусоидальные члены, причем $F(0) = F(\pi) = 0$, и только первые $n-1$ частных значений F , исключая $F(0)$ и $F(\pi)$, отличны от остальных.

В общих случаях, когда присутствуют как синусы, так и косинусы, обозначим угол $2\pi/2n$ через α и выберем частные значения θ равными поочередно $0, \alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha, \dots, (2n-1)\alpha$. Тогда решение уравнений дается следующими разложениями:

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} F(j\alpha) \cos kj\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$s_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} F(j\alpha) \sin kj\alpha, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что так как $\sin n\alpha = 0$, то формулы для s_n нет. Заметим также, что поскольку $\cos n\alpha = -1$, $\cos 2n\alpha = +1$ и т. д., то формула для c_n сводится к сумме частных значений, взятых с обратными знаками, разделенной на n .

Несмотря на то что предыдущие формулы очень систематичны и поэтому легко могут быть приспособлены для автоматических вычислительных машин, они не совсем удобны для ручных вычислений, так как ведут к ненужному повторению одних и тех же операций. Для ручных вычислений легко получить гораздо менее трудоемкую схему для любого частного значения $2n$. В качестве примера мы приводим здесь схему для $2n = 8$. Обозначим частные значения F через $F_0, F_1, F_2, \dots, F_7$. Тогда коэффициенты определяются следующими уравнениями:

$$0,4 = F_0 + F_4, \quad \frac{0}{4} = F_0 - F_4,$$

$$1,5 = F_1 + F_5, \quad \frac{1}{5} = F_1 - F_5,$$

$$2,6 = F_2 + F_6, \quad \frac{2}{6} = F_2 - F_6,$$

$$3,7 = F_3 + F_7, \quad \frac{3}{7} = F_3 - F_7,$$

$$0,2 = 0,4 + 2,6,$$

$$1,3 = 1,5 + 3,7,$$

$$4c_0 = 0,2 + 1,3, \quad 2(c_1 + c_3) = \frac{0}{4},$$

$$4c_4 = 0,2 - 1,3, \quad 2(c_1 - c_3) = \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{7}\right) \cos 45^\circ,$$

$$4c_2 = 0,4 - 2,6, \quad 2(s_1 + s_3) = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{7}\right) \sin 45^\circ,$$

$$4s_2 = 1,5 - 3,7, \quad 2(s_1 - s_3) = \frac{2}{6}.$$

Ценный контроль результатов можно получить для коэффициента при косинусах при помощи следующего условия:

$$F_0 = \frac{1}{2} c_0 + c_1 + c_2 + \dots + \frac{1}{2} c_n.$$

Полный контроль должен заключаться в проверке, определяется ли правильно каждое частное значение F посредством ряда.

Ценный контроль коэффициентов при синусах может быть получен нахождением значения $dF/d\theta$ при $\theta = 0$. В этом случае

$$\left(\frac{dF}{d\theta}\right)_0 = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + (n-1)s_{n-1}.$$

Этому контролю нельзя доверять вплоть до последнего десятичного знака, так как ошибки в последних знаках коэффициентов увеличиваются при умножениях. Поэтому следует всегда применять оба контроля.

Ряд, полученный при помощи гармонического анализа, можно рассматривать как интерполяционную формулу, пригодную для получения значений функции, лежащих в промежутках между вычисленными значениями. Как и в случае любой интерполяционной формулы, точность интерполированного значения возрастает с увеличением числа вычисленных значений функции, которые принимаются во внимание. Коэффициенты, полученные при помощи гармонического анализа, являются только приближениями и могут быть сделаны сколь угодно точными выбором достаточно большого числа n . Можно показать, что если бы

ряд был продолжен неограниченно, то коэффициент, который мы обозначили через c_i ($i < n$), был бы равен

$$c_i + c_{2n-i} + c_{2n+i} + c_{4n-i} + c_{4n+i} + \dots,$$

а значение c_n равно

$$c_n + c_{3n} + c_{5n} + \dots.$$

Следовательно, чем ниже порядок коэффициента при косинусе, тем выше точность, с которой он определяется, за исключением коэффициента c_n , являющегося более точным, чем любой из предыдущих коэффициентов.

Аналогично, если бы ряд был неограниченно продолжен, то коэффициент s_i был бы равен

$$s_i - s_{2n-i} + s_{2n+i} - s_{4n-i} + s_{4n+i} - \dots,$$

и снова легко видеть, что коэффициенты более низкого порядка определяются с более высокой точностью.

В качестве хорошего рабочего правила следует иметь в виду, что число частных значений должно быть выбрано достаточно большим, так чтобы коэффициенты c_{n+1} и s_n можно было считать величинами, имеющими нулевые значения. Иногда трудно решить заранее, сколько частных значений функции дадут результаты требуемой степени точности без затраты ненужного труда. Если необходимо произвести лишь несколько разложений, то можно исходить из восьми частных значений и начать разложение вычислением коэффициентов c_n и s_{n-1} . Если какой-нибудь из этих коэффициентов имеет ощутимую величину, то в этом случае число частных значений можно удвоить, сохраняя, таким образом уже вычисленные значения, и повторить испытание вновь. Если необходимо выполнить много разложений, обладающих одинаковой степенью сходимости, то лучше производить пробы с промежуточным числом частных значений.

Можно придумать специальные схемы разложения, дающие возможность лишь немного увеличить число частных значений и по-прежнему сберечь большую часть уже проделанной работы. Примеры такого рода схемы даны Брауном и Браузером¹⁾.

В качестве примера гармонического анализа мы вычислим разложение Фурье для функции

$$F = + [1 - 0,6 \cos(\theta + 30^\circ)]^{1/2}$$

с восемью частными значениями с точностью до пяти десятичных знаков.

$$\begin{aligned} F_0 &= 0,69310 & F_1 &= 0,91908 & F_2 &= 1,14018 & F_3 &= 1,25680 \\ F_4 &= 1,23273 & F_5 &= 1,07484 & F_6 &= 0,83666 & F_7 &= 0,64842 \end{aligned}$$

¹⁾ E. W. Brown, D. Brouwer, Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis, Trans. Yale Univ. Obs. 6, pt. 5, 143 (1932).

$$\begin{array}{lll}
 0,4 = \pm 1,92583 & \frac{0}{4} = -0,53963 \\
 1,5 = \pm 1,99392 & 0,2 = +3,90267 & \frac{1}{5} = -0,15576 \\
 2,6 = \pm 1,97684 & 1,3 = \pm 3,89914 & \frac{2}{6} = \pm 0,30352 \\
 3,7 = +1,90522 & & \frac{3}{7} = \pm 0,60838 \\
 \\
 4c_0 = \pm 7,80181 & 2(c_1 + c_3) = -0,53963 \\
 4c_4 = \pm 0,00353 & 2(c_1 - c_3) = -0,54033 \\
 4c_2 = -0,05101 & 2(s_1 + s_3) = +0,32005 \\
 4s_2 = \pm 0,08870 & 2(s_1 - s_3) = +0,30352 \\
 \frac{1}{2}c_0 = \pm 0,97523 & \\
 c_1 = -0,26999 & s_1 = \pm 0,15589 \\
 c_2 = -0,01275 & s_2 = +0,02218 \\
 c_3 = \pm 0,00018 & s_3 = +0,00413 \\
 \frac{1}{2}c_4 = \pm 0,00044 & \\
 & +0,69311 & +0,21264 \\
 \text{Контроль: } & +0,69310 & \text{Контроль: } +0,21642
 \end{array}$$

Из сходимости коэффициентов очевидно, что коэффициентам при косинусах нельзя доверять более чем до четырех десятичных знаков, а коэффициентам при синусах — более чем до трех. Другими словами, интерполированное значение функции, вычисленное по ряду, будет точным не более чем до трех десятичных знаков. Чтобы получить более точные результаты, необходимо повторить разложение с большим числом частных значений.

Всякий раз, когда функция от двух независимых угловых переменных, α и β , может быть представлена в следующей форме:

$$F(\alpha, \beta) = \sum (A_{j,k} \cos ja \cos k\beta + B_{j,k} \sin ja \sin k\beta + C_{j,k} \cos ja \sin k\beta + D_{j,k} \sin ja \cos k\beta),$$

где $j, k = 0, 1, 2, \dots$, вычисление численных значений коэффициентов можно свести к двукратному применению гармонического анализа для одной переменной.

Допустим, что период по α разделен на $2m$ частей, а период по β — на $2n$ частей. Тогда требуется $4mn$ частных значений F . Начиная с $2m$ частных значений, соответствующих $\beta = 0$, вычислим $m+1$ коэффициентов при косинусах, соответствующих $j = 0, 1, 2, \dots, m$, и $m-1$ коэффициентов при синусах, соответствующих $j = 1, 2, \dots, m-1$. Затем повторим этот процесс для $2n$ частных значений F , соответствующих другому частному значению β , после чего ту же операцию выполним для остальных частных значений F . Таким образом будут получены $2n$ частных значений коэффициентов при $\cos ja$, $\sin ja$. Выбирая любую систему из них, соответствующую одному и тому же значению j , например $2n$ частных значений $\cos 2\alpha$, разлагаем их по β . В резуль-

тате получаются коэффициенты $A_{2,k}$, $C_{2,k}$. Остальные коэффициенты получаются аналогичным способом.

Когда разложение завершено, обычно требуется представить результат в виде условного двойного ряда Фурье, заменяя произведения синусов и косинусов суммами и разностями этих последних. Для этой цели достаточны следующие формулы:

$$A \cos j\alpha \cos k\beta = +\frac{1}{2} A \cos(j\alpha + k\beta) + \frac{1}{2} A \cos(j\alpha - k\beta),$$

$$B \sin j\alpha \sin k\beta = -\frac{1}{2} B \cos(j\alpha + k\beta) + \frac{1}{2} B \cos(j\alpha - k\beta),$$

$$C \cos j\alpha \sin k\beta = +\frac{1}{2} C \sin(j\alpha + k\beta) - \frac{1}{2} C \sin(j\alpha - k\beta),$$

$$D \sin j\alpha \cos k\beta = +\frac{1}{2} D \sin(j\alpha + k\beta) + \frac{1}{2} D \sin(j\alpha - k\beta).$$

Когда либо j , либо k , или обе эти величины равны нулю, эти формулы не применяются, так как члены ряда уже имеют требуемый вид. Следует заметить, что коэффициенты $B_{0,k}$ и $B_{j,0}$ не появляются. Также в том случае, когда разложение производится сначала по α , коэффициент $D_{0,k}$ не появляется, и в любом случае отсутствуют $C_{0,0}$ и $D_{0,0}$. Необходимо также заметить, что когда $j=k$ и оба отличны от нуля, то эти формулы дают формальные значения для коэффициентов при $\sin 0$; эти коэффициенты фиктивны, и их никогда не следует записывать, так как это может привести к ошибкам в последующих операциях.

Всегда является возможным и желательным, используя соотношения

$$+\frac{1}{2} A \cos(j\alpha + k\beta) = +\frac{1}{2} A \cos(-j\alpha - k\beta),$$

$$+\frac{1}{2} C \sin(j\alpha + k\beta) = -\frac{1}{2} C \sin(-j\alpha - k\beta),$$

располагать ряд так, чтобы ни j , ни k не принимали отрицательных значений или, наоборот, чтобы ни одно из них не принимало положительных значений.

Когда это сделано, то, считая j неотрицательным, следует расположить ряд по группам так, чтобы внутри каждой группы j было постоянным, а k изменялось от своего наибольшего положительного значения до своего наибольшего отрицательного значения.

Замечания. Литература

Книга Брауна и Шука «Теория планет» (E. W. Brown, C. A. Shook, Planetary Theory, chapt. II and III, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933) содержит много полезных сведений о разложении функций в эллиптическом движении. Различные таблицы для гармонического анализа содержатся в приложении А к этой книге, а также в таблицах Брауна и Брауэра (Tables for the Development of the Disturbing Function, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933; Trans. Yale Obs., 6, pt. 5, 1932).

Гла́ва III

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПРИТЯЖЕНИЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

1. Введение. Закон гравитационного притяжения справедлив для двух материальных частиц, а не для тел конечных размеров с произвольным распределением масс. Однако можно показать, что сферические тела с таким распределением масс, что слои равной плотности являются концентрическими сферами, притягивают друг друга так, как если бы массы были сосредоточены в их центрах. Кроме того, можно показать, что если расстояние между двумя телами велико по сравнению с их размерами, то притяжение между ними проявляется в сущности так, как если бы массы были сосредоточены в их центрах. Эти результаты дают возможность в большинстве случаев пренебречь размерами и распределением масс и рассматривать гравитационное взаимодействие между двумя телами так, как если бы они были материальными частицами. Тем не менее в солнечной системе и системах двойных звезд имеются случаи, когда отклонения от сферической формы оказывают значительное влияние. Следовательно, необходимо исследовать случай гравитационного взаимодействия между двумя конечными телами, каждое из которых обладает произвольным распределением масс. Эта проблема представляет значительные трудности. Гораздо легче рассмотреть притяжение между телом конечных размеров и материальной частицей. Эта упрощенная проблема применяется ко многим случаям в астрономии и будет рассмотрена первой.

2. Притяжение частицы телом конечных размеров и с произвольным распределением масс. Пусть в декартовой системе координат, неподвижной в смысле ньютоновской механики, X_0, Y_0, Z_0 — координаты центра масс E тела M , и пусть X, Y, Z — координаты частицы P с массой m . Рассмотрим в точке Q элемент массы dM тела M и обозначим через ξ, η, ζ координаты Q в системе координат с осями, параллельными осям неподвижной системы, но начало которой находится в точке E . Положим

$$x = X - X_0, \quad y = Y - Y_0, \quad z = Z - Z_0,$$

так что x, y, z — координаты m относительно центра масс тела M . Расстояние Δ между точками P и Q получается по формуле

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2. \quad (1)$$

Сила, действующая на частицу m , обусловленная притяжением элемента массы dM , равна $f m dM / \Delta^2$ в направлении \overrightarrow{PQ} . Составляющие

этой силы по трем осям координат получаются умножением величины силы на направляющие косинусы направления \vec{PQ} . Поскольку координаты Q относительно P равны $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, то при помощи (1) легко видеть, что направляющие косинусы равны

$$\frac{\xi - x}{\Delta}, \quad \frac{\eta - y}{\Delta}, \quad \frac{\zeta - z}{\Delta}.$$

Следовательно, три составляющие силы, обусловленной притяжением со стороны dM , равны

$$\int m dM \frac{\xi - x}{\Delta^3}, \quad \int m dM \frac{\eta - y}{\Delta^3}, \quad \int m dM \frac{\zeta - z}{\Delta^3}.$$

Интегрирование по всему объему тела M дает компоненты силы в следующем виде:

$$\int m \int \frac{\xi - x}{\Delta^3} dM, \quad \int m \int \frac{\eta - y}{\Delta^3} dM, \quad \int m \int \frac{\zeta - z}{\Delta^3} dM.$$

Эти интегралы можно привести к более определенному виду, вводя плотность κ , которую следует считать конечной функцией от координат ξ , η , ζ . В таком случае

$$dM = \kappa(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

и компоненты силы выражаются в виде тройных интегралов, в которых интегрирование необходимо распространить на всю массу M . Тогда эти компоненты принимают вид

$$\begin{aligned} F_x &= \int m \int \int_{(M)} \kappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\xi - x}{\Delta^3} d\xi d\eta d\zeta, \\ F_y &= \int m \int \int_{(M)} \kappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\eta - y}{\Delta^3} d\xi d\eta d\zeta, \\ F_z &= \int m \int \int_{(M)} \kappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta - z}{\Delta^3} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (2)$$

где требуются три тройных интегрирования. Можно получить выражения, в которых встречается только один тройной интеграл. Эта форма получается рассмотрением частных производных от Δ^2 по x , y , z . Из (1) вытекает, что

$$\Delta d\Delta = (x - \xi) dx + (y - \eta) dy + (z - \zeta) dz,$$

или

$$-\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{\xi - x}{\Delta^3} dx + \frac{\eta - y}{\Delta^3} dy + \frac{\zeta - z}{\Delta^3} dz.$$

Левую часть можно представить как $d(\Delta^{-1})$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta} \right) = \frac{\xi - x}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\Delta} \right) = \frac{\eta - y}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Delta} \right) = \frac{\zeta - z}{\Delta^3}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) дает для компонентов силы следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_x &= fm \int \int \int_{(M)} \kappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta} \right) d\xi d\eta d\zeta, \\ F_y &= fm \int \int \int_{(M)} \kappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\Delta} \right) d\xi d\eta d\zeta, \\ F_z &= fm \int \int \int_{(M)} \kappa(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Delta} \right) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (4)$$

В этих интегралах координаты x, y, z следует считать параметрами, которые необходимо рассматривать постоянными при интегрировании. К тому же пределы интегрирования не зависят от этих параметров. В этом случае разрешается переменить порядок дифференцирования и интегрирования по параметру при условии, что всюду в интервале интегрирования $\Delta \neq 0$. Это условие говорит только о том, что частица m не должна быть частью массы M ; она должна находиться либо вне массы M , либо внутри полости в ней. Случай, когда частица является частью тела M , требует особого исследования.

Определим теперь потенциал U формулой

$$U = f \int \int \int_{(M)} \frac{\kappa(\xi, \eta, \zeta)}{\Delta} d\xi d\eta d\zeta, \quad (5)$$

которую для краткости обычно будем записывать в виде

$$U = f \int \frac{dM}{\Delta}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что компоненты силы, действующей на m , можно написать в следующем виде:

$$F_x = m \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = m \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = m \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (7)$$

Аналогично силы, действующие на различные элементы тела M , можно привести к центру масс M , и равнодействующая сила будет равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей на m . Следовательно, ее компоненты можно написать в следующем виде:

$$F_x^{(0)} = -m \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y^{(0)} = -m \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z^{(0)} = -m \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8)$$

Для дальнейших приложений необходимо вернуться к исходной неподвижной декартовой системе координат. Тогда U необходимо считать функцией от разностей $X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0$, и компоненты силы, действующей на m , принимают следующий вид:

$$F_x = m \frac{\partial U}{\partial X}, \quad F_y = m \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad F_z = m \frac{\partial U}{\partial Z}. \quad (9)$$

Компоненты силы, определяющей движение центра масс тела M , равны

$$F_x^{(0)} = m \frac{\partial U}{\partial X_0}, \quad F_y^{(0)} = m \frac{\partial U}{\partial Y_0}, \quad F_z^{(0)} = m \frac{\partial U}{\partial Z_0}. \quad (10)$$

Проблема нахождения взаимного притяжения между M и m сведена к проблеме получения функции U , определяемой посредством формулы (5), как функции от x, y, z . Общие свойства U изучаются в теории

ньютоновского потенциала. Наиболее фундаментальным из них является то, что для всех точек, не принадлежащих к массе M , U удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Это уравнение впервые было дано Лапласом. Оно получается непосредственно частным дифференцированием соотношений (3). При помощи этого уравнения можно показать, что потенциал для тела M , обладающего сферической симметрией, принимает вид

$$U = \frac{jM}{r},$$

где r определяется формулой

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Методы, используемые в теории потенциала, имеют большое значение в теории равновесия вращающихся жидкых масс. Приложение этой теории к фигурам небесных тел является, собственно, областью динамической астрономии; однако эта тема выходит за рамки настоящей книги.

3. Полиномы Лежандра. Для вопросов, рассматриваемых в этой книге, достаточно получить метод выражения U как функции от x , y , z , который был бы, как правило, применим в тех случаях, когда расстояние между m и центром масс тела M велико по сравнению с размерами этого тела M . При этом допущении существует разложение в ряд, которое будет рассмотрено в последующих разделах.

Пусть ρ есть расстояние элемента массы dM от центра масс тела M . Тогда

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2. \quad (11)$$

Далее, считается, что для любой точки тела M $\rho/r < 1$. Выражение (1) для Δ^2 теперь можно написать в виде

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) + \rho^2 = \\ &= r^2 \left[1 - 2 \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} \right) \frac{\rho}{r} + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Для краткости положим

$$\frac{\rho}{r} = a, \quad (12)$$

$$\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r\rho} = q = \cos S, \quad (13)$$

так что

$$\Delta^2 = r^2(1 - 2qa + a^2). \quad (14)$$

Из (13) очевидно, что S есть угол POQ , и поэтому

$$|q| \leq 1.$$

Теперь подынтегральная функция в выражении

$$U = f \int \frac{dM}{r(1 - 2qa + a^2)^{1/2}} \quad (15)$$

будет разложена в степенной ряд по a при помощи полиномов Лежандра $P_n(q)$, определяемых формулой

$$\frac{1}{(1-2qa+a^2)^{1/2}} = P_0 + P_1 a + P_2 a^2 + \dots + P_n a^n + \dots, \quad (16)$$

в которой P_n означает полиномы относительно q степени n .

Общее выражение для $P_n(q)$ получается при помощи биномиального разложения левой части формулы (16) в виде

$$[1 - (2qa - a^2)]^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} (2qa - a^2)^k, \quad (17)$$

где использовано обычное обозначение для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Поскольку правые части (16) и (17) должны быть тождественными, то общее выражение для $P_n(q)$ получается нахождением коэффициента при a^n в правой части формулы (17). Это общее выражение является двойным рядом по a и q , и в правой части формулы (16) этот двойной ряд расположен в виде одинарного ряда по a с коэффициентами, явившимися функциями, в данном случае — полиномами, от q .

Собирая коэффициенты при a^n в правой части (17), получаем для общего выражения $P_n(q)$

$$P_n(q) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[q^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} q^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} q^{n-4} - \dots \right]. \quad (18)$$

Из этого выражения следует, что P_n является полиномом степени n , содержащим только нечетные степени q , если n нечетное, и только четные степени, если n четное. Подстановка частных значений n дает следующие полиномы Лежандра от порядка 0 до порядка 6 включительно:

$$P_0(q) = 1,$$

$$P_1(q) = q,$$

$$P_2(q) = \frac{1}{2}(3q^2 - 1),$$

$$P_3(q) = \frac{1}{2}(5q^3 - 3q),$$

$$P_4(q) = \frac{1}{8}(35q^4 - 30q^2 + 3),$$

$$P_5(q) = \frac{1}{8}(63q^5 - 70q^3 + 15q),$$

$$P_6(q) = \frac{1}{16}(231q^6 - 315q^4 + 105q^2 - 5).$$

Эти полиномы будут часто полезны в последующем.

Другая форма разложения получается, если положить

$$\sigma = E^{1/2},$$

тогда в силу (13)

$$2q = \sigma + \sigma^{-1}.$$

Также имеем

$$\begin{aligned} 2 \cos nS &= \sigma^n + \sigma^{-n}, \\ 1 - 2qa + a^2 &= (1 - a\sigma)(1 - a\sigma^{-1}), \\ (1 - 2qa + a^2)^{-1/2} &= (1 - a\sigma)^{-1/2}(1 - a\sigma^{-1})^{-1/2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} a^k \sigma^k \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{-\frac{1}{2}}{l} a^l \sigma^{-l}. \end{aligned} \quad (19)$$

Оба ряда перемножаются, и коэффициент при a^n дает

$$\begin{aligned} P_n(\cos S) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot 2 \cos nS + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \cdot 2 \cos(n-2)S + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n-4)} \cdot 2 \cos(n-4)S + \dots . \end{aligned} \quad (20)$$

Оба биномиальных ряда, из которых образовано произведение в правой части (19), абсолютно сходятся при $|a| < 1$, поскольку $|\sigma| = 1$. Следовательно, полученный двойной ряд сходится абсолютно при $|a| < 1$.

Следующие свойства P_n будут полезны для наших непосредственных нужд:

$$(a) \quad P_n(+1) = +1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (21)$$

Это свойство получается немедленно, если положить $q = \pm 1$ в (14), что приводит в этом случае к следующим частным разложениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \mp a} &= 1 \pm a + a^2 \pm a^3 + \dots; \\ (b) \quad |P_n(q)| &\leq 1, \quad \text{если } -1 \leq q \leq +1. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку все коэффициенты в правой части (20) положительны, то максимальное значение P_n для действительных значений S равно сумме этих коэффициентов. Оно достигается при $S = 0$; $q = +1$; в силу свойства (21) это доказывает справедливость (22).

Важное значение свойства (22) для нашей цели заключается в том, что оно доказывает абсолютную сходимость ряда (16) при $|a| < 1$ и для всех значений q , соответствующих действительным значениям S . Доказательство получается сравнением ряда (16) со следующим рядом:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots, \quad (23)$$

абсолютно сходящимся при $|a| < 1$. Так как абсолютные значения коэффициентов в правой части (16) не превосходят значений соответствующих коэффициентов в (23), то первый ряд должен также сходиться абсолютно.

4. Главные члены U . Возвращаясь теперь к интегралу (15) для U , или помоши подстановки ряда (16) получаем ряд, сходящийся абсолютно при $a < 1$. Поэтому можно написать

$$U = \frac{f}{r} \int \left[1 + P_1(q) \frac{q}{r} + P_2(q) \frac{q^2}{r^2} + P_3(q) \frac{q^3}{r^3} + \dots \right] dM. \quad (24)$$

Запишем это интегральное выражение в следующем виде:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots .$$

Нам необходимо теперь вычислить отдельные члены, восстанавливая в подынтегральных функциях ξ , η , ζ при помощи соотношения $q\varrho = (x\xi + y\eta + z\zeta)/r$.

Имеются следующие различные члены U :

$$U_0 = \frac{f}{r} \int dM = \frac{fM}{r}. \quad (25)$$

Это тот результат, который получился бы, если бы вся масса тела M была сосредоточена в его центре масс.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{f}{r^2} \int \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} dM = \\ &= \frac{f}{r^2} \left(\frac{x}{r} \int \xi dM + \frac{y}{r} \int \eta dM + \frac{z}{r} \int \zeta dM \right). \end{aligned}$$

Но эти три интеграла равны нулю, так как ξ , η , ζ отсчитываются в системе координат, имеющей начало в центре масс тела M . Следовательно,

$$U_1 = 0. \quad (26)$$

Выражение для U_2 имеет вид

$$U_2 = \frac{f}{r} \int \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{r^2} \right] dM$$

и может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{f}{r^3} \left\{ \left(\frac{3x^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \xi^2 dM + \left(\frac{3y^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \eta^2 dM + \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \int \zeta^2 dM + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3yz}{r^2} \int \eta\zeta dM + \frac{3zx}{r^2} \int \zeta\xi dM + \frac{3xy}{r^2} \int \xi\eta dM \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Шесть интегралов, которые входят в это выражение, являются моментами второго порядка, связанными с моментами инерции тела M . Чтобы получить более удобную форму этого выражения, обозначим через I момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и через α , β , γ — направляющие косинусы этой оси. Тогда, если θ есть угол между этой осью и прямой, соединяющей некоторый элемент dM с координатами ξ , η , ζ и центром масс тела M , то

$$I = \int \varrho^2 \sin^2 \theta dM,$$

где, как и прежде, $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Этот интеграл можно развернуть, используя соотношение

$$\varrho \cos \theta = \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma.$$

Отсюда

$$I = \int [\varrho^2 - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2] dM,$$

что можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} I &= \int [(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma)^2] dM = \\ &= \int [(\eta^2 + \zeta^2)\alpha^2 + (\zeta^2 + \xi^2)\beta^2 + (\xi^2 + \eta^2)\gamma^2 - 2\eta\zeta\beta\gamma - 2\zeta\xi\gamma\alpha - 2\xi\eta\alpha\beta] dM. \end{aligned}$$

Моменты инерции A, B, C относительно осей X, Y, Z и произведения инерции D, E, F определяются следующими интегралами:

$$\begin{aligned} A &= \int (\eta^2 + \zeta^2) dM, & D &= \int \eta \zeta dM, \\ B &= \int (\zeta^2 + \xi^2) dM, & E &= \int \zeta \xi dM, \\ C &= \int (\xi^2 + \eta^2) dM, & F &= \int \xi \eta dM. \end{aligned}$$

Поэтому момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, с направляющими косинусами α, β, γ можно написать в виде

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь следующую поверхность второго порядка с центром в начале координат:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = +1. \quad (29)$$

Эта поверхность называется эллипсоидом инерции тела M . Сравнение уравнений (28) и (29) показывает, что выполняются следующие соотношения:

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{I},$$

если X, Y, Z — координаты любой точки на поверхности этого эллипсоида, а α, β, γ — направляющие косинусы прямой, соединяющей эту точку с центром. Последнее соотношение показывает, что расстояние любой точки X, Y, Z от центра равно $1/\sqrt{I}$, что доказывает отсутствие у этой поверхности действительных точек на бесконечности, поскольку моменты инерции трехмерного тела относительно любой оси отличны от нуля. Поэтому эта поверхность является эллипсоидом, а не какой-либо другой формой поверхности второго порядка.

Соответствующим выбором осей координат это уравнение эллипса можно привести к следующему виду:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = +1. \quad (30)$$

Приведение общей формы (28) к форме (30) требует решения алгебраического уравнения третьей степени. Это решение фиксирует направления осей, но оставляет полную свободу в распределении обозначений X, Y, Z между этими осями. Как правило, выбор обозначений определяется динамическими соображениями. Если положительные направления осей X и Z выбраны, то положительное направление оси Y однозначно следует из условия, чтобы оси координат составляли, например, правую систему.

Предположим, что оси выбраны так, что уравнение эллипса имеет вид (30). Эти оси называются главными осями тела. При этом выборе осей мы имеем $D = E = F = 0$. Важное значение такого выбора в связи с нашей настоящей задачей заключается в том, что в этом случае обращаются в нуль последние три интеграла в выражении (27) для U_2 . Остальные интегралы можно выразить через A, B и C . Из определения A, B, C вытекает, что

$$\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dM = \frac{A + B + C}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \xi^2 dM &= \frac{B+C-A}{2} \\ \int \eta^2 dM &= \frac{C+A-B}{2}, \\ \int \zeta^2 dM &= \frac{A+B-C}{2}.\end{aligned}$$

Это дает после простого преобразования

$$U_2 = \frac{f}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A + B + C) - \frac{3}{2} \frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2} \right]. \quad (31)$$

Пусть теперь α, β, γ — направляющие косинусы прямой, соединяющей точку x, y, z с началом координат. Тогда

$$\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{r^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

В силу уравнения (28) и выбора главных осей в качестве осей координат это — момент инерции тела относительно прямой, соединяющей его центр масс с точкой x, y, z . Если этот момент инерции обозначить через I , то выражение (31) можно написать в следующем виде:

$$U_2 = \frac{f}{r^3} \left[\frac{A+B+C-3I}{2} \right]. \quad (32)$$

Это выражение для U_2 следует рассматривать просто как удобную сокращенную форму. Во всех приложениях для потенциала U необходимо получить выражение, в которое явно входят координаты точки m , так чтобы можно было без труда получить частные производные по этим координатам. Этому требованию удовлетворяет выражение (31).

5. Введение полярных координат. Введем полярные координаты формулами

$$x = r \cos \psi \cos \beta,$$

$$y = r \sin \psi \cos \beta,$$

$$z = r \sin \beta,$$

где ψ — долгота и β — широта. Следует отличать последнюю от направляющего косинуса β , использованного выше. Тогда выражение для U_2 можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}U_2 &= \frac{f}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A + B + C) - \frac{3}{2} (A \cos^2 \psi + B \sin^2 \psi) \cos^2 \beta - \frac{3}{2} C \sin^2 \beta \right] = \\ &= \frac{f}{r^3} \left[\frac{1}{2} (A + B + C) - \frac{3}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\psi \right) \cos^2 \beta - \frac{3}{2} C \sin^2 \beta \right],\end{aligned}$$

что дает окончательно

$$U_2 = \frac{f}{r^3} \left[\left(C - \frac{A+B}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) - \frac{3}{4} (A - B) \cos^2 \beta \cos 2\psi \right]. \quad (33)$$

Допустим теперь, что тело M обладает осевой симметрией относительно оси Z . Тогда $A = B$ и (33) приводится к

$$U_2 = \frac{f}{r^3} (C - A) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right). \quad (34)$$

Более частным случаем является случай сфера, который, кроме осевой симметрии относительно оси Z , обладает также симметрией относительно экваториальной плоскости, перпендикулярной к этой оси. Следует заметить, что выражение (34) для U_2 не зависит от того, обладает ли тело экваториальной плоскостью симметрии. То же самое выражение справедливо как для сфера, так и для грушевидного тела, обладающего осевой симметрией относительно оси Z .

Эта упрощенная форма члена U_2 может быть использована для задач, связанных с рассмотрением притяжения планетами их спутников. Она применима к двойным звездным системам, если одна из компонент настолько малых размеров, что ее можно считать материальной частицей. В очень тесных парах может стать значительной приливная деформация, нарушая осевую симметрию и вызывая необходимость применения общей формулы (33).

6. Выражение для U_3 . Следующим членом потенциала является

$$U_3 = \frac{f}{r^4} \int \frac{1}{2} \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} \left[5 \left(\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r} \right)^2 - 3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right] dM. \quad (35)$$

Этот интеграл порождает десять различных интегралов вида

$$\int \xi^j \eta^k \zeta^l dM \quad \text{при } j+k+l=3,$$

где j, k, l — нуль или положительные целые числа 1, 2 или 3.

Допустим, что тело симметрично относительно плоскости XY и относительно плоскости ZX . В этом случае только три из этих десяти интегралов отличны от нуля, и выражение для U_3 принимает вид

$$U_3 = \frac{f}{r^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{r} \left[\left(5 \frac{x^2}{r^2} - 3 \right) \int \xi^3 dM + \left(15 \frac{y^2}{r^2} - 3 \right) \int \xi \eta^2 dM + \left(15 \frac{z^2}{r^2} - 3 \right) \int \xi \zeta^2 dM \right]. \quad (36)$$

Примером тела, к которому применимо это выражение, является грушевидное тело при выборе в качестве оси X оси этой группы.

Если тело симметрично относительно всех трех координатных плоскостей, каким является, например, однородный эллипсоид с тремя неравными осями, то все десять интегралов обращаются в нуль. В этом случае моменты нечетного порядка вообще обращаются в нуль, и $U_3 = 0$, $U_5 = 0$ и т. д.

7. Выражение для U_4 . Общее выражение (24) дает

$$U_4 = \frac{f}{r^5} \int \frac{1}{8} \left[\frac{35(x\xi + y\eta + z\zeta)^4}{r^4} - 30 \frac{(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{r^2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 3 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 \right] dM. \quad (37)$$

В самом общем случае имеется пятнадцать различных интегралов моментов четвертого порядка вида $\int \xi^j \eta^k \zeta^l dM$. Выражение (37) можно без труда записать через эти интегралы. Разворачивание этого выражения приводится здесь только для тела, симметричного относительно всех трех координатных плоскостей. В этом случае только шесть моментов четвертого порядка будут отличны от нуля, а именно те, у которых

все три показателя степени j, k, l — четные числа. Это рассмотрение применимо, например, к однородному эллипсоиду с тремя неравными осями. В таком случае

$$\begin{aligned} U_4 = \frac{f}{r^5} & \left[\left(\frac{35}{8} \frac{x^4}{r^4} - \frac{15}{4} \frac{x^2}{r^2} + \frac{3}{8} \right) \int \xi^4 dM + \left(\frac{35}{8} \frac{y^4}{r^4} - \frac{15}{4} \frac{y^2}{r^2} + \frac{13}{8} \right) \int \eta^4 dM + \right. \\ & + \left(\frac{35}{8} \frac{z^4}{r^4} - \frac{15}{4} \frac{z^2}{r^2} + \frac{3}{8} \right) \int \zeta^4 dM + \left(\frac{105}{4} \frac{y^2 z^2}{r^4} - \frac{15}{4} \frac{y^2 + z^2}{r^2} + \frac{13}{4} \right) \int \eta^2 \zeta^2 dM + \\ & + \left(\frac{105}{4} \frac{z^2 x^2}{r^4} - \frac{15}{4} \frac{z^2 + x^2}{r^2} + \frac{3}{4} \right) \int \zeta^2 \xi^2 dM + \\ & \left. + \left(\frac{105}{4} \frac{x^2 y^2}{r^4} - \frac{15}{4} \frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{3}{4} \right) \int \xi^2 \eta^2 dM \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть в более частном случае сфeroида ось Z является осью осевой симметрии. Тогда

$$\int \xi^4 dM = \int \eta^4 dM, \quad \int \xi^2 \zeta^2 dM = \int \eta^2 \zeta^2 dM.$$

Кроме того, должна существовать связь между $\int \xi^2 \eta^2 dM$ и $\int \xi^4 dM$. Эту связь легко обнаружить следующим образом. Обозначим

$$Q_1^2 = \xi^2 + \eta^2$$

и введем цилиндрические координаты Q_1, ψ, ζ . Плотность κ в силу осевой симметрии будет функцией от Q_1 и ζ , но не будет зависеть от ψ . Следовательно, если

$$dM = \kappa d\xi d\eta d\zeta d\psi,$$

то

$$\begin{aligned} \int \xi^2 \eta^2 dM &= \int \int \kappa d\xi d\eta \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi = \\ &= \frac{\pi}{4} \int \int \kappa d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Пределы интегрирования по Q_1, ζ должны быть введены в соответствии с конкретно рассматриваемым телом. Аналогично

$$\begin{aligned} \int (\xi^2 + \eta^2)^2 dM &= \int \int \kappa d\xi d\eta \int_0^{2\pi} d\psi = \\ &= 2\pi \int \int \kappa d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int \xi^2 \eta^2 dM = \frac{1}{8} \int (\xi^2 + \eta^2)^2 dM.$$

Далее непосредственно следует, что

$$\int \xi^4 dM = \int \eta^4 dM = \frac{3}{8} \int (\xi^2 + \eta^2)^2 dM.$$

После введения этих соотношений и дальнейшего упрощения выражение (38) для члена U_4 в случае сфeroида приводится к виду

$$U_4 = \frac{f}{r^5} \left(1 - 10 \frac{z^2}{r^2} + \frac{35}{3} \frac{z^4}{r^4} \right) \int \left[\frac{9}{64} (\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{9}{8} (\xi^2 + \eta^2) \zeta^2 + \frac{3}{8} \zeta^4 \right] dM. \quad (39)$$

Если затем ввести полярные координаты формулами

$$z^2 = r^2 \sin^2 \beta,$$

$$z^4 = r^4 \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{4} \sin^2 2\beta \right),$$

то это выражение принимает следующий вид:

$$U_4 = \frac{J}{r^5} \left(1 + \frac{5}{3} \sin^2 \beta - \frac{35}{12} \sin^2 2\beta \right) \int \left[\frac{9}{64} (\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{9}{8} (\xi^2 + \eta^2) \zeta^2 + \frac{3}{8} \zeta^4 \right] dM.$$

Довольно неожиданное упрощение заключается в том, что в случае сфероида появляется множителем одна общая функция от координат x, y, z , тогда как различные интегралы в (38) имели множителем различные функции от этих координат частицы m . Это свойство можно было бы получить из общих свойств ньютонаовского потенциала.

8. Потенциал сфероида. Результаты, полученные для сфероида, можно собрать воедино в следующей форме:

$$U = \frac{JM}{r} \left[1 + \frac{B_2}{r^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) + \frac{B_4}{r^4} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \sin^2 \beta + \frac{35}{8} \sin^4 \beta \right) + \dots \right], \quad (40)$$

где

$$B_2 = -\frac{C-A}{M} = -\frac{1}{M} \int \left[\frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) - \zeta^2 \right] dM,$$

$$B_4 = \frac{1}{M} \int \left[\frac{3}{8} (\xi^2 + \eta^2)^2 - 3 (\xi^2 + \eta^2) + \zeta^4 \right] dM.$$

Очевидно, B_2 имеет размерность $[L^2]$, B_4 — размерность $[L^4]$. Более часто применяемыми параметрами являются J и K , связанные с B_2 , B_4 соотношениями

$$B_2 = -\frac{2}{3} JR^2, \quad B_4 = +\frac{4}{15} KR^4,$$

в которых R означает экваториальный радиус сфероида. Тогда

$$U = \frac{JM}{r} \left[1 + \frac{JR^2}{r^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \beta \right) + \frac{KR^4}{r^4} \left(\frac{1}{10} - \sin^2 \beta + \frac{7}{6} \sin^4 \beta \right) + \dots \right]. \quad (41)$$

Вместо K часто применяется параметр D , определяемый как $\frac{35}{8} B_4 R^{-4}$. Тогда K -член в выражении (41) принимает следующий вид:

$$\frac{DR^4}{r^4} \left(\frac{3}{35} - \frac{6}{7} \sin^2 \beta + \sin^4 \beta \right).$$

Постоянныес M, J, K , которые определяют потенциал сфероида, должны быть получены из данных наблюдений, т. е. по гравитационному притяжению этим сфероидом другого тела.

Для Земли параметр J можно вывести из измерений ускорения силы тяжести на земной поверхности. Параметр K для Земли получается малым, того же порядка величины, что и коэффициенты гармоник высших порядков, которые появляются в потенциале тела с таким же неправильным строением поверхности, какое имеет Земля.

В движении Луны важен параметр J , однако влияние Солнца на движение Луны настолько сильнее влияния сжатия Земли, что определение численного значения J по движению Луны представляет особую трудность.

Интересный метод определения J для Земли основан на представлении J в виде произведения двух сомножителей, а именно

$$J = \frac{3}{2} \frac{C-A}{C} \cdot \frac{C}{MR^2}.$$

Отношение $(C-A)/C$ можно найти из наблюдаемых значений постоянной прецессии, тогда как отношение C/MR^2 может быть получено из теории гидростатического равновесия Земли. Этот метод с большим успехом был использован Дарвином и далее развит Де Ситтером; его ограниченность зависит от степени приложимости теории гидростатического равновесия к Земле.

Изучение движений искусственных спутников открыло возможность определения численных значений постоянных J и K , а также других параметров, входящих в потенциал Земли, при помощи метода, свободного от трудностей, имеющихся в прежних методах.

При наличии искусственных спутников представляется возможным применить к Земле метод, который оказался полезным для изучения потенциала Сатурна по его естественным спутникам. Внутренние шесть спутников этой планеты, от Мимаса до Титана, имеют средние расстояния, колеблющиеся от $3,11R$ до $20,48R$. Движения узлов иperiцентриев этих спутников в значительной степени определяются сжатием центральной планеты. По наблюдениям движений двух или более спутников на различных расстояниях от центральной планеты можно определить значения J и K (или D). Для дальнейшего чтения рекомендуется работа Джейфриса о применении этого метода к системе Сатурна¹⁾. Относительно движений periцентрия и узла орбиты близкого спутника см. гл. XVII.

Форма потенциала сферида, данная в формуле (40), соответствует общему результату, полученному Лапласом. Для тела с осевой симметрией это общее выражение имеет вид

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{r^k} P_k(\sin \beta) \right],$$

в котором P_k — полиномы Лежандра. В случае сфероида в силу симметрии относительно экваториальной плоскости в этом ряде присутствуют только четные члены. Для тел, не обладающих осевой симметрией, существует обобщенное разложение²⁾, также данное Лапласом.

9. Потенциал для двух тел конечных размеров. Разложение потенциала, приведенное в предыдущих разделах, применимо к подавляющему большинству проблем динамической астрономии. Однако имеется несколько проблем, в которых необходимо использовать разложение потенциала двух тел конечных размеров. В этом случае функцию U можно написать в следующем виде:

$$U = f \int \int \frac{dM dM'}{\Delta},$$

¹⁾ H. Jeffreys, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 113, 81 (1953); 114, 433 (1954).

²⁾ F. Tisserand, Mécanique Céleste, t. 2, chap. XVI—XIX, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

где Δ теперь означает расстояние между двумя элементами массы: dM тела M и dM' тела M' . Интегрирование должно быть распространено на массы обоих тел.

Пусть O есть центр масс тела M , O' — центр масс тела M' , и пусть O является началом декартовой системы координат ξ, η, ζ , а O' — начало системы координат ξ', η', ζ' с параллельными осями. Пусть, далее, OO' совпадает с осью Ox . Если r означает расстояние OO' , ξ, η, ζ — координаты dM , а ξ', η', ζ' — координаты dM' , то

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (r + \xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 = \\ &= r^2 \left\{ 1 + \frac{2(\xi - \xi')}{r} + \frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}{r^2} \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно, если

$$q = \frac{\xi - \xi'}{ra}, \quad a^2 = \frac{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}{r^2},$$

$$\Delta^2 = r^2(1 - 2qa + a^2),$$

то величина, обратная Δ , может быть разложена при помощи (16), что дает разложение для U вида

$$U = f \iiint \frac{dM dM'}{r} \{1 + P_1(q) \cdot a + P_2(q) \cdot a^2 + \dots\}, \quad (42)$$

и, подобно разложению, использованному в предыдущих разделах,

$$\begin{aligned}U_0 &= f \frac{MM'}{r}, \\ U_1 &= f \iiint \frac{aq}{r} dM dM' = \\ &= f \iiint \frac{\xi - \xi'}{r^2} dM dM' = \\ &= 0,\end{aligned} \quad (43)$$

так как

$$\int \xi dM = 0, \quad \int \xi' dM' = 0.$$

$$\begin{aligned}U_2 &= f \iiint \left(\frac{3}{2} q^2 - \frac{1}{2} \right) a^2 \frac{dM dM'}{r} = \\ &= \frac{f}{r^3} \iiint \left\{ \frac{3}{2} (\xi - \xi')^2 - \frac{1}{2} [(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2] \right\} dM dM' = \\ &= \frac{f}{r^3} \iiint \left[\left(\xi^2 - \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) + \left(\xi'^2 - \frac{1}{2} \eta'^2 - \frac{1}{2} \zeta'^2 \right) - 2\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' \right] dM dM'.\end{aligned}$$

Члены с произведениями обращаются в нуль в силу выбора начал координат. Следовательно, U_2 можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}U_2 &= \frac{f M'}{r^3} \int \left[\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{3}{2} (\eta^2 + \zeta^2) \right] dM + \\ &\quad + \frac{f M}{r^3} \int \left[\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{3}{2} (\eta'^2 + \zeta'^2) \right] dM'.\end{aligned}$$

Независимо от ориентации координат имеем

$$\begin{aligned}\int (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) dM &= \frac{1}{2} (A + B + C), \\ \int (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) dM' &= \frac{1}{2} (A' + B' + C'),\end{aligned}$$

если A, B, C, A', B', C' — моменты инерции относительно главных осей. Кроме того,

$$I = \int (\eta^2 + \zeta^2) dM,$$

$$I' = \int (\eta'^2 + \zeta'^2) dM'$$

— моменты инерции обоих тел относительно прямой OO' . Следовательно,

$$I = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2,$$

$$I' = A'a'^2 + B'b'^2 + C'c'^2,$$

если a, b, c — направляющие косинусы прямой OO' относительно главных осей тела M , а a', b', c' — направляющие косинусы относительно главных осей тела M' . Для U_2 получается следующее выражение:

$$U_2 = \frac{fM'}{r^3} \left[\frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{3}{2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2) \right] + \\ + \frac{fM}{r^3} \left[\frac{1}{2}(A' + B' + C') - \frac{3}{2}(A'a'^2 + B'b'^2 + C'c'^2) \right], \quad (44)$$

аналогичное (31) и (32).

Это выражение для U_2 еще не является окончательным, поскольку движение центра масс тела M определяется следующими компонентами силы:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial X}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial Z},$$

а движение центра масс тела M' — компонентами

$$F_{x'} = \frac{\partial U}{\partial X'}, \quad F_{y'} = \frac{\partial U}{\partial Y'}, \quad F_{z'} = \frac{\partial U}{\partial Z'},$$

где X, Y, Z — координаты центра масс тела M , а X', Y', Z' — координаты центра масс тела M' в неподвижной системе координат. Следовательно, координаты точки O' относительно O суть $X' - X, Y' - Y, Z' - Z$ и

$$r^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2.$$

Теперь необходимо выразить через эти координаты направляющие косинусы, которые входят в выражение (44). Пусть главные оси тела M имеют направляющие косинусы $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3, \nu_3$ относительно этой неподвижной системы координат. Тогда

$$a^2 = \frac{[\lambda_1(X - X') + \mu_1(Y - Y') + \nu_1(Z - Z')]^2}{r^2},$$

$$b^2 = \frac{[\lambda_2(X - X') + \mu_2(Y - Y') + \nu_2(Z - Z')]^2}{r^2},$$

$$c^2 = \frac{[\lambda_3(X - X') + \mu_3(Y - Y') + \nu_3(Z - Z')]^2}{r^2}.$$

Аналогичные выражения можно написать для a'^2, b'^2, c'^2 , обозначая через $\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1$ и т. д. направляющие косинусы главных осей инерции тела M' .

Что касается разложения до членов более высоких порядков в выражении (42) для U , то принципиальных трудностей нет. Методика та же самая, как и применявшаяся при рассмотрении притяжения конечным

телом материальной частицы. В самом общем случае эти слагаемые более высокого порядка вскоре оказываются состоящими из такого большого числа членов, что разложение становится затруднительным. Для большинства астрономических задач достаточны разложения, данные в этой главе. Если для какой-либо частной задачи необходимы дополнительные члены разложений, то они легко могут быть найдены при помощи описанной выше процедуры. В любых таких случаях необходимо использовать выгоды от всех упрощений, которые обусловливаются симметрией и особенностями ориентации в каждой отдельной задаче.

Замечания. Литература

Второй том книги Тиссерана «Трактат по небесной механике» содержит исчерпывающее рассмотрение вопросов, изложенных в этой главе. Полезной книгой для дополнительных справок является книга Томсона и Тэта «Трактат по натуральной философии» (часть II, новое издание), особенно гл. VI.

Глава IV

ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

1. Представление функций. Функцию часто представляют при помощи аналитического выражения через одну или более независимых переменных, о которых можно предположить, что они непрерывным образом изменяются в некотором интервале численных значений (бесконечном или конечном). Такая формула явным образом предписывает систему математических операций над этими переменными, при помощи которых эта функция определяется для любых частных значений переменных. Исчисление бесконечно малых занимается дифференцированием и интегрированием такого рода выражений. Другой формой задания функций является табличная форма, в которой численные значения функции заданы для некоторых определенных значений независимой переменной (или переменных). Значения независимой переменной, если имеется только одна, обычно записываются в столбец, и рядом с каждым из них располагается соответствующее значение этой функции. Такое наглядное представление называется *таблицей*. Независимая переменная называется *аргументом*. Аргумент обычно, но не всегда задается на равных интервалах; разность между двумя последовательными аргументами, взятая независимо от знака, называется *табличным интервалом*, интервалом аргумента или просто интервалом. Когда имеются две независимые переменные, то значения одной из них (называемой вертикальным аргументом) можно написать вдоль левого поля страницы, а другой (горизонтального аргумента) — поперек страницы вверху: тогда значения функции образуют прямоугольную таблицу, известную под названием таблицы с двумя входами. Таблицы с одной независимой переменной называются таблицами с одним входом.

Третьей формой, в которой можно представить функцию, является *графическая*, при которой в противоположность табличной форме представление является непрерывным. Однако эта форма мало применяется в небесной механике, так как она не обеспечивает большую точность.

Табличная форма функции может быть предпочтена аналитической в силу ряда причин. Созданы таблицы логарифмов и тригонометрических функций, экономящие время, так как вычисление отдельных значений при помощи подстановки чисел в бесконечные ряды является слишком трудоемким делом для вычислителя. Эфемериды Солнца, Луны и планет табулируются в ежегодных выпусках «American Ephemeris» и в аналогичных публикациях, так как их вычисление по выражениям, образующим основу этих эфемерид, невыполнимо для большинства лиц, нуждающихся в этих данных. В качестве третьего примера мы имеем таблицы,

представляющие численные решения дифференциальных уравнений, полученные непосредственно численными методами, т. е. без первоначального выражения решения в аналитической форме.

Общераспространенные таблицы логарифмов и тригонометрических функций снабжены настолько малым табличным интервалом, что интерполирование выполняется очень легко; этот процесс известен как *линейное интерполирование*. Такая подробная табуляция не всегда осуществима даже для часто используемых таблиц, и поэтому необходимо иметь более общие методы интерполирования, чем линейный метод, применимые в тех случаях, когда линейное интерполирование привело бы к неточным результатам. Полезно также уметь дифференцировать и интегрировать функции, выраженные в табличной форме, особенно интегрировать такие функции, которые нельзя пронтегрировать аналитически или для которых аналитическое разложение потребовало бы много труда. Эти три операции — интерполирование, численное дифференцирование и численное интегрирование — составляют *исчисление конечных разностей*.

Преимущество аналитических методов заключается в том, что только они могут привести к совершенно общим результатам, т. е. к результатам, о которых известно, что они справедливы для всех значений независимых переменных. Преимущество численных методов состоит в том, что они *всегда применимы*. К тому же численные методы часто менее трудоемки и меньше подвержены ошибкам, чем аналитические методы, и способны дать одинаково высокую точность. Кроме того, небесная механика, подобно любой другой отрасли прикладной математики, стремится к практическим приложениям. Здесь всегда необходимы численные результаты, и для большинства практических приложений промежуточные аналитические выкладки являются совершенно излишними.

2. Разности. Таблица 1 дает значения полинома $x^3 - 3x - 23$ для некоторых целочисленных значений x вместе с их разностями.

Числа f^1 получаются вычитанием подряд каждого значения f из значения, находящегося непосредственно под ним. Другие столбцы вычисляются подобным же образом. Числа f^{11} называются *первыми разностями*, f^{111} — *вторыми разностями* и т. д. Позже мы увидим, что разности последовательных порядков тесно связаны с последовательными производными функции; действительно, можно заметить, что вторые, третьи и четвертые разности в точности равны соответствующим производным в этом частном примере, но в общем случае это не имеет места. Разности какого-либо порядка, как правило, меньше разностей непосредственно предшествующего порядка, т. е. разности *сходятся*. Если функция и все ее производные непрерывны и не обращаются в бесконечность в пределах таблицы, то разности сходятся тем быстрее, чем меньше табличный интервал. Фактически мы можем всегда ускорить эту сходимость как угодно сильно, выбирая интервал достаточно малым (что в данном случае, конечно, потребовало бы нецелочисленных значений x).

Полином является функцией особого рода, обнаруживающей свойства, которые не встречаются обычно в небесной механике. Особое свойство приведенной выше табл. 1 заключается в том, что представление является точным, без каких бы то ни было погрешностей. Таблица 2, дающая склонение Солнца, вычисленное в предположении эллиптического движения Земли, является более характерной для тех

Таблица 1
Полином

x	f	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
-3	-41				
-2	-25	+16	-12		
-1	-21	+4	-6	+6	0
0	-23	-2	0	+6	0
+1	-25	-2	+6	+6	0
+2	-21	+4	+12	+6	0
+3	-5	+16	+18	+6	0
+4	+29	+34	+24	+6	
+5	+87	+58			

разностей выше этого порядка нет. Такими разностями в нашем примере являются разности f^{IX} .

Это свойство накапливания, которым обладают ошибки округления, демонстрируется в табл. 3, представляющей самый худший из возмож-

функций, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем.

Разности в этой таблице склоняются, но медленно и только до определенного порядка, после чего знаки разностей начинают чередоваться. Если мы вычислим разности последующих порядков, то увидим, что они расходятся. Такое поведение разностей вызвано ошибками округления, входящими в f . Каждое значение f , хотя и вычисленное со всей возможной тщательностью, непременно отягощено погрешностью, которая может достигать любой величины между $+0^{\circ},00005$ и $-0^{\circ},00005$. Эти погрешности накапливаются в разностях последовательных порядков до тех пор, пока не начинают играть определяющую роль в том порядке, в котором знаки разностей начинают чередоваться. Никакой пользы в продолжении вычисления

Склонение Солнца

1966	f	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^V	f^VI	f^VII	f^VIII
Февр. 19,75	-11°,2441								
Март 1,75	-7,5520	+3,6921							
11,75	-3,6787	+3,8733	+1812						
21,75	+0,2683	+3,9470	+737	-1075					
31,75	+4,1866	+3,9183	-287	-1024	+51	-14			
Апр. 10,75	+7,9775	+3,7909	-987	+37	-6	+8			
20,75	+11,5454	+3,5679	-1274	-987	+31	-1	-9	+23	
30,75	+14,7971	+3,2517	-287	-956	-14	+13	+14	-11	
Май 10,75	+17,6424	+2,8453	-2230	-932	+24	+6	+16	+3	-2
20,75	+19,9963	+2,3539	-3162	-902	+30	+22	+16	+1	-4
30,75	+21,7829	+1,7866	-4064	-850	+52	+39	+17	-3	-5
Июнь 9,75	+22,9407	+1,1578	-4914	-759	+91	+53	+14	-8	
19,75	+23,4285	+0,4878	-6700	-615	+144	+59	+6		

ных случаев расходимости погрешностей, который только может возникнуть, когда функции непрерывны и правильно вычислены и когда табличный интервал достаточно мал, чтобы обеспечить хорошую сходимость. Вместо самой функции табулированы гипотетические погрешности этой функции.

Эта таблица подсказывает правило, которое можно часто с успехом использовать для контроля вычисленных функций. Вычислим разности функции до такого порядка, при котором знаки разностей начинают чередоваться, и назовем его m -м порядком. Тогда если любая m -я разность по абсолютной величине превосходит 2^{m-1} , то в значении функции наверняка имеется погрешность, большая половины последнего десятичного знака. Обратное утверждение неверно: погрешность, большая половины единицы, не обязательно окажет столь сильное влияние, как мы увидим в следующем разделе.

Исключение из этого правила встречается в том случае, когда табличный интервал выбран настолько большим, что разности не сходятся, как, например, если $\cos x$ протабулирован с интервалом в 180° , начиная с 0° , но таких случаев всегда можно легко избежать путем проб или выяснением общего поведения функции.

При обширных вычислениях редко удается и никогда не бывает эффективным ограничение погрешностей половиной единицы последнего десятичного знака, но это правило легко изменяется, чтобы стать применимым к таким случаям. Если, например, допускают погрешности в 3 единицы последнего знака, то ни одна m -я разность не должна превосходить 3×2^m : вообще для погрешностей в p единиц m -е разности не должны превосходить $p \times 2^m$.

3. Обнаружение случайных ошибок. Под случайной ошибкой подразумевается такая ошибка, которая влияет только на отдельные значения функции, как, например, опечатка или ошибка в вычислениях. Такого рода погрешности, если они не слишком многочисленны, легко обнаружить изучением хода разностей. Чтобы показать влияние такой погрешности, в табл. 4 снова дан полином, табулированный в табл. 1, но значение f , соответствующее $x = +1$, изменено на единицу.

Четвертые разности вместо того, чтобы обратиться в нуль, как это было прежде, образуют особую упорядоченную структуру, в которой легко распознать коэффициенты разложения бинома $(a - b)^4$. Если написать пятые разности, то будет очевидным, что они соответствуют коэффициентам в разложении бинома $(a - b)^5$. Если бы ошибка в функции была равна p единицам вместо 1, то все еще было бы легко распознать эту структуру; каждая из четвертых разностей просто была

Таблица 3
Расходимость погрешностей

ϵ	ϵ_1	ϵ_{II}	ϵ_{III}	ϵ_{VI}	ϵ_V	ϵ_{VI}
$+\frac{1}{2}$						
$-\frac{1}{2}$	-1	+2				
$+\frac{1}{2}$	+1	-4				
$+\frac{1}{2}$	-2	+8				
$-\frac{1}{2}$	-1	+4	-8	-16		+32
$-\frac{1}{2}$	+2					
$+\frac{1}{2}$	+1	-4	+8	+16		
$+\frac{1}{2}$	-2					
$-\frac{1}{2}$	-1	+4				
$-\frac{1}{2}$	+2					
$+\frac{1}{2}$	+1					
$+\frac{1}{2}$						

бы умножена на p . Вообще отдельная погрешность в функции, достигающая p единиц, создает характерную структуру расположения разностей m -го порядка, которая соответствует биномиальным коэффициентам в разложении $p(a - b)^m$. Для более общих типов функций, чем полиномы, эта структура оказывается частично скрытой из-за влияния

Таблица 4
Полином с погрешностью

x	f	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
-3	-41				
-2	-25	+16	-12		
-1	-21	+4	-6	+6	
0	-23	-2	+1	+7	-1
+1	-24	-1	+4	+3	-4
+2	-21	+3	+13	+9	+6
+3	-5	+16	+18	+5	-4
+4	+29	+34	+24	+6	+1
+5	+87	+58			

ошибок округления, что может затруднить обнаружение ошибок малой величины, т. е. погрешностей лишь немного больших, чем ошибки округления; в общем эту структуру тем труднее разглядеть, чем медленнее сходятся разности.

Правило исправления случайных ошибок в функции гласит: Когда в разностях m -го порядка обнаруживается характерная структура, то, если m четное, берут наибольшую m -ю разность, делят ее на число, взятое из нижеследующей таблицы, и прибавляют частное (ближайшее целое число) к значению функции, стоящему на той же строке; если m нечетное, то берут среднее, не обращая внимания на знаки, из двух

наибольших последовательных разностей m -го порядка, приписывают ему знак нижней разности, делят на число из нижеприведенной таблицы и прибавляют частное (ближайшее целое число) к значению функции, стоящему на промежуточной строке. Эти числа с точностью до знака равны наибольшим коэффициентам в биномиальных разложениях порядка m . Полезно сравнить их с числами 2^{m-1} из предыдущего раздела:

m	2	3	4	5	6	7	8	9
Делитель	+2	-3	-6	+10	+20	-35	-70	+126

Чтобы продемонстрировать применение этого правила, приводится табл. 5. Это таблица пятизначных логарифмов с ошибкой в единицу, нарочно введенной в $\lg 50$. Табличный интервал выбран достаточно большим, чтобы сделать разности медленно сходящимися. Влияние ошибок округления в восьмых разностях настолько велико, что почти скрывает характерную структуру, однако остаются следующие две наиболее заметные особенности. Разности постепенно уменьшаются на некотором расстоянии вверх и вниз от самой большой и чередуются по знаку. Деля наибольшую разность, +94, на число, взятое из таблицы, -70, получаем -1 как поправку, которую необходимо прибавить к значению функции 69898. Если теперь построить эту таблицу заново, то мы уви-

дим, что новые восьмые разности будут гораздо гладже, чем ранее: наибольшая разность в области, где они меняют знаки, равна 34.

Этот пример хорошо демонстрирует силу изложенного метода обнаружения случайных ошибок. В большинстве случаев, встречающихся на практике, разности будут сходиться быстрее, а ошибки окажутся

Таблица 5

Логарифмы с погрешностью

x	f	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}	f^{VII}	f^{VIII}
15	17609	+12494							
20	30103	-2803	-1030						
25	39794	+9691	-1773	+550	-480	+257			
30	47712	+7918	-1223	+327	-223	+108	-149		
35	54407	+6695	-896	+212	-115	+49	-59	+90	
40	60206	+5799	-684	+146	-66	+19	-30	+29	-61
45	65321	+5115	-538	+99	-47	+19	+9	+39	+10
50	69898	+4577	-439	+80	-19	+28	-33	-42	-81
55	74036	+4138	-359	+56	-24	-5	+19	+52	+94
60	77815	+3779	-303	+46	-10	+14	-16	-35	-87
65	81291	+3476	-257	+34	-12	-2	+10	+26	+61
70	84510	+3219	-223	+30	-4	+8	-11	-21	-47
75	87506	+2996	-193	+23	-7	-3			
80	90309	+2803	-170						
85	92942	+2633							

большими; обе эти особенности способствуют облегчению в применении метода. Необходимо соблюдать две предосторожности. Если ошибки настолько многочисленны, что характерные структуры хода разностей перекрывают друг друга, то применение метода становится затруднительным или даже невозможным, хотя большая величина и «шероховатость» (отсутствие гладкого хода) разностей указывают тем не менее на присутствие ошибок. Этот метод можно применять только для обнаружения случайных ошибок; систематические ошибки, как, например, ошибки, вызванные отбрасыванием существенных членов в разложении в ряд, не могут быть обнаружены.

4. Прямое интерполирование. Прямыми интерполяциями называется процесс определения численного значения функции посредством ее таблицы для значения независимого переменного, лежащего между

двумя табулированными значениями. Таблица 6 показывает используемые символические обозначения.

Кроме этого, для обозначения $\frac{1}{2}(\delta_{3/2} + \delta_{1/2})$ применяют $\mu\delta_1$; $\mu\delta_0^3$ означает $\frac{1}{2}(\delta_{-1/2}^3 + \delta_{1/2}^3)$ и т. д. Табличный интервал обозначается через w ,

так что $w = x_1 - x_0$, если интервал постоянен. Обычно, но не всегда считают, что аргумент, для которого требуется найти интерполированное значение f , лежит между x_0 и x_1 . Обозначим этот аргумент через x . Тогда $n = (x - x_0)/w$ называется *интерполяционным множителем*, и значение f для аргумента x можно обозначить через f_n . В большинстве обычно применяемых таблиц w является некоторой степенью 10 и может выражаться в любых единицах, как, например, 1 сутки, 0,00001 суток, 0,01 градуса дуги и т. д. Необходимо заметить, что n , наоборот, всегда является отвлеченным числом. При линейном интерполировании, обычно применяемом в тригонометрических таблицах, предполагается, что

$$f_n = f_0 + n\delta_{1/2}. \quad (1)$$

Поскольку $\delta_{1/2} = f_1 - f_0$, то это равносильно следующему уравнению:

$$f_n = f_0 + n(f_1 - f_0) = (1 - n)f_0 + nf_1. \quad (2)$$

Если f нанести на график как ординату относительно абсциссы x , то, поскольку это уравнение является линейным относительно n и так как при $n = 0$ $f_n = f_0$, а при $n = 1$ $f_n = f_1$, это уравнение представляет прямую линию, проходящую через точки f_0 и f_1 . Поэтому процесс линейного интерполирования заменяет функцию рядом прямолинейных отрезков, соединяющих последовательные табличные значения. Если табличный интервал настолько мал, что функция не имеет заметной кривизны между двумя последовательными табличными значениями, то результат линейного интерполирования достаточно точен; в противном случае это не имеет места. Функции, которые широко применяются, как, например, пятизначные значения синусов и тангенсов, могут быть успешно протабулированы с таким малым интервалом, но это не принято делать для функций, имеющих ограниченное применение, или же в случаях, когда требуется много значащих цифр; в таких случаях вместо составления очень обширных таблиц легче применить более общие методы интерполирования.

Поскольку две точки на кривой не могут дать никакой информации об ее кривизне, то, очевидно, необходимо иметь более двух точек для более общего метода интерполирования, чем линейный. Принято проводить гладкую кривую через 3, 4, 5 или более последовательных табличных значений и предполагать, что эта кривая представляет функцию между этими табличными значениями. Гладкую кривую через конечное число точек можно провести бесконечно многими способами;

Таблица 6
Обозначения

Аргумент	f	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
x_{-2}	f_{-2}	$\delta_{-3/2}$	δ_{-2}^2	$\delta_{-3/2}^3$	δ_{-2}^4
x_{-1}	f_{-1}	$\delta_{-1/2}$	δ_{-1}^2	$\delta_{-1/2}^3$	δ_{-1}^4
x_0	f_0	δ_0	δ_0^2	$\delta_{-1/2}^3$	δ_0^4
x_1	f_1	$\delta_{1/2}$	δ_1^2	$\delta_{1/2}^3$	δ_1^4
x_2	f_2	δ_2	δ_2^2	$\delta_{3/2}^3$	δ_2^4

необходимо выбрать способ, который даст простую аналитическую аппроксимацию этой функции. Самая распространенная методика заключается в замене функции полиномом по степеням n . Если используются три точки, то этот полином содержит постоянный член и первую и вторую степени n ; если используются четыре точки, то необходима третья степень и т. д. Этот результат напоминает известное разложение функции в ряд Тейлора, но вместо последовательных производных, входящих в эту формулу, выступают разности последовательных порядков. В качестве примера этого процесса подробно рассматривается случай трех точек, или интерполирование второго порядка.

Пусть три табличных значения $f(x)$ будут f_{-1} , f_0 и f_1 . Полином второй степени имеет следующий вид: $A + Bx + Cx^2$, где A , B и C — постоянные. Их необходимо определить из условия, что кривая должна проходить через f_{-1} , f_0 и f_1 . При $x = 0$ мы имеем непосредственно $A = f_0$. При $x = +1$ и $x = -1$ мы имеем

$$A + B + C = f_1,$$

$$A - B + C = f_{-1}.$$

Вычитание второго уравнения из первого дает

$$2B = f_1 - f_{-1} = f_1 - f_0 + f_0 - f_{-1} = \delta_{1/2} + \delta_{-1/2}.$$

Но поскольку

$$\delta_{-1/2} = \delta_{1/2} - \delta_0^2,$$

то

$$B = \delta_{1/2} - \frac{1}{2} \delta_0^2.$$

Складывая оба уравнения, получаем

$$2A + 2C = f_1 + f_{-1}.$$

Подстановка вместо A его значения f_0 дает

$$\begin{aligned} 2C &= f_1 - 2f_0 + f_{-1} = \\ &= (f_1 - f_0) - (f_0 - f_{-1}) = \\ &= \delta_{1/2} - \delta_{-1/2} = \\ &= \delta_0^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) = f_0 + \left(\delta_{1/2} - \frac{1}{2} \delta_0^2 \right) x + \frac{1}{2} \delta_0^2 x^2 = f_0 + \delta_{1/2} x + \delta_0^2 x (x - 1)/2,$$

или, когда x равно n ,

$$f_n = f_0 + \delta_{1/2} n + \delta_0^2 n (n - 1)/2.$$

Это один пример формулы для интерполирования со вторыми разностями. Формула, включающая влияние третьих или более высоких разностей, может быть найдена аналогичным методом. Формулу можно применять в приведенной выше форме или преобразовать многочисленными способами, используя определения δ и δ^2 через f или группируя члены различными путями. Одной формой, особенно удобной для вычислений в уме, является

$$f_n = f_0 + \left[\delta_{1/2} - \frac{1}{2} (1 - n) \delta_0^2 \right] n.$$

Другая форма, известная как формула Лагранжа, имеет следующий вид:

$$f_n = f_{-1} \left(\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n \right) + f_0 (1 - n^2) + f_1 \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \right).$$

Если $n = \frac{1}{2}$, то она принимает простой вид

$$f_{1/2} = -\frac{1}{8} f_{-1} + \frac{3}{4} f_0 + \frac{3}{8} f_1.$$

Формула Лагранжа обладает кажущимся преимуществом, не требуя разностей, однако сомнительно, является ли это преимущество реальным. Для каждой рукописной таблицы, а также большинства печатных таблиц необходимо вычислить разности перед их применением, чтобы убедиться в их правильности. Как только разности образованы, они обычно могут с успехом использоваться при интерполировании, так как функции от n требуются с меньшим числом значащих цифр, чем само n , тогда как в случае формулы Лагранжа все числовые коэффициенты необходимо брать с той же точностью, что и интерполируемая функция. Кроме того, как это мы увидим дальше, не зная величины разностей, невозможно сказать, сколько значений f требуется в каждом частном случае.

5. Формулы Эверетта и Бесселя. Как только усвоены общие принципы, при помощи которых можно строить интерполяционные формулы, не обязательно рассматривать подробный вывод всех тех формул, которые могут использоваться на практике. Из них в большинстве случаев наиболее полезными оказываются формулы Эверетта и Бесселя.

Формула Эверетта имеет следующий вид:

$$f_n = f_0 + n \delta_{1/2} + E_0^2 \delta_0^2 + E_1^2 \delta_1^2 + E_0^4 \delta_0^4 + E_1^4 \delta_1^4 + \dots,$$

где

$$E_0^2 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}, \quad E_1^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3},$$

$$E_0^4 = -\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$E_1^4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Формула Бесселя имеет вид

$$f_n = f_0 + n \delta_{1/2} + B^2 (\delta_0^2 + \delta_1^2) + B^3 \delta_{1/2}^3 + B^4 (\delta_0^4 + \delta_1^4) + B^5 \delta_{1/2}^5 + \dots,$$

где

$$B^2 = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 2},$$

$$B^3 = \frac{n(n-1) \left(n - \frac{1}{2} \right)}{2 \cdot 3},$$

$$B^4 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$B^5 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2) \left(n - \frac{1}{2} \right)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Число членов, используемых при каждом отдельном применении интерполяционной формулы, зависит от величины погрешности, допустимой в результате, и от величины разностей. Обычно считается допустимым оборвать формулу в том месте, где величина наи-

большего отброшенного члена не превосходит половины единицы последнего десятичного знака значения функции. Крайние значения бесселевых коэффициентов приближенно равны

$$\begin{array}{ll} B^2, & -\frac{1}{16}; \\ B^4, & +\frac{1}{85}; \end{array} \quad \begin{array}{ll} B^3, & \pm \frac{1}{125}; \\ B^5 & \pm \frac{1}{1150}. \end{array}$$

Из них легко выводятся следующие удобные предельные значения разностей, которыми можно пренебречь:

Отбрасываемая разность	Вторая	Третья	Четвертая	Пятая
Наибольшее численное значение	4	60	20	500

Таким образом, если четвертая разность больше 20 и пятая разность меньше 500, то следует применять первые пять членов формулы Бесселя. При использовании формулы Эверетта ограничиваются четным числом членов, так как E_0 и E_1 одного и того же порядка величины. Точность любого четного числа членов формулы Эверетта как раз равна точности того же числа членов формулы Бесселя. Поэтому первые четыре члена формулы Эверетта включают влияние третьих разностей и первые шесть включают влияние пятых разностей. Вообще следует предпочесть формулу Эверетта, когда наивысший порядок учитываемых разностей нечетен, и формулу Бесселя — если он четен; однако можно использовать пятый член формулы Бесселя вместе с первыми четырьмя членами формулы Эверетта, когда необходимо учесть четвертые разности, пренебрегая пятymi.

В тех случаях, когда четвертыми разностями пренебречь нельзя, любая из приведенных формул может быть тем не менее ограничена первыми четырьмя членами при использовании мощного приема, известного как *метод смещения* (метод модифицированных разностей¹⁾), изобретение которого приписывают Лагранжу. Легко видеть, что

$$B^4/B^2 = (n+1)(n-2)/12$$

и что при изменении n между 0 и 1 эта функция меняется в узких пределах со средним значением, равным приблизительно —0,184. Если мы положим

$$M^2 = \delta^2 - 0,184\delta^4,$$

то полученную таким образом вторую модифицированную разность M^2 можно использовать вместо δ^2 в формуле Эверетта или в формуле Бесселя с погрешностью, меньшей половины единицы, если δ^4 меньше 1000. В таких случаях почти всегда следует применять метод смещения.

Вычисление коэффициентов формул Бесселя и Эверетта несколько утомительно, особенно для высших порядков. Поэтому они подробно

¹⁾ См., например, И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, Физматгиз, 1962. — Прим. ред.

табулированы как функции от n . В практических вычислениях можно затратить впустую много труда из-за удержания в этих коэффициентах большего числа знаков, чем требуется на самом деле. Как общее правило, интерполяционные коэффициенты необходимы с тем же числом десятичных знаков, что и число значащих цифр в разностях, на которые они умножаются.

6. Формула Ньютона. Формулы Эверетта и Бесселя известны как центрально-разностные формулы, так как все разности, входящие в них, расположены вблизи центра используемой части таблицы. В другом типе формулы, введенном Ньютоном, используются диагональные разности. Этую формулу можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_n = f_0 + n\delta_{1/2} + \frac{n(n-1)}{2!} \delta_1^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \delta_{3/2}^3 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \delta_2^4 + \\ + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n+m+1)}{m!} \delta_{m/2}^m + \dots, \end{aligned}$$

известном под названием «формула для интерполирования вперед», или в виде

$$\begin{aligned} f_n = f_0 + n\delta_{-1/2} + \frac{n(n+1)}{2!} \delta_{-1}^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \delta_{-3/2}^3 + \\ + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!} \delta_{-2}^4 + \\ + \dots + \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{m!} \delta_{-m/2}^m + \dots, \end{aligned}$$

известном как «формула интерполирования назад».

Формула для интерполирования вперед иногда полезна для интерполяции вблизи начала таблицы, где может не оказаться центральных разностей, а формулу для интерполирования назад можно использовать около конца таблицы. Однако основную ценность эта формула представляет для экстраполяции в связи с интегрированием шаг за шагом (разд. 12). Ее можно также использовать для расширения таблицы, полагая $n = -1$ в формуле для интерполирования вперед или $n = 1$ в формуле для интерполирования назад, однако даже в тех случаях, когда это вообще предпринимается, обычно не следует применять указанный прием больше чем для одного шага из-за быстрого накопления погрешностей. Применение формулы Ньютона для расширения таблицы в точности равносильно допущению, что разности наивысшего порядка, принимаемые во внимание, постоянны. Этот результат можно получить простым переписыванием значения разности самого высокого порядка непосредственно внизу и расширением таблицы вниз и влево при помощи последовательных сложений.

7. Формула Лагранжа для интерполирования на середину. Хотя формула Лагранжа не рекомендуется для общего применения, все же в одном случае ее удобство может перевесить ее недостатки: это случай интерполирования на середину при помощи счетной машины. Формула четырех точек, которую необходимо применять в тех случаях, когда можно пренебречь четвертыми разностями, принимает

очень простой вид

$$f_{1/2} = \frac{1}{16} \left(-f_{-1} + 9f_0 + 9f_1 - f_2 \right),$$

а формула шести точек, используемая, когда отбрасываются шестые разности, имеет вид

$$f_{1/2} = \frac{1}{256} \left(3f_{-2} - 25f_{-1} + 150f_0 + 150f_1 - 25f_2 + 3f_3 \right).$$

8. Обратное интерполирование. Это название дано процессу нахождения численного значения независимой переменной по данному значению функции. Эта проблема является часто весьма трудной, если применяются аналитические методы, но при помощи численных методов она оказывается лишь немногого более трудной, чем прямое интерполирование. Формулу можно легко вывести, разрешая любую интерполяционную формулу относительно n и выражая этим n через f_n, f_0 и разности. Но если эта формула оборвана на разностях какого-либо порядка, например j -го, то легко видеть, что n необходимо определить решением уравнения j -й степени, которое может оказаться очень трудным. Поэтому лучше прибегнуть к помощи *метода итерации*, частного случая *метода последовательных приближений*. При использовании этого мощного численного метода формулу преобразуют таким образом, что подстановка в нее приближенного значения результата дает более точное значение, и этот процесс можно повторить сколько угодно раз. В настоящей задаче приближенное значение n определяется при помощи линейной обратной интерполяции. Это значение n используется для получения приближенных значений интерполяционных коэффициентов, которые могут быть затем использованы для определения более точного значения n . Например, формулу Бесселя можно применить в следующем виде:

$$n\delta_{1/2} = f_n - f_0 - B^2 (\delta_0^2 + \delta_1^2) - B^3 \delta_{1/2}^3,$$

где сумму $\delta_0^2 + \delta_1^2$ следует заменить на $M_0^2 + M_1^2$, если четвертые разности ощущимы и не слишком велики, чтобы можно было применить метод смещения. Пренебрегая членами, содержащими B^2 и B^3 , в первом приближении можно легко разрешить это уравнение относительно n . Используя это значение n для определения B^2 и B^3 , можно снова разрешить это уравнение относительно n и это новое значение n употребить для получения улучшенных значений B^2 и B^3 . Этот процесс следует повторять до тех пор, пока значение n не перестанет изменяться при дальнейших повторениях.

При обратной интерполяции необходима значительная осторожность. Значение n нельзя получать с большим числом значащих цифр, чем содержащееся в $\delta_{1/2}$. Если написать дополнительные цифры, то они могут ввести вычислителя в заблуждение, так как у него может создаться впечатление, что он получает большую точность, чем имеет на самом деле. Следует всегда быть настороже в отношении «сфабрикованных десятичных знаков», которые могут быть оправданы лишь в очень редких случаях. Хорошо известный пример — это те затруднения, которые возникают при попытках определения малого угла по его косинусу. Один из путей преодоления этой трудности состоит в вычислении первой разности с большим числом десятичных знаков. Однако обычно лучше избежать такого затруднения посредством целесообразного преобразования

ния. Вместо косинуса, например, можно использовать синус-вераус¹⁾ или \sin^2 половинного аргумента.

9. Погрешность интерполированной величины. Выше было указано, что максимальная погрешность значения функции, которое вычислено со всей возможной тщательностью, равна $\pm 0,5$ единицы последнего десятичного знака. Кроме того, все значения погрешности внутри этих пределов равновозможны, это значит, что около половины погрешностей широкого ряда значений лежит в пределах $\pm 0,25$, остальные погрешности расположены вне этих пределов. Этот факт можно выразить утверждением, что вероятная ошибка равна $\pm 0,25$. Еще одна погрешность вносится процессом интерполяции. Если вторые и более высокие разности равны нулю и если проинтерполированная величина округлена с точностью до того же числа десятичных знаков, что и табличное значение, то вносится еще одна аналогичная погрешность. В этом случае максимальная погрешность интерполированной величины равна $\pm 1,0$, а вероятная ошибка равна приблизительно $\pm 0,3$. Немного большую точность можно получить удержанием дополнительных цифр в интерполированной величине. Если это сделано, то погрешность интерполированной величины лишь немножко больше погрешности табличного значения. Однако, вообще говоря, дополнительные цифры не стоят того, чтобы затруднять себя их записыванием. Они не являются значащими цифрами в любом смысле этого слова; первый лишний десятичный знак отягощен погрешностью в 5 единиц, а второй — совершенно фиктивен.

На практике вторые разности обычно отличны от нуля, и если их отбрасывают, то вводится дополнительная погрешность, которая в максимуме может достигать $1/8$ второй разности. Поскольку обычно принято пренебрегать влиянием вторых разностей и разностей более высоких порядков, если они меньше 0,5, то можно установить в качестве общего правила, что максимальная погрешность интерполированной величины несколько больше $\pm 1,5$ единицы, а ее вероятная ошибка близка к $\pm 0,5$ единицы.

Погрешность величины, полученной при помощи обратного интерполяирования, определяется другими законами. Если погрешности табличных функций удерживаются в пределах $\pm 0,5$, то погрешность любой первой разности лежит в пределах $\pm 1,0$, а погрешность результата будет заключена в пределах $\pm 1/\delta$, если влияние разностей выше первого порядка неощущимо.

10. Численное дифференцирование. Мы видели в разд. 2, что разности функции последовательных порядков тесно связаны с последовательными производными. Чтобы найти точное выражение для производных через разности, необходимо лишь продифференцировать любую из интерполяционных формул столько раз, сколько потребуется. Мы имеем

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{dx},$$

но

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{w}$$

1) Обращенный синус, или синус-вераус, аргумента a определяется как $\text{vers } a = -1 - \cos a$. — Прим. ред.

и, следовательно,

$$w \frac{df}{dx} = \frac{df}{dn} .$$

Аналогично

$$w^2 \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{dn^2} \quad \text{и т. д.}$$

Например, дифференцирование формулы Бесселя дает

$$w \frac{df}{dx} = \delta_{1/2} + (\delta_0^2 + \delta_1^2) \left(\frac{2n-1}{4} \right) + \delta_{1/2}^3 \left(\frac{3n^2 - 3n - \frac{1}{2}}{6} \right) + \dots$$

Другие формы можно получить при помощи перегруппировки членов и простых подстановок. Обычно производная требуется либо для точки табулирования, либо для средней точки. Далее следуют некоторые наиболее полезные формулы:

$$w \left(\frac{df}{dx} \right)_0 = \mu \delta_0 - \frac{1}{6} \mu \delta_0^3 + \frac{1}{30} \mu \delta_0^5 + \frac{1}{140} \mu \delta_0^7 + \frac{1}{630} \mu \delta_0^9 - \frac{1}{2772} \mu \delta_0^{11} + \dots, \quad (3)$$

$$w^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_0 = \delta_0^2 - \frac{1}{12} \delta_0^4 + \frac{1}{90} \delta_0^6 - \frac{1}{560} \delta_0^8 + \frac{1}{3150} \delta_0^{10} - \dots, \quad (4)$$

$$w \left(\frac{df}{dx} \right)_{1/2} = \delta_{1/2} - \frac{1}{24} \delta_{1/2}^3 + \frac{3}{640} \delta_{1/2}^5 - \frac{5}{7168} \delta_{1/2}^7 + \frac{35}{294912} \delta_{1/2}^9 - \dots, \quad (5)$$

$$w^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{1/2} = \mu \delta_{1/2}^2 - \frac{5}{24} \mu \delta_{1/2}^4 + \frac{259}{5760} \mu \delta_{1/2}^6 - \frac{3229}{322560} \mu \delta_{1/2}^8 + \dots \quad (6)$$

Таблица 7 иллюстрирует принцип численного дифференцирования.

Значения $\sin x$

Таблица 7

x	$f = \sin x$	f'	f''	f'''
-30°	-0,50000	+15798		
-20	-0,34202	+16837	+1039	-511
-10	-0,17365	+17365	+528	-528
0	0,00000	+17365	0	-528
+10	+0,17365	+17365	-528	-511
+20	+0,34202	+16837	-1039	
+30	+0,50000	+15798		

При $x = 0$ и $n = 0$ мы имеем

$$\pm 10^\circ \frac{df}{dx} = +0,17365 + 0,00088 = +0,17453.$$

При изучении исчисления бесконечно малых обычно не обязательно рассматривать вопрос о том, в каких единицах может быть выражена

функция или ее независимая переменная, но при вычислительной работе необходимо всегда помнить об этом. Производная от функции принимает различные численные значения в соответствии с применяемыми единицами. В рассмотренном примере аргумент x выражен в градусах дуги. Следовательно, мы можем сказать, что значение производной df/dx при $x=0$ равно 0,17453 на 10° , или 0,017453 на 1° , или 1,00000 на 1 рад (вспоминая, что 1 рад равен $57^\circ,29578$) или, для краткости, просто 1,00000.

11. Специальные формулы. Особенно полезную формулу формулы (3) можно получить, подставляя вместо разностей их значения, выраженные через значения функций. Таким образом, если пятые разности меньше 15, то

$$12w \left(\frac{df}{dx} \right)_0 = f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2, \quad (7)$$

и, если седьмые разности меньше 70, имеем

$$60w \left(\frac{df}{dx} \right)_0 = -f_{-3} + 9f_{-2} - 45f_{-1} + 45f_1 - 9f_2 + f_3. \quad (8)$$

12. Численное интегрирование. В небесной механике необходимо рассмотреть численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В наиболее распространенном случае, которому посвящена следующая глава, интегрируется система трех дифференциальных уравнений второго порядка, чтобы определить прямоугольные координаты планеты или кометы в функции времени. Этот раздел посвящен рассмотрению двух более простых примеров.

Применяемый метод в точности противоположен численному дифференцированию, при котором разности функции используются для вычисления производных и даются соответствующие формулы. В настоящей задаче сначала вычисляются производные от функции, а их разности образуются для контроля. Получающаяся при этом таблица затем расширяется налево при помощи *суммирования*, т. е. путем последовательного сложения следующих друг за другом значений производной с некоторым *начальным значением*. Окончательные значения интегралов вычисляются по суммам при помощи формулы. Формулы для этой цели можно вывести, интегрируя интерполяционную формулу, в которой n рассматривается как независимая переменная. Эти необходимые формулы даны ниже; в них первая сумма обозначена через $I^1 f$, а вторая сумма — через $I^2 f$.

$$\int^{1/2} f(x) dx = w \left[I^1 f_{1/2} + \frac{1}{24} \delta_{1/2} - \frac{17}{5760} \delta_{1/2}^3 + \frac{367}{967680} \delta_{1/2}^5 - \dots \right], \quad (9)$$

$$\int^0 f(x) dx^2 = w^2 \left[I^2 f_0 + \frac{1}{12} f_0 - \frac{1}{240} \delta_0^3 + \frac{31}{60480} \delta_0^5 - \dots \right]. \quad (10)$$

В качестве первого примера рассмотрим $y = \int (3x^2 - 3) dx$. Известно, что результат интегрирования имеет вид $y = x^3 - 3x + C$, где C — некоторая произвольная постоянная. Слово *произвольная* означает, что какая бы постоянная ни была выбрана, результат является точным с математической точки зрения. Однако следует заметить, что нельзя получить никакого численного значения y , пока не будет известна определенная величина постоянной C . В физических проблемах постоян-

ные интегрирования определяются начальными условиями, которые в этом примере сводятся просто к численному значению y для некоторого частного значения x . (При двойном интегрировании требуется либо два значения y , либо одно значение y и одно значение его первой производной.) В рассматриваемой задаче начальное условие находится в нашем распоряжении; мы выберем его так, чтобы получить полином из разд. 2, а именно $x^3 - 3x - 23$.

Сначала вычисляем несколько значений $3x^2 - 3$, для которых затем составляем разности. Результаты приводятся в табл. 8, где еще необходимо заполнить столбец первых сумм I_f .

Таблица 8

Численное интегрирование

x	I_f	f	f^I	f^{II}	v	v^I	v^{II}	v^{III}
-3	-30,5	+24	-15		-31,125			
-2	-21,5	+9	-9	+6	-21,875	+9,25	-9	
-1	-21,5	0	-3	+6	-21,625	+0,25	-3	+6
0	-24,5	-3	+3	+6	-24,375	-2,75	+3	+6
+1	-24,5	0	+9	+6	-24,125	+0,25	+9	+6
+2	-15,5	+9	+15	+6	-14,875	+9,25	+15	+6
+3	+8,5	+24	+21	+6	+9,375	+24,25	+21	+6
+4	+53,5	+45	+27	+6	+54,625	+45,25		
+5		+72						

Очевидно, что значения I_f , полученные суммированием, будут находиться на половинных строках, и поэтому требуется начальное значение, соответствующее некоторому значению аргумента на половинной строке. Значение y для $x = +0,5$, определенное непосредственной подстановкой, равно -24,375. Значение первой суммы I_f в этой же точке определяется формулой (9). Таким образом

$$-24,375 = w \left\{ I_{f_{1/2}} + \frac{1}{24} (+3) \right\}$$

и поскольку мы имеем $w = 1$, то $I_{f_{1/2}} = -24,5$. Внося это значение в таблицу, легко расширить последнюю сколь угодно далеко в любом направлении. По этим значениям I_f соответствующие значения y можно найти по формуле (9). Они приводятся справа в табл. 8 вместе с их разностями. Если эту таблицу из y проинтерполировать на середину, то полученные результаты будут согласовываться с таблицей, помещенной в разд. 2.

Этот первый пример отличается от интегрирования уравнений движения планеты, кометы или спутника по орбите в двух важных отношениях. Во-первых, результаты являются точными, не отягощеннымми ошибками округления. Во-вторых, значения интегрируемой функции

могно было бы все вычислить заранее. При интегрировании уравнений движения этого сделать нельзя, так как интегрируемая функция может быть определена только после того, как станет известным значение интеграла, причем от шага к шагу необходимо переходить путем экстраполяции с последовательными приближениями на каждом шаге. На любом этапе вычислений таблица значений вторых сумм $\text{II}f$ экстраполируется на один шаг в предположении, что разности некоторого порядка (обычно вблизи шестого) постоянны. Затем вычисляется соответствующее значение y и проверяется, дает ли оно экстраполированное значение f ; если нет, то это значение исправляется. Чтобы иллюстрировать этот процесс, мы проинтегрируем уравнения движения некоторой гипотетической планеты с пренебрежимо малой массой, которая движется по орбите только под действием притяжения Солнца от перигелия к афелию. Известно, что эта орбита является эллипсом. Пусть большая полуось эллипса равна 2 а. е., а эксцентриситет равен 0,2. Примем плоскость орбиты за плоскость отсчета xy и направим ось X в перигелий. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 \frac{y}{r^3},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, а k есть гауссова постоянная, равная 0,017 202 098 95.

Известно, что эти уравнения справедливы при фиксированном значении k , если x , y и r измеряются в астрономических единицах, а t измеряется в эфемеридных сутках. Эмпирическим путем найдено, что для орбиты такого размера и формы нужную сходимость разностей дает табличный интервал в 20 суток, но для экономии места при печатании разностей в этом примере используется интервал в 10 суток. Таким образом, величина $w^2 = 100$ будет множителем, необходимым для превращения вторых сумм для x и y в x и y . Однако оказывается несколько неудобным умножать $-x/r^3$ и $-y/r^3$ на малый множитель k^2 и после этого их вторые суммы — на 100. Лучше сохранить $\text{II}f_x$ и $\text{II}f_y$ с тем же порядком величины, что и порядок x и y , что легко сделать, выбирая уравнения, подлежащие интегрированию, в следующем виде:

$$f_x = -w^2 k^2 \frac{x}{r^3}, \quad (11)$$

$$f_y = -w^2 k^2 \frac{y}{r^3}, \quad (12)$$

где множитель $w^2 k^2$ равен 0,0295 9122 для 10-дневного интервала.

Таблица 9
Начальные значения

t	t	u	$\cos u$	$\sin u$	x	y
-30	-10,4539	-13,0393	+0,974216	-0,225620	+1,54843	-0,44212
-20	-6,9693	-8,7033	+0,988485	-0,151318	+1,57697	-0,29652
-10	-3,4846	-4,3547	+0,997113	-0,075931	+1,59423	-0,14879
0	0,0000	0,0000	+1,000000	0,000000	+1,60000	0,00000
+10	+3,4846	+4,3547	+0,997113	+0,075931	+1,59423	+0,14879
+20	+6,9693	+8,7033	+0,988485	+0,151318	+1,57697	+0,29652
+30	+10,4539	+13,0393	+0,974216	+0,225620	+1,54843	+0,44212

Поскольку начало счета времени находится в нашем распоряжении, то мы принимаем за него момент прохождения через перигелий. Две постоянные интегрирования непосредственно получаются из размеров и ориентации орбиты. Мы имеем $x_0 = r_0 = a(1 - e) = 1,6$ а. е. и $y_0 = 0$. За другие две постоянные мы выбираем wkx_0 и wky_0 ; $wkx_0 = 0$, поскольку $x_0 = 0$, а $wky_0 = wka^{1/2}r^{-1}(1 - e^2)^{1/2} = 0,1489745$. Чтобы начать интегрирование, удобно вычислить семь последовательных значений f_x и f_y . Среднее движение в градусах дуги за сутки равно $57^\circ,2957795 ka^{-3/2} = 0^\circ,348464933$; это значение среднего суточного движения используется для получения значений средней аномалии. Эксцентрическая аномалия определяется при помощи уравнения Кеплера, а x и y — по формулам

$$x = a(\cos u - e),$$

$$y = a(1 - e^2)^{1/2} \sin u.$$

По этим значениям x и y мы сначала находим r , затем $r^{1/3}$, потом $w^2 k^2 r^{3/2}$ и, наконец, f_x и f_y . По этим значениям составляют первые семь строк табл. 10 и 11, оставляя столбцы сумм ${}^{II}f$ и ${}^I f$ пока свободными для заполнения в дальнейшем.

Начальные значения ${}^{II}f_0$ и ${}^I f_{1/2}$ получаются по формулам следующего вида:

$${}^{II}f_0 = x_0 - \frac{1}{12}f_0 + \frac{1}{240}\delta_0^2 - \frac{31}{60480}\delta_0^4, \quad (13)$$

$${}^I f_{1/2} = wkx_0 + \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{12}\mu\delta_0 - \frac{11}{720}\mu\delta_0^3 + \frac{191}{60480}\mu\delta_0^5, \quad (14)$$

причем $\mu\delta_0 = \frac{1}{2}(\delta_{-1/2} + \delta_{1/2})$, с двумя аналогичными уравнениями для y и y' . Теперь эти таблицы можно расширить по усмотрению вниз и налево до $t = 40$.

Следующий шаг состоит в вычислении f_x и f_y для $t = 40$. Для этого необходимы значения x и y . Предварительные значения x и y можно найти по формуле (10), экстраполируя необходимые для этого значения в таблицах при переписывании значения разности f^V в две ближайшие нижние строки. Значения x и y , полученные таким путем, достаточно точны, чего, однако, нельзя сказать о разностях, которые вписаны по усмотрению при экстраполяции и должны быть перевычислены после того, как значения f_x и f_y станут известны. Вместо формулы (10) удобнее воспользоваться формулой, которая определяет предварительные значения x и y , выражая их через уже известные диагональные разности. Такого рода формулу можно получить, дважды интегрируя формулу Ньютона для интерполирования назад. После небольших преобразований мы находим следующую формулу:

$$\begin{aligned} x_0 = {}^{II}f_0 + \frac{1}{12}f_{-1} + \frac{1}{12}\delta_{-3/2} + 0,0791667\delta_{-2} + 0,075\delta_{-5/2} + \\ + 0,07135\delta_{-3}^4 + 0,06828\delta_{-7/2}^5 + 0,065\delta_{-4}^6 + 0,06\delta_{-9/2}^7 \end{aligned} \quad (15)$$

с точностью, достаточной для большинства практических приложений.

Формула для интегрирования вперед, применяемая для интегрирования назад, может быть получена из этой формулы простой переменной знаков у всех нижних индексов и коэффициентов членов нечетного порядка. Результаты, полученные применением этой формулы, исполь-

Таблица 10

Интегрирование для x

t	Πf_x	$I f_x$	f_x	f_x^I	f_x^{II}	f_x^{III}	f_x^{IV}	f_x^V
-30			-109729	-3220				
-20			-112949	-1975	+1245			
-10			-114924	-667	+1308	+63	-37	
0	+1,6009638	-57796	-115591	+667	+1334	-26	-52	+15
10	+1,5951842	-172720	-114924	+1975	+1308	-63	-37	-7
20	+1,5779122	-285669	-112949	+3220	+1245	-107	-44	+15
30	+1,5493453	-395398	-109729	+4358	+1138	-136	-29	+8
40	+1,5098055	-500769	-105371	+5360	+1002	-157	-21	+8
50	+1,4597286	-600780	-100011	+845	-170	-13	+8	
...	
500	-2,3933823	...	+51314	...	-45	...	+1	...
510	-2,3993150	-59327	+51365	+51	-44	+1	-2	-3
520	-2,4001112	-7962	+51372	+7	-45	-1		
530	-2,3957702	+43410	+51334	-38				
540	-2,3862958	+94744	+51253					

Таблица 11

Интегрирование для y

t	Πf_y	$I f_y$	f_y	f_y^I	f_y^{II}	f_y^{III}	f_y^{IV}	f_y^V
-30			+31331	-10093	-419			
-20			+21238	-10512	-214	+205		
-10			+10726	-10726	0	+214	+9	-9
0	0,0000000	+1488848	0	-10726	-214	+214	0	-9
10	+0,1488848	+1478122	-10726	-10512	+214	+205	-9	-15
20	+0,2966970	+1456884	-21238	-10093	+419	-181	-24	-3
30	+0,4423854	+1425553	-31331	+600	+754	+154	-27	-11
40	+0,5849407	+1384729	-40824	-9493	+754	+116	-38	+4
50	+0,7234136	+1335166	-49563	-8739	+870	-34	-34	-4
...	-7869		+82		...	
500	+0,1642454	-3521	...	-7	...	+3	...	
510	+0,0650618	-991836	+2128	-2	+5	+1	-4	
520	+0,0342611	-1393	+2126	+2	+4			
530	-0,1335107	-993229	+733	+2128				
540	-0,2324742	-992496	+2861					
		-989635	+4993					

зуются для того, чтобы начать третью таблицу, которая содержит x , y и r^2 . Если в распоряжении имеется таблица, дающая $1/r^3$ по аргументу r^2 , то ничего больше записывать не нужно; $1/r^3$ можно набрать на клавиатуре вычислительной машины, умножить на $w^2 k^2$, произведение перенести на клавиатуру и умножить сначала на $-x$, затем на $-y$, получая значения f_x и f_y , которые вносятся в таблицы интегрирования. Вычислитель быстро научится на опыте оценивать, имеет ли смысл записывать значения $1/r^3$ и вычислять для контроля разности этих величин. Может даже потребоваться вычисление разностей x и y , если вычислитель склонен допускать большое количество ошибок. Во всяком случае, единственный контроль всей работы в целом дается разностями в таблицах интегрирования; необходимо особо заботиться о том, чтобы эти разности были правильно записаны. Из-за накопления ошибок округления последний десятичный знак x и y становится неверным после нескольких шагов интегрирования, и его обычно разрешается отбрасывать.

Записав значения f_x и f_y для $t = 40$ в таблицы интегрирования, можно вписать диагональные разности вверху и направо, но прежде чем вписывать диагональные разности с левой стороны, необходимо проверить предварительные значения x и y при помощи более точной формулы

$$x_0 = II f_0 + \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} \delta_{-1}^2 - \frac{1}{240} \delta_{-3/2}^3 - 0,00365 \delta_{-2}^4 - 0,0031 \delta_{-5/2}^5 - 0,003 \delta_{-3}^6. \quad (16)$$

Если новые значения x и y отличаются от предварительных значений на половину единицы или более, то их следует исправить и проверить значения f_x и f_y , чтобы выяснить, не нуждаются ли также они в исправлении. Если это необходимо, то в таблицу интегрирования следует вписать исправленные значения f_x и f_y , исправить разности и снова применить формулу (16). Вообще табличный интервал следует выбрать таким, чтобы предварительные значения x и y нуждались в исправлении на несколько единиц последнего десятичного знака, и достаточно малым, чтобы предварительные значения f_x и f_y лишь изредка требовали изменения.

Когда получены окончательные значения f_x и f_y , таблицы можно расширить налево, получая значения вторых сумм $II f_x$ и $II f_y$ для $t = 50$. Этим завершается первый шаг интегрирования. Второй шаг подобен первому; и правила для любого шага можно свести к следующим:

1. Завершив заполнение диагонали таблиц интегрирования, найти при помощи формулы (15) предварительные значения x и y .
2. Вычислить f_x и f_y по дифференциальным уравнениям и записать их в таблицы, вписывая разности вверх и направо.
3. Проверить x и y по формуле (16); исправить их, если необходимо, и снова проверить f_x и f_y . Затем закончить эту диагональ таблиц.

В приведенном примере табличный интервал настолько мал, что вряд ли необходим этап 3. Такой малый интервал дает выигрыш при вычислении одного шага, но требует большего числа шагов, чем необходимо, а потому малый интервал не дает экономии труда вычислителя в целом. Кроме того, накопление ошибок в последнем знаке в этом случае больше обычного.

Мы не приводим здесь полных таблиц интегрирования, а только несколько строк начала и конца интегрирования.

13. Накопление ошибок при численном интегрировании. В общем невозможно определить, какой величины ошибка накапливается при интегрировании, однако при помощи теории ошибок можно установить, какую вероятную ошибку следует ожидать после любого числа шагов. Тем не менее для примера из предыдущего раздела теория эллиптического движения дает возможность точного определения этой погрешности. Точные координаты и скорости в афелии найдены равными $x = -2,4$ а. е., $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -0,5773503$ а. е. за эфемеридные сутки. Эта теория также дает время прохождения через перигелий, равное $t = 516,551259$. Можно использовать формулы (13) и (14) для получения координат и компонентов скорости для нескольких дат, интерполируемых затем на этот момент. В результате получается

$$x = -2,3999888, \quad w_k x = +0,0000007, \quad \dot{x} = +0,0000041,$$

$$y = -0,0000047, \quad w_k y = -0,0993166, \quad \dot{y} = -0,5773516.$$

Легко видеть, что погрешности в значениях x и y больше погрешностей в \dot{x} и \dot{y} . Этого можно было ожидать, так как погрешность в f на каком-либо шаге интегрирования создает равную погрешность во всех последующих значениях f , тогда как соответствующая погрешность в \ddot{f} возрастает на эту величину при каждом шаге.

Общая теория накопления погрешностей при численном интегрировании указывает, что после n шагов вероятная ошибка двойного интеграла равна $0,1124 n^{3/2}$ (в единицах последнего десятичного знака). Это означает, что при большом числе примеров около половины погрешностей будет больше этого значения, а половина — меньше. В рассматриваемом примере $n = 52$, что дает значение 42 для вероятной ошибки x и y . Обе фактические ошибки больше этой вероятной ошибки, и этому не следует удивляться отчасти из-за того, что общая теория применима только в том случае, когда интегрирование выполнено для ряда обращений планеты, отчасти из-за того, что двух примеров недостаточно для проверки любой теории ошибок.

Применение приведенного выше выражения для вероятной ошибки даст возможность программисту решить перед началом интегрирования, с каким числом десятичных знаков следует проводить работу. Допустим, например, что необходимо выполнить численное интегрирование для астероида на 10 лет с 10-дневным интервалом, т. е. для 365 шагов или на 183 шага в каждую сторону, если интегрирование начинается в середине дуги орбиты. Вероятная ошибка после 183 шагов равна приблизительно 280. Предположим, далее, что вероятная ошибка в $0,1$, или $0,0000005$ рад, является наибольшей, которую можно допустить. Сравнение этого значения с 280 показывает, что при вычислениях необходимо девять десятичных знаков.

Этот критерий необходимо применять всегда перед началом любого интегрирования. Иначе программист либо получит недопустимые погрешности в своей работе, либо затратит много бесполезного труда, оперируя с лишними десятичными знаками.

Общая теория накопления погрешностей находит важное приложение к ошибкам оскулирующих кеплеровых элементов орбиты, полученным при помощи численного интегрирования. Ею доказано, что средняя ошибка средней долготы в орбите пропорциональна числу шагов в степени $3/2$, тогда как средние ошибки остальных пяти элементов про-

порциональны квадратному корню из числа шагов. Это верно как в том случае, когда эти элементы получены непосредственно интегрированием, так и в том, когда они определены после него при помощи преобразования прямоугольных координат и компонент скоростей.

14. Символические операторы. Все формулы, приводившиеся до сих пор в этой главе, а также большинство других можно вывести очень элегантным и простым способом при помощи символьических операторов, которые мы рассмотрим в этом разделе. Однако сначала мы сделаем несколько замечаний относительно интерполяирования с более общей точки зрения, чем ранее.

Пусть значения какой-либо функции $f(x)$ заданы для n дискретных значений x : x_1, x_2, \dots, x_n , которые не обязательно составляют арифметическую прогрессию, а могут быть какими угодно значениями x . Рассмотрим следующий полином:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = & \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} f(x_2) + \\ & + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} f(x_n).\end{aligned}$$

Очевидно, $\varphi(x) = f(x_1)$ при $x = x_1$, поскольку все коэффициенты обращаются в нуль, за исключением одного коэффициента, умноженного на $f(x_1)$, который становится равным единице. Аналогично $\varphi(x) = f(x_2)$ при $x = x_2$ и т. д. Этот полином называется интерполяционной формулой Лагранжа и представляет собой обобщенный вид формулы, приведенной ранее под тем же названием.

Частное

$$\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

называется первой разделенной разностью функции $f(x)$; для краткости мы обозначаем ее следующим символическим обозначением: $[k, k+1]$. Вторая разделенная разность обозначается $[k, k+1, k+2]$ и дается формулой

$$[k, k+1, k+2] = \frac{[k+1, k+2] - [k, k+1]}{x_{k+2} - x_k}.$$

Аналогичным образом p -я разделенная разность дается формулой

$$[k, k+1, \dots, k+p] = \frac{[k+1, k+2, \dots, k+p] - [k, k+1, \dots, k+p-1]}{x_{k+p} - x_k}.$$

Мы можем расширить это понятие разделенных разностей, чтобы включить случай, когда x не является одним из дискретных значений x_1, x_2, \dots, x_n . Тогда мы можем написать

$$[x, 1] = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

или еще короче

$$[x, 1] = \frac{f_1 - f}{x_1 - x},$$

откуда

$$f = f_1 + [x, 1](x - x_1).$$

Аналогично

$$[x, 1, 2] = \frac{[1, 2] - [x, 1]}{x_2 - x},$$

откуда

$$[x, 1] = [1, 2] + [x, 1, 2](x - x_2),$$

и вообще

$$\begin{aligned} f(x) = f_1 + (x - x_1)[1, 2] + (x - x_1)(x - x_2)[1, 2, 3] + \dots \\ + (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})[1, 2, \dots, n] + R(x), \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)[x, 1, 2, \dots, n].$$

Интерполяционный полином Лагранжа принимает те же значения, что и функция $f(x)$, для $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, и поэтому имеет те же самые разделенные разности в этих точках. Теперь $\varphi(x)$ является полиномом $(n-1)$ -й степени, и n -я разделенная разность такого полинома равна нулю, как это можно показать методом индукции. Следовательно, то же верно и для n -й разделенной разности функции $f(x)$, и

$$f(x) = \varphi(x) + R(x).$$

Поскольку $f(x) = \varphi(x)$ для $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, то при этих значениях $x R(x) = 0$. Следовательно, $(n-1)$ -я производная от $R(x)$ равна нулю, по крайней мере для одного значения x в интервале (x_1, x_n) .

Теперь, дифференцируя $n-1$ раз, имеем

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)! [1, 2, \dots, n] + R^{(n-1)}(x).$$

Если ξ есть значение x , для которого $R^{(n-1)}(x) = 0$, то

$$f^{(n-1)}(\xi) = (n-1)! [1, 2, \dots, n],$$

откуда

$$[1, 2, \dots, n] = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}$$

■

$$[x, 1, 2, \dots, n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Для любого значения x найдется некоторое значение ξ , для которого справедливо это уравнение.

Теперь мы можем написать $R(x)$ в следующем виде:

$$R(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

Это выражение показывает, что если значения x_1, x_2, \dots, x_n образуют арифметическую прогрессию, то $R(x)$ имеет минимальное значение, когда x лежит в центре интервала (x_1, x_n) . Кроме того, для любых значений x_1, x_2, \dots, x_n $R(x)$ принимает меньшие значения, когда x находится внутри интервала (x_1, x_n) , чем в том случае, когда x лежит вне его.

Если мы ограничиваемся представлением функции $f(x)$ на интервале (x_1, x_n) полиномом $(n-1)$ -й степени, то мы используем формулу (17), отбрасывая остаточный член $R(x)$, и получаем интерполяционную формулу Ньютона.

Если эта функция табулирована для значений x , образующих арифметическую прогрессию, что обычно имеет место в астрономии, то имеются три общепринятых обозначения для разностей, которые показаны в табл. 12. Для центральных разностей нижние индексы одинаковы

Таблица 12
Обозначения для разностей

Центральные разности	Восходящие разности	Нисходящие разности
f_{-3} $\delta_{-5/2}$	f_{-3} Δ_{-3}	f_{-3} ∇_{-2}
f_{-2} $\delta_{-3/2}$	f_{-2} Δ_{-2}	f_{-2} ∇_{-1}
f_{-1} $\delta_{-1/2}$	f_{-1} Δ_{-1}	f_{-1} ∇_0
f_0 $\delta_{1/2}$	f_0 Δ_0	f_0 ∇_1
f_1 δ_1^2	f_1 Δ_1^2	f_1 ∇_2^2
f_2 $\delta_{3/2}^2$	f_2 Δ_2^2	f_2 ∇_3^2
f_3 $\delta_{5/2}^2$	f_3 Δ_3^2	f_3 ∇_4^2
f_4 δ_4^2	f_4	f_4

вдоль горизонтальной строки, для восходящих разностей — по восходящей диагонали, а для нисходящих разностей — по нисходящей диагонали. В предыдущих разделах мы применяли только обозначения для центральных разностей. Мы имеем, например,

$$\delta_{1/2} = \Delta_0 = \nabla_1,$$

$$\delta_1^2 = \Delta_0^2 = \nabla_2^2,$$

и, как и ранее в этой главе,

$$\begin{aligned}\delta_{1/2} &= f_1 - f_0, \\ \delta_0^2 &= \delta_{1/2} - \delta_{-1/2} = f_1 - 2f_0 + f_{-1}, \\ \mu\delta_0 &= \frac{1}{2}(\delta_{1/2} + \delta_{-1/2}).\end{aligned}$$

Если, как и прежде, мы обозначим интервал аргумента через w , μ последовательных табличных аргументов через x_1, x_2, \dots, x_n и любое число из интервала (x_1, x_n) — через x , то общий интерполяционный множитель θ определяется формулой

$$x = x_1 + \theta w,$$

где θ не обязательно лежит между 0 и 1. Имеем также

$$x - x_1 = \theta w,$$

$$x - x_2 = (\theta - 1) w, \dots$$

и, используя наши символические обозначения, получаем

$$[1, 2] = (f_2 - f_1)/w = \Delta_1/w,$$

$$[1, 2, 3] = \Delta_1^2/2w^2,$$

$$[1, 2, 3, 4] = \Delta_1^3/3!w^3, \dots$$

Подставляя эти выражения в формулу (17) и отбрасывая остаточный член R , получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} f(x_1 + \theta w) = f(x_1) + \theta \Delta_1 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta_1^2 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta_1^3 + \dots \\ \dots + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+2)}{(n-1)!} \Delta_1^{n-1}, \quad (18) \end{aligned}$$

которая известна как формула Грегори. С точностью до обозначений это формула Ньютона из разд. 6.

Символически мы можем написать формулу (18) в виде

$$f(x_1 + \theta w) = (1 + \Delta)^\theta f(x_1), \quad (19)$$

так как если разложить $(1 + \Delta)^\theta$ в биномиальный ряд, то получится

$$1 + \theta \Delta + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 + \dots$$

Необходимо помнить, что, например, символ Δ^3 не означает куба величины Δ , а введен вместо третьей восходящей разности $f(x_1)$. Возможность вывести формулу (19) из формулы (18), рассматривая $(1 + \Delta)^\theta$ как бином $(1 + \Delta)$ в степени θ , является лишь следствием особых символических обозначений, выбранных нами. Применяемый здесь символ Δ называют *оператором*.

Теперь мы введем новый оператор E , такой, что в результате действия E на $f(x)$ получается $f(x + w)$. В символической форме это выглядит так:

$$Ef(x) = f(x + w).$$

Кроме того, мы имеем следующие операторы:

$$\Delta f(x) = f(x + w) - f(x),$$

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}w\right) - f\left(x - \frac{1}{2}w\right),$$

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{1}{2}w\right) + f\left(x - \frac{1}{2}w\right) \right].$$

Теперь, поскольку

$$Ef(x) = f(x + w) = (1 + \Delta) f(x),$$

то

$$E = 1 + \Delta. \quad (20)$$

Если также существуют все производные функции $f(x)$, то, согласно теореме Тэйлора, можно написать

$$f(x + w) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} f^{(n)}(x). \quad (21)$$

Так как основание натуральных логарифмов e , возведенное в любую степень, например y , представляется рядом

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots,$$

то уравнение (21) можно записать символически в виде

$$f(x + w) = e^{\mu D} f(x). \quad (22)$$

Правда, в общем случае мы не знаем, существуют ли первые n производных функции $f(x)$, так как мы располагаем лишь табулированными значениями этой функции, однако для целей интерполяирования мы прибегаем к представлению функции $f(x)$ полиномом, производные от которого, как известно, существуют.

Мы можем теперь написать

$$Ef(x) = f(x + w) = (1 + \Delta) f(x) = e^{\mu D} f(x),$$

откуда в символьической форме имеем

$$E = 1 + \Delta = e^{\mu D}. \quad (23)$$

Для нисходящих разностей мы имеем

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - w).$$

Действуя на обе части оператором E , получаем

$$E\nabla f(x) = f(x + w) - f(x) = \Delta f(x),$$

откуда

$$E\nabla = \Delta = E - 1, \quad (24)$$

или

$$E = \frac{1}{1 - \nabla}. \quad (25)$$

Теперь мы можем выразить $f(x_1 + \theta w)$ через нисходящие разности в виде следующей формулы:

$$\begin{aligned} f(x_1 + \theta w) &= (1 - \nabla)^{-\theta} f(x_1) = \\ &= 1 + \theta \nabla_1 + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla_1^2 + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla_1^3 + \dots \\ &\quad + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\dots(\theta+n-2)}{(n-1)!} \nabla_1^{n-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

известной под названием формулы Грегори для интерполяирования назад.

Далее мы имеем

$$\begin{aligned} \delta f(x) &= f\left(x + \frac{1}{2}w\right) - f\left(x - \frac{1}{2}w\right) = \\ &= (1 + \Delta)^{1/2} f(x) - (1 + \Delta)^{-1/2} f(x), \end{aligned}$$

откуда вытекает следующее соотношение:

$$\delta = (1 + \Delta)^{1/2} - (1 + \Delta)^{-1/2}.$$

Из него мы находим

$$E = 1 + \Delta = \left[\frac{\delta}{2} + \left(1 + \frac{\delta^2}{4} \right)^{1/2} \right]^2 \quad (27)$$

и аналогично

$$\mu = \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 f(x_1 + \theta w) &= E^\theta f(x_1) = \\
 &= \left[\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]^{2\theta} f(x_1) = \\
 &= \frac{\mu \left[\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]^{2\theta}}{\left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2}} f(x_1) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \delta^k f(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \mu \delta^k f(x_1),
 \end{aligned} \tag{29}$$

где $\delta^0 f(x_1) = f(x_1)$ и $\mu \delta^0 f(x_1) = \mu f(x_1)$, а A и B означают коэффициенты в разложении выражений, записанных в строках выше. Мы полагаем

$$\begin{aligned}
 \sum A'_k \delta^k f(x_1) &= \sum A'_k \delta^k f(x_1) + \sum A''_k \delta^k f(x_1), \\
 \sum B'_k \mu \delta^k f(x_1) &= \sum B'_k \mu \delta^k f(x_1) + \sum B''_k \mu \delta^k f(x_1),
 \end{aligned}$$

где A' и B' соответствуют нечетным значениям k , а A'' и B'' — четным значениям. Поскольку

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]^{-2\theta} &= \left[\frac{1}{2} \delta - \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]^{2\theta} = \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]^{2\theta},
 \end{aligned}$$

то отсюда следует, что A' и B' — нечетные функции от θ , а A'' и B'' — четные функции от θ и что

$$\begin{aligned}
 \sum A'_k \delta^k f(x_1) &= \sum B'_k \mu \delta^k f(x_1), \\
 \sum A''_k \delta^k f(x_1) &= \sum B''_k \mu \delta^k f(x_1).
 \end{aligned}$$

Следовательно, мы можем также написать

$$\begin{aligned}
 f(x_1 + \theta w) &= \sum A'_k \delta^k f(x_1) + \sum B''_k \mu \delta^k f(x_1) = \\
 &= \sum B'_k \mu \delta^k f(x_1) + \sum A''_k \delta^k f(x_1).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Если в первой части формулы (30) мы положим $x_1 + \frac{1}{2} w$ вместо x_1 , то получим следующую формулу:

$$f\left(x_1 + \frac{1}{2} w + \theta w\right) = \sum A'_k \delta^k f\left(x_1 + \frac{1}{2} w\right) + \sum B''_k \mu \delta^k f\left(x_1 + \frac{1}{2} w\right),$$

которая является формулой Бесселя из разд. 5. Вторая формула из (30) известна как формула Ньютона — Котса. В формуле Бесселя можно заменить $\delta f\left(x_1 + \frac{1}{2} w\right)$ на $f(x_2) - f(x_1)$ и $\delta^3 f\left(x_1 + \frac{1}{2} w\right)$ на $\delta^2 f(x_2) - \delta^2 f(x_1)$ и т. д., получая формулу Эверетта из разд. 5.

Формулы для численного дифференцирования можно получить из следующего уравнения:

$$1 + \Delta = e^{\omega D} = \left[\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]^2,$$

которое можно использовать для выражения символа D и его степеней через диагональные разности Δ или ∇ или центральные разности δ . Например,

$$wD = \ln(1 + \Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n}{n},$$

откуда

$$\frac{df(x_1)}{dx} = Df(x_1) = \frac{1}{w} \left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n}{n} \right] f(x_1).$$

Формулы, выраженные через центральные разности, можно получить, используя следующие уравнения:

$$wD = 2 \ln \left[\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right] = \sum C_k \delta^k,$$

или

$$wD = \frac{2\mu \ln \left[\frac{1}{2} \delta + \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2} \right]}{\left(1 + \frac{1}{4} \delta^2 \right)^{1/2}} = \sum G_k \delta^k.$$

Формулы для численного интегрирования могут быть получены столь же легко. Мы можем символически написать $D^{-1}f(x)$ вместо функции, производной которой является $f(x)$, так что

$$D^{-1}f(x) = \int f(x) dx,$$

$$D^{-2}f(x) = \int \int f(x) dx^2 \text{ и т. д.}$$

Также мы можем написать символ $D^{-1}f(x)$ вместо функции, первыми разностями которой являются $f(x)$. Тогда

$$w^{-1}D^{-1} = -\ln(1 + \Delta), \dots$$

Замечания. Литература

Хорошим руководством по численному анализу является книга Бута «Численные методы» (A. D. B o o t h, Numerical Methods, 2nd ed., Acad. Press, New York, 1957). В ней доказывается справедливость большинства формул, данных здесь, а также многих других, и, кроме того, приводятся ссылки на литературу, которая достаточна для того, чтобы читатель смог изучить любой раздел предмета настолько глубоко, насколько он пожелает.

Исчерпывающим трактатом по исчислению конечных разностей является книга Минье «Методы численных вычислений» (H. M i n y e r, Techniques de calcul numérique, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952).

Прекрасным собранием пособий для интерполирования с правилами их применения являются таблицы (Interpolation and Allied Tables, London, 1956), подготовленные Бюро Ежегодника (Nautical Almanac Office). Эти таблицы содержат также полезные разделы по численному дифференцированию и интегрированию, дифференциальным уравнениям и вопросам точности вычислений. Справочная книга «Subtabulation» была издана в 1958 г.

Глава V

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

1. Введение. Метод численного интегрирования является самым мощным методом, известным в небесной механике, для вычисления движения любого тела в солнечной системе на *несколько обращений* вокруг центрального тела со всей точностью, требуемой современными наблюдениями. Опыт показывает, что для определения орбиты на большое число обращений небесного тела более эффективными, вероятно, являются аналитические методы, за исключением случаев орбит с большими эксцентриситетами, для которых трудность применения аналитических методов прогрессивно растет с величиной эксцентриситета. Поэтому численные методы применяются для большинства комет и многих малых планет, тогда как аналитические методы применяются к восьми большим планетам, к Луне и большинству остальных спутников, а кроме того, к ряду малых планет. Долго ли сохранится такое положение вещей, предсказать нельзя. Недавние успехи в вычислениях с перфокартами и ведущиеся теперь опыты с электронными машинами сделают, конечно, как численные, так и аналитические методы гораздо более эффективными, чем они были в прошлом. Пока еще не известно, получит ли один из методов преимущество за счет другого, однако несомненно, что специалист по практической небесной механике всегда извлечет пользу, применяя разумное сочетание численного и аналитического методов.

В этой главе подробно рассматриваются два наиболее распространенных метода численного интегрирования уравнений движения—методы Коулла и Энке. Эти методы обязаны своей известностью частично широкому распространению счетных машин, частично наличию прямоугольных координат семи больших планет до 1980 г., которые опубликованы в удобном виде вместе со вспомогательными таблицами институтом British Nautical Almanac Office; без этих двух пособий оба метода, по-видимому, были бы менее эффективны, чем остальные.

В методе Коулла коническое сечение как первое приближение к орбите явно не используется. Уравнения движения в прямоугольных координатах интегрируются непосредственно, давая прямоугольные координаты возмущаемого тела. Этот процесс сходен с процессом, примененным в гл. IV (разд. 12), с той лишь разницей, что необходимы три координаты вместо двух и на каждом шаге интегрирования возмущающие ускорения от планет прибавляются к притяжению Солнца. Начало координат обычно выбирают в центральном теле, но это ограничение не является обязательным, и для этой цели можно использовать

центр масс системы или любого возмущающего тела. Единственное ограничение состоит в том, что предполагаются уже известными движения относительно выбранного начала координат всех тел, оказывающих ощутимое влияние. Поскольку в качестве первого приближения не используется коническое сечение, этот метод применим к движению тел в таких системах, в которых доминирует не одна масса, как, например, к движению спутника двойной звезды. Единственным практическим недостоинством этого метода является то, что получаемые интегрированием координаты содержат много значащих цифр и быстро меняются со временем. В силу этого обстоятельства таблицы интегрирования сходятся медленно, что заставляет применять малый табличный интервал.

В методе Энке координаты не получаются непосредственно, а вместо этого интегрирование дает разности между действительными координатами и координатами в оскулирующей орбите, т. е. тем положением, в котором находилось бы тело, если бы оно продолжало двигаться по коническому сечению, соответствующему координатам и компонентам скорости в определенный момент времени, называемый эпохой оскуляции. Отклонения от этой оскулирующей орбиты называются возмущениями. Они обращаются в нуль в эпоху оскуляции. Преимущество этого метода заключается в том, что для моментов, лежащих вблизи эпохи оскуляции, возмущения малы; их можно выразить несколькими значащими цифрами, что допускает использование большего, табличного интервала, чем при употреблении метода Коуэлла. Недостаток метода Энке состоит в том, что с течением времени возмущения возрастают до значительной величины, из-за чего время от времени требуется исправление орбиты. Координаты и скорости определяются на новую эпоху, и интегрирование начинается снова. По-видимому, можно было бы избежать этой трудности, принимая в качестве первого приближения коническое сечение, которое аппроксимирует действительное движение на большем интервале времени, чем оскулирующая орбита, но обычно это не практикуется из-за отсутствия достаточной информации.

Методом, который много применялся в XIX столетии и не утратил своей ценности до настоящего времени, является метод вариации элементов. В этом методе величинами, получающимися при интегрировании, являются шесть оскулирующих элементов. Они меняются относительно медленно, что означает возможность применения довольно большого табличного интервала, однако дифференциальные уравнения более сложны по форме, чем уравнения в прямоугольных координатах.

Вероятно, самым изящным по замыслу методом является метод Ганзена. Ганзен исходит из оскулирующего эллипса, как и Энке, но вместо возмущений прямоугольных координат интегрирует возмущения трех других параметров. Основное возмущение — возмущение средней аномалии — определяется двойным интегралом. Это возмущение прибавляется к средней аномалии в эллипсе, оскулирующем в фундаментальную эпоху, и результат вместе с остальными оскулирующими элементами используется для вычисления долготы, широты и радиуса-вектора. Долгота, полученная таким образом, является истинной долготой, а радиус-вектор и широта нуждаются в небольших поправках, определяемых интегрированием двух уравнений первого порядка. Таким образом, на первый взгляд кажется, что полное решение содержит лишь четыре постоянных интегрирования, однако, строго говоря, это не так. Полное решение включает в себя три другие переменные, ко-

торые тесно связаны с возмущениями наклонности и узла оскулирующего эллипса, но они гораздо меньше по величине и становятся ощущимыми только после многих обращений возмущаемого тела. Преимущество этого метода состоит в том, что обычно можно пренебречь тремя последними величинами (однако в том случае, если этого сделать нельзя, их можно очень просто вычислить) и что возмущения трех остальных параметров имеют меньшую величину, чем в любом другом известном методе. Неудобство этого метода заключается в необходимости использования нескольких величин, для которых не существует широко распространенных таблиц (таких, как, например, таблицы прямоугольных координат возмущающих планет), и связи с чем требуется выполнение ряда довольно трудоемких преобразований. Метод Ганзена никогда не находил широкого применения, но, вероятно, после создания специальных таблиц, облегчающих эти преобразования, он мог бы быть весьма эффективным.

2. Уравнения метода Коуэлла. Уравнения движения двух материальных точек, m_a и m_b , под действием их взаимного притяжения были даны в разд. 3 гл. 1. Составляющие по оси ξ даются уравнениями

$$m_a \ddot{\xi}_a = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3}, \quad m_b \ddot{\xi}_b = k^2 m_b m_a \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3}, \quad (1)$$

с аналогичными уравнениями для η и ζ и

$$r^2 = (\xi_a - \xi_b)^2 + (\eta_a - \eta_b)^2 + (\zeta_a - \zeta_b)^2.$$

Введем в эту систему дополнительные материальные точки m_1, m_2, m_3, \dots и обозначим любую из них через m_j . Очевидно, притяжения со стороны m_j на m_a и m_b даются уравнениями, подобными уравнениям (1), а общие ускорения m_a и m_b получаются суммированием всех этих притяжений, что дает

$$m_a \ddot{\xi}_a = k^2 m_a m_b \frac{\xi_b - \xi_a}{r^3} + \sum_j k^2 m_a m_j \frac{\xi_j - \xi_a}{Q_{j,a}^3}, \quad (2)$$

$$m_b \ddot{\xi}_b = k^2 m_b m_a \frac{\xi_a - \xi_b}{r^3} + \sum_j k^2 m_b m_j \frac{\xi_j - \xi_b}{Q_{j,b}^3}, \quad (3)$$

с аналогичными уравнениями для η и ζ , где

$$Q_{j,a}^2 = (\xi_a - \xi_j)^2 + (\eta_a - \eta_j)^2 + (\zeta_a - \zeta_j)^2,$$

$$Q_{j,b}^2 = (\xi_b - \xi_j)^2 + (\eta_b - \eta_j)^2 + (\zeta_b - \zeta_j)^2.$$

Выберем начало координат в m_a , что равносильно следующему линейному преобразованию:

$$\xi_b - \xi_a = x, \quad \xi_j - \xi_a = x_j,$$

из которого следует, что

$$\xi_j - \xi_b = x_j - x,$$

и положим

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2,$$

$$Q_j^2 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2.$$

Разделим уравнение (2) на m_a , а уравнение (3) — на m_b и вычтем первое из второго. Тогда получится следующее уравнение движения m_b относительно m_a :

$$\ddot{x} = -k^2(m_a + m_b) \frac{x}{r^3} - \sum_j k^2 m_j \frac{x_j}{r_j^3} + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{Q_j^3}, \quad (4)$$

с аналогичными уравнениями для y и z .

Допустим, что масса m_a выбрана в качестве единицы массы и что все остальные массы выражены в этой единице. Тогда мы можем положить $m_a = 1$, отбросить индекс в m_b и написать уравнение (4) в следующем виде:

$$\ddot{x} = -k^2(1+m) \frac{x}{r^3} + \sum_j k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{Q_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right). \quad (5)$$

Это и аналогичные уравнения для y и z являются фундаментальными уравнениями в методе Коуэлла. Если m_a представляет Солнце, то очевидно, что x , y , z — гелиоцентрические координаты тела, движение которого определяется, а x_j , y_j , z_j — гелиоцентрические координаты любых других тел, действующих на m . Из способа вывода этих уравнений видно, что в уравнении (5) первый член представляет действие Солнца на тело m , первый член в скобках соответствует действию m_j на m , а второй — действию m_j на Солнце.

Эти уравнения с одинаковым успехом можно применить к движению спутника, помещая начало координат в центральную планету и выбирая для Солнца одно из m_j .

Если тело, движение которого необходимо определить, является астероидом или кометой, то полагаем m равным нулю. В этом случае все m_j малы по сравнению с единицей, а x_j , y_j , z_j обычно можно считать известными, что дает возможность получить искомое решение последовательными приближениями. На каждом шаге интегрирования приближенные координаты тела определяются экстраполированием и используются для вычисления \dot{w}^2x , \dot{w}^2y , \dot{w}^2z при помощи процесса, сходного с примененным в предыдущей главе, с той лишь разницей, что возмущения от возмущающих планет вычисляются отдельно для каждой планеты и прибавляются к действию Солнца. Когда интегрирование распространяется на небольшое число обращений, тело не будет сильно отклоняться от орбиты, определяемой эллипсом в эпоху оскульдации, и до тех пор, пока оно не сближается весьма тесно с какой-нибудь большой планетой, можно вычислять возмущения от планет заранее, используя положение тела в оскулирующей орбите вместо положения в истинной орбите. Таким путем удается сберечь много труда. Когда же интегрирование распространяется на большой ряд обращений, такой приближенный прием недопустим; в этих случаях иногда можно при вычислении возмущений от планет воспользоваться реaultатами интегрирования, выполненного ранее.

3. Численный пример приложения метода Коуэлла. Чтобы иллюстрировать численные методы, описанные в предыдущем разделе, мы приводим схему интегрирования для астероида Цереры. За основу работы выбраны следующие элементы, отнесенные к эклиптике и среднему равноденствию эпохи 1950,0:

Эпоха оскуляции

1941, январь, 6,0; эфем. врем. = J. D. 243 0000,5

Средняя аномалия

$$l = 75^{\circ}46'11",94 = 75^{\circ},76998$$

Расстояние по дуге эклиптики от узла до перигелия

$$\omega = 71^{\circ}4'5",06$$

Долгота узла на эклиптике

$$\Omega = 80^{\circ}48'50",71$$

Наклонность к эклиптике

$$I = 10^{\circ}35'49",00$$

Эксцентриситет

$$e = 0,0794\ 2668$$

Большая полуось

$$a = 2,7672\ 3786 \text{ а. е.}$$

С этими элементами вычисляем

$$\sin I = +0,1838\ 9893, \quad \sin \Omega = +0,9871\ 7554,$$

$$\cos I = +0,9829\ 4516, \quad \cos \Omega = +0,1596\ 3850,$$

$$\sin \omega = +0,9459\ 0471, \quad \cos \varphi = 0,9968\ 4071.$$

$$\cos \omega = +0,3244\ 4457,$$

Наклонность эклиптики в эпоху 1950,0 дает

$$\sin \varepsilon = +0,3978\ 8118, \quad \cos \varepsilon = +0,9174\ 3695,$$

откуда

$$A_x = -2,3965\ 7958, \quad A_y = +0,9984\ 2280, \quad A_z = +0,9576\ 8656,$$

$$B_x = -1,2849\ 7379, \quad B_y = -2,2997\ 8838, \quad B_z = -0,8179\ 9285.$$

$$\text{Контроль: } A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = +0,0000\ 0003.$$

При определении среднего движения по большой полуоси при помощи третьего закона Кеплера мы прибавляем массу Меркурия к массе Солнца по соображениям, которые будут указаны в разд. 7, и получаем для общей массы Солнце+Меркурий значение, равное 1,0000 00167, откуда для 10-дневного интервала $wk = 0,1720\ 2101\ 82$ и поэтому среднее движение равно 0,2141 0874 66 градуса в сутки. Затем для эпохи оскуляции вычисляются координаты и компоненты скорости с точностью до восьми десятичных знаков.

$$l = 75^{\circ}46'11",94 = 1,3224\ 35683 \text{ рад, } u = 1,4007\ 16333 \text{ рад,}$$

$$\sin u = +0,9855\ 71232, \quad \cos u = +0,1692\ 61179,$$

$$x = -1,4817\ 2875, \quad r^2 = 7,4530\ 9385, \quad wk\dot{x} = +0,0812\ 3006,$$

$$y = -2,1769\ 1244, \quad r = 2,7300\ 3550, \quad wk\dot{y} = -0,0520\ 1752,$$

$$z = -0,7201\ 5692, \quad \frac{wk}{r\sqrt{a}} = 0,0378\ 78256, \quad wk\dot{z} = -0,0409\ 9650.$$

Удобнее всего начать интегрирование с вычисления по оскулирующим элементам координат и ускорений для трех дат по обе стороны от эпохи оскуляции или просто начальной эпохи. В дальнейшем может потребоваться небольшое исправление этих величин, после того как будут учтены возмущающие ускорения от планет (табл. 1).

Таблица 1
Начальные данные

Юлианская дата	l	u	$\sin u$	$\cos u$
242 9970,5	69°,34672	73°,71495	+0,959 8785	+0,280 4162
242 9980,5	71°,48781	75°,90155	+0,969 8785	+0,243 5888
242 9990,5	73°,62889	78°,08160	+0,978 4427	+0,206 5184
243 0000,5	75°,76998	80°,25513	+0,985 5712	+0,169 2612
243 0010,5	77°,91107	82°,42214	+0,991 2665	+0,131 8732
243 0020,5	80°,05215	84°,58264	+0,995 5334	+0,094 4100
243 0030,5	82°,19324	86°,73667	+0,998 3785	+0,056 9250

x	y	z	r^2	$-w^2 k^2 / r^3$
-1,715106	-2,006845	-0,592689	7,320296	-0,0014 94067
-1,639696	-2,066612	-0,636138	7,364160	-0,0014 80738
-1,561859	-2,123320	-0,678645	7,408450	-0,0014 67479
-1,481729	-2,176912	-0,720157	7,453093	-0,0014 54314
-1,399444	-2,227339	-0,760622	7,498028	-0,0014 41260
-1,315143	-2,274556	-0,799990	7,543190	-0,0014 28337
-1,228963	-2,318525	-0,838216	7,588514	-0,0014 15559

Поскольку интегрирование необходимо вести с восемью десятичными знаками, последний столбец следует вычислить с точностью до девяти знаков, для того чтобы после умножения на координаты восьмой десятичный знак был точным. Затем для тех же семи дат вычисляются возмущающие ускорения от планет с одним лишним десятичным знаком, чтобы после суммирования с притяжением от Солнца можно было результат округлить до восьми десятичных знаков. В табл. 2 приведены результаты для каждой планеты, а именно для каждой даты даны три величины компонент возмущающего ускорения по осям x , y , z и их сумма.

Эти данные вместе с начальными значениями, вычисленными по формулам гл. IV, образуют первые семь строк таблиц интегрирования 3, 4 и 5. Мы приводим только те цифры юлианской даты, которые достаточны для отождествления моментов времени.

Для координаты x имеем

$$\begin{aligned} {}^{II}f_0 &= x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^{II} + \dots \\ &= -1,4817 2875 - \frac{1}{12} (215453) + \frac{1}{240} (-85) = -1,4819 0830, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^I f_{1/2} &= w k \dot{x}_0 + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^I - \frac{11}{720} f_0^{III} + \dots \\ &= +0,0812 3006 + \frac{1}{2} (215453) + \frac{1}{12} (-13752) - \frac{11}{720} (29) = \\ &= +0,0822 9586, \end{aligned}$$

аналогично для y и z .

Таблица 2

Возмущающие ускорения Цереры от планет

Юлианская дата	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Сумма
242 9970,5	+14,6	-2,1	+0,4	-49,0	--3,1	-39,2
	+0,7	-7,7	+0,5	-40,6	-2,4	-49,5
	-0,7	-3,4	+0,2	-47,6	-0,9	-22,4
242 9980,5	+14,3	-0,5	+0,4	-48,6	-3,1	-37,5
	+4,4	-7,9	+0,6	-41,1	-2,4	-46,4
	+1,0	-3,5	+0,2	-17,8	-0,9	-21,0
242 9990,5	+13,0	+1,1	+0,4	-48,1	-3,1	-36,7
	+8,0	-7,9	+0,6	-41,6	-2,4	-43,3
	+2,6	-3,5	+0,2	-17,9	-0,9	-19,5
243 0000,5	+10,7	+2,7	+0,4	-47,6	-3,1	-36,9
	+10,8	-7,5	+0,7	-42,1	-2,3	-40,4
	+4,0	-3,3	+0,2	-18,0	-0,9	-18,0
243 0010,5	+7,7	+4,2	+0,4	-47,2	-3,1	-38,0
	+12,7	-7,0	+0,7	-42,5	-2,3	-38,4
	+5,1	-3,1	+0,2	-18,1	-0,9	-16,8
243 0020,5	+4,1	+5,6	+0,4	-46,7	-3,1	-39,7
	+13,7	-6,1	+0,8	-43,0	-2,3	-36,9
	+5,8	-2,7	+0,3	-18,2	-0,9	-15,7
243 0030,5	+0,3	+6,8	+0,4	-46,2	-3,2	-41,9
	+13,7	-5,1	+0,8	-43,5	-2,3	-36,4
	+6,1	-2,2	+0,3	-18,3	-0,9	-15,0

Таблица 3

Интегрирование для x

Дата	Π_f	I_f	f_x	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
997			+256 209	-13450			
998			+242 759	-13596	-146	+32	
999			+229 163	-13710	-114	+29	-3
000	-1,481 908 30	+8229 586	+215 453	-13795	-85	+29	0
001	-1,399 612 44	+8431 244	+201 658	-13851	-56	+29	-4
002	-1,315 300 00	+8619 051	+187 807	-13882	-31	+25	
003	-1,229 109 49		+173 925				

Таблица 4

Интегрирование для y

Дата	Π_f	I_f	f_y	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
997			+299 787	+6178			
998			+305 965	+5584	-594	+12	
999			+311 549	+5002	-582	+8	-4
000	-2,177 176 26	-5043 084	+316 551	+4428	-574	+13	+5
001	-2,227 607 10	-4722 105	+320 979	+3867	-561	+12	-1
002	-2,274 828 15	-4397 259	+324 846	+3318	-549		
003	-2,318 800 74		+328 164				

Таблица 5

Интегрирование для z

Дата	Π_f	I_f	f_z	f^I	f^{II}	f^{III}
997			+88 529			
998			+94 174	+5645	-249	
999			+99 570	+5396	-251	-2
000	-0,720 244 19		+104 715	+5145	-251	0
001	-0,760 712 93	-4046 874	+109 609	+4894	-253	-2
002	-0,800 085 58	-3937 265.	+114 250	+4641	-252	+1
003	-0,838 315 73	-3823 015	+118 639	+4389		

Следующий этап состоит в первоначальном вычислении f_x , f_y , f_z для дат 001, 002, 003, используя значения x , y , z , полученные из таблиц интегрирования. Мы видим, что предварительные значения x , y , z требуют небольших поправок, но что значения f не изменяются. Интегрирование теперь производится так же, как и в примере из последней главы. Для целей интегрирования значения x , y , z , получаемые при каждом шаге, необходимо записывать с точностью только до шести десятичных знаков, однако если орбита, полученная численным интегрированием, должна быть после этого сравнена с наблюдениями, то следует удержать в координатах семь десятичных знаков и необходимые малые поправки к экстраполированным значениям вводить на каждом шаге; тогда значения x , y , z будут окончательными и могут быть использованы для сравнения с наблюдениями.

4. Уравнения для метода Энке. Пусть x_0 , y_0 , z_0 — гелиоцентрические прямоугольные координаты материальной точки m , движущейся только под действием притяжения Солнца. Известно, что орбита в этом случае определяется следующими уравнениями:

$$\ddot{x}_0 = -k^2(1+m) \frac{x_0}{r_0^3}, \quad \ddot{y}_0 = -k^2(1+m) \frac{y_0}{r_0^3}, \quad \ddot{z}_0 = -k^2(1+m) \frac{z_0}{r_0^3}, \quad (6)$$

где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Пусть ξ , η , ζ представляют собой приращения координат x_0 , y_0 , z_0 , создаваемые притяжениями со стороны планет. Тогда действительные координаты x , y , z частицы m в любой момент времени будут равны

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

и уравнениями действительного движения будут уравнение (5)

$$\ddot{x} = -k^2(1+m) \frac{x}{r^3} + \sum_j k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{r_j^3} - \frac{x_j}{r_j^5} \right) \quad (7)$$

и аналогичные уравнения для y и z .

Вычитание (6) из (7) дает следующее уравнение:

$$\ddot{x} - \ddot{x}_0 = \ddot{\xi} = k^2(1+m) \left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right) + \sum_j k^2 m_j \left(\frac{x_j - x}{r_j^3} - \frac{x_j}{r_j^5} \right) \quad (8)$$

с аналогичными уравнениями для $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$.

Возмущения ξ , η , ζ можно было бы получить непосредственным интегрированием уравнений (8). Член x_0/r_0^3 можно вычислять для каждого шага интегрирования заранее при помощи законов эллиптического движения, член x/r^3 — определять на каждом шаге, экстраполируя ξ и прибавляя это значение к x_0 , что и даст x , и т. д., однако этот путь действий на практике оказался бы неудобным. Поскольку ξ есть малая величина, то член x_0/r_0^3 почти равен x/r^3 и эти два члена следует вычислять со значительно большим числом значащих цифр, чем то, которое необходимо в их разности. Поэтому Энке был вынужден искать преобразование, которое устранило бы эту трудность.

Рассматривая только уравнение для ξ , поскольку уравнения для η и ζ совершенно аналогичны, мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} &= \frac{1}{r_0^3} \left(x_0 - \frac{r_0^3}{r^3} x \right) = \\ &= \frac{1}{r_0^3} \left(x - \xi - \frac{r_0^3}{r^3} x \right) = \\ &= \frac{1}{r_0^3} \left[\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) x - \xi \right].\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2 = \\ &= r_0^2 + 2x_0\xi + 2y_0\eta + 2z_0\zeta + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2 \frac{\left(x_0 + \frac{1}{2} \xi \right) \xi + \left(y_0 + \frac{1}{2} \eta \right) \eta + \left(z_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \zeta}{r_0^2}.$$

Если мы положим

$$q = \frac{\left(x_0 + \frac{1}{2} \xi \right) \xi + \left(y_0 + \frac{1}{2} \eta \right) \eta + \left(z_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \zeta}{r_0^2}, \quad (9)$$

то мы получим

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2q,$$

$$\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-3/2},$$

$$1 - \frac{r_0^3}{r^3} = 1 - (1 + 2q)^{-3/2}.$$

Если ξ , η , ζ настолько малы по сравнению с x_0 , y_0 , z_0 , что можно пренебречь их квадратами, то мы можем написать

$$q = \frac{x_0\xi + y_0\eta + z_0\zeta}{r_0^2}, \quad (10)$$

откуда легко видеть, что q представляет собой легко вычисляемую функцию, тогда как функция $1 - (1 + 2q)^{-3/2}$ не является таковой. Можно было бы построить таблицы, определяющие эту последнюю функцию по аргументу q , однако такие таблицы должны были бы быть довольно обширными и несколько неудобными для интерполирования. Если q меньше единицы, то приближенное значение функции

$1 - (1 + 2q)^{-3/2}$ будет дано несколькими первыми членами биномиального разложения. Мы получаем приближенно

$$1 - (1 + 2q)^{-3/2} = 3q - \frac{15}{2} q^2.$$

Если мы теперь определим функцию f (ее не следует смешивать с f из таблиц интегрирования) следующим равенством:

$$f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-3/2}}{q},$$

то, когда q мало, f будет близко к 3, а поскольку f изменяется намного медленнее, чем q , то можно легко интерполировать в таблице, дающей f как функцию от q .

После умножения на w^2 уравнения (8) теперь принимают вид

$$\begin{aligned} w^2\ddot{\zeta} &= w^2k^2(1+m)\frac{1}{r_0^3}(fqx - \xi) + \sum_j w^2k^2m_j\left(\frac{x_j - x}{\varrho_j^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right), \\ w^2\ddot{\eta} &= w^2k^2(1+m)\frac{1}{r_0^3}(fqy - \eta) + \sum_j w^2k^2m_j\left(\frac{y_j - y}{\varrho_j^3} - \frac{y_j}{r_j^3}\right), \\ w^2\ddot{\zeta} &= w^2k^2(1+m)\frac{1}{r_0^3}(fqz - \zeta) + \sum_j w^2k^2m_j\left(\frac{z_j - z}{\varrho_j^3} - \frac{z_j}{r_j^3}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

и представляют собой основные уравнения метода Энке, подлежащие интегрированию. Решение содержит шесть постоянных интегрирования, которые выбираются так, чтобы координаты и компоненты скорости в невозмущенной орбите $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ были равны тем же значениям координат и компонент скорости в действительной орбите в некоторую определенную дату, т. е. чтобы $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ были бы равны нулю. Дата, для которой это имеет место, называется эпохой оскуляции.

Уравнения (11) являются точными при условии, что q вычисляется по формуле (9). На практике в начале интегрирования используется формула (10). Возмущения ξ, η, ζ постепенно возрастают по величине, и, когда их квадраты становятся ощутимыми, вводится формула (9).

Поскольку x, y, z отличаются от x_0, y_0, z_0 на малые величины ξ, η, ζ и так как масса m_j мала, то в формулах (11) можно вместо x, y, z подставить x_0, y_0, z_0 , и погрешность, обусловленная такой подстановкой, будет порядка массы m_j , умноженной на притяжение, испытываемое астероидом или кометой со стороны соответствующей возмущающей планеты, т. е. порядка m_j^2 . Такая замена обычно производится и дает возможность заранее вычислить возмущения от планет для большого числа шагов вперед. Получающиеся возмущения называются точными до первого порядка возмущающих сил. Если интегрирование распространяется на достаточно длинный интервал времени, то возмущения становятся настолько большими, что допускаемая погрешность достигает заметной величины, и тогда возмущающие ускорения можно вычислить по строгим формулам. Однако такого вычисления можно избежать при помощи операции, называемой исправлением орбиты. Координаты астероида или кометы определяются для новой даты вычислением точных значений x_0, y_0, z_0 и прибавлением к ним ξ, η, ζ , а компоненты скорости получаются сложением wx_0, wy_0, wz_0 со значениями $w\xi, w\eta, w\zeta$, полученными из ξ, η, ζ при помощи численного дифференцирования. Далее вычисляются значения a, e, n и векторные постоянные эллипса, соот-

ветствующие этим координатам и компонентам скорости, и интегрирование начинается снова в эту новую эпоху оскуляции. Как правило, следует предпочесть второй путь и исправить орбиту, а не пользоваться для вычисления возмущений от планет точными формулами, так как при этом объем работы будет меньше.

5. Численный пример приложения метода Энке. Мы используем пример, данный для метода Коуэлла, но с интегралом в 20 суток, что дает $w^2 k^2 = 0,11836492$. Мы начинаем с вычисления координат по элементам оскулирующей орбиты для одной даты перед эпохой и ряда дат после нее (табл. 6).

Таблица 6

Юлианская дата	t	u	$\sin u$	$\cos u$
242 9980,5	71,488	75,902	+0,96988	-0,24359
243 0000,5	75,770	80,255	+0,98557	+0,16926
243 0020,5	80,052	84,583	+0,99553	+0,09441
243 0040,5	84,334	88,884	+0,99981	+0,01948
243 0060,5	88,617	93,161	+0,99848	-0,05154
243 0080,5	92,899	97,412	+0,99164	-0,12900
243 0100,5	97,181	101,638	+0,97944	-0,20173
x_0	y_0	z_0	r_0^2	$w^2 k^2 / r_0^3$
-1,6397	-2,0666	-0,6361	7,364	+0,005923
-1,4817	-2,1769	-0,7202	7,453	-0,005817
-1,3151	-2,2746	-0,8000	7,543	+0,005713
-1,1411	-2,3592	-0,8752	7,634	+0,005611
-0,9605	-2,4307	-0,9456	7,725	+0,005513
-0,7747	-2,4887	-1,0108	7,816	+0,005417
-0,5847	-2,5332	-1,0704	7,905	+0,005325

Возмущающие ускорения от планет для первых трех дат можно получить, умножив планетные члены предыдущего примера на 4. Необходимые и дополнительные значения приводятся в табл. 7 в том же виде, что и выше.

Таблица 7

Возмущающие ускорения Цереры от планет

Юлианская дата	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Сумма
243 0040,5	-14,0	+30,8	+1,2	-182,8	-12,6	-177,4
	+51,2	-15,2	+3,2	-175,6	-9,3	-145,7
	+23,6	-6,8	+1,2	-73,6	-3,4	-59,0
243 0060,5	-39,6	+35,4	+1,3	-178,6	-12,7	-194,2
	+34,3	-3,9	+3,5	-179,0	-9,2	-154,3
	+17,8	-1,9	+1,3	-74,2	-3,3	-60,3
243 0080,5	-52,8	+35,4	+1,1	-174,3	-12,7	-203,3
	+8,5	-8,4	+3,5	-182,3	-9,0	-170,9
	+7,1	+3,5	+1,4	-74,9	-3,1	-66,0
243 0100,5	-49,7	+31,2	+0,8	-169,9	-12,8	-200,4
	-19,1	+20,2	+3,3	-185,4	-8,9	-189,9
	-5,5	+8,7	+1,4	-75,4	-3,0	-73,8

Начальные условия мы вычисляем при помощи уравнений гл. IV, налагая условие, чтобы возмущения и их первые производные равнялись нулю в эпоху, и, значит, мы располагаем теперь достаточными данными, чтобы заполнить первые три строки таблиц интегрирования 8, 9 и 10, которые приведены с добавлением еще нескольких шагов интегрирования.

Таблица 8
Интегрирование для x

Дата	Π_f	I_f	f_ξ	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
980			-150	+2			
000	+12	-74	-148	-11	-13	+4	
020	-62	-233	-159	-20	-9	+12	+8
040	-295	-412	-179	-17	+3	+6	-6
060	-707	-608	-196	-8	+9	+6	0
080	-1315	-812	-204	+15	+6		
100	-2127	-1009	-197	+7			
120	-3136						

Таблица 9
Интегрирование для y

Дата	Π_f	I_f	f_η	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
980			-186	+24			
000	+13	-79	-162	+13	-11	-3	
020	-66	-228	-149	-1	-14	+1	+4
040	-294	-378	-150	-14	-13	+3	+2
060	-672	-542	-164	-24	-10	+6	+3
080	-1214	-730	-188	-4			
100	-1944	-946	-216				
120	-2890						

Таблица 10
Интегрирование для z

Дата	Π_f	I_f	f_ξ	f^I	f^{II}	f^{III}	f^{IV}
980			-84	+12			
000	+6	-35	-72	+9	-3	-4	
020	-29	-98	-63	+2	-7	+2	+6
040	-127	-159	-61	-3	-5	-1	-3
060	-286	-223	-64	-9	-6	+3	+4
080	-509	-296	-73	-3			
100	-805	-381	-85	-12			
120	-1186						

Предварительные значения f в первых трех строках являются просто планетными членами. Далее, для возмущения ξ координаты x

имеем

$$\Pi f_0 = \xi_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^{II} = 0 - \frac{1}{12} (-148) + \frac{1}{240} (-13) = +12,$$

$$\Gamma f_{1/2} = \dot{\xi}_0 + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^I = 0 + \frac{1}{2} (-148) + \frac{1}{12} (-4) = -74$$

и аналогично для η и ζ .

После того как первые три строки в таблицах интегрирования заполнены, перевычисляем ускорения для даты, предшествующей эпохе оскуляции, и для дат, следующих за ней. Находим, что некоторые значения должны быть исправлены на единицу последнего знака, вводим необходимые поправки и исправляем разности. Теперь интегрирование идет обычным путем. Сначала вычисляются значения ξ , η , ζ для даты 040 по формуле (15) гл. IV, затем определяется q и fq и, наконец, вычисляются полностью правые части основных уравнений (11), а результаты записываются в таблицы. Затем снова вычисляются ξ , η , ζ при помощи более точной формулы (16) гл. IV и исправляются, если необходимо, предыдущие значения этих величин. Удобно составить таблицу значений ξ , η , ζ , q и fq по мере их получения шаг за шагом. В качестве примера приводится табл. 11 с уже введенными необходимыми поправками к пяти предварительным значениям возмущений. В этом примере не было необходимости в поправках к предварительным значениям fq . Все данные в табл. 11 и таблицах интегрирования выражены в единицах восьмого десятичного знака.

Таблица 11
Возмущения по методу Энке

Дата	ξ	η	ζ	q	fq
000	0	0	0	0	0
020	-75	-78	-34	+40	+120
040	-310	-306	-132	+156	+468
060	-723	-686	-291	+341	+1023
080	-1332	-1230	-515	+590	+1770
100	-2143	-1962	-812	+897	+2691

6. Уравнения движения относительно центра масс. Уравнения (9) гл. I можно распространить на любое число возмущающих материальных точек, записывая их просто в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{Q_j^3}, \\ \ddot{y} &= \sum_j k^2 m_j \frac{y_j - y}{Q_j^3}, \\ \ddot{z} &= \sum_j k^2 m_j \frac{z_j - z}{Q_j^3},\end{aligned}\tag{12}$$

где $Q_j^3 = (x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2$, а начало координат лежит в центре масс всей системы в целом. Эти уравнения проще по форме, чем уравнения (5), благодаря отсутствию членов, выражающих действие возмущения.

щающих планет на Солнце, и они были бы удобнее уравнений (5) для применения, если бы было возможным легко и быстро получить координаты Солнца и планет, отнесенные к центру масс солнечной системы, а этого нет на самом деле. Все общие теории, дающие координаты больших планет как функции времени, принимают за начало системы координат Солнце. Небольшое усложнение этих теорий и уравнений движения для еще одного тела, возникающее при таком выборе начала координат, более чем компенсируется тем достоинством, что становится ненужной отдельная теория движения Солнца.

Несмотря на неудобство для вычислителя, состоящее в необходимости рассчитывать координаты Солнца и планет, отнесенные к центру масс, иногда выгодно использовать это начало координат — в случае, когда нужно интегрировать уравнения движения кометы или астероида. Если центральным телом является Солнце, а комета или астероид весьма удалены от него, то член x_j/r_j^3 уравнений (5) и (11) может стать гораздо больше, чем $(x_j - x)/q_j^3$. Например, в случае действия Юпитера на Плутон отношение этих двух членов колеблется около $40^3/5^3$, или 64. Следовательно, первый из этих двух членов порождает дополнительную значащую цифру в возмущениях, что влечет за собой уменьшение табличного интервала, необходимого для хорошей сходимости разностей. Использование центра масс в качестве начала координат устраняет эту трудность и допускает применение большего табличного интервала.

Отделяя солнечный член от остальных, как это было сделано в уравнениях (5), и обозначая барицентрические (отнесенные к центру масс) координаты Солнца через x_s, y_s, z_s , приводим уравнение (12) для \dot{x} к следующему виду:

$$\ddot{x} = k^2 \frac{x_s - x}{q_s^3} + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{q_j^3}, \quad (13)$$

с аналогичными уравнениями для y и z . Мы получили уравнения метода Коулла, отнесенные к барицентру. Применяя эти уравнения, необходимо вычислять барицентрические координаты $x_s, y_s, z_s, x_j, y_j, z_j$ по гелиоцентрическим координатам планет. Если гелиоцентрические координаты обозначить через x_j, y_j, z_j , то получим

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{1+m_j} x_j, \\ x_s &= - \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} x_j \end{aligned} \quad (14)$$

и аналогичные уравнения для остальных координат.

Координаты и компоненты скорости в эпоху оскуляции отличаются от координат и компонент скорости, отнесенных к Солнцу. Если они получены по гелиоцентрическим элементам, то прежде чем вычислять начальные значения для интегрирования, необходимо выполнить следующие преобразования. Координаты вычисляются по формуле

$$\dot{x} = \frac{1}{1+m} \dot{x} - \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} \dot{x}_j \quad (15)$$

и аналогичным формулам для y и z . Компоненты скорости, отнесенные к барицентру, можно определить по формуле

$$\dot{x} = \frac{1}{1+m} \dot{x} - \frac{d}{dt} \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} x_j \quad (16)$$

и аналогичным формулам для \dot{y} и \dot{z} , в которых второй член правой части можно легко получить численным дифференцированием второго члена правой части формул (15), вычисленного для ряда моментов.

После завершения интегрирования часто требуется снова отнести координаты к Солнцу, что можно выполнить посредством уравнения

$$\frac{1}{1+m} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} \mathbf{x}_j$$

и аналогичных уравнений для y и z .

Уравнения метода Энке, отнесенные к барицентру, имеют вид

$$\ddot{\xi} = k^2 \frac{1}{r_0^3} [f q(x - x_s) - \xi] + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{Q_j^3} \quad (17)$$

и аналогичные уравнения для $\ddot{\eta}$ и $\ddot{\zeta}$, где q и r_0^3 получаются из

$$x_0 = \frac{1}{1+m} \mathbf{x}_0 - \sum_j \frac{m_j}{1+m_j} \mathbf{x}_j,$$

а координаты x_j и x_s вычисляются при помощи (14).

7. Интегрирование с увеличенным значением массы Солнца. Когда возмущаемое тело настолько далеко от Солнца, что в уравнениях (12) одно или несколько значений Q_j почти равно Q_s , то, обозначая такое значение Q_j через Q_p и соответствующую возмущающую массу через m_p , мы можем написать, если m_p достаточно мало,

$$k^2 \frac{x_s - x}{Q_s^3} + k^2 m_p \frac{x_p - x}{Q_p^3} = k^2 (1 + m_p) \frac{x_s - x}{Q_s^3} \quad (18)$$

с тем же числом значащих цифр, которое необходимо в значениях возмущений. Такой случай обычно имеет место, когда вычисляются возмущения астероида от Меркурия или возмущения Плутона от четырех внутренних планет. В этих случаях мы можем вместо уравнений (13) написать следующее:

$$\ddot{x} = k^2 (1 + m_p) \frac{x_s - x}{Q_s^3} + \sum_j k^2 m_j \frac{x_j - x}{Q_j^3}. \quad (19)$$

Это равносильно предположению, что астероид или комета движется по эллиптической орбите относительно центра масс Солнца и m_p . Применяя уравнения (14) и (15), можно ввести координаты массы m_p , однако часто бывает так, что даже это не обязательно и при решении задачи можно всюду увеличить массу Солнца на m_p и больше не уделять возмущающему телу m_p никакого внимания. Например, центр масс Меркурия и Солнца находится на расстоянии приблизительно 0,00000007 а. е. от центра Солнца, и для большинства орбитастероидов такой малой поправкой к координатам возмущаемого тела можно пренебречь.

Увеличенное значение массы Солнца можно с равным успехом применить в уравнениях (5) или (11), как и в уравнениях (13). В таких случаях член $-x_p/r_p^3$ при интегрировании отбрасывается и включается, если необходимо, после интегрирования посредством уравнений (14) и (15).

Всякий раз, когда при интегрировании употребляется увеличенная масса Солнца, то же увеличенное значение этой массы необходимо применять при вычислении начальных значений для этого интегрирования. Способ, которым надлежит ввести увеличенную массу Солнца, зависит от элементов, выбираемых в соответствии с постоянными интегрирования. При любом методе — Коузлла или Энке — фактические значения постоянных интегрирования получаются из координат и компонент скорости в эпоху оскуляции, и эти постоянные для увеличенной массы Солнца будут иными, чем для неувеличенного ее значения. Из способа вычисления координат и скоростей по элементам, изложенного в гл. I, очевидно, что единственный путь устранения такого несоответствия состоит в изменении соотношения между средним движением n и большой полуосью a ; применения третий закон Кеплера, необходимо вместо $k^2(1+m)$ подставить $k^2(1+m+m_p)$.

Безразлично, будет ли в начале операций n выведено из a или a из n , однако, как только принято определенное решение, все последующие операции должны быть согласованы с ним. Если в конце интегрирования необходимо использовать уравнения из разд. 27 гл. I, то удобнее в качестве основного элемента рассматривать a . Тогда процедура будет определяться имеющимися начальными данными. Если задано только a , то порядок действий очевиден. Если же заданы как a , так и n , то следует отбросить n и использовать его значение, даваемое формулой

$$k^2(1+m+m_p) = n^2a^3. \quad (20)$$

Если дано только n , то следует предположить (при отсутствии противоположных утверждений), что оно отнесено исключительно к Солнцу. Поэтому выводим значение a из формулы

$$k^2(1+m) = n^2a^3, \quad (21)$$

а затем, используя это значение a , получаем исправленное значение n по формуле (20).

При использовании уравнений из разд. 27 гл. I в конце интегрирования не следует применять увеличенную массу Солнца, если элементы, как обычно, должны быть отнесены к Солнцу.

8. Относительные преимущества методов Коузлла и Энке. Вообще можно сказать, что ни один из упомянутых методов не обладает несомненным превосходством в тех случаях, когда вычислительная работа выполняется при помощи настольной счетной машины. Метод Энке допускает использование большего табличного интервала, но каждый шаг требует здесь больше времени, чем в методе Коузлла. Для комет часто рекомендуется применять метод Энке, когда комета находится вблизи Солнца, и метод Коузлла, когда она далеко от Солнца. Когда происходят тесные сближения, то возмущения, вычисляемые по методу Энке, очень быстро растут по величине, делая необходимым выбор малого табличного интервала, и в таком случае этот метод теряет все свои преимущества. Переход от какого-нибудь из этих методов к другому можно совершить без труда, вычисляя координаты и компоненты скорости для новой эпохи оскуляции и начиная интегрирование заново в эту новую эпоху.

При наличии современной вычислительной техники, обладающей широкими возможностями, когда процесс интегрирования может быть

выполнены операторами, мало знакомыми с искусством вычислений, или даже совершенно автоматически, метод Коузла безусловно превосходит метод Энке. В последнем требуется умение правильно разбираться в том, какую формулу для функции q следует применить, и необходимо периодическое исправление орбиты, по мере того как возрастает величина возмущений. С этими осложнениями в методе Энке вычислитель легко справляется по мере их появления, но их трудно предусмотреть заранее, как это требуется при использовании автоматических вычислительных средств.

Замечания. Литература

Метод Коузла впервые был применен для предсказания возвращения кометы Галлея в 1910 г. в работе Коузла и Кроммелина «Investigation of the motion of the Halley's Comet from 1759—1910», опубликованной в приложении к «Greenwich Observations 1909» (Neill, Bellevue, England, 1910). В этой работе авторы вычисляют вторые разности координат, которые затем непосредственно получаются при помощи двойных сумм вместо суммирования вторых производных и применения формулы интегрирования к этим суммам, как было сделано в этой главе. Однако они рекомендуют применять последнюю процедуру, которая связана с меньшим накоплением ошибок округления.

Метод Энке описан им самим в «Berliner Jahrbuch» (1857).

Батсон в своем руководстве «Теоретическая астрономия» (Lippincott, 1900) в гл. VIII описывает несколько методов вычисления частных возмущений с численными примерами. Примеры для ряда методов приводятся в таблицах «Planetary Coordinates for the years 1960—1980» (London, H. M. Stationery Office).

Накопление ошибок при численном интегрировании для случая, когда возникают только ошибки из-за округления последних знаков, впервые рассмотрено Браузером (Astron. J., 46, 149, 1937).

Появление автоматических быстродействующих вычислительных машин пробудило широкий интерес к методам численного интегрирования. В употребление было введено много новых формул, и метод Коузла повторно открывался несколько раз и теперь известен под различными названиями. Однако ни один метод, по-видимому, не превосходит методов Коузла и Энке, если речь идет о главном применении их к численному интегрированию уравнений движения небесных тел. Накопление ошибок можно уменьшить до некоторого абсолютного минимума при помощи автоматического изменения интервала шага интегрирования в зависимости от величины разностей наивысшего удерживаемого порядка.

АБЕРРАЦИЯ

1. Введение. Видимое положение любого небесного тела вследствие конечной скорости света зависит как от движения этого тела, так и от движения Земли в течение промежутка времени, необходимого свету для того, чтобы пройти расстояние от небесного тела до наблюдателя.

Пока свет распространяется от небесного тела до наблюдателя, находящегося на движущейся Земле, само это тело и Земля удаляются от положений, которые они занимали в пространстве в тот момент времени, когда свет покинул тело. Луч света, воспринимаемый наблюдателем, испускается в некоторый предшествующий наблюдению момент времени в направлении того положения, которое Земля должна занять позже, — в момент наблюдения; следовательно, в момент восприятия луча света наблюдателем тело не находится более в том направлении, откуда пришел этот луч. Кроме того, поскольку Земля движется, направление луча света в тот момент времени, когда луч достигает наблюдателя, отличается от каждого направления прихода этого луча; направление, в котором тело наблюдается фактически, является направлением движения света относительно наблюдателя, а не истинным геометрическим направлением распространения света в пространстве, и это относительное направление зависит от скорости наблюдателя в данный момент времени.

Видимое направление, в котором наблюдается тело на небесной сфере, не является, следовательно, ни истинным геометрическим направлением в момент наблюдения, ни направлением на то геометрическое место, в котором тело находилось в момент времени, когда его покинул свет.

Видимое смещение небесных тел относительно их истинных геометрических направлений, которое вызвано распространением света в сочетании с движениями наблюдателя и самих тел, называется аберрацией. Смещение наблюденного видимого положения относительно истинного геометрического положения в момент наблюдения известно под названием планетной аберрации. Смещение наблюденного положения относительно геометрического положения, в котором тело находилось в тот момент времени, когда его покинул свет, называется звездной аберрацией. Планетную аберрацию можно рассматривать как результат сложения двух эффектов: звездной аберрации, обусловленной мгновенной скоростью наблюдателя в момент наблюдения, и геометрического смещения тела в пространстве вследствие его движения за промежуток времени, в течение которого свет распространялся к Земле.

При вычислении положения, в котором тело должно наблюдаваться в определенный момент времени, по геометрическим положениям этого тела и Земли, выведенным на основе гравитационной теории, необходимо учитывать оба эти эффекта. При решении обратной задачи — вычислении геометрических положений тела в пространстве по наблюденным положениям — следует также ввести соответствующие поправки.

Пусть на рис. 6 E_T и P_T означают истинные геометрические положения Земли и некоторого небесного тела в момент времени T , когда произведено наблюдение, и пусть E_t и P_t означают их истинные положения в более ранний момент t , когда луч света, который достигает

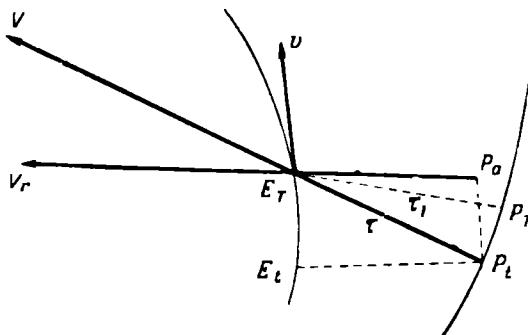


Рис. 6. Аберрация.

наблюдателя в момент T , покинул это тело. Геометрический путь этого луча света совпадает с прямой P_tE_T . Обозначим через V истинный вектор скорости луча света, а через v — вектор скорости Земли в момент T . Относительная скорость луча света представится стороной параллелограмма V_r , у которого v является другой стороной, а V — диагональю. Проведем теперь из P_t прямую параллельно v до пересечения с V , в точке P_a . Тогда P_a является видимым положением тела в момент T . Далее мы имеем $P_tP_a/P_tE_T = v/V$ и $P_tE_T = V(T-t)$, откуда $P_tP_a = v(T-t)$, что представляет собой выражение важного закона, часто играющего значительную роль при рассмотрении звездной аберрации. Его можно сформулировать так: видимое положение любого объекта, наблюдаемого движущимся наблюдателем, смещено относительно его положения, в котором он наблюдался бы, если бы наблюдатель, находился в покое, на угловую величину, в точности эквивалентную линейному смещению этого объекта параллельно мгновенному направлению движения наблюдателя на величину $v(T-t)$, где v есть мгновенная скорость наблюдателя, а $T-t$ — время, потребное свету для распространения от объекта до наблюдателя.

Только что установленные законы являются совершенно строгими и общими, но из-за недостаточного знания расстояний и движений звезд их никогда не применяют на практике в строгой форме к звездным положениям. Расстояния и скорости звезд известны с такой небольшой точностью, что вычисление их движений в течение промежутка времени $T-t$ неосуществимо. Поэтому для звезд никогда не вычисляется планетная аберрация, а только звездная аберрация. Кроме того, при вычислении звездной аберрации пренебрегают движением солнечной системы в пространстве. Вследствие этого положения звезд, приведен-

ные в звездных каталогах, не являются их истинными положениями, а собственные движения не являются истинными собственными движениями, но эти расхождения несущественны для небесной механики; в небесной механике звездные положения используются только для определения координатной системы отсчета, и каталожные положения (за одним небольшим исключением, которое будет указано ниже) столь же пригодны для этой цели, как и истинные положения.

2. Звездная аберрация. Величина видимого смещения, обусловленного звездной аберрацией, зависит от мгновенной скорости наблюдателя в тот момент, когда свет достигает его. В правой прямоугольной системе координат с неподвижным началом и осями, не меняющими направления в пространстве, каждая из компонент вектора скорости наблюдателя $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ является суммой линейных скоростей, обусловленных суточным вращением Земли, орбитальным движением Земли относительно Солнца (включая лунные и планетные возмущения, а также эллиптическое движение) и движением Солнца относительно центра масс солнечной системы (исключая, однако, движение солнечной системы среди звезд).

Пусть L и B означают сферические координаты — долготу и широту, — отнесенные к плоскости xy в системе координат с началом в точке наблюдателя и осями, параллельными осям первой системы координат. Направляющие косинусы прямой, направленной в P_t , откуда в действительности приходит свет, равны

$$\xi = \cos B \cos L, \quad \eta = \cos B \sin L, \quad \zeta = \sin B,$$

где L и B суть сферические координаты точки P_t . Аналогично направляющие косинусы видимого положения L_a, B_a равны

$$\xi_a = \cos B_a \cos L_a, \quad \eta_a = \cos B_a \sin L_a, \quad \zeta_a = \sin B_a.$$

Точки P_t, P_a диаметрально противоположны точкам, в которые направлены V и V_r . Следовательно, имеем

$$\xi = -\frac{V_x}{V}, \quad \eta = -\frac{V_y}{V}, \quad \zeta = -\frac{V_z}{V},$$

с аналогичными уравнениями для ξ_a, η_a, ζ_a .

Мы имеем также

$$V_a \xi_a = V \xi + \dot{x}, \quad V_a \eta_a = V \eta + \dot{y}, \quad V_a \zeta_a = V \zeta + \dot{z},$$

где $V_a \xi_a$ и $V \xi$ — компоненты векторов, направленных в точки P_a и P_t . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{V_a}{V} \cos B_a \cos L_a &= \cos B \cos L + \frac{\dot{x}}{V}, \\ \frac{V_a}{V} \cos B_a \sin L_a &= \cos B \sin L + \frac{\dot{y}}{V}, \\ \frac{V_a}{V} \sin B_a &= \sin B + \frac{\dot{z}}{V}. \end{aligned} \tag{1}$$

Умножая первое из этих уравнений на $\cos L$, а второе — на $\sin L$, сложим произведения; затем, умножив первое уравнение на $\sin L$, а второе — на $\cos L$, вычтем произведения; тогда получим соответственно сле-

дующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{V_a}{V} \cos B_a \cos (L_a - L) &= \cos B + \frac{1}{V} (\dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L), \\ \frac{V_a}{V} \cos B_a \sin (L_a - L) &= -\frac{1}{V} (\dot{x} \sin L - \dot{y} \cos L),\end{aligned}\quad (2)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(L_a - L) = \frac{-\sec B (\dot{x} \sin L - \dot{y} \cos L)}{V + \sec B (\dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L)}. \quad (3)$$

Умножив первое уравнение из (2) на $\cos \frac{1}{2} (L_a - L)$, а второе — на $\sin \frac{1}{2} (L_a - L)$ и сложив произведения, получим уравнение для $\cos B_a$, которое в комбинации с предыдущим уравнением для $\sin B_a$, после некоторых преобразований дает

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(B_a - B) = & \\ \dot{z} \cos B - \{\dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L + \operatorname{tg} \frac{1}{2} (L_a - L) (\dot{y} \cos L - \dot{x} \sin L)\} \sin B & \\ V + \dot{z} \sin B + \{\dot{x} \cos L + \dot{y} \sin L + \operatorname{tg} \frac{1}{2} (L_a - L) (\dot{y} \cos L - \dot{x} \sin L)\} \cos B & .\end{aligned}\quad (4)$$

Выражения для $L_a - L$ и $B_a - B$, полученные таким путем, являются совершенно строгими и общими. Из них можно получить практические формулы для фактического вычисления звездной аберрации в любой системе координат с любой требуемой степенью точности. Формулы (3) и (4) не зависят от расстояния до объекта, и они или формулы, выведенные из них, удобны для применения в тех случаях, когда расстояние наблюденного объекта неизвестно.

Однако если расстояние известно с достаточной точностью, то иногда представляется более удобным рассматривать звездную аберрацию как эквивалент линейного смещения объекта. Если X_t, Y_t, Z_t, R_t суть истинные геометрические прямоугольные координаты и расстояние объекта в момент t , когда свет покинул это тело, X_a, Y_a, Z_a — его видимые координаты в момент наблюдения T , а x, y, z — координаты наблюдателя в момент времени T , то, согласно принципам предыдущего раздела, мы непосредственно получаем с полной строгостью и общностью следующие уравнения:

$$\begin{aligned}X_a - X_t &= \frac{\dot{x}}{V} R_t, \\ Y_a - Y_t &= \frac{\dot{y}}{V} R_t, \\ Z_a - Z_t &= \frac{\dot{z}}{V} R_t.\end{aligned}\quad (5)$$

Для абсолютной точности начала координат следует выбрать в центре масс солнечной системы. Если обозначить время распространения света R_t/V (световой промежуток) через τ , то уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned}X_a - X_t &= \dot{x}\tau, \\ Y_a - Y_t &= \dot{y}\tau, \\ Z_a - Z_t &= \dot{z}\tau.\end{aligned}$$

3. Планетная аберрация. Звездная аберрация, обусловленная скоростью наблюдателя, является только смещением видимого положения (P_a на рис. 6) относительно геометрического положения P_t , которое тело занимало в момент, когда его покинул луч света. Можно определить геометрическое положение тела в момент наблюдения при помощи еще одной поправки за движение этого тела от P_t к P_T в течение светового промежутка, если это движение может быть определено. Комбинация из этих двух эффектов, т. е. смещение видимого положения тела относительно его истинного положения в момент наблюдения T , является планетной аберрацией (угол $P_T E_T P_a$ на рис. 6). Обозначая истинные координаты тела в момент наблюдения через X_T, Y_T, Z_T и разлагая величины $X_T - X_t, Y_T - Y_t, Z_T - Z_t$ по степеням τ согласно формуле Тэйлора, мы получаем

$$\begin{aligned} X_T - X_t &= \dot{X}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{X}_t \tau^2 + \frac{1}{6} \dddot{X}_t \tau^3 + \dots, \\ Y_T - Y_t &= \dot{Y}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{Y}_t \tau^2 + \frac{1}{6} \dddot{Y}_t \tau^3 + \dots, \\ Z_T - Z_t &= \dot{Z}_t \tau + \frac{1}{2} \ddot{Z}_t \tau^2 + \frac{1}{6} \dddot{Z}_t \tau^3 + \dots. \end{aligned} \quad (7)$$

Вычитая уравнения (7) из (6), получаем точные выражения для прямоугольных компонентов планетной аберрации в виде

$$\begin{aligned} X_a - X_T &= (\dot{x} - \dot{X}_t) \tau - \frac{1}{2} \ddot{X}_t \tau^2 - \frac{1}{6} \dddot{X}_t \tau^3 - \dots, \\ Y_a - Y_T &= (\dot{y} - \dot{Y}_t) \tau - \frac{1}{2} \ddot{Y}_t \tau^2 - \frac{1}{6} \dddot{Y}_t \tau^3 - \dots, \\ Z_a - Z_T &= (\dot{z} - \dot{Z}_t) \tau - \frac{1}{2} \ddot{Z}_t \tau^2 - \frac{1}{6} \dddot{Z}_t \tau^3 - \dots. \end{aligned} \quad (8)$$

Особенно важно заметить, что в этих уравнениях начало координат не является произвольным, а должно быть выбрано в центре масс солнечной системы, если мы стремимся к абсолютной строгости. Уравнения (8) непригодны для практического применения из-за трудности вычисления входящих в них производных. Столь же строгий, но более удобный метод вычисления планетной аберрации заключается в рассмотрении ее обеих частей отдельно друг от друга. Зная X_T, Y_T, Z_T и соответствующее расстояние R_T , мы принимаем $\tau_1 = R_T/V$ в качестве первого приближения τ и вычисляем X_1, Y_1, Z_1, R_1 для момента $T - \tau_1$. Вторым приближением к τ является $\tau_2 = R_1/V$, которое доставляет второе приближение координат X_2, Y_2, Z_2, R_2 . Продолжая действовать таким образом, найдем после двух или трех приближений, что τ не меняется. Мы получаем на этом этапе X_t, Y_t, Z_t , а в таком случае можно вычислить звездную аберрацию при помощи уравнений (6) или (3) и (4), либо приближенно каким-нибудь другим способом.

Если движение наблюдаемого тела является в течение промежутка времени τ почти прямолинейным, то в уравнениях (8) члены, содержащие τ^3 и более высокие степени τ , становятся пренебрежимо малыми, и, кроме того, почти точно имеем $\dot{X}_t = \dot{X}_T, \dot{Y}_t = \dot{Y}_T, \dot{Z}_t = \dot{Z}_T$, откуда

$$\begin{aligned} X_a - X_T &= (\dot{x} - \dot{X}_T) \tau, \\ Y_a - Y_T &= (\dot{y} - \dot{Y}_T) \tau, \\ Z_a - Z_T &= (\dot{z} - \dot{Z}_T) \tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти уравнения можно еще более упростить для вычислений, записывая τ_1 вместо τ и принимая в качестве начала координат Солнце вместо центра масс солнечной системы. В этом виде они часто используются для практических вычислений; в случае комет и планет погрешности, вносимые этими приближениями, обычно меньше $0'',01$, но для спутников эти упрощенные уравнения следует применять с осторожностью.

Правые части уравнений (9) после упрощений, указанных выше, выражают изменение координат наблюдаемого тела, отсчитываемых относительно движущегося наблюдателя как начала, в течение времени, за которое свет проходит расстояние от этого тела до наблюдателя. Поэтому планетная аберрация при указанных допущениях равна этому изменению. Следовательно, при тех же допущениях для любой системы координат с началом в движущейся точке наблюдателя будут иметь место аналогичные уравнения. Например, планетная аберрация в прямом восхождении α и склонении δ определяется формулами

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -\dot{\alpha}\tau_1, \\ \Delta\delta &= -\dot{\delta}\tau_1,\end{aligned}\tag{10}$$

и определяемые ими поправки $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ следует прибавить к геометрическому месту. Если в распоряжении имеется эфемерида, дающая прямое восхождение и склонение объекта как функции времени, то производные $\dot{\alpha}$ и $\dot{\delta}$ можно легко найти численным дифференцированием.

4. Суточная аберрация. В выражениях, приведенных в предыдущих разделах, компоненты скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ в полной теории являются компонентами скорости наблюдателя. Однако для удобства принято разделять звездную аберрацию на две части и рассматривать часть, зависящую от орбитального движения Земли, отдельно от другой части, обусловленной вращением Земли вокруг своей оси. Эта вторая часть называется суточной аберрацией; когда она рассматривается отдельно, первую часть, называемую годичной аберрацией, можно определить без потери точности, используя в выражениях (3), (4), (6) компоненты скорости центра Земли вместо компонент скорости наблюдателя.

В результате вращения Земли вокруг своей оси наблюдатель постоянно переносится к точке востока горизонта со скоростью, которая определяется в м/сек следующей формулой:

$$v = 464q \cos \varphi',$$

где φ' есть геоцентрическая широта наблюдателя, а q — значение радиуса Земли в месте наблюдения, выраженное в долях экваториального радиуса. Постоянная 464 равна скорости точки на экваторе.

Это движение производит смещение видимых положений всех небесных тел к точке востока по большим кругам, проходящим через эту точку. Величина этого смещения выражается следующей формулой:

$$s = \frac{v}{V} \sin \theta,$$

где θ есть угловое расстояние тела от точки востока. Подставляя вместо v и V их численные значения и деля на $\operatorname{arc} 1''$, получим

$$s = 0'',319q \cos \varphi' \sin \theta.$$

Чтобы найти влияние этого смещения на прямое восхождение и склонение тела, рассмотрим сферический треугольник PES , образованный полюсом мира P , точкой востока горизонта E и телом S . Тогда сторона ES есть θ ; и если мы обозначим через q угол при S , а через h — часовой угол этого тела, то аберрация в прямом восхождении и склонении будет равна

$$\cos \delta \Delta\alpha = s \sin q,$$

$$\Delta\delta = s \cos q.$$

Мы имеем также

$$\sin \theta \sin q = \cos h,$$

$$\sin \theta \cos q = \sin \delta \sin h,$$

откуда получается

$$\Delta\alpha = 0'',319 q \cos \varphi' \cos h \sec \delta,$$

$$\Delta\delta = 0'',319 q \cos \varphi' \sin h \sin \delta.$$

Применяя эти выражения, мы можем без ощутимой погрешности положить $q=1$ и взять астрономическую широту вместо φ' .

Суточная аберрация не играет никакой роли в работах по дифференциальной астрометрии, например в фотографической астрометрии, так как она влияет на положения всех тел в одной и той же области неба примерно одинаково, а малые остаточные влияния исключаются постоянными пластинки. Однако ее необходимо учитывать при всех измерениях относительных положений удаленных друг от друга тел, как, например, в меридианной астрономии.

5. Вычисление годичной аберрации. В тех случаях, когда стремятся к точности вычислений, близкой к $0'',001$ или более высокой, компоненты скорости x , y , z наиболее удобным образом можно получить при помощи численного дифференцирования прямоугольных экваториальных координат Земли, отнесенных к центру масс солнечной системы и к фиксированным равнодействию и экватору. Координаты Земли относительно Солнца можно получить из «The American Ephemeris» простой переменой знаков прямоугольных экваториальных координат Солнца, а координаты Солнца относительно этого центра масс можно вывести из данных, приведенных в «Planetary Coordinates».

Однако эта методика редко применялась в прошлом. Вместо этого пренебрегали скоростью Солнца относительно центра масс солнечной системы и считали, что Земля движется вокруг Солнца по эллиптической орбите. До сих пор принято употреблять дифференциальные формулы вместо строгих выражений (3) и (4).

Если мы обозначим через L эклиптическую долготу какого-либо тела, через B — его широту, а через R — его расстояние, то мы получим

$$X^{(e)} = R \cos B \cos L,$$

$$Y^{(e)} = R \cos B \sin L, \tag{11}$$

$$Z^{(e)} = R \sin B.$$

Дифференцируя эти соотношения, получим

$$\begin{aligned}\frac{\Delta X^{(e)}}{R} &= \frac{\Delta R}{R} \cos B \cos L - \sin B \cos L \Delta B - \cos B \sin L \Delta L, \\ \frac{\Delta Y^{(e)}}{R} &= \frac{\Delta R}{R} \cos B \sin L - \sin B \sin L \Delta B + \cos B \cos L \Delta L, \\ \frac{\Delta Z^{(e)}}{R} &= \frac{\Delta R}{R} \sin B + \cos B \Delta B.\end{aligned}\quad (12)$$

Умножив первое из этих уравнений на $-\sin L$, а второе — на $\cos L$ и складывая, находим

$$-\sin L \frac{\Delta X^{(e)}}{R} + \cos L \frac{\Delta Y^{(e)}}{R} = \cos B \Delta L. \quad (13)$$

Умножив первое из уравнений (12) на $-\sin B \cos L$, второе на $-\sin B \sin L$, а третье на $\cos B$, находим после сложения

$$-\sin B \cos L \frac{\Delta X^{(e)}}{R} - \sin B \sin L \frac{\Delta Y^{(e)}}{R} + \cos B \frac{\Delta Z^{(e)}}{R} = \Delta B. \quad (14)$$

Подставив вместо $\Delta X^{(e)}$, $\Delta Y^{(e)}$, $\Delta Z^{(e)}$ их значения, вычисленные при помощи (5), в уравнения (13) и (14), мы имеем

$$\begin{aligned}\cos B \Delta L &= -\frac{\dot{x}^{(e)}}{V} \sin L + \frac{\dot{y}^{(e)}}{V} \cos L, \\ \Delta B &= -\sin B \cos L \frac{\dot{x}^{(e)}}{V} - \sin B \sin L \frac{\dot{y}^{(e)}}{V} + \cos B \frac{\dot{z}^{(e)}}{V},\end{aligned}\quad (15)$$

где $\dot{x}^{(e)}$, $\dot{y}^{(e)}$, $\dot{z}^{(e)}$ отнесены к эклиптике.

Чтобы выразить $\dot{x}^{(e)}$, $\dot{y}^{(e)}$, $\dot{z}^{(e)}$ через эллиптические элементы орбиты Земли, введем следующие обозначения:

ψ — долгота Земли в ее орбите,
 r — радиус-вектор Земли,
 $\tilde{\omega}$ — долгота перигелия Земли,
 $e = \sin \varphi$ — эксцентриситет орбиты,
 n — среднее угловое движение,
 a — большая полуось.

Тогда, пренебрегая широтой Земли, мы имеем

$$\dot{x}^{(e)} = r \cos \psi,$$

$$\dot{y}^{(e)} = r \sin \psi,$$

$$\dot{z}^{(e)} = 0$$

и, дифференцируя эти формулы, получаем

$$\dot{x}^{(e)} = \dot{r} \cos \psi - r \dot{\psi} \sin \psi,$$

$$\dot{y}^{(e)} = \dot{r} \sin \psi + r \dot{\psi} \cos \psi, \quad (16)$$

$$\dot{z}^{(e)} = 0.$$

Согласно законам эллиптического движения, мы имеем

$$\frac{a}{r} = \frac{1+e \cos(\psi - \tilde{\omega})}{\cos^2 \varphi},$$

$$\dot{\psi} = \frac{a^2}{r^2} n \cos \varphi,$$

$$\dot{r} = \frac{a e n \sin(\psi - \tilde{\omega})}{\cos \varphi}.$$

Подставляя эти значения $\dot{\psi}$ и \dot{r} в уравнения (16), мы находим

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(e)} &= -an \sec \varphi (\sin \psi + e \sin \tilde{\omega}), \\ \dot{y}^{(e)} &= +an \sec \varphi (\cos \psi + e \cos \tilde{\omega}).\end{aligned}\tag{17}$$

Подставив эти значения в (15) и положив для краткости

$$\kappa = \frac{an \sec \varphi}{V},$$

получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\cos B \Delta L &= \kappa (\sin \psi + e \sin \tilde{\omega}) \sin L + \kappa (\cos \psi + e \cos \tilde{\omega}) \cos L \\ &= \kappa \cos(\psi - L) + e \kappa \cos(\tilde{\omega} - L), \\ \Delta B &= \kappa \sin B \sin(\psi - L) + e \kappa \sin B \sin(\tilde{\omega} - L).\end{aligned}\tag{18}$$

Последние члены этих уравнений не зависят от долготы Земли. Для каждой отдельной звезды они почти постоянны в течение нескольких столетий и, согласно общей договоренности, не включаются в эти формулы, так как входят в координаты звезд, определяемые из наблюдений. В обычных формулах мы подставляем истинную долготу Солнца $\odot = \varphi - 180^\circ$ и получаем

$$\begin{aligned}\cos B \Delta L &= -\kappa \cos(\odot - L), \\ \Delta B &= -\kappa \sin B \sin(\odot - L).\end{aligned}\tag{19}$$

Величина κ является постоянной аберрации, и ее общепринятое значение равно $20'',47$.

В экваториальных координатах при помощи аналогичных выкладок мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{V} &= \kappa (\sin \odot + e \sin \tilde{\omega}), \\ \frac{\dot{y}}{V} &= -\kappa \cos e (\cos \odot + e \cos \tilde{\omega}), \\ \frac{\dot{z}}{V} &= -\kappa \sin e (\cos \odot + e \cos \tilde{\omega})\end{aligned}$$

и, сбрасывая члены, содержащие $\tilde{\omega}$, имеем

$$\cos \delta \Delta a = -\kappa \cos e \cos \odot \cos a - \kappa \sin \odot \sin a,$$

$$\Delta \delta = \kappa \cos e \cos \odot \sin \delta \sin a - \kappa \sin \odot \sin \delta \cos a - \kappa \sin e \cos \odot \cos \delta.$$

Если мы положим для краткости

$$\begin{aligned} C &= -\kappa \cos \varepsilon \cos \odot, & D &= -\kappa \sin \varepsilon \odot, \\ c &= \cos \alpha \sec \delta, & d &= \sin \alpha \sec \delta, \\ c' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, & d' &= \cos \alpha \sin \delta, \end{aligned}$$

то уравнения (20) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= Cc + Dd, \\ \Delta \delta &= Cc' + Dd'. \end{aligned} \quad (21)$$

который называется формой Бесселя и часто используется для вычисления годичной аберрации звезд. Величины C и D табулируются на каждые сутки в «The American Ephemeris».

Члены звездной аберрации, содержащие $\tilde{\omega}$ (которые влияют на средние каталожные места звезд), не играют никакой роли в меридианной астрономии, так как положение любого объекта, наблюдаемого при помощи меридианного круга, является видимым его положением и обычно сравнивается с видимой эфемеридой, в которой планетная аберрация была вычислена при помощи уравнений (10); эти уравнения автоматически включают в себя влияние так называемого эллиптического члена. С другой стороны, фотографические положения небесных тел определяются привязкой изображения тела к средним каталожным положениям звезд, расположенных в непосредственной близости. На такого рода наблюдения эллиптический член аберрации влияет, и если не принять надлежащих мер предосторожности, то в орбитальных элементах возникнут ощущимые погрешности. Одна из таких мер состоит в прибавлении особой поправки к каждому опубликованному фотографическому наблюдению, прежде чем оно используется каким-либо образом. Эти поправки даются в секундах дуги следующим матричным произведением:

$$|\cos \delta \Delta \alpha \Delta \delta| = |+0",061 - 0",336 + 0,"027| \begin{vmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \sin \delta \\ \sin \alpha & \cos \alpha \sin \delta \\ 0 & \cos \delta \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Матрица справа обычно требуется еще и для другой цели, что облегчает эти вычисления.

Приближенные дифференциальные методы, обычно применяемые при вычислении годичной аберрации, достаточны для обычных задач небесной механики, обеспечивая точность порядка $0",01$. Отбрасывание квадратов величины смещения в дифференциальных формулах порождает погрешности, не пренышающие в зодиакальной части неба $0",01$ при условии, что долгота Солнца и координаты объекта отнесены к одному и тому же равноденствию. Главная погрешность, вводимая предположением о движении Земли вокруг Солнца по эллиптической орбите, обусловлена скоростью Земли относительно центра масс системы Земля — Луна. Для каждой отдельной области неба эта погрешность принимает форму периодической погрешности с периодом в один месяц и амплитудой $0",008$. Другая аналогичная погрешность с периодом в двенадцать лет и амплитудным коэффициентом $0",008$ возникает из-за пренебре-

жения скоростью Солнца относительно центра масс Солнца и Юпитера. Если включить в эту систему Сатурн, то соответствующая погрешность имеет амплитудный коэффициент $0'',002$. При рассмотрении фотографических наблюдений объектов, движущихся в солнечной системе, погрешностями такой величины обычно можно пренебречь; эллиптический член звездной aberrации является единственной ее частью, которую необходимо принимать во внимание.

6. Эфемериды. На заключительном этапе работы, связанном с уточнением и исправлением элементов орбиты, наблюденные положения небесного тела никогда не используются непосредственно, а вместо этого рассматриваются разности между наблюденными положениями и положениями, вычисленными согласно какой-нибудь теории движения (в смысле «наблюденное положение минус вычисленное положение», или $O - C$). Эфемерида представляет собой таблицу вычисленных положений небесного тела, аргументом которой является время; с некоторой неточностью этот термин можно применить к любому ряду вычисленных положений. При вычислении точной эфемериды необходимо учитывать aberrацию так же, как она влияет на наблюдения, чтобы сделать наблюдения непосредственно сравнимыми с эфемеридой. При этом для наблюдений различных классов необходимо применять различные методы.

Геометрическая эфемерида дает фактическое положение тела в указанные моменты времени. Истинные геометрические положения тела наблюдать невозможно, а, следовательно, геометрическая эфемерида не пригодна для какой-либо точной работы. Такая эфемерида применяется главным образом в тех случаях, когда стремится лишь к небольшой степени точности, например когда единственной целью является разыскание небесного тела.

Эфемериду видимых положений можно получить, прибавляя планетную aberrацию к геометрической эфемериде. Положения, наблюдаемые при помощи меридианного круга, являются видимыми положениями. Следовательно, эфемериды Солнца, Луны и больших планет обычно дают видимые положения. Такие явления, как затмения Солнца или спутников Юпитера, зависят от видимых положений участвующих в них тел, а поэтому эфемериды видимых мест полезны также и здесь.

Наблюденные положения, получаемые сравнением положений объекта с каталогами местами звезд, расположенных в непосредственной близости, не являются ни геометрическими, ни видимыми положениями этого объекта, а принадлежат к некоторому промежуточному классу и могут быть названы астрометрическими положениями. Они свободны от главных членов звездной aberrации, т. е. от суточной aberrации и главного члена годичной aberrации, однако они отягощены влиянием барицентрического движения наблюденного объекта за промежуток времени, в течение которого свет распространяется от этого объекта до наблюдателя, и эллиптическим членом годичной aberrации. Поэтому астрометрическая эфемерида может быть получена введением в моменты времени, к которым относятся гелиоцентрические положения объекта (которыми можно заменить барицентрические положения, допуская погрешность, не превышающую $0'',01$), поправок за световой промежуток, применения последовательные приближения способом, описанным в разд. 3, и вычитая затем результаты, полученные по формуле (22), из геоцентрической эфемериды. Можно также сначала вычислить види-

мое положение, а затем вычесть главный член годичной аберрации. Этот последний способ не совсем строг, если для учета планетной аберрации применяются сокращенные формулы, но часто оказывается достаточным.

Четвертый тип эфемерид, называемый астрографической эфемеридой, применяется довольно широко. Эта эфемерида вычисляется легче, чем астрометрическая эфемерида, от которой она отличается только эллиптическим членом годичной аберрации. Прежде чем сравнивать ее с фотографическими наблюдениями, необходимо либо придать к наблюденному положению поправки, вычисленные по формуле (22), либо вычесть их из эфемеридных положений.

7. Частные случаи аберрации.

а) Солнце. В течение промежутка времени, необходимого свету, чтобы распространиться от Солнца до Земли, движение Солнца относительно центра масс солнечной системы фактически равно нулю. Таким образом, одна из двух частей, составляющих планетную аберрацию, обращается в нуль, и остается только звездная аберрация. Необходимо заметить, что в противоположность методике, принятой для звезд, к эфемериде Солнца прибавляется полная годичная аберрация. Если бы это не было сделано, то наблюдения видимого места Солнца расходились бы с эфемеридой, причем расхождение по долготе имело бы годичный период с амплитудным коэффициентом $0''.343$.

б) Луна. В течение промежутка времени, потребного свету, чтобы пройти расстояние от Луны до Земли, Луна проходит приблизительно $0''.7$ по геоцентрической долготе в орбите с отклонением от указанной величины приблизительно на $0''.05$, обусловленным эксцентриситетом ее орбиты. Это равно полной величине планетной аберрации, годичная же аберрация уничтожается гелиоцентрическим движением Луны в течение светового промежутка. Фактически аберрация вообще не прибавляется к эфемериде Луны; таблицы Луны составляются так, чтобы давать непосредственно видимое положение Луны, при небольшом изменении геометрических элементов лунной орбиты. В некоторых приложениях важно помнить, что лунный параллакс, табулируемый в эфемериде, строго говоря, не является истинным параллаксом в указанный момент времени.

в) Спутник. Когда спутник наблюдается путем фотографирования его на фоне звезд, получаемое при этом положение является астрометрическим положением. Если же положение спутника определяется путем измерения расстояния спутника от центральной планеты и позиционного угла, то можно пренебречь звездной аберрацией, имеющей фактически одну и ту же величину для обоих тел; если же этого сделать нельзя, звездная аберрация ощущима, ее можно ввести дифференциальным путем. Оставляя этот вопрос пока в стороне, можно сказать, что наблюдение связывает положение спутника в момент, когда свет покинул спутник, с положением центральной планеты в момент, когда свет покинул ее. С очень высокой степенью точности можно считать, что спутник принимает участие в гелиоцентрическом движении центральной планеты в течение светового промежутка, соответствующего последней, и поэтому на практике необходимо только исправлять наблюдение за движением спутника относительно центральной планеты, совершаемое в течение промежутка времени, необходимого, чтобы свет прошел расстояние от этого спутника до наблюдателя.

Замечания. Литература

Аберрация света была открыта в 1725 г. Дж. Брадлеем, впоследствии ставшим королевским астрономом, во время ряда попыток, предпринятых несколькими астрономами для измерения годичного параллакса звезды с целью установить на основе наблюдений, что Земля не является центром солнечной системы. 17 декабря Брадлей наблюдал, что звезда у Дракона имела более южное склонение, чем следовало ожидать, а 20 декабря он нашел, что она ушла еще больше к югу, причем движение было противоположно по направлению тому движению, которое должно было бы получиться в результате влияния параллакса. Для изучения этого эффекта Брадлей применил телескоп и наблюдал ряд ярких звезд в течение 1727—1728 гг., после чего путем анализа наблюдений установил характер явления и правильно его объяснил.

Г л а в а VII

СРАВНЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЙ И ТЕОРИИ

1. Введение. Слово «теория» употребляется в небесной механике для обозначения некоторого математического выражения, из которого можно получить координаты небесного тела как функции времени. Существуют теории двух типов — специальные и общие. Специальной теорией является такая теория, которая дает координаты только для частных значений времени; численное интегрирование уравнений гелиоцентрического движения кометы или планеты является примером специальной теории. В общей теории время изображается символом, вместо которого по желанию можно подставить любое значение и получить координаты для соответствующей даты; поэтому общая теория не может быть целиком численной по форме. Она может быть целиком аналитической, как, например, теория Луны Делонэ, которая выражает координаты в виде функций от семи символов, соответствующих шести элементам орбиты и времени; либо она может быть частично аналитической и частично численной, как, например, теория Луны Брауна, в которой вместо некоторых элементов подставлены численные значения. Имеются также общие теории, в которых численные значения подставляются вместо всех элементов, и единственной величиной, обозначенной символом, является время, например, теория Юпитера Хилла; такие теории обычно, хотя и несколько неточно, называются численными общими теориями.

Хотя в общей теории можно подставить любое значение времени, из этого не следует, что результат обязательно будет иметь физическое значение и смысл. Обычно планетные общие теории содержат тригонометрические функции, умноженные на время; такие члены неограниченно возрастают при неограниченном росте времени; и эта особенность мешает теории быть справедливой в течение более чем нескольких столетий. Теория Луны свободна от этого недостатка и по форме пригодна для любого промежутка времени. Однако элементы орбиты и массы взаимодействующих тел должны по-прежнему определяться из наблюдений. Поскольку количество наблюдений ограничено, а сами наблюдения обладают ограниченной точностью, то теория неизбежно все больше и больше отклоняется от действительности для моментов времени, все более и более удаленных от фундаментальной эпохи.

Теория бесполезна, пока она не сравнена с наблюдениями, поскольку в этом единственный путь испытания ее пригодности. Кроме того, до сих пор не было построено еще ни одной теории, которая была бы с самого начала так же точна, как и существующие наблюдения,

поскольку элементы орбиты вначале известны недостаточно хорошо. Поэтому первоначальное сравнение какой-либо теории с наблюдениями имеет основной целью улучшение предварительных элементов, на которых основывается эта теория; в то же время часто можно определить значение определенной возмущающей массы или какой-либо другой астрономической постоянной.

Теория обычно дает координаты тела, отнесенные к центру главного светила как началу координат. Так, например, теория Луны дает геоцентрические координаты Луны, теория Юпитера — гелиоцентрические координаты Юпитера, а теория Гипериона — сатурноцентрические координаты этого спутника. Однако наблюдения всегда привязываются к Земле как началу координат, и не к центру Земли, а к точке, в которой находится наблюдатель. Сравнение наблюдений с теорией неизбежно влечет за собой одно или несколько преобразований координат, и эти преобразования составляют предмет настоящей главы.

2. Движение плоскостей отсчета. Плоскостями отсчета, чаща всего используемыми в небесной механике, являются плоскость эклиптики и плоскость экватора. Большие круги, по которым эти две плоскости пересекают небесную сферу, называются эклиптикой и экватором. Точка весеннего равноденствия (или, сокращенно, равноденствие) является одной из двух точек пересечения эклиптики и экватора, через которую Солнце проходит приблизительно 21 марта. Эклиптика, экватор и равноденствие — все вместе находятся в непрерывном движении, и, следовательно, широта, долгота, склонение и прямое восхождение любого небесного тела непрерывно изменяются. Большая часть этих изменений различны в разных областях неба. При аналитическом выводе этих изменений появляются два рода членов — периодические члены, которые в своих аргументах содержат определенные элементы орбит Земли и Луны (они называются нутационными членами), а также вековые члены, которые содержат степени времени и не зависят от мгновенных положений Земли и Луны; это — прецессионные члены. Удобно рассматривать эти два класса членов раздельно.

Если склонение и прямое восхождение какого-нибудь тела измеряют при помощи меридианного круга, то склонение относится к мгновенному экватору, а прямое восхождение — к мгновенному равноденствию. Координаты эти называются видимым склонением и видимым прямым восхождением. На эти координаты влияет планетная aberrация, и если они освобождены от влияния aberrации, то в таком случае их называют истинным склонением и истинным прямым восхождением. Из истинных координат можно устраниТЬ влияние нутации, и тогда говорят, что эти координаты отнесены к среднему экватору и среднему равноденствию даты. Кроме того, можно удалить влияние прецессии за определенный промежуток времени. За последний обычно выбирается промежуток времени, протекший от начала некоторого тропического года, например 1950,0, и тогда говорят, что координаты отнесены к экватору и равноденствию 1950,0. (Началом тропического года является момент, когда средняя долгота Солнца равна 280° , и это начало следует тщательно отличать от начала календарного года. Например, момент 1950,0 равен 1950, январь, 0,923 эфемеридного времени.)

3. Прецессия. Мгновенные скорости изменения прямого восхождения и склонения любого тела за тропическое столетие, обусловленного

прецессией, даются формулами вида

$$\begin{aligned} p_\alpha &= m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta, \\ p_\delta &= n \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где α и δ — мгновенные прямое восхождение и склонение, отнесенные к среднему равноденствию и экватору даты, а значения m и n , принятые по общему соглашению, равны

$$\begin{aligned} m &= 4608'',50 + 2'',79T = \\ &= 307^s,233 + 0^s,186T, \\ n &= 2004'',68 - 0'',85T, \end{aligned} \quad (2)$$

где T отсчитывается в тропических столетиях от эпохи 1900,0.

Полное изменение прямого восхождения и склонения любого тела, вызванное прецессией, между двумя любыми датами t_0 и t_1 , дается посредством формул

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \int_{t_0}^{t_1} p_\alpha dT, \\ \Delta\delta &= \int_{t_0}^{t_1} p_\delta dT. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) нельзя проинтегрировать аналитически, так как p_α и p_δ являются функциями от α и δ . Их можно было бы решить численным интегрированием, описанным в гл. IV, но это было бы довольно трудоемким процессом; легче действовать по методу последовательных приближений, если $t_1 - t_0$ около столетия и тело не расположено в пределах нескольких градусов от полюса.

Обычно достаточно определить численные значения m и n для момента $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_0)$ и затем подставить их в следующие приближенные уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= (t_1 - t_0)(m + n \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0), \\ \Delta\delta &= (t_1 - t_0)n \cos \alpha_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_0 и δ_0 — значения α и δ для момента t_0 . Первое приближение равно

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \Delta\alpha, \\ \delta_1 &= \delta_0 + \Delta\delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь необходимо перевычислить выражения (4), используя α_1 и δ_1 вместо α_0 и δ_0 . Новые значения $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ будут очень мало отличаться от первого приближения, и обычно можно принять среднее из этих двух результатов.

На практике обычно представляется возможным избежать всех этих вычислений, кроме небольшого интегрирования, используя специальные таблицы в «The American Ephemeris» или в «The British Astronomical Ephemeris».

4. Нутация. Влияние нутации на прямое восхождение и склонение тела, если только это тело не находится в пределах нескольких градус-

сов от полюса, можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= (\cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \Delta\psi - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \Delta\epsilon, \\ \Delta\delta &= \sin \epsilon \cos \alpha \Delta\psi + \sin \alpha \Delta\epsilon,\end{aligned}\quad (6)$$

где α и δ — прямое восхождение и склонение этого тела, ϵ — наклонность эклиптики, а $\Delta\psi$ и $\Delta\epsilon$ — нутация в долготе и нутация в наклонности, приводимые в «The American Ephemeris» для каждого дня года. Уравнения (6) не являются точными, будучи выведенными из дифференциальных соотношений между элементами некоторого сферического треугольника. Величины $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ не могут превосходить $20''$ по дуге большого круга, и, следовательно, этих уравнений достаточно, чтобы получить эти величины с точностью до $0'',01$, если только $\operatorname{tg} \delta$ не очень велик. В силу малости $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ значения тригонометрических функций требуются только с точностью до трех или четырех значащих цифр, и, следовательно, нет необходимости строго определять α , δ и ϵ ; можно использовать либо видимые значения, либо значения для начала тропического года, в котором произведены наблюдения.

На практике прямые восхождения и склонения исключительно редко относятся к среднему равноденствию и экватору даты. Наблюдатели на меридианных кругах обычно публикуют видимые положения, тогда как наблюдатели, применяющие микрометрические и фотографические методы, обычно публикуют положения, отнесенные к среднему равноденствию и экватору начала тропического года наблюдения (иногда используется стандартное равноденствие и экватор, например 1900,0 или 1950,0). Поэтому выгодно объединить уравнения (6) с редукцией за прецессию в течение доли года; тогда любая дополнительная редукция за прецессию производится для целого числа тропических лет.

Если обозначить протекшую часть тропического года через τ , то уравнения (4) для прецессии примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \tau(m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta), \\ \Delta\delta &= \tau n \cos \alpha,\end{aligned}\quad (7)$$

в которых отброшены нижние индексы у α и δ . Объединенная редукция за прецессию и нутацию получается сложением уравнений (6) с уравнениями (7). Получающиеся выражения можно упростить путем некоторого преобразования.

Определим две величины p и λ посредством следующих уравнений:

$$\begin{aligned}p \cos \epsilon - \lambda &= m, \\ p \sin \epsilon &= n.\end{aligned}\quad (8)$$

Тогда, если мы положим для краткости

$$F = \cos \epsilon + \sin \epsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$

то из (8) легко видеть, что

$$m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta = pF - \lambda,$$

откуда

$$F = \frac{m + n \sin \alpha \operatorname{tg} \delta}{p} + \frac{\lambda}{p}.$$

Тогда сумму уравнений (6) и (7) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \left(\tau + \frac{\Delta\Psi}{p}\right)(m + n \sin a \operatorname{tg} \delta) + \lambda \frac{\Delta\Psi}{p} - \Delta\varepsilon \cos a \operatorname{tg} \delta, \\ \Delta\delta &= \left(\tau + \frac{\Delta\Psi}{p}\right)n \cos a + \Delta\varepsilon \sin a.\end{aligned}\quad (9)$$

Если мы положим

$$\begin{aligned}A &= \tau + \frac{\Delta\Psi}{p}, & a &= m + n \sin a \operatorname{tg} \delta, \\ B &= -\Delta\varepsilon, & b &= \cos a \operatorname{tg} \delta, \\ E &= \lambda \frac{\Delta\Psi}{p}, & a' &= n \cos a, \\ & & b' &= -\sin a,\end{aligned}$$

то уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= Aa + Bb + E, \\ \Delta\delta &= Aa' + Bb'.\end{aligned}\quad (10)$$

Величины A , B , E можно получить из «The American Ephemeris» или «The British Nautical Almanac», тогда как a , b , a' , b' можно вычислить по приближенному положению тела.

Принято выражать значения $\Delta\alpha$ в секундах времени, деля a , b и E на 15.

Удобно объединить редукцию за прецессию и нутацию за время, прошедшее от начала года, с редукцией за годичную aberrацию, складывая уравнения (10) с уравнениями (21) из гл. VI. Если прибавить полученные величины к астрометрическому месту для начала года, то сумма даст видимое место. Наоборот, их можно вычесть из видимого места и получить астрометрическое место для начала тропического года. Во всех обычных случаях величины a , b , c , d , a' ; b' , c' , d' можно вычислить, используя либо астрометрическое место, либо видимое место объекта.

5. Геоцентрический параллакс. Горизонтальный параллакс любого небесного тела в некоторый момент времени определяется как угол с вершиной в центре этого тела, опирающийся на экваториальный радиус Земли. Горизонтальный параллакс почти равен видимому вертикальному смещению небесного тела (светила) относительно фона звезд в тот момент, когда это светило восходит или заходит. Постоянная параллакса Солнца равна углу, под которым с расстояния в одну астрономическую единицу виден экваториальный радиус Земли, а ее значение принято равным $8'',80$. Следовательно, если обозначить геоцентрическое расстояние любого тела, выраженное в астрономических единицах, через r , то горизонтальный параллакс дается формулой

$$\sin \pi = \frac{\sin 8'',80}{r}. \quad (11)$$

Если тело не находится очень близко от Земли, то формулу (11) можно заменить следующей более простой формулой:

$$\pi = 8'',80/r.$$

Погрешность при этом приближении меньше $0'',01$, если r больше 0,007 а. е.

Когда тело наблюдается в меридиане, как это всегда имеет место при наблюдениях с меридианным кругом, а иногда и при фотографических наблюдениях, то параллактическое смещение имеется только в склонении, прямое восхождение не подвержено его влиянию. Поправка, которую необходимо придать к наблюденному склонению, чтобы получить истинное склонение, равна

$$\Delta\delta = Q\pi \sin(\varphi' - \delta),$$

где Q означает радиус Земли на широте наблюдателя, выраженный в единицах экваториального радиуса, а φ' — геоцентрическая широта.

Если тело наблюдается вне меридиана, то поправки к наблюденным прямому восхождению и склонению равны

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{Q\pi \cos \varphi' \sin h}{\cos \delta}, \\ \Delta\delta &= \frac{Q\pi \sin \varphi' \sin(\gamma - \delta)}{\sin \gamma},\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos h}$$

и h — часовой угол. Часовой угол определяется по местному звездному времени θ при помощи формулы

$$h = \theta - a.$$

Формулы (12) достаточно для исправления любого наблюдения за параллаксом, если только тело не находится очень близко от Земли. Однако необходимость их применения возникает редко. Большинством наблюдателей принято публиковать вместе с наблюдениями так называемые параллактические множители. Эти множители могут иметь одну из двух форм. Они могут быть компонентами по прямому восхождению и склонению, соответствующими расстоянию в 1 а. е., и в этом случае их необходимо разделить только на фактическое расстояние, или же они могут быть компонентами, соответствующими параллаксу в 1", и в этом случае их необходимо умножить на истинный горизонтальный параллакс.

Прибавление поправок за параллакс к наблюденным координатам объекта дает такие значения координат, которые получились бы в том случае, если бы наблюдения производились из центра Земли, и, следовательно, этот путь действий является удобным, если наблюдения необходимо сравнить с геоцентрической эфемеридой. Однако часто бывает так, что в распоряжении нет точной эфемериды, и тогда наблюдения можно сравнить с теоретическими положениями, вычисленными специально для этой цели. В таких случаях вместо исправления наблюдений за параллакс выгодно отнести вычисленные положения к месту наблюдателя, используя топоцентрические координаты.

Пусть x , y , z — вычисленные экваториальные прямоугольные гелиоцентрические координаты наблюденного объекта в момент времени, когда свет покинул его, предшествующий моменту наблюдения; пусть X , Y , Z — геоцентрические координаты Солнца в момент наблюдения, отнесенные к тем же осям; и пусть x , y , z — топоцентрические координаты центра Земли. Тогда вычисленные расстояние, прямое восхождение и склонение, пригодные для непосредственного сравнения

с наблюдениями, даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \varrho \cos \delta \cos \alpha &= x + X + x, \\ \varrho \cos \delta \sin \alpha &= y + Y + y, \\ \varrho \sin \delta &= z + Z + z. \end{aligned} \quad (13)$$

Координаты x , y , z являются функциями широты наблюдателя и местного звездного времени, определяемыми в единицах седьмого десятичного знака следующими формулами:

$$A = 426,6 \cos \varphi', \quad x = -A \cos \theta, \quad y = -A \sin \theta, \quad z = -426,6 \sin \varphi'.$$

Звездное время θ , отнесенное к равноденствию 1950,0, можно найти в радианной мере по формуле

$$\theta = 0,79115 + 1,0027\,37803 (J. D. - 243\,0000,0) - \lambda,$$

где λ есть долгота наблюдателя, отсчитываемая к западу.

6. Практические указания. Главы VI и VII содержат все принципы, необходимые для сравнения теории с наблюдениями. Процедура для случаев, наиболее часто встречающихся на практике, может быть описана следующим образом.

Случай 1. Наблюденное место — видимое топоцентрическое, вычисляемое — видимое геоцентрическое. Исправить наблюденное место за параллакс при помощи (12) или применения параллактических множителей.

Случай 2. Наблюденное место — видимое топоцентрическое, вычисляемое — астрографическое топоцентрическое. Освободить наблюденное место от звездной годичной aberrации, от нутации и от прецессии с начала текущего года, т. е. вычесть результаты, получаемые по формулам (10) и уравнениям (21) главы VI. Затем привести наблюденное место к тому же равноденствию и экватору, что и вычисленное место при помощи выражений (4) и (5) или посредством специальных таблиц. Освободить наблюденное место от эллиптического члена aberrации, прибавляя результаты, получаемые из уравнения (22) гл. VI.

Случай 3. Наблюденное место — астрометрическое топоцентрическое, вычисляемое — астрографическое топоцентрическое. Привести наблюдение к тому же равноденствию и экватору, что и для вычисленного места, и прибавить результаты уравнения (22) гл. VI.

Случай 4. Наблюденное место — астрометрическое топоцентрическое, вычисляемое — астрометрическое геоцентрическое. Привести наблюдение к тому же равноденствию и экватору, что и для вычисленного места, и исправить наблюдение за параллакс по формулам (12) или при помощи параллактических множителей.

Замечания. Литература

Исправление астрономических наблюдений за влияние прецессии, собственного движения, нутации, aberrации и параллакса принадлежит к предмету сферической астрономии, лишь самый краткий очерк которого мог быть здесь приведен. Ценным пособием по этому вопросу является двухтомное руководство Шовене (W. C h a u v e n, Manual of Spherical and Practical Astronomy, Lippincott, Philadelphia, 1855), переизданное в 1960 г. Возможно, еще более ценным является книга Ньюкома по сферической астрономии (S. Newcom, A Compendium of Spherical Astronomy, Macmillan, New York, 1906). Самой современной книгой по этому вопросу является «Сферическая астрономия» Смарта (Cambridge Univ. Press, London and New York, 1944), переизданная в 1960 г.

Г л а в а VIII

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1. Введение. В любой теории движения тела, будь то относительно другого тела или вокруг своей оси вращения, встречаются определенные постоянные, которые должны быть найдены при помощи наблюдений. Если об этих постоянных ничего не известно заранее, как, например, в случае элементов орбиты вновь открытого объекта, то их определение может оказаться затруднительным. Существует обширная литература для достижения этой конкретной цели в указанном случае. Однако если известны приближенные значения постоянных, то их можно ввести в теорию движения, которая затем может быть использована для вычисления теоретического положения объекта. Сравнение этой теории с наблюдениями покажет, что теория не представляет наблюдений точно. Каждое наблюдение дает остаточную разность в смысле «наблюденное место минус вычисленное место» ($O - C$), которая обусловливается следующими тремя причинами и никакими другими. Во-первых, сама теория может быть неточной; во-вторых, наблюдения отягощены ошибками; в-третьих, в остаточные разности включено влияние ошибок приближенных значений постоянных, использованных при определении вычисленных положений. В этой главе рассматриваются два последних класса ошибок. Мы покажем, каким образом можно улучшить приближенные значения постоянных путем анализа расхождений между наблюдениями и теорией.

Этот метод анализа может быть использован для получения не только более точных значений элементов орбиты, но также улучшенных значений любого другого параметра, от которого зависят наблюдения. В качестве примера можно упомянуть элементы орбиты Земли, массы возмущающих планет, солнечный параллакс, постоянную нутации и другие астрономические постоянные. В каждом отдельном случае необходимы такие наблюдения, чтобы ошибка в принятом значении постоянной оказывала ощутимое влияние.

2. Частотное распределение ошибок наблюдений. Ошибки наблюдений вызываются различными причинами, среди которых следует упомянуть оптические недостатки телескопов, флуктуации плотности атмосферы и дефекты микрометрических винтов, применяемых при измерении фотографических пластинок. Ошибки некоторого ряда наблюдений имеют различную величину. Если мы представим себе величину ошибки, нанесенной на график как абсциссу, а число наблюдений, имеющих эту величину ошибки, как ординату, то построенная кривая называется кривой

частотного распределения, или кривой вероятностного распределения ошибок. Такая кривая вообще имеет форму колокола, который более или менее симметричен относительно точки нулевой ошибки, показывая этим, что положительные и отрицательные ошибки встречаются с одинаковой частотностью и что малые ошибки более многочисленны, чем большие.

В большинстве случаев, с которыми приходится иметь дело в астрономии, частотное распределение ошибок заранее не известно, а может быть определено лишь после весьма тщательного исследования наблюдательного материала, если это представляется вообще возможным. Однако можно сделать предположение относительно распределения ошибок, которое будет правильным, если каждая из ошибок является суммой некоторого числа одновременно возникающих ошибок, имеющих различное происхождение. Такого рода ошибки часто называются случайными ошибками в отличие от систематических ошибок, которые могут иметь общее происхождение. На практике астрономические наблюдения обычно подвержены влиянию ошибок обоих родов, и присутствие систематических ошибок может свести на нет все сделанные выводы. Тем не менее, по крайней мере сначала, мы вынуждены поступить так, как если бы эти ошибки были случайными, так как математической теории систематических ошибок не существует.

Что же касается случайных ошибок, то имеется теорема в теории вероятностей, утверждающая, что частотное распределение суммы случайных переменных величин, каждая из которых имеет собственное произвольное частотное распределение, асимптотически приближается к функции

$$f(x) dx = h\pi^{-1/2} \exp\{-h^2x^2\} dx, \quad (1)$$

если индивидуальные случайные переменные не зависят друг от друга. В этом выражении $f(x) dx$ является относительным числом случаев, в которых случайная переменная величина имеет значение между x и $x + dx$, где π — известная постоянная, выражение $\exp\{-h^2x^2\}$ означает основание натуральных логарифмов, возведенное в степень $-h^2x^2$, а h называется мерой точности. Множитель $h\pi^{-1/2}$ введен для того, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Вместо h мы можем ввести среднее из квадратов случайной переменной x . Квадратный корень из этого среднего называется стандартным отклонением σ или средней квадратичной ошибкой (с. к. о.). Соотношение между σ и h имеет следующий вид:

$$\sigma^2 = h\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\{-h^2x^2\} dx = \frac{1}{2h^2},$$

или

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Частотное распределение (1) называется нормальным, или гауссовым, распределением. Если ошибки обладают такого рода распределением, то стандартное отклонение σ называется средней ошибкой, или стандартной ошибкой. Другим параметром, часто используемым в астрономии, является вероятная ошибка, которая определяется как величина, которая превосходит по абсолютной величине одну половину ошибок и меньше второй их половины. Вероятная ошибка (в. о.), определенная таким образом, имеет определенный смысл, каким бы ни было распределение ошибок. Если распределение является гауссовым, то тогда и только тогда можно показать, что вероятная ошибка связана со стандартным отклонением следующим соотношением:

$$\text{в. о.} = 0,6745\sigma.$$

Таблица 1 показывает для гауссова распределения 10 000 ошибок число тех ошибок, которые превосходят различные кратности вероятной ошибки.

Таблица 1
Распределение ошибок

Кратное в. о.	Число больших ошибок		
1	5000	или 1 в	2 случаях
2	1774	или 1 в	6 »
3	430	или 1 в	23 »
4	70	или 1 в	140 »
5	8	или 1 в	1 200 »
6	1	или 1 в	10 000 »

Любое заметное отклонение от чисел в этой таблице указывает на то, что распределение не является гауссовым.

Если мы имеем линейную комбинацию двух случайных переменных вида

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad (2)$$

в которой a_1 и a_2 — постоянные, а переменные x_1 и x_2 имеют нормальные распределения со стандартными отклонениями σ_1 и σ_2 , то распределение x можно найти следующим образом.

Одновременная, или совместная, вероятность того, что x_1 принимает значение между x_1 и $x_1 + dx_1$, а x_2 — между x_2 и $x_2 + dx_2$, равна

$$\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} \right\} dx_1 dx_2. \quad (3)$$

Можно показать, что для

$$x < a_1 x_1 + a_2 x_2 < x + dx$$

будет иметь место равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right\},$$

где

$$\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2. \quad (4)$$

Следовательно, распределение линейной комбинации двух случайных переменных, каждая из которых имеет нормальное распределение, является нормальным распределением со стандартным отклонением, определяемым формулой (4). Этот закон можно распространить на линейную комбинацию любого числа случайных переменных.

3. Наиболее вероятное значение измеренной величины. Рассмотрим n измерений x_1, x_2, \dots, x_n некоторой величины и обозначим истинное значение этой величины через a . Тогда ошибка ϵ_j любого измерения x_j равна $\epsilon_j = x_j - a$. Если эти ошибки обладают нормальным распределением, то вероятность любого измерения x_j равна

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_j - a)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

а совместная вероятность для этих n измерений равна

$$\left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2] \right\}. \quad (5)$$

Наиболее вероятное значение величины a определяется как значение, при котором выражение (5) имеет максимум или величина имеет

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_j - a)^2 \quad (6)$$

минимум. Чтобы привести (6) к минимуму, достаточно иметь

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial a} = 0 \quad \text{или} \quad 2\Sigma (x_j - a) = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1}{n} \sum x_j. \quad (7)$$

Таким образом, наивероятнейшим значением величины a является среднее арифметическое из этих наблюдений. Наиболее вероятное значение величины σ можно найти из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[n \ln \sigma + \frac{\Sigma (x_j - a)^2}{2\sigma^2} \right] = 0 \quad \text{или} \quad \frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_j - a)^2 = 0,$$

откуда

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_j - a)^2. \quad (8)$$

Заметим, что в уравнении (8) a означает истинное (неизвестное) значение измеряемой величины, а не наивероятнейшее значение ее, определяемое формулой (7).

Если частотное распределение ошибок не является нормальным распределением, то все же мы можем найти наиболее вероятные значения для a и σ , если известен вид этого распределения. Пусть вероятность любого единственного измерения есть $f(a, x_1, x_2, \dots, x_n)$, где f есть некоторая известная функция. Тогда совместная вероятность равна

$$\prod_{j=1}^n f(x_j - a),$$

и наиболее вероятные значения можно найти из уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} = 0.$$

Как видно из выражения (8), средняя ошибка среднего арифметического (7) может быть определена следующим образом. Пусть имеется n наблюдений $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ с нормально распределенными истинными ошибками ε_j . Ошибка среднего арифметического равна

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum \varepsilon_j,$$

что представляет собой линейную комбинацию n случайных переменных. Если σ — средняя ошибка одного наблюдения, то в силу формулы (4) имеем

$$\sigma_{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

откуда $\sigma_{\bar{\varepsilon}} = \sigma n^{-1/2}$, или средняя ошибка среднего арифметического равна средней ошибке одного наблюдения, деленной на квадратный корень из числа наблюдений.

Мы видели, что если бы было известно истинное значение измеряемой величины, то средняя ошибка одного наблюдения давалась бы формулой (8). Однако это истинное значение не известно; мы располагаем лишь оценкой, которая дается формулой (7). После того как эта оценка получена, мы можем вычесть ее из каждого из измеренных значений; разности называются остаточными разностями и обозначаются через v . Обозначим среднее арифметическое из x_j через \bar{x} , истинную ошибку наблюдения x_j , как и ранее, через ε_j , а истинное значение измеряемой величины — через a . Тогда

$$v_j = x_j - \bar{x},$$

$$\varepsilon_j = x_j - a.$$

Обозначив через $[x]$ сумму величин x_j , а через $[\varepsilon]$ — сумму истинных ошибок ε_j , мы имеем

$$[v] = [x] - na = n\bar{x} - na,$$

откуда

$$\bar{x} = a + \frac{[v]}{n}$$

и

$$v_j = \varepsilon_j - \frac{[v]}{n}.$$

Теперь, если σ_v является стандартным отклонением остаточных разностей v_j , а σ_{ε} — стандартным отклонением ошибок ε_j , то мы имеем

$$\sigma_v^2 = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \sigma_{\varepsilon}^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma_{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_{\varepsilon}^2.$$

Поскольку $\sigma_v^2 = [v^2]/n$, то отсюда следует, что

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{[v^2]}{n-1},$$

или

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

В таком случае, обозначая среднюю ошибку среднего арифметического через μ , имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \quad (9)$$

4. Веса наблюдений. Обычно мы вынуждены поступать так, как если бы качество различных наблюдений было одинаковым, но вообще это не так. Предположим, что средняя ошибка наблюдения x_1 равна σ_1 , а средняя ошибка наблюдения $x_2 = \sigma_2$. Тогда совместная вероятность дается выражением

$$\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - a)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2 - a)^2}{2\sigma_2^2} \right\}.$$

Функция, которую необходимо свести к минимуму, имеет вид

$$\frac{(x_1 - a)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - a)^2}{\sigma_2^2},$$

откуда

$$a = \frac{(x_1/\sigma_1^2) + (x_2/\sigma_2^2)}{(1/\sigma_1^2) + (1/\sigma_2^2)}. \quad (10)$$

Если мы положим $p_1 = 1/\sigma_1^2$ и $p_2 = 1/\sigma_2^2$, то

$$a = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2},$$

или для n наблюдений

$$a = \frac{[px]}{[p]}.$$

Величина p_j называется весом наблюдения x_j .

5. Непрямые измерения. Как упоминалось в разд. 1, обычными случаями в астрономии являются такие, когда искомая величина не измеряется непосредственно; чаще всего измеряемая величина является некоторой известной функцией от искомой величины. Эта искомая величина обычно является постоянной, значение которой уже известно приближенно. В самом простом случае ищут лишь одну величину; обозначим эту величину через x , а измеряемую величину — через $y = f(x)$. Допустим, что мы имеем n наблюдений y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, по которым требуется вывести наиболее вероятное значение x . Обозначим приближенно известное значение x через x_c , значение, которое необходимо вывести по наблюдениям, — через x_0 , а разность $x_0 - x_c$ — через Δx . Процедура состоит в вычислении y по x_c для каждого наблюдения, что дает y_c , и затем в образовании разностей $\Delta_j y = y_j - y_c$. Поскольку вообще y является функцией как от x , так и от других параметров, то величина y_c меняется при переходе от наблюдения к наблюдению; чтобы показать это изменение, мы можем записать $\Delta_j y = y_j - y_{jc}$.

Теперь Δy можно выразить как функцию от Δx при помощи разложения Тейлора в виде

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + \dots$$

Предполагается, что Δx настолько мало, что можно пренебречь его квадратом и более высокими степенями, откуда с достаточной сте-

пенью точности следует

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x,$$

так что для каждого наблюдения мы можем найти уравнение следующего вида:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j \Delta x = \Delta_j y, \quad (11)$$

где величина в скобках является известным числом. Уравнение (11) называется условным уравнением, а Δx называется неизвестным.

Запишем для краткости уравнение (11) в виде

$$a \Delta x = \Delta y. \quad (12)$$

Как и в предыдущих разделах, условие для наиболее вероятного значения неизвестного Δx имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \Delta x} \sum (a_j \Delta x - \Delta_j y)^2 = 0,$$

или

$$[a^2 \Delta x] = [a \Delta y], \quad (13)$$

откуда

$$\Delta x = \frac{[a \Delta y]}{[a^2]} \quad (14)$$

и, наконец, x_0 определяется формулой

$$x_0 = x_c + \Delta x.$$

Допустим, что дано n уравнений вида (12), веса которых предполагаются одинаковыми, и что для q из них величина a является постоянной. Тогда эти q уравнений вносят в (13) член вида

$$qa^2 \Delta x = a [\Delta y] = \frac{\sqrt{q} a [\Delta y]}{\sqrt{q}}.$$

Сравнение с уравнением (12) показывает, что мы можем написать условное уравнение вида

$$\sqrt{q} a \Delta x = \frac{[\Delta y]}{\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{q} [\Delta y]}{q},$$

или

$$\sqrt{q} a \Delta x = \sqrt{q} \bar{\Delta y}, \quad (15)$$

которое показывает, что эти q уравнений можно заменить одним уравнением (15), где $\bar{\Delta y}$ означает среднее из q значений Δy . В этом случае говорят, что уравнение

$$a \Delta x = \bar{\Delta y}$$

имеет вес q , и его необходимо умножить на \sqrt{q} , прежде чем использовать с остальными $n-q$ уравнениями для получения уравнений (13) и (14).

6. Условные уравнения. В общем случае требуется определить не одно, а n неизвестных по ряду наблюдений. Обозначим наблюдаемую величину, например сферическую координату тела, через x , и пусть Δx означает

расхождение в смысле наблюденное x минус вычисленное $x(O-C)$ между каким-нибудь наблюдением и соответствующим вычисленным значением. Пусть c_j , $j = 1, 2, \dots, n$, означает принятые значения постоянных, использованных при вычислении этих расчетных значений, и пусть поправки к принятым значениям постоянных обозначены через ξ_j , так что исправленное значение любой постоянной равно $c_j + \xi_j$. Тогда условные уравнения, выведенные тем же способом, что и уравнения (11), могут быть написаны в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial c_1} \xi_1 + \frac{\partial x}{\partial c_2} \xi_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial c_n} \xi_n = \Delta x, \quad (16)$$

Допустим пока, что Δx не подвержено влиянию первых двух классов ошибок, упомянутых в разд. 1; тогда оно целиком определяется уравнением (16). Частные производные, входящие в (16) в качестве коэффициентов, могут быть вычислены и выражены числами; при этом почти всегда достаточно трех значащих цифр. Неизвестными в этих уравнениях являются ξ_j , которые необходимо определить. Из теории линейных алгебраических уравнений известно, что n уравнений типа (16) составляют необходимое и достаточное количество уравнений для определения неизвестных ξ_j ; при условии, что все эти уравнения независимы, т. е. если определитель из коэффициентов левой части не обращается в нуль. Если эти уравнения независимы, то можно найти значения величин ξ_j , которые точно удовлетворят n уравнениям, и если бы наблюдения не были отягощены ошибками, то ничего больше не требовалось бы. Однако присутствие случайных ошибок в правых частях этих уравнений мешает определить истинные значения ξ_j ; можно найти лишь приближенные значения, которые будут ближе к истине или дальше от нее, смотря по тому, будут ли ошибки наблюдений меньше или больше. Влияние случайных ошибок можно ослабить при помощи увеличения числа наблюдений и числа уравнений. В астрономических задачах число используемых уравнений редко бывает меньше $2n$ и часто бывает еще больше; когда необходима самая высокая степень точности, для определения нескольких неизвестных могут быть использованы несколько сотен и даже тысяч наблюдений.

Когда число уравнений больше числа неизвестных, то в этом случае из-за ошибок наблюдений точное решение не существует; невозможно найти значения величин ξ_j , которые точно удовлетворяют всем уравнениям. Если любые частные значения величин ξ_j подставлены в левые части этих уравнений, и результаты в отдельности вычтены из Δx , то остающиеся числа называются остаточными разностями «после решения». Как мы видели ранее в этой главе, наиболее вероятными значениями неизвестных ξ_j являются те значения, которые обращают сумму квадратов этих остаточных разностей в минимум; это и есть принцип наименьших квадратов.

Непосредственно не очевидно, как следует решать эти уравнения, чтобы получить требуемую минимальную сумму квадратов остаточных разностей; поэтому остальная часть настоящей главы посвящается изложению метода, быстро ведущего к этой цели, и, что в равной степени важно, методу оценки неточности в значениях неизвестных, когда они окончательно определены.

7. Веса уравнений. Каждое условное уравнение может быть результатом единственного наблюдения; в этом случае, если несколько наблюдений

имеют, по предположению, одинаковую точность, говорят, что эти уравнения имеют равный вес. С другой стороны, уравнение может выражать результат нескольких наблюдений, либо может быть известно, что точность различных наблюдений меняется; в любом из этих случаев может оказаться необходимым приписать этим уравнениям различные веса. Если точность различных наблюдений одинакова, то вес уравнения можно выбрать пропорциональным числу наблюдений, от которых оно зависит. Если вероятные ошибки наблюдений являются известным образом меняющимися величинами, то вес одного наблюдения следует взять обратно пропорциональным квадрату этой ошибки. Таким образом, вес p некоторого уравнения, основанного на q наблюдениях, имеющих вероятные ошибки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$, дается следующей формулой:

$$p = k \left(\frac{1}{\varepsilon_1^2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} + \dots + \frac{1}{\varepsilon_q^2} \right),$$

где k есть постоянная, которую необходимо выбрать так, чтобы веса различных уравнений менялись в удобных пределах, например от 1 до 9 или же от 0,1 до 0,9. Удержание в p более одной значащей цифры редко бывает оправданным, а более двух — почти никогда.

Если значение k фиксировано, а ε_i известны, то вероятная ошибка единицы веса, записываемая часто в виде в. о. 1, равна $k^{1/2}$.

Однако часто случается так, что вероятная ошибка наблюдения заранее неизвестна, но должна быть выведена из самих уравнений. В таких случаях может оказаться удобным приписать каждому наблюдению вес в единицу, и тогда вес уравнения равен числу наблюдений, от которых оно зависит.

Когда условные уравнения имеют неравные веса, то наиболее вероятным результатом не является тот, который обращает сумму квадратов остаточных разностей в минимум; вместо этого необходимо обратить в минимум сумму квадратов чисел, получающихся умножением каждой остаточной разности на корень квадратный из ее веса.

8. Составление нормальных уравнений. Допустим, что имеется m условных уравнений, содержащих n неизвестных величин, $m > n$; тогда критерию наименьших квадратов можно удовлетворить объединением этих m уравнений в n нормальных уравнений, как было указано в разд. 5, и решением этих нормальных уравнений. Вместо умножения каждого уравнения на квадратный корень из его веса может оказаться предпочтительным оперировать самим весом, организуя вычисления так, чтобы получить тот же результат, как если бы использовался этот квадратный корень. В этом случае умножим каждое уравнение на его вес и вычислим сумму всех численных величин, входящих в каждое уравнение. Результат можно записать согласно схеме табл. 2, где для удобства буквенные величины и знак равенства помещены вверху, вместо того чтобы находиться в уравнениях. Все символы ниже этой строки означают числа; частные производные, обозначенные для краткости через a , являются отвлеченными числами, тогда как Δx в уравнениях (16), обозначенные через C , обычно будут выражены в секундах дуги, градусах или радианах. Смешение размерностей в Σ не вызовет никаких трудностей.

Первое нормальное уравнение, называемое нормальным уравнением относительно ξ_1 , получается умножением первого из исходных уравнений на $p_1 a_{11}$, второго — на p_2, a_{21} , третьего — на $p_3 a_{31}$ и т. д. и составлением суммы получающихся при этом m уравнений. Нормальное уравнение

относительно ξ_2 получается умножением первого из исходных уравнений на $p_1 a_{12}$, второго — на $p_2 a_{22}$ и т. д. и суммированием получающихся m уравнений. Повторение этого процесса n раз достанет n нормальных

Таблица 2

Схема для условных уравнений

ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_n	=	C	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	C_1	Σ_1	
$p_1 a_{11}$	$p_1 a_{12}$	$p_1 a_{13}$...	$p_1 a_{1n}$	$p_1 C_1$	$p_1 \Sigma_1$	
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	C_2	Σ_2	
$p_2 a_{21}$	$p_2 a_{22}$	$p_2 a_{23}$...	$p_2 a_{2n}$	$p_2 C_2$	$p_2 \Sigma_2$	
...	
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	C_m	Σ_m	
$p_m a_{m1}$	$p_m a_{m2}$	$p_m a_{m3}$...	$p_m a_{mn}$	$p_m C_m$	$p_m \Sigma_m$	

уравнений. Коэффициенты этих нормальных уравнений следует фактически вычислять по одному, накапливая отдельные произведения. Так, например, коэффициент при ξ_2 в нормальном уравнении относительно ξ_1 равен

$$p_1 a_{11} a_{12} + p_2 a_{21} a_{22} + \dots + p_m a_{m1} a_{m2}$$

и свободный член в нормальном уравнении относительно ξ_3 равен

$$p_1 a_{13} C_1 + p_2 a_{23} C_2 + \dots + p_m a_{m3} C_m.$$

Легко заметить, что величины слева от знака равенства в нормальных уравнениях образуют квадратную таблицу, симметричную относительно диагонали, проведенной из верхнего левого угла в нижний правый угол. Таким образом, числа, расположенные ниже и слева от главной диагонали, вычислять не нужно.

Та же операция, произведенная над суммами, представляет ценный контроль составления нормальных уравнений. Каждый результат должен быть суммой чисел, образуемой при продвижении влево вплоть до главной диагонали, а затем вверх по столбцу. Если число условных уравнений более десяти, то обычно имеет смысл удерживать в нормальных уравнениях на один десятичный знак больше, чем в условных уравнениях; если же это число порядка сотни, то можно сохранить два лишних знака.

9. Нормальные уравнения. Нормальные уравнения могут быть записаны, как показано в табл. 3, в которой для новых чисел применяются те же обозначения, что и использованные в условных уравнениях.

Мы получили n уравнений с n неизвестными, которые необходимо решить. Симметрия, обусловленная методом, примененным для получения этих уравнений, упрощает их решение.

Из теории алгебраических уравнений известно, что система из n независимых линейных уравнений относительно n неизвестных допуска-

Таблица 3
Нормальные уравнения

ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_n	=	C	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}		C_1	Σ_1
	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}		C_2	Σ_2
		a_{33}	...	a_{3n}		C_3	Σ_3
		
				a_{nn}		C_n	Σ_n

ет единственное решение тогда и только тогда, если определитель из коэффициентов отличен от нуля. В этой системе уравнений определитель из коэффициентов равен

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

и $a_{ij} = a_{ji}$. Значение неизвестного ξ_i равно отношению двух определителей. В этом отношении знаменателем является определитель из коэффициентов, написанный выше, а числителем — определитель, который можно получить из первого подстановкой вместо i -го столбца значений C . Задача состоит в том, чтобы найти самый эффективный метод определения численных значений отношений этих различных определителей.

Хотя в строго математическом смысле решение может быть получено всегда, если определитель в знаменателе отличен от нуля, на практике часто бывает так, что этот определитель, не будучи равен нулю, является очень малой величиной, т. е. малой величиной по сравнению с произведением величин, расположенных по главной диагонали этого определителя. Например, если главная диагональ состоит из чисел порядка единицы, то 0,01 есть малая величина. Если это имеет место и если числители не являются также малыми, то физическая интерпретация заключается просто в том, что исходные наблюдения не вполне пригодны для определения искомых величин, как, например, в случае, когда пытаются определить малый угол по его косинусу. В результатах будет существовать потеря значащих цифр, и первым побуждением вычислителя будет преодолеть эту трудность путем удержания лишних десятичных знаков в уравнениях. Таким путем можно получить формальное решение с любым желаемым числом значащих цифр, однако это оказывается бесполезной затратой труда, коль скоро речь идет о каком-либо физическом смысле такого решения. На это укажут большие вероятные ошибки неизвестных. Для вычислителя имеет смысл оценивать эти ошибки, прежде чем увеличивать число значащих цифр в уравнениях, и благодаря такой оценке он во многих случаях избавит себя от ненужной работы.

Еще одна трудность, часто возникающая на практике, заключается в том, что как определитель в знаменателе, так и некоторые или все определители в числителе являются малыми величинами. В этом случае говорят, что решение является почти неопределенным, и это происходит тогда, когда два или более неизвестных находятся в точной корреляции, т. е. существует определенное множество решений. В этом случае уравнения почти точно удовлетворяются для широкого интервала значений коррелирующих неизвестных при условии, что они связаны друг с другом определенным линейным соотношением. Вообще целесообразно в таких случаях не пытаться решать уравнения относительно каждого из коррелирующих неизвестных в отдельности, а вместо этого решить их относительно линейной комбинации этих неизвестных и относительно только одного из каждой пары самих коррелирующих неизвестных. При такой методике не будет потеряна реальная информация, а вычислитель будет избавлен от большого количества работы. Кроме того, при этом гораздо легче усмотреть физический смысл полученных результатов.

Эти тонкости работы рассматриваются ниже. Сначала же дается формальное решение нормальных уравнений.

10. Формальное решение. Решению нормальных уравнений было уделено внимание многих авторов, что представляется естественным для вопроса, имеющего столь широкое применение. Теория проста и понятна, ее можно найти почти в любой книге по теории уравнений. Проблема заключается в расположении фактических вычислений в форме, требующей записи немногих чисел, чтобы сделать доступными все относящиеся к задаче сведения, содержащиеся в неявном виде в уравнениях, и обеспечить достаточный контроль численных операций. Метод, излагаемый здесь, представляет собой результат совместных

Таблица 4
Решение нормальных уравнений

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	C_1	C_2	C_3	C_4	Σ
N_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0	Σ_1
N_2		a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0	Σ_2
N_3			a_{33}	a_{34}	0	0	1	0	Σ_3
N_4				a_{44}	0	0	0	1	Σ_4
N_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0	Σ_1
E_1	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	$1/a_{11}$	0	0	0	Σ_1/a_{11}
E_2		d_{22}	d_{23}	d_{24}	e_1	1	0	0	Σ_{21}
		1	b_{23}	b_{24}	e_1/d_{22}	$1/d_{22}$	0	0	Σ_{21}/d_{22}
E_3			d_{33}	d_{34}	f_1	f_2	1	0	Σ_{31}
			1	b_{34}	f_1/d_{33}	f_2/d_{33}	$1/d_{33}$	0	Σ_{31}/d_{33}
E_4				d_{44}	g_1	g_2	g_3	1	Σ_{41}
				1	g_1/d_{44}	g_2/d_{44}	g_3/d_{44}	$1/d_{44}$	Σ_{41}/d_{44}
S_4					s_{41}	s_{42}	s_{43}	s_{44}	Σ_{44}
S_3						s_{31}	s_{32}	s_{33}	Σ_{34}
S_2						s_{21}	s_{22}	s_{23}	Σ_{24}
S_1	1					s_{11}	s_{12}	s_{13}	Σ_{14}

усилий, приложенных в различное время многими опытными вычислителями. По-видимому, он впервые в принципе был задуман в 1878 г. М. Г. Дулиттлем, однако его детали с тех пор были сильно изменены, и приписывать этот метод в том виде, который он имеет в настоящее время, какому-нибудь одному лицу не представляется возможным. Согласно принципу,гласящему, что ни одно решение не представляет большой ценности без оценки связанных с этим решением погрешностей, любому методу, который не удовлетворяет такому требованию, не уделяется никакого внимания. Для того чтобы избежать громоздких обозначений, решение в табл. 4 дано в буквенном виде для случая четырех неизвестных. Оно сопровождается численным примером. Однажды усвоенный принцип решения легко можно распространить на любое число неизвестных.

Сначала напишем по порядку нормальные уравнения, но свободные члены запишем вверху в строку вместо того, чтобы писать их в столбец. Под каждым свободным членом напишем 1 в строке, содержащей уравнение, которому он принадлежит, и 0 — в остальных строках. Запишем контрольные суммы в правом столбце. Они отличаются от сумм, полученных при составлении нормальных уравнений, и равны

$$\sum_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + 1,$$

$$\sum_2 = a_{12} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + 1,$$

$$\sum_3 = a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{34} + 1,$$

$$\sum_4 = a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{44} + 1.$$

1. Перепишем первое нормальное уравнение в следующую строку.

2. Умножим каждое число в строке N_1 на $1/a_{11}$, чтобы получить строку E_1 , и проверим контрольную сумму, ставя «птичку» сбоку. Это есть уравнение, при помощи которого определятся ξ_1 после того, как станут известны ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 ; его часто называют элиминационным уравнением относительно ξ_1 .

3. Закроем верхнюю строку N_1 полоской бумаги и вычислим

$$d_{22} = a_{22} - b_{12}a_{12}, \quad e_1 = -b_{12},$$

$$d_{23} = a_{23} - b_{12}a_{13}, \quad \sum_{21} = \sum_2 - b_{12}\sum_1,$$

$$d_{24} = a_{24} - b_{12}a_{14},$$

проверяя контрольную сумму.

4. Умножим каждое число в только что написанной строке на $1/d_{22}$, чтобы получить строку E_2 , и проверим контрольную сумму.

5. Закроем строки N_1 и N_2 и вычислим

$$d_{33} = a_{33} - b_{13}a_{13} - b_{23}d_{23}, \quad f_1 = -b_{13} - b_{23}e_1,$$

$$d_{34} = a_{34} - b_{13}a_{14} - b_{23}d_{24}, \quad f_2 = -b_{23},$$

$$\sum_{31} = \sum_3 - b_{13}\sum_1 - b_{23}\sum_{21},$$

проверяя контрольную сумму.

6. Умножим каждое число только что написанной строки на $1/d_{33}$, чтобы получить строку E_3 , и проверим контрольную сумму.

7. Закроем строки N_1 , N_2 и N_3 и вычислим

$$d_{44} = a_{44} - b_{14}a_{14} - b_{24}d_{24} - b_{34}d_{34},$$

$$g_1 = -b_{14} - b_{24}e_1 - b_{34}f_1,$$

$$g_2 = -b_{24} - b_{34}f_2,$$

$$g_3 = -b_{34},$$

$$\sum_{41} = \sum_4 - b_{14}\sum_1 - b_{24}\sum_{21} - b_{34}\sum_{31}.$$

8. Умножим каждое число в только что написанной строке на $1/d_{44}$, чтобы получить строку E_4 , и проверим контрольную сумму.

Шаги с 1 по 8 составляют то, что известно под названием «восходящее решение». Легко видеть, что строка E_4 дает значение ξ_4 , выражение через C_1 , C_2 , C_3 и C_4 . В исходящем решении получаются аналогичные выражения для остальных неизвестных. В приведенной схеме строка E_4 переписывается в строку ниже и обозначается через S_4 , однако здесь это сделано для удобства в обозначениях, а на практике от записи этой строки дважды никакого выигрыша не получится.

9. Стока S_3 получается при помощи формул

$$s_{31} = f_1/d_{33} - s_{41}b_{34},$$

$$s_{32} = f_2/d_{33} - s_{42}b_{34},$$

$$s_{33} = 1/d_{33} - s_{43}b_{34},$$

$$s_{34} = -s_{44}b_{34}.$$

$$\sum_{34} = \sum_{31}/d_{33} - \sum_{44}b_{34}.$$

10. Стока S_2 получается по формулам

$$s_{21} = e_1/d_{22} - s_{31}b_{23} - s_{41}b_{24},$$

$$s_{22} = 1/d_{22} - s_{32}b_{23} - s_{42}b_{24},$$

$$s_{23} = -s_{33}b_{23} - s_{43}b_{24},$$

$$s_{24} = -s_{34}b_{23} - s_{44}b_{24},$$

$$\sum_{24} = \sum_{21}/d_{22} - \sum_{34}b_{23} - \sum_{44}b_{24}.$$

11. Стока S_1 получается посредством формул

$$s_{11} = 1/a_{11} - s_{21}b_{12} - s_{31}b_{13} - s_{41}b_{14},$$

$$s_{12} = -s_{22}b_{12} - s_{32}b_{13} - s_{42}b_{14},$$

$$s_{13} = -s_{23}b_{12} - s_{33}b_{13} - s_{43}b_{14},$$

$$s_{14} = -s_{24}b_{12} - s_{34}b_{13} - s_{44}b_{14},$$

$$\sum_{14} = \sum_1/a_{11} - \sum_{24}b_{12} - \sum_{34}b_{13} - \sum_{44}b_{14}.$$

Легко видеть, что величины s_{34} , s_{23} , s_{24} , s_{12} , s_{13} , s_{14} соответственно совпадают с величинами s_{43} , s_{32} , s_{42} , s_{21} , s_{31} , s_{41} . Следовательно, их не нужно вычислять, а можно вписать по усмотрению на соответствующие места. На каждом этапе вычислений необходимо проверять контрольные суммы.

12. Теперь остается вычислить значения неизвестных по следующим формулам:

$$\xi_1 = s_{11}C_1 + s_{12}C_2 + s_{13}C_3 + s_{14}C_4,$$

$$\xi_2 = s_{21}C_1 + s_{22}C_2 + s_{23}C_3 + s_{24}C_4,$$

$$\xi_3 = s_{31}C_1 + s_{32}C_2 + s_{33}C_3 + s_{34}C_4,$$

$$\xi_4 = s_{41}C_1 + s_{42}C_2 + s_{43}C_3 + s_{44}S_4$$

и табулировать их вместе с множителями, которые, будучи умножены на вероятную ошибку единицы веса, дадут вероятные ошибки этих неизвестных. Эти множители суть соответственно $s_{11}^{1/2}$, $s_{22}^{1/2}$, $s_{33}^{1/2}$, $s_{44}^{1/2}$.

13. Далее необходимо подставить значения неизвестных в нормальные уравнения, которые должны удовлетворяться с точностью до ошибок округления.

14. Затем подставить значения неизвестных в первоначальные уравнения и вычислить остаточные разности v_j . Если величины v_j обладают гауссовым распределением, то вероятная ошибка единицы веса дается следующей формулой:

$$v. o.1 = 0,6745 \left(\frac{\sum_{j=1}^m p_j v_j^2}{m-n} \right)^{1/2}$$

и вероятная ошибка любого неизвестного ξ_j определяется умножением на множитель, вычисленный ранее.

Если закон распределения остаточных разностей не является гауссовым, то это служит хорошим доказательством того, что наблюдения отягощены некоторыми систематическими ошибками, кроме тех, которые обозначаются через ξ_1 , ξ_2 , ..., ξ_n . В этом случае вероятные ошибки, вычисленные только что указанным способом, могут быть совершенно иллюзорными, а физическая интерпретация самих неизвестных — сомнительной. Эта сомнительность будет тем более серьезной, чем больше отклонение остаточных разностей от гауссова распределения.

Заметим, что если число условных уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), то вероятную ошибку вычислить невозможно; эти уравнения будут точно удовлетворяться, и в.о.1 будет вида 0/0. Если m превосходит n менее чем в 2 раза, то вероятная ошибка определяется неточно и заслуживает малого доверия.

11. Численный пример. В качестве иллюстрации содержания этой главы приводится следующий пример. Его необходимо проработать как упражнение каждому вычислителю, применяющему эту схему впервые.

Система условных уравнений вместе с их весами дана в табл. 5. Величины v являются остаточными разностями, определенными после решения.

Сначала необходимо отметить, что коэффициенты имеют различные порядки величины; например, коэффициенты при ξ_4 примерно в десять раз больше остальных. Предстоящая вычислительная работа упростится, если их привести примерно к одной и той же величине. Поэтому отдельные столбцы умножаются на следующие множители:

$$0,34; 0,53; 0,21; 0,068; 0,080,$$

Таблица 5

Условные уравнения

<i>p</i>	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	=	<i>C</i>	<i>v</i>
1	+1,155	+1,507	+2,622	-12,29		+9",76	+0",79
2	+2,417	+0,833	+4,702	+14,62		+12,43	-0,44
1	+0,931	+1,904	+1,554	+6,10		+5,48	+0,41
1	+2,955	+0,725	+3,324	-10,48		+6,98	+0,44
1	+1,164	+1,820	+0,949	+11,75		+1,60	-0,24
3	+1,188	+0,828	-0,016	+11,48		-2,37	+0,44
3	+1,199	+1,735	-0,647	-12,11		-4,49	-0,40
1	+0,947	+1,854	-1,318	-6,38		-6,30	-0,10

причем каждое число приблизительно является обратной величиной наибольшего числа в соответствующем столбце из приведенных выше; это равносильно введению новых неизвестных $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, таких, что

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 4,25\eta_1, & \xi_3 &= 2,62\eta_3, \\ \xi_2 &= 6,62\eta_2, & \xi_4 &= 0,85\eta_4.\end{aligned}$$

Новые условные уравнения даются в табл. 6. Произведение каждого уравнения на его вес, всякий раз когда этот вес отличен от единицы, приводится непосредственно под уравнением, и добавлены контрольные суммы.

Таблица 6

Преобразованные условные уравнения

η_1	η_2	η_3	η_4	=	<i>C</i>	Σ
+0,393	+0,799	+0,551	-0,836		+0,781	+1,688
+0,822	+0,441	+0,987	+0,994		+0,994	+4,238
+1,644	+0,882	+1,974	+1,988		+1,988	+8,476
+0,317	+1,009	+0,326	+0,415		+0,438	+2,505
+1,005	+0,384	+0,698	-0,713		+0,558	+1,932
+0,396	+0,965	+0,199	+0,799		+0,128	+2,487
+0,404	+0,439	-0,003	+0,781		-0,190	+1,431
+1,212	+1,317	-0,009	+2,343		-0,570	+4,293
+0,408	+0,920	-0,136	-0,823		-0,359	+0,010
+1,224	+2,760	-0,408	-2,469		-1,077	+0,030
+0,322	+0,983	-0,277	-0,434		-0,504	+0,090

Нормальные уравнения и их решение представлены в табл. 7 в соответствии с описанной схемой. Контрольные суммы, использованные для проверки составления нормальных уравнений, не напечатаны.

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -0,604 \pm 1,35 \text{ в. о. } 1_{\eta}, & \xi_1 &= -2",57 \pm 0,46 \text{ в. о. } 1_{\xi}, \\ \eta_2 &= +0,111 \pm 0,73 \text{ в. о. } 1_{\eta}, & \xi_2 &= +0",73 \pm 0,39 \text{ в. о. } 1_{\xi}, \\ \eta_3 &= +1,532 \pm 1,04 \text{ в. о. } 1_{\eta}, & \xi_3 &= +4",01 \pm 0,22 \text{ в. о. } 1_{\xi}, \\ \eta_4 &= -0,030 \pm 0,38 \text{ в. о. } 1_{\eta}, & \xi_4 &= -0",026 \pm 0,026 \text{ в. о. } 1_{\xi}.\end{aligned}$$

Таблица 7
Нормальные уравнения и решение

η_1	η_2	η_3	η_4	C_1 +1,859	C_2 +0,544	C_3 +3,238	C_4 +1,869	Σ
N_1	+3,866	+4,102	+2,464	+0,836	1	0	0	+12,268
N_2		+7,208	+1,448	-0,545	0	1	0	+13,213
N_3			+3,017	+1,747	0	0	1	+9,676
N_4				+8,044	0	0	0	+11,082
N_1	+3,866	+4,102	+2,464	+0,836	1	0	0	+12,268
E_1	1	+1,061	+0,637	+0,216	-0,259	0	0	+3,173
			+2,856	-1,166	-1,432	-1,061	1	+0,197
E_2		1	-0,408	-0,501	-0,371	+0,350	0	+0,069
			+0,972	+0,630	-1,070	+0,408	1	+1,942
E_3			1	+0,648	-1,101	+0,420	+1,029	+1,998
				+6,738	-0,054	+0,237	-0,648	+7,272
$E_4 = S_4$				1	-0,008	+0,035	-0,096	+1,079
S_3					-1,096	+0,397	+1,091	-0,096
S_2		1			-0,822	+0,530	+0,397	+0,035
S_1	1				-1,831	-0,823	-1,095	-0,008
								+0,903

Эти значения величин η подставляются в нормальные уравнения, и мы находим, что уравнения удовлетворяются с точностью до ошибок округления. Затем в исходные условные уравнения подставляются значения величин ξ , что дает остаточные разности v . Сумма квадратов величин v , если каждый квадрат умножен на его вес, равна 2,50, откуда

$$\text{в. о. } 1_{\xi} = 0,6745(2,50/4)^{1/2} = \pm 0'',53.$$

Легко видеть, что из этих восьми остаточных разностей семь меньше вероятной ошибки единицы веса, что не является существенным, так как не все остаточные разности имеют единичный вес. Вероятная величина остаточной разности веса r равна $\pm 0'',53/r^{1/2}$. Когда остаточные разности сравниваются со своими вероятными величинами, то видно, что четыре из них больше, а четыре — меньше последних по абсолютной величине. Кроме того, половина остаточных разностей положительна, а половина отрицательна, и ни одна остаточная разность не достигает своей удвоенной вероятной величины. Все эти условия более благоприятны, чем те, которые часто встречаются, и они указывают, что результаты имеют право на большое доверие.

Окончательные результаты таковы:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -2'',57 \pm 0'',24, & \xi_3 &= +4'',01 \pm 0'',12, \\ \xi_2 &= +0'',73 \pm 0'',21, & \xi_4 &= -0'',026 \pm 0'',014.\end{aligned}$$

12. Комбинации неизвестных. После решения нередко требуется объединить два или более неизвестных. Например, при исправлении почти круговой орбиты может оказаться выгодным использовать в качестве неизвестных $\Delta(e \sin \tilde{\omega})$ и $\Delta(e \cos \tilde{\omega})$, где e и $\tilde{\omega}$ — эксцентриситет и долгота перигея; а после этого требуется найти Δe и $\Delta \tilde{\omega}$ вместе с их вероятными ошибками. Комбинация самих неизвестных обычно

не встречает никаких затруднений, однако метод определения вероятных ошибок непосредственно не очевиден.

Пусть требуется определить вероятные ошибки двух величин u и v , которые являются известными функциями от ξ_1 и ξ_2 . Вероятная ошибка величины u дается формулой вида

$$\text{в. о. } 1_{\xi} \left[s_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)^2 + s_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)^2 + 2s_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \right]^{1/2},$$

а вероятная ошибка величины v — аналогичным выражением.

Часто необходима вероятная ошибка линейной комбинации неизвестных. Допустим, например, что

$$u = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3,$$

где величины k — постоянные. Тогда вероятная ошибка u определяется следующим выражением:

$$\text{в. о. } 1_{\xi} (s_{11} k_1^2 + s_{22} k_2^2 + s_{33} k_3^2 + 2s_{12} k_1 k_2 + 2s_{13} k_1 k_3 + 2s_{23} k_2 k_3)^{1/2}.$$

Иногда может потребоваться выяснить, какая линейная комбинация из двух неизвестных, например ξ_1 и ξ_2 , определяется с наименьшей вероятной ошибкой, т. е. необходимо найти значения постоянных k_1 и k_2 , которые обращают выражение $s_{11} k_1^2 + s_{22} k_2^2 + 2s_{12} k_1 k_2$ в минимум. Эта задача в такой формулировке является неопределенной, так как k_1 и k_2 могут быть всегда выбраны так, чтобы сделать вероятную ошибку выражения $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$ как угодно малой. Однако если какое-либо из этих k фиксировано, то задача становится определенной. Допустим, что $k_1 = 1$. Тогда выражение, которое необходимо свести к минимуму, имеет вид $s_{11} + s_{22} k_2^2 + 2s_{12} k_2$, и оно достигает минимума, если $k_2 = -s_{12}/s_{22}$.

Найдем в предыдущем численном примере, какая комбинация из ξ_1 и ξ_2 определяется с наименьшей вероятной ошибкой. Принимая $k_2 = 1$ и оперируя сначала с величинами η , мы имеем $k_1 = 0,823/1,831 = 0,45$, и искомая комбинация есть $0,45\eta_1 + \eta_2 = -0,161$. Вероятная ошибка такой комбинации равна

$$\text{в. о. } 1_{\eta} [1,831 (0,45)^2 + 0,530 (1)^2 - 1,645 (0,45)]^{1/2} = \text{в. о. } 1_{\eta} (0,40).$$

Теперь мы имеем комбинацию

$$0,45 \eta_1 + \eta_2 = 0,106 \xi_1 + 0,151 \xi_2,$$

которая определяется с вероятной ошибкой, равной

$$\text{в. о. } 1_{\eta} (0,40) = \text{в. о. } 1_{\xi} (0,40) (0,080) = \text{в. о. } 1_{\xi} (0,0320),$$

откуда $0,70 \xi_1 + \xi_2 = -1,07$ определяется с вероятной ошибкой, равной в. о. $1_{\xi} (0,21)$, или $0",11$, которая значительно меньше вероятной ошибки одного ξ_1 либо одного ξ_2 .

13. Корреляции. Всякий раз, когда линейная комбинация двух неизвестных может быть определена с вероятной ошибкой, меньшей, чем вероятная ошибка любого одного из них в отдельности, эти неизвестные называются коррелирующими. Два неизвестных ξ_1 и ξ_2 являются коррелирующими всякий раз, когда смешанный член s_{12} отличен от нуля, или же, равным образом, в большинстве случаев, когда смешанный коэффициент a_{12} нормальных уравнений отличен от нуля. Корреляции являются правилом, а не исключением при решении по методу наименьших квадратов; в численном примере этой главы корреляции существуют между каждой парой неизвестных.

По величине корреляции бывают различной степени. Чем сильнее корреляция, тем больше смешанный коэффициент a_{ij} по сравнению с $(a_{ii}a_{jj})^{1/2}$. В силу способа составления нормальных уравнений a_{ij} не может превосходить $(a_{ii}a_{jj})^{1/2}$, но может быть очень близким к этой величине. В таких случаях возникает затруднение с решением, которое является неопределенным; в ходе вычислительной работы оказывается, что одно из чисел d_{22} , d_{33} , d_{44} становится очень малым, что вызывает потерю значащих цифр в элиминационных уравнениях. Первым побуждением вычислителя может явиться повторение всех вычислений с дополнительными десятичными знаками, и формальное решение всегда можно получить этим путем, часто при огромной затрате времени и энергии. Однако оба коррелирующих неизвестных будут иметь большие вероятные ошибки и поэтому мало физического смысла. Во многих случаях можно избежать этой трудности без введения лишних десятичных знаков непосредственным решением уравнений относительно только одного из коррелирующих неизвестных, подставляя вместо другого неизвестного их линейную комбинацию. Наилучшую комбинацию, т. е. определяемую с наименьшей вероятной ошибкой, нельзя определить заранее до решения. Поэтому обычно рекомендуется сначала, если это возможно, решить уравнения, затем установить, какая комбинацией неизвестных лучше всего воспользоваться в данном случае, и повторить решение с новыми неизвестными. Хорошее приближение к наилучшей комбинации часто может быть получено таким выбором, при котором смешанный член в нормальных уравнениях обращается в нуль. Это можно сделать до того, как будет получено какое-нибудь решение уравнений следующим путем. Если рассматриваемыми неизвестными являются ξ_1 и ξ_2 , заменим при решении ξ_1 на комбинацию $\xi_1 + a_{12}/a_{11}\xi_2$. Эта замена требует, чтобы все коэффициенты в нормальном уравнении относительно ξ_2 были изменены соответствующим образом при помощи следующих подстановок:

вместо a_{12} напишем 0,

вместо a_{22} напишем $a_{22} - (a_{12})^2/a_{11}$,

вместо a_{23} напишем $a_{23} - (a_{12}/a_{11})a_{13}$,

вместо a_{24} напишем $a_{24} - (a_{12}/a_{11})a_{14}$,

.

.

.

вместо C_2 напишем $C_2 - (a_{12}/a_{11})C_1$,

вместо \sum_2 напишем $\sum_2 - (a_{12}/a_{11})\sum_1$.

Нормальное уравнение относительно ξ_1 остается без изменения, за исключением коэффициента a_{12} , и становится уравнением относительно комбинации $\xi_1 + a_{12}/a_{11}\xi_2$.

Применяя этот принцип к η_1 и η_2 из численного примера, мы получим следующую комбинацию:

$$\eta_1 + \eta_2 + (4,102/3,866) = \eta_1 + 1,06 \eta_2,$$

которую необходимо подставить вместо неизвестного η_1 .

Или же мы можем вместо η_2 подставить комбинацию

$$\eta_1 (4,102/7,208) + \eta_2 = 0,57 \eta_1 + \eta_2.$$

Следует отметить, что ни одна из этих комбинаций не является комбинацией, определяемой с наименьшей вероятной ошибкой, которая может быть найдена только после решения уравнений; в настоящем примере мы ничего не выиграли бы при помощи такой подстановки, так как корреляции не очень сильны.

14. Нормальные места. Если взято несколько наблюдений, распределенных на достаточно коротком интервале времени, то условные уравнения будут мало меняться на этом интервале. В таких случаях является выгодным осреднить отдельные остаточные разности $O - G$ и составить одно условное уравнение для средней эпохи наблюдений, приписывая ему вес, равный числу этих наблюдений. Остаточная разность $O - C$, полученная из нескольких наблюдений, объединенных таким образом, называется нормальным местом. Для составления нормальных мест нельзя дать определенного правила; здесь важную роль играют опыт и рассудительность вычислителя. Однако такое объединение наблюдений всегда допустимо в тех случаях, когда рассматриваемые остаточные разности можно считать равномерно меняющимися со временем. Кроме того, если наблюдения очень многочисленны, то и имеет смысл представить остаточные разности параболической кривой и использовать постоянный член уравнения этой параболы в качестве свободного члена условного уравнения.

Замечания. Литература

Метод наименьших квадратов принадлежит к числу самых общих вопросов математической обработки наблюдений. Хорошей начальной книгой является руководство Брента (D. Brunt, *The Combination of Observations*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1931). Стандартным пособием является книга Уиттекера и Робинсона (E. T. Whittaker, G. Robinson, *The Calculus of Observations*, Blackie, London, 1924; русский перевод 2-го изд.: Э. Т. Уиттекер, Г. Робинсон *Математическая обработка результатов наблюдений*, М., ОНТИ, 1935).

Метод решения нормальных уравнений, данный в этой главе, часто называется элиминационным методом, или методом исключения, так как при исходящем решении неизвестные исключаются последовательно до тех пор, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным. Другими методами, пользующимися популярностью в некоторых приложениях, являются методы квадратного корня и релаксации. Они, по-видимому, не обладают преимуществами для задач, подобных рассмотренным здесь, а методы релаксации, в частности, могут привести к непригодным результатам в решениях с сильной корреляцией некоторых неизвестных. Рассмотрим для примера случай, когда два неизвестных, например x и y , сильно коррелируют. Уравнения будут удовлетворяться большим интервалом значений x и y , но этого не будет, если x и y меняются в своих пределах значений независимо друг от друга; любому допустимому значению x соответствует одно и только одно значение y , удовлетворяющее уравнениям. Метод исключения благодаря последовательному определению неизвестных делает значение x , например, зависимым от заданного заранее значения y и сохраняет необходимую связь между ними, тогда как эта связь не сохраняется при использовании релаксационных методов. Применяя эти методы, можно обнаружить в конце вычислений, что полученные результаты не удовлетворяют уравнениям.

Против предыдущих замечаний иногда возражают на том основании, что согласующиеся значения x и y имеют не больше «физической реальности», чем несогласующиеся значения, полученные при помощи релаксации. Такое возражение имеет некоторый смысл. При этом, однако, обычно не замечают того, что согласующиеся значения x и y подходят лучше других для использования при предвычислении будущих наблюдений, а также для проверки правильности выкладок при решении.

Г л а в а I X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСПРАВЛЕНИЕ ОРБИТ

1. Введение. Методы, изложенные в гл. I и II, служат для вычисления на любой момент времени положения тела, движущегося по эллиптической орбите, элементы которой известны. Для тела солнечной системы данными наблюдений, из которых становится известным его местонахождение, являются

$$t, \alpha, \delta,$$

т. е. время наблюдения и геоцентрические сферические координаты — прямое восхождение и склонение. Кроме того, необходимо точно определить, к какому экватору и равноденствию относятся эти координаты.

Пусть x, y, z — гелиоцентрические координаты объекта, а X, Y, Z — геоцентрические координаты Солнца, отнесенные к среднему экватору и равноденству эпохи 1950,0. Геоцентрические координаты этого объекта равны

$$x+X, \quad y+Y, \quad z+Z.$$

Пусть ϱ означает геоцентрическое расстояние. Геоцентрические прямое восхождение α и склонение δ связаны с геоцентрическими экваториальными координатами следующими формулами:

$$\begin{aligned} x+X &= \varrho \cos \alpha \cos \delta, \\ y+Y &= \varrho \sin \alpha \cos \delta, \\ z+Z &= \varrho \sin \delta. \end{aligned}$$

α, δ , наблюденные в момент времени t , не являются непосредственно сравнимыми с геоцентрическими α, δ , которые входят в эти формулы; к этим наблюдениям или к прямоугольным координатам должны быть прибавлены соответствующие поправки за геоцентрический параллакс, aberrацию и т. д. (см. гл. VI и VII).

Пусть $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ суть малые поправки к гелиоцентрическим координатам объекта, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ — малые поправки к геоцентрическим координатам Солнца; тогда

$$\begin{aligned} \Delta x + \Delta X &= -\varrho \sin \alpha \cos \delta \Delta \alpha - \varrho \cos \alpha \sin \delta \Delta \delta + \cos \alpha \cos \delta \Delta \varrho, \\ \Delta y + \Delta Y &= +\varrho \cos \alpha \cos \delta \Delta \alpha - \varrho \sin \alpha \sin \delta \Delta \delta + \sin \alpha \cos \delta \Delta \varrho, \\ \Delta z + \Delta Z &= \qquad \qquad \qquad +\varrho \cos \delta \Delta \delta \qquad + \sin \delta \Delta \varrho, \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{1}{\varrho \cos \delta} [-\sin \alpha (\Delta x + \Delta X) + \cos \alpha (\Delta y + \Delta Y)], \\ \Delta \delta &= \frac{1}{\varrho} [-\cos \alpha \sin \delta (\Delta x + \Delta X) - \sin \alpha \sin \delta (\Delta y + \Delta Y) + \cos \delta (\Delta z + \Delta Z)]. \end{aligned}$$

Можно предположить, что X, Y, Z не требуют поправок; тогда соотношения между Δa и $\Delta \delta$ и поправками Δc_j к любой системе шести эллиптических элементов имеют следующий вид:

$$\Delta a = \sum \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} \Delta c_j + \sum \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j} \Delta c_j,$$

$$\Delta \delta = \sum \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} \Delta c_j + \sum \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j} \Delta c_j + \sum \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c_j} \Delta c_j,$$

или

$$\frac{\partial a}{\partial c_j} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial c_j} = \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j} + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c_j}.$$

Чаще принято иметь дело с $\cos \Delta a$.

В матричной форме эти выражения принимают вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial z}{\partial c_1} \\ \frac{\partial x}{\partial c_2} & \frac{\partial y}{\partial c_2} & \frac{\partial z}{\partial c_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial c_6} & \frac{\partial y}{\partial c_6} & \frac{\partial z}{\partial c_6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \delta}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial c_1} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial c_1} \\ \frac{\partial a}{\partial c_2} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial c_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial a}{\partial c_6} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial c_6} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Для численных расчетов эта схема напрашивается сама собой. В разделении вычислений на две части и получении искомых коэффициентов при помощи перемножения матриц имеется очевидная выгода. Частные производные $\partial x / \partial c_j$, $\partial y / \partial c_j$, $\partial z / \partial c_j$ зависят только от гелиоцентрических координат и компонентов скорости наблюдаемого объекта, тогда как элементы второй матрицы можно написать в следующем явном виде:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \cos \delta & \frac{\partial \delta}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \delta}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -Q^{-1} \sin \alpha & -Q^{-1} \cos \alpha \sin \delta \\ +Q^{-1} \cos \alpha & -Q^{-1} \sin \alpha \sin \delta \\ 0 & +Q^{-1} \cos \delta \end{vmatrix}.$$

Их можно легко вычислить из приближенной геоцентрической эфемериды при условии, что приводится также геоцентрическое расстояние. Последнее требуется в любом случае для вычисления поправки за aberrацию и в некоторых методах — за параллакс.

2. Применение прямоугольных экваториальных координат. Одним из наиболее распространенных случаев является случай, когда в распоряжении имеется таблица гелиоцентрических прямоугольных экваториальных координат для равных интервалов времени. Из этой таблицы при помощи численных процессов, изложенных в гл. IV, можно получить значения x, y, z и их производных для любой даты. Пусть заданы также элементы a, e .

Пусть интервал времени таблицы для x, y, z равен w суток, и пусть производные от x, y, z для единицы времени, равной w суток, обозначены через $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Далее, пусть n есть среднее движение, выраженное в радианах за w суток, а t — время, отсчитываемое в единицах w суток от некоторой произвольно выбранной эпохи. Теперь рассмотрим, каким образом изменения координат зависят от изменений элементов. Предполагается, что эти изменения малы, так что можно пренебречь их квадратами и произведениями.

a) Изменение средней аномалии l_0 в начальную эпоху. Это изменение равносильно предварению эфемериды, равному

$$\Delta t = \frac{\Delta l_0}{n}.$$

Следовательно,

$$\Delta x = \dot{x} \Delta t = \dot{x} \Delta l_0 / n,$$

$$\Delta y = \dot{y} \Delta t = \dot{y} \Delta l_0 / n,$$

$$\Delta z = \dot{z} \Delta t = \dot{z} \Delta l_0 / n.$$

б) Изменение ориентации орбиты. Это изменение можно представить себе, как сумму следующих поворотов орбиты: $\Delta\psi_1$ вокруг оси x , $\Delta\psi_2$ вокруг оси y , $\Delta\psi_3$ вокруг оси z . Положительным поворотом считается поворот против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси, вокруг которой совершается этот поворот. В таком случае

$$\Delta x = z \Delta\psi_2 - y \Delta\psi_3,$$

$$\Delta y = x \Delta\psi_3 - z \Delta\psi_1,$$

$$\Delta z = y \Delta\psi_1 - x \Delta\psi_2.$$

в) Изменение большой полуоси. Влияние такого изменения проявляется двояким образом: в изменении масштаба и изменении средней аномалии, пропорциональном времени, протекшему от эпохи. Первое из этих изменений определяется из соотношений

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta a}{a}.$$

Второе следует из выражения $n^2 a^3 = \text{const}$, которое можно преобразовать к виду

$$2 \frac{\Delta a}{n} + 3 \frac{\Delta a}{a} = 0.$$

Отсюда изменение средней аномалии равно

$$t \Delta n = -\frac{3}{2} t n \frac{\Delta a}{a}$$

и

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta z}{z} = -\frac{3}{2} t \frac{\Delta a}{a}.$$

Объединяя обе эти части, находим изменения в координатах

$$\Delta x = \left(x - \frac{3}{2} t \dot{x} \right) \frac{\Delta a}{a},$$

$$\Delta y = \left(y - \frac{3}{2} t \dot{y} \right) \frac{\Delta a}{a},$$

$$\Delta z = \left(z - \frac{3}{2} t \dot{z} \right) \frac{\Delta a}{a}.$$

г) *Изменение эксцентриситета.* Для того чтобы получить эти дифференциальные коэффициенты наиболее удобным путем, положим

$$\frac{\partial x}{\partial e} = Hx + K\dot{x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial e} = Hy + K\dot{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial e} = Hz + K\dot{z},$$

где H и K не зависят от направления осей координат.

Если \bar{x} , \bar{y} суть координаты планеты в плоскости ее орбиты, причем ось \bar{x} направлена в перигелий, то эти выражения дают

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial e} = H\bar{x} + K\dot{\bar{x}},$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial e} = H\bar{y} + K\dot{\bar{y}}.$$

Решая эти уравнения относительно H и K , получим

$$H = \frac{\dot{\bar{y}}(\partial \bar{x}/\partial e) - \dot{\bar{x}}(\partial \bar{y}/\partial e)}{\dot{\bar{x}}\bar{y} - \dot{\bar{y}}\bar{x}},$$

$$K = \frac{\bar{x}(\partial \bar{y}/\partial e) - \bar{y}(\partial \bar{x}/\partial e)}{\dot{\bar{x}}\bar{y} - \dot{\bar{y}}\bar{x}}.$$

Знаменатель в этих выражениях равен удвоенной секториальной скорости в плоскости орбиты, выраженной в единицах w суток, и может быть записан в виде

$$G = a^2 n \sqrt{1 - e^2} = a^2 n \cos \varphi,$$

если $e = \sin \varphi$. Для вычисления числителя полезны выражения через эксцентрическую аномалию. Поскольку

$$u - e \sin u = l, \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\sin u}{1 - e \cos u}, \quad \dot{u} = \frac{n}{1 - e \cos u},$$

$$\bar{x} = a(\cos u - e), \quad \bar{y} = a \cos \varphi \sin u,$$

то отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial e} = a \left(\frac{-\sin^2 u}{1 - e \cos u} - 1 \right), \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial e} = \frac{a \sin u}{\cos \varphi} \left[\frac{(1 - e^2) \cos u}{1 - e \cos u} - e \right],$$

$$\dot{\bar{x}} = \frac{-an \sin u}{1 - e \cos u}, \quad \dot{\bar{y}} = an \cos \varphi \frac{\cos u}{1 - e \cos u}.$$

Перемножение соответствующих правых частей дает

$$\begin{aligned} \bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial e} - \bar{x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial e} &= \frac{a^2 n}{\cos \varphi} \frac{-\cos u + e^2 \cos u - e + e \cos^2 u}{1 - e \cos u} = \\ &= -\frac{a^2 n}{\cos \varphi} (\cos u + e), \\ \bar{x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial e} - \bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial e} &= \frac{a^2 \sin u}{\cos \varphi} (2 - e^2 - e \cos u). \end{aligned}$$

Поэтому

$$H = -\frac{\cos u + e}{1 - e^2}, \quad K = \frac{\sin u (2 - e^2 - e \cos u)}{n (1 - e^2)}.$$

Из этих выражений можно исключить u , используя

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \equiv r = a(1 - e \cos u),$$

$$\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z \equiv rr = a^2 ne \sin u,$$

или

$$\cos u = \frac{a - r}{ae}, \quad \sin u = \frac{rr}{a^2 ne}.$$

Поэтому

$$H = \frac{r - a(1 + e^2)}{ae(1 - e^2)}, \quad K = \frac{rr}{a^2 n^2 e} \left[1 + \frac{r}{a(1 - e^2)} \right].$$

Как H , так и K содержат e в качестве множителя в знаменателе. Поэтому если e мал, то происходит потеря точности при вычислениях. Это не является серьезной помехой. Необходимо только вычислять rr и $r/a(1 - e^2)$ с большим числом значащих цифр, чем требуется в H и K . Вопрос о том, сколько лишних значащих цифр следует использовать, зависит от малости e . Координаты x , y , z и их производные могут быть, как правило, получены с необходимым числом значащих цифр, и требуемое дополнительное количество вычислений невелико.

Соединение этих результатов дает следующие выражения:

Система I

Δl_0	$\Delta \psi_1$	$\Delta \psi_2$	$\Delta \psi_3$	$\Delta a/a$	Δe
\dot{x}	0	$+z$	$-y$	$x - \frac{3}{2} t \dot{x}$	$Hx + K \dot{x}$
\dot{y}	$-z$	0	$+x$	$y - \frac{3}{2} t \dot{y}$	$Hy + K \dot{y}$
\dot{z}	$+y$	$-x$	0	$z - \frac{3}{2} t \dot{z}$	$Hz + K \dot{z}$

Эти выражения необходимо подставлять в левую матрицу матричного произведения (1).

Малые повороты $\Delta \psi_1$, $\Delta \psi_2$, $\Delta \psi_3$ можно считать тремя компонентами одного вектора поворота $\Delta \Phi$ в экваториальной системе координат. Пусть Δp , Δq , Δr — компоненты этого вектора $\Delta \Phi$ в системе координат xyz , плоскость xy которой совпадает с плоскостью орбиты, а ось

\bar{x} направлена в перигелий. Соотношения между этими двумя системами компонент вектора поворота, очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= P_x \Delta p + Q_x \Delta q + R_x \Delta r, \\ \Delta\psi_2 &= P_y \Delta p + Q_y \Delta q + R_y \Delta r, \\ \Delta\psi_3 &= P_z \Delta p + Q_z \Delta q + R_z \Delta r.\end{aligned}\quad (2)$$

Компоненты поворота Δp , Δq , Δr легко могут быть выражены через поправки к элементам I , Ω , ω . Пусть N есть восходящий узел орбиты на плоскости эклиптики, $NN' = 90^\circ$, $N\bar{X} = \omega$ — угловому расстоя-

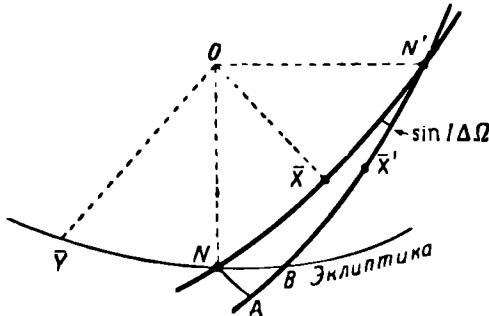


Рис. 7. Дифференциальное исправление элементов I , Ω и ω .

нию перигелия от узла (см. рис. 7). Повороты Δp , Δq вокруг соответственно $O\bar{X}$ и $O\bar{Y}$ эквивалентны поворотам

$$\begin{aligned}\Delta p \cos \omega - \Delta q \sin \omega &\text{ вокруг } ON, \\ \Delta p \sin \omega + \Delta q \cos \omega &\text{ вокруг } ON'.\end{aligned}$$

Поворот вокруг ON равен ΔI , тогда как рис. 7 показывает, что поворот вокруг ON' равен $\sin I \Delta \Omega$. В результате поворота вокруг ON' новый узел будет в точке B . Поворот Δr вокруг оси z определяется разностью дуг $A\bar{X}'$ и $N\bar{X}$, если $O\bar{X}'$ является новой осью \bar{x} . Но $B\bar{X}' - N\bar{X} = \Delta \omega$, $AB = \cos I \Delta \Omega$. Поскольку $A\bar{X}' = AB + BX'$, то $A\bar{X}' - N\bar{X} = B\bar{X}' - N\bar{X} + AB$ или $\Delta r = \Delta \omega + \cos I \Delta \Omega$. Поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Delta I &= \Delta p \cos \omega - \Delta q \sin \omega, \\ \sin I \Delta \Omega &= \Delta p \sin \omega + \Delta q \cos \omega, \\ \Delta \omega + \cos I \Delta \Omega &= \Delta r.\end{aligned}\quad (3)$$

Необходимо заметить, что эти формулы не зависят от выбора плоскости отсчета. Поэтому, если I' , Ω' , ω' представляют экваториальные элементы, т. е. наклонность к плоскости экватора, долготу узла на экваторе и угловое расстояние от этого узла до перигелия соответственно, то эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta I' &= \Delta p \cos \omega' - \Delta q \sin \omega', \\ \sin I' \Delta \Omega' &= \Delta p \sin \omega' + \Delta q \cos \omega', \\ \Delta \omega' + \cos I' \Delta \Omega' &= \Delta r.\end{aligned}$$

Другие полезные соотношения можно получить при помощи разд. 23 и 24 гл. 1. Например,

$$\begin{aligned} & \|\Delta I' \sin I' \Delta \Omega' \Delta \omega' + \cos I' \Delta \Omega' \| = \\ & = \|\Delta p \Delta q \Delta r\| r(-\omega)' = \\ & = \|\Delta p \Delta q \Delta r\| \begin{vmatrix} \cos \omega' & +\sin \omega' & 0 \\ -\sin \omega' & \cos \omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \|\Delta p \cos \omega' - \Delta q \sin \omega' \quad \Delta p \sin \omega' + \Delta q \cos \omega' \quad \Delta r\|. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} & \|\Delta \psi_1 \Delta \psi_2 \Delta \psi_3\| = \\ & = \|\Delta p \Delta q \Delta r\| r(-\omega') p(-I') r(-\Omega') = \\ & = \|\Delta I' \sin I' \Delta \Omega' \Delta \omega' + \cos I' \Delta \Omega'\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I' & +\sin I' \\ 0 & -\sin I' & \cos I' \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} \cos \Omega' & +\sin \Omega' & 0 \\ -\sin \Omega' & \cos \Omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \|\Delta I' - \sin I' \Delta \omega' \Delta \Omega' + \cos I' \Delta \omega'\| \begin{vmatrix} \cos \Omega' & +\sin \Omega' & 0 \\ -\sin \Omega' & \cos \Omega' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \cos \Omega' \Delta I' + \sin \Omega' \sin I' \Delta \omega' \\ \sin \Omega' \Delta I' - \cos \Omega' \sin I' \Delta \omega' \\ \cos I' \Delta \omega' + \Delta \Omega' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta I' &= \cos \Omega' \Delta \psi_1 + \sin \Omega' \Delta \psi_2, \\ \sin I' \Delta \omega' &= \sin \Omega' \Delta \psi_1 - \cos \Omega' \Delta \psi_2, \\ \cos I' \Delta \omega' + \Delta \Omega' &= \Delta \psi_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Если эксцентриситет мал, то положение перигелия определится плохо. Следовательно, некоторая неопределенность будет существовать как в Δl_0 , так и в $\Delta \psi_3$. Это следует из коэффициентов при Δl_0 и $\Delta \psi_3$ в Δx и Δy . Для круговой орбиты, лежащей в экваториальной плоскости

$$\dot{x}/\dot{y} = -y/x,$$

тогда как $\dot{z} = 0$. Поэтому Δl_0 и $\Delta \psi_3$ нельзя определить по отдельности. Эту трудность можно устранить, используя в качестве неизвестных $\Delta l_0 + \Delta \psi_3$ и $\Delta \psi_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{n} \Delta l_0 - y \Delta \psi_3 &= \frac{\dot{x}}{n} (\Delta l_0 + \Delta \psi_3) + \left(-\frac{\dot{x}}{n} - y \right) \Delta \psi_3, \\ \frac{\dot{y}}{n} \Delta l_0 + x \Delta \psi_3 &= \frac{\dot{y}}{n} (\Delta l_0 + \Delta \psi_3) + \left(-\frac{\dot{y}}{n} + x \right) \Delta \psi_3, \\ \frac{\dot{z}}{n} \Delta l_0 + 0 \Delta \psi_3 &= \frac{\dot{z}}{n} (\Delta l_0 + \Delta \psi_3) + \left(-\frac{\dot{z}}{n} \right) \Delta \psi_3. \end{aligned}$$

Теперь $-\dot{x}/n - y$ и $-\dot{y}/n + x$ будут малыми величинами порядка e . Поэтому неизвестное $\Delta\psi_3$ войдет с малыми коэффициентами, что представляет трудность при численных приложениях. Ее можно избежать, вводя $e\Delta\psi_3$ в качестве неизвестного, коэффициенты при котором получаются делением коэффициентов при $\Delta\psi_3$ на e . Следовательно, выражения принимают следующий вид:

Система II

$\Delta l_0 + \Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	$e\Delta\psi_3$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta x = \frac{\dot{x}}{n}$	0	$+z$	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{x}}{n} - y \right)$	$x - \frac{3}{2} t \dot{z}$	$Hx + Kz$
$\Delta y = \frac{\dot{y}}{n}$	$-z$	0	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{y}}{n} + x \right)$	$y - \frac{3}{2} t \dot{y}$	$Hy + Ky$
$\Delta z = \frac{\dot{z}}{n}$	$+y$	$-x$	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{z}}{n} \right)$	$z - \frac{3}{2} t \dot{z}$	$Hx + Kz$

В то время как этот выбор неизвестных пригоден для большинства случаев с умеренно малыми эксцентриситетами, можно увеличить надежность решения, выбирая в качестве неизвестных Δp , Δq , Δr вместо $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$, $\Delta\psi_3$. Подстановка соотношений (2) в члены, содержащие эти неизвестные, в системе I дает:

$$\begin{aligned} +z\Delta\psi_2 - y\Delta\psi_3 &= (P_y z - P_z y) \Delta p + (Q_y z - Q_z y) \Delta q + (R_y z - R_z y) \Delta r, \\ -z\Delta\psi_1 + x\Delta\psi_3 &= (P_z x - P_x z) \Delta p + (Q_z x - Q_x z) \Delta q + (R_z x - R_x z) \Delta r, \\ +y\Delta\psi_1 - x\Delta\psi_2 &= (P_x y - P_y x) \Delta p + (Q_x y - Q_y x) \Delta q + (R_x y - R_y x) \Delta r. \end{aligned}$$

Если затем ввести неизвестное $\Delta l_0 + \Delta r$ вместо Δl_0 и $e\Delta r$ вместо Δr , то окончательные выражения принимают вид:

Система III

$\Delta l_0 + \Delta r$	Δp	Δq	$e\Delta r$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta x = \frac{\dot{x}}{n}$	$P_y z - P_z y$	$Q_y z - Q_z y$	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{x}}{n} + R_y z - R_z y \right)$	$x - \frac{3}{2} t \dot{z}$	$Hx + Kz$
$\Delta y = \frac{\dot{y}}{n}$	$P_z x - P_x z$	$Q_z x - Q_x z$	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{y}}{n} + R_z x - R_x z \right)$	$y - \frac{3}{2} t \dot{y}$	$Hy + Ky$
$\Delta z = \frac{\dot{z}}{n}$	$P_x y - P_y x$	$Q_x y - Q_y x$	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{z}}{n} + R_x y - R_y x \right)$	$z - \frac{3}{2} t \dot{z}$	$Hx + Kz$

Эта форма требует несколько больше вычислений, чем система II, однако она обладает преимуществом, давая определенное решение независимо от значений эксцентриситета или наклонности. Эта форма рекомендуется для повсеместного применения.

Кроме того, легко видеть, что все коэффициенты при неизвестных в условных уравнениях для Δa , $\Delta \delta$ одного и того же порядка величины, за одним исключением. Этим исключением является коэффициент при $\Delta a/a$. Этот коэффициент зависит от промежутка времени, охваченного наблюдениями. Чем длиннее этот промежуток, тем более значительными становятся члены, имеющие t множителем.

Векторные орбитальные постоянные, которые входят в коэффициенты системы III, определяют ориентацию плоскости $\bar{x}\bar{y}$, которую необходимо выбрать так, чтобы она совпала сколь возможно точно с плоскостью оскулирующей орбиты планеты, причем ось \bar{x} направлена в перигелий. Отсюда следует, что

$$\|\Delta x \Delta y \Delta z\| = \|\Delta \bar{x} \Delta \bar{y} \Delta \bar{z}\| \begin{vmatrix} P_x P_y P_z \\ Q_x Q_y Q_z \\ R_x R_y R_z \end{vmatrix}.$$

Это соотношение дает следующую в высшей степени простую форму:

Система IV

	$\Delta l_0 + \Delta r$	Δp	Δq	$e \Delta r$	$\Delta a/a$	Δe
$\Delta \bar{x} =$	$\frac{\dot{x}}{n}$	0	0	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{z}}{n} - \bar{y} \right)$	$\bar{x} - \frac{3}{2} t \dot{x}$	$H \bar{x} + K \dot{x}$
$\Delta \bar{y} =$	$\frac{\dot{y}}{n}$	0	0	$\frac{1}{e} \left(-\frac{\dot{y}}{n} + \bar{x} \right)$	$\bar{y} - \frac{3}{2} t \dot{y}$	$H \bar{y} + K \dot{y}$
$\Delta \bar{z} =$	0	$+\bar{y}$	$-\bar{x}$	0	0	0

В некоторых приложениях окажется выгодным использовать эту форму. Коэффициенты можно выразить при помощи рядов по средней аномалии, и если число наблюдений очень велико, то может потребоваться табуляция этих коэффициентов как функций от средней аномалии. Коэффициент при $\Delta a/a$ требует специального рассмотрения из-за присутствия множителя t . Можно использовать эквивалентную форму, определяемую формулами

$$\bar{x} - \frac{3}{2} t \dot{x} = x - \frac{3}{2} (l - l_0) \frac{\dot{x}}{n},$$

$$\bar{y} - \frac{3}{2} t \dot{y} = y - \frac{3}{2} (l - l_0) \frac{\dot{y}}{n},$$

где $l - l_0$ выражено в радианах. Очевидно, что в разности $l - l_0$ необходимо сохранить целые обороты.

Таблица 1 дает разложения коэффициентов системы IV по средней аномалии. Общий множитель a опущен, для того чтобы упростить вид этой таблицы. Этот множитель следует ввести перед употреблением коэффициентов.

Обычно разложения в ряды даются в табл. 1 с точностью до третьей степени эксцентриситета, за исключением коэффициентов при $\Delta a/a$, имеющих множителем разность $l - l_0$, для которых разложение доведено до e^4 .

Очевидно, ту же процедуру можно применить к координатам Солнца; ΔX , ΔY , ΔZ можно выразить через поправки к элементам орбиты Земли. В этом случае, однако, следует сделать несколько важных замечаний. Во-первых, следует отбросить неизвестное $\Delta a/a$. Астрономическая единица употребляется в качестве единицы расстояния для всех измерений в солнечной системе, и размеры орбиты Земли, выраженные в этой единице, настолько хорошо известны, что введение неизвестной поправки для исправления масштаба земной орбиты никакой пользы

Таблица 1

Коэффициенты для системы IV, разложенные по средней аномалии

Коэффициенты при $\Delta l_0 + \Delta r$

$$\text{в } \frac{\Delta \bar{x}}{a} : \left(-1 + \frac{3}{8} e^2 \right) \sin l + \left(-e + \frac{2}{3} e^3 \right) \sin 2l - \frac{9}{8} e^2 \sin 3l - \frac{4}{3} e^3 \sin 4l$$

$$\text{в } \frac{\Delta \bar{y}}{a} : \left(1 - \frac{5}{8} e^2 \right) \cos l + \left(e - \frac{5}{6} e^3 \right) \cos 2l + \frac{9}{8} e^2 \cos 3l + \frac{4}{3} e^3 \cos 4l$$

Коэффициенты при $e\Delta r$

$$\text{в } \frac{\Delta \bar{x}}{a} : \left(\frac{1}{4} e - \frac{1}{12} e^3 \right) \sin l + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^2 \right) \sin 2l + \left(\frac{3}{4} e - \frac{21}{32} e^3 \right) \sin 3l + e^2 \sin 4l$$

$$\begin{aligned} \text{в } \frac{\Delta \bar{y}}{a} : & -\frac{3}{2} + \left(\frac{1}{4} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos l + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^2 \right) \cos 2l + \\ & + \left(-\frac{3}{4} e + \frac{27}{32} e^3 \right) \cos 3l - e^2 \cos 4l \end{aligned}$$

Коэффициенты при $\Delta a/a$

$$\begin{aligned} \text{в } \frac{\Delta \bar{x}}{a} : & -\frac{3}{2} e + \left(1 - \frac{3}{8} e^2 \right) \cos l + \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{3} e^3 \right) \cos 2l + \frac{3}{8} e^2 \cos 3l + \\ & + \frac{1}{3} e^3 \cos 4l + (l - l_0) \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{16} e^2 + \frac{5}{128} e^4 \right) \sin l + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} e - e^3 \right) \sin 2l + \left(\frac{27}{16} e^2 - \frac{405}{256} e^4 \right) \sin 3l + 2e^3 \sin 4l + \frac{625}{256} e^4 \sin 5l \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в } \frac{\Delta \bar{y}}{a} : & \left(1 - \frac{5}{8} e^2 \right) \sin l + \left(\frac{1}{2} e - \frac{5}{12} e^3 \right) \sin 2l + \frac{3}{8} e^2 \sin 3l + \frac{1}{3} e^3 \sin 4l + \\ & + (l - l_0) \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{16} e^2 + \frac{11}{128} e^4 \right) \cos l + \left(-\frac{3}{2} e + \frac{5}{4} e^3 \right) \cos 2l + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{27}{16} e^2 + \frac{459}{256} e^4 \right) \cos 3l - 2e^3 \cos 4l - \frac{625}{256} e^4 \cos 5l \right] \end{aligned}$$

Коэффициенты при Δe

$$\begin{aligned} \text{в } \frac{\Delta \bar{x}}{a} : & -\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{4} e + \frac{5}{48} e^3 \right) \cos l + \left(\frac{1}{2} - e^2 \right) \cos 2l + \\ & + \left(\frac{3}{4} e - \frac{45}{32} e^3 \right) \cos 3l + e^2 \cos 4l + \frac{125}{96} e^3 \cos 5l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в } \frac{\Delta \bar{y}}{a} : & \left(-\frac{5}{4} e - \frac{11}{48} e^3 \right) \sin l + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} e^2 \right) \sin 2l + \left(\frac{3}{4} e - \frac{51}{32} e^3 \right) \sin 3l + \\ & + e^2 \sin 4l + \frac{125}{96} e^3 \sin 5l \end{aligned}$$

Коэффициент при Δp

$$\text{в } \frac{\Delta \bar{z}}{a} : \left(1 - \frac{5}{8} e^2 \right) \sin l + \left(\frac{1}{2} e - \frac{5}{12} e^3 \right) \sin 2l + \frac{3}{8} e^2 \sin 3l + \frac{1}{3} e^3 \sin 4l$$

Коэффициент при Δq

$$\begin{aligned} \text{в } \frac{\Delta \bar{z}}{a} : & +\frac{3}{2} e + \left(-1 + \frac{3}{8} e^2 \right) \cos l + \left(-\frac{1}{2} e + \frac{1}{3} e^3 \right) \cos 2l - \\ & - \frac{3}{8} e^2 \cos 3l - \frac{1}{3} e^3 \cos 4l \end{aligned}$$

не принесет. Во-вторых, поправки $\Delta\phi$ тесно связаны с поправкой к наклонности эклиптики и с поправкой равноденствия. Пусть $\Delta\varepsilon$ есть поправка к наклонности эклиптики, используемой в вычислениях экваториальных прямоугольных координат Солнца, а ΔE — поправка равноденствия, т. е. общая поправка, которую необходимо прибавить ко всем прямым восхождениям. Из (4) при $\Omega' = 0$ очевидно, что

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\varepsilon, \\ \Delta\psi_2 &= -\sin\varepsilon\Delta\omega', \\ \Delta\psi_3 &= -\Delta E + \cos\varepsilon\Delta\omega'.\end{aligned}$$

Вместо $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$, $\Delta\psi_3$ может оказаться выгодным применить

$$\begin{aligned}\|\Delta\psi_1\Delta\psi_2\Delta\psi_3\| &= \|\Delta\psi_1\Delta\psi_2\Delta\psi_3\| \cdot p(\varepsilon) = \\ &= \|\Delta\psi_1\Delta\psi_2\Delta\psi_3\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\psi_1, \\ \Delta\psi_2 &= \cos\varepsilon\Delta\psi_2 + \sin\varepsilon\Delta\psi_3, \\ \Delta\psi_3 &= -\sin\varepsilon\Delta\psi_2 + \cos\varepsilon\Delta\psi_3,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1 &= \Delta\varepsilon, \\ \Delta\psi_2 &= -\sin\varepsilon\Delta E, \\ \Delta\psi_3 &= -\cos\varepsilon\Delta E + \Delta\tilde{\omega}'.\end{aligned}$$

Необходимо заметить, что поскольку $\Omega' = 0$, то $\Delta\tilde{\omega}'$ совпадает с $\Delta\omega'$.

Эти соотношения описывают повороты вокруг осей, направленных соответственно в точку весеннего равноденствия, в точку летнего солнцестояния и в северный полюс эклиптики. Главное преимущество $\Delta\psi'_1$, $\Delta\psi'_2$ перед $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_3$ заключается в лучшем разделении поправок $\Delta\tilde{\omega}'$ и ΔE . В $\Delta\psi'_2$ поправка ΔE входит с множителем $-\sin\varepsilon$, тогда как в $\Delta\psi_3$ эта поправка входит в линейной комбинации с $\cos\varepsilon\Delta\tilde{\omega}'$.

Соотношения, которые необходимо применять в этом случае, очевидно, имеют вид:

Система V

	$\Delta l'_0 + \Delta\psi_3$	$\Delta\psi_1$	$\Delta\psi_2$	$e'\Delta\psi_3$	$\Delta e'$
$\Delta X =$	$\frac{\dot{X}}{n'}$	0	+Z	$\frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{X}}{n'} - Y \right)$	$H'X + K'\dot{X}$
$\Delta Y =$	$\frac{\dot{Y}}{n'}$	-Z	0	$\frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{Y}}{n'} + X \right)$	$H'Y + K'\dot{Y}$
$\Delta Z =$	$\frac{\dot{Z}}{n'}$	+Y	-X	$\frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{Z}}{n'} \right)$	$H'Z + K'\dot{Z}$

Если вводятся $\Delta\psi'_1$, $\Delta\psi'_3$, то мы получаем следующую систему:

Система VI

$\Delta l'_0 + \Delta\psi'_3 \Delta\psi_1$	$\Delta\psi'_1$	$e' \Delta\psi'_3$	$\Delta e'$
$\Delta X = \frac{\dot{X}}{n'} \quad 0 \quad -Y \sin \epsilon + Z \cos \epsilon \quad \frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{X}}{n'} - Y \cos \epsilon - Z \sin \epsilon \right) H'X + K'\dot{X}$			
$\Delta Y = \frac{\dot{Y}}{n'} \quad -Z \quad +X \sin \epsilon \quad \frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{Y}}{n'} + X \cos \epsilon \right) H'Y + K'\dot{Y}$			
$\Delta Z = \frac{\dot{Z}}{n'} \quad +Y \quad -X \cos \epsilon \quad \frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{Z}}{n'} + X \sin \epsilon \right) H'Z + K'\dot{Z}$			

Однако если введены эклиптические прямоугольные координаты посредством следующих соотношений:

$$X_e = X,$$

$$Y_e = Y \cos \epsilon + Z \sin \epsilon,$$

$$Z_e = -Y \sin \epsilon + Z \cos \epsilon,$$

и если $Z_e = 0$, то легко видеть, что выражение ΔX можно упростить (см. ΔX_e в системе VII, приведенной ниже). Если затем ввести ΔY_e , ΔZ_e , то получающиеся выражения имеют вид:

Система VII

$\Delta l'_0 + \Delta\psi'_3 \Delta\psi_1$	$\Delta\psi'_1$	$e' \Delta\psi'_3$	Δe
$\Delta X_e = \frac{\dot{X}_e}{n'} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{X}_e}{n'} - Y_e \right)$			$\frac{\partial X_e}{\partial e}$
$\Delta Y_e = \frac{\dot{Y}_e}{n'} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{e'} \left(-\frac{\dot{Y}_e}{n'} + X_e \right)$			$\frac{\partial Y_e}{\partial e}$
$\Delta Z_e = 0 \quad +Y_e \quad -X_e \quad 0 \quad 0$			

В системе VII координаты X_e , Y_e суть координаты Солнца, отнесенные к плоскости эклиптики, при этом ось X_e направлена в точку весеннего равноденствия. С целью вычисления коэффициентов условных уравнений удобно было бы коэффициенты этой системы табулировать как функции дня года.

Следует уделить особое внимание осложнению, возникающему из-за движений точки весеннего равноденствия и перигея Солнца, в тех случаях, когда необходимо использовать наблюдения, перекрывающие длинный промежуток времени. В большинстве приложений требуется употребление стандартного равноденствия и экватора 1950,0. Если применяется система V или VI, а экваториальные координаты и компоненты скорости выводятся из координат Солнца, табулированных для этих стандартных равноденствия и экватора, то этому вопросу не нужно уделять никакого внимания. Система VII (при $Z_e = 0$) подразумевает употребление эклиптики даты. Тогда почти обязательно

необходимо использовать также среднее равноденствние даты. Если восемь коэффициентов, входящих в эту систему, табулированы как функции дня года, например для 1950 г., то их легко применить к любому году двадцатого столетия или даже к более длительному промежутку времени, вычисляя годичные изменения. Переход к экватору и равноденствию 1950,0 может быть осуществлен, если векторным постоянным P'_x и т. д., необходимым при преобразовании вида

$$\|\Delta X \Delta Y \Delta Z\| = \|\Delta X_e \Delta Y_e \Delta Z_e\| \begin{vmatrix} P'_x P'_y P'_z \\ Q'_x Q'_y Q'_z \\ R'_x R'_y R'_z \end{vmatrix}, \quad (5)$$

будут даны значения, соответствующие году наблюдения. Очевидно, что постоянные R'_x , R'_y , R'_z не нужны.

Если X_e , Y_e , Z_e отнесены к эклиптике и равноденствию 1950,0, то это соотношение превращается просто в

$$\begin{aligned} \|\Delta X \Delta Y \Delta Z\|_{1950,0} &= \|\Delta X_e \Delta Y_e \Delta Z_e\|_{1950,0} \cdot p(-\varepsilon)_{1950,0} = \\ &= \|\Delta X_e \Delta Y_e \Delta Z_e\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & +\sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{vmatrix}_{1950,0} \end{aligned}$$

Если же это условие не выполнено, то указанное соотношение принимает вид

$$\|\Delta X \Delta Y \Delta Z\|_{1950,0} = \|\Delta X_e \Delta Y_e \Delta Z_e\|_t \cdot p(-\varepsilon_t) \begin{vmatrix} +X_x - X_y - X_z \\ -Y_x + Y_y + Y_z \\ -Z_x + Z_y + Z_z \end{vmatrix}_{t=1950,0}.$$

Третья матрица в правой части, в которой

$$Y_x = -X_y, \quad Z_x = -X_z, \quad Z_y = -Y_z,$$

представляет преобразование от экватора в эпоху t к экватору 1950,0, если интервал времени между эпохой t и стандартной датой не слишком велик. Элементы этой матрицы для текущего столетия приведены в «Planetary Coordinates».

Тогда матрицу, используемую в (5), можно выразить в виде

$$\begin{vmatrix} P'_x P'_y P'_z \\ Q'_x Q'_y Q'_z \\ R'_x R'_y R'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +X_x - Y_x - Z_x \\ -X_y + Y_y + Z_y \\ -X_z + Y_z + Z_z \end{vmatrix} \cdot p(\varepsilon_t)$$

и

$$\begin{aligned} \|\Delta X \Delta Y \Delta Z\| &= \|\Delta X_e \Delta Y_e \Delta Z_e\| \times \\ &\times \begin{vmatrix} X_x & -X_y & -X_z \\ -Y_x \cos \varepsilon_t - Z_x \sin \varepsilon_t & +Y_y \cos \varepsilon_t + Z_y \sin \varepsilon_t & +Y_z \cos \varepsilon_t + Z_z \sin \varepsilon_t \\ +Y_x \sin \varepsilon_t - Z_x \cos \varepsilon_t & -Y_y \sin \varepsilon_t + Z_y \cos \varepsilon_t & -Y_z \sin \varepsilon_t + Z_z \cos \varepsilon_t \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Замечания. Литература

Когда методы этой главы применяются для составления условных уравнений, решаемых по методу наименьших квадратов относительно поправок к шести элементам орбиты малой планеты, не следует опасаться сильных корреляций между этими шестью неизвестными, если наблюдения достаточно хорошо распределены по гелиоцентрической орбите. Ситуация резко изменится, если в качестве дополнительных неизвестных ввести поправки к элементам орбиты Земли. В этом случае можно было бы избежать корреляций только при получении наблюдений, хорошо распределенных по орбите планеты, из ряда точек, хорошо распределенных по орбите Земли, что редко имеет место в действительности. На практике ограничиваются наблюдениями в окрестности оппозиции. Наблюденные направления в пространстве, соединяющие планету с Землей, не ориентированы случайным образом, как это необходимо для определенного решения; вместо этого все они проходят через небольшую часть пространства вблизи Солнца.

Определение элементов орбиты Земли представляет, таким образом, проблему особой трудности. Благоприятные геометрические условия можно получить при помощи непосредственного наблюдения Солнца, однако наблюдения Солнца отягощены большими систематическими и случайными ошибками из-за его большого видимого диска и влияния нагрева инструмента. Вероятно, хорошее решение когда-нибудь дадут радиолокационные методы, примененные к Венере и Марсу.

Г л а в а X

ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ. РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ

1. Интегралы центра масс. Пусть три материальные точки m_j , ($j=0, 1, 2$) имеют координаты ξ_j , η_j , ζ_j в некоторой инерциальной системе координат. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= k^2 m_1 \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_{01}^3} + k^2 m_2 \frac{\xi_2 - \xi_0}{r_{02}^3}, \\ \frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= k^2 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_{01}^3} + k^2 m_2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{r_{12}^3}, \\ \frac{d^2\xi_2}{dt^2} &= k^2 m_0 \frac{\xi_0 - \xi_2}{r_{02}^3} + k^2 m_1 \frac{\xi_1 - \xi_2}{r_{12}^3},\end{aligned}\quad (1)$$

и аналогичные уравнения для η и ζ . В этих уравнениях

$$r_{jk}^2 = (\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2, \quad j \neq k.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{r_{jk}} = - \frac{\xi_k - \xi_j}{r_{jk}^3},$$

то уравнения (1) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}m_j \frac{d^2\xi_j}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_j}, \\ m_j \frac{d^2\eta_j}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad j = 0, 1, 2, \\ m_j \frac{d^2\zeta_j}{dt^2} &= \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}\end{aligned}\quad (2)$$

при

$$F = k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right],$$

где F — силовая функция. Система уравнений содержит девять дифференциальных уравнений второго порядка; поэтому порядок системы равен 18.

Функция F является функцией от разностей координат трех тел. Если начало системы координат переносится вдоль оси ξ так, что ξ_0 переходит в $\xi_0 + a$, ξ_1 переходит в $\xi_1 + a$, ξ_2 — в $\xi_2 + a$, то функция F не изменяется. Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_0} + \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0.$$

Уравнения (2) показывают, что это уравнение равносильно следующему:

$$\sum m_j \frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = 0, \quad j = 0, 1, 2,$$

которое можно проинтегрировать дважды и получить

$$\sum m_j \xi_j = A_1 t + B_1.$$

Применяя то же рассуждение к координатам η и ζ , получаем также

$$\sum m_j \eta_j = A_2 t + B_2,$$

$$\sum m_j \zeta_j = A_3 t + B_3,$$

где величины A и B — постоянные интегрирования.

Знание этих интегралов дает возможность понизить порядок системы с 18 единиц до 12. Это можно выполнить, принимая центр масс трех тел за начало координат и исключая всюду ξ_0 , η_0 , ζ_0 при помощи соотношений

$$\begin{aligned} m_0 \xi_0 &= -m_1 \xi_1 - m_2 \xi_2, \\ m_0 \eta_0 &= -m_1 \eta_1 - m_2 \eta_2, \\ m_0 \zeta_0 &= -m_1 \zeta_1 - m_2 \zeta_2. \end{aligned} \tag{3}$$

В результате этого исчезает первое уравнение в каждой из трех систем уравнений (1). Допустим, что оставшиеся шесть уравнений второго порядка решены, т. е. ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 , ζ_1 , ζ_2 определены как функции времени и двенадцати произвольных постоянных интегрирования. Подстановка этих результатов в (3) даст тогда также значения ξ_0 , η_0 , ζ_0 в виде функций от времени и тех же постоянных интегрирования.

Постоянные A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , B_3 служат для описания движения центра масс в исходной произвольной инерциальной системе координат. Они не играют никакой роли в движении тел относительно центра масс.

Необходимо отметить соответствие между этими интегралами задачи трех тел и интегралами задачи двух тел. Этот вывод можно распространить также на систему n тел, где n произвольно. В этом случае понижение порядка происходит от $6n$ до $6(n-1)$.

Для большинства задач представляется более удобным поместить начало координат в одно из тел, например в m_0 , и ввести относительные координаты тела m_1

$$x_1 = \xi_1 - \xi_0, \quad y_1 = \eta_1 - \eta_0, \quad z_1 = \zeta_1 - \zeta_0$$

и тела m_2

$$x_2 = \xi_2 - \xi_0, \quad y_2 = \eta_2 - \eta_0, \quad z_2 = \zeta_2 - \zeta_0.$$

Эта система координат больше не является инерциальной системой, а уравнения приобретают несколько более сложный характер, чем исходные уравнения (1). Чтобы получить эти уравнения, положим r_1 вместо r_{01} , r_2 вместо r_{02} , Δ вместо r_{12} . Вычитанием первого уравнения системы (1) из второго и третьего получаем соответственно

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k^2 (m_0 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} + k^2 m_2 \left(\frac{x_2 - x_1}{\Delta^3} - \frac{x_2}{r_2^3} \right),$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k^2 (m_0 + m_2) \frac{x_2}{r_2^3} + k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x_2}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right).$$

Аналогичные уравнения можно написать для координат y и z . Правые части этих уравнений можно записать в виде частных производных от силовой функции

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1},$$

$$F_1 = \frac{k^2(m_0+m_1)}{r_1} + k^2m_2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_2^2} \right), \quad (4a)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2}, \quad \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z_2},$$

$$F_2 = \frac{k^2(m_0+m_2)}{r_2} + k^2m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1^2} \right). \quad (4b)$$

Понижение порядка системы уравнений дало систему с различными силовыми функциями для уравнений движения двух масс. Для большинства приложений это не является неудобством.

Легко видеть, что те же преобразования можно применить к любому числу материальных точек. Если система состоит из m_0 и еще n материальных точек m_1, m_2, \dots, m_n , то силовая функция для точки m_i принимает следующий вид:

$$F_i = \frac{k^2(m_0+m_i)}{r_i} + \sum_{j=2}^n k^2m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j}{r_j^2} \right). \quad (5)$$

2. Интегралы площадей и интеграл энергии. Возвращаясь к системе уравнений (2), рассмотрим изменение координат, происходящее от поворота вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Поворот на угол φ вокруг оси ζ дает

$$\xi_j = \xi'_j \cos \varphi - \eta'_j \sin \varphi,$$

$$\eta_j = \xi'_j \sin \varphi + \eta'_j \cos \varphi,$$

$$\zeta_j = \zeta'_j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_j} (-\xi'_j \sin \varphi - \eta'_j \cos \varphi) + \sum \frac{\partial F}{\partial \eta_j} (\xi'_j \cos \varphi - \eta'_j \sin \varphi) = \\ &= - \sum \eta_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} + \sum \xi_j \frac{\partial F}{\partial \eta_j}. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0,$$

так как F не изменяется при повороте. Если этот результат внести в уравнения (2), умножая первое на $-\eta_j$, второе на $+\xi_j$ и складывая, то мы найдем, что

$$\sum m_j \xi_j \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} - \sum m_j \eta_j \frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = 0.$$

Два аналогичных уравнения получаются круговой заменой переменных. Эти три уравнения можно проинтегрировать и получить

$$\begin{aligned} \sum m_j \left(\eta_j \frac{d\zeta_j}{dt} - \zeta_j \frac{d\eta_j}{dt} \right) &= c_1, \\ \sum m_j \left(\zeta_j \frac{d\xi_j}{dt} - \xi_j \frac{d\zeta_j}{dt} \right) &= c_2, \\ \sum m_j \left(\xi_j \frac{d\eta_j}{dt} - \eta_j \frac{d\xi_j}{dt} \right) &= c_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Это интегралы площадей. Они выражают закон сохранения момента количества движения этой системы.

Наконец, можно получить интеграл живых сил этой системы, умножая уравнения (2) последовательно на $\dot{\xi}_j$, $\dot{\eta}_j$, $\dot{\zeta}_j$ и складывая. В результате получается

$$\sum m_j (\ddot{\xi}_j \dot{\xi}_j + \ddot{\eta}_j \dot{\eta}_j + \ddot{\zeta}_j \dot{\zeta}_j) = \sum \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j + \frac{\partial F}{\partial \zeta_j} \dot{\zeta}_j \right) = \frac{\partial F}{\partial t},$$

так как F является функцией только от координат. Это уравнение может быть проинтегрировано и дает

$$\frac{1}{2} \sum m_j [\dot{\xi}_j^2 + \dot{\eta}_j^2 + \dot{\zeta}_j^2] = F + C, \quad (7)$$

где C — постоянная интегрирования. Левая часть представляет собой кинетическую энергию T системы; $-F$ является ее потенциальной энергией. Следовательно, интеграл (7) в форме

$$T - F = C$$

выражает сохранение энергии.

При помощи трех интегралов площадей и интеграла энергии систему уравнений задачи трех тел можно привести к порядку $18 - 6 - 3 - 1 = 8$. Наш вывод в равной степени относится к задаче n тел. Порядок можно понизить от $6n$ до $6n - 6 - 3 - 1 = 6n - 10$.

Эти понижения порядков были выполнены фактически для задачи трех тел. Еще одно понижение на два порядка возможно путем исключения времени (т. е. использования одной из зависимых переменных в качестве независимой переменной) и так называемого исключения узлов. Поэтому задача трех тел окончательно приводится к шестому порядку, а задача n тел — к порядку $6n - 12$.

В солнечной системе орбиты больших планет, за исключением Плутона, имеют малые наклонности относительно общей плоскости, за которую можно выбрать такую плоскость, в которой момент количества движения системы достигает максимума. Это так называемая неизменяемая плоскость Лапласа. Если пренебречь координатами, перпендикулярными к этой плоскости, то уравнения движения относятся к задаче n тел, движущихся в общей плоскости. Такая система имеет порядок $4n$. Число общих интегралов теперь равно $4 + 1 + 1 = 6$, и порядок может быть понижен до $4n - 6$. Для задачи трех тел в плоскости понижением порядка приходим к системе шестого порядка. Как и в трехмерной задаче, возможно еще одно понижение порядка этой системы на две единицы. Следовательно, для задачи трех тел в плоскости окончательное понижение порядка приводит к системе четвертого порядка, для задачи n тел в плоскости — к системе порядка $4n - 8$.

3. Ограниченнaя задачa трех тел. Рассмотрим, наконец, задачу трех тел с массами m_0 , m_1 , m_2 , в которой масса m_2 является пренебрежимо малой по сравнению с m_0 и m_1 . В этом случае движения m_0 и m_1 не подвергаются заметному влиянию возмущений со стороны m_2 ; но тогда они представляют собой движения в задаче двух тел, и их можно считать полностью известными.

Примем общую орбитальную плоскость масс m_0 и m_1 за плоскость $\xi\eta$, так что $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$; и пусть начало системы координат помещено в центр масс тел m_0 и m_1 . Если координаты тела m_2 обозначены через ξ , η , ζ , а расстояния от тел m_0 и m_1 через Q_0 , Q_1 соответственно, то уравнения движения принимают вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{\partial F}{\partial \zeta}, \quad (8)$$

$$F = \frac{k^2 m_0}{Q_0} + \frac{k^2 m_1}{Q_1}.$$

Предположим теперь, что оба конечных тела обращаются по кругам относительно их центра масс; пусть среднее движение по этим орбитам равно n' , и пусть a' означает постоянное расстояние между телами m_0 и m_1 . Тогда

$$n'^2 a'^3 = k^2 (m_0 + m_1)$$

и

$$\xi_0 = -\frac{m_1}{m_0 + m_1} a' \cos \varphi, \quad \eta_0 = -\frac{m_1}{m_0 + m_1} a' \sin \varphi,$$

$$\xi_1 = +\frac{m_0}{m_0 + m_1} a' \cos \varphi, \quad \eta_1 = +\frac{m_0}{m_0 + m_1} a' \sin \varphi,$$

$$\varphi = n't + \text{const.}$$

Теперь введем систему координат, вращающуюся вокруг оси ζ с постоянной угловой скоростью n' , и пусть координаты в этой вращающейся системе X , Y , Z . В таком случае

$$\xi = X \cos \varphi - Y \sin \varphi,$$

$$\eta = X \sin \varphi + Y \cos \varphi,$$

$$\zeta = Z.$$

Как было показано в разд. 10 гл. I, уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} - 2n' \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial X}, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2n' \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Y}, \\ \frac{d^2Z}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Z}, \\ \Omega &= \frac{1}{2} n'^2 (X^2 + Y^2) + F. \end{aligned} \quad (9)$$

Направление оси X можно выбрать так, чтобы массы m_0 и m_1 постоянно находились на этой оси; следовательно,

$$\begin{aligned} X_0 &= -\frac{m_1}{m_0 + m_1} a', & X_1 &= +\frac{m_0}{m_0 + m_1} a'. \\ Y_0 &= 0, & Y_1 &= 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q_0^2 &= \left(X + \frac{m_1}{m_0+m_1} a' \right)^2 + Y^2 + Z^2, \\ Q_1^2 &= \left(X - \frac{m_0}{m_0+m_1} a' \right)^2 + Y^2 + Z^2. \end{aligned}$$

Следовательно, Ω не зависит явно от времени, а является функцией только от X, Y, Z . Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \dot{Y} + \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \dot{Z} = \frac{d\Omega}{dt}.$$

Умножая три уравнения (9) соответственно на $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ и складывая произведения, получим

$$\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y} + \dot{Z}\ddot{Z} = \frac{d\Omega}{dt},$$

или

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \Omega - C, \quad (10)$$

где C — постоянная интегрирования. Этот интеграл известен как интеграл Якоби ограниченной задачи трех тел.

Интеграл Якоби можно выразить через координаты и компоненты скорости в невращающейся системе координат. Простое преобразование дает

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 - 2n'(\dot{\xi}\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + n'^2(X^2 + Y^2).$$

Следовательно, в невращающейся системе координат интеграл Якоби может быть записан так:

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - n'(\dot{\xi}\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) = F - C. \quad (11)$$

Прямой вывод этого интеграла из уравнений движения в невращающейся системе координат предоставляется в качестве упражнения читателю. При этом выводе необходимо помнить о том, что в невращающейся системе координат силовую функцию F можно считать функцией от $\xi - \xi_0, \eta - \xi_1, \zeta - \eta_0, \eta - \eta_1, \zeta$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi_0} - \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta_0} - \frac{\partial F}{\partial \eta_1}. \end{aligned}$$

4. Критерий Тиссерана. Важным приложением интеграла Якоби ограниченной задачи трех тел является критерий Тиссерана для отождествления кометы путем сравнения элементов ее орбиты в различных появлениях.

Пусть m_0 и m_1 представляют соответственно Солнце и Юпитер. Уравнения (8) можно применить к системе координат x, y, z с началом координат в m_0 при помощи перехода к следующей силовой функции:

$$\begin{aligned} F &= \frac{k^2 m_0}{r} + k^2 m_1 \left[\frac{1}{\varrho} - \frac{xx' + yy'}{a'^3} \right] = \\ &= \frac{k^2 m_0}{r} + R, \end{aligned}$$

в которой x, y, z — гелиоцентрические координаты кометы, x', y' — гелиоцентрические координаты Юпитера, а r и q — расстояния этой кометы соответственно от Солнца и Юпитера.

Интеграл (11) можно написать в следующем виде:

$$\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - n' (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{k^2 m_0}{r} = R - C. \quad (12)$$

Мгновенные элементы гелиоцентрической орбиты кометы удовлетворяют интегралам задачи двух тел

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) &= k^2 m_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right), \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= [k^2 m_0 a (1 - e^2)]^{1/2} \cos I, \end{aligned} \quad (13)$$

в которых I — наклонность плоскости орбиты кометы относительно плоскости орбиты Юпитера. Подстановка (13) в (12) при использовании формулы

$$n' = k (m_0 + m_1)^{1/2} (a')^{-3/2}$$

дает

$$-\frac{1}{2a} - \left(1 - \frac{m_1}{m_0} \right)^{1/2} \left[\frac{a (1 - e^2)}{a'^3} \right]^{1/2} \cos I = \frac{R - C}{k^2 m_0}. \quad (14)$$

Элементы орбиты периодической кометы могут настолько значительно измениться при тесном сближении с Юпитером между двумя появлениями, что может возникнуть вопрос о тождественности кометы в этих двух появлениях.

Теперь допустим, что две системы элементов кометной орбиты, полученные в двух появлениях, подставлены в уравнение (14). Далее можно предположить, что в обоих появлениях комета достаточно далека от Юпитера, что $R/k^2 m_0$ порядка m_1/m_0 , несмотря на крайнюю близость к Юпитеру между двумя появлениями. Если пренебречь величинами порядка m_1/m_0 , то уравнение (14) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2a} + \left[\frac{a (1 - e^2)}{a'^3} \right]^{1/2} \cos I = \text{const}. \quad (15)$$

Это уравнение известно как критерий Тиссерана. Как показывает его вывод, он основан на интеграле Якоби ограниченной задачи. Поэтому, строго говоря, критерий Тиссерана был бы справедлив только в том случае, если бы орбита Юпитера была круговой. Эксцентрисичность орбиты Юпитера приведет к тому, что критерий Тиссерана в точности не удовлетворяется. Возмущения со стороны остальных планет, особенно если имело место тесное сближение с еще одной планетой между появлениями, могут вызвать дополнительное расхождение. Принять во внимание эксцентриситет орбиты Юпитера можно, но это нарушит простоту критерия. Обычная процедура в приложениях состоит в том, что, если критерий Тиссерана выполняется приближенно, допускают вероятность тождественности кометы в двух появлениях. Затем предпринимается точное численное интегрирование орбиты между двумя появлениями. Это покажет, было ли гипотетическое заключение правильным или нет. Если критерий Тиссерана не удовлетворяется, т. е. если подстановка обеих систем элементов в уравнение (15) дает заметно различные результаты, то можно сделать вывод о том, что эти две системы элементов не принадлежат одной периодической комете. Следовательно, мы избавляемся от труда установления этого же факта при помощи длинной процедуры вычисления возмущений.

5. Поверхности и кривые нулевой скорости. Интеграл Якоби для ограниченной задачи во вращающейся системе координат с началом в центре масс двух конечных тел может быть записан в следующем виде:

$$\frac{k^2 m_0}{q_0} + \frac{k^2 m_1}{q_1} + \frac{1}{2} n'^2 (X^2 + Y^2) = C + \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2).$$

Поскольку

$$k^2 (m_0 + m_1) = n'^2 a'^3,$$

где a' есть постоянное расстояние между двумя конечными массами, то это выражение можно упростить, вводя

$$v = \frac{m_1}{m_0 + m_1},$$

откуда

$$k^2 m_0 = (1 - v) n'^2 a'^3, \quad k^2 m_1 = v n'^2 a'^3.$$

Отсюда следует, что

$$(1 - v) \frac{a'}{q_0} + v \frac{a'}{q_1} + \frac{1}{2} \frac{X^2 + Y^2}{a'^2} = \frac{C}{n'^2 a'^2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}{n'^2 a'^2}.$$

Это выражение можно еще более упростить таким выбором единиц длины и времени, чтобы $a' = 1$, $n' = 1$, что дает

$$\frac{1 - v}{q_0} + \frac{v}{q_1} + \frac{X^2 + Y^2}{2} = C + \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2). \quad (16)$$

Если левую часть обозначить символом Ω , а вместо $\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2$ написать V^2 , то интеграл Якоби принимает следующий вид:

$$\Omega = C + \frac{1}{2} V^2, \quad (17)$$

в котором Ω является суммой трех величин: q_0^{-1} , q_1^{-1} и $X^2 + Y^2$, каждая из которых умножена на соответствующий положительный числовой множитель. Некоторые интересные результаты, связанные с ограниченной задачей, можно получить, рассматривая поверхности вида

$$\Omega = C,$$

которые называются поверхностями нулевой скорости. Функция Ω имеет полюсы при $q_0 = 0$, $q_1 = 0$ и на бесконечности ($X^2 + Y^2 \rightarrow \infty$). Если $|Z|$ возрастает, то уравнение $\Omega = C$ стремится к

$$X^2 + Y^2 = 2C$$

как к пределу. Это — уравнение цилиндра, осью которого является ось Z , а квадрат радиуса равен $2C$.

Можно узнать многие свойства этих поверхностей, изучая кривые, полученные пересечением поверхностей с плоскостью XY . Эти кривые являются кривыми нулевой скорости для двумерной ограниченной задачи.

Для дальнейшего рассмотрения удобна другая форма функции Ω . Поскольку

$$q_0^2 = (X + va')^2 + Y^2,$$

$$q_1^2 = [X - (1 - v)a']^2 + Y^2,$$

то отсюда следует, что

$$(1-v) \varrho_0^2 + v \varrho_1^2 = X^2 + Y^2 + v(1-v),$$

если положить a' равным единице. Следовательно,

$$\Omega = (1-v) \left(\frac{1}{\varrho_0} + \frac{\varrho_0^2}{2} \right) + v \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1^2}{2} \right), \quad (18)$$

где постоянный член $-\frac{1}{2}v(1-v)$ отброшен.

График линий уровня функции Ω в плоскости XY (рис. 8) показывает: а) два ряда замкнутых кривых, окружающих каждую из двух масс в отдельности и соответствующих значениям Ω , уменьшающимся наружу, и б) ряд замкнутых кривых, охватывающих обе массы вместе и соответствующих значениям Ω , возрастающим наружу. Область,

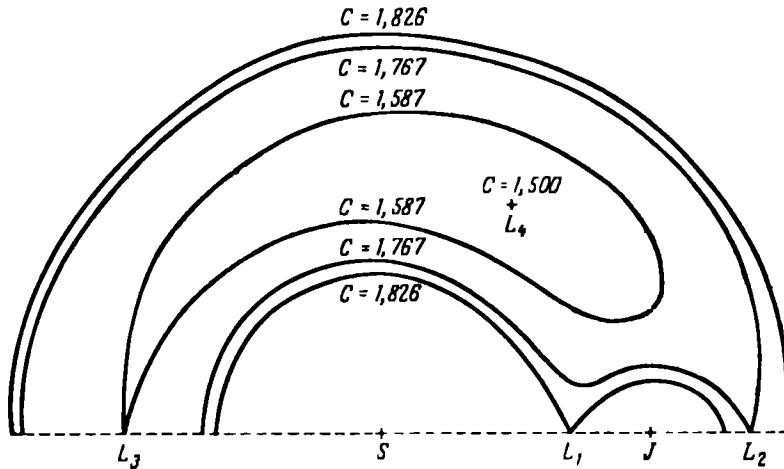


Рис. 8. Кривые нулевой скорости для $v/(1-v)=1/10$ (по Дж. Дарвину).

$$\Omega \equiv \frac{10}{11} \left(\frac{1}{\varrho_0} + \frac{\varrho_0^2}{2} \right) + \frac{1}{11} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1^2}{2} \right) = C.$$

отделяющая кривые типа (а) от кривых типа (б), заполнена кривыми более сложного типа, которые оканчиваются в двух так называемых равносторонних точках, в которых функция Ω достигает равных абсолютных минимумов. В этих точках $\varrho_0 = \varrho_1 = 1$, и выражение (18) дает для абсолютного минимума значение

$$\Omega_{\min} = \frac{3}{2}.$$

Допустим, что орбита частицы имеет значение интеграла Якоби, равное C_1 , и координаты X, Y , находящиеся в любой момент времени внутри замкнутой кривой, окружающей одну из масс и соответствующей $\Omega = C_1$. Тогда в силу того, что согласно (17)

$$\Omega = C_1 + \frac{1}{2}V^2,$$

скорость не может быть действительной в областях, где $\Omega < C_1$. Поэтому эта частица никогда не может пересечь замкнутую кривую нулевой скорости $\Omega = C_1$.

Это замечательный результат, касающийся характера движения по орбитам определенных типов в ограниченной задаче. Он впервые был получен Хиллом и применен специально к движению Луны. Если, пренебрегая эксцентриситетом орбиты Земли, считать, что движение Луны удовлетворяет уравнениям ограниченной задачи, то ему соответствует значение интеграла Якоби, принадлежащее замкнутой кривой с максимальным расстоянием от центра Земли, равным 109,695 экваториального радиуса. Хилл сделал следующий вывод: «Таким образом, если пренебречь эксцентриситетом земной орбиты, мы имеем строгое доказательство существования верхнего предела радиуса-вектора Луны».

6. Частные решения Лагранжа. Уравнения движения для двумерной задачи удовлетворяются постоянными значениями $X = X_1$, $Y = Y_1$, если правые части первых двух из уравнений (9) равны нулю. Если использовать выражение (18) для Ω , то эти два уравнения можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial X} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Q_0} \frac{\partial Q_0}{\partial X} + \frac{\partial \Omega}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Q_0} \frac{\partial Q_0}{\partial Y} + \frac{\partial \Omega}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial Y} = 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения удовлетворяются следующим тривиальным решением:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Q_0} = \frac{\partial \Omega}{\partial Q_1} = 0,$$

которое дает $Q_0 = Q_1 = 1$ — равносторонние решения L_4 и L_5 . Остальные решения получаются из уравнения

$$\frac{\partial(Q_0, Q_1)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{Q_0 Q_1} \begin{vmatrix} X+v & X-1+v \\ Y & Y \end{vmatrix} = 0.$$

Для этих решений $Y = 0$. Поэтому они лежат на оси X , и соответствующие значения X должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{\partial \Omega}{\partial Q_0} \frac{\partial Q_0}{\partial X} + \frac{\partial \Omega}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial X} = 0.$$

Как график, так и подробный алгебраический анализ показывают, что имеются три решения.

Решение L_1 расположено между двумя конечными массами. Здесь

$$Q_0 + Q_1 = 1, \quad X + v = Q_0, \quad X - 1 + v = -Q_1$$

и

$$\frac{\partial Q_0}{\partial X} = -\frac{\partial Q_1}{\partial X} = \pm 1.$$

Из (18) вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial Q_0} &= (1-v)(-Q_0^{-2} + Q_0), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial Q_1} &= v(-Q_1^{-2} + Q_1).\end{aligned}$$

Уравнение для $\partial \Omega / \partial X$ в выражении через Q_1 принимает вид

$$(1-v)[-(1-Q_1)^{-2} + 1 - Q_1] - v(-Q_1^{-2} + Q_1) = 0,$$

или

$$\frac{v}{1-v} = \frac{(3Q_1 - 3Q_1^2 + Q_1^3)Q_1^2}{(1-Q_1)^2(1-Q_1^2)}.$$

Если отношение $v/(1-v)$ мало, то это уравнение имеет корень в окрестности

$$a = \left[\frac{v}{3(1-v)} \right]^{1/3}.$$

Разлагая по степеням q_1 , получаем

$$3a^3 = 3q_1^3 \left(1 + q_1 + \frac{4}{3} q_1^2 + \dots \right),$$

$$a = q_1 \left(1 + \frac{1}{3} q_1 + \frac{1}{3} q_1^2 + \dots \right),$$

$$q_1 = a \left(1 - \frac{1}{3} a - \frac{1}{9} a^2 + \dots \right).$$

Решение L_2 располагается за меньшей массой. Здесь

$$q_0 - q_1 = 1, \quad X + v = q_0, \quad X - 1 + v = q_1$$

и

$$\frac{\partial q_0}{\partial X} = \frac{\partial q_1}{\partial X} = +1.$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$(1-v) [- (1+q_1)^{-2} + 1 + q_1] + v (- q_1^{-2} + q_1) = 0,$$

или

$$\frac{v}{1-v} = \frac{q_1^2 (3q_1 + 3q_1^2 + q_1^3)}{(1+q_1)^2 (1-q_1^2)}.$$

При этом, если отношение $v/(1-v)$ мало, то это уравнение имеет корень в окрестности $q_1 = a$. Разлагая по степеням q_1 , получаем

$$3a^3 = 3q_1^3 \left(1 - q_1 + \frac{4}{3} q_1^2 + \dots \right),$$

$$a = q_1 \left(1 - \frac{1}{3} q_1 + \frac{1}{3} q_1^2 + \dots \right),$$

$$q_1 = a \left(1 + \frac{1}{3} a - \frac{1}{9} a^2 + \dots \right).$$

Решение L_3 расположено позади большей массы. Здесь

$$q_1 - q_0 = 1, \quad X + v = -q_0, \quad X - 1 + v = -q_1$$

и

$$\frac{\partial q_0}{\partial X} = \frac{\partial q_1}{\partial X} = -1.$$

Уравнение принимает вид

$$(1-v) (- q_0^{-2} + q_0) + v (- q_1^{-2} + q_1) = 0,$$

$$\frac{v}{1-v} = - \frac{q_0^{-2} - q_0}{q_1^{-2} - q_1}.$$

Положим

$$q_0 = 1 + \beta, \quad q_1 = 2 + \beta.$$

Выражая через β , получаем

$$\begin{aligned}\frac{v}{1-v} &= -\frac{(2+\beta)^2(3\beta+3\beta^2+\beta^3)}{(1+\beta)^2(7+12\beta+6\beta^2+\beta^3)} = \\ &= -\frac{12\beta+24\beta^2+19\beta^3+7\beta^4+\dots}{7+26\beta+37\beta^2+25\beta^3+\dots}, \\ v &= -\frac{12\beta+24\beta^2+19\beta^3+7\beta^4+\dots}{7+14\beta+13\beta^2+6\beta^3+\dots}.\end{aligned}$$

Последовательные приближения к решению имеют вид

$$\beta = -\frac{7}{12}v, \quad \beta = -\frac{7}{12}v \left[1 + \frac{23}{84} \left(\frac{7}{12}v \right)^2 \right].$$

7. Малые колебания относительно равновесных решений. Частные решения могут быть получены с любой требуемой степенью точности. Следующим вопросом является изучение орбит в окрестности этих частных решений. Пусть X_0, Y_0 — координаты, соответствующие какому-нибудь одному из частных решений. Они удовлетворяют уравнениям (9)

$$\begin{aligned}\frac{d^2X_0}{dt^2} - 2 \frac{dY_0}{dt} &= \left(\frac{d\Omega}{dX} \right)_0, \\ \frac{d^2Y_0}{dt^2} + 2 \frac{dX_0}{dt} &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial Y} \right)_0,\end{aligned}$$

в которых индекс 0 означает, что частные производные от Ω должны быть вычислены для $X = X_0, Y = Y_0$. Если теперь

$$X = X_0 + \xi, \quad Y = Y_0 + \eta, \quad Z = \zeta$$

подставить в эти уравнения, то получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2 \frac{d\eta}{dt} &= \Omega_{xx}\xi + \Omega_{xy}\eta + \Omega_{xz}\zeta + \dots, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2 \frac{d\xi}{dt} &= \Omega_{yx}\xi + \Omega_{yy}\eta + \Omega_{yz}\zeta + \dots, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Omega_{zx}\xi + \Omega_{zy}\eta + \Omega_{zz}\zeta + \dots.\end{aligned}\tag{19}$$

Правые части уравнений (19) получены при помощи разложения правых частей уравнений (9) в ряд Тэйлора. Коэффициенты представляют собой частные производные $\partial^2\Omega/\partial x^2$ и т. д., которые необходимо вычислить при $X = X_0, Y = Y_0, Z = 0$, и поэтому они являются постоянными. Для любого частного решения можно получить определенные числовые значения.

Следовательно, уравнения (19) являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами при условии, что в разложениях в ряды Тэйлора удерживаются члены только первого порядка. В этом заключается стандартный метод рассмотрения малых колебаний в механических задачах.

Проиллюстрируем это для случая двух измерений. Пусть имеем решение задачи

$$\xi = A \exp \sigma t, \quad \eta = B \exp \sigma t,$$

где A , B и σ — постоянные. Тогда

$$\xi = A\sigma \exp \sigma t, \quad \eta = B\sigma \exp \sigma t,$$

$$\ddot{\xi} = A\sigma^2 \exp \sigma t, \quad \ddot{\eta} = B\sigma^2 \exp \sigma t.$$

Подстановка в (19), если не рассматривать ζ , дает следующие уравнения относительно коэффициентов A и B :

$$(\sigma^2 - \Omega_{xx}) A - (2\sigma + \Omega_{xy}) B = 0,$$

$$(2\sigma - \Omega_{xy}) A + (\sigma^2 - \Omega_{yy}) B = 0.$$

Этим уравнениям можно удовлетворить только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов, равен нулю, что дает

$$(\sigma^2 - \Omega_{xx})(\sigma^2 - \Omega_{yy}) + 4\sigma^2 - \Omega_{xy}^2 = 0,$$

или

$$\sigma^4 + (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})\sigma^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0. \quad (20)$$

Характер решения дифференциальных уравнений зависит от характера решения этого квадратного уравнения относительно σ^2 . Решение будет устойчивым только в том случае, если квадратное уравнение имеет два неравных отрицательных корня σ^2 .

Пусть в данном случае этими двумя решениями будут

$$\sigma_1^2 = -|\sigma_1|^2, \quad \sigma_2^2 = -|\sigma_2|^2.$$

Тогда решение дифференциальных уравнений запишется так:

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \exp (+|\sigma_1|it) + A_{-1} \exp (-|\sigma_1|it) + \\ &\quad + A_2 \exp (+|\sigma_2|it) + A_{-2} \exp (-|\sigma_2|it), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= B_1 \exp (+|\sigma_1|it) + B_{-1} \exp (-|\sigma_1|it) + \\ &\quad + B_2 \exp (+|\sigma_2|it) + B_{-2} \exp (-|\sigma_2|it). \end{aligned}$$

Однородные уравнения дают отношения A/B для соответствующих коэффициентов; в качестве постоянных интегрирования можно выбрать либо все A , либо все B . Выражая показательные функции через синусы и косинусы, можно так выбрать эти коэффициенты, чтобы выражения для ξ и η были действительными.

С другой стороны, корни σ^2 уравнения (20) могут быть действительными, но противоположных знаков, например $\sigma_1^2 = |\sigma_1|^2$ и $\sigma_2^2 = -|\sigma_2|^2$. Решение принимает вид

$$\begin{aligned} \xi &= A_4 \exp \sigma_1 t + A_{-1} \exp (-\sigma_1 t) + \\ &\quad + A_2 \exp (+|\sigma_2|it) + A_{-2} \exp (-|\sigma_2|it), \\ \eta &= B_1 \exp \sigma_1 t + B_{-1} \exp (-\sigma_1 t) + \\ &\quad + B_2 \exp (+|\sigma_2|it) + B_{-2} \exp (-|\sigma_2|it). \end{aligned}$$

В общем решении этого типа присутствие показательных членов вызывает неограниченное возрастание ξ и η с временем. Однако, если A_1 , A_{-1} , B_1 , B_{-1} равны нулю, решение содержит только периодические члены. Это — семейство неустойчивых периодических орбит.

Наконец, корни уравнения (20) могут быть комплексными. т. е.

$$\sigma_{1,2} = p \pm iq, \quad \sigma_{3,4} = -p \pm iq.$$

Поэтому решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 \exp(p + iq)t + A_{-1} \exp(p - iq)t + \\ &\quad + A_2 \exp(-p + iq)t + A_{-2} \exp(-p - iq)t, \\ \eta &= B_1 \exp(p + iq)t + B_{-1} \exp(p - iq)t + \\ &\quad + B_2 \exp(-p + iq)t + B_{-2} \exp(-p - iq)t\end{aligned}$$

и будет неустойчивым.

Частное семейство орбит получается во втором случае при рассмотрении орбит, для которых $A_1 = B_1 = 0$. При $t \rightarrow \infty$ эти орбиты асимптотически приближаются к периодическим колебаниям относительно положения равновесия. В третьем случае существует частное семейство орбит, для которых $A_1 = A_{-1} = B_1 = B_{-1} = 0$. Такие орбиты при $t \rightarrow \infty$ стремятся к положению равновесия. Различие между этими семействами орбит во втором и третьем случаях заключается в том, что во втором случае периодическое колебание сохраняет свою амплитуду, тогда как в последнем случае амплитуда периодического колебания уменьшается экспоненциально с возрастанием t .

Слова «устойчивое» и «неустойчивое» применяются здесь в связи с существованием или несуществованием малых колебаний относительно положения равновесия или периодических орбит. Этот тип устойчивости иногда называют устойчивостью по Пуанкаре, чтобы отличить его от таких задач устойчивости, как, например, задача Пуассона, связанная с вековой неизменностью больших полуосей планетных орбит.

Теперь рассмотрим приложение этих общих результатов к частным решениям Лагранжа ограниченной задачи.

В коллинеарных решениях $Y = 0$; следовательно, $\Omega_{xy} = 0$, и уравнения для малых колебаний принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2 \frac{d\eta}{dt} &= \Omega_{xx}\xi, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2 \frac{d\xi}{dt} &= \Omega_{yy}\eta.\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_{xx} &= 1 + \frac{2(1-\nu)}{Q_0^3} + \frac{2\nu}{Q_1^3}, \\ \Omega_{yy} &= 1 - \frac{1-\nu}{Q_0^3} - \frac{\nu}{Q_1^3}.\end{aligned}$$

Если эти выражения разложить по степеням a , используя выражения, найденные для Q_0 , Q_1 в коллинеарных решениях, то мы найдем, что эти частные решения содержат следующие члены:

	Ω_{xx}	Ω_{yy}	$-\Omega_{xx} - \Omega_{yy} + 4$	$\Omega_{xx}\Omega_{yy}$
L_1	$9 + 12a$	$-3 - 6a$	$-2 - 6a$	$-27 - 90a$
L_2	$9 - 12a$	$-3 + 6a$	$-2 + 6a$	$-27 + 90a$
L_3	$3 + \frac{21}{4}a^3$	$-\frac{21}{8}a^3$	$+1 - \frac{21}{8}a^3$	$-\frac{63}{8}a^3$

Теперь, если $\xi = A \exp \sigma t$, $\eta = B \exp \sigma t$ является некоторым решением уравнений, то уравнение (20) относительно σ принимает вид

$$\sigma^4 - (\Omega_{xx} + \Omega_{yy} - 4)\sigma^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} = 0.$$

Для малых значений a (а поэтому и v) произведение $\Omega_{xx}\Omega_{yy}$ отрицательно. Уравнение относительно σ^2 имеет действительные корни противоположных знаков. Поэтому четыре корня σ состоят из пары действительных корней и пары чисто мнимых корней; корни каждой пары равны по абсолютной величине, но обратны по знаку. Замечания, связанные со вторым случаем, относятся к этим орбитам. Пламмер¹⁾ в 1901 г. показал, что вывод относительно характера корней справедлив независимо от значения v .

Для равносторонних решений находим, что

$$\Omega_{xx} = +\frac{3}{4}, \quad \Omega_{yy} = +\frac{9}{4},$$

$$\Omega_{xy} = \pm \frac{3}{4}(1-2v)\sqrt{3},$$

где верхний знак соответствует решению L_4 , для которого Y положительно, нижний знак — решению L_3 . Уравнение для σ получается в виде

$$\sigma^4 + \sigma^2 + \frac{27}{4}v(1-v) = 0$$

для обоих равновесных решений. Следовательно,

$$\sigma^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}[1-27v(1-v)]^{1/2}.$$

Четыре корня являются чисто мнимыми при условии, что

$$27v(1-v) < 1, \\ v < 0,03852.$$

В зависимости от значения v имеют место условия первого или третьего случая. Для системы Солнце — Юпитер $v = 0,00095388$; поэтому

$$v(1-v) = 0,00095297$$

$$1 - 27v(1-v) = 0,974270$$

$$[1 - 27v(1-v)]^{1/2} = 0,987051$$

$$\sigma^2 = -0,006474 \quad \sigma^2 = -0,993526$$

$$\sigma_{1,2} = \pm 0,08046i \quad \sigma_{3,4} = \pm 0,996758i$$

Период:

$$12,43 P_4 = 147,4 \text{ года} \quad 1,003253 P_4 = 11,90 \text{ года.}$$

Для астероида Троянской группы в плоскости орбиты Юпитера движение относительно положения равновесия состоит из колебания с периодом, приблизительно равным 150 годам, называемого либрацией, и колебания с периодом, немного большим периода обращения самого Юпитера. Амплитуда и фаза либрации играют роль a и ϵ . Амплитуда и фаза короткопериодического колебания соответствуют e и $\tilde{\omega}$. Тот факт, что период этого колебания несколько длиннее, чем период обращения Юпитера, свидетельствует о движении перигелия.

Орбиты астероидов Троянской группы представляют пример орбит в окрестности равносторонних треугольных решений. Однако эти орбиты едва ли можно рассматривать как малые колебания относительно точек

¹⁾ H. C. Plummer, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 62, 6 (1901).

равновесия. Развитие эффективных методов для получения общих теорий этих орбит было предметом многочисленных исследований. В частности, см. книгу Брауна и Шука¹⁾.

Равновесные решения существуют не только для ограниченной задачи трех тел, но также и для общей задачи трех тел, в которой масса третьего тела не является пренебрежимо малой.

Другими частными решениями задачи трех тел, существование которых доказано строго, являются периодические орбиты. Работа Пуанкаре²⁾ представляет обширную теорию этого класса орбит. В гл. XII настоящей книги пример такого рода периодических орбит приводится при рассмотрении теории Хилла — Брауна движения Луны. Метод, примененный для изучения орбит в окрестности периодической орбиты, выбранной в качестве первого приближения в теории Луны, применим в большинстве случаев и к периодическим орбитам в ограниченной задаче. Однако в этом случае уравнения в вариациях больше не являются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, как это было для частных решений Лагранжа. Коэффициенты этих линейных уравнений представляют собой периодические функции времени.

8. Различные формы уравнений движения. Отсутствие решения задачи трех или более тел сделало необходимым развитие методов для получения решений при помощи процесса последовательных приближений. Эти методы различны для различных конфигураций.

Система Земля — Луна с Солнцем в качестве главного возмущающего тела представляет типичный пример спутниковой конфигурации. Пусть три этих тела рассматриваются как материальные точки m_j с координатами ξ_j , η_j , ζ_j ($j = 0, 1, 2$) в системе координат, начало которой лежит в центре масс. Пусть m_0 представляет Землю, m_1 — Луну, m_2 — Солнце. Уравнения движения можно написать в следующем виде:

$$m_j \frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \xi_j}, \quad m_j \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad m_j \frac{d^2 \zeta_j}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}, \\ j = 0, 1, 2,$$

$$F = k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right],$$

где

$$r_{jk}^2 = (\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2.$$

Это — система восемнадцатого порядка, у которой интегралы центра масс при особом выборе системы координат имеют вид

$$\sum m_j \xi_j = 0, \quad \sum m_j \eta_j = 0, \quad \sum m_j \zeta_j = 0.$$

При помощи этих соотношений можно понизить порядок системы до 12.

Выбор надлежащего преобразования координат, посредством которого можно совершить это понижение порядка системы, определяется специфическими чертами спутниковой системы: расстояние r_{01} мало по сравнению с r_{02} или r_{12} , тогда как m_2 велико по сравнению с $m_0 + m_1$.

¹⁾ E. W. Brown and C. A. Shook, Planetary Theory, Cambridge Univ. Press, 1933.

²⁾ H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892—1899.

(В аналогичной звездной конфигурации имеет место первое из этих свойств, но все массы одного и того же порядка.)

Если расстояние r_{01} очень мало в сравнении с r_{02} , то движение центра масс тел m_0 и m_1 относительно m_2 будет близким к невозмущенному движению. Это тем ближе к истине, чем меньше отношение r_{01}/r_{02} . Это рассуждение подсказывает, что выгодно ввести координаты Луны относительно Земли и координаты Солнца относительно центра масс Земли и Луны. Поэтому пусть

$$\begin{aligned}x &= \xi_1 - \xi_0, & y &= \eta_1 - \eta_0, & z &= \zeta_1 - \zeta_0, \\x' &= \xi_2 - \frac{m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1}{m_0 + m_1}, & y' &= \eta_2 - \frac{m_0 \eta_0 + m_1 \eta_1}{m_0 + m_1}, & z' &= \zeta_2 - \frac{m_0 \zeta_0 + m_1 \zeta_1}{m_0 + m_1}.\end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{m_0} \frac{\partial F}{\partial \xi_0} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \\ \frac{d^2x'}{dt^2} &= -\frac{1}{m_0 + m_1} \left[\frac{\partial F}{\partial \xi_0} + \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \right] + \frac{1}{m_2} \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\end{aligned}$$

и аналогичные уравнения для y , y' , z , z' .

Теперь необходимо выразить частные производные от F через частные производные по новым координатам. Из соотношений

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi_j} + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \xi_j}$$

вытекает, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi_0} &= -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{\partial F}{\partial x'}, \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_1} &= +\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{\partial F}{\partial x'}, \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_2} &= +\frac{\partial F}{\partial x'}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1} \right) \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{d^2x'}{dt^2} &= \left(\frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1) m_2} \frac{\partial F}{\partial x'}.\end{aligned}\tag{21}$$

Чтобы выразить r_{01}^2 , r_{02}^2 , r_{12}^2 через новые координаты, необходимо выразить разности $\xi_1 - \xi_0$, $\xi_2 - \xi_0$, $\xi_2 - \xi_1$ через x , x' . Аналогичные соотношения будут иметь место для координат η и ζ . Мы имеем

$$\begin{aligned}-\xi_0 + \xi_1 &= x, \\ -m_0 \xi_0 - m_1 \xi_1 + (m_0 + m_1) \xi_2 &= (m_0 + m_1) x', \\ m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 &= 0.\end{aligned}$$

Решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= -\frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} x' - \frac{m_1}{m_0 + m_1} x, \\ \xi_1 &= -\frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} x' + \frac{m_0}{m_0 + m_1} x, \\ \xi_2 &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} x',\end{aligned}$$

и поэтому

$$\xi_1 - \xi_0 = x,$$

$$\xi_2 - \xi_0 = x' + \frac{m_1}{m_0 + m_1} x,$$

$$\xi_2 - \xi_1 = x' - \frac{m_0}{m_0 + m_1} x,$$

что также может быть легко получено из геометрических соображений.
Если теперь

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

$$xx' + yy' + zz' = rr' \cos S,$$

то

$$r_{01}^2 = r^2,$$

$$\begin{aligned} r_{02}^2 &= r'^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} rr' \cos S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} \right)^2 r^2 = \\ &= r'^2 \left[1 + 2 \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \cos S + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} \right)^2 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right], \\ r_{12}^2 &= r'^2 - \frac{2m_0}{m_0 + m_1} rr' \cos S + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 r^2 = \\ &= r'^2 \left[1 - 2 \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'} \cos S + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Известное разложение при помощи полиномов Лежандра дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{02}} &= \frac{1}{r'} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'^2} P_1(\cos S) + \frac{m_1^2}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) - \\ &\quad - \frac{m_1^3}{(m_0 + m_1)^3} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{r'} + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r}{r'^2} P_1(\cos S) + \frac{m_0^2}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) + \\ &\quad + \frac{m_0^3}{(m_0 + m_1)^3} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) + \dots \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} F &= k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{r} + \frac{(m_0 + m_1) m_2}{r'} + \frac{m_0 m_1 m_2}{m_0 + m_1} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) + \right. \\ &\quad + \frac{m_0 m_1 m_2 (m_0 - m_1)}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) + \\ &\quad \left. + \frac{m_0 m_1 m_2 (m_0^2 - m_0 m_1 + m_1^2)}{(m_0 + m_1)^3} \frac{r^4}{r'^5} P_4(\cos S) + \dots \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Член с $P_1(\cos S)$ обратился в нуль.

Если теперь положим

$$\frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} F = F_{\zeta},$$

$$\frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1)m_2} F = F_{\odot},$$

то уравнения (21) принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{m_0 + m_1}{r} + m_2 \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) + m_2 \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} \frac{r^3}{r'^4} P_3(\cos S) + m_2 \frac{m_0^2 - m_0 m_1 + m_1^2}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^4}{r'^5} P_4(\cos S) + \dots \right],$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = k^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{m_0 + m_1 + m_2}{r'} + \frac{(m_0 + m_1 + m_2)m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^2} \frac{r^2}{r'^3} P_2(\cos S) + \dots \right]$$

и аналогичные уравнения для y, y', z, z' .

В выражении для F_{\odot} отброшен член с r' , так как он не зависит от x, y, z ; в выражении для F_{\odot} отброшен член с r , так как он соответственно не зависит от x', y', z' . Если F_{\odot} и F_{\odot} ограничить их основными членами, то уравнения сведутся к уравнениям относительного движения в задаче двух тел. Легко видеть, что в F_{\odot} для системы Земля—Луна—Солнце отношение второго члена к первому приблизительно равно

$$\frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{r^2}{r'^2} \sim \frac{1}{80} \times \frac{1}{400^2} \sim \frac{1}{13\,000\,000}.$$

Это свидетельствует о том, насколько близким является движение центра масс системы Земля—Луна относительно Солнца к движению по кеплерову эллипсу. Главное влияние возмущающего члена проявляется в движении перигелия этой орбиты на $7'',7$ в столетие. Эта величина включена в таблицы Ньюкома для Солнца.

Обычная форма уравнений движения в прямоугольных координатах для планетного случая трех тел дается уравнениями (4а), (4б) этой главы. В этой форме для каждой планеты использовались ее гелиоцентрические координаты, и силовые функции для обеих планет были различны.

Если m_0 означает массу Солнца, m_1, m_2 — массы двух планет, то для планетного случая справедливы уравнения (21) с функцией F , определяемой формулой (22). В этих координатах силовые функции для обеих планет одинаковы с точностью до множителей, зависящих от масс. Это форма, применявшаяся Якоби; она дает возможность привести уравнения к канонической форме с единственным гамильтонианом для всей системы.

В планетном случае сходимость ряда из членов, входящих в F , в большинстве случаев не улучшается существенно благодаря присутствию членов вида $r^k r'^{-k-1}$ — множителей полинома Лежандра порядка k . По этой причине разложение по полиномам Лежандра не является, как правило, пригодным для планетного случая. Вместо него применяется другая форма разложения для величины, обратной r_{12} .

Замечания. Литература

Первые общие теоремы, относящиеся к задаче n тел, были открыты и изложены Ньютона в его «Началах»; они относятся к движению центра масс. Эйлер, по-видимому, первым развил небесную механику значительно дальше того состояния, в котором ее оставил Ньютон; десять общих интегралов были ему известны. В 1784 г. Лаплас вывел свойства неизменяемой плоскости. Примерно в 1842 г. Якоби доказал, что если бы были известны все интегралы, кроме двух, то всегда можно было бы найти и эти последние. Он также показал, что эту задачу можно свести к решению некоторого дифференциального уравнения в частных производных, порядок которого равен половине порядка исходной системы уравнений.

Г л а в а Х I

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

1. Основные принципы метода. Из рассмотрения задачи двух тел известно, что координаты и компоненты скорости для любого момента времени дают возможность определить единственную систему из шести элементов орбиты. В задаче двух тел эти элементы не меняются с временем. Следовательно, в какой бы момент времени мы ни выбрали координаты и компоненты скорости, элементы, полученные по ним, всегда будут одни и те же с числом значащих цифр, определяемым числом значащих цифр в основных данных.

Большинство задач, встречающихся при изучении движений тел в солнечной системе, обладает общим характерным свойством, которое заключается в том, что ускорение, вызываемое притяжением одного тела, гораздо больше «возмущающих» ускорений, сообщаемых ему остальными телами солнечной системы. В случае планетных орбит главным притяжением является притяжение, обусловленное Солнцем; в случае движения спутника — притяжение, производимое центральной планетой. Поэтому представляется логичным рассмотреть в качестве первого приближения к реальному движению относительную эллиптическую орбиту, описанную вокруг Солнца или центральной планеты. Когда движение происходит под влиянием различных притягивающих тел, можно использовать координаты и компоненты скорости для определения системы шести элементов орбиты. Они в точности представляют собой элементы эллипса, по которому двигалось бы тело, если бы начиная с определенного момента времени, перестали существовать ускорения, вызванные всеми «возмущающими» телами.

При реальном движении элементы орбиты, которые соответствуют этим координатам и компонентам скорости, должны неизбежно меняться с течением времени. Вместо определения «возмущенных» координат непосредственно решением дифференциальных уравнений с одинаковым успехом можно сначала получить элементы орбиты в виде функций времени. Тогда координаты можно найти по этим элементам при помощи стандартных формул эллиптического движения. В этом состоит принцип метода вариаций произвольных постоянных — метода, широко известного в теории дифференциальных уравнений. В Небесной механике он применяется к системе дифференциальных уравнений шестого порядка.

Уравнения движения частицы можно привести к следующему виду:

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = X, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = Y, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = Z, \quad (1)$$

в котором вторые члены в левой части, взятые с обратным знаком, представляют собой компоненты относительного ускорения, производимого центральной массой, помещенной в начало координатной системы. Правые части являются «возмущающими» ускорениями, вызываемыми всеми остальными силами, влияющими на это движение.

В последующем решении предполагается, что возмущающие ускорения могут быть написаны в виде частных производных от возмущающей функции R . Следовательно,

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Если приравнять правые части уравнений (1) нулю, то получится решение вида

$$\begin{aligned} x &= f_1(c_1, c_2, \dots, c_6, t), & \dot{x} &= g_1(c_1, c_2, \dots, c_6, t), \\ y &= f_2(c_1, c_2, \dots, c_6, t), & \dot{y} &= g_2(c_1, c_2, \dots, c_6, t), \\ z &= f_3(c_1, c_2, \dots, c_6, t), & \dot{z} &= g_3(c_1, c_2, \dots, c_6, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Эти соотношения представляют собой выражения прямоугольных координат эллиптического движения через время и шесть постоянных интегрирования. Поскольку в эллиптическом движении элементы постоянны, то очевидно, что

$$g_k = \frac{\partial f_k}{\partial t}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В методе вариации произвольных постоянных задача состоит в том, чтобы удовлетворить уравнениям (1) формулами (2), относящимися к эллиптическому движению. Очевидно, c_1, \dots, c_6 больше не могут быть постоянными; вместо этого они превращаются в функции времени. Поэтому первоочередной целью является вывод дифференциальных уравнений для этих переменных элементов.

Исходя из зависимости

$$x = f_1(c_1, c_2, \dots, c_6, t),$$

получаем, что в возмущенном движении

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt}. \quad (4)$$

Если это выражение, а также выражения для dy/dt , dz/dt продифференцировать снова и результаты подставить в уравнения (1), то получатся три уравнения, содержащие dc_j/dt , d^2c_j/dt^2 . Этим трем уравнениям относительно шести переменных c_j можно удовлетворить бесконечным числом способов. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо ввести еще три дополнительных условия. Такими условиями выгодно выбрать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial f_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= 0, \\ \sum \frac{\partial f_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= 0, \\ \sum \frac{\partial f_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

так что при помощи уравнений (4) получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = g_1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = g_2, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f_3}{\partial t} = g_3. \quad (6)$$

Поэтому в возмущенном движении как координаты, так и компоненты скорости в момент времени t определяются формулами эллиптического движения и выражаются через время и мгновенные значения элементов для момента t , причем компоненты скорости получаются дифференцированием выражений координат для эллиптического движения, как если бы орбитальные элементы были постоянными. Эта процедура является обязательной, если координаты и компоненты скорости должны дать мгновенные элементы по формулам эллиптического движения. С другой стороны, можно было бы ввести три условия, отличные от уравнений (5), и прийти к результатам, имеющим ту же силу. Однако координаты и компоненты скорости дают мгновенные элементы при помощи формул эллиптического движения только при условиях (5). Такие мгновенные элементы называются также оскулирующими элементами.

Мы переходим теперь к дифференцированию уравнений (6). Это дает

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt}, \\ \ddot{y} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} + \sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt}.\end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (7) в уравнения (1) дает

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{\mu f_1}{r^3} + \sum \frac{\partial g_1}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= X = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} + \frac{\mu f_2}{r^3} + \sum \frac{\partial g_2}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} + \frac{\mu f_3}{r^3} + \sum \frac{\partial g_3}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} &= Z = \frac{\partial R}{\partial z},\end{aligned} \quad (8)$$

где

$$r^3 = (f_2^2 + f_1^2 + f_3^2)^{3/2}.$$

Поскольку f_1, f_2, f_3 представляют собой выражения для координат через время и оскулирующие элементы для эпохи t , то они удовлетворяют формулам эллиптического движения. Следовательно, первые два члена в левых частях уравнений (8) взаимно уничтожаются. Результаты операций, выполненных до сих пор, полностью выражены тремя уравнениями (5) и тремя упрощенными уравнениями (8).

До сих пор символы f и g использовались для обозначения координат и компонент скорости, выраженных через время и оскулирующие элементы. В последующих разделах f и g будут заменены символами $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, которые также необходимо считать функциями

времени и оскулирующих элементов. Тогда уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial x}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial z}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1} \frac{dc_1}{dt} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2} \frac{dc_2}{dt} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3} \frac{dc_3}{dt} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4} \frac{dc_4}{dt} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5} \frac{dc_5}{dt} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6} \frac{dc_6}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти шесть уравнений, каждое из которых является уравнением первого порядка, в точности эквивалентны исходным трем уравнениям, каждое из которых — второго порядка. Все предыдущее представляет собой преобразование от старых переменных x, y, z к переменным $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$.

Форма уравнений (9) не совсем удобна. Для приложений было бы более полезным, если бы производные dc_j/dt получались явно, а не в виде шести линейных уравнений с шестью неизвестными. Эта задача была решена Лагранжем характерным для него изящным способом.

2. Скобки Лагранжа. Путем умножения шести уравнений (9) последовательно на $-\partial x/\partial c_j, -\partial y/\partial c_j, -\partial z/\partial c_j, +\partial x/\partial c_j, +\partial y/\partial c_j, +\partial z/\partial c_j$ и сложения произведений получаются шесть новых уравнений. Правые части этих новых уравнений имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial c_j} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c_j} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial c_j} = \frac{\partial R}{\partial c_j},$$

так как в задачах, в которых существует возмущающая функция, компоненты скорости не входят в выражение для этой возмущающей функции.

Эти уравнения можно написать в сокращенном виде путем введения скобок Лагранжа, определяемых формулой

$$[c_j, c_k] = \frac{\partial x}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} + \frac{\partial y}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_k} - \frac{\partial y}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j} + \frac{\partial z}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_k} - \frac{\partial z}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j}.$$

Эта формула часто будет записываться таким образом:

$$\begin{aligned} [c_j, c_k] &= S \left(\frac{\partial x}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} \right) = \\ &= S \frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (c_j, c_k)}, \end{aligned}$$

где символ S означает суммирование выражения, записанного только для координаты x , по трем координатам.

При помощи скобок Лагранжа уравнения (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & [c_1, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_1, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_1, c_3] \frac{dc_3}{dt} + [c_1, c_4] \frac{dc_4}{dt} + \\
 & + [c_1, c_5] \frac{dc_5}{dt} + [c_1, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_1}, \\
 & [c_2, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_2, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_2, c_3] \frac{dc_3}{dt} + [c_2, c_4] \frac{dc_4}{dt} + \\
 & + [c_2, c_5] \frac{dc_5}{dt} + [c_2, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_2}, \\
 & [c_3, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_3, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_3, c_3] \frac{dc_3}{dt} + [c_3, c_4] \frac{dc_4}{dt} + \\
 & + [c_3, c_5] \frac{dc_5}{dt} + [c_3, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_3}, \\
 & [c_4, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_4, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_4, c_3] \frac{dc_3}{dt} + [c_4, c_4] \frac{dc_4}{dt} + \\
 & + [c_4, c_5] \frac{dc_5}{dt} + [c_4, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_4}, \\
 & [c_5, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_5, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_5, c_3] \frac{dc_3}{dt} + [c_5, c_4] \frac{dc_4}{dt} + \\
 & + [c_5, c_5] \frac{dc_5}{dt} + [c_5, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_5}, \\
 & [c_6, c_1] \frac{dc_1}{dt} + [c_6, c_2] \frac{dc_2}{dt} + [c_6, c_3] \frac{dc_3}{dt} + [c_6, c_4] \frac{dc_4}{dt} + \\
 & + [c_6, c_5] \frac{dc_5}{dt} + [c_6, c_6] \frac{dc_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial c_6}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В этих уравнениях имеется тридцать шесть скобок Лагранжа. Однако из определения этих скобок ясно, что

$$[c_j, c_j] = 0, \quad [c_j, c_k] = -[c_k, c_j].$$

Следовательно, определитель, составленный из скобок Лагранжа как коэффициентов уравнений (10), является антисимметричным; элементы по главной диагонали равны нулю, а элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны по величине, но противоположны по знаку соответствующим элементам, расположенным симметрично выше главной диагонали. Поэтому число различных скобок Лагранжа, которые необходимо вычислить, равно пятнадцати.

Вычисление любой скобки Лагранжа зависит только от формул эллиптического движения. Прежде чем пойти дальше, выведем одно важное свойство скобок Лагранжа.

3. Независимость скобок Лагранжа от времени. Напишем соотношение

$$[p, q] = S \left(\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \right),$$

в котором p и q — любая пара эллиптических элементов. В таком случае

$$\frac{\partial}{\partial t} [p, q] = S \left(\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial t} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial p \partial t} \right).$$

Правую часть можно написать в следующем виде:

$$S \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\dot{x}}{\partial t} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} - \frac{\dot{x}}{\partial q} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\dot{x}}{\partial t} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \frac{\dot{x}}{\partial p} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \right) \right],$$

что легко проверить. Теперь x и \dot{x} в этом выражении означают функции эллиптического движения с c_1, \dots, c_8 , рассматриваемыми как постоянные. Далее, $\partial x / \partial t = \dot{x}$, $\partial \dot{x} / \partial t = \ddot{x}$ и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [p, q] &= S \left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \right) \right) = \\ &= S \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (x^2)}{\partial q} - \frac{\partial F_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial (x^2)}{\partial p} - \frac{\partial F_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь использованы уравнения

$$\ddot{x} = \frac{\partial F_0}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial F_0}{\partial z}, \quad \text{где } F_0 = \frac{\mu}{r}.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} [p, q] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V^2}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial q \partial p} = 0.$$

Предполагается, что скобки Лагранжа выражены как функции постоянных интегрирования и времени t . Однако, если частные производные от скобок Лагранжа по t равны нулю, то t не может входить в них явным образом, и потому скобки Лагранжа должны быть функциями только от постоянных интегрирования. Следовательно, скобки Лагранжа можно вычислять для любой удобным образом выбранной точки орбиты. Прежде чем идти дальше, удобно выразить скобки Лагранжа в другой форме, впервые введенной Уиттекером в 1897 г.

4. Метод Уиттекера вычисления скобок Лагранжа. В качестве эллиптических элементов мы используем кеплеровы элементы $a, e, I, \epsilon, \tilde{\omega}, \Omega$, из которых первые три имеют свой обычный смысл; e — средняя долгота в эпоху, так что средняя долгота λ выражается суммой $nt + \epsilon$; $\tilde{\omega}$ — долгота перигелия и Ω — долгота восходящего узла, причем $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$. Угол ω равен угловому расстоянию от восходящего узла до перигелия и иногда называется аргументом перигелия.

Метод Уиттекера вычисления скобок Лагранжа по существу зависит от решения вопроса, каким образом изменится значение одной из скобок Лагранжа $[p, q]$ при повороте системы координат xyz вокруг оси z . Запишем с этой целью

$$[p, q] = \frac{\partial (x, \dot{x})}{\partial (p, q)} + \frac{\partial (y, \dot{y})}{\partial (p, q)} + \frac{\partial (z, \dot{z})}{\partial (p, q)}.$$

Поворот системы координат вокруг оси z на угол $+\Omega$ переносит восходящий узел на ось x' . Связь между старыми и новыми координатами имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \Omega - y' \sin \Omega, \\ y &= x' \sin \Omega + y' \cos \Omega, \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{11}$$

Частные производные по p можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = A_1 \cos \Omega - B_1 \sin \Omega, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = C_1 \cos \Omega - D_1 \sin \Omega,$$

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial p} = B_1 \cos \Omega + A_1 \sin \Omega, \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial p} = D_1 \cos \Omega + C_1 \sin \Omega,$$

где

$$A_1 = \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \quad B_1 = \frac{\partial y'}{\partial p} + x' \frac{\partial \Omega}{\partial p},$$

$$C_1 = \frac{\partial \dot{x}'}{\partial p} - \dot{y}' \frac{\partial \Omega}{\partial p}, \quad D_1 = \frac{\partial \dot{y}'}{\partial p} + \dot{x}' \frac{\partial \Omega}{\partial p}.$$

Пусть, далее, A_2, B_2, C_2, D_2 получаются заменой p на q в этих выражениях. Тогда находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x', \dot{x})}{\partial(p, q)} &= (A_1 C_2 - A_2 C_1) \cos^2 \Omega + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \sin^2 \Omega + \\ &+ (-A_1 D_2 - B_1 C_2 + A_2 D_1 + B_2 C_1) \sin \Omega \cos \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(y', \dot{y})}{\partial(p, q)} &= (B_1 D_2 - B_2 D_1) \cos^2 \Omega + (A_1 C_2 - A_2 C_1) \sin^2 \Omega + \\ &+ (A_1 D_2 + B_1 C_2 - A_2 D_1 - B_2 C_1) \sin \Omega \cos \Omega. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[p, q] = A_1 C_2 - A_2 C_1 + B_1 D_2 - B_2 D_1 + \frac{\partial(x', \dot{x})}{\partial(p, q)}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} A_1 C_2 - A_2 C_1 &= \left(\frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial q} - \dot{y}' \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right) - \\ &- \left(\frac{\partial x'}{\partial q} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial \dot{x}'}{\partial p} - \dot{y}' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) = \\ &= \frac{\partial(x', \dot{x}')}{\partial(p, q)} + \left(-y' \frac{\partial \dot{x}'}{\partial q} + \dot{y}' \frac{\partial x'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left(-\dot{y}' \frac{\partial x'}{\partial p} + y' \frac{\partial \dot{x}'}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q}. \end{aligned}$$

Произведения $\partial \Omega / \partial p$ и $\partial \Omega / \partial q$ обращаются в нуль. Аналогично

$$\begin{aligned} B_1 D_2 - B_2 D_1 &= \left(\frac{\partial y'}{\partial p} + x' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial q} + \dot{x}' \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right) - \\ &- \left(\frac{\partial y'}{\partial q} + \dot{x}' \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial \dot{y}'}{\partial p} + \dot{x}' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) = \\ &= \frac{\partial(y', \dot{y}')}{\partial(p, q)} + \left(x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial q} - \dot{x}' \frac{\partial y'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left(\dot{x}' \frac{\partial y'}{\partial p} - x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q}. \end{aligned}$$

Пусть

$$[p, q]' = \frac{\partial(x', \dot{x}')}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(y', \dot{y}')}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(z', \dot{z}')}{\partial(p, q)}.$$

Поскольку $z = z'$, $\dot{z} = \dot{z}'$, то

$$\begin{aligned}[p, q]' &= [p, q]' + \left(x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial q} + \dot{y}' \frac{\partial x'}{\partial q} - y' \frac{\partial \dot{z}'}{\partial q} - \dot{z}' \frac{\partial y'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \\ &\quad - \left(x' \frac{\partial \dot{y}'}{\partial p} + \dot{y}' \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \dot{z}'}{\partial p} - \dot{z}' \frac{\partial y'}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q} = \\ &= [p, q]' + \frac{\partial(\Omega, x' \dot{y}' - y' \dot{x}')}{\partial(p, q)}.\end{aligned}$$

Выражение интеграла площадей в плоскости xy может быть записано через орбитальные элементы в виде

$$[\mu a(1-e^2)]^{1/2} \cos I = H. \quad (12)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$[p, q] = [p, q]' + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)}. \quad (13)$$

Затем совершается переход к системе координат x'', y'', z'' при помощи поворота вокруг оси x' на угол $+I$. Соотношения между старыми и новыми координатами имеют вид

$$\begin{aligned}x' &= x'', \\ y' &= y'' \cos I - z'' \sin I, \\ z' &= y'' \sin I + z'' \cos I.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$[p, q]' = [p, q]'' + \frac{\partial(I, y'' z'' - z'' y'')}{\partial(p, q)}.$$

Но z и z'' равны нулю, так как плоскость $x''y''$ совпадает с плоскостью орбиты. Следовательно,

$$[p, q]' = [p, q]''. \quad (14)$$

Наконец, совершается поворот относительно оси z'' на угол $+\omega = \tilde{\omega} - \Omega$. Пусть новые координаты обозначены через X, Y . Плоскость XY совпадает с плоскостью орбиты, а ось X направлена в перигелий. Применение формулы (13) дает

$$\begin{aligned}[p, q]'' &= [p, q]'' + \frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega, X \dot{Y} - Y \dot{X})}{\partial(p, q)} = \\ &= [p, q]'' + \frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial(p, q)},\end{aligned} \quad (15)$$

если

$$G = [\mu a(1-e^2)]^{1/2}. \quad (16)$$

Складывая (13), (14) и (15), получаем

$$[p, q] = [p, q]'' + \frac{\partial(\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, H)}{\partial(p, q)}. \quad (17)$$

Поэтому остается вычислить

$$[p, q]'' = \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial \dot{X}}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial \dot{X}}{\partial p} + \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial q} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial p}.$$

Координаты X и Y — функции от a , e и средней аномалии l , причем

$$l = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}.$$

Поскольку скобки Лагранжа не зависят от времени, то достаточно вычислить их в точке $l=0$, т. е. в перигелии. В этой точке разложения X и Y по степеням l имеют вид

$$\begin{aligned} X &= a(1-e) - \frac{al^2}{2(1-e)^2} + \dots, & \dot{X} &= -\frac{anl}{(1-e)^2} + \dots, \\ Y &= al \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} + \dots, & \dot{Y} &= +an \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} + \dots \end{aligned}$$

и легко получаются из следующих разложений в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \dot{X}_0(t-T) + \frac{1}{2} \ddot{X}_0(t-T)^2 + \dots, \\ Y &= Y_0 + \dot{Y}_0(t-T) + \frac{1}{2} \ddot{Y}_0(t-T)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где T — время прохождения через перигелий. Из этих разложений находим, что в перигелии

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} &= 1-e, & \frac{\partial X}{\partial e} &= -a, & \frac{\partial X}{\partial (e-\tilde{\omega})} &= 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial Y}{\partial e} &= 0, & \frac{\partial Y}{\partial (e-\tilde{\omega})} &= a \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}, \\ \frac{\partial \dot{X}}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial \dot{X}}{\partial e} &= 0, & \frac{\partial \dot{X}}{\partial (e-\tilde{\omega})} &= -\frac{an}{(1-e)^2}, \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial a} &= -\frac{1}{2} n \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2}, & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial e} &= +an(1+e)^{-1/2}(1-e)^{-3/2}, & & \\ & & & & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial (e-\tilde{\omega})} &= 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} [p, q]^m &= \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)} \left[\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(a, e)} \right] + \\ &+ \frac{\partial(e, e+\tilde{\omega})}{\partial(p, q)} \left[\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(e, e-\tilde{\omega})} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(e, e-\tilde{\omega})} \right] + \\ &+ \frac{\partial(e-\tilde{\omega}, a)}{\partial(p, q)} \left[\frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(e-\tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(e-\tilde{\omega}, a)} \right]. \end{aligned}$$

Подстановка значений производных в перигелии дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(a, e)} &= 0, \\ \frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(e, e-\tilde{\omega})} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(e, e-\tilde{\omega})} &= 0, \\ \frac{\partial(X, \dot{X})}{\partial(e-\tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(Y, \dot{Y})}{\partial(e-\tilde{\omega}, a)} &= \frac{an}{2} = \frac{1}{2} \mu^{1/2} a^{-1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [p, q]''' &= \frac{\partial (\varepsilon - \tilde{\omega}, a)}{\partial (p, q)} \cdot \frac{1}{2} \mu^{1/2} a^{-1/2} = \\ &= \frac{\partial (\varepsilon - \tilde{\omega}, L)}{\partial (p, q)}, \end{aligned} \quad (18)$$

если

$$L = (\mu a)^{1/2}. \quad (19)$$

Комбинация (17) и (18) дает окончательно

$$[p, q] = \frac{\partial (\varepsilon - \tilde{\omega}, L)}{\partial (p, q)} + \frac{\partial (\tilde{\omega} - \Omega, G)}{\partial (p, q)} + \frac{\partial (\Omega, H)}{\partial (p, q)}. \quad (20)$$

5. Производные от кеплеровых элементов. Из последнего выражения легко получается требуемая система скобок Лагранжа. Поскольку

$$L = (\mu a)^{1/2}, \quad G = L(1 - e^2)^{1/2}, \quad H = G \cos I,$$

то, обозначая частные производные нижними индексами и полагая na^2 вместо $(\mu a)^{1/2}$ и na вместо $\mu^{1/2}a^{-1/2}$, находим, что

$$\begin{aligned} L_a &= \frac{1}{a} na, & G_a &= \frac{1}{2} na(1 - e^2)^{1/2}, & H_a &= \frac{1}{2} na(1 - e^2)^{1/2} \cos I, \\ L_e &= 0, & G_e &= -na^2e(1 - e^2)^{-1/2}, & H_e &= -na^2e(1 - e^2)^{-1/2} \cos I, \\ L_I &= 0, & G_I &= 0, & H_I &= -na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin I. \end{aligned}$$

Это дает

$$\begin{aligned} [\varepsilon, a] &= -[a, \varepsilon] = +\frac{1}{2} na, \\ [\tilde{\omega}, a] &= -[a, \tilde{\omega}] = -\frac{1}{2} na[1 - (1 - e^2)^{1/2}], \\ [\Omega, a] &= -[a, \Omega] = -\frac{1}{2} na(1 - e^2)^{1/2}(1 - \cos I), \\ [\tilde{\omega}, e] &= -[e, \tilde{\omega}] = -na^2e(1 - e^2)^{-1/2}, \\ [\Omega, e] &= -[e, \Omega] = +na^2e(1 - e^2)^{-1/2}(1 - \cos I), \\ [\Omega, I] &= -[I, \Omega] = -na^2(1 - e^2)^{1/2} \sin I. \end{aligned}$$

Все остальные скобки равны нулю.

Подстановка этих выражений в уравнения (10) дает следующие две системы уравнений:

$$\begin{aligned} [\varepsilon, a] \frac{da}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ [\tilde{\omega}, a] \frac{da}{dt} + [\tilde{\omega}, e] \frac{de}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}, \\ [\Omega, a] \frac{da}{dt} + [\Omega, e] \frac{de}{dt} + [\Omega, I] \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega}; \\ [a, \varepsilon] \frac{de}{dt} + [a, \tilde{\omega}] \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + [a, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial a}, \\ [e, \tilde{\omega}] \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + [e, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial e}, \\ [I, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial I}. \end{aligned}$$

Выражения для da/dt , de/dt и т. д., которые получаются из этих уравнений, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} [1 - (1-e^2)^{1/2}] \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}, \\ \frac{dI}{dt} &= -\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} I}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \right) - \frac{1}{na^2 (1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{(1-e^2)^{1/2} [1 - (1-e^2)^{1/2}]}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} I}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} I}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 (1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial I}. \end{aligned} \quad (21)$$

6. Модификация уравнений для устранения t вне тригонометрических аргументов. Уравнения (21) обладают в этом виде одним серьезным недостатком. Возмущающую функцию необходимо разложить в ряд с периодическими членами. Элементы a , e , I входят в коэффициенты, элементы ε , $\tilde{\omega}$, Ω — в аргументы. Однако ε всегда входит в линейной комбинации с nt в виде суммы $nt + \varepsilon$, а n является функцией от a в силу соотношения $n^2 a^3 = \mu$. Следовательно, элемент a присутствует явным образом в коэффициентах разложения и через посредство n — в аргументах.

Производная $\partial R/\partial a$ встречается только в de/dt . Этот член можно написать в следующем виде:

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e} t \frac{dn}{da},$$

в котором скобки означают ту часть $\partial R/\partial a$, которая возникает из-за присутствия в явном виде a в коэффициентах периодических членов.

Легко видеть, что вследствие присутствия n в аргументах время входит множителем в коэффициенты периодических членов. Последнее выражение можно написать в более простом виде:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - t \frac{dn}{da} \frac{da}{dt} = \\ &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - t \frac{\partial n}{\partial t}. \end{aligned}$$

Если это выражение подставить в уравнение для de/dt , то получится

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{2}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right) - t \frac{dn}{dt} + \frac{(1-e^2)^{1/2} [1 - (1-e^2)^{1/2}]}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} I}{na^2 (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I}. \end{aligned}$$

Присутствия t вне тригонометрических аргументов можно избежать, определяя ε^I так, чтобы

$$\frac{d\varepsilon^I}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt}. \quad (22)$$

Смысл этой замены виден при дифференцировании средней долготы

$$\begin{aligned}\lambda &= nt + \varepsilon, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= n + t \frac{dn}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt} = \\ &= n + \frac{d\varepsilon^I}{dt}\end{aligned}$$

с учетом определения ε^I . Интегрирование выражения в последней строке дает

$$\lambda = \int n dt + \varepsilon^I.$$

Это выражение часто записывается в виде

$$\lambda = q + \varepsilon^I,$$

так что

$$\frac{dq}{dt} = n, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt},$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Самый простой путь получения требуемого вида уравнений — это рассматривать R как функцию от a , e , I , λ , $\tilde{\omega}$, Ω . Тогда a присутствует только в коэффициентах, и скобки с $\partial R/\partial a$ не нужны. Уравнения (21) можно оставить в том виде, как они есть, при условии, что ε подразумевается имеющим смысл ε^I , т. е. что соотношение между λ и ε имеет вид

$$\lambda = \int n dt + \varepsilon.$$

Частную производную $\partial R/\partial \varepsilon$ можно заменить на $\partial R/\partial \lambda$ или подразумевать под ней указанную частную производную, и тогда необходимо добавить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\lambda &= q + \varepsilon, \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda}.\end{aligned} \quad (23)$$

Исключение времени из коэффициентов тригонометрических членов достигается за счет введения двойного интегрирования, необходимого для получения средней долготы. За этим исключением все уравнения для вариаций элементов являются уравнениями первого порядка.

С первого взгляда может показаться, что были введены лишние постоянные интегрирования. То, что это не так, вытекает из следующего. Во-первых, поскольку q и ε встречаются вместе в виде $q + \varepsilon$, то аддитивные постоянные в q и ε объединяются в одну постоянную. Затем

$$\frac{dq}{dt} = n,$$

что представляет собой оскулирующее среднее движение, связанное с a посредством соотношения $n^2 a^3 = \mu$. Поэтому вторая постоянная интегрирования при интегрировании уравнения (23) не находится в полном нашем распоряжении, а должна согласоваться с постоянной, вводимой при интегрировании уравнения для da/dt .

7. Альтернативные виды уравнений (21) в случаях малого эксцентрикитета или малой наклонности. Уравнения (21) обладают некоторыми характерными особенностями, которые делают их неудобными для применения к орбитам с малыми эксцентрикитетами или малыми наклонностями: в знаменатель первой части выражения для $d\tilde{\omega}/dt$ входит эксцентрикитет, а $\sin I$ появляется в знаменателе выражения для $d\Omega/dt$. Если эксцентрикитет или наклонность не могут стать исчезающе малыми, это неудобство фактически оказывается больше кажущимся, чем реальным. При вычислении положения в пространстве долгота перигелия присутствует только в членах, умноженных на эксцентрикитет; аналогично долгота узла входит только в члены, умноженные на $\sin I$. Следовательно, достаточно получить $e d\tilde{\omega}/dt$ и $\sin I d\Omega/dt$ с той же степенью точности, что и de/dt .

Появление e и $\sin I$ в знаменателе в членах выражений для de/dt и dI/dt имеет даже еще меньшее значение. Член в возмущающей функции, содержащий $\tilde{\omega}$ в своем аргументе, всегда имеет в своем коэффициенте множителем по меньшей мере первую степень e , а член, содержащий в своем аргументе Ω , содержит в своем коэффициенте множителем по крайней мере квадрат $\sin I$.

Уравнения (21) были фактически применены с замечательным успехом Леверье в теориях движения больших планет. В силу указанных причин малость некоторых эксцентрикитетов и наклонностей не внесла серьезных осложнений.

Тем не менее для некоторых задач требуется использовать видоизмененную форму этих уравнений. Положим

$$e \sin \tilde{\omega} = h, \quad e \cos \tilde{\omega} = k;$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{de}{dt} \sin \tilde{\omega} + e \cos \tilde{\omega} \frac{d\tilde{\omega}}{dt}, \\ \frac{dk}{dt} &= \frac{de}{dt} \cos \tilde{\omega} - e \sin \tilde{\omega} \frac{d\tilde{\omega}}{dt}, \\ \frac{\partial R}{\partial h} &= \frac{\partial R}{\partial e} \sin \tilde{\omega} + \frac{1}{e} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \cos \tilde{\omega}, \\ \frac{\partial R}{\partial k} &= \frac{\partial R}{\partial e} \cos \tilde{\omega} - \frac{1}{e} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Преобразование уравнений для de/dt и $d\Omega/dt$ дает

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{h(1-e^2)^{1/2}}{na^2[1+(1-e^2)^{1/2}]} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{k \operatorname{tg} \frac{1}{2} I}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \\ \frac{dk}{dt} &= - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{k(1-e^2)^{1/2}}{na^2[1+(1-e^2)^{1/2}]} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{h \operatorname{tg} \frac{1}{2} I}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I}, \end{aligned} \quad (24)$$

где ради краткости было использовано выражение $1 - e^2$ вместо $1 - h^2 - k^2$.

Эти уравнения, конечно, в равной степени справедливы для орбиты с большим эксцентриситетом и для орбиты с малым эксцентриситетом, но в последнем случае уравнения в этой форме обладают исключительными достоинствами.

Аналогичным образом положим

$$p = \operatorname{tg} I \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} I \cos \Omega.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sin \Omega}{\cos^2 I} \frac{dI}{dt} + \operatorname{tg} I \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\cos \Omega}{\cos^2 I} \frac{dI}{dt} - \operatorname{tg} I \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{\partial R}{\partial p} \operatorname{tg} I &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \cos \Omega + \frac{\partial R}{\partial I} \sin I \cos I \sin \Omega, \\ \frac{\partial R}{\partial q} \operatorname{tg} I &= -\frac{\partial R}{\partial \Omega} \sin \Omega + \frac{\partial R}{\partial I} \sin I \cos I \cos \Omega, \\ \frac{dp}{dt} &= +\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \cos^3 I} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p}{2na^2(1-e^2)^{1/2} \cos I \cos^2 \frac{1}{2} I} \left(\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \right), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \cos^3 I} \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q}{2na^2(1-e^2)^{1/2} \cos I \cos^2 \frac{1}{2} I} \left(\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Функции $\cos I$ и $\cos \frac{1}{2} I$ сохранены в знаменателях для сокращения записи. Они могут быть разложены по степеням $p^2 + q^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos I} &= (1 + p^2 + q^2)^{1/2}, \\ \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2} I} &= \frac{1}{1 + (1 + p^2 + q^2)^{-1/2}} \end{aligned}$$

при условии, что I достаточно мало. Это имеет место именно в тех случаях, когда уравнения в такой форме особенно полезны.

8. Система a , e , I , σ , ω , Ω . Общее выражение (20) для $[p, q]$ становится еще проще, если ввести σ вместо $e - \tilde{\omega}$ и ω вместо $\tilde{\omega} - \Omega$. Угол ω есть аргумент перигелия, или угловое расстояние от восходящего узла до перигелия. Угол σ является лишь постоянной, связанной со средней аномалией, так что

$$l = nt + \sigma.$$

Выход уравнений для этих переменных несколько проще, чем для системы с e , $\tilde{\omega}$, Ω . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \sigma}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} I}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} I}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial I},$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin I} \frac{\partial R}{\partial I}.$$

Коэффициенты в этих выражениях в некоторой степени проще, чем коэффициенты в системе (21). Однако необходимо заметить, что для малых наклонностей коэффициенты как при $\partial R/\partial \omega$, так и при $\partial R/\partial \Omega$ в выражении для dI/dt велики и в выражении для $d\omega/dt$ эксцентриситет появляется в знаменателе первого члена, а $\operatorname{ctg} I$ входит множителем во второй член. Этого и следовало ожидать, так как ω является неопределенным как для нулевого эксцентриситета, так и для нулевой наклонности.

Время будет входить в коэффициенты периодических членов по той же причине, что и в системе (21), пока не будет введена модификация, аналогичная изложенной в разд. 6 этой главы. Эта модификация требует определения средней аномалии посредством соотношения

$$l = \int n dt + \sigma.$$

Полагая

$$= \int n dt,$$

имеем

$$l = \varrho + \sigma,$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial l}.$$

Легко видеть, что ϱ имеет в точности тот же смысл, что и в разд. 6, и производная $\partial R/\partial l$ в этих элементах та же, что $\partial R/\partial \lambda$ в предыдущей системе элементов.

9. Каноническая система элементов. Крайне простая система уравнений для вариации элементов получается в том случае, если мы выберем в качестве переменных c_i функции от кеплеровых элементов, которые встречаются в выражении (20) для $[p, q]$. Этими переменными являются $\sigma, \omega, \Omega, L, G, H$. Скобки Лагранжа для этих элементов имеют следующие значения:

$$[\sigma, L] = +1, \quad [\omega, G] = +1, \quad [\Omega, H] = +1,$$

$$[L, \sigma] = -1, \quad [G, \omega] = -1, \quad [H, \Omega] = -1.$$

Все остальные скобки равны нулю.

Вследствие этого уравнения (10) приводятся к следующей чрезвычайно простой форме:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \sigma}, & \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \omega}, & \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega}, & \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H}. \end{aligned} \tag{27}$$

Эта система называется канонической системой уравнений. Уравнения (27) обладают, конечно, тем же недостатком, что и рассмотренные выше

неканонические системы, они содержат время вне тригонометрических аргументов. Это неудобство можно устраниТЬ, полагая

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= -\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right) - \frac{\partial R}{\partial \sigma} t \frac{dn}{dL} = \\ &= -\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right) - t \frac{dn}{dt}.\end{aligned}$$

Это сводится опять к введению σ^I посредством формулы

$$\frac{d\sigma^I}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + t \frac{dn}{dt}$$

или определению l формулой вида

$$l = \int n dt + \sigma.$$

Наиболее удобный путь введения этой величины в уравнения — рассмотреть функцию R , выраженную через $L, G, H, l, \omega, \Omega$ и записать уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = n - \frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H},\end{aligned}\tag{28}$$

где ω заменено на g и Ω на h . Поскольку

$$\begin{aligned}n &= \mu^2 L^{-3} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\mu^2}{2L^2} \right),\end{aligned}$$

то другой формой канонических уравнений является следующая

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H},\end{aligned}\tag{29}$$

где

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R.\tag{30}$$

Это — канонические уравнения в переменных Делонэ, которые использовались им в его теории Луны. Канонические уравнения рассматриваются дальше в гл. XVII.

10. Возмущение первого порядка. Вековые и периодические члены. Уравнения, полученные в этой главе, являются точными эквивалентами исходных уравнений движения. Они представляют собой различные формы уравнений, получающиеся при преобразовании от координат и компонент скорости к новым переменным, определяемым уравнениями преобразования (2).

Поскольку возмущающая масса (или массы), присутствующая как множитель (или присутствующие в виде множителей) в выражениях для производных от элементов, является малой величиной в задачах небесной механики для солнечной системы, то эти уравнения прекрасно подходят для методики интегрирования последовательными приближениями.

Для того чтобы сделать рассуждения более определенными, предположим, что задача связана с движением малой планеты под воздействием гравитационного притяжения Солнца и Юпитера, причем орбиту Юпитера мы считаем неподвижным эллипсом с эксцентриситетом e' и долготой перигелия $\tilde{\omega}'$. Неподвижная плоскость орбиты Юпитера принимается за плоскость отсчета. Далее предполагается, что используются угловые переменные λ , $\tilde{\omega}$, Ω и что возмущающая функция R разложена в ряд по косинусоидальным членам вида

$$R = \sum C_{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5} \cos(j_1\lambda + j_2\tilde{\omega} + j_3\Omega + j_4\lambda' + j_5\tilde{\omega}'),$$

в котором коэффициенты C являются функциями от a , e , I , a' , e' и имеют m' общим множителем. В дальнейшем нижние индексы у C будут опущены.

Поскольку функция R не изменяется при повороте системы координат вокруг оси z и так как углы, входящие в аргументы косинусов, отчитываются от общего начала, то отсюда следует, что

$$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 = 0.$$

Возмущения первого порядка получаются при помощи подстановки в правые части уравнений (21) и (23) постоянных значений a_0 , e_0 , I_0 , $\tilde{\omega}_0$, Ω_0 вместо переменных a , e , I , $\tilde{\omega}$, Ω , а λ и λ' принимают вид

$$\lambda_0 = n_0 t + \epsilon_0, \quad \lambda' = n't + \epsilon',$$

при

$$n_0^2 a_0^3 = \mu.$$

Поэтому среднее движение любого аргумента равно

$$j_1 n_0 + j_4 n'.$$

После этих подстановок правые части уравнений (21) становятся известными функциями времени, и эти уравнения могут быть проинтегрированы в квадратурах. Легко видеть, что da/dt , de/dt , dI/dt получаются в виде рядов по синусам, а $d\tilde{\omega}/dt$, $d\Omega/dt$ — в виде рядов по косинусам с теми же аргументами, которые входили в R . Интегрирование даст в a , e , I косинусоидальные члены и синусоидальные члены в $\tilde{\omega}$, Ω . Уравнение (23) показывает, что интегрирование ϱ даст ряд по синусам.

Рассмотрим те члены в R , для которых $j_1 = 0$, $j_4 = 0$. Эти члены имеют нулевые средние движения аргументов, так как вместо $\tilde{\omega}$, Ω подставлены постоянные $\tilde{\omega}_0$, Ω_0 . Следовательно, члены с $j_1 = j_4 = 0$ необходимо рассматривать как постоянные, и интегрирование даст члены, пропорциональные времени t . Такого рода члены называются вековыми возмущениями, а члены в R с $j_1 = j_4 = 0$ составляют вековую часть возмущающей функции.

Уравнение для da/dt показывает, что возмущения первого порядка в a не содержат никаких вековых членов, так как $\partial R/\partial \epsilon$ содержит

только члены, имеющие в аргументе λ . Однако остальные пять элементов будут иметь вековые возмущения.

Вековые возмущения в e получаются из уравнения

$$\frac{de}{dt} = + \frac{(1 - e_0^2)^{1/2}}{n_0 a_0^2 e_0} \sum C j_2 \sin(j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_5 \tilde{\omega}').$$

Если выражение в правой части этого уравнения обозначить через e_1 , то результат интегрирования при ограничении вековыми членами имеет вид

$$e = e_0 + e_1 t.$$

Для элемента e получается

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \sum \left(-\frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial C}{\partial a} + \frac{(1 - e_0^2)^{1/2} [1 - (1 - e_0^2)^{1/2}]}{n_0 a_0^2 e_0} \frac{\partial C}{\partial e} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} I_0}{n_0 a_0^2 (1 - e_0^2)^{1/2}} \frac{\partial C}{\partial I} \right) \cos(j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_5 \tilde{\omega}') = \\ &= \sum Q \cos(j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_5 \tilde{\omega}'); \end{aligned} \quad (31)$$

правую часть мы обозначим через e_1 .

Тогда

$$e = e_0 + e_1 t.$$

Но

$$\begin{aligned} \lambda &= n_0 t + e_0 + e_1 t = \\ &= (n_0 + e_1) t + e_0. \end{aligned}$$

Теперь мы возвращаемся к периодическим возмущениям первого порядка. Эти возмущения в элементе a получаются из уравнения

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n_0 a_0} \sum C j_1 \sin[j_1(n_0 t + e_0) + j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_4(n' t + e') + j_5 \tilde{\omega}'].$$

После интегрирования это выражение дает

$$\begin{aligned} \delta_1 a &= + \frac{2}{n_0 a_0} \sum C \frac{j_1}{j_1 n_0 + j_4 n'} \cos[j_1(n_0 t + e_0) + j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_4(n' t + e') + j_5 \tilde{\omega}'], \\ a &= a_0 + \delta_1 a. \end{aligned}$$

Выражения того же вида получаются и в остальных элементах, причем все они имеют $j_1 n_0 + j_4 n'$ в качестве делителей.

Уравнение для Q дает

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = + \frac{3}{a_0^2} \sum C j_1 \sin[j_1(n_0 t + e_0) + j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_4(n' t + e') + j_5 \tilde{\omega}'],$$

откуда при помощи двойного интегрирования получается

$$\delta_1 Q = - \frac{3}{a_0^2} \sum C \frac{j_1}{(j_1 n_0 + j_4 n')^2} \sin[j_1(n_0 t + e_0) + j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_4(n' t + e') + j_5 \tilde{\omega}'].$$

Если использовать обозначение Q в смысле (31), то периодические члены в e дают

$$\delta_1 e = \sum \frac{Q}{j_1 n_0 + j_4 n'} \sin[j_1(n_0 t + e_0) + j_2 \tilde{\omega}_0 + j_3 \Omega_0 + j_4(n' t + e') + j_5 \tilde{\omega}'].$$

Сводка полученных результатов для всех шести элементов имеет вид:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a, & \lambda &= (n_0 + e_1) t + e_0 + \delta_1 \varrho + \delta_1 \varepsilon, \\ e &= e_0 + e_1 t + \delta_1 e, & \tilde{\omega} &= \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 t + \delta_1 \tilde{\omega}, \\ I &= I_0 + I_1 t + \delta_1 I, & \Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 t + \delta_1 \Omega, \end{aligned}$$

где обозначение δ_1 использовано для периодических членов; элементы a, e, I выражаются рядами по косинусам, $\varepsilon, \tilde{\omega}$ и Ω — рядами по синусам.

Оскулирующее среднее движение следовало бы по-прежнему определять формулой

$$n_0 + \delta_1 n = \mu^{1/2} (a_0 + \delta_1 a)^{-3/2} = \mu^{1/2} a_0^{-3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta_1 a}{a_0} \right).$$

Однако из выражения для λ видно, что коэффициент при t в λ равен $n_0 + e_1$. Этот множитель получится из эмпирического анализа наблюдений без какого бы то ни было допущения относительно возмущений при условии, что наблюдения охватывают многие обращения соответствующих планет. Его можно считать наблюденным «средним» средним движением. Очевидно, что если допустимо рассматривать только возмущения первого порядка, то это наблюденное «среднее» среднее движение может быть точно определено. Однако если a_0 и n_0 могут быть приняты такими, чтобы выполнялось соотношение $a_0^3 n_0^2 = \mu$, а соотношение $a^3 n^2 = \mu$ необходимо имеет место для оскулирующей большой полуоси и оскулирующего среднего движения, не существует простого соотношения такого же рода, которое связывало бы наблюденное «среднее» среднее движение и постоянную часть большой полуоси.

11. Возмущение второго порядка. Результаты, полученные интегрированием производных от элементов при подстановке в правые части уравнений (21) и (23) постоянных значений этих элементов, неизбежно являются приближенными. В большинстве случаев этого приближения недостаточно, чтобы получить значения элементов, которые дали бы возможность вычислить координаты с точностью, соответствующей точности наблюдений. Однако в принципе представляется чрезвычайно простым продолжить указанный процесс как угодно далеко и рассмотреть возмущения второго порядка, третьего и т. д.

Обозначим возмущения первого порядка, включая как вековые, так и периодические члены, символом Δ_1 . Следовательно, для первого порядка получим

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + \delta_1 a = a_0 + \Delta_1 a, \\ e &= e_0 + e_1 t + \delta_1 e = e_0 + \Delta_1 e, \\ \lambda &= n_0 t + e_0 + \Delta_1 \lambda. \end{aligned}$$

Возмущающая функция, если в разложении в ряд Тейлора ограничиться членами первого порядка, принимает вид

$$R = R(a_0, e_0, I_0, n_0 t + e_0, \tilde{\omega}_0, \Omega_0) + \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_0 \Delta_1 a + \left(\frac{\partial R}{\partial e} \right)_0 \Delta_1 e + \dots$$

Частные производные второго порядка появляются при вычислении частных производных по элементам от этого выражения. После того как

частные производные (их будет 21) получены, можно вычислить дополнительные члены к правым частям уравнений (21) и (23), выполняя необходимые перемножения с результатами первого порядка. Очевидно, что множители, входящие в правые части, должны быть также разложены в ряды.

Чтобы сделать обсуждаемый вопрос более определенным, рассмотрим самое простое уравнение — уравнение для da/dt . Множитель $2/\mu a$ можно написать в виде $2\mu^{-1/2}a^{1/2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2\mu^{-1/2}a^{1/2} &= 2\mu^{-1/2}a_0^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_1 a}{a_0} \right) = \\ &= \frac{2}{n_0 a_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_1 a}{a_0} \right) \end{aligned}$$

и

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_1 a}{a_0} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial e} \right)_0 + \frac{2}{n_0 a_0} \left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial a} \right)_0 \Delta_1 a + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial e} \right)_0 \Delta_1 e + \dots \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_2 a &= \left[\frac{1}{n_0 a_0^2} \left(\frac{\partial R}{\partial e} \right)_0 + \frac{2}{n_0 a_0} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial a} \right)_0 \right] \Delta_1 a + \\ &\quad + \frac{2}{n_0 a_0} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial e} \right)_0 \Delta_1 e + \frac{2}{n_0 a_0} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial e \partial I} \right)_0 \Delta_1 I + \\ &\quad + \dots \Delta_1 \lambda + \dots \Delta_1 \tilde{\omega} + \dots \Delta_1 \Omega. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты можно было бы получить и для производных от остальных элементов.

Все правые части получающихся выражений имеют множителем вторую степень возмущающей массы. Из вида разложения для функции R и возмущений первого порядка ясно, что правые части новых уравнений будут иметь вид $A_0 + A_1 t + \dots$ ряды периодических членов; некоторые из этих членов содержат t множителем при коэффициентах, а A_0 и A_1 получаются из вековой части возмущающей функции. Интегрирование даст члены второго порядка вида $A_0 t + \frac{1}{2} A_1 t^2 + \dots$ ряды периодических членов, часть которых умножается на t . Появление t в коэффициентах периодических членов составляет новую характерную особенность в возмущениях второго порядка. Такие члены называются смешанными вековыми членами.

Выражение для $d(\Delta_2 a)/dt$ можно использовать для того, чтобы показать, что возмущения второго порядка большой полуоси не содержат чисто векового члена. Это знаменитая теорема Пуассона. Доказательство этой теоремы было дано Тиссерандом¹⁾.

12. Малые делители. При рассмотрении периодических членов было отмечено, что при их интегрировании появляются делители вида $j_1 n_0 + j_4 n'$, а в возмущениях первого порядка в средней долготе — квадраты этих делителей. Периодические члены в возмущающей функции можно расположить таким образом, чтобы j_1 было всегда положительным, тогда как j_4 может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

¹⁾ F. Tisserand, Mécanique céleste, t. 1, chap. XXV, Gauthier-Villars, Paris, 1889.

Особый интерес представляют члены с такими значениями j_1 и j_4 , при которых делители $j_1 n_0 + j_4 n'$ являются малыми по сравнению с n_0 или n' . Следует помнить, что n_0 и n' представляют собой величины, полученные из наблюдений; следовательно, их точность ограничена точностью наблюдений, на которых основано определение их числовых значений. Несмотря на это разложение отношения n'/n_0 (или n_0/n') в непрерывную дробь даст приближения вида p/q , где p и q целые числа, которые могут быть сколь угодно близкими к значению n'/n_0 . Поэтому если разложение возмущающей функции выполнено до достаточно высоких кратностей величин в аргументах периодических членов, то найдутся такие целые числа j_1 и j_4 , при которых делитель $j_1 n_0 + j_4 n'$ будет меньше любой наперед заданной величины.

В возмущениях первого порядка квадраты таких малых делителей появляются только в средней долготе. В остальных элементах встречаются только первые степени этих делителей. В возмущениях второго порядка в средней долготе будут присутствовать третий и четвертые степени малых делителей, в остальных элементах — их вторые и третьи степени.

С теоретической точки зрения присутствие малых делителей, для которых нельзя указать никакого нижнего предела, является серьезным затруднением, так как ставит под угрозу сходимость процесса вычисления возмущений.

Полезно указать на задачу, основанную на возмущениях первого порядка, которые получаются из уравнения (21). Беря в качестве примера элемент e и полагая j вместо j_1 и k вместо j_4 , запишем соответствующее уравнение в виде

$$\frac{de}{dt} = \sum A_{j,k} \sin [(jn_0 + kn')t + \beta_{j,k}], \quad (\text{A})$$

где $\beta_{j,k}$ — постоянные, если долготы перигелия и узла считаются постоянными.

Если n'/n_0 не является рациональным числом, то в результате интегрирования получим

$$\delta e = Bt - \sum' \frac{A_{j,k}}{jn_0 + kn'} \cos [(jn_0 + kn')t + \beta_{j,k}], \quad (j, k \neq 0, 0), \quad (\text{Б})$$

но если $n'/n_0 = p/q$ (где p и q — два положительных целых числа), то члены с аргументом $(pn_0 - qn')t + \beta_{p,-q}$ и кратными этого аргумента станут постоянными. После интегрирования они войдут в вековой член, и тогда

$$\delta e = Ct - \sum'' \frac{A_{j,k}}{jn_0 + kn'} \cos [(jn_0 + kn')t + \beta_{j,k}], \quad (j, k \neq 0, 0), \quad (j/k \neq -p/q). \quad (\text{В})$$

Брунс нашел, что когда ряд (А) сходится, то ряд (Б) не всегда сходится: в конечных, хотя и малых пределах, имеется бесконечное число иррациональных значений n'/n_0 , для которых ряд (Б) сходится, и в том же интервале имеется бесконечночисло иррациональных значений n'/n_0 , для которых ряд (Б) расходится. Однако ряд (В) сходится, так как $jn_0 + kn'$ имеет нижний предел, отличный от нуля, если n'/n_0 является рациональным числом.

Второе важное свойство состоит в том, что δe , полученное при помощи рядов (Б) и (В), не является непрерывным по n'/n_0 . Это очевидно из того, что вековой член в δe принимает различную форму в (Б) и (В), хотя иррациональное число можно аппроксимировать рациональным числом с неограниченной степенью точности. Кроме того, для двух различных рациональных дробей, которые могут быть выбраны сколь угодно близко друг к другу, будут существовать различные коэффициенты C векового члена, так как эти дроби связаны с различными членами в ряде (А). Отсюда мы заключаем, что если применяются кеплеровы переменные, то ряды, представляющие возмущения, несходятся равномерно.

Можно заметить, что не обязательно рассматривать элементы $\tilde{\omega}$ и Ω в аргументах как постоянные. Их можно заменить на

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 t, \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1 t,$$

и делители примут следующий вид:

$$j_1 n_0 + j_2 \tilde{\omega}_1 + j_3 \Omega_1 + j_4 n'.$$

Характер ряда, получаемого после интегрирования, больше не определяется отношением n'/n_0 , однако замечания, касающиеся расходимости и сходимости, остаются в силе без существенных изменений.

Эти пояснения, а также дальнейшие замечания относительно указанной задачи и аналогичных задач, сделанных в гл. XVII, имеют целью подчеркнуть, что проблема малых делителей представляет собой основную проблему первостепенной значимости среди всех задач небесной механики. Математический характер этой проблемы до сих пор полностью не выяснен.

С практической точки зрения малые делители в большинстве случаев не представляют серьезных затруднений. В качестве примера мы можем рассмотреть случай системы Юпитер — Сатурн, для которой $n'/n = 0,40268677$. Представляя это отношение в виде непрерывной дроби, находим следующие подходящие дроби и связанные с ними периоды:

$1/2 = 0,5000\ 0000$	61 год
$2/5 = 0,4000\ 0000$	880 лет
$29/72 = 0,4027\ 7778$	1810 »
$60/149 = 0,4026\ 8456$	36000 »

В теориях Юпитера и Сатурна члены с аргументами, содержащими линейную комбинацию $2\lambda - 5\lambda'$, а также ее кратности $4\lambda - 10\lambda'$ и т. д., связаны с малыми делителями, которые представляют существенную трудность при разработке точных теорий для этих планет.

Разложение возмущающей функции показывает, что член с линейной комбинацией $2\lambda - 5\lambda'$ в аргументе имеет по крайней мере третий порядок относительно эксцентриситетов и наклонностей. Численное значение коэффициентов при членах такого рода в возмущающей функции создает впечатление их незначительности, однако квадрат малого делителя превращает их в существенные члены в возмущениях средней долготы. Это связано с хорошо известным долгопериодическим неравенством в движениях этих планет. Период его равен приблизительно 900 годам; для Юпитера коэффициент в средней долготе около $20'$, для Сатурна — около $48'$.

Благодаря тому что отношение средних движений весьма близко к отношению двух малых чисел, следующая подходящая дробь оказывается отношением двух больших чисел, как, например, $29/72$. Члены, порождающие малые делители, связанные с линейной комбинацией $29\lambda - 72\lambda'$, имеют коэффициенты по крайней мере 43-го порядка относительно эксцентрикитетов и наклонностей. Кроме того, легко видеть, что период, связанный с таким аргументом, примерно только в два раза больше периода главного долгопериодического неравенства. Такие члены совершенно незначительны: коэффициенты уменьшены сороковыми степенями эксцентрикитетов и наклонностей по сравнению с членами с аргументом, содержащим комбинацию $2\lambda - 5\lambda'$, тогда как делитель равен лишь половине делителя членов с комбинацией $2\lambda - 5\lambda'$. Следующая подходящая дробь $60/149$ относится к членам по крайней мере 89-й степени относительно эксцентрикитетов и наклонностей, причем период настолько велик, и поэтому делитель настолько мал, что относительное значение членов с комбинацией $60\lambda - 149\lambda'$ в средних долготах, возможно, могло бы явиться причиной некоторого беспокойства. Однако этот период, равный около 36 000 лет, настолько велик в сравнении с приемлемым периодом пригодности планетной теории, что члены эти не играют практически никакой роли. Этими членами можно пренебречь, а их влияние включить в постоянные интегрирования.

Основной вывод из нашего рассмотрения проблемы малых делителей можно сформулировать следующим образом: если главный малый делитель порядка квадратного корня из возмущающей массы или больше, то построение точной планетной теории при помощи метода вариации произвольных постоянных является, вообще говоря, выполнимым. Из-за присутствия вековых и смешанных вековых членов срок пригодности такой теории неизбежно ограничен. Можно увеличить этот срок путем включения возмущений второго и высших порядков, однако ни одна теория рассмотренного типа не может сохранять пригодность в течение бесконечного промежутка времени.

Это условие, по-видимому, удовлетворяется для всех больших планет, за исключением, быть может, Плутона, орбита которого до сих пор известна с небольшой точностью. Среди малых планет имеется много примеров отношений n'/n среднего движения малой планеты к среднему движению Юпитера, которые настолько близки к точной соизмеримости, что метод последовательных приближений, указанный в этой главе, не принес бы успеха. В этих случаях необходимо использовать другие методы. Изложение метода, пригодного для задач такого рода, содержится в гл. XVII.

13. Гауссова форма уравнений. Производные от элементов орбиты, которые были выведены, выражаются через частные производные от возмущающей функции по элементам. В этом виде уравнения удобны для применения в тех случаях, когда имеется буквенное разложение возмущающей функции. Выдающимся примером применения метода вариации произвольных постоянных в такой форме является работа Леверье по теории движения больших планет.

Альтернативная методика заключается в построении общей теории, в которой коэффициенты периодических членов получаются в численном виде. Такая методика требуется в случаях достаточно больших эксцентрикитетов, когда в буквенном разложении понадобились бы высокие степени e , для того чтобы достигнуть необходимого соответ-

ствия теории с точностью наблюдений. В этом случае, а также в случае применения метода численного интегрирования к уравнениям (21) необходимо выразить производные от элементов в такой форме, которая лучше годится для численных расчетов. Самой распространенной формой является та, в которой используются три взаимно перпендикулярных компонента возмущающего ускорения: R — компонента в направлении радиуса-вектора (положительна в направлении возрастания радиуса-вектора), S — компонента, перпендикулярная к R в плоскости орбиты (положительна в направлении возрастания долготы в орбите), W — компонента, перпендикулярная к плоскости орбиты (положительна в направлении, в котором орбитальное движение кажется происходящим против часовой стрелки). Таким образом, положительные направления R , S , W образуют правую систему осей координат.

Пусть r есть радиус-вектор, ψ — долгота в орбите, отсчитываемая от некоторой начальной точки, Z — координата, перпендикулярная к плоскости орбиты, положительная в положительном направлении W . Тогда

$$R = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad S = \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \psi}, \quad W = \frac{\partial R}{\partial Z}.$$

Пусть c — любой из шести элементов орбиты; в таком случае

$$\frac{\partial R}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial c} + \frac{\partial R}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial c} + \frac{\partial R}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial c}.$$

Чтобы получить выражения для $\partial R/\partial c$ через R , S , W , необходимо найти выражения для частных производных от r , ψ , Z по элементам.

Необходимо условиться, что смысл $\partial R/\partial a$ совпадает со смыслом, указанным в разд. 5 этой главы, и что e имеет смысл e^I , так что

$$\lambda = q + e^I,$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}.$$

Отношение r/a и истинная аномалия f являются функциями от e и $l = nt + e - \tilde{\omega}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{\partial r}{\partial l} = \frac{1}{n} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\dot{r}}{n}.$$

Угол ψ необходимо отсчитывать от начальной точки; следовательно, $d\psi$ представляет собой то же, что и $\Delta\varphi$ в уравнениях (3) гл. IX, и потому

$$d\psi = df + d\omega + \cos I d\Omega =$$

$$= df + \tilde{\omega} - (1 - \cos I) d\Omega.$$

Частные производные от r и ψ по e и $\tilde{\omega}$ выводятся в гл. XIII, уравнения (82) — (87). Необходимые результаты имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}, & \frac{\partial \psi}{\partial e} &= \frac{2+e \cos f}{1-e^2} \sin f, \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos f, & \frac{\partial \psi}{\partial e} &= \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{1/2} = \frac{(1+e \cos f)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= \frac{ae}{(1-e^2)^{1/2}} \sin f, & \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\omega}} &= 1 - \frac{\partial \psi}{\partial e}, \\ \frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} &= -\frac{\partial r}{\partial e}, & \frac{\partial \psi}{\partial \Omega} &= -1 + \cos I.\end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений (3) в гл. IX легко получить

$$dZ = r \sin(\omega + f) dI - r \cos(\omega + f) \sin I d\Omega.$$

Этих соотношений достаточно, чтобы вывести следующие выражения для производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{r}{a} \frac{\partial R}{\partial r}, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= -a \cos f \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{\partial R}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial R}{\partial I} &= r \sin(\omega + f) \frac{\partial R}{\partial Z}, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{ae \sin f}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{1/2} \frac{\partial R}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} &= -\frac{ae \sin f}{(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial r} + \left[1 - \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{1/2} \right] \frac{\partial R}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= -r \sin I \cos(\omega + f) \frac{\partial R}{\partial Z} - 2 \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{\partial R}{\partial \psi}.\end{aligned}\tag{32}$$

Если эти выражения подставить в уравнения (21), то получим

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} \left(R \sin f + S \frac{p}{r} \right), \\ \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [R \sin f + S (\cos u + \cos f)], \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{1}{na(1-e^2)^{1/2}} W \frac{r}{a} \cos(\omega + f), \\ \sin I \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na(1-e^2)^{1/2}} W \frac{r}{a} \sin(\omega + f), \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[-R \cos f + S \left(\frac{r}{p} + 1 \right) \sin f \right] + 2 \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2r}{na^2} R + \frac{e^2}{1+(1-e^2)^{1/2}} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2(1-e^2)^{1/2} \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{d^2\Omega}{dt^2} &= -\frac{3}{a(1-e^2)^{1/2}} \left(R \sin f + S \frac{p}{r} \right).\end{aligned}\tag{33}$$

В уравнении для de/dt использовано следующее соотношение:

$$\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) = \cos u + \cos f.$$

Уравнения в этой форме впервые были выведены Гауссом и применены к вычислению возмущений первого порядка, испытываемых Палладой от Юпитера. Гаусс использовал эти уравнения также для вывода вековых возмущений в элементах. Наконец, эти уравнения широко использовались для вычисления возмущений в элементах комет и малых планет при помощи численного интегрирования. В некоторых случаях оказывается достаточным вычислить только приближенные возмущения. Для таких случаев можно с успехом применить упрощенную форму этих уравнений, введенную Стремгреном.

14. Прямой вывод уравнений Гаусса. Метод, использованный для вывода гауссовой формы выражений для производных от элементов, является простым, если уже имеются выражения частных производных по элементам. Прямой вывод может быть основан на следующем принципе. Пусть

$$\Phi(c_1, c_2, \dots) = f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (34)$$

есть некоторый интеграл дифференциальных уравнений задачи двух тел:

$$\ddot{x} = -\mu x r^{-3}, \quad \ddot{y} = -\mu y r^{-3}, \quad \ddot{z} = -\mu z r^{-3}.$$

Функция Φ может зависеть от любых из шести орбитальных элементов. Дифференцирование соотношения (34) дает

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} \right).$$

В возмущенном движении правую часть можно написать в виде

$$S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial R}{\partial x} \right).$$

Но

$$S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\mu x}{r^3} \right) = 0,$$

так как если координаты и компоненты скорости в этом соотношении выражены через время и элементы орбиты, то оно будет выражением $d\Phi/dt$, которое в эллиптическом движении обращается в нуль. Следовательно, производная от Φ в возмущенном движении запишется так:

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В координатах r, ψ, Z это выражение приобретает следующий вид:

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} R + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} S + \frac{\partial f}{\partial \dot{Z}} W. \quad (35)$$

В нашем распоряжении имеются следующие интегралы:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{2a} &= \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\psi}^2 - \frac{\mu}{r}, \\ (\mu p)^{1/2} &= [\mu a (1 - e^2)]^{1/2} = r^2 \dot{\psi}, \\ [\mu a (1 - e^2)]^{1/2} \sin I \sin \Omega &= y \dot{z} - z \dot{y}, \\ -[\mu a (1 - e^2)]^{1/2} \sin I \cos \Omega &= z \dot{x} - x \dot{z}. \end{aligned} \quad (36)$$

Применение формулы (35) дает последовательно

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{2a^2} \frac{da}{dt} &= \dot{r} R + r \dot{\psi} S, \\ \frac{d}{dt} (\mu p)^{1/2} &= r S, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} r S \sin I \sin \Omega + (\mu p)^{1/2} \cos I \sin \Omega \frac{dI}{dt} + (\mu p)^{1/2} \sin I \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt} &= \\ = y \frac{\partial R}{\partial z} - z \frac{\partial R}{\partial y}, & \\ -r S \sin I \cos \Omega - (\mu p)^{1/2} \cos I \cos \Omega \frac{dI}{dt} + (\mu p)^{1/2} \sin I \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt} &= \\ = z \frac{\partial R}{\partial x} - x \frac{\partial R}{\partial z}. & \end{aligned} \quad (38)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} \left[R \sin f + S \frac{p}{r} \right]; \quad (39)$$

второе после простого преобразования принимает вид

$$\frac{da}{dt} - \frac{2ae}{1-e^2} \frac{de}{dt} = \frac{2}{an(1-e^2)^{1/2}} r S.$$

Полуразность этих результатов после умножения на $(1-e^2)(ae)^{-1}$ дает

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[R \sin f + S \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) \right] = \\ &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [R \sin f + S(\cos u + \cos f)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Эти результаты согласуются с первыми двумя из уравнений (33).

Правые части уравнений (38) представляют собой моменты возмущающего ускорения относительно осей x и y . Если обозначить их соответственно через (A) и (B) , то момент (N) относительно направления ON на восходящий узел и момент (N') относительно направления $ON + 90^\circ$ в плоскости XY равны

$$(N) = (A) \cos \Omega + (B) \sin \Omega,$$

$$(N') = -(A) \sin \Omega + (B) \cos \Omega.$$

Таким образом, из уравнений (38) получаем

$$(N) = (\mu p)^{1/2} \sin I \frac{d\Omega}{dt},$$

$$(N') = -r S \sin I - (\mu p)^{1/2} \cos I \frac{dI}{dt}.$$

Пусть (N'') — момент относительно направления ON'' , отличающегося на $+90^\circ$ от направления на восходящий узел в плоскости орбиты, (Z) — момент относительно нормали к орбитальной плоскости. Тогда

$$(N') = (N'') \cos I - (Z) \sin I.$$

Но

$$(Z) = rS;$$

поэтому

$$(N'') = -(\mu p)^{1/2} \frac{dI}{dt}.$$

Моменты возмущающего ускорения относительно ON и ON'' равны

$$(N) = Wr \sin(\omega + f),$$

$$(N'') = -Wr \cos(\omega + f);$$

в таком случае

$$\begin{aligned} \sin I \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} Wr \sin(\omega + f), \\ \frac{\partial I}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} Wr \cos(\omega + f). \end{aligned} \quad (41)$$

Чтобы получить производные от ε и $\tilde{\omega}$, можно использовать другой принцип. Пусть $F(x, y, z)$ — любая функция от координат. Тогда, если функцию F считать выраженной через t и эллиптические элементы, то

$$\frac{dF}{dt} = \sum \frac{\partial F}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

но так как

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

то отсюда следует, что

$$\sum \frac{\partial F}{\partial c_j} \frac{dc_j}{dt} = 0. \quad (42)$$

Применим это соотношение к радиус-вектору, который является функцией от a , e и $l = nt + \varepsilon - \tilde{\omega}$, что дает

$$\frac{\partial r}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial r}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial r}{\partial l} \left(\frac{de}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) = 0.$$

Это соотношение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{ae}{(1-e^2)^{1/2}} \sin f \left(\frac{de}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) &= -\frac{r}{a} \frac{da}{dt} + a \cos f \frac{de}{dt} = \\ &= -\frac{2r}{na(1-e^2)^{1/2}} R \sin f - \frac{2p}{na(1-e^2)^{1/2}} S + \\ &+ \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n} R \sin f \cos f + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{ne} \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) S \cos f = \\ &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n} \left(\frac{-2e}{1+e \cos f} + \cos f \right) R \sin f - \\ &- \frac{(1-e^2)^{1/2}}{n} \left(\frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} \right) S \sin^2 f. \end{aligned}$$

или

$$e \left(\frac{de}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) = \frac{1-e^2}{na} \left[R \left(\frac{-2e}{1+e \cos f} + \cos f \right) - S \frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} \sin f \right]. \quad (43)$$

Далее, тот же принцип можно применить к углу ψ , для которого

$$d\psi = df + d\tilde{\omega} - (1 - \cos I) d\Omega,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial f}{\partial I} \left(\frac{de}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) + \frac{d\tilde{\omega}}{dt} - 2 \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Это соотношение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= - \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{de}{dt} - \frac{a^2}{r^2} (1-e^2)^{1/2} \left(\frac{de}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) + 2 \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt} = \\ &= \frac{2+e \cos f}{nae (1-e^2)^{1/2}} \left[-R \sin^2 f - S \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) \sin f \right] + \\ &+ \frac{(1-e^2)^{3/2} a^2}{nae} \frac{a^2}{r^2} \left[R \left(\frac{2e}{1+e \cos f} - \cos f \right) + S \frac{2+e \cos f}{1+e \cos f} \sin f \right] + \\ &+ 2 \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned}$$

или после некоторых преобразований

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[-R \cos f + S \left(\frac{r}{p} + 1 \right) \sin f \right] + 2 \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt}. \quad (44)$$

Необходимо заметить, что если уравнение (44) умножить на $e(1-e^2)^{1/2}$ и сложить с уравнением (43), то правая часть этой суммы значительно упростится. В результате получается

$$\begin{aligned} e \left(\frac{de}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \right) + e(1-e^2)^{1/2} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= - \frac{2e(1-e^2)}{na} \frac{R}{1+e \cos f} + \\ &+ 2e(1-e^2)^{1/2} \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{de}{dt} - [1 - (1-e^2)^{1/2}] \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = - \frac{2r}{na^2} R + 2(1-e^2)^{1/2} \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt},$$

или окончательно

$$\frac{de}{dt} = - \frac{2r}{na^2} R + \frac{e^2}{1+(1-e^2)^{1/2}} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + 2(1-e^2)^{1/2} \sin^2 \frac{1}{2} I \frac{d\Omega}{dt}. \quad (45)$$

Замечания. Литература

Первое аналитическое развитие метода вариации произвольных постоянных было дано Эйлером в работах по изучению взаимных возмущений Юпитера и Сатурна, удостоенных премий Французской Академии наук в 1748 и 1752 гг. Разработка этого метода была продолжена Лагранжем в 1766 г. и завершена им в 1782 г.

Вплоть до середины XIX столетия этот метод был почти единственным методом, применявшимся для вычисления возмущений. И в настоящее время он сохраняет свое значение. Однако в течение последнего столетия стало более распространенным вычисление возмущений в координатах, так как в этом случае получаемые результаты более непосредственным образом применимы к вычислению эфемерид.

Метод, использованный в этой главе для вывода дифференциальных уравнений для элементов эллиптической орбиты, был предложен Уиттекером в журнале *The Messenger of Mathematics* (январь 1897 г.). Здесь он упрощен путем замены

$$\frac{\partial \left(\frac{e - \tilde{\omega}}{n}, -\frac{\mu}{2a} \right)}{\partial (p, q)}$$

эквивалентным выражением

$$\frac{\partial (e - \tilde{\omega}, \sqrt{\mu a})}{\partial (p, q)}.$$

Настояния столь многих авторов на использовании в качестве канонических переменных $C = -\mu/2a$, $(e - \tilde{\omega})/n$ вместо переменных $L = \sqrt{a\mu}$, $\sigma = e - \tilde{\omega}$ вызывают ненужные усложнения.

В статье Гарфинкеля о матрицах возмущений небесной механики (*Astron. J.*, 51, 44, 1944) в качестве отправного пункта используются уравнения Делонэ, а затем изящным и доходчивым способом получаются матрицы уравнений для кеплеровых элементов как в форме Лагранжа, так и в форме Гаусса.

Г л а в а XII

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

1. Постановка задачи. Проблема небесной механики, известная под названием теории Луны, строго говоря, должна была бы включать в себя все стороны аналитической теории движения Луны. Однако часто под теорией Луны подразумевают задачу определения движения Луны под действием гравитационного притяжения Земли и Солнца, причем все эти три тела рассматриваются как материальные точки. Эта задача была названа Брауном основной задачей теории Луны. Полное рассмотрение движения Луны требует включения эффектов, вызванных притяжениями Земли и Луны со стороны планет, а также влияния отклонений Земли и Луны от сферической формы. В этой главе будет рассмотрена только основная задача.

2. Уравнения движения. Если пренебречь массой Луны, рассматривая Землю и Солнце как материальные точки, то можно немедленно написать уравнения движения Луны. Пусть x, y, z означают координаты Луны, а x', y', z' — координаты Солнца в прямоугольной системе координат, начало которой помещено в центр Земли. Тогда уравнения движения Луны имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2Ex}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2Ey}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{k^2Ez}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

и

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \quad (1a)$$

а E, m' — массы Земли и Солнца.

Орбита Земли относительно Солнца будет неподвижным эллипсом, лежащим в неподвижной плоскости. Выберем эту плоскость за плоскость xy , так что $z' = 0$. Тогда, если расстояние Солнца от Луны

обозначено через Δ , то

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + r^2 = \\ &= r'^2 + r^2 - 2(x x' + y y') = \\ &= r'^2 + r^2 - 2r r' \cos S,\end{aligned}\quad (2)$$

где S — угол при Земле между направлениями на Луну и Солнце.

Одно из существенных различий между лунным и планетным случаями проблемы трех тел состоит в том, что в первом случае отношение r/r' достаточно мало, что позволяет разложить Δ^{-1} по степеням этого отношения, тогда как в типичной планетной теории такое разложение сходилось бы очень медленно. Из формулы (2) вытекает, что

$$\frac{r'}{\Delta} = \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos S \right]^{-1/2}. \quad (3)$$

Чтобы получить разложение по степеням $\varrho = r/r'$, положим

$$2 \cos S = \sigma + \sigma^{-1}$$

и запишем

$$\frac{\Delta^2}{r'^2} = (1 - \varrho\sigma)(1 - \varrho\sigma^{-1}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{r'}{\Delta} &= (1 - \varrho\sigma)^{-1/2}(1 - \varrho\sigma^{-1})^{-1/2} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\varrho\sigma + \frac{3}{8}\varrho^2\sigma^2 + \frac{5}{16}\varrho^3\sigma^3 + \dots \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{2}\varrho\sigma^{-1} + \frac{3}{8}\varrho^2\sigma^{-2} + \frac{5}{16}\varrho^3\sigma^{-3} + \dots \right) =\end{aligned}\quad (4a)$$

$$\begin{aligned}&= 1 + \frac{1}{2}\varrho(\sigma + \sigma^{-1}) + \varrho^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(\sigma^2 + \sigma^{-2}) \right] + \\ &+ \varrho^3 \left[\frac{3}{16}(\sigma + \sigma^{-1}) + \frac{5}{16}(\sigma^3 + \sigma^{-3}) \right] + \dots =\end{aligned}\quad (4b)$$

$$\begin{aligned}&= 1 + \varrho \cos S + \varrho^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2S \right] + \\ &+ \varrho^3 \left[\frac{3}{8} \cos S + \frac{5}{8} \cos 3S \right] + \dots =\end{aligned}\quad (4b)$$

$$\begin{aligned}&= 1 + \varrho \cos S + \varrho^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right] + \\ &+ \varrho^3 \left[-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right] + \dots =\end{aligned}\quad (4r)$$

$$= 1 + \varrho P_1(\cos S) + \varrho^2 P_2(\cos S) + \varrho^3 P_3(\cos S) + \dots \quad (4d)$$

Функции P_0, P_1, \dots являются полиномами Лежандра, уже определенными в гл. III, где рассматривались условия сходимости этого разложения. Легко видеть, что при $S = 0, \cos S = +1$, выражение (3) принимает вид $(1 - \varrho)^{-1}$, а (4в) становится его разложением в биномиальный ряд вида

$$(1 - \varrho)^{-1} = 1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \dots,$$

который сходится при $|\varrho| < 1$. Для остальных действительных значений S коэффициенты ряда (4в) или его эквивалентов (4г) и (4д) никогда не превосходят единицы. Эти ряды также сходятся при $|\varrho| < 1$.

Поскольку

$$\frac{xx' + yy'}{r'^3} = \frac{r \cos S}{r'^2},$$

то мы получаем

$$R = \frac{k^2 m'}{r'} \left[1 + q^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) + q^3 \left(-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) + \dots \right].$$

Член $q \cos S$, присутствующий в r'/Δ , взаимно уничтожился с дополнительной частью возмущающей функции (1а). Наконец, поскольку r' не зависит от координат Луны, то член $k^2 m'/r'$ ничего не вносит в правые части уравнений движения (1). Поэтому можно написать

$$R = \frac{k^2 m'}{r'} \left[\frac{r^2}{r'^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) + \frac{r^3}{r'^3} \left(-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) + \dots \right]. \quad (5)$$

Напомним, что это выражение для возмущающей функции было получено в предположении, что можно пренебречь массой Луны. Если же масса Луны M должна быть принята во внимание, то необходимо исходить из уравнений движения для всех трех тел в инерциальной системе координат. Тогда мы находим, что:

1. Относительное движение центра масс системы Земля—Луна вокруг Солнца настолько мало отклоняется от невозмущенной эллиптической орбиты, что для всех практических целей можно считать орбиту этого движения кеплеровым эллипсом для масс m' и $E+M$.

2. Движение Луны относительно Земли можно определить из уравнений движения (1), если в левой части заменить E на $E+M$ и вместо формулы (5) записать возмущающую функцию (гл. X, разд. 8) в следующем виде:

$$R = \frac{k^2 m'}{r'} \left[\frac{r^2}{r'^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) + \frac{E-M}{E+M} \frac{r^3}{r'^3} \left(-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) + \dots \right]. \quad (6)$$

Поскольку в системе Земля—Луна отношение M/E равно приблизительно $1/80$, то множитель $(E-M)/(E+M)$, зависящий от масс, примерно равен $1 - 1/40$. В любой форме теории Луны надлежащий учет этого множителя и аналогичных множителей, появляющихся вместе с членами R более высоких порядков, является нетрудным делом.

3. Разложение возмущающей функции по эллиптическим элементам.

В некоторых методах, применяемых в теории движения Луны, особенно в методе, использованном Делонэ, требуется разложение возмущающей функции по эллиптическим элементам орбит Луны и Солнца. В качестве первого шага к получению такого разложения необходимо рассмотреть $\cos S$. Пусть Ω есть долгота восходящего узла орбиты Луны, J — наклонность орбиты Луны к эклиптике, ω — угловое расстояние лунного перигея от восходящего узла, f — истинная аномалия. Пусть, далее, ω' , f' означают соответствующие углы для Солнца. Наконец, положим истинные долготы Луны и Солнца равными соответственно

$$\psi = \Omega + \omega + f, \quad \psi' = \Omega + \omega' + f'.$$

Из формулы косинуса в сферической тригонометрии вытекает, что

$$\begin{aligned} \cos S &= \cos(\omega + f) \cos(\omega' + f') + \sin(\omega + f) \sin(\omega' + f') \cos J = \\ &= \cos(\omega + f - \omega' - f') - (1 - \cos J) \sin(\omega + f) \sin(\omega' + f') = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos(\psi - \psi') - \frac{1}{2}(1 - \cos J)[\cos(\psi - \psi') - \cos(\omega + f + \omega' + f')] = \\
 &= \cos^2 \frac{J}{2} \cos(\psi - \psi') + \sin^2 \frac{J}{2} \cos(\psi + \psi' - 2\Omega).
 \end{aligned}$$

Положим

$$\sin J = \gamma;$$

тогда, если пренебречь степенями γ выше второй, то

$$\cos S = \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) \cos(\psi - \psi') + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(\psi + \psi' - 2\Omega), \quad (7a)$$

$$\begin{aligned}
 \cos^2 S &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2\right) \cos^2(\psi - \psi') + \frac{1}{2}\gamma^2 \cos(\psi - \psi') \cos(\psi + \psi' - 2\Omega) = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\gamma^2\right) \cos(2\psi - 2\psi') + \\
 &\quad + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2\psi - 2\Omega) + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(2\psi' - 2\Omega), \quad (7b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos^3 S &= \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{16}\gamma^2\right) \cos(\psi - \psi') + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\gamma^2\right) \cos(3\psi - 3\psi') + \\
 &\quad + \frac{3}{8}\gamma^2 \cos(\psi + \psi' - 2\Omega) + \frac{3}{16}\gamma^2 \cos(3\psi - \psi' - 2\Omega) + \\
 &\quad + \frac{3}{16}\gamma^2 \cos(\psi - 3\psi' + 2\Omega). \quad (7c)
 \end{aligned}$$

Эти разложения должны быть подставлены в выражение (6), но прежде чем это сделать, необходимо слегка видоизменить (6). Третий закон Кеплера для движения центра масс системы Земля—Луна относительно Солнца дает соотношение

$$k^2(m' + E + M) = n'^2 a'^3,$$

в котором a' означает среднее расстояние до Солнца, а n' — среднее движение Солнца. Поскольку $(E + M)/m'$ равно около 1/330000, то заменой $k^2 m'$ на $n'^2 a'^3$ вносится лишь небольшая, легко учитываемая погрешность. Если далее заменить множитель $(E - M)/(E + M)$, зависящий от масс, единицей, то выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R &= n'^2 a^2 \left[\frac{r^2}{a^2} \frac{a'^3}{r'^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{a}{a'} \frac{r^3}{a^3} \frac{a'^4}{r'^4} \left(-\frac{3}{2} \cos S + \frac{5}{2} \cos^3 S \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{a}{a'} \right)^2 \frac{r^4}{a^4} \frac{a'^5}{r'^5} \left(+\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 S + \frac{35}{8} \cos^4 S \right) + \dots \left. \right] = \\
 &= R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (8)
 \end{aligned}$$

Совокупность членов, получающаяся из члена $Q^4 P_4(\cos S)$ в разложении (4д), добавлена для того, чтобы показать характер продолжения этого разложения. Теперь выражение для R подготовлено к разложению по эллиптическим элементам. Существенные особенности этого разложения могут быть наглядно показаны, если удержать в разложении члены, включающие в себя квадраты и произведения эксцентриситетов. Приближенные числовые значения для системы Земля—Луна равны

$$e = 0,0549, \quad e' = 0,0168.$$

Кроме степеней e и e' , буквенное разложение R будет содержать степени $\gamma^3 = \sin^2 J$, присутствующего в (7а, б, в), и отношения a/a' , первая степень которого возникает как множитель второго члена формулы (8), вторая степень — как множитель третьего члена и т. д. Приближенные численные значения будут

$$\gamma = \sin J = 0,0897, \quad a/a' = 0,0025.$$

Отношение a/a' равно отношению синуса параллакса Солнца к синусу параллакса Луны. Множитель, зависящий от масс, который входит во второй член R , можно учесть, используя вместо a/a' величину

$$\frac{E - M}{E + M} \frac{a}{a'} = 0,00251273.$$

Это численное значение было использовано Брауном при составлении «Tables of the Motion of the Moon»¹⁾ и не соответствует самым лучшим значениям для параллакса Солнца и отношения M/E , имеющимся в настоящее время.

При помощи формулы (7б) первая часть R , ограниченная членами, не содержащими множителем γ^2 , принимает вид

$$R_1 = n'^2 a^2 \frac{r^2}{a^2} \frac{a'^3}{r'^3} \left[+\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\psi - 2\psi') \right] = \quad (9a)$$

$$= n'^2 a^2 \frac{r^2}{a^2} \frac{a'^3}{r'^3} \left[+\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}' + 2f - 2f') \right], \quad (9b)$$

где $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$, $\tilde{\omega}' = \omega' + \Omega$ соответственно долготы перигеев Луны и Солнца.

При помощи методов, изложенных в гл. II, можно получить следующие разложения по средним аномалиям l и l' . Удерживая члены только до второй степени относительно e , e' и вводя Φ , Φ' для обозначения средних аномалий, получаем

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2} e^2 - 2e \cos \Phi - \frac{e^2}{2} \cos 2\Phi,$$

$$\frac{a'^3}{r'^3} = 1 + \frac{3}{2} e'^2 + 3e' \cos \Phi' + \frac{9}{2} e'^2 \cos 2\Phi',$$

$$\frac{r^2}{a^2} \cos 2f = +\frac{5}{2} e^2 - 3e \cos \Phi + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \cos 2\Phi + e \cos 3\Phi + e^2 \cos 4\Phi,$$

$$\frac{r^2}{a^2} \sin 2f = -3e \sin \Phi + \left(1 - \frac{5}{2} e^2 \right) \sin 2\Phi + e \sin 3\Phi + e^2 \sin 4\Phi,$$

$$\frac{a'^3}{r'^3} \cos 2f' = -\frac{e'}{2} \cos \Phi' + \left(1 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \cos 2\Phi' + \frac{7}{2} e' \cos 3\Phi' + \\ + \frac{17}{2} e'^2 \cos 4\Phi',$$

$$\frac{a'^3}{r'^3} \sin 2f' = -\frac{e'}{2} \sin \Phi' + \left(1 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \sin 2\Phi' + \frac{7}{2} e' \sin 3\Phi' + \\ + \frac{17}{2} e'^2 \sin 4\Phi'.$$

¹⁾ E. W. Brown, Tables of the Motion of the Moon, Yale Univ. Press, 1919.

Перемножая ряды, находим

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2} \frac{a'^3}{r'^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - 2e \cos \varphi + 3e' \cos \varphi' - \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi + \\ + \frac{9}{2} e'^2 \cos 2\varphi' - 3ee' \cos(\varphi - \varphi') - 3ee' \cos(\varphi + \varphi'), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2} \cos 2f \cdot \frac{a'^3}{r'^3} \cos 2f' + \frac{r^2}{a^2} \sin 2f \cdot \frac{a'^3}{r'^3} \sin 2f' = I = \\ = \left(1 - \frac{5}{2} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \cos(2\varphi - 2\varphi') - 3e \cos(\varphi - 2\varphi') + e \cos(3\varphi - 2\varphi') - \\ - \frac{e'}{2} \cos(2\varphi - \varphi') + \frac{7}{2} e' \cos(2\varphi - 3\varphi') + \\ + \frac{5}{2} e^2 \cos 2\varphi' + e^2 \cos(4\varphi - 2\varphi') + \\ + \frac{3}{2} ee' \cos(\varphi - \varphi') - \frac{21}{2} ee' \cos(\varphi - 3\varphi') - \frac{1}{2} ee' \cos(3\varphi - \varphi') + \\ + \frac{7}{2} ee' \cos(3\varphi - 3\varphi') + \\ + \frac{17}{2} e'^2 \cos(2\varphi - 4\varphi'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2} \cos 2f \cdot \frac{a'^3}{r'^3} \sin 2f' - \frac{r^2}{a^2} \sin 2f \cdot \frac{a'^3}{r'^3} \cos 2f' = II = \\ = - \left(1 - \frac{5}{2} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \sin(2\varphi - 2\varphi') + 3e \sin(\varphi - 2\varphi') - e \sin(3\varphi - 2\varphi') + \\ + \frac{e'}{2} \sin(2\varphi - \varphi') - \frac{7}{2} e' \sin(2\varphi - 3\varphi') + \\ + \frac{5}{2} e^2 \sin 2\varphi' - e^2 \sin(4\varphi - 2\varphi') - \\ - \frac{3}{2} ee' \sin(\varphi - \varphi') + \frac{21}{2} ee' \sin(\varphi - 3\varphi') + \frac{1}{2} ee' \sin(3\varphi - \varphi') - \\ - \frac{7}{2} ee' \sin(3\varphi - 3\varphi') - \\ - \frac{17}{2} e'^2 \sin(2\varphi - 4\varphi'). \end{aligned}$$

За исключением членов с аргументом $2\varphi'$, все косинусоидальные члены в выражении I имеют соответственные члены с синусами в выражении II, коэффициенты которых противоположны по знаку. Это обусловлено равенством коэффициентов при соответствующих членах с косинусами в основных рядах и представляет собой свойство, которое исчезает, если учитываются степени e и e' выше второй. Однако это обстоятельство не мешает распространению той же процедуры на более высокие степени e и e' .

Отсюда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2} \frac{a'^3}{r'^3} \cos(2\psi - 2\psi') = I \cdot \cos(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + II \cdot \sin(2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') = \\ = \left(1 - \frac{5}{2} e^2 - \frac{5}{2} e'^2 \right) \cos(2\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') - \\ - 3e \cos(\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + e \cos(3\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') - \\ - \frac{e'}{2} \cos(2\varphi - \varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \frac{7}{2} e' \cos(2\varphi - 3\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{2} e^2 \cos(2\varphi' - 2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}') + e^2 \cos(4\varphi - 2\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \\
& + \frac{3}{2} ee' \cos(\varphi - \varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') - \frac{21}{2} ee' \cos(\varphi - 3\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') - \\
& - \frac{1}{2} ee' \cos(3\varphi - \varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \frac{7}{2} ee' \cos(3\varphi - 3\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}') + \\
& + \frac{17}{2} e'^2 \cos(2\varphi - 4\varphi' + 2\tilde{\omega} - 2\tilde{\omega}'). \tag{11}
\end{aligned}$$

Подстановка (10) и (11) в (9а) дает требуемый результат. При этой подстановке мы заменяем φ разностью $\lambda - \tilde{\omega}$, φ' — разностью $\lambda' - \tilde{\omega}'$, где λ и λ' — соответственно средние долготы Луны и Солнца. Далее мы добавляем в выражение (7б) для $\cos^2 S$ члены, содержащие множителем γ^2 , заменяя в этих членах ψ на λ , ψ' на λ' . Тогда первая часть R принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
R_1 = n'^2 a^2 & \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 + \right. \\
& + \left(+ \frac{3}{4} - \frac{15}{8} e^2 - \frac{15}{8} e'^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 \right) \cos(2\lambda - 2\lambda') - \\
& - \frac{e}{2} \cos(\lambda - \tilde{\omega}) - \frac{9}{4} e \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{3}{4} e \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) + \\
& + \frac{3}{4} e' \cos(\lambda' - \tilde{\omega}') - \frac{3}{8} e' \cos(2\lambda - \lambda' - \tilde{\omega}') + \frac{21}{8} e' \cos(2\lambda - 3\lambda' + \tilde{\omega}') - \\
& - \frac{e^2}{8} \cos(2\lambda - 2\tilde{\omega}) + \frac{15}{8} e^2 \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}) + \frac{3}{4} e^2 \cos(4\lambda - 2\lambda' - 2\tilde{\omega}) - \\
& - \frac{3}{4} ee' \cos(\lambda - \lambda' - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}') + \frac{9}{8} ee' \cos(\lambda - \lambda' + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}') - \\
& - \frac{3}{4} ee' \cos(\lambda + \lambda' - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}') - \\
& - \frac{3}{8} ee' \cos(3\lambda - \lambda' - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}') - \frac{63}{8} ee' \cos(\lambda - 3\lambda' + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}') + \\
& + \frac{21}{8} ee' \cos(3\lambda - 3\lambda' - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}') + \\
& + \frac{9}{8} e'^2 \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}') + \frac{51}{8} e'^2 \cos(2\lambda - 4\lambda' + 2\tilde{\omega}') + \\
& \left. + \frac{3}{8} \gamma^2 \cos(2\lambda - 2\Omega) + \frac{3}{8} \gamma^2 \cos(2\lambda' - 2\Omega) \right]. \tag{12}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно разложить члены R более высокого порядка. Делонэ использует в качестве основы своей теории разложение до шестого порядка относительно элементов e , e' , γ , тогда как отношение a/a' рассматривается как величина второго порядка. Его ряд для R содержит 324 члена.

Получение некоторых наиболее значительных членов в движении Луны можно проиллюстрировать, ограничивая возмущающую функцию

следующими членами:

$$\begin{aligned}
 R = n'^2 a^2 & \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\lambda - 2\lambda') - \right. \\
 & - \frac{1}{2} e \cos(\lambda - \tilde{\omega}) - \frac{9}{4} e \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{3}{4} e \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) + \\
 & + \frac{3}{4} e' \cos(\lambda' - \tilde{\omega}') + \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{8} e^2 \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}) + \\
 & + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 + \frac{3}{8} \gamma^2 \cos(2\lambda' - 2\Omega) + \\
 & + \frac{3}{8} \frac{a}{a'} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{5}{8} \frac{a}{a'} \cos(3\lambda - 3\lambda') - \\
 & \left. - \frac{15}{16} \frac{a}{a'} e \cos(\lambda' - \tilde{\omega}') - \frac{15}{16} \frac{a}{a'} ee' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Чтобы получить члены, имеющие множителем a/a' , удобно аналогично формуле (9а) записать

$$R_2 = n'^2 a^2 \frac{a}{a'} \frac{r^3}{a^3} \frac{a'^4}{r'^4} \left[+ \frac{3}{8} \cos(\psi - \psi') + \frac{5}{8} \cos(3\psi - 3\psi') \right].$$

Главные члены разложения получаются заменой r/a и a'/r' единицей, а $\psi - \psi'$ — разностью $\lambda - \lambda'$. Остальные два члена, включенные в (13), легко получаются из разложения до первой степени относительно e и e' следующих величин:

$$\begin{aligned}
 \frac{r^3}{a^3} \cos f &= -\frac{5}{2} e + \cos \varphi - \frac{e}{2} \cos 2\varphi, \\
 \frac{r^3}{a^3} \sin f &= +\sin \varphi - \frac{e}{2} \sin 2\varphi, \\
 \frac{a'^4}{r'^4} \cos f' &= +e' + \cos \varphi' + 3e' \cos 2\varphi', \\
 \frac{a'^4}{r'^4} \sin f' &= +\sin \varphi' + 3e' \sin 2\varphi',
 \end{aligned}$$

которые порождают следующие члены:

$$\begin{aligned}
 -\frac{5}{2} ee' - \frac{5}{2} e \cos \varphi' &\quad \text{в} \quad \frac{r^3}{a^3} \frac{a'^4}{r'^4} \cos(f - f'), \\
 +\frac{5}{2} e \sin \varphi' &\quad \text{в} \quad \frac{r^3}{a^3} \frac{a'^4}{r'^4} \sin(f - f'),
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$-\frac{5}{2} ee' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') - \frac{5}{2} e \cos(\varphi' - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}') \quad \text{в} \quad \frac{r^3}{a^3} \frac{a'^4}{r'^4} \cos(\psi - \psi').$$

Умножение на $\frac{3}{8} n'^2 a^2 a/a'$ объясняется присутствием последних двух членов из (13).

4. Свойства возмущающей функции. Значение S не зависит от выбора нуль-пункта, от которого отчитываются углы ψ и ψ' . Углы λ , λ' , $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ и Ω , которые встречаются в линейных комбинациях в аргументах периодических членов, присутствующих в R , отчитываются от того же общего начала. Если все эти углы возрастут на произвольную общую величину, то разложение для R не должно измениться. Поэтому необходимо, чтобы сумма коэффициентов этих составных частей аргументов была равна нулю для каждого члена в R .

Рассмотрим сперва члены, не имеющие множителем γ^2 . Аргументы могут быть написаны в следующем виде:

$$i_1\lambda + i_2\lambda' + i_3\tilde{\omega} + i_4\tilde{\omega}',$$

причем

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0. \quad (14)$$

Если ввести $\varphi = \lambda - \tilde{\omega}$, $\varphi' = \lambda' - \tilde{\omega}'$, то эти аргументы примут вид

$$(i_1 + i_3)\lambda + (i_2 + i_4)\lambda' - i_3\varphi - i_4\varphi'.$$

Условие (14) равносильно требованию, чтобы коэффициенты при λ и λ' в последней форме были равны по величине и обратны по знаку. Следовательно, этот аргумент можно написать в виде

$$p_1(\lambda - \lambda') + p_2\varphi + p_3\varphi', \quad (15)$$

в котором p_1 может быть равным нулю или положительному целому числу, p_2 и p_3 — любыми целыми числами, положительными, отрицательными или нулем. В членах, которые составляют R_1 , значение p_1 равно либо 0, либо 2; в R_2 — 1 или 3; в R_3 — 0, 2 или 4 и т. д. Это следует из того факта, что числовое значение p_1 в (15) совпадает с кратностью разности $\psi - \psi'$, которая получается при раскрытии выражения (8) с помощью выражений (7) для различных степеней.

Наконец, степень e в коэффициенте члена связана с кратностью p_2 средней аномалии φ в аргументе вида (15) и степень e' — с кратностью p_3 средней аномалии φ' . Этот коэффициент содержит следующий множитель:

$$e^{|p_2|+2k} e^{e'|p_3|+2k'}, \quad k, k' = 0, +1, +2, \dots. \quad (16)$$

Это соответствует соотношению Даламбера в разложениях в эллиптическом движении. Если s есть целое положительное число, то можно написать соотношение вида

$$\left(\frac{r}{a}\right)^s \left(\frac{a'}{r'}\right)^{s+1} \cos j(\psi - \psi') = (1+x)^s (1+x')^{-s-1} \cos [j(\lambda - \lambda') + jy - jy'],$$

в котором $x = r/a - 1$, $x' = r'/a' - 1$, а y , y' — уравнения центра. Теперь $(1+x)^s \cos jy$ и $(1+x')^s \sin jy'$ можно разложить в даламберовы ряды по косинусам или синусам; аргументами являются дуги, кратные φ , и связь между степенью e и кратностью средней аномалии будет той же, что и заданная выражением (16). Аналогично $(1+x')^{-s-1} \cos jy'$ и $(1+x')^{-s-1} \times \sin jy'$ можно разложить в даламберовы ряды по дугам, кратным средней аномалии φ' . Эти даламберовы свойства разложений в эллиптическом движении сохраняются, когда аргументы выражены окончательно в форме (15).

Аналогичная связь существует между степенями γ и кратностями угла Ω . Если эксцентриситеты равны нулю, то (7a) принимает вид

$$\cos S = \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos(\lambda + \lambda' - 2\Omega),$$

что можно записать в следующем виде:

$$\cos S = \left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\right) \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4}\gamma^2 \cos[\lambda - \lambda' - 2(\lambda - \Omega)].$$

Во всех степенях $\cos S$, записанных в этой форме, аргументы будут вида

$$p_1(\lambda - \lambda') + 2p_4(\lambda - \Omega),$$

где p_4 есть целое число (положительное, отрицательное или нуль), тогда как коэффициент имеет множитель

$$\gamma^{|2p_4|+2k''}, \quad k''=0, +1, +2, \dots$$

Это соотношение справедливо и в том случае, если эксцентриситеты включены в разложение.

Эти различные соотношения можно свести воедино, представляя любой член из R в следующей форме:

$$N n'^2 a^2 e^{|p_2|+2k} e^{|p_3|+2k'} \gamma^{|2p_4|+2k''} \left(\frac{a}{a'} \right)^{p'_1} \times \\ \times \cos [p_1 (\lambda - \lambda') + p_2 \varphi + p_3 \varphi' + 2p_4 (\lambda - \Omega)],$$

в которой величины p и k — целые числа, а N — рациональный числовой коэффициент, причем p_1 — нуль или положительное число, p_2, p_3, p_4 — нуль, положительные или отрицательные числа, а k, k', k'' — нуль или положительные числа.

Если члены, порождаемые R_1, R_2, R_3, \dots , рассматриваются в отдельности, то мы имеем

$$\begin{array}{ll} \text{в } R_1 \quad p_1 = 0 \text{ или } 2; & \text{показатель степени } a/a' \quad 0; \\ R_2 \quad p_1 = 1 \text{ или } 3; & 1; \\ R_3 \quad p_1 = 0, 2 \text{ или } 4; & 2. \end{array}$$

5. Интегрирование главных членов по методу вариации произвольных постоянных. Метод вариации произвольных постоянных удобен для получения солнечных возмущений в движении спутников, для которых отношение n'/n является весьма малым по сравнению с его значением для системы Земля—Луна. В таких случаях достаточно первого приближения для получения возмущений со всей точностью, необходимой для сравнения с наблюдениями. Лаплас применил этот метод для вычисления значений солнечных возмущений в движении галилеевых спутников Юпитера; Г. Струве применил его к спутникам Сатурна, за исключением Фебы. Отношение n'/n равно 0,0039 для IV спутника Юпитера, 0,0015 для Титана; оба эти значения малы по сравнению со значением для Луны, равным 0,0748. Пуассон использовал этот метод для Луны, однако он не стремился дать законченную теорию.

Пусть возмущенная средняя долгота определяется уравнением

$$\lambda = \int n dt + e_1. \quad (17)$$

Если пренебречь степенями эксцентриситета и наклонности орбиты спутника выше второй, то можно применить следующие сокращенные уравнения [см. гл. XI, уравнения (21)]:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= + \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}, & \frac{de_1}{dt} &= - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \frac{de}{dt} &= - \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}, & \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= + \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= - \frac{1}{na^2 \gamma} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, & \frac{d\Omega}{dt} &= + \frac{1}{na^2 \gamma} \frac{\partial R}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (18)$$

Определяя ε_1 посредством (17), условимся, что, коль скоро рассматриваются элементы спутниковой орбиты, R следует считать функцией от $a, e, \gamma, \lambda, \tilde{\omega}$ и Ω . Тогда в силу (17) и выражений для da/dt и $d\varepsilon_1/dt$ из (18) возмущения в средней долготе имеют вид

$$\delta\lambda = - \int \int \frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} dt dt - \int \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} dt = \\ = (\delta\lambda) + \delta\varepsilon_1. \quad (19)$$

Как и в случае применения этого метода к движению планет, возмущения первого порядка получаются, если считать a, e, γ и $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ постоянными всюду в разложениях правых частей (18) и (19). Средняя долгота в этих правых частях рассматривается как линейная функция времени. Вместо того чтобы считать $\tilde{\omega}$ и Ω постоянными, как это имеет место в эллиптическом движении, при вычислении возмущений первого порядка целесообразно учесть вековые изменения этих элементов, получающиеся из некоторых членов возмущающей функции. Это не нарушает линейного характера решения; по-прежнему мы можем рассматривать каждый член или группу членов возмущающей функции в отдельности. Однако прежде всего необходимо рассмотреть вековые члены.

6. Вековые члены. Если возмущающая функция ограничена членами

$$[R] = n'^2 a^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 \right],$$

то уравнения (18) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, & \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= - \frac{n'^2}{n} \left[1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 \right], \\ \frac{de}{dt} &= 0, & \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= + \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n}, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= 0, & \frac{d\Omega}{dt} &= - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n}. \end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$\begin{aligned} a &= a_0, & \bar{\varepsilon}_1 &= - \frac{n'^2}{n^2} \left(1 + \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{3}{2} \gamma_0^2 \right) \bar{n}t + \varepsilon_{10}, \\ e &= e_0, & \bar{\tilde{\omega}} &= + \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n^2} \bar{n}t + \tilde{\omega}_0, \\ \gamma &= \gamma_0, & \bar{\Omega} &= - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n^2} \bar{n}t + \Omega_0, \end{aligned}$$

где \bar{n} , a_0 , e_0 , γ_0 , ε_{10} , $\tilde{\omega}_0$ и Ω_0 — постоянные. Черта над различными символами указывает среднее значение, освобожденное от периодических членов.

Тот факт, что ε_1 оказывается отрицательной линейной функцией времени, свидетельствует о том, что наблюденное среднее движение Луны меньше невозмущенного среднего движения, которое, согласно третьему закону Кеплера, должно соответствовать значению a_0 большой полуоси a . Этот вопрос рассматривается ниже в разд. 13 этой главы.

Результат вида $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 t + \tilde{\omega}_0$ при положительном $\tilde{\omega}_1$ указывает на то, что перигей имеет прямое движение. Обычно применяется следующая

форма записи:

$$\tilde{\omega} = (1 - c) \bar{n}t + \tilde{\omega}_0, \quad (20)$$

так что среднее значение средней аномалии l получается по формуле

$$l = \bar{\lambda} - \tilde{\omega} = c\bar{n}t + l_0, \quad (21)$$

где $\bar{\lambda}$, $\tilde{\omega}$ — линейные функции времени, причем их не следует смешивать с оскулирующими λ , $\tilde{\omega}$, от которых они отличаются на сумму периодических членов. Аналогично \bar{n} означает среднее значение среднего движения Луны.

Поскольку $\tilde{\omega}_1$ положительно, то $1 - c$ положительно и с меньше единицы. Поэтому среднее значение средней аномалии возрастает медленнее, чем среднее значение средней долготы, и аномалистический период больше сидерического периода.

Будет полезно ввести следующее обозначение:

$$m = n'/n,$$

которое для Луны приблизительно равно 0,0748013. Тогда приближенный результат, полученный для $\tilde{\omega}_1$, равен

$$\tilde{\omega}_1 = +\frac{3}{4} m^2 \bar{n},$$

которому соответствует

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2.$$

Результат вида $\bar{\Omega} = \Omega_1 t + \Omega_0$ при отрицательном Ω_1 показывает, что восходящий узел лунной орбиты на эклиптике имеет обратное движение. Это выражение обычно приводится к следующему виду:

$$\bar{\Omega} = (1 - g) \bar{n}t + \Omega_0, \quad (22)$$

так что среднее значение аргумента широты F выражается формулой

$$F = \bar{\lambda} - \bar{\Omega} = g\bar{n}t + F_0. \quad (23)$$

Поскольку $1 - g$ отрицательно, то g больше единицы. Среднее значение аргумента широты возрастает быстрее, чем среднее значение средней долготы Луны, и драконический месяц короче сидерического месяца.

В планетной теории результаты, полученные этим методом для вековых членов в элементах ω и Ω , как правило, являются хорошим приближением к окончательным результатам. Это не имеет места в случае движения Луны, особенно для долготы перигея. Выполняя интегрирование методом последовательных приближений, мы находим

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2 - \frac{225}{32} m^3 - \frac{4071}{128} m^4 - \frac{265493}{2048} m^5 - \dots, \quad (24)$$

$$g = 1 + \frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{32} m^3 - \frac{273}{128} m^4 - \frac{9797}{2048} m^5 - \dots. \quad (25)$$

Кроме того, имеются члены, содержащие множителем e^2 , e'^2 , γ^2 и a/a' . Медленная сходимость рядов в теории движения Луны иллюстрируется табл. 1 и 2. Для сравнения приведены также отдельные члены для IV спутника Юпитера, для которого $m = 0,003851975$. Для этого спутника сходимость вполне удовлетворительна.

Таблица 1

Разложение главной части движения перицентра по степеням m

$$1 - c = \frac{1}{n} \frac{d\omega}{dt}$$

	Луна, $m=0,07480\ 13263$	IV спутник Юпитера, $m=0,00385\ 1975$
$0,75000\ m^2$	+ 0,00419 64288	+ 0,00001 10533
$7,03125\ m^3$	+ 294 27979	+ 4019
$31,804688\ m^4$	+ 99 56996	+ 70
$129,63525\ m^5$	+ 30 35775	+ 1
$521,7542\ m^6$	+ 9 13949	
$2159,841\ m^7$	+ 2 83000	
$10035,29\ m^8$	+ 98357	
$47309,7\ m^9$	+ 34684	
 1 - c Точное значение 1 - c	+ 0,00857 15028 + 0,00857 25730	+ 0,00001 14623

Ряд для движения перигея представляет только один пример медленной сходимости по степеням m ; коэффициенты некоторых периодических членов в теории Луны являются причиной аналогичных затруднений.

Таблица 2

Разложение главной части движения узла по степеням m

$$1 - g = \frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt}$$

	Луна	IV спутник Юпитера
$-0,75000\ m^2$	- 0,00419 64288	- 0,00001 10533
$+0,28125\ m^3$	+ 11 77119	+ 161
$+2,132813\ m^4$	+ 6 67713	+ 5
$+4,78369\ m^5$	+ 1 12024	
$+8,1084\ m^6$	+ 14203	
$+11,288\ m^7$	+ 1479	
 1 - g Точное значение 1 - g	- 0,00399 91750 - 0,00399 91645	- 0,00001 10367

7. Главные периодические члены. Как было установлено в предыдущем разделе, для того чтобы получить периодические члены в первом приближении, можно вместо a , e , γ воспользоваться постоянными a_0 , e_0 , γ_0 , а в аргументах вместо λ , $\bar{\omega}$, Ω подставить линейные функции времени $\tilde{\lambda}$, $\bar{\omega}$, $\tilde{\Omega}$. Для упрощения обозначений отбросим нижние индексы и горизонтальные черточки. Кроме того, следует иметь в виду, что всякий раз, когда встречается n , под ним необходимо понимать сидерическое среднее движение, которое предполагается постоянной величиной.

В результате интегрирования мы получим выражения для

$$\delta a, \delta e, \delta \gamma, \delta \lambda, \delta \tilde{\omega}, \delta \Omega.$$

Члены самого низшего порядка в возмущениях полярных координат получаются из

$$\begin{aligned}\psi &= \lambda + 2e \sin(\lambda - \tilde{\omega}), \\ r &= a [1 - e \cos(\lambda - \tilde{\omega})], \\ \sin \beta &= \gamma \sin(\psi - \Omega).\end{aligned}$$

Они равны

$$\begin{aligned}\delta \psi &= \delta \lambda + 2 \sin(\lambda - \tilde{\omega}) \delta e - 2 \cos(\lambda - \tilde{\omega}) e \delta \tilde{\omega}, \\ \delta r &= \delta a - a \cos(\lambda - \tilde{\omega}) \delta e - a \sin(\lambda - \tilde{\omega}) e \delta \tilde{\omega}, \\ \delta \beta &= \sin(\lambda - \Omega) \delta \gamma - \cos(\lambda - \Omega) \gamma \delta \Omega + \gamma \cos(\lambda - \Omega) \delta \psi.\end{aligned}\quad (26)$$

Член $\gamma \cos(\lambda - \Omega) \delta \psi$ в $\delta \beta$, который получается из определенного члена в R , как показывают уравнения (18), будет на два порядка выше по γ , чем члены, обусловленные $\delta \gamma$ и $\gamma \delta \Omega$, возникающие из этого же члена. Поэтому в первом приближении можно отбросить третий член в $\delta \beta$.

8. Вариация. Рассмотрим сначала член

$$\frac{3}{4} n'^2 a^2 \cos(2\lambda - 2\lambda').$$

Уравнения (18) и (19) дают

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -3 \frac{n'^2}{n} a \sin(2\lambda - 2\lambda'), & \frac{\delta a}{a} &= + \frac{3n'^2}{n(2n-2n')} \cos(2\lambda - 2\lambda'), \\ \frac{d^2(\delta \lambda)}{dt^2} &= + \frac{9}{2} n'^2 \sin(2\lambda - 2\lambda'), & (\delta \lambda) &= - \frac{9}{2} \frac{n'^2}{(2n-2n')^2} \sin(2\lambda - 2\lambda'), \\ \frac{de_1}{dt} &= -3 \frac{n'^2}{n} \cos(2\lambda - 2\lambda'), & \delta e_1 &= - \frac{3n'^2}{n(2n-2n')} \sin(2\lambda - 2\lambda').\end{aligned}$$

Результат для $\delta a/a$ можно написать в следующем виде:

$$\frac{\delta a}{a} = + \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m} \cos(2\lambda - 2\lambda').$$

Множитель $(1-m)^{-1}$ может быть заменен биномиальным разложением $1+m+m^2+\dots$. С точностью до самого низшего порядка относительно m имеем

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{\delta a}{a} = + \frac{3}{2} m^2 \cos(2\lambda - 2\lambda'), \quad (27a)$$

и аналогично

$$\begin{aligned}(\delta \lambda) &= - \frac{9}{8} m^2 \sin(2\lambda - 2\lambda'), \\ \delta e_1 &= - \frac{3}{2} m^2 \sin(2\lambda - 2\lambda'), \\ \delta \psi &= (\delta \lambda) + \delta e_1 = - \frac{21}{8} m^2 \sin(2\lambda - 2\lambda').\end{aligned}\quad (27b)$$

Это не единственные члены с аргументом $2\lambda - 2\lambda'$, не зависящие от e , e' , γ и имеющие множителем m^2 , в δr и $\delta \psi$. Рассмотрим следующие

члены в R :

$$n'^2 a^2 \left[-\frac{9}{4} e \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{3}{4} e \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) \right].$$

Они дают

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{9}{4} \frac{n'^2}{n} \sin(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) - \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} \sin(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}), \\ e \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= -\frac{9}{4} \frac{n'^2}{n} \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}), \\ \delta e &= +\frac{9}{4} \frac{n'^2}{n[n - 2n' + (1-c)n]} \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \\ &\quad + \frac{3}{4} \frac{n'^2}{n[3n - 2n' - (1-c)n]} \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) = \\ &= +\frac{9}{4} \frac{m^2}{1 - 2m + \frac{3}{4} m^2 + \dots} \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{m^2}{1 - \frac{2}{3} m - \frac{1}{4} m^2 + \dots} \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) = \\ &= +\frac{9}{4} m^2 \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{1}{4} m^2 \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}), \end{aligned}$$

если удерживаются только самые низшие степени относительно m . При помощи той же процедуры получаем

$$e\delta\tilde{\omega} = -\frac{9}{4} m^2 \sin(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) + \frac{1}{4} m^2 \sin(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}).$$

Тогда, согласно уравнениям (26), находим

$$\begin{aligned} \delta\psi &= +\frac{9}{2} m^2 \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) \sin(\lambda - \tilde{\omega}) + \frac{1}{2} m^2 \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) \sin(\lambda - \tilde{\omega}) + \\ &\quad + \frac{9}{2} m^2 \sin(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) \cos(\lambda - \tilde{\omega}) - \frac{1}{2} m^2 \sin(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) \cos(\lambda - \tilde{\omega}) = \\ &= +4m^2 \sin(2\lambda - 2\lambda'), \end{aligned} \tag{28a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta r}{a} &= -\frac{9}{4} m^2 \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) \cos(\lambda - \tilde{\omega}) - \frac{1}{4} m^2 \cos(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) \cos(\lambda - \tilde{\omega}) + \\ &\quad + \frac{9}{4} m^2 \sin(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}) \sin(\lambda - \tilde{\omega}) - \frac{1}{4} m^2 \sin(3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}) \sin(\lambda - \tilde{\omega}) = \\ &= -\frac{5}{2} m^2 \cos(2\lambda - 2\lambda'). \end{aligned} \tag{28б}$$

Складывая результаты (27) и (28), получаем вариацию в первом приближении

$$\begin{aligned} \delta\psi &= +\frac{11}{8} m^2 \sin(2\lambda - 2\lambda'), \\ \frac{\delta r}{a} &= -m^2 \cos(2\lambda - 2\lambda'). \end{aligned} \tag{29}$$

Этот вывод служит иллюстрацией того, каким образом члены возмущающей функции с различными аргументами могут быть объединены в члены с общим аргументом в $\delta\psi$ и $\delta r/a$. Главные члены, обусловленные возмущениями в λ и a , входят в $\delta\psi$ и $\delta r/a$ без изменения аргу-

мента; возмущения в e и $\tilde{\omega}$ с аргументом A порождают главные возмущения в $\delta\phi$ и $\delta r/a$ с аргументом $A \pm (\lambda - \tilde{\omega})$.

Процесс дальнейших приближений к членам с аргументом $2\lambda - 2\lambda'$ даст коэффициент в виде ряда по степеням m . С точностью до четвертой степени коэффициент в $\delta\phi$ равен

$$+ \frac{11}{8} m^2 + \frac{59}{12} m^3 + \frac{893}{72} m^4 + \dots$$

Кроме того, в теорию, если стремиться к точности, сравнимой с лучшими наблюдениями, необходимо включить члены, содержащие e^2 , e'^2 , $(a/a')^2$, γ^2 . Члены с аргументами $4\lambda - 4\lambda'$, $6\lambda - 6\lambda'$ можно в конечном счете рассматривать как вариационные неравенства.

Коэффициент члена с аргументом $2\lambda - 2\lambda'$ в долготе Луны, согласно теории Брауна, равен $+39'29''9$. Тем не менее вариация не была известна греческим астрономам, в том числе и Птолемею. Период вариации равен половине среднего синодического месяца; это неравенство обращается в нуль как в новолуние, так и в полнолуние, и поэтому не влияет на моменты солнечных и лунных затмений. Поскольку древние греки черпали большую часть своих сведений о лунной орбите из затмений, то это неравенство не могло быть ими обнаружено.

Из членов в R с аргументами $\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}$ и $3\lambda - 2\lambda' - \tilde{\omega}$ были получены только возмущения в e и $\tilde{\omega}$. Конечно, они порождают члены с теми же аргументами в a и λ . Легко видеть, что эти члены в δa и $\delta\lambda$ будут иметь множителем $m^2 e$. Первый из этих аргументов известен как аргумент эвекции, однако члены в $\delta\phi$ и $\delta r/a$, которые получаются из этого члена посредством δa и $\delta\lambda$, менее значительны, чем члены, получаемые посредством δe и $\delta\tilde{\omega}$ из другого члена возмущающей функции, который мы сейчас рассмотрим.

9. Эвекция. Член в R_1

$$+ \frac{15}{8} n'^2 a^2 e^2 \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega})$$

вызывает следующие возмущения:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= -\frac{15}{4} \frac{n'^2}{n} e \sin(2\lambda' - 2\tilde{\omega}), \\ \delta e &= +\frac{15}{4} \frac{n'^2 e}{n [2n' - 2(1-c)n]} \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}), \\ e \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= +\frac{15}{4} \frac{n'^2}{n} e \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}), \\ e\delta\tilde{\omega} &= +\frac{15}{4} \frac{n'^2 e}{n [2n' - 2(1-c)n]} \sin(2\lambda' - 2\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Коэффициент, входящий в δe и $e\delta\tilde{\omega}$, можно написать в следующем виде:

$$\frac{15}{4} \frac{n'^2 e}{2nn' \left(1 - \frac{3}{4}m\right)} = \frac{15}{8} \frac{me}{1 - \frac{3}{4}m} \sim \frac{15}{8} me.$$

Поэтому результаты первого приближения получаются в виде

$$\delta e = +\frac{15}{8} me \cos(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

$$e\delta\tilde{\omega} = +\frac{15}{8} me \sin(2\lambda' - 2\tilde{\omega}),$$

откуда при помощи (26) получаем

$$\begin{aligned}\delta\psi &= +\frac{15}{4}me \sin(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}), \\ \frac{\delta r}{a} &= -\frac{15}{4}me \cos(\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}).\end{aligned}\quad (30)$$

Эвекция представляет собой самое большое периодическое возмущение в долготе Луны. Коэффициент члена с аргументом $\lambda - 2\lambda' + \tilde{\omega}$ в $\delta\psi$, согласно теории Брауна, равен $+1^{\circ}16'26'',4$. Этот член был известен Гиппарху.

Значительность этого члена вызвана отсутствием кратности λ в аргументе $2\lambda' - 2\tilde{\omega}$ члена в возмущающей функции, который был нами рассмотрен. Поэтому делитель, вводимый при интегрировании, имеет множителем n' , тогда как обычно для членов, содержащих кратность λ в аргументе, этим множителем является n . Делитель n' уменьшает общий множитель n^2 возмущающей функции до величины n' . В результате получается член с множителем n , а не n^2 .

В планетной теории имеется много примеров малых членов в возмущающей функции, которые порождают большие возмущения в долготе. Такими возмущениями в планетном движении являются долгопериодические возмущения в средней долготе. Они возникают из линейных комбинаций вида $p\lambda - q\lambda'$ средних долгот двух планет, для которых разность $pn - qn'$ мала по сравнению с n и n' . При интегрировании $(\delta\lambda)$ из

$$(\delta\lambda) = - \int \int \frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} dt dt$$

появляется квадрат малого делителя. Причина возникновения большого коэффициента при главном члене эвекции в долготе Луны несомненно иная, так как его значительность обусловлена отсутствием λ в аргументе члена в R , который порождает это возмущение.

Среднее движение аргумента $2\lambda' - 2\tilde{\omega}$ возмущений в e и $\tilde{\omega}$, которые порождают эвекцию, равно

$$[2m - 2(1 - c)]n = 2(0,07480\,133 - 0,00857\,257)n = 0,13245\,752n.$$

Поэтому, если принять сидерический месяц равным 27,321 661 суток, то период этого аргумента равен

$$\frac{27^d,321661}{0,13245\,752} = 206,26735 \text{ суток.}$$

Среднее движение аргумента эвекции в долготе равно

$$[1 - 2m + (1 - c)]n = (1 - 0,14960\,266 + 0,00857\,257)n = 0,85896\,991n.$$

Соответствующий период равен

$$\frac{27^d,321661}{0,85896\,991} = 31,80747 \text{ суток.}$$

Поэтому возмущение в эксцентриситете и долготе перигея с периодом около семи синодических месяцев порождает возмущения в долготе и радиусе-векторе с периодом примерно на двое суток большим, чем средний синодический месяц.

10. Годичное неравенство. Аналогичное понижение порядка относительно m происходит при интегрировании члена

$$+ \frac{3}{4} n'^2 a^2 e' \cos(\lambda' - \tilde{\omega}').$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= -3 \frac{n'^2}{n} e' \cos(\lambda' - \tilde{\omega}'), \quad \delta e_1 = -3m e' \sin(\lambda' - \tilde{\omega}'), \\ \delta\psi &= -3m e' \sin(\lambda' - \tilde{\omega}'). \end{aligned} \quad (31)$$

Соответствующего члена в радиусе-векторе не существует.

Легко видеть, что следующие члены в (12):

$$n'^2 a^2 \left[-\frac{3}{4} ee' \cos(\lambda - \lambda' - \tilde{\omega} + \tilde{\omega}') + \frac{9}{8} ee' \cos(\lambda - \lambda' + \tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \right]$$

порождают посредством δe и $e\delta\tilde{\omega}$ члены с аргументом $\lambda' - \tilde{\omega}'$ в долготе и радиусе-векторе. В аргументах этих членов содержится λ ; следовательно, здесь не происходит понижения порядка с m^2 до m . Поэтому члены, получающиеся в $\delta\psi$ и $\delta r/a$, имеют множителем $m^2 e'$ или на один порядок выше относительно m , чем главный член с аргументом $\lambda' - \tilde{\omega}'$, полученный выше. Его период равен аномалистическому году. Коэффициент члена с этим аргументом в долготе Луны равен $-11'8",9$.

11. Параллактическое неравенство. Член в R

$$-\frac{15}{16} n'^2 a^2 \frac{a}{a'} e \cos(\lambda' - \tilde{\omega})$$

дает

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= +\frac{15}{16} \frac{n'^2}{n} \frac{a}{a'} \sin(\lambda' - \tilde{\omega}), \quad \delta e = -\frac{15}{16} m \frac{a}{a'} \cos(\lambda' - \tilde{\omega}), \\ e \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= -\frac{15}{16} \frac{n'^2}{n} \frac{a}{a'} \cos(\lambda' - \tilde{\omega}), \quad e\delta\tilde{\omega} = -\frac{15}{16} m \frac{a}{a'} \sin(\lambda' - \tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Из (26) находим

$$\delta\psi = -\frac{15}{8} m \frac{a}{a'} \sin(\lambda - \lambda'), \quad \frac{\delta r}{a} = +\frac{15}{16} m \frac{a}{a'} \cos(\lambda - \lambda'). \quad (32)$$

Главный член в R_2

$$+\frac{3}{8} n'^2 a^2 \frac{a}{a'} \cos(\lambda - \lambda')$$

посредством δa , ($\delta\lambda$) и δe_1 породит в $\delta\psi$ и $\delta r/a$ члены с характеристической $m^2 a/a'$. Благодаря делителю n' и операции деления на e при интегрировании δe и $e\delta\tilde{\omega}$ член, который представляется менее значительным в возмущающей функции, производит возмущения в координатах, пре- восходящие по величине возмущения, которые вызываются значительно большим членом возмущающей функции.

Период параллактического неравенства равен среднему синодическому месяцу. Браун приводит для коэффициента в долготе Луны значение $-2'4",8$. Если численное значение этого коэффициента определено из наблюдений, то можно найти значение a/a' или, точнее,

$$\frac{E - M}{E + M} \frac{a}{a'}$$

(см. разд. 3 этой главы). Эта величина определяет параплакс Солнца. Слабое место такого определения состоит в том, что получающиеся результаты трудно освободить от влияния систематических фазовых эффектов, так как период неравенства совпадает со средним синодическим месяцем. Из-за этой трудности указанный заманчивый метод не может конкурировать по точности с другим гравитационным методом — методом определения параплакса Солнца по значению массы Земли, полученному из возмущений, вызываемых Землей в движении малой планеты Эрос.

12. Главное возмущение в широте. Член в R

$$+ \frac{3}{8} n'^2 a^2 \gamma^2 \cos(2\lambda' - 2\Omega)$$

дает

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} \gamma \sin(2\lambda' - 2\Omega); \quad \delta\gamma = +\frac{3}{8} m\gamma \cos(2\lambda' - 2\Omega),$$

$$\gamma \frac{d\Omega}{dt} = +\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n} \gamma \cos(2\lambda' - 2\Omega), \quad \gamma\delta\Omega = +\frac{3}{8} m\gamma \sin(2\lambda' - 2\Omega),$$

откуда согласно (26) возмущение в широте получается равным.

$$\delta\beta = +\frac{3}{8} m\gamma \sin(\lambda - 2\lambda' + \Omega). \quad (33)$$

Теория Брауна дает для коэффициента этого члена значение $+10'23",7$. Из-за присутствия делителя $2\pi'$ этот член представляет собой наибольший член возмущений в широте Луны. Среднее движение аргумента равно

$$(1 - 2m + 1 - g)n = (1 - 0,14960\,266 - 0,00399\,916)n = 0,84639\,818n.$$

Отсюда период равен

$$\frac{27^d,32166\,1}{0,84639\,818} = 32,279915 \text{ суток.}$$

13. Применение третьего закона Кеплера к спутниковым орбитам. Член в R_1

$$-\frac{1}{2} n'^2 a^2 e \cos(\lambda - \tilde{\omega})$$

дает

$$\frac{de}{dt} = +\frac{1}{2} \frac{n'^2}{n} \sin(\lambda - \tilde{\omega}), \quad \delta e = -\frac{1}{2} m^2 \cos(\lambda - \tilde{\omega}),$$

$$\frac{ed\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{n'^2}{n} \cos(\lambda - \tilde{\omega}), \quad e\delta\tilde{\omega} = -\frac{1}{2} m^2 \sin(\lambda - \tilde{\omega}), \quad (34)$$

$$\delta\psi = 0, \quad \frac{\delta r}{a} = +\frac{1}{2} m^2.$$

Этот результат вместе с вековым возмущением $de_1/dt = -m^2 n$, полученным в разд. 6 этой главы, находит важное применение при определении массы планеты по размерам орбиты спутника.

Обычная процедура состоит в нахождении среднего движения как коэффициента при времени в линейной функции от t . Для этого необходимо вычесть из наблюденных долгот периодические члены — как

эллиптические (соответствующие невозмущенному кеплерову движению), так и возмущения. Обозначим такое среднее движение через N . Аналогично из наблюденных радиусов-векторов вычтутся эллиптические члены и периодические возмущения. Пусть получающееся при этом среднее значение есть A .

Если n, a — среднее движение и большая полуось (причем последняя выражена в астрономических единицах), которые были бы применимы, если бы отсутствовали солнечные возмущения, то мы имели бы

$$n^2 a^3 = k^2 (m_p + m_s)$$

при условии, что k согласуется с единицей времени и угловой единицей, употребленными для n . Возмущение $\delta \varepsilon_1 = -m^2 nt$ дает $N = n(1 - m^2)$; возмущение $\delta r = +\frac{1}{2} am^2$ дает $A = a \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right)$. Следовательно,

$$N^2 A^3 = n^2 a^3 (1 - m^2)^2 \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right)^3$$

или, если m есть малая величина,

$$N^2 A^3 = k^2 (m_p + m_s) \left(1 - \frac{1}{2} m^2\right).$$

Поэтому сумму масс главной планеты и спутника мы найдем из следующего соотношения:

$$k^2 (m_p + m_s) = N^2 A^3 \left(1 + \frac{1}{2} m^2\right). \quad (35)$$

Этот результат справедлив, если солнечные возмущения являются единственными возмущениями, которые необходимо рассматривать в движении спутника. В приложениях к галилеевым спутникам Юпитера или к спутникам Сатурна должны быть включены влияния, обусловленные сжатием главной планеты и притяжением со стороны остальных спутников, обращающихся относительно той же планеты. Они дают дополнительные члены к множителю $1 + \frac{1}{2} m^2$ зависящие от динамического сжатия планеты и от отношения больших полуосей возмущаемого и возмущающего спутников.

14. Члены без множителя m . В предыдущих разделах было приведено несколько примеров членов, в которых степень множителя m понижается с 2 до 1 посредством делителя n' . Понижение степени m на 2 происходит в члене

$$-\frac{15}{16} n'^2 a^2 \frac{a}{a'} ee' \cos(\tilde{\omega} - \hat{\omega}')$$

в R_2 . Мы получаем

$$\frac{d\psi_1}{dt} = +\frac{45}{8} \frac{n'^2}{n} \frac{a}{a'} ee' \cos(\tilde{\omega} - \hat{\omega}'), \quad \delta\varepsilon_1 = +\frac{45}{8} \frac{n'^2}{n^2(1-c)} \frac{a}{a'} ee' \sin(\tilde{\omega} - \hat{\omega}).$$

Но $1 - c = +\frac{3}{4} m^2 + \dots$, откуда

$$\delta\psi = \delta\varepsilon_1 = +\frac{15}{2} \frac{a}{a'} ee' \sin(\tilde{\omega} - \hat{\omega}). \quad (36)$$

Также имеем

$$\frac{de}{dt} = -\frac{15 n'^2}{16 n} \frac{a}{a'} e' \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'), \quad \delta e = +\frac{5}{4} \frac{a}{a'} e' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'),$$

$$e \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{15 n'^2}{16 n} \frac{a}{a'} e' \cos(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'), \quad e \delta \tilde{\omega} = -\frac{5}{4} \frac{a}{a'} e' \sin(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'),$$

откуда

$$\delta \psi = +\frac{5}{2} \frac{a}{a'} e' \sin(\lambda - \tilde{\omega}), \quad \frac{\delta r}{a} = -\frac{5}{4} \frac{a}{a'} e' \cos(\lambda - \tilde{\omega}). \quad (37)$$

Эти коэффициенты малы по сравнению с коэффициентами, например, годичного неравенства в силу малости отношения a/a' . Особенность этих возмущений состоит в том, что из коэффициентов совершенно исчез множитель m^2 . Это представляет несомненный парадокс: поскольку возмущающая функция, обусловленная притяжением Солнца, имеет множителем m^2 , то все возмущения должны были бы обратиться в нуль, если бы обратилось в нуль m . Объяснение состоит в том, что произвольные постоянные могут быть выбраны так, чтобы члены, остающиеся при $m=0$, свелись к членам эллиптического движения.

По существу тот же результат получается для аналогичных членов в планетной теории. Здесь возмущающая функция планеты с массой m , которая возмущается планетой массы m' , имеет множителем m' . Движение ω содержит m' в качестве множителя. Поэтому интегрирование члена с аргументом $\tilde{\omega} - \omega'$ должно дать член, не зависящий от возмущающей массы. В обычной форме планетной теории эта проблема не возникает, поскольку такие члены разлагаются по степеням времени. В теории вековых возмущений они рассматриваются одновременно с вековыми членами; после интегрирования получаются члены, имеющие множителем произвольную постоянную, а не возмущающую массу.

15. Дальнейшие приближения. Как было отмечено выше, метод, применяемый для определения возмущений в элементах в первом приближении, дает результаты, которые совершенно достаточны для изучения спутниковых систем с малыми значениями отношения n'/n . Для Луны и для внешних спутников Юпитера и Сатурна возмущений первого порядка недостаточно для удовлетворительного представления наблюдаемых движений. Для задач такого рода решение следовало бы провести путем многочисленных последовательных приближений. Если эти дальнейшие приближения не предпринимаются в систематически упорядоченной последовательности, то задача представляется безнадежно сложной.

Метод использования канонических переменных дает возможность действовать систематически посредством ряда последовательных канонических преобразований. Фактически это было проделано Делонэ для основной задачи теории Луны. Решение Делонэ представляет собой наиболее совершенное аналитическое решение этой проблемы. Принципы его метода объясняются в гл. XVII.

Теория Делонэ подтверждает предположение, к которому приводят знакомство с первым приближением, что элементы могут быть выра-

жены в следующем виде:

$$a = a_0 + \text{косинусоидальные члены},$$

$$e = e_0 + \text{косинусоидальные члены},$$

$$\gamma = \gamma_0 + \text{косинусоидальные члены},$$

$$\lambda = nt + e_0 + \text{синусоидальные члены} = \bar{\lambda} + \text{синусоидальные члены},$$

$$\tilde{\omega} = (1 - c)nt + \tilde{\omega}_0 + \text{синусоидальные члены} = \tilde{\omega} + \text{синусоидальные члены},$$

$$\Omega = (1 - g)nt + \Omega_0 + \text{синусоидальные члены} = \bar{\Omega} + \text{синусоидальные члены}.$$

Символы a_0 , e_0 , γ_0 , $\tilde{\omega}_0$, Ω_0 означают произвольные постоянные, тогда как n , также будучи постоянной, означает среднее сидерическое движение Луны. Значения c и g должны быть получены из теории как функции от $m = n'/n$, e^2 , e'^2 , a_0/a' и γ_0^2 . Штрихованные величины представляют элементы орбиты Солнца, рассматриваемые как постоянные. Если $\lambda' = n't + e'$ есть средняя долгота Солнца, то аргументы периодических членов могут быть выражены в следующей форме:

$$p_1(\bar{\lambda} - \lambda') + p_2(\bar{\lambda} - \tilde{\omega}) + p_3(\lambda' - \tilde{\omega}') + p_4(\bar{\lambda} - \bar{\Omega}),$$

или, в обозначениях Делонэ,

$$p_1D + p_2l + p_3l' + p_4F.$$

Коэффициенты периодических членов получаются в виде степенных рядов, расположенных по степеням m , e_0^2 , e'^2 , γ_0^2 , $(a_0/a')^2$. С точностью до числового множителя главный член коэффициента любого периодического члена равен

$$m^{q_1} e_0^{q_2} e'^{q_3} \left(\frac{a_0}{a'} \right)^{q_4} \gamma_0^{q_5}.$$

В ходе интегрирования может понизиться порядок относительно m , но это не произойдет с порядками относительно e_0 , e' , a_0/a' или γ_0 . Поэтому в выражениях для элементов сохраняется связь между показателями степени q главного коэффициента и кратностями p в аргументе, аналогичная связи, имеющей место для членов возмущающей функции. Следует учитывать это понижение порядка относительно e в правых частях уравнений (18) для de/dt и $d\tilde{\omega}/dt$ и относительно γ в правых частях уравнений (18) для $d\gamma/dt$ и $d\Omega/dt$.

Наконец, сферические координаты Луны получаются в следующей форме:

$$\begin{aligned} \psi &= nt + \text{const} + \\ &+ \sum A \sin [p_1D + p_2l + p_3l' + 2p_4F], \end{aligned}$$

$$\beta = \sum B \sin [p_1D + p_2l + p_3l' + (2p_4 + 1)F],$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{r} &= \text{const} + \\ &+ \sum C \cos [p_1D + p_2l + p_3l' + 2p_4F] \end{aligned}$$

соответственно для истинных эквипараллакса. Здесь были использованы те же обозначения для коэффициентов p_1, \dots, p_4 , что и в аргументах возмущающей функции в разд. 4 этой главы. Коэффициенты A , B , C получаются в виде степенных рядов по m , e , e' , γ и a/a' . Между степенями параметров e , e' , γ , a/a'

и коэффициентами p_1, p_2, p_3, p_4 соответственно существует в точности такая же связь, как и в возмущающей функции. Как было отмечено в случаях, рассмотренных в разд. 9—14, наименьшая степень параметра m , встречающаяся в коэффициентах в качестве множителя, обычно равна 2; этот порядок может быть понижен до 1, если $p_1 = 0$, и до 0, если $p_1 = p_3 = 0$. Отрицательные степени m не встречаются.

В теории движения Луны по соображениям, связанным с наблюдениями, обычно определяют лунный параллакс, а не радиус-вектор. С другой стороны, также по причинам, обусловленным наблюдениями, в теориях остальных спутников определяется радиус-вектор.

16. Комментарий к теориям Делонэ и Ганзена. Главным недостатком метода Делонэ является медленная сходимость разложений коэффициентов по степеням отношения $m = n'/n$. Что же касается параметров e, e' , γ и a/a' , то сходимость разложений по степеням этих параметров, как правило, удовлетворительна. Особенно наглядный пример медленной сходимости по степеням m представляет собой главная часть движения перигея, однако многие периодические члены также обладают коэффициентами, которые сходятся столь же медленно. Этот же упрек относится, конечно, ко всем остальным методам, в которых результаты получаются в виде буквенных разложений по степеням m . Хилл заметил, что в случае движения перигея сходимость улучшается, если разложение ведется по степеням величины $m = m/(1-m)$, но это не устраняет указанную трудность полностью.

Преимущество сохранения m или n'/n в буквенном виде состоит в том, что решение основной проблемы может быть использовано для получения солнечных возмущений в движении любого спутника при помощи подстановки соответствующих значений постоянных. Поэтому решение Делонэ применялось для получения солнечных возмущений для спутников, как, например, для VI и VII спутников Юпитера и спутника Сатурна Фебы. Для этих спутников значения n'/n того же порядка, что и для Луны. С другой стороны, e и γ значительно больше, чем соответствующие постоянные для орбиты Луны. Ввиду того что для представления планетоцентрического движения этих спутников требуется гораздо меньшая точность, чем для Луны, представление при помощи теории Делонэ в общем достаточно для таких приложений.

Более трудным является применение метода Делонэ к орбитам VIII, IX и XI спутников Юпитера, для которых отношение n'/n приблизительно вдвое больше, чем для Луны; кроме того, значительно большими являются значения e и γ . Сходимость рядов, расположенных по степеням n'/n , для движения перицентра и для коэффициентов большинства периодических членов чрезвычайно медленна. Только путем эмпирической экстраполяции рядов Делонэ представляется возможным получить некоторые полезные результаты¹⁾.

Влияние медленной сходимости разложений по степеням n'/n было преодолено в теории Ганзена движения Луны введением с самого начала численных значений для всех параметров, которые входят в основную задачу. Таблицы, основанные на теории Ганзена, были введены для вычисления эфемериды Луны в астрономических ежегод-

1) E. W. Brown, Astron. J., 35, 1 (1923).

никах в 1862 г. Улучшение по сравнению с предшествующими теориями было огромным; тем не менее представляется сомнительным, является ли метод Ганзена особенно подходящим для лунной проблемы. Этот метод представляет собой приспособление планетного метода Ганзена, достоинства которого для определения взаимных возмущений планет получили общее признание, однако для лунной проблемы это приспособление до некоторой степени является просто ловким трюком. Прекрасные результаты, полученные Ганзеном при помощи его теории движения Луны, следует скорее отнести за счет исключительных способностей самого Ганзена, чем приписать высокому качеству избранного им метода.

17. Вводные замечания к работе Хилла «Researches in the Lunar Theory». Новый подход к решению лунной проблемы был сделан Хиллом, который избрал путь вычисления солнечных возмущений в движении Луны в прямоугольных координатах, вращающихся равномерно с угловой скоростью, равной среднему движению Солнца. Имеется некоторое сходство между методом Хилла и методом Эйлера в его второй теории Луны, опубликованной в 1772 г., однако Эйлер использовал систему координат, вращающуюся со средней угловой скоростью Луны.

Значительные преимущества вычисления возмущений в координатах, а не в элементах, заключаются в следующем:

1. Разложение возмущающей функции по элементам становится ненужным.

2. Возмущения получаются в форме, более пригодной для непосредственного применения к вычислениям эфемерид. Если используются прямоугольные координаты, то в конце вычислений производится преобразование к полярным координатам, но это представляет собой небольшую задачу по сравнению с тем общим количеством труда, с которым связано построение теории движения Луны.

Хилл выбирает прямоугольные координаты, а не полярные, так как дифференциальные уравнения в этом случае выражаются в чисто алгебраическом виде. Если используются полярные координаты, то почти немедленно появляются тригонометрические функции. Хилл также замечает, что в эллиптическом движении прямоугольные координаты выражаются через среднюю аномалию гораздо более простыми рядами, чем полярные координаты. Затем он продолжает: «Если это верно в эллиптической теории, то насколько более вероятной является справедливость аналогичного факта в том случае, когда сложность проблемы увеличивается вследствие рассмотрения возмущающих сил?»

Важная особенность метода Хилла состоит в том, что его применение начинается с получения тех возмущений в движении Луны, которые зависят только от отношения n'/n . Чтобы получить дифференциальные уравнения, которые определяют эти возмущения, вводятся следующие упрощения первоначальных уравнений:

а) Возмущающая функция ограничивается частью R_1 , что равносильно отбрасыванию тех членов R , которые содержат множителем отношение a/a' и его более высокие степени.

б) Третья координата z положена равной нулю. Поэтому все члены, имеющие множителем синус наклонности орбиты Луны γ , отбрасываются.

в) Орбита Солнца относительно центра масс системы Земля — Луна считается круговой. Поэтому исключаются члены, содержащие множителем эксцентриситет орбиты Солнца.

Уравнения, которые получаются после таких упрощений, должны дать возможность определить все члены в движении Луны, зависящие от обоих параметров $m = n'/n$ и e . Исключение членов, зависящих от e , может быть осуществлено лишь разысканием некоторого частного решения этих дифференциальных уравнений. Это частное решение является периодическим решением; оно представляет собой основу метода Хилла.

18. Уравнения Хилла для движения Луны. Если введены упрощения, перечисленные в пунктах (а), (б) и (в), то из уравнений (1) и (8) в прямоугольной системе координат с началом в центре Земли и неподвижными осями вытекают следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R_1}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R_1}{\partial y},\end{aligned}\quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}\mu &= k^2(E + M), \\ R_1 &= n'^2 r^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 S \right).\end{aligned}\quad (39)$$

Плоскость xy совпадает с плоскостью эклиптики, считаемой неподвижной.

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью n' , с осью X , постоянно направленной в сторону Солнца, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^2} - 2n' \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial X}, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2n' \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial Y},\end{aligned}\quad (40)$$

где

$$F = \frac{\mu}{r} + \frac{n'^2}{2} (X^2 + Y^2) + R_1. \quad (40a)$$

В такой вращающейся системе координат $r \cos S = X$; следовательно,

$$\begin{aligned}R_1 &= n'^2 \left(-\frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} Y^2 + \frac{3}{2} X^2 \right) = \\ &= n'^2 \left(+X^2 - \frac{1}{2} Y^2 \right), \\ F &= \frac{\mu}{r} + \frac{3}{2} n'^2 X^2.\end{aligned}\quad (41)$$

Поэтому уравнения можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dt^2} - 2n' \frac{dY}{dt} + \frac{\mu X}{r^3} - 3n'^2 X &= 0, \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + 2n' \frac{dX}{dt} + \frac{\mu Y}{r^3} &= 0.\end{aligned}\quad (42)$$

Эти уравнения в высшей степени просты; тем не менее их общее решение содержит все те члены в решении основной задачи теории Луны, которые зависят от m и e .

Чтобы получить решение, которое зависит только от t , предположим, что начальные условия при $t=0$ имеют вид

$$X(0) = a, \quad \dot{X}(0) = 0,$$

$$Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = b;$$

т. е. при $t=0$ Луна находится в соединении с Солнцем и во вращающейся системе координат имеет скорость, перпендикулярную к прямой, соединяющей Землю и Солнце. Если теперь переменить знаки Y и t на обратные, оставляя неизменным знак X , то дифференциальные уравнения остаются без изменения. Поэтому в решении с указанными начальными условиями X будет четной функцией от t , а Y — нечетной функцией от t . Эти дифференциальные уравнения также не изменяются, если переменить знаки X и t на обратные, оставляя неизменным знак Y . Поэтому, если при данных начальных значениях орбита должна пересекать ось Y под прямым углом, то она должна быть замкнутой кривой во вращающейся системе координат и симметричной относительно обеих осей. Это частное решение называется вариационной орбитой или вариационной кривой.

Пуанкаре показал, что такие решения вообще существуют, так что для любого заданного значения $X(0) = a$ можно найти значение $\dot{Y}(0) = b$, которое дает периодическое решение указанного типа. В орбите такого рода, если $P = 2\pi/\nu$ — период, выражения для X и Y будут с необходимостью иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= A_0 \cos \nu(t - t_0) + A_1 \cos 3\nu(t - t_0) + A_2 \cos 5\nu(t - t_0) + \dots, \\ Y &= B_0 \sin \nu(t - t_0) + B_1 \sin 3\nu(t - t_0) + B_2 \sin 5\nu(t - t_0) + \dots, \end{aligned} \quad (43)$$

где t_0 — момент соединения Луны и Солнца. В эти выражения входят только нечетные кратности угла $\nu(t - t_0)$, чтобы удовлетворить условиям вида

$$\begin{aligned} X_{\nu(t-t_0)=\pi} &= -X_{\nu(t-t_0)=0}, \\ Y_{\nu(t-t_0)=3\pi/2} &= -Y_{\nu(t-t_0)=\pi/2}. \end{aligned}$$

Период $P = 2\pi/\nu$ должен равняться среднему синодическому периоду обращения Луны относительно Солнца. Следовательно,

$$\nu = n - n'.$$

Выбирая теперь $\nu(t - t_0) = \tau$ в качестве независимой переменной и полагая

$$m = \frac{n'}{n - n'},$$

приводим уравнения к следующему виду:

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} - 2m \frac{dY}{d\tau} + \left(\frac{\kappa}{r^3} - 3m^2 \right) X = 0, \quad (44a)$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} + 2m \frac{dX}{d\tau} + \frac{\kappa}{r^3} Y = 0, \quad (44b)$$

в которых

$$\kappa = \frac{\mu}{\nu^2} = \frac{\mu}{(n - n')^2}.$$

Уравнения (40) с F , определяемой формулой (40а), имеют ту же форму, что и уравнения для ограниченной задачи трех тел. Поскольку F является функцией только от X и Y , то эти уравнения обладают интегралом Якоби, получаемым умножением уравнений (40) соответственно на dX/dt , dY/dt и последующим сложением и интегрированием. Поэтому интеграл Якоби для уравнений (40) равен

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 \right] - F = C', \quad (45)$$

где C' — постоянная интегрирования. В применении к уравнениям (42) этот интеграл принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} - \frac{3}{2} n'^2 X^2 = C', \quad (46)$$

тогда как уравнения (44) дают

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau} \right)^2 \right] - \frac{\kappa}{r} - \frac{3}{2} m^2 X^2 = C, \quad (47)$$

где $C' = v^2 C$.

Численное решение, соответствующее данным значениям m и κ , можно получить последовательными пробами при численном интегрировании уравнений (44). Однако представляет интерес получить решение, в котором параметр m сохраняется в буквенном виде. Присутствие членов с множителем κr^{-3} составляет главную трудность этой задачи, но при помощи интеграла Якоби эти члены могут быть исключены. Результат этого исключения получается в виде следующих двух уравнений:

$$X \frac{d^2X}{d\tau^2} + Y \frac{d^2Y}{d\tau^2} - 2m \left(X \frac{dY}{d\tau} - Y \frac{dX}{d\tau} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau} \right)^2 \right] - \frac{9}{2} m^2 X^2 = C, \quad (48a)$$

$$Y \frac{d^2X}{d\tau^2} - X \frac{d^2Y}{d\tau^2} - 2m \left(X \frac{dX}{d\tau} + Y \frac{dY}{d\tau} \right) - 3m^2 XY = 0. \quad (48b)$$

Первое из этих уравнений имеет вид (44а) $X +$ (44б) $Y +$ (47), а второе — (44а) $Y -$ (44б) X .

Уравнения (48) не совсем равносильны уравнениям (44), поскольку исчез параметр κ . Однако эти новые уравнения однородны, если не обращать внимания на присутствие C в правой части уравнения (48а). Поэтому, если $X(\tau)$, $Y(\tau)$ есть решение при $C = C_0$, то $\lambda X(\tau)$, $\lambda Y(\tau)$ при произвольном λ будет решением при $C = \lambda^2 C_0$. Поэтому соответствующая процедура состоит в получении периодического решения уравнений (48) для любого подходящего значения C и в использовании затем любого из трех уравнений (44а), (44б) или (47) для определения численного значения λ для конкретной спутниковой проблемы. Это равносильно утверждению, что для любого наперед заданного значения параметра m все сведения об этом периодическом решении, за исключением размеров орбиты, получаются из уравнения (48). Чтобы определить размеры, необходимо прибегнуть к помощи уравнения, содержащего κ .

19. Введение u и s . Как и во многих задачах, в которых используются тригонометрические ряды, удобнее пользоваться показатель-

ними функциями. Поэтому, обозначая через i мнимую единицу, положим

$$u = X + iY, \quad s = X - iY,$$

или

$$X = \frac{u+s}{2}, \quad Y = \frac{u-s}{2i},$$

и

$$D = \frac{d}{id\tau}.$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$X^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2us + s^2),$$

$$Y^2 = -\frac{1}{4}(u^2 - 2us + s^2),$$

$$XY = us,$$

$$XY = -\frac{i}{4}(u^2 - s^2),$$

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{i}{2} D(u + s),$$

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{i}{2} D(u - s),$$

$$X \frac{dX}{d\tau} + Y \frac{dY}{d\tau} = \frac{i}{2}(sDu + uDs),$$

$$X \frac{dY}{d\tau} - Y \frac{dX}{d\tau} = \frac{1}{2}(sDu - uDs),$$

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = -DuDs,$$

$$\frac{d^2X}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} D^2(u + s),$$

$$\frac{d^2Y}{d\tau^2} = \frac{i}{2} D^2(u - s),$$

$$X \frac{d^2X}{d\tau^2} + Y \frac{d^2Y}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}(sD^2u + uD^2s),$$

$$X \frac{d^2Y}{d\tau^2} - Y \frac{d^2X}{d\tau^2} = \frac{i}{2}(sD^2u - uD^2s).$$

Тогда уравнения (48) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(sD^2u + uD^2s) + m(sDu - uDs) + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{8}m^2(u^2 + 2us + s^2) &= -C, \\ \frac{1}{2}(sD^2u - uD^2s) + m(sDu + uDs) - \frac{3}{4}m^2(u^2 - s^2) &= 0. \end{aligned} \quad (49a)$$

Складывая и вычитая эти уравнения, мы получаем

$$\begin{aligned} sD^2u + 2msDu + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{4}m^2us &= -\frac{1}{8}m^2(3u^2 + 15s^2) - C, \\ uD^2s - 2muDs + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{4}m^2us &= -\frac{1}{8}m^2(15u^2 + 3s^2) - C. \end{aligned} \quad (49b)$$

Уравнения (44) и интеграл Якоби, выраженные через u , s и D , принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D^2u + 2mu - \kappa u^{-1/2}s^{-3/2} + \frac{3}{2}m^2(u + s) &= 0, \\ D^2s - 2mu - \kappa u^{-3/2}s^{-1/2} + \frac{3}{2}m^2(u + s) &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\frac{1}{2}DuDs + \kappa u^{-1/2}s^{-1/2} + \frac{3}{8}m^2(u + s)^2 = -C. \quad (51)$$

Введем

$$\exp i\tau = \zeta$$

и заметим, что

$$D = \zeta \frac{d}{d\zeta},$$

$$D\zeta^k = \frac{d}{id\tau} \exp kit = k\zeta^k.$$

Введение D исключило мнимую единицу из уравнений (49) и (50), а также из интеграла Якоби (51); D также является особо удобным в качестве дифференциального оператора, действующего на степенные ряды, выраженные через положительные и отрицательные степени ζ .

Мы ищем решение уравнений (49) в следующем виде:

$$u = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \zeta^{2j+1},$$

$$s = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \zeta^{-2j-1} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{-j-1} \zeta^{2j+1}, \quad (52)$$

откуда следует, что

$$X = \frac{u+s}{2} = (a_0 + a_{-1}) \cos \tau + (a_1 + a_{-2}) \cos 3\tau + (a_2 + a_{-3}) \cos 5\tau + \dots, \quad (53)$$

$$Y = \frac{u-s}{2i} = (a_0 - a_{-1}) \sin \tau + (a_1 - a_{-2}) \sin 3\tau + (a_2 - a_{-3}) \sin 5\tau + \dots.$$

Сравнение с выражениями (43) немедленно доказывает эквивалентность разложений (43) и (52).

20. Решение относительно u и s по степеням m . В изложении работы Хилла, данном Пуанкаре, уравнения (49) записываются в виде

$$sD^2u + 2psDu + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{4}p^2us = -\frac{1}{8}m^2(3u^2 + 15s^2) - C, \quad (54)$$

$$uD^2s - 2puDs + \frac{1}{2}DuDs + \frac{9}{4}p^2us = -\frac{1}{8}m^2(15u^2 + 3s^2) - C,$$

т. е. в левой части m заменено на p . Поскольку в уравнения входит только квадрат параметра m , мы можем предполагать, что решение уравнений (54) будет разложено по степеням m^2 ; в окончательном результате необходимо p заменить на m .

Искомое решение можно представить в следующем виде:

$$u = (u_0 + u_1 m^2 + \dots + u_q m^{2q} + \dots) \zeta \equiv U\zeta,$$

$$s = (s_0 + s_1 m^2 + \dots + s_q m^{2q} + \dots) \zeta^{-1} \equiv S\zeta^{-1}, \quad (55)$$

$$C = C_0 + C_1 m^2 + \dots + C_q m^{2q} + \dots.$$

Подстановка в уравнения (54) дает

$$SD^2U + \frac{1}{2}DUDS + \left(\frac{3}{2} + 2p\right)SDU + \frac{1}{2}UDS + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right)US =$$

$$= -\frac{m^2}{8}(3U^2\zeta^2 + 15S^2\zeta^{-2}) - C, \quad (56)$$

$$UD^2S + \frac{1}{2}DUDS - \frac{1}{2}SDU - \left(\frac{3}{2} + 2p\right)UDS + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4}p^2\right)US =$$

$$= -\frac{m^2}{8}(15U^2\zeta^2 + 3S^2\zeta^{-2}) - C.$$

Теперь процедура состоит в подстановке вместо U и S рядов (55) по степеням m^2 и в последовательном приравнивании членов, имеющих m^0 , m^2 , m^4 , ... множителем. Ввиду того что u и s являются комплексными сопряженными величинами, таковыми также будут U , S и u_0 , s_0 , u_1 , s_1 и т. д.

Члены, содержащие множителем m^0 , дают из любого из двух уравнений (56)

$$C_0 = -\left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2\right) u_0 s_0.$$

Однако можно положить $u_0 = s_0 = \pm 1$. При этом предположении

$$C_0 = -\frac{1}{2} - 2p - \frac{9}{4} p^2.$$

Далее мы полагаем

$$U = 1 + m^2 u_1, \quad S = 1 + m^2 s_1$$

и удергиваем только те члены в левых и правых частях уравнений (56), которые имеют множителем m^2 . В результате получаются уравнения вида

$$\begin{aligned} D^2 u_1 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right) Du_1 + \frac{1}{2} Ds_1 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2\right) (u_1 + s_1) &= \\ &= -\frac{3}{8} \zeta^2 - \frac{15}{8} \zeta^{-2}, \\ D^2 s_1 - \frac{1}{2} Du_1 - \left(\frac{3}{2} + 2p\right) Ds_1 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2\right) (u_1 + s_1) &= \\ &= -\frac{15}{8} \zeta^2 - \frac{3}{8} \zeta^{-2}. \end{aligned} \tag{57}$$

Нам необходимо только частное решение

$$u_1 = \xi_1 \zeta^2 + \eta_1 \zeta^{-2}, \quad s_1 = \eta_1 \zeta^2 + \xi_1 \zeta^{-2} \tag{58}$$

этих уравнений. Очевидно также, что $C_1 = 0$.

Прежде чем заняться вычислением ξ_1 и η_1 как функций от p , целесообразно рассмотреть составление уравнений для следующего шага в этой процедуре. Мы должны в таком случае подставить в (56)

$$U = 1 + m^2 u_1 + m^4 u_2, \quad S = 1 + m^2 s_1 + m^4 s_2$$

и собрать те члены, которые имеют множителем m^4 . Вместе с тем очевидно, что u_2 и s_2 войдут точно таким же образом, каким u_1 и s_1 входят в левые части уравнений (57). Остальные члены в левой части состоят из произведений функций u_1 , s_1 и их первых и вторых производных. Эти величины становятся известными функциями от ζ и переносятся в правую сторону, объединяясь с членами правых частей уравнений (56), содержащими множитель m^4 . Уравнения для u_2 и s_2 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D^2 u_2 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right) Du_2 + \frac{1}{2} Ds_2 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2\right) (u_2 + s_2) &= \\ &= -\left[s_1 D^2 u_1 + \frac{1}{2} Du_1 Ds_1 + \left(\frac{3}{2} + 2p\right) s_1 Du_1 + \frac{1}{2} u_1 Ds_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2\right) u_1 s_1\right] - \frac{3}{4} u_1 \zeta^2 - \frac{15}{4} s_1 \zeta^{-2} - C_2, \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} D^2s_2 - \frac{1}{2} Du_2 - \left(\frac{3}{2} + 2p \right) Ds_2 + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right) (u_2 + s_2) = \\ = - \left[u_1 D^2s_1 + \frac{1}{2} Du_1 Ds_1 - \frac{1}{2} s_1 Du_1 - \left(\frac{3}{2} + 2p \right) u_1 Ds_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right) u_1 s_1 \right] - \frac{15}{4} u_1 \zeta^2 - \frac{3}{4} s_1 \zeta^{-2} - C_2. \end{aligned}$$

Ввиду характера функций u_1 , s_1 , определяемых выражениями (58), правые части уравнений (59) должны быть вида

$$\begin{aligned} a_4 \zeta^4 + a_0 \zeta^0 + a_{-4} \zeta^{-4} - C_2, \\ a_{-4} \zeta^4 + a_0 \zeta^0 + a_4 \zeta^{-4} - C_2, \end{aligned}$$

где a_4 , a_0 , a_{-4} являются известными функциями от p , как только определены u_1 , s_1 .

Имеются две возможности для определения постоянных членов в правых частях уравнений (59). Мы можем положить $C_2 = 0$ и вычислить члены в u_2 , s_2 , имеющие множителем ζ^0 , из уравнения

$$\left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right) (u_2 + s_2)_0 = a_0, \quad (u_2)_0 = (s_2)_0, \quad (60)$$

или же мы можем положить $(u_2)_0 = (s_2)_0 = 0$ и вычислить C_2 из

$$C_2 = a_0.$$

Хилл выбирает последнюю возможность; это относится и ко всем дальнейшим приближениям.

Теперь ясно, какую форму будут иметь уравнения при дальнейших приближениях. Левые части будут одинаковы во всех приближениях. Что же касается членов в правых частях этих уравнений, то они представляют собой следующие степени ζ :

Члены с m^0	ζ^0
Члены с m^2	ζ^2
Члены с m^4	ζ^4
Члены с m^6	ζ^6
	ζ^0
	ζ^{-2}
	ζ^{-4}
	ζ^{-6}

Этот процесс можно продолжать неограниченно. Члены, известные из предшествующих приближений и перенесенные в правые части, непременно становятся все сложнее по мере того, как мы переходим к более высоким степеням m^2 , однако этот процесс быстро сходится для достаточно малых значений m .

21. Результаты для вариационной орбиты. Из предыдущего рассмотрения очевидно, что на любом шаге этой процедуры мы должны будем получить частные решения следующих линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} D^2u_q + \left(\frac{3}{2} + 2p \right) Du_q + \frac{1}{2} Ds_q + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right) (u_q + s_q) = \\ = \sum_k (\alpha_k \zeta^{2k} + \beta_k \zeta^{-2k}), \quad (61) \\ D^2s_q - \frac{1}{2} Du_q - \left(\frac{3}{2} + 2p \right) Ds_q + \left(\frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right) (u_q + s_q) = \\ = \sum_k (\beta_k \zeta^{2k} + \alpha_k \zeta^{-2k}) \end{aligned}$$

а виде

$$u_q = \sum_k (\xi_k \zeta^{2k} + \eta_k \zeta^{-2k}), \quad s_q = \sum_k (\eta_k \zeta^{2k} + \xi_k \zeta^{-2k}), \quad (62)$$

где ξ_k , η_k необходимо определить как функции от p . Далее, было установлено, что для любого значения q значение k не больше q и что вместе с нечетными значениями k входят только нечетные значения q , а четные значения k — вместе с четными значениями q . Частный случай $k=0$ уже был исключен из рассмотрения. Наконец, поскольку уравнения линейны, то решение уравнений (61) можно рассматривать отдельно для каждого значения k .

Поэтому мы представляем единственную пару членов

$$\xi_k \zeta^{2k} + \eta_k \zeta^{-2k} \text{ вместо } u_q,$$

$$\eta_k \zeta^{2k} + \xi_k \zeta^{-2k} \text{ вместо } s_q$$

в уравнения (61) и приравниваем коэффициенты при ζ^{2k} и ζ^{-2k} . Ввиду того что u_q и s_q — сопряженные комплексные величины, достаточно любого из этих двух уравнений. Отсюда следует

$$\left[4k^2 + 2k \left(\frac{3}{2} + 2p \right) + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right] \xi_k + \left[k + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right] \eta_k = \alpha_k, \quad (63)$$

$$\left[-k + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right] \xi_k + \left[4k^2 - 2k \left(\frac{3}{2} + 2p \right) + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2 \right] \eta_k = \beta_k,$$

или

$$\begin{aligned} A(k) \xi_k + B(k) \eta_k &= \alpha_k, \\ B(-k) \xi_k + A(-k) \eta_k &= \beta_k, \end{aligned} \quad (64)$$

где для краткости обозначено

$$\begin{aligned} A(k) &= 4k^2 + 2k \left(\frac{3}{2} + 2p \right) + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2, \\ B(k) &= k + \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{A(-k)}{\Delta} \alpha_k - \frac{B(k)}{\Delta} \beta_k, \\ \eta_k &= \frac{-B(-k)}{\Delta} \alpha_k + \frac{A(k)}{\Delta} \beta_k, \end{aligned} \quad (66)$$

где Δ — определитель, составленный из коэффициентов. Если мы положим

$$P = \frac{3}{2} + 2p, \quad Q = \frac{1}{2} + 2p + \frac{9}{4} p^2,$$

то

$$\begin{aligned} \Delta &= (4k^2 + 2kP + Q)(4k^2 - 2kP + Q) + k^2 - Q^2 = \\ &= 16k^4 + k^2(8Q - 4P^2 + 1) = \\ &= 16k^4 + k^2(-4 - 8p + 2p^2) = \\ &= 2k^2(8k^2 - 2 - 4p + p^2). \end{aligned} \quad (67)$$

Таблица 3 дает функции, необходимые для вычисления коэффициентов при α_k , β_k в уравнениях (66) для $k = 1, 2, 3, 4$. В этих выражениях p заменено на m .

Таблица 3

Функции для уравнений (66)

	$\Delta(k)$	$\frac{A(-k)}{-B(-k)}$	$\frac{-B(k)}{A(k)}$
$k=1$	$2(6-4m+m^2)$	$-\frac{3}{2}-2m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{3}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{1}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{15}{2}+6m+\frac{9}{4}m^2$
$k=2$	$8(30-4m+m^2)$	$+\frac{21}{2}-6m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{5}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{3}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{45}{2}+10m+\frac{9}{4}m^2$
$k=3$	$18(70-4m+m^2)$	$+\frac{55}{2}-10m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{7}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{5}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{91}{2}+14m+\frac{9}{4}m^2$
$k=4$	$32(126-4m+m^2)$	$+\frac{105}{2}-14m+\frac{9}{4}m^2$	$-\frac{9}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$
		$+\frac{7}{2}-2m-\frac{9}{4}m^2$	$+\frac{153}{2}+18m+\frac{9}{4}m^2$

Решение уравнений (57) относительно u_1, s_1 при

$$a_1 = -\frac{3}{8}, \quad \beta_1 = -\frac{15}{8},$$

с использованием функций для $k=1$ из приведенной выше таблицы, мы получаем после некоторых упрощений в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= +\frac{9}{16} \frac{2+4m+3m^2}{6-4m+m^2} \zeta^2 - \frac{3}{16} \frac{38+28m+9m^2}{6-4m+m^2} \zeta^{-2}, \\ s_1 &= -\frac{3}{16} \frac{38+28m+9m^2}{6-4m+m^2} \zeta^2 + \frac{9}{16} \frac{2+4m+3m^2}{6-4m+m^2} \zeta^{-2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Возвращаясь теперь к разложениям (52) и (55), легко видеть, что решение пока дало

$$\begin{aligned} a_0 &= +1, \\ a_1 &= +\frac{9}{16} m^2 \frac{2+4m+3m^2}{6-4m+m^2} = +\frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{7}{12} m^4 + \frac{11}{36} m^5 + \dots, \\ a_{-1} &= -\frac{3}{16} m^2 \frac{38+28m+9m^2}{6-4m+m^2} = -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \frac{43}{36} m^4 - \frac{14}{27} m^5 + \dots. \end{aligned} \quad (69)$$

Эти ряды сходятся быстро; знаменатель $6-4m+m^2=\Delta(1)$ имеет корни $2 \pm i\sqrt{2}$, что дает радиус сходимости, равный $\sqrt{6}$. Кроме того, в разложении по степеням m написаны полностью все члены до пятой степени m , так как следующие слагаемые вида (68) порождаются членами u_3, s_3 , имеющими множитель m^6 .

Получив решение (68) относительно u_1, s_1 , мы можем перейти теперь к разысканию функций u_2, s_2 при помощи уравнений (59). В этом решении появляется делитель $30-4m+m^2=\Delta(2)$, умноженный на пер-

вую степень или квадрат делителя $\Delta(1)$. Будучи разложенным по степеням m , это решение даст a_2 и a_{-2} , начинающиеся с

$$\begin{aligned} a_2 &= +\frac{25}{256} m^4 + \frac{803}{1920} m^5 + \dots, \\ a_{-2} &= 0 \cdot m^4 + \frac{23}{640} m^5 + \dots. \end{aligned} \tag{70}$$

Еще четыре степени m получены за один шаг.

Хилл получил буквенное решение для вариационной орбиты с точностью до девятой степени m . Это требует продолжения приближений до a_4 , s_4 .

Эта процедура пригодна в равной степени для определения численных значений коэффициентов, если в самом начале принято численное значение для параметра m . Хилл провел такое численное решение с пятнадцатью десятичными знаками. Приняв

$$m = 0,08084\ 89338\ 08312,$$

он получил коэффициенты, выписанные в табл. 4.

При помощи формулы (53) можно теперь немедленно написать ряды для X и Y ; они приводятся в табл. 5.

Таблица 5
Ряды для X и Y

Таблица 4
Решение Хилла

	$\frac{X}{a} = + 0,99130\ 42530\ 38460 \cos \tau$
$a_0 = + 1,00000\ 00000\ 00000$	+
$a_1 = + 0,00151\ 57074\ 79563$	+
$a_{-1} = - 869\ 57469\ 61540$	+
$a_2 = + 58786\ 56578$	+
$a_{-2} = + 1637\ 90486$	+
$a_3 = + 300\ 31632$	+
$a_{-3} = + 24\ 60393$	+
$a_4 = + 1\ 75268$	+
$a_{-4} = + 12284$	+
$a_5 = + 1107$	+
$a_{-5} = + 64$	+
$a_6 = + 7$	+
$a_{-6} = + 0$	+

	$\frac{Y}{a} = + 1,00869\ 57469\ 61540 \sin \tau$
	+
	151 58712 70049 $\cos 3\tau$
	58811 16971 $\cos 5\tau$
	300 43916 $\cos 7\tau$
	1 75332 $\cos 9\tau$
	1107 $\cos 11\tau$
	7 $\cos 13\tau$
	+
	151 55436 89077 $\sin 3\tau$
	58761 96185 $\sin 5\tau$
	300 19348 $\sin 7\tau$
	1 75204 $\sin 9\tau$
	1107 $\sin 11\tau$
	7 $\sin 13\tau$

22. Масштабный множитель a . Масштабный множитель a , введенный в выражения для X и Y , соответствует множителю λ , введенному в разд. 18. В невоамущенном движении среднее расстояние, которое отвечает наблюденному сидерическому среднему движению, связано с последним посредством следующего соотношения:

$$\mu = k^2(E + M) = n^2 a^3,$$

или

$$\kappa = \frac{\mu}{(n - n')^2} = \left(\frac{n}{n - n'} \right)^2 a^3 = (1 + m)^2 a^3.$$

Мы подставляем это выражение вместо κ в любое из двух уравнений (50) или в уравнение (51). Выберем первое из уравнений (50), которое

можно написать в виде

$$D^2u + 2m D u + \frac{3}{2} m^2 (u + s) = (1 + m)^2 \frac{a^3}{r^3} u. \quad (71)$$

Это уравнение должно стать тождеством, если подставить решение для любого значения ζ , например $\zeta = +1$. Для этого частного значения ζ имеем

$$\begin{aligned} u &= s = r = a \sum a_j, \\ Du &= a \sum (2j+1) a_j, \\ D^2u &= a \sum (2j+1)^2 a_j, \end{aligned}$$

и уравнение (71) принимает вид

$$a \sum [(2j+1)^2 + 2(2j+1)m + 3m^2] a_j = (1+m)^2 \frac{a^3}{a^2 (\sum a_j)^2},$$

или

$$\left(\frac{a}{a}\right)^3 = \frac{(1+m)^2}{(\sum a_j)^2 \sum [(2j+1)^2 + 2(2j+1)m + 3m^2] a_j}. \quad (72)$$

Как это всегда имеет место при употреблении комплексных координат, суммирования необходимо распространить от $-\infty$ до $+\infty$. Данные $a_0 = +1$ и a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2} , определяемые формулами (69) и (70), достаточны для разложения выражения (72) по степеням m до m^5 включительно. С точностью до третьей степени m имеем

$$\begin{aligned} \sum a_j &= 1 - m^2 - \frac{7}{6} m^3 + \dots, \\ \left(\sum a_j\right)^2 &= 1 - 2m^2 - \frac{7}{3} m^3 + \dots, \\ \sum [(2j+1)^2 + 2(2j+1)m + 3m^2] a_j &= 1 + 2m + \frac{7}{2} m^2 + \frac{19}{3} m^3 + \dots. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a}\right)^3 &= \frac{(1+m)^2}{1 + 2m + \frac{7}{2} m^2 + 0 \cdot m^3} = 1 - \frac{1}{2} m^2 + m^3 + \dots, \\ \frac{a}{a} &= 1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \dots. \end{aligned} \quad (73)$$

С принятым значением m Хилл дает следующий численный результат для орбиты Луны:

$$\frac{a}{a} = 0,99909\ 31419\ 75298.$$

Поскольку $m^2 = m^2 + 2m^3$, легко видеть, что полученное в разд. 13 уравнение (35) согласуется с точностью до m^2 с результатом, полученным здесь при помощи совершенно другой методики.

23. Преобразование уравнений. Вариационная орбита, рассмотренная в разд. 17 – 22 этой главы, содержит две произвольные постоянные — m и фазовую постоянную ϵ в комбинации

$$\tau = (n - n') t + \epsilon.$$

Она является частным решением уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{d\tau^2} - 2m \frac{dY}{d\tau} &= \frac{\partial \Omega}{\partial X}, \\ \frac{d^2Y}{d\tau^2} + 2m \frac{dX}{d\tau} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Y},\end{aligned}\tag{74}$$

где

$$\Omega = \frac{x}{r} + \frac{3}{2} m^2 X^2,\tag{75}$$

которые соответствуют уравнениям (40) и (41) с той лишь разницей, что независимая переменная t заменена τ . Интеграл Якоби равен

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau} \right)^2 \right] = \Omega + C.\tag{76}$$

Теперь мы располагаем частным решением

$$X_0 + iY_0 = a \sum a_j \zeta^{2j+1},$$

$$X_0 - iY_0 = a \sum a_{-j-1} \zeta^{-2j+1}$$

этих уравнений, в котором нижний пулевой индекс использован для обозначения координат в вариационной орбите.

Для того чтобы получить общее решение уравнений (74), рассмотрим некоторое решение, близкое к вариационной орбите, вида

$$X = X_0 + \delta X, \quad Y = Y_0 + \delta Y,\tag{77}$$

где δX и δY — малые величины, так что в первом приближении можно пренебречь их квадратами и произведениями. Тогда мы получим из уравнений (74)

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta X}{d\tau^2} - 2m \frac{d\delta Y}{d\tau} &= \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \right)_0 \delta X + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X \partial Y} \right)_0 \delta Y, \\ \frac{d^2\delta Y}{d\tau^2} + 2m \frac{d\delta X}{d\tau} &= \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y \partial X} \right)_0 \delta X + \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right)_0 \delta Y,\end{aligned}\tag{78}$$

а интеграл Якоби дает

$$\frac{dX_0}{d\tau} \frac{d\delta X}{d\tau} + \frac{dY_0}{d\tau} \frac{d\delta Y}{d\tau} - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)_0 \delta X - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right)_0 \delta Y = \delta C.\tag{79}$$

Нулевой нижний индекс указывает, что в частные производные от Ω необходимо подставить координаты, удовлетворяющие вариационной орбите.

Как было отмечено в предыдущем разделе, уравнения, которые были использованы для получения вариационной орбиты, могут дать члены в движении Луны, которые зависят от эксцентриситета лунной орбиты, в добавление к членам, зависящим только от параметра m . Решение относительно δX и δY уравнений (78) должно поэтому дать члены, имеющие множителем первую степень эксцентриситета орбиты Луны. Посредством этих членов будет введена средняя аномалия, а следовательно, и движение перигея $(1 - c)\pi$. Предметом рассмотрения этого и последующих разделов является вычисление движения перигея для орбит с малым эксцентриситетом, т. е. вычисление главной части движения перигея, которая зависит только от m . После того как определено c , можно непосредственно получить решение относительно δX и δY . Уравнения (78) не годятся для непосредственного определения

движения перигея; необходимо ввести новые зависимые переменные для вывода уравнений более удобного вида. Мы выбираем эти новые переменные посредством следующих рассуждений.

Непосредственно очевидно, что

$$\delta X = \frac{dX_0}{d\tau}, \quad \delta Y = \frac{dY_0}{d\tau} \quad (80)$$

представляет собой частное решение линейных дифференциальных уравнений (78); ибо если совершить эту подстановку, то уравнения (78) и (79) превращаются в выражения производных от (74) и (76) при условии, что $\delta C = 0$. Если теперь введены новые переменные p и q формулами

$$\delta X = p \frac{dX_0}{d\tau} - q \frac{dY_0}{d\tau}, \quad \delta Y = q \frac{dX_0}{d\tau} + p \frac{dY_0}{d\tau}. \quad (81)$$

то частное решение (80) будет соответствовать

$$p = +1, \quad q = 0.$$

Подстановка (81) в (78) даст два однородных линейных дифференциальных уравнения относительно p и q , но так как $p = \text{const}$ должно быть решением, то они не могут содержать члена p ; p может входить лишь посредством своей первой и второй производной. Аналогично уравнение (79) при $\delta C = 0$ превратится в линейное однородное выражение относительно q , dp/dt , dq/dt . Из полученных трех уравнений можно было бы исключить d^2p/dt^2 и dp/dt , оставляя только одно уравнение относительно одной зависимости переменной q .

Хотя эта задача может быть решена без каких-либо дополнительных затруднений в действительных координатах, обозначения будут несколько более удобными, если применяются комплексные координаты u и s .

Уравнения (74) и интеграл Якоби (76), выраженные через u и s , имеют вид

$$\begin{aligned} D^2u + 2mDu + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} &= 0, \\ D^2s - 2mDs + 2 \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= 0, \end{aligned} \quad (82)$$

$$DuDs + 2\Omega + 2C = 0. \quad (83)$$

Пусть δu , δs — малые изменения координат u_0 , s_0 , удовлетворяющих вариационной орбите. Тогда при $\delta C = 0$ имеем

$$D^2\delta u + 2mD\delta u + 2\Omega_{12}\delta u + 2\Omega_{22}\delta s = 0, \quad (84)$$

$$D^2\delta s - 2mD\delta s + 2\Omega_{11}\delta u + 2\Omega_{12}\delta s = 0,$$

$$Du_0D\delta s + Ds_0D\delta u + 2\Omega_1\delta u + 2\Omega_2\delta s = 0, \quad (85)$$

где мы положили

$$\Omega_1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u} \right)_0, \quad \Omega_2 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_0,$$

$$\Omega_{11} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} \right)_0, \quad \Omega_{12} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial s} \right)_0, \quad \Omega_{22} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} \right)_0,$$

причем нижний индекс нуль указывает снова, что при вычислении этих частных производных от Ω необходимо использовать координаты вариационной орбиты.

Частное решение этих уравнений имеет вид

$$\delta u = Du_0, \quad \delta s = Ds_0.$$

Если p и q введены посредством (81), то, поскольку

$$\delta u = \delta X + i\delta Y, \quad \delta s = \delta X - i\delta Y,$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} \delta u &= p \frac{dX_0}{d\tau} - q \frac{dY_0}{d\tau} + iq \frac{dX_0}{d\tau} + ip \frac{dY_0}{d\tau} = \\ &= (p + iq) \frac{d(X_0 + iY_0)}{d\tau} = \\ &= (ip - q) Du_0, \\ \delta s &= p \frac{dX_0}{d\tau} - q \frac{dY_0}{d\tau} - iq \frac{dX_0}{d\tau} - ip \frac{dY_0}{d\tau} = \\ &= (p - iq) \frac{d(X_0 - iY_0)}{d\tau} = \\ &= (ip + q) Ds_0. \end{aligned} \tag{86}$$

Введем $ip = p'$; тогда

$$\delta u = (p' - q) Du_0, \quad \delta s = (p' + q) Ds_0, \tag{87}$$

и их производные имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} D\delta u &= D(p' - q) Du_0 + (p' - q) D^2 u_0, \\ D\delta s &= D(p' + q) Ds_0 + (p' + q) D^2 s_0, \\ D^2 \delta u &= D^2(p' - q) Du_0 + 2D(p' - q) D^2 u_0 + (p' - q) D^3 u_0, \\ D^2 \delta s &= D^2(p' + q) Ds_0 + 2D(p' + q) D^2 s_0 + (p' + q) D^3 s_0. \end{aligned}$$

При помощи уравнений (82) и их первых производных

$$\begin{aligned} D^3 u_0 + 2mD^2 u_0 + 2\Omega_{12}Du_0 + 2\Omega_{22}Ds_0 &= 0, \\ D^3 s_0 - 2mD^2 s_0 + 2\Omega_{11}Du_0 + 2\Omega_{12}Ds_0 &= 0 \end{aligned}$$

производные от (87) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} D\delta u &= D(p' - q) Du_0 + (p' - q)(-2mDu_0 - 2\Omega_2), \\ D\delta s &= D(p' + q) Ds_0 + (p' + q)(+2mDs_0 - 2\Omega_1), \\ D^2 \delta u &= D^2(p' - q) Du_0 + 2D(p' - q)(-2mDu_0 - 2\Omega_2) + \\ &\quad + (p' - q)(+4m^2Du_0 + 4m\Omega_2 - 2\Omega_{12}Du_0 - 2\Omega_{22}Ds_0), \\ D^2 \delta s &= D^2(p' + q) Ds_0 + 2D(p' + q)(+2mDs_0 - 2\Omega_1) + \\ &\quad + (p' + q)(+4m^2Ds_0 - 4m\Omega_1 - 2\Omega_{11}Du_0 - 2\Omega_{12}Ds_0), \end{aligned} \tag{88}$$

причем используются только первые производные от u_0 и s_0 . Подстановка (87) и (88) в (84) и (85) дает

$$\begin{aligned} D^2(p' - q) Du_0 + 2D(p' - q)(-2\Omega_2 - mDu_0) + 4q\Omega_{22}Ds_0 &= 0, \\ D^2(p' + q) Ds_0 + 2D(p' + q)(-2\Omega_1 + mDs_0) - 4q\Omega_{11}Du_0 &= 0, \\ Dp'Du_0Ds_0 + 2q(mDu_0Ds_0 - \Omega_1Du_0 + \Omega_2Ds_0) &= 0. \end{aligned} \tag{89}$$

Умножая первое из этих уравнений на $-\frac{1}{2} Ds_0$, второе на $+\frac{1}{2} Du_0$ и складывая, исключаем $D^2 p'$. В результате получается

$$\begin{aligned} D^2 q Du_0 Ds_0 - 2Dq D\Omega + 2Dp' (m Du_0 Ds_0 - \Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0) - \\ - 2q [\Omega_{11} (Du_0)^2 + \Omega_{22} (Ds_0)^2] = 0. \end{aligned} \quad (90)$$

В этом уравнении мы написали $D\Omega$ вместо

$$\Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0.$$

Но уравнение (83) показывает, что

$$D(Du_0 Ds_0) = -2D\Omega.$$

Используя это уравнение и вводя для краткости Φ посредством

$$m Du_0 Ds_0 - \Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0 = \Phi, \quad (91)$$

приводим уравнение (90) и третье уравнение из (89) к виду

$$\begin{aligned} D^2 q + \frac{D(Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0} Dq + \frac{2\Phi}{Du_0 Ds_0} Dp' - \frac{2[\Omega_{11} (Du_0)^2 + \Omega_{22} (Ds_0)^2]}{Du_0 Ds_0} q = 0, \\ Dp' + \frac{2\Phi}{Du_0 Ds_0} q = 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Из этих уравнений можно исключить Dp' , что даст уравнение с q в качестве единственной переменной:

$$D^2 q + \frac{D(Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0} Dq - \left\{ \frac{2[\Omega_{11} (Du_0)^2 + \Omega_{22} (Ds_0)^2]}{Du_0 Ds_0} + \frac{4\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} \right\} q = 0. \quad (93)$$

Это — уравнение вида

$$D^2 q + H Dq - Kq = 0. \quad (94)$$

Чтобы исключить средний член, положим

$$q = \Phi Q,$$

так что уравнение (94) примет вид

$$\varphi D^2 Q + (H\varphi + 2D\varphi) DQ - (K\varphi - D^2 \varphi - HD\varphi) Q = 0.$$

Если φ определяется соотношением

$$H = -\frac{2D\varphi}{\varphi}, \quad (95)$$

то средний член обратится в нуль; тогда

$$-\frac{D^2 \varphi}{\varphi} - H \frac{D\varphi}{\varphi} = -\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2} DH,$$

и уравнение (93) приводится к виду

$$D^2 Q - \Theta Q = 0, \quad (96)$$

в котором

$$\Theta = K + \frac{H^2}{4} + \frac{1}{2} DH. \quad (97)$$

При выводе уравнений (92) мы произвели деление на $Du_0 Ds_0$; получая (95), мы делили на φ . Соотношения между X , Y , u и s , уста-

новленные в разд. 19, показывают, что

$$Du_0 Ds_0 = - \left(\frac{dX_0}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{dY_0}{d\tau} \right)^2 = -V_0^2,$$

где V_0 — скорость в вариационной орбите. Тогда

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{i} \frac{d}{d\tau} \ln V_0 = \\ &= - \frac{2}{i} \frac{d}{d\tau} \ln \Phi, \end{aligned}$$

согласно уравнениям (93), (94) и (95). Отсюда следует, что $\Phi = V_0^{-1}$. Скорость в любой точке вариационной орбиты конечна и отлична от нуля для широкого интервала значений m , включая и значение для орбиты Луны. Следовательно, операции деления на $Du_0 Ds_0$ и Φ законны.

24. Функция Θ . Уравнение (96) известно под названием уравнения Хилла. Прежде чем приступить к его рассмотрению, требуется несколько подробнее исследовать функцию Θ . Из уравнений (93) и (94) следует

$$H = \frac{D(Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0},$$

следовательно,

$$DH = \frac{D^2(Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0} - \frac{[D(Du_0 Ds_0)]^2}{(Du_0 Ds_0)^2}$$

и

$$\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2} DH = \frac{D^2(Du_0 Ds_0)}{2Du_0 Ds_0} - \frac{[D(Du_0 Ds_0)]^2}{4(Du_0 Ds_0)^2}.$$

Но поскольку

$$D(Du_0 Ds_0) = -2D\Omega, \quad (98)$$

это уравнение записывается в следующем виде:

$$\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2} DH = - \frac{D^2\Omega}{Du_0 Ds_0} - \frac{(D\Omega)^2}{(Du_0 Ds_0)^2}. \quad (99)$$

Правая часть выражается через $Du_0 Ds_0$ и частные производные от Ω путем использования соотношений

$$D\Omega = \Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0,$$

$$D^2\Omega = \Omega_{11}(Du_0)^2 + 2\Omega_{12}Du_0 Ds_0 + \Omega_{22}(Ds_0)^2 + \Omega_1 D^2u_0 + \Omega_2 D^2s_0.$$

Вместо последних двух членов мы пишем

$$\begin{aligned} \Omega_1 D^2u_0 + \Omega_2 D^2s_0 &= \Omega_1(-2mDu_0 - 2\Omega_2) + \Omega_2(2mDs_0 - 2\Omega_1) = \\ &= 2m(-\Omega_1 Du_0 + \Omega_2 Ds_0) - 4\Omega_1 \Omega_2. \end{aligned}$$

Наконец, с Φ , определяемым уравнением (91), мы получаем

$$\begin{aligned} D^2\Omega &= \Omega_{11}(Du_0)^2 + 2\Omega_{12}Du_0 Ds_0 + \Omega_{22}(Ds_0)^2 - \\ &- 4\Omega_1 \Omega_2 + 2m\Phi - 2m^2 Du_0 Ds_0. \end{aligned} \quad (100)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (D\Omega^2) &= (\Phi - m Du_0 Ds_0)^2 + 4\Omega_1 \Omega_2 Du_0 Ds_0, \\ \frac{(D\Omega)^2}{Du_0 Ds_0} &= \frac{\Phi^2}{Du_0 Ds_0} + 4\Omega_1 \Omega_2 - 2m\Phi + m^2 Du_0 Ds_0. \end{aligned} \quad (101)$$

При помощи (100) и (101) уравнение (99) можно написать в следующем виде:

$$\frac{H^2}{4} + \frac{1}{2} DH = \frac{1}{Du_0 Ds_0} [-\Omega_{11}(Du_0)^2 - 2\Omega_{12} Du_0 Ds_0 - \Omega_{22}(Ds_0)^2] - \frac{\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} + m^2.$$

К этому уравнению прибавляется коэффициент K при q в (93), и получается следующее окончательное выражение для Θ :

$$\Theta = \frac{1}{Du_0 Ds_0} [\Omega_{11}(Du_0)^2 - 2\Omega_{12} Du_0 Ds_0 + \Omega_{22}(Ds_0)^2] + \frac{3\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} + m^2. \quad (102)$$

До этого момента было удобно сохранять буквенное обозначение для Ω . Поскольку уравнения (74) представляют собой уравнения ограниченной задачи, то рассуждения этого раздела применимы к изучению орбит в близкой окрестности периодических решений ограниченной задачи. Для приложения к проблеме Луны мы должны подставить из (75)

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{x}{r} + \frac{3}{2} m^2 X^2 = \\ &= \frac{x}{r} + \frac{3}{8} m^2 (u^2 + 2us + s^2), \end{aligned}$$

где $r^2 = us$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u} \right)_0 = -\frac{1}{2} \frac{xs_0}{r_0^3} + \frac{3}{4} m^2 (u_0 + s_0), \\ \Omega_2 &= \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_0 = -\frac{1}{2} \frac{xu_0}{r_0^3} + \frac{3}{4} m^2 (u_0 + s_0), \\ \Omega_{11} &= \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} \right)_0 = +\frac{3}{4} \frac{xs_0^2}{r_0^5} + \frac{3}{4} m^2, \\ \Omega_{12} &= \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial s} \right)_0 = +\frac{1}{4} \frac{x}{r_0^3} + \frac{3}{4} m^2, \\ \Omega_{22} &= \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s^2} \right)_0 = +\frac{3}{4} \frac{xu_0^2}{r_0^5} + \frac{3}{4} m^2. \end{aligned} \quad (103)$$

Подстановка в (102) приводит к следующему выражению:

$$\Theta = \frac{x}{r_0^3} + m^2 + \frac{3}{4Du_0 Ds_0} \left[\frac{x}{r_0^5} (s_0 Du_0 - u_0 Ds_0)^2 + m^2 (Du_0 - Ds_0)^2 \right] + \frac{3\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2}, \quad (104)$$

в котором

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{x}{r_0^3} (s_0 Du_0 - u_0 Ds_0) + m Du_0 Ds_0 + \frac{3}{4} m^2 (u_0 + s_0) (-Du_0 + Ds_0).$$

Из структуры функции Θ очевидно, что она является действительной четной периодической функцией от $2t$. Поэтому она разложима в ряд по косинусам дуг, кратных $2t$. Для получения этого ряда можно с успехом применить гармонический анализ.

Если требуется буквенное разложение, то более удобны другие формы. Мы используем соотношения (98) и (100):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} D^2 (Du_0 Ds_0) &= D^2 \Omega = \\ &= \Omega_{11} (Du_0)^2 + 2\Omega_{12} Du_0 Ds_0 + \Omega_{22} (Ds_0)^2 - \\ &\quad - 4\Omega_1 \Omega_2 + 2m\Phi - 2m^2 Du_0 Ds_0, \end{aligned}$$

которые дают

$$\begin{aligned} \Omega_{11} (Du_0)^2 - 2\Omega_{12} Du_0 Ds_0 + \Omega_{22} (Ds_0)^2 &= -4\Omega_{12} Du_0 Ds_0 + 4\Omega_1 \Omega_2 - 2m\Phi + \\ &\quad + 2m^2 Du_0 Ds_0 - \frac{1}{2} D^2 (Du_0 Ds_0). \end{aligned}$$

Подстановка в (102) дает

$$\Theta = -\frac{x}{r_0^3} + \frac{4\Omega_1 \Omega_2}{Du_0 Ds_0} - 2m \frac{\Phi}{Du_0 Ds_0} + \frac{3\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} - \frac{1}{2} \frac{D^2 (Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0}, \quad (105)$$

в котором $4\Omega_{12}$ заменено на $xr_0^{-3} + 3m^2$ согласно (103). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{4\Omega_1 \Omega_2}{Du_0 Ds_0} &= \left(\frac{D^2 u_0}{Du_0} + 2m \right) \left(\frac{D^2 s_0}{Ds_0} - 2m \right) = \\ &= \frac{D^2 u_0 D^2 s_0}{Du_0 Ds_0} + 2m \left(\frac{D^2 s_0}{Ds_0} - \frac{D^2 u_0}{Du_0} \right) - 4m^2, \\ -\frac{2m\Phi}{Du_0 Ds_0} &= -m \left(\frac{D^2 s_0}{Ds_0} - \frac{D^2 u_0}{Du_0} \right) + 2m^2, \\ \frac{3\Phi^2}{(Du_0 Ds_0)^2} &= \frac{3}{4} \left(\frac{D^2 s_0}{Ds_0} - \frac{D^2 u_0}{Du_0} \right)^2 - 3m \left(\frac{D^2 s_0}{Ds_0} - \frac{D^2 u_0}{Du_0} \right) + 3m^2, \\ -\frac{1}{2} \frac{D^2 (Du_0 Ds_0)}{Du_0 Ds_0} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{D^2 u_0}{Du_0} + \frac{D^2 s_0}{Ds_0} \right)^2 - \frac{1}{2} D \left(\frac{D^2 u_0}{Du_0} + \frac{D^2 s_0}{Ds_0} \right) \end{aligned}$$

являются соотношениями, которые могут быть легко проверены. Если их подставить в (105), то получим выражение

$$\begin{aligned} \Theta &= -\frac{x}{r_0^3} - m^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{D^2 u_0}{Du_0} - \frac{D^2 s_0}{Ds_0} + 2m \right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\frac{D^2 u_0}{Du_0} + \frac{D^2 s_0}{Ds_0} \right) - \frac{1}{2} D \left(\frac{D^2 u_0}{Du_0} + \frac{D^2 s_0}{Ds_0} \right), \end{aligned} \quad (106)$$

которое хорошо приспособлено для буквенных разложений.

Ряд для xr_0^{-3} можно получить из (82) и (103):

$$\frac{x}{r_0^3} = \frac{D^2 u_0 + 2m Du_0 + \frac{3}{2} m^2 s_0}{u_0} + \frac{3}{2} m^2.$$

Если мы теперь подставим

$$u_0 = a \sum a_j \zeta^{2j+1}, \quad s_0 = a \sum a_{-j-1} \zeta^{2j+1},$$

то получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{r_0^3} &= \frac{\sum \left\{ [(2j+1)^2 + 2m(2j+1)] a_j + \frac{3}{2} m^2 a_{-j-1} \right\} \zeta^{2j+1}}{\sum a_j \zeta^{2j+1}} + \frac{3}{2} m^2 = \\ &= 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 + \frac{\sum \left[4j(j+1+m)a_j + \frac{3}{2} m^2 a_{-j-1} \right] \zeta^{2j}}{\sum a_j \zeta^{2j}}, \end{aligned} \quad (107)$$

Поскольку x/r_0^3 представляет собой ряд по косинусам дуг, кратных 2τ , то последний член правой части разложения (107) можно написать в виде

$$\sum Q_k \zeta^{2k} = \frac{\sum b_j \zeta^{2j}}{\sum a_j \zeta^{2j}},$$

где $Q_{-k} = Q_k$, а a_j и b_j известны из вариационной орбиты либо как численные коэффициенты, либо как степенные ряды по параметру m . Коэффициенты Q_k получаются последовательными приближениями из уравнений

$$\begin{aligned} Q_0 a_0 + Q_1 (a_1 + a_{-1}) + Q_2 (a_2 + a_{-2}) + \dots &= b_0, \\ Q_0 a_{-1} + Q_1 (a_0 + a_{-2}) + Q_2 (a_1 + a_{-3}) + \dots &= b_{-1}, \\ Q_0 a_1 + Q_1 (a_2 + a_0) + Q_2 (a_3 + a_{-1}) + \dots &= b_1, \\ Q_0 a_{-2} + Q_1 (a_{-1} + a_{-3}) + Q_2 (a_0 + a_{-4}) + \dots &= b_{-2}, \\ Q_0 a_2 + Q_1 (a_3 + a_1) + Q_2 (a_4 + a_0) + \dots &= b_2. \end{aligned}$$

Частные $D^2 u_0 / Du_0$ и $D^2 s_0 / Ds_0$ можно вычислить аналогичным образом. Мы полагаем

$$\begin{aligned} \frac{D^2 u_0}{Du_0} &= \frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta^{2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta^{2j}} = \sum U_j \zeta^{2j}, \\ \frac{D^2 s_0}{Ds_0} &= - \frac{\sum (2j+1)^2 a_j \zeta^{-2j}}{\sum (2j+1) a_j \zeta^{-2j}} = - \sum U_j \zeta^{-2j}, \end{aligned}$$

так что x/r_0^3 и $D^2 u_0 / Du_0$ являются единственными рядами, необходимыми для вычисления Θ .

Эти ряды в виде, данном Хиллом, приведены в табл. 6 для $m = 0,08084\ 89338\ 08312$.

Полное решение основной задачи теории Луны может быть основано на этих рядах и рядах для u_0 и s_0 , данных ранее, если не требуется буквенного разложения по степеням m . Такого рода решение было фактически выполнено Брауном с выдающимся успехом.

Таблица 6
Ряды Хилла

$$\begin{aligned} \frac{x}{r_0^3} &= 1,17150\ 80211\ 79225 \\ &+ 0,02523\ 36924\ 97860 \cos 2\tau \\ &+ 25\ 15533\ 50012 \cos 4\tau \\ &+ 24118\ 79799 \cos 6\tau \\ &+ 226\ 05851 \cos 8\tau \quad (108) \\ &+ 2\ 08750 \cos 10\tau \\ &+ 1908 \cos 12\tau \\ &+ 17 \cos 14\tau \\ \Theta &= 1,15884\ 39395\ 96583 \\ &- 0,11408\ 80374\ 93807 \cos 2\tau \\ &+ 76\ 64759\ 95109 \cos 4\tau \\ &- 1\ 83465\ 77790 \cos 6\tau \\ &+ 1088\ 95009 \cos 8\tau \quad (109) \\ &- 20\ 98671 \cos 10\tau \\ &+ 12103 \cos 12\tau \\ &- 211 \cos 14\tau \end{aligned}$$

25. Движение перигея. Мы рассмотрим теперь решение уравнения $D^2q - \Theta q = 0$,

в котором

$$\Theta = \theta_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \cos 2j\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} \theta_j \zeta^{2j}, \quad \theta_{-j} = \theta_j.$$

Разлагая по степеням параметра m , находим

$$\theta_0 = 1 + 2m + \dots, \quad \theta_j = \theta_{-j} = O(m^{2j}).$$

Это уравнение сводится к уравнению простого гармонического колебания, если ограничить функцию Θ ее постоянным членом θ_0 . Тогда решение имеет вид

$$q = E \cos l, \text{ где } l = c_0 \tau + l_0,$$

E и l_0 — произвольные постоянные, а $c_0 = \sqrt{\theta_0}$. В общем случае, когда функция Θ не ограничена своим постоянным членом, решение можно представить в виде

$$q = E \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_j \cos(l + 2j\tau)$$

с $q_0 = 1$ или

$$q = E \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_j \exp(il_0) \zeta^{2j+c} + E \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_j \exp(-il_0) \zeta^{-2j-c}.$$

E и l_0 снова суть произвольные постоянные, но с будет теперь зависеть от всех коэффициентов $\theta_0, \theta_1, \dots$ функции Θ .

Коэффициент при ζ^{2j+c} в функции Θq равен

$$(\dots \theta_2 q_{j-2} + \theta_1 q_{j-1} + \theta_0 q_j + \theta_1 q_{j+1} + \theta_2 q_{j+2} \dots) E \exp il_0.$$

В силу равенства θ_j и θ_{-j} тот же коэффициент при $\exp(il_0)$ вместо $\exp(-il_0)$ получается для ζ^{-2j-c} . Поэтому эти два члена q дают в точности одинаковые уравнения, если в D^2q и Θq приравнять коэффициенты при соответствующих степенях ζ . Эти уравнения таковы:

$$\begin{aligned} & \cdots [(c-4)^2 - \theta_0] q_{-2} - \quad \quad \quad \theta_1 q_{-1} - \quad \quad \quad \theta_2 q_0 - \\ & \quad \quad \quad - \theta_3 q_1 - \quad \quad \quad \theta_4 q_2 - \dots = 0, \\ & \cdots - \theta_1 q_{-2} - [(c-2)^2 - \theta_0] q_{-1} - \quad \quad \quad \theta_1 q_0 - \\ & \quad \quad \quad - \theta_2 q_1 - \quad \quad \quad \theta_3 q_2 - \dots = 0, \\ & \cdots - \theta_2 q_{-2} - \quad \quad \quad \theta_1 q_{-1} + (c^2 - \theta_0) q_0 - \quad \quad \quad (110) \\ & \quad \quad \quad - \theta_1 q_1 - \quad \quad \quad \theta_2 q_2 - \dots = 0, \\ & \cdots - \theta_3 q_{-2} - \quad \quad \quad \theta_2 q_{-1} - \quad \quad \quad \theta_1 q_0 + \\ & \quad \quad \quad + [(c+2)^2 - \theta_0] q_1 - \quad \quad \quad \theta_1 q_2 - \dots = 0, \\ & \cdots - \theta_4 q_{-2} - \quad \quad \quad \theta_3 q_{-1} - \quad \quad \quad \theta_2 q_0 - \\ & \quad \quad \quad - \theta_1 q_1 + [(c+4)^2 - \theta_0] q_2 - \dots = 0. \end{aligned}$$

Это бесконечная система линейных однородных уравнений. Для конечной системы таких уравнений условие существования решения заключается в том, чтобы определитель, составленный из коэффициентов, был равен нулю. Этот определитель, будучи приравненным нулю, служит уравнением, из которого вычисляется значение c . После того как найдено c , можно получить неизвестные q_j ; одно из них, например q_0 , остается произвольным и может быть принято равным единице.

Хилл имел смелость распространить ту же методику на бесконечное число уравнений с бесконечным числом неизвестных. Таким образом, он первым ввел в математический анализ бесконечный определитель.

Хилл пишет уравнение в виде определителя:

$$\Delta(c) = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{(c-4)^2 - \theta_0}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_4}{4^2 - \theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_1}{2^2 - \theta_0} & \frac{(c-2)^2 - \theta_0}{2^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_3}{2^2 - \theta_0} & \cdots \\ \Delta(c) = & \cdots & \frac{-\theta_2}{0^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2 - \theta_0} & \frac{c^2 - \theta_0}{0^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{0^2 - \theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_3}{2^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2 - \theta_0} & \frac{(c+2)^2 - \theta_0}{2^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2 - \theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_4}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2 - \theta_0} & \frac{(c+4)^2 - \theta_0}{4^2 - \theta_0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix} = 0.$$

В качестве вспомогательного определителя он вводит следующий:

$$\Delta_1(c) =$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1 & \frac{-\theta_1}{(c-4)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c-4)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_3}{(c-4)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_4}{(c-4)^2 - \theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_1}{(c-2)^2 - \theta_0} & 1 & \frac{-\theta_1}{(c-2)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c-2)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_3}{(c-2)^2 - \theta_0} & \cdots \\ \equiv & \cdots & \frac{-\theta_2}{c^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{c^2 - \theta_0} & 1 & \frac{-\theta_1}{c^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{c^2 - \theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_3}{(c+2)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c+2)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{(c+2)^2 - \theta_0} & 1 & \frac{-\theta_1}{(c+2)^2 - \theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_4}{(c+4)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_3}{(c+4)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_2}{(c+4)^2 - \theta_0} & \frac{-\theta_1}{(c+4)^2 - \theta_0} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix},$$

так что

$$\Delta(c) = \Delta_1(c) \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(c-2k)^2 - \theta_0}{4k^2 - \theta_0}. \quad (111)$$

Бесконечное произведение в правой части можно выразить через функции от синусов, используя следующие известные бесконечные произведения:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2 - x^2}{k^2\pi^2}, \\ \frac{\sin x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{\sin x_2} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\pi^2 - x_1^2}{k^2\pi^2 - x_2^2} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi - x_1}{k\pi - x_2} \cdot \frac{k\pi + x_1}{k\pi + x_2}.\end{aligned}$$

Применяя эти соотношения к (111), мы пишем

$$\begin{aligned}\Delta(c) &= \Delta_1(c) \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c - 2k - c_0}{2k - c_0} \frac{c - 2k + c_0}{2k + c_0} = \\ &= \Delta_1(c) \frac{c^2 - \theta_0}{-\theta_0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{c - 2k - c_0}{2k - c_0} \frac{c - 2k + c_0}{2k + c_0} \frac{c + 2k - c_0}{-2k - c_0} \frac{c + 2k + c_0}{-2k + c_0} = \\ &= \Delta_1(c) \frac{c^2 - \theta_0}{-\theta_0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi - \frac{1}{2}(c - c_0)\pi}{k\pi - \frac{1}{2}c_0\pi} \frac{k\pi + \frac{1}{2}(c + c_0)\pi}{k\pi + \frac{1}{2}c_0\pi} \times \\ &\quad \times \frac{k\pi + \frac{1}{2}(c - c_0)\pi}{k\pi + \frac{1}{2}c_0\pi} \frac{k\pi + \frac{1}{2}(c + c_0)\pi}{k\pi - \frac{1}{2}c_0\pi} = \\ &= \Delta_1(c) \frac{c^2 - \theta_0}{-\theta_0} \frac{\sin \frac{1}{2}(c - c_0)\pi}{\frac{1}{2}(c - c_0)\pi} \frac{\sin \frac{1}{2}(c + c_0)\pi}{\frac{1}{2}(c + c_0)\pi} \left(\frac{\frac{1}{2}c_0\pi}{\sin \frac{1}{2}c_0\pi} \right)^2 = \\ &= \Delta_1(c) \frac{-\sin \frac{1}{2}(c - c_0)\pi \sin \frac{1}{2}(c + c_0)\pi}{\sin^2 \frac{1}{2}c_0\pi} = \quad (112a) \\ &= \Delta_1(c) \frac{\cos c\pi - \cos c_0\pi}{1 - \cos c_0\pi}, \quad (112b)\end{aligned}$$

где, как и прежде,

$$c_0 = \sqrt{\theta_0}.$$

Можно затем получить аналитическое выражение для определителя $\Delta_1(c)$, используя следующие его свойства:

1. Он является четной периодической функцией от c с периодом 2; если c есть корень, то $\pm c \pm 2k$ также будут корнями.

2. Он имеет простые полюсы при

$$(c + 2k)^2 = \theta_0$$

или

$$c = \pm c_0 + 2k.$$

3. Он стремится к единице, если мнимая часть величины с стремится к $\pm\infty$.

Эти свойства справедливы также и для разности

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (c + c_0) \pi - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (c - c_0) \pi.$$

Поэтому возможно выбрать такую постоянную K , чтобы выражение

$$\Delta_1(c) = K \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (c + c_0) \pi - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (c - c_0) \pi \right]$$

не имело полюсов и, следовательно, было равно постоянной. Эта постоянная равна единице и определяется, если положить $c = \pm i\infty$, для которого $\Delta_1(c) = +1$ и разность котангенсов равна нулю. Это дает

$$\begin{aligned} \Delta_1(c) &= 1 + K \left[\operatorname{ctg} \frac{1}{2} (c + c_0) \pi - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (c - c_0) \pi \right] = \\ &= 1 + K \frac{-2 \sin \frac{1}{2} c_0 \pi \cos \frac{1}{2} c_0 \pi}{\sin \frac{1}{2} (c - c_0) \pi \sin \frac{1}{2} (c + c_0) \pi}. \end{aligned}$$

Тогда из формулы (112а) мы находим

$$\Delta(c) = -\frac{\sin \frac{1}{2} (c - c_0) \pi \sin \frac{1}{2} (c + c_0) \pi}{\sin^2 \frac{1}{2} c_0 \pi} + 2K \operatorname{ctg} \frac{1}{2} c_0 \pi. \quad (113)$$

Полагая $c = 0$ в (113), мы получаем

$$\Delta(0) = +1 + 2K \operatorname{ctg} \frac{1}{2} c_0 \pi,$$

или

$$2K \operatorname{ctg} \frac{1}{2} c_0 \pi = \Delta(0) - 1.$$

Поэтому окончательное выражение для $\Delta(c)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(c) &= \Delta(0) - 1 - \frac{\sin \frac{1}{2} (c - c_0) \pi \sin \frac{1}{2} (c + c_0) \pi}{\sin^2 \frac{1}{2} c_0 \pi} = \\ &= \Delta(0) - 1 + \frac{\cos c \pi - \cos c_0 \pi}{1 - \cos c_0 \pi} = \\ &= \Delta(0) - \frac{1 - \cos c \pi}{1 - \cos \sqrt{\theta_0} \pi}. \end{aligned} \quad (114)$$

Таким образом, задача свелась к вычислению $\Delta(0)$ и нахождению одного из корней следующего уравнения:

$$1 - \cos c \pi = \Delta(0) (1 - \cos \sqrt{\theta_0} \pi), \quad (115)$$

или уравнения

$$\sin^2 \frac{c}{2} \pi = \Delta(0) \sin^2 \frac{1}{2} \sqrt{\theta_0} \pi,$$

или

$$\sin \frac{c}{2} \pi = \sqrt{\Delta(0)} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\theta_0} \pi. \quad (116)$$

Необходимо получить корень, ближайший к единице, так как $s \rightarrow 1$ при $m \rightarrow 0$.

Все члены, расположенные по главной диагонали бесконечного определителя $\Delta(0)$, равны $+1$. Следовательно, основной член в разложении $\Delta(0)$ равен $+1$. Процедура получения остальных членов состоит в систематической замене строк и столбцов и в вычислении диагонального элемента после каждой замены. Одна замена двух смежных строк или столбцов порождает члены, имеющие множителем θ_1^2 ; поскольку θ_j , будучи разложенным по степеням m , содержит множителем m^{2j} , то эти члены будут иметь множителем m^4 . Члены следующего, более высокого порядка имеют множителем m^8 ; они получаются от замены строк или столбцов, которая дает члены вида θ_1^4 , $\theta_1^2\theta_2$ или θ_2^2 . Каждая последовательность замен требует вычисления бесконечной суммы.

Коэффициент при θ_1^2 равен следующей бесконечной сумме:

$$-\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2j)^2 - \theta_0} \frac{1}{(2j+2)^2 - \theta_0} = -\frac{1}{16} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j^2 - p^2} \frac{1}{(j+1)^2 - p^2},$$

если $p = \frac{1}{2} \sqrt{\theta_0} = \frac{1}{2} c_0$. Разлагая каждый член на элементарные дроби имеем

$$\frac{1}{32p} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2p+1} \left(\frac{1}{p-j} + \frac{1}{p+j+1} \right) - \frac{1}{2p-1} \left(\frac{1}{p+j} + \frac{1}{p-j-1} \right) \right].$$

Используя теперь формулу

$$\pi \operatorname{ctg} p\pi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p+j} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p-j},$$

мы можем написать для коэффициента при θ_1^2

$$\frac{1}{16p} \left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1} \right) \pi \operatorname{ctg} p\pi = \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \sqrt{\theta_0} \pi}{4(1-\theta_0) \sqrt{\theta_0}}.$$

Аналогичным образом можно найти коэффициент при θ_2^2 . Коэффициенты при $\theta_1^2\theta_2$ и θ_1^4 являются более сложными, требуя разложения на простые дроби величин, обратных произведениям трех или четырех сомножителей вида $(2j-2k)^2 - \theta_0$, однако процедура остается той же. Дальнейшие подробности об этих разложениях можно найти в оригинальной работе Хилла и в «Treatise on the Lunar Theory» Брауна¹⁾.

Хилл приводит следующие значения членов, составляющих $\Delta(0)$:

Член нулевого порядка	$+1,00000\ 00000\ 00000\ 0$
Члены 4-го порядка	$+0,00180\ 46110\ 93422\ 7$
Члены 8-го порядка	$+1808\ 63109\ 9$
Члены 12-го порядка	$+64478\ 6$
Сумма	$+1,00180\ 47920\ 21011\ 2$

откуда посредством (115) или (116) находим

$$c = 1,07158\ 32774\ 16016.$$

¹⁾ E. W. Brown, Treatise on the Lunar Theory, Cambridge Univ. Press, London, 1896; Dover Publications, New York, 1960.

Для контроля Хилл представляет это значение в качестве приближенного решения в уравнении (110), последовательно исключает q_{-1} , q_1 , q_{-2} , q_2 , q_{-3} , q_3 , q_{-4} , которые все являются неизвестными, подлежащими рассмотрению, и находит следующий улучшенный результат:

$$c = 1,07158\ 32774\ 16012.$$

Для нахождения движения перигея мы имеем

$$\frac{dl}{d\tau} = c, \quad \frac{dl}{dt} = c(n - n'),$$

где l — среднее значение средней аномалии, или

$$\bar{l} = \lambda - \bar{\omega}.$$

Определим теперь c уравнением

$$\frac{dl}{dt} = cn.$$

Тогда, поскольку

$$\frac{n - n'}{n} = 1 - m = \frac{1}{1+m},$$

имеем

$$c = \frac{c}{1+m}$$

и

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = (1 - c) n = \left(1 - \frac{c}{1+m}\right) n.$$

Окончательное значение c при указанном значении параметра m дает

$$\frac{1}{n} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = 0,00857\ 25730\ 04864.$$

С имеющимся теперь значением c можно было бы вернуться к уравнениям (110), чтобы получить q_j путем последовательных приближений, полагая q_0 равным +1. Затем можно было бы найти r' из второго уравнения (92) и впоследствии δi и $\delta \omega$ из уравнения (87). Эта процедура является до некоторой степени более длинной, чем это необходимо. Единственная цель преобразования исходных уравнений (84) заключается в получении уравнения, из которого можно было бы определить c , а после того как это сделано, для получения δi и $\delta \omega$ могут быть использованы уравнения (84). Это было фактически сделано Брауном в его решении основной задачи.

Поскольку E входит в решение относительно q как постоянная интегрирования, то эта же постоянная присутствует как множитель при r' и при δi и $\delta \omega$. Эта постоянная E должна быть связанной с постоянной эксцентриситета возмущенной орбиты Луны. Постоянной E можно присвоить точный смысл путем сравнения некоторого коэффициента в одной из координат с его значением в эллиптическом движении. В теории Брауна постоянная эксцентриситета определяется при помощи коэффициентов при членах ζ^c и ζ^{-c} в $i\zeta^{-1}$ таким образом, чтобы разность между этими коэффициентами равнялась $a\epsilon$. Это значение должно не изменяться, когда вычисляются члены более высоких порядков относительно e , e' .

Как было отмечено ранее, значение c , полученное из бесконечного определителя, дает главную часть движения перигея. Члены с множителями e^2, e^4, \dots получаются в виде дополнительных членов с в ходе полного решения уравнений (84).

26. Движение узла. Уравнение для z имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = -\frac{k^2 m' z}{\Delta^3},$$

если плоскость xy совпадает с плоскостью эклиптики. В первом приближении мы пренебрегаем более высокими степенями z , которые появляются из разложения Δ^{-3} ; далее мы пренебрегаем членами в возмущающей функции, которые содержат множителем a/a' , а также эксцентриситетами орбит Земли и Луны. Это осуществляется путем записи a'^3 вместо Δ^3 . Если затем заменить $k^2 m'$ на $n'^2 a'^3$, то уравнение для z принимает вид

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{\mu}{r^3} + n'^2 \right) z = 0.$$

Это уравнение необходимо решить, вводя сначала вместо r^{-3} его значение из вариационной орбиты.

В качестве независимой переменной оказывается удобным использовать $\tau = (n - n')t + \text{const}$. Как и прежде, мы вводим x посредством соотношения $\mu = (n - n')^2 x$ и параметр m равенством $m = n'/(n - n')$. Тогда уравнение для z приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \left(\frac{x}{r^3} + m^2 \right) z = 0. \quad (117)$$

Это уравнение имеет в точности такую же форму, как и уравнение Хилла (96); чтобы получить последнее, не требуется никакого сложного преобразования нашего уравнения. Функция $M = x/r^3 + m^2$ представляет собой ряд (108) по дугам, кратным 2τ , при условии, что постоянный член увеличен на m^2 и равен

$$M_0 = 1,17804\ 45712\ 77166.$$

Для получения главной части движения узла можно использовать метод бесконечного определителя. Эта проблема фактически была решена Адамсом при помощи метода, отчасти сходного с методом Хилла для перигея.

В 1936 г. Браун писал: «Прошло около шестидесяти лет со времени опубликования работ Хилла и Адамса, и ввиду этого теперь, вероятно, не будет нетактичным показать, что эта высокая степень точности может быть получена совершенно элементарными методами и сравнительно небольшим трудом». Затем он переходит к доказательству того, что при помощи дифференциального метода можно получить решение с точностью до $2q$ десятичных знаков, если в распоряжении имеются результаты предварительных вычислений с точностью до q десятичных знаков. Подробности метода Брауна можно найти в следующем разделе. Представляется поучительным построить сначала предварительное решение, не прибегая к использованию каких-либо результатов пре-

дальнейшей работы. Основными данными являются коэффициенты ряда для M вида

$$\begin{aligned} M &= M_0 + 2 \sum M_j \cos 2j\tau, \\ M_0 &= +1,178044571277166 \\ M_1 &= +0,012616846248930 \\ M_2 &= +125776675006 \\ M_3 &= +1205939900 \\ M_4 &= +11302926 \\ M_5 &= +104375 \\ M_6 &= +954 \\ M_7 &= +8 \end{aligned}$$

при

$$m = 0,080848933808312.$$

Из свойств вариационной орбиты известно, что

$$\begin{aligned} M_0 &= 1 + 2m + \dots, \\ M_j &= O(m^{2j}). \end{aligned}$$

Если бы ряд для M был ограничен членом M_0 , то уравнение для z принимало бы следующий вид:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + M_0 z = 0,$$

а его решением было

$$z = \gamma \sin F,$$

в котором γ — постоянная интегрирования, а

$$\begin{aligned} F &= g_0 \tau + \text{const}, \\ g_0 &= \sqrt{M_0}. \end{aligned}$$

Ввиду присутствия в коэффициенте при z в уравнении (117) членов с аргументами вида $2j\tau$ решение этого уравнения можно представить в виде

$$z = \gamma \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_j \sin(F + 2j\tau), \quad (118)$$

причем $z_0 = +1$ и

$$F = g\tau + \text{const},$$

где g отличается от g_0 на результат влияния периодических членов в M .

Подстановка выражения (118) дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{d\tau^2} &= -\gamma \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (g + 2j)^2 z_j \sin(F + 2j\tau), \\ \left(\frac{x}{r^3} + m^2 \right) z &= +\gamma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z_{j-k} \sin(F + 2j\tau), \end{aligned}$$

причем $M_{-k} = M_k$. Уравнение (117) требует теперь, чтобы для каждого значения j выполнялось условие

$$\dots -M_2 z_{j-2} - M_1 z_{j-1} + [(g+2j)^2 - M_0] z_j - M_1 z_{j+1} - M_2 z_{j+2} \dots = 0.$$

Пять центральных уравнений из этой бесконечной системы линейных однородных уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} & [(g-4)^2 - M_0] z_{-2} - M_1 z_{-1} - M_2 z_0 - \\ & \quad - M_3 z_1 - M_4 z_2 = 0, \\ & - M_1 z_{-2} + [(g-2)^2 - M_0] z_{-1} - M_1 z_0 - \\ & \quad - M_2 z_1 - M_3 z_2 = 0, \\ & - M_2 z_{-2} - M_1 z_{-1} + (g^2 - M_0) z_0 - \\ & \quad - M_1 z_1 - M_2 z_2 = 0, \\ & - M_3 z_{-2} - M_2 z_{-1} - M_1 z_0 + \\ & \quad + [(g+2)^2 - M_0] z_1 - M_1 z_2 = 0, \\ & - M_4 z_{-2} - M_3 z_{-1} - M_2 z_0 - \\ & \quad - M_1 z_1 + [(g+4)^2 - M_0] z_2 = 0, \end{aligned}$$

и должны быть решены при $z_0 = +1$.

Из среднего уравнения при $z_0 = +1$ и z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2 и т. д., равных нулю, мы получаем очевидное первое приближение

$$g_0 = \sqrt{M_0} = 1,0853776.$$

Тогда при $g = g_0$ второе и четвертое уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & (4 - 4g_0) z_{-1} - M_2 z_1 = M_1, \\ & - M_2 z_{-1} + (4 + 4g_0) z_1 = M_1. \end{aligned}$$

В силу малости M_2 по сравнению с $4 \pm 4g_0$ решение в первом приближении имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{-1} &= \frac{M_1}{4 - 4g_0} = -0,03694, \\ z_1 &= \frac{M_1}{4 + 4g_0} = +0,00151. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} z_{-2} &= \frac{M_1 z_{-1} + M_2 + M_3 z_1}{16 - 8g_0} = -0,0000465, \\ z_2 &= \frac{M_1 z_1 + M_2 + M_3 z_{-1}}{16 - 8g_0} = +0,0000059. \end{aligned}$$

С этими предварительными значениями z_{-1}, z_1, z_{-2}, z_2 мы вычисляем

$$\begin{aligned} g_1 &= M_0 + M_1(z_{-1} + z_1) + M_2(z_{-2} + z_2) = \\ &= 1,1775974, \\ g_1 &= 1,0851716. \end{aligned}$$

Повторение этих вычислений с новым приближением для g и приближенными значениями для z_j , полученными выше, дает

$$\begin{aligned} z_{-1} &= -0,03698\,390 \quad (-3) \\ z_1 &= +151\,220 \quad (+2) \\ z_{-2} &= -4\,65746 \quad (-4) \\ z_2 &= +58673 \quad (+8) \\ z_{-3} &= -1753 \quad (-2) \\ z_3 &= +300 \quad (0) \end{aligned}$$

и с этими значениями находим

$$\begin{aligned} g_2^2 &= 1,17759\,70255, \\ g_2 &= 1,08517\,14268 \quad (-2). \end{aligned}$$

Числа в скобках дают поправки, в которых эти результаты нуждаются в последнем написанном знаке в соответствии с решением, полученным Коуэллом и использованным в лунной теории Брауна. Следующее приближение дает z_j для $|j| \geq 2$ с точностью по крайней мере до двенадцати десятичных знаков соответственно решению Коуэлла; чтобы получить двенадцатый десятичный знак для z_1 , z_{-1} и g , необходимо еще одно приближение. Эта процедура крайне проста и быстро сходится, за исключением вычисления z_{-1} , которое подвержено влиянию малого делителя $4 - 4g = -4m + \dots$. Этим объясняется сравнительно большое численное значение коэффициента z_{-1} . В z получается член $\gamma z_{-1} \sin(F - 2t)$, который соответствует главному возмущению в широте, полученному в разд. 12 этой главы.

27. Метод дифференциальной поправки Брауна. Метод, предложенный Брауном, дает возможность выполнить приближение за один шаг от q десятичных знаков до $2q$ знаков. Тот факт, что в распоряжении имеются коэффициенты M с точностью до 15 десятичных знаков, ограничивает практическую пригодность этого метода до $q \leq 8$. Процедура заключается в следующем.

Допустим, что из предварительных вычислений значения g и z_j получены с точностью до 8 десятичных знаков. Мы желаем их иметь с точностью до 15 десятичных знаков. Напишем в g и z_j нули вместо неизвестных остальных десятичных знаков и подставим в дифференциальные уравнения, выполняя вычисления с точностью до 15 десятичных знаков. Коэффициент члена с аргументом $F + 2jt$ дает для $j = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$[(g + 2j)^2 - M_0] z_j - \sum_k M_k (z_{j+k} + z_{j-k}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (119)$$

Из-за неточности предварительных значений с 8 знаками подстановка этих значений, обозначаемых через g_8 , $z_{8,j}$, в (119) даст

$$[(g_8 + 2j)^2 - M_0] z_{8,j} - \sum_k M_k (z_{8,j+k} + z_{8,j-k}) = R_j. \quad (120)$$

Положим

$$g - g_8 = \delta g, \quad z_j - z_{8,j} = \delta z_j;$$

тогда разность между (119) и (120), если пренебречь квадратами и произведениями δg , δz_j , равна

$$[(g_8 + 2j)^2 - M_0] \delta z_j - \sum_k M_k (\delta z_{j+k} + \delta z_{j-k}) + 2(g_8 + 2j) z_{8,j} \delta g = -R_j. \quad (121)$$

Умножим (120) на δz_j , (121) — на $z_{8,j}$ и составим сумму разностей для всех значений j . Пропаведения $z_{8,j} \delta z_j$ исчезнут, и получится следующее уравнение:

$$2\delta g \sum (g_8 + 2j) z_{8,j}^2 = - \sum R_j z_{8,j},$$

которое дает δg без необходимости находить δz_j . После того как получено δg , значения δz_j вычисляются из (121) последовательными приближениями. С другой стороны, в решении относительно z_{-1} имеет место потеря точности, обусловленная делителем $-0,34\dots$. Вследствие этого окончательные результаты будут достоверными с точностью до пятнадцати, а не до шестнадцати десятичных знаков. Браун предпочитает использовать в качестве своих начальных значений результаты, полученные Коузеллом и округленные до девяти десятичных знаков, и получает

$$g = 1,08517\ 14265\ 58189.$$

Для нахождения движения узла мы имеем

$$\frac{dF}{dt} = g, \quad \frac{dF}{dt} = g(n - n'),$$

где F — среднее значение аргумента широты, или

$$F = \bar{\lambda} - \bar{\Omega}.$$

Определим теперь g уравнением

$$\frac{dF}{dt} = gn.$$

Поскольку

$$\frac{n - n'}{n} = 1 - m = \frac{1}{1+m},$$

то

$$g = \frac{m}{1+m}$$

и

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} = (1-g)n = \left(1 - \frac{m}{1+m}\right)n.$$

Значение g , приведенное выше, вместе со значением m , используемым всюду в этой главе, дает

$$\frac{1}{n} \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = -0,00399\ 91645\ 34949.$$

Как и в случае движения перигея, полученный результат представляет собой главную часть движения узла. В ходе систематического построения теории Луны получаются дополнительные члены, имеющие множителями $e^2, e'^2, \gamma^2, \dots$.

Браун показывает, что этот дифференциальный метод можно применить также для определения c . Эта задача сложнее, чем вычисление g , так как здесь необходимо рассмотреть систему из двух дифференциальных уравнений. Особенно подходит для этой задачи использование

прямоугольных координат, вращающихся со средней скоростью Луны. Эти координаты были приняты Эйлером для его второй теории Луны, опубликованной в 1772 г. Дифференциальный численный метод Брауна приводит к значению с с точностью до пятиадцати десятичных знаков в полном согласии с результатом Хилла.

Из этих результатов очевидно, что в случаях, когда не требуется никакого буквенного разложения по степеням параметра m , преобразование, рассмотренное в разд. 23 и 24, является излишним и нет необходимости вычислять бесконечный определитель. Эти соображения никоим образом не умаляют достоинств двух известных работ Хилла по теории Луны. Их оригинальность и изящество обеспечивают им незыблемое место среди шедевров литературы в этой области. Кроме того, они внесли важный вклад в методы небесной механики, который не ограничивается теорией Луны. Эта сторона работ Хилла подчеркивается в часто цитируемом высказывании Пуанкаре в предисловии к первому тому его «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste»¹⁾ и, кроме того, в его же предисловии к «Collected Mathematical Works» Хилла: «В этом труде ... можно увидеть источник большей части прогресса, который был совершен наукой с тех пор».

28. Лунная теория Брауна. Важная характерная особенность метода Хилла, предопределяющая возможность дальнейшего совершенствования и уточнения решения основной задачи, заключается в том, что, как только получены главные части движения перигея и узла, можно определить из системы линейных уравнений коэффициенты членов любого порядка относительно e , e' , γ и a/a' в любой комбинации, если найдены члены более низкого порядка. На каждом этапе все степени параметра m включаются в численные значения этих коэффициентов, тогда как e , e' , γ и a/a' остаются в алгебраическом виде. Для этой цели можно использовать уравнения (49) или эквивалентные им уравнения (48). Для получения членов более низких порядков ныгодны уравнения (50). Это требует разложения xu/r^3 и xs/r^3 по степеням δu и δs , если $u = u_0 + \delta u$, $s = s_0 + \delta s$.

Чтобы показать характерные особенности этой процедуры, запишем уравнения (50) с точностью до вторых степеней δu и δs :

$$\begin{aligned} D^2\delta u + 2mD\delta u + \frac{3}{2}m^2(\delta u + \delta s) &= \\ = xu_0^{-1/2}s_0^{-3/2} \left[-\frac{1}{2}\frac{\delta u}{u_0} - \frac{3}{2}\frac{\delta s}{s_0} + \frac{3}{8}\frac{(\delta u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\delta u\delta s}{u_0s_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta s)^2}{s_0^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2\delta s - 2mD\delta s + \frac{3}{2}m^2(\delta u + \delta s) &= \\ = xu_0^{-3/2}s_0^{-1/2} \left[-\frac{3}{2}\frac{\delta u}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta s}{s_0} + \frac{15}{8}\frac{(\delta u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\delta u\delta s}{u_0s_0} + \frac{3}{8}\frac{(\delta s)^2}{s_0^2} \right]. \end{aligned}$$

Члены с множителем e удовлетворяют уравнениям

$$D^2\delta_1 u + 2mD\delta_1 u + \frac{3}{2}m^2(\delta_1 u + \delta_1 s) = xu_0^{-1/2}s_0^{-3/2} \left(-\frac{1}{2}\frac{\delta_1 u}{u_0} - \frac{3}{2}\frac{\delta_1 s}{s_0} \right),$$

$$D^2\delta_1 s - 2mD\delta_1 s + \frac{3}{2}m^2(\delta_1 u + \delta_1 s) = xu_0^{-3/2}s_0^{-1/2} \left(-\frac{3}{2}\frac{\delta_1 u}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{\delta_1 s}{s_0} \right).$$

¹⁾ H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris, 1892—1899.

Пусть $\exp il = \Lambda$; тогда $D\Lambda^k = k\epsilon\Lambda^k$, и решение получается в следующем виде:

$$\delta_1 u = \sum a_{j,c} \zeta^{2j+1} \Lambda + \sum a_{j,-c} \zeta^{2j+1} \Lambda^{-1},$$

$$\delta_1 s = \sum a_{-j-1,-c} \zeta^{2j+1} \Lambda + \sum a_{-j-1,c} \zeta^{2j+1} \Lambda^{-1},$$

причем коэффициенты $a_{j,c}$, $a_{-j,-c}$ становятся известными в виде численных коэффициентов, умноженных на e .

Затем можно получить члены с множителем e^2 из уравнений

$$D^2\delta_2 u + 2mD\delta_2 u + \frac{3}{2} m^2 (\delta_2 u + \delta_2 s) = \\ = \kappa u_0^{-1/2} s_0^{-3/2} \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta_2 u}{u_0} - \frac{3}{2} \frac{\delta_2 s}{s_0} + \frac{3}{8} \frac{(\delta_1 u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4} \frac{\delta_1 u \delta_1 s}{u_0 s_0} + \frac{15}{8} \frac{(\delta_1 s)^2}{s_0^2} \right],$$

$$D^2\delta_2 s - 2mD\delta_2 s + \frac{3}{2} m^2 (\delta_2 u + \delta_2 s) = \\ = \kappa u_0^{-3/2} s_0^{-1/2} \left[-\frac{3}{2} \frac{\delta_2 u}{u_0} - \frac{1}{2} \frac{\delta_2 s}{s_0} + \frac{15}{8} \frac{(\delta_1 u)^2}{u_0^2} + \frac{3}{4} \frac{\delta_1 u \delta_1 s}{u_0 s_0} + \frac{3}{8} \frac{(\delta_1 s)^2}{s_0^2} \right].$$

Функции $u_0^{-3/2} s_0^{-3/2}$, $u_0^{-1/2} s_0^{-5/2}$, $u_0^{-5/2} s_0^{-1/2}$, на которые умножаются $\delta_2 u$ и $\delta_2 s$, как легко видеть, представляют собой ряды, содержащие четные степени ζ . С другой стороны, функции $u_0^{-5/2} s_0^{-3/2}$, $u_0^{-3/2} s_0^{-5/2}$, $u_0^{-1/2} s_0^{-7/2}$ и т. д., с которыми перемножаются квадратичные члены в $\delta_1 u$, $\delta_1 s$, являются рядами, содержащими только нечетные степени ζ . Поэтому эти квадратичные слагаемые получаются как известные функции следующего вида:

$$\sum A_{j,2c} \zeta^{2j+1} \Lambda^2 + \sum A_{j,0,c} \zeta^{2j+1} + \sum A_{j,-2c} \zeta^{2j+1} \Lambda^{-2},$$

$$\sum A_{-j-1,-2c} \zeta^{2j+1} \Lambda^2 + \sum A_{-j-1,0,c} \zeta^{2j+1} + \sum A_{-j-1,2c} \zeta^{2j+1} \Lambda^{-2},$$

умноженные на e^2 .

Задача заключается в том, чтобы найти решение для $\delta_2 u$ и $\delta_2 s$, имеющее тот же вид, что и эти известные слагаемые в правых частях уравнений. Она напоминает задачу, рассмотренную для вариационной орбиты в разд. 20, с той лишь разницей, что присутствие множителей $\kappa u_0^{-1/2} s_0^{-3/2}$ и т. д. заставляет применить процедуру последовательных приближений.

Члены с множителем e^3 будут иметь вид ζ^{2j+1} , умножаемого на Λ^3 , Λ , Λ^{-1} , Λ^{-3} . Члены $\zeta^{2j+1} \Lambda^{\pm 1}$ имеют тот же вид, что и члены, содержащие множителем e . Чтобы учесть влияние этих членов, необходимо получить поправку к движению перигея. Эта новая часть с имеет множителем e^2 . Эта особенность повышает сложность решения относительно членов с множителем e^3 , но не представляет существенных затруднений; следующая поправка к с получается при вычислении членов с множителем e^5 .

Чтобы включить в решение относительно u и s члены, которые зависят от e' , a/a' и γ , необходимо, конечно, добавить новые члены к возмущающей функции; уравнения (42), (50) и эквивалентные им уравнения применимы только в том случае, если этими постоянными пренебрегают.

Замечания. Литература

Браун в своем фундаментальном труде (E. W. Brown, An Introductory Treatise on the Lunar Theory, Cambridge Univ. Press, 1896) подробно излагает все основные методы, которые применялись при изучении движения Луны, с полными ссылками и большим количеством поясняющих примечаний. Эта книга переиздана в 1960 г.

Работы Брауна в Mem. Roy. Astron. Soc. (53, 39—116, 163—202; 54, 1—63; 57, 51—145; 59, 1—103 (1897—1908)) содержат полное изложение теории движения Луны в соответствии с его собственными вычислениями, включая влияние сжатия Земли и Луны и планетные возмущения. В журнале Amer. J. Math. (17, 318, 1895) он дает общий очерк метода, использованного им при решении основной задачи. Браун при содействии Хедрика превратил свою теорию в «Таблицы движения Луны», опубликованные в 1919 г. в шести частях издательствами Иельского и Кембриджского университетов. Таблицы Брауна с 1923 по 1959 г. использовались для вычисления положений Луны, публикуемых в национальных Ежегодниках. С 1960 г. теория Брауна продолжает применяться, однако с целью получения дополнительной значащей цифры в координатах его тригонометрические ряды вычисляются непосредственно, без помощи таблиц.

Теория Делонэ движения Луны изложена в Mém. Acad. Sci., Paris (28, 1860; 29, 1867). С тех пор его метод интегрирования нашел много других важных применений; преобразования Делонэ теперь обычно называются контактными преобразованиями.

Хилл описал свой метод вращающейся системы прямоугольных координат в Amer. J. Math. (1, 5—26, 129—147, 245—260, 1878) и ввел бесконечный определитель в отдельной работе, опубликованной в 1877 г. и перепечатанной в Acta Math. (8, 1—36, 1886). Все его работы, достойные тщательного изучения, собраны и опубликованы в четырех томах, изданных в 1905—1907 гг. Институтом Карнеги. Относительно законности бесконечного определителя см. «Курс современного анализа» Уиттекера и Ватсона; мы в значительной степени следовали методу решения, изложенному в гл. XIX этого руководства. Для дальнейшего изучения рекомендуются работа Хилла в Acta Math. и рассмотрение этой проблемы в «Лекциях по небесной механике», принадлежащих Пуанкаре (том 2, часть 2).

Наше численное решение для движения узла основано на работе Брауна (Astron. J., 45, 84, 1936), в которой можно также найти аналогичные вычисления движения перигея. Адамс получил решение для движения узла до того, как Хилл опубликовал свою работу о движении перигея, однако Адамс напечатал краткое сообщение о своей работе в Mon. Not. Roy. Astron. Soc. (38, 43, 1877) только после появления статьи Хилла в печати. Подробности вычислений Адамса были опубликованы посмертно в его собрании сочинений (том 1, 181—188, 1896—1900). Работа Коузлла в Amer. J. Math. (18, 99, 1896), содержащая решение задачи Адамса, была использована Брауном в его теории Луны.

Введение r вместо m в левые части уравнений (54) было сделано Пуанкаре в его «Лекциях по небесной механике» (том 2, часть 2, 1907). Недавно члены самого низкого порядка были подробно описаны Армеро (J. G. Armesto, Rev. acad. columbiana cienc. exact. fis. y nat., 6, 500—576, 1946).

Исчезновение множителя m из определенных членов возмущающей функции обсуждено Гогу (M. C. Gogu, Ann. Obs. Paris, 18, E1—26, 1885).

Применение метода вариаций произвольных постоянных к спутниковым системам сделано Тиссераном в его четырехтомном «Трактате по небесной механике» (1891—1896) и Г. Струве в Poulkovo Obs. Suppl. 6 (1888). Оба автора приводят также примеры изменения a , обусловленного сжатием главной планеты и возмущениями от остальных спутников.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КООРДИНАТАХ

1. Введение. В гл. XI был развит метод определения движения материальной точки при возмущающем влиянии других материальных точек относительно некоторой центральной материальной точки, которая настолько массивна, что оказывает доминирующее воздействие на эту систему. В этом методе, известном под различными названиями — метод вариации элементов, вариации параметров или вариации произвольных постоянных, — шесть непрерывно изменяющихся оскулирующих элементов орбиты возмущающего тела выражаются в виде сумм тригонометрических рядов, аргументы которых являются либо линейными функциями от времени, либо линейными функциями от некоторых других переменных, связанных с временем посредством формул эллиптического движения. В настоящей главе будет изложен другой метод, в котором отклонения тела от чисто эллиптической орбиты выражаются как возмущения координат, соответствующих движению по этому эллипсу. Этот метод во многих отношениях сходен с методом Энке для частных возмущений, рассмотренным в гл. V, однако здесь мы будем рассматривать абсолютные возмущения полярных координат, а также абсолютные возмущения прямоугольных координат.

Хотя метод вариации произвольных постоянных в принципе резко отличается от метода вычислений возмущений в координатах, фактически представляется возможным объединить различными способами оба эти метода в один. Мы рассмотрим метод, примененный Ньюкомом к четырем внутренним планетам, для которых эксцентриситет, перигелий, наклонность и узел предполагаются меняющимися строго пропорционально времени, а периодические возмущения долготы, широты и радиуса-вектора, будучи прибавлены к соответствующим координатам в этом изменяющемся эллипсе, дают действительное положение планеты.

В заключение мы опишем метод Брауэра, который лучше приспособлен к вычислениям возмущенных прямоугольных координат, чем любой другой метод классической планетной теории.

2. Дифференциальные уравнения. Мы исходим из дифференциальных уравнений относительного движения, изученных в предшествующих главах, рассматривая для простоты одну возмущаемую планету и одну возмущающую планету, так как эти рассуждения легко обобщить на большее число тел. Пусть требуется найти возмущения планеты с массой m , движущейся относительно Солнца, масса которого равна единице, и возмущаемой другой планетой с массой m' . Полагая μ вместо

$k^2(1+m)$, приводим уравнения движения тела m относительно Солнца к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z},\end{aligned}\quad (1)$$

где прямоугольные координаты относятся к любой неподвижной плоскости, проходящей через Солнце, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а возмущающая функция R имеет следующее выражение:

$$R = k^2 m' \left\{ [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-1/2} - \frac{x'x + y'y + z'z}{r^3} \right\}. \quad (2)$$

Если долготу, отсчитываемую в этой основной плоскости, обозначить через v , радиус-вектор — через r , а широту — через B , то в этих трех переменных дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} - r \cos^2 B \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= \frac{\partial R}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \cos^2 B \frac{dv}{dt} \right) &= \frac{\partial R}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dB}{dt} \right) + r^2 \sin B \cos B \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 &= \frac{\partial R}{\partial B}\end{aligned}\quad (3)$$

и

$$R = k^2 m' \left[(r'^2 - 2rr' \cos H + r^2)^{-1/2} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right], \quad (4)$$

где

$$\cos H = \cos B \cos B' \cos(v - v') + \sin B \sin B'. \quad (5)$$

Вообще проще сохранить прямоугольную координату z вместо широты B и выбрать такие r и v , чтобы

$$x = \sqrt{r^2 - z^2} \cos v, \quad y = \sqrt{r^2 - z^2} \sin v. \quad (6)$$

Допустим теперь, что каждая координата возмущаемой планеты разделена на две части таким образом, что

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z, \quad (7)$$

первая из которых удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{\mu x_0}{r_0^3} &= 0, \\ \frac{d^2y_0}{dt^2} + \frac{\mu y_0}{r_0^3} &= 0, \\ \frac{d^2z_0}{dt^2} + \frac{\mu z_0}{r_0^3} &= 0,\end{aligned}\quad (8)$$

где $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$, а члены δx , δy , δz имеют порядок возмущающих сил.

Очевидно, что к x_0 , y_0 , z_0 можно было бы прибавить определенные функции времени t , не нарушая этим справедливость дифференциальных уравнений (8) для этих величин. Легко также видеть, что

в этом случае для представления положения планеты необходимо было бы вычесть эти же функции из dx , dy , dz ; поэтому такое разделение координат на две части является до некоторой степени произвольным. Эту неопределенность можно устранить, выбирая для постоянных интегрирования значения, согласующиеся с характером элементов, с помощью которых были получены x_0 , y_0 , z_0 . Если эти элементы являются оскулирующими в некоторую эпоху, то, очевидно, эти постоянные интегрирования должны быть определены так, чтобы dx , dy , dz вместе со своими первыми производными по времени обратились в нуль в эту же эпоху. С другой стороны, часто бывает выгодно использовать средние элементы, определенные таким образом, чтобы некоторые члены возмущений тождественно обращались в нуль, и в этом случае постоянные интегрирования должны быть определены в соответствии с определениями этих средних элементов. Ниже мы увидим, что можно связать каждую из шести независимых постоянных интегрирования с одним из шести элементов таким образом, чтобы возмущения координат уменьшились до своих наименьших возможных численных значений.

Положим теперь

$$r = r_0 + \delta r, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \frac{\partial R}{\partial r} dr + \frac{\partial R}{\partial v} dv + \frac{\partial R}{\partial B} dB. \end{aligned} \quad (10)$$

Последнее выражение представляет собой дифференциал R , когда изменяются только координаты возмущаемой планеты. Мы имеем также

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} + z \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (11)$$

что, очевидно, верно, если в левой части R выражается через r и любые две остальные координаты, которые делают x/r , y/r , z/r независимыми от r .

Умножая уравнения (1) соответственно на $2dx$, $2dy$, $2dz$ и складывая произведения, а затем интегрируя, получим

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 2 \int dR, \quad (12)$$

где μ/a — произвольная постоянная интегрирования; ясно, что мы имеем право считать ее такой, чтобы удовлетворялось следующее уравнение задачи движения двух тел:

$$\left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} \right)^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu}{a} = 0; \quad (13)$$

если имеется какая-нибудь остаточная постоянная, то ее необходимо считать включенной в $2 \int dR$. В полярных координатах уравнение (12) принимает вид

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \cos^2 B \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 2 \int dR. \quad (14)$$

С другой стороны, умножая уравнения (1) соответственно на x , y , z и складывая произведения, мы получаем, используя (11),

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu}{r} = r \frac{\partial R}{\partial r}, \quad (15)$$

или в полярных координатах

$$r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \cos^2 B \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 - r^2 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r} = r \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (16)$$

Сложение (16) с (14) дает

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (17)$$

Если из этого уравнения вычесть уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 r_0^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{a} = 0,$$

то, используя (9), получим

$$\frac{d^2 (r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} r_0 \delta r = 2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{d^2 (\delta r)^2}{dt^2} + \frac{\mu (\delta r)^2}{r_0^2 r}. \quad (18)$$

Два последних члена правой части этого уравнения имеют порядок квадрата возмущающей силы; если пренебречь квадратом возмущающей силы, то эти члены можно отбросить.

При помощи аналогичного процесса можно преобразовать уравнения (1) в следующие:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta x &= \frac{\partial R}{\partial x} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu x, \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta y &= \frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu y, \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta z &= \frac{\partial R}{\partial z} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu z. \end{aligned} \quad (19)$$

Для краткости мы полагаем теперь

$$\begin{aligned} Q_r &= 2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{d^2 (\delta r)^2}{dt^2} + \frac{\mu (\delta r)^2}{r_0^2 r}, \\ Q_x &= \frac{\partial R}{\partial x} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu x, \\ Q_y &= \frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu y, \\ Q_z &= \frac{\partial R}{\partial z} + \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) \mu z. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда дифференциальные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} r_0 \delta r &= Q_r, \\ \frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta x &= Q_x, \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta y &= Q_y, \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} \delta z &= Q_z. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку μ/r_0^3 является известной функцией t , а все Q имеют порядок возмущающей силы и, следовательно, в первом приближении также являются известными функциями t , уравнения (21) представляют собой линейные уравнения с известными правыми частями.

3. Интегрирование. Чтобы проинтегрировать уравнения (21), рассмотрим следующее линейное дифференциальное уравнение без правой части

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} q = 0. \quad (22)$$

Согласно теории этого класса дифференциальных уравнений, общее решение относительно q имеет вид

$$q = K_1 q_1 + K_2 q_2, \quad (23)$$

где K_1 и K_2 — произвольные постоянные, а q_1 и q_2 — любые два частных решения, которые не зависят друг от друга. Тогда необходимо должны существовать следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} q_1 &= 0, \\ \frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Путем исключения μ/r_0^3 из этих уравнений получаем

$$q_1 \frac{d^2q_2}{dt^2} - q_2 \frac{d^2q_1}{dt^2} = 0. \quad (25)$$

Это выражение является точным дифференциалом; интегрируя его, получаем

$$q_1 \frac{dq_2}{dt} - q_2 \frac{dq_1}{dt} = \text{const.} \quad (26)$$

Эта постоянная является произвольной и, исключая значение нуль, может быть выбрана какой угодно; для простоты мы примем ее равной единице.

Рассмотрим теперь более общее уравнение с правой частью

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3} q = Q. \quad (27)$$

Исключая μ/r_0^3 из этого уравнения и уравнений (24), получим

$$q_1 \frac{d^2q}{dt^2} - q \frac{d^2q_1}{dt^2} = Q q_1,$$

$$q_2 \frac{d^2q}{dt^2} - q \frac{d^2q_2}{dt^2} = Q q_2.$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} q_1 \frac{dq}{dt} - q \frac{dq_1}{dt} &= K_2 + \int q_1 Q dt, \\ q_2 \frac{dq}{dt} - q \frac{dq_2}{dt} &= -K_1 + \int q_2 Q dt, \end{aligned} \quad (28)$$

откуда в силу интеграла (26)

$$\begin{aligned} q &= K_1 q_1 + K_2 q_2 + q_2 \int q_1 Q dt - q_1 \int q_2 Q dt, \\ \frac{dq}{dt} &= K_1 \frac{dq_1}{dt} + K_2 \frac{dq_2}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \int q_1 Q dt - \frac{dq_1}{dt} \int q_2 Q dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Второе из написанных уравнений можно было бы получить также дифференцированием первого. Произвольные постоянные K_1 и K_2 можно считать содержащимися в интегралах $\int q_2 Q dt$ и $\int q_1 Q dt$; в последующем мы будем записывать уравнения этим способом.

Применяя эти результаты к уравнениям (21), мы имеем

$$\begin{aligned} r_0 \delta r &= q_2 \int q_1 Q_r dt - q_1 \int q_2 Q_r dt, \\ \delta x &= q_2 \int q_1 Q_x dt - q_1 \int q_2 Q_x dt, \\ \delta y &= q_2 \int q_1 Q_y dt - q_1 \int q_2 Q_y dt, \\ \delta z &= q_2 \int q_1 Q_z dt - q_1 \int q_2 Q_z dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, эти уравнения должны удовлетворять следующему соотношению:

$$r_0 \delta r = x_0 \delta x + y_0 \delta y + z_0 \delta z + \frac{1}{2} (\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - \frac{1}{2r_0^2} (r_0 \delta r)^2. \quad (31)$$

Однако необходимо использовать все уравнения (30), так как при употреблении метода последовательных приближений, которым мы вынуждены воспользоваться в этом случае, мы не можем получить значения Q_x , Q_y , Q_z до тех пор, пока не станет известным δr . В общем случае эти уравнения содержат девять произвольных постоянных: одну, прибавленную к члену $2 \int dR$ в Q_r , и восемь, введенных восемью интегралами (30). Однако эти восемь постоянных сведутся к шести независимым друг от друга при помощи условия (31); и константа, прибавленная к $2 \int dR$, определится как функция от этих шести при помощи следующего условия, выведенного из интеграла (12):

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz_0}{dt} \cdot \frac{d\delta z}{dt} + \frac{\mu}{r_0^2 r} r_0 \delta r &= \\ = \int dR - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\delta x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\delta y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

В случае оскулирующих элементов все постоянные определяются из условия обращения каждого интегрального выражения в нуль при $t=0$.

4. Способ Ганзена. Существует замечательный способ, введенный Ганзеном для приведения правых частей уравнений (30) к единому интегральному выражению и устраниющий, таким образом, трудность, которая иначе встречается при вычислениях. Трудность эта состоит в том, что возмущения получаются в виде малых разностей больших чисел. Множители q_1 и q_2 , стоящие вне знаков интеграла, могут быть внесены под знак интеграла, если условиться рассматривать при интегрировании содержащееся в них t как постоянное. Поскольку в таком случае необходимо отличать это t от t в величинах, уже стоящих под знаком интеграла, то мы обозначаем его через τ ; чтобы отметить, что в какой-нибудь величине, являющейся функцией от t , это t заменено на τ , мы заключаем эту величину в круглые скобки. Поэтому, полагая

$$N = (q_2) q_1 - (q_1) q_2, \quad (33)$$

мы получаем следующие простые выражения:

$$\begin{aligned} r_0 \delta r &= \int N Q_r dt, \quad \delta y = \int N Q_y dt, \\ \delta x &= \int N Q_x dt, \quad \delta z = \int N Q_z dt. \end{aligned} \tag{34}$$

После выполнения интегрирования τ заменяется на t . Поскольку τ при интегрировании считается постоянным, то к каждому из этих выражений необходимо прибавить произвольную функцию от τ , которая после замены τ на t становится произвольной функцией от t . Эти функции должны быть в каждом случае определены так, чтобы выражения (34) совпали с (30). Однако не обязательно рассматривать эти произвольные функции, если условиться выполнять интегрирование между самим t в качестве верхнего предела и некоторым нижним пределом, которым может быть любая постоянная величина. Тогда в общем случае к каждому уравнению необходимо прибавить произвольное выражение следующего вида:

$$K_1 q_1 + K_2 q_2.$$

В случае оскулирующих элементов, если нижний предел выбран равным нулю, это произвольное выражение обращается в нуль.

Уравнения (34) могут быть представлены в виде определенных интегралов; поэтому, поскольку N является симметричной функцией от q и (q) , имеем

$$\begin{aligned} r_0 \delta r &= - \int_0^t N(Q_r) d\tau, \quad \delta y = - \int_0^t N(Q_y) d\tau, \\ \delta x &= - \int_0^t N(Q_x) d\tau, \quad \delta z = - \int_0^t N(Q_z) d\tau, \end{aligned} \tag{35}$$

где N можно рассматривать как множитель, значение которого фактически равно нулю, но часть, зависящая от времени, входящая в его выражение, считается постоянной при интегрировании.

5. Множители q_1 и q_2 . Определим теперь значения q_1 и q_2 . Если мы положим

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad nt + c = l = u - e \sin u, \tag{36}$$

где n есть среднее движение, a — большая полуось, e — эксцентриситет, c — средняя аномалия в эпоху, l и u — средняя и эксцентрическая аномалии планеты m в эллипсе, выбранном в первом приближении, то

$$\frac{r_0}{a} = 1 - e \cos u, \quad dl = \frac{r_0}{a} du. \tag{37}$$

Тогда уравнение (22) можно преобразовать в

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{a^3}{r_0^3} q = 0.$$

Далее, если принять за независимую переменную эксцентрическую аномалию u , то это уравнение примет вид

$$(1 - e \cos u) \frac{d^2 q}{du^2} - e \sin u \frac{dq}{du} + q = 0. \tag{38}$$

Дифференцируя (38) по u и отбрасывая после этого ненужный множитель $1 - e \cos u$, мы получаем уравнение

$$\frac{d^3q}{du^3} + \frac{dq}{du} = 0,$$

интеграл которого имеет вид

$$q = K_1 \cos u + K_2 \sin u + K_3.$$

Чтобы этот интеграл мог удовлетворить уравнению (38), мы полагаем $K_3 = -K_1 e$. Следовательно, полный интеграл уравнения (38) имеет следующий вид:

$$q = K_1 (\cos u - e) + K_2 \sin u. \quad (39)$$

Теперь очевидно, что мы можем положить

$$q_1 = k (\cos u - e), \quad q_2 = k \sin u,$$

где k (не смешивать эту величину с гауссовой постоянной!) выбирается таким образом, чтобы удовлетворить интегралу (26). Когда эти значения подставлены, то мы находим, что $k^2 = 1/n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{a^3 n / \mu} (\cos u - e) = \sqrt{an / \mu} r_0 \cos f, \\ q_2 &= \sqrt{a^3 n / \mu} \sin u = \sqrt{an / \mu (1 - e^2)} r_0 \sin f, \end{aligned} \quad (40)$$

где f означает истинную аномалию возмущаемой планеты в ее эллиптической орбите. Подставляя эти значения в (32), мы получаем следующие два выражения для N :

$$\begin{aligned} N &= \frac{a^3 n}{\mu} \{ \sin [(u) - u] - e \sin (u) + e \sin u \}; \\ N &= \frac{an}{\mu \sqrt{1 - e^2}} (r_0) r_0 \sin [(f) - f]. \end{aligned} \quad (41)$$

Если t сохраняется в качестве независимой переменной, то любое из этих значений может быть использовано в выражениях (34). Однако в некоторых случаях может потребоваться интегрирование по u или f , и поскольку

$$n dt = \frac{r_0}{a} dn = \frac{r_0^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} df, \quad (42)$$

то мы получим

$$\begin{aligned} N dt &= \frac{a^2 r_0}{\mu} \{ \sin [(u) - u] - e \sin (u) + e \sin u \} du; \\ N dt &= \frac{1}{\mu a (1 - e^2)} (r_0) r_0^3 \sin [(f) - f] df. \end{aligned} \quad (43)$$

В последнем случае выражения для возмущений принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{\mu a (1 - e^2)} \int Q_r r_0^3 \sin [(f) - f] df, \\ \delta x &= \frac{r_0}{\mu a (1 - e^2)} \int Q_x r_0^3 \sin [(f) - f] df, \\ \delta y &= \frac{r_0}{\mu a (1 - e^2)} \int Q_y r_0^3 \sin [(f) - f] df, \\ \delta z &= \frac{r_0}{\mu a (1 - e^2)} \int Q_z r_0^3 \sin [(f) - f] df. \end{aligned} \quad (44)$$

Эти уравнения являются совершенно точными, так как при их выводе не было отброшено ни одного члена; однако при их практическом применении приходится столкнуться с необходимостью выражения значений функций Q через независимую переменную при помощи ряда приближений. В первом из этих приближений функции Q будут отягощены ошибками второго порядка относительно возмущающих сил; во втором — ошибками третьего порядка и так далее. Одно преимущество, которым обладают эти уравнения, состоит в том, что множители, на которые необходимо умножить функции Q перед интегрированием, являются функциями только от координат, соответствующих эллипсу первого приближения; они остаются тождественно одними и теми же, как бы далеко ни были проведены приближения. Аналогичным преимуществом обладают уравнения метода Брауэра, рассматриваемые ниже в этой главе.

Несмотря на то что система уравнений (44) является очень симметричной, она все же неудобна, так как содержит на одно соотношение больше, чем необходимо. Поэтому второе и третье уравнения мы заменим одним уравнением. Из уравнений (1) находим

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = H + \int \left(x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt, \quad (45)$$

где постоянную H не следует смешивать с H из формулы (4). В полярных координатах получим

$$r^2 \cos^2 B \frac{dv}{dt} = H + \int \frac{\partial R}{\partial v} dt. \quad (46)$$

Если мы предпочитаем прямоугольную координату z переменной B , то уравнение (46) можно написать в виде

$$(r^2 - z^2) \frac{dv}{dt} = H + \int \frac{\partial R}{\partial v} dt. \quad (47)$$

H представляет собой такую постоянную, что

$$x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} = (r_0^2 - z_0^2) \frac{dv_0}{dt} = H. \quad (48)$$

Можно показать, что численное значение H дается формулой

$$H = \sqrt{1 - e^2} \cos i,$$

где i — наклонность плоскости эллиптической орбиты к плоскости xy .

Полагая $v = v_0 + \delta v$, мы получаем из (47) следующее уравнение для определения δv :

$$\delta v = \int \left\{ \int \frac{an}{\mu} Q_r dt - \sqrt{1 - e^2} \cos i \frac{(r + r_0) dr - (z + z_0) dz}{r_0^2 - z_0^2} \right\} \frac{a^2 n}{r^2 - z^2} dt, \quad (49)$$

где Q_r означает $\partial R / \partial v$. Подставляя вместо $n dt$ любое из его значений из уравнений (42), мы можем принять n или f за независимую переменную. При помощи последней процедуры уравнение (49) приводится к следующему виду:

$$\delta v = \int \left\{ \int \frac{r_0^2}{\mu p} Q_v dv - \cos i \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} \right\} \frac{r_0^2}{r^2 - z^2} dv. \quad (50)$$

Подобно уравнениям (44), это уравнение является совершенно строгим, так как мы не пренебрегли ни одним членом. Вместе с первым и последним уравнениями системы (44) его достаточно для полного решения

задачи. Это уравнение является также совершенно общим, так как на положение плоскости xy , от которой отсчитывается координата z , не наложено никаких ограничений. В том случае, когда в качестве плоскости xy выбрана плоскость исходной эллиптической орбиты, уравнение (50) несколько упрощается. В этом случае, $i=0$, $z_0=0$ и $z=\delta z$; поэтому

$$\delta v = \int \left\{ \int \frac{r_0^2}{\mu p} Q_v dv - \frac{(r+r_0) \delta r - \delta z^2}{r_0^2} \right\} \frac{r_0^2}{r^2 - \delta z^2} dv. \quad (51)$$

6. Лишняя постоянная. При использовании первого и последнего уравнений системы (44) и уравнения (50) или (51) будет введено семь произвольных постоянных — три в уравнении, которое определяет δr , и по две в каждом из остальных. Одна из этих постоянных является лишней и должна быть определена как функция от остальных постоянных. Когда мы определяем возмущения, которые должны быть прибавлены к координатам, заданным при помощи оскулирующих элементов, эта трудность преодолевается легко: мы только должны прибавить к каждому интегралу некоторую постоянную, которая обратит его в нуль в эпоху оскуляции. Однако когда эти возмущения необходимо прибавить к координатам, выведенным по средним элементам, то самый простой метод заключается в допущении, что постоянная, прибавляемая к $\int dR$, является лишней постоянной. Тогда, как было установлено выше, уравнение (32) определит эту постоянную через остальные шесть. При разложении обеих частей этого уравнения в периодические ряды необходимо сохранить только непериодические члены. Непериодический член в $\int dR$ должен быть тем же, что и в выражении

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \delta x + \frac{dy_0}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \delta y + \frac{dz_0}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \delta z + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} \delta x \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \delta y \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{dt} \delta z \right)^2 \right] + \frac{\mu}{r_0 r} \delta r. \end{aligned}$$

Если в качестве плоскости xy выбрана плоскость исходного эллипса, то получится $dz_0/dt=0$, и один из членов уравнения (32) исчезнет. Допустим, что это выполнено и что координатами, выбранными для определения положения планеты m , являются r , v и δz ; тогда уравнение (32) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r+r_0) \cdot \frac{d}{dt} \delta r + \frac{1}{2} \left(r \frac{dv}{dt} + r_0 \frac{dv_0}{dt} \right) \left(r_0 \frac{d}{dt} \delta v + \frac{dv}{dt} \delta r \right) + \frac{\mu}{r_0 r} \delta r = \\ = \int dR + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dz^2 - \frac{1}{2} \frac{r^4}{r^2 - \delta z^2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta z}{r} \right)^2. \quad (52) \end{aligned}$$

Мы можем принять v_0 за независимую переменную вместо t при помощи подстановки $dt=r_0/\sqrt{\mu p} df$, которая дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{df} (r+r_0) \frac{d}{df} \delta r + \frac{1}{2} \left(r \frac{dv}{df} + r_0 \right) \left(r_0 \frac{d}{df} \delta v + \frac{dv}{df} \delta r \right) + \frac{r_0^3}{pr} \delta r = \\ = \frac{r_0^4}{\mu p} \int dR + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{df} \right)^2 \delta z^2 - \frac{1}{2} \frac{r^4}{r^2 - \delta z^2} \left(\frac{d}{df} \frac{\delta z}{r} \right)^2. \quad (53) \end{aligned}$$

Если мы сохраним члены только первого порядка относительно возмущающих сил, то это уравнение сведется к следующему:

$$p \frac{d}{df} \delta v + (2 + e \cos f) \delta r + e \sin f \frac{d}{df} \delta r = -\frac{r^2}{\mu} \int dR. \quad (54)$$

Трудность с лишней постоянной может быть устранена путем использования $\int dR$ вместо функции Q_v . Вычитая удвоенное уравнение (18) из уравнения (52) и используя следующее уравнение, даваемое эллиптической теорией,

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} - r_0 \left(\frac{dv_0}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r_0^2} = 0$$

для преобразования результата, мы получаем

$$\begin{aligned} r_0^2 \frac{d^2 r_0}{dt^2} \cdot \frac{d}{dt} \delta v &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr_0}{dt} \delta r + 2r_0 \frac{d}{dt} \delta r \right) - 3 \int dR - 2r \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \delta r^2 - \\ &- \frac{\mu \delta r^2}{r_0^2 r} - \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 (\delta r^2 - \delta z^2) - \frac{1}{2} r_0 \delta r \frac{d}{dt} \delta v \left(\frac{dv}{dt} + 2 \frac{dv_0}{dt} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{r^4}{r^2 - \delta z^2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta z}{r} \right)^2. \end{aligned} \quad (55)$$

В этом уравнении не отброшен ни один член; если мы ограничимся первым порядком возмущающих сил, то оно примет более простой вид:

$$dv = \frac{\frac{dr}{dt} \delta r + 2r \frac{d}{dt} \delta r - \int \left(3 \int dR + 2r \frac{\partial R}{\partial r} \right) dt}{a^2 n \sqrt{1-e^2}}. \quad (56)$$

Если мы выберем истинную аномалию f за независимую переменную, то это уравнение запишется так:

$$dv = \frac{2}{p} (1 + e \cos f) \frac{d}{df} \delta r + \frac{e}{p} \sin f \cdot \delta r - \frac{1}{\mu} \int \left(3 \int dR + 2r \frac{\partial R}{\partial r} \right) \frac{p df}{(1+e \cos f)^2}. \quad (57)$$

Если вместо уравнения (51) используются уравнения (55), (56) или (57), то число произвольных постоянных, входящих в выражения для возмущений, будет равно шести — надлежащему количеству. Последние уравнения обладают также тем преимуществом, что δr входит в выражение для dv не под знаком интеграла в отличие от уравнения (51). Кроме того, при разложении величин, подлежащих интегрированию, в периодические ряды определение коэффициентов при членах долгого периода с дополнительной точностью ограничивается единственной величиной dR .

7. Возмущения первого порядка. Мы даем здесь формулы для случая, когда за независимую переменную принимается истинная аномалия f вследствие простоты аналитических выражений. Однако не следует это понимать так, что в численных приложениях обязательно следует предпочитать только эту независимую переменную. Применение эксцентритической аномалии делает ряды более быстро сходящимися, что представляет важное преимущество в случаях, когда эксцентриситет орбиты возмущаемого объекта велик; с другой стороны, использование средней аномалии облегчает вычисление положений возмущаемого объекта и упрощает процесс интегрирования. Однако легко понять, какие видо-

изменения необходимо произвести в формулах в тех случаях, когда следует использовать ту или иную из двух последних названных переменных.

Так как в тех случаях, когда мы ограничиваемся первым порядком возмущающих сил, необходимо подставить для координат в функциях Q эллиптические (невозмущенные) значения, то нет нужды проводить различие между эллиптическими и точными значениями, и мы поэтому опустим нулевые нижние индексы. Если мы положим

$$\begin{aligned} T &= \frac{r^3}{\mu p} Q_r = \frac{r^3}{\mu p} \left[2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right], \\ Y &= \frac{r^2}{\mu p} \frac{\partial R}{\partial v}, \\ Z &= \frac{r^3}{\mu p} \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \quad (58)$$

то первое и последнее уравнения из (44) и уравнение (51) примут вид

$$\begin{aligned} \delta r &= \int T \sin [(f) - f] df, \\ \delta v &= \int \left[\int Y df - 2 \frac{\delta r}{r} \right] df, \\ \delta B &= \int Z \sin [(f) - f] df. \end{aligned} \quad (59)$$

Обратясь к формуле (2) для R , легко найти выражения для Y и Z . Чтобы найти T , положим

$$X = \frac{r^4}{\mu p} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (60)$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\mu p} dR = r^{-2} \left[\frac{e}{p} \sin f \cdot X + Y \right] df. \quad (61)$$

Поэтому уравнения для возмущений первого порядка принимают вид

$$\begin{aligned} \delta r &= \int \left[X + 2r^3 \int r^{-2} \left(\frac{e}{p} \sin f \cdot X + Y \right) df \right] \sin [(f) - f] df, \\ \delta v &= \int \left[\int Y df - 2 \frac{\delta r}{r} \right] df, \\ \delta B &= \int Z \sin [(f) - f] df. \end{aligned} \quad (62)$$

Второе из этих уравнений можно заменить уравнением (57), но в таком случае будет правильным употребить вместо Y функцию $\int dR$. Если координаты r , r' , z , z' исключены из R посредством их выражений через истинные аномалии f , f' , то R становится функцией только от f и f' и

$$\int dR = \int \frac{\partial R}{\partial f} df. \quad (63)$$

Это уравнение верно также и в том случае, если f' заменено на l' или l '. Однако, чтобы сделать различные выражения интегрируемыми при f в качестве независимой переменной, необходимо исключить l' посредством следующего тождества:

$$l' \equiv \frac{n'}{n} f + c' - \frac{n'}{n} c - \frac{n'}{n} (f - l). \quad (64)$$

Затем мы полагаем

$$\theta' = \frac{n'}{n} f + c' - \frac{n'}{n} c, \quad (65)$$

и поэтому

$$l' = \theta' - \frac{n'}{n} (f - l), \quad \frac{d\theta'}{df} = \frac{n'}{n}. \quad (66)$$

С функцией R в такой форме получим

$$\int dR = R - \frac{n'}{n} \int \frac{\partial R}{\partial \theta'} \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} df \quad (67)$$

и

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = a \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (68)$$

Но если применяются уравнения (6), то формулы (2), (4) и (5) показывают, что выражения для X , Y , Z имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= \frac{m'}{\mu p} r^3 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \cos B' \cos(v' - v) - \frac{m'}{\mu p} \frac{r^5}{\Delta^3}, \\ Y &= \frac{m'}{\mu p} r^3 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \cos B' \sin(v' - v), \\ Z &= \frac{m'}{\mu p} r^3 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \sin B', \end{aligned} \quad (69)$$

в котором

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos B' \cos(v' - v). \quad (70)$$

Когда при рассмотрении возмущений первого порядка используется переменная θ' , определяемая равенством (65), периодическое разложение каждой из интегрируемых функций независимо от того, произведено ли предварительно умножение на множитель $\sin[(f) - f]$ или нет, будет иметь следующий вид:

$$\sum_{j, j'} [K_{j, j'}^{(c)} \cos(jf + j'\theta') + K_{j, j'}^{(s)} \sin(jf + j'\theta')], \quad (71)$$

где j и j' — положительные или отрицательные целые числа (включая нуль), однако без потери общности одно из них всегда может быть ограничено только положительными значениями (включая нуль). Когда это выражение интегрируется при f в качестве независимой переменной, то в результате получается

$$\sum_{j, j'} (j, j') [K_{j, j'}^{(c)} \sin(jf + j'\theta') - K_{j, j'}^{(s)} \cos(jf + j'\theta')], \quad (72)$$

где принято следующее обозначение:

$$(j, j') = \frac{1}{j + j' \frac{n'}{n}}, \quad (73)$$

за исключением свободного члена, который после интегрирования дает $K_{0,0}^{(c)} f$. Если это выражение умножено на $\sin[(f) - f]$ до интегрирования, то результат интегрирования имеет следующий вид:

$$\sum_{j, j'} \{ -(j-1, j') (j+1, j') [K_{j, j'}^{(c)} \cos(jf + j'\theta') + K_{j, j'}^{(s)} \sin(jf + j'\theta')]\}, \quad (74)$$

за исключением членов, соответствующих $j=1$, $j'=0$, для которых мы получаем

$$\frac{f}{2} (K_{1,0}^{(c)} \sin f - K_{1,0}^{(s)} \cos f). \quad (75)$$

Остальные члены, которые пропорциональны $\cos f$ и $\sin f$, могут быть отброшены, так как они объединяются с произвольным выражением, дополняющим этот интеграл.

На этом этапе можно было бы перейти к аналитическому определению возмущений второго порядка, которые представляют собой приращения возмущений первого порядка и получаются вычислением приращений возмущающих сил при допущении, что планеты движутся не просто по эллипсам, а по эллипсам, измененным возмущениями первого порядка. Однако разложения, которые получаются в этом случае, будут неудобны для вычислений, и мы предпочитаем отложить этот вопрос до тех пор, пока не рассмотрим метод, свободный от такого недостатка. Тем временем мы переходим к дальнейшему рассмотрению выражения (75).

8. Вековые возмущения. Характерной особенностью выражения (75) является то, что оно содержит угол f вне знаков функций \sin и \cos ; возмущения, обладающие таким свойством, называются вековыми возмущениями. Эти возмущения неограниченно растут с возрастанием угла f и потому непригодны для представления движения планеты в течение очень большого промежутка времени. Такое неудачное свойство не присуще самой проблеме абсолютных возмущений, а обусловлено тем методом разложения, который мы применили. В свое время были разработаны аналитические методы, не страдающие этим недостатком, однако они до сих пор не применялись к планетной задаче из-за очень большого объема требуемых для этого вычислений. Проблема вековых возмущений будет рассмотрена далее в гл. XIV.

Допустим, что функция T из уравнения (59), разложенная в ряд как периодическая функция от f и θ' , содержит члены вида

$$K^{(c)} \cos f + K^{(s)} \sin f,$$

где $K^{(c)}$ и $K^{(s)}$ — постоянные. Умножение на $\sin [(f) - f]$ дает в произведении члены, не зависящие от f , вида

$$\frac{1}{2} K^{(c)} \sin(f) - \frac{1}{2} K^{(s)} \cos(f).$$

Если рассматривать только эти члены, то δr содержит следующие члены:

$$\delta r = \frac{f}{2} (K^{(c)} \sin f - K^{(s)} \cos f). \quad (76)$$

Но мы имеем $f = nt + c +$ периодические члены. Когда это выражение подставлено вместо первого множителя в правой части (76), то произведение периодических членов на второй множитель порождает только те члены, которые снова являются периодическими. В таком случае выражение

$$\delta r = \frac{1}{2} nt (K^{(c)} \sin f - K^{(s)} \cos f) \quad (77)$$

содержит все те члены из δr , которые имеют t вне знаков функций \sin и \cos ; оно составляет вековое возмущение r . Остальные члены, будучи чисто периодическими, представляют периодические возмущения. Аналогично, если Z содержит члены вида

$$k^{(c)} \cos f + k^{(s)} \sin f,$$

то вековое возмущение широты можно свести к следующему выражению:

$$\delta B = \frac{1}{2} nt (k^{(c)} \sin f - k^{(s)} \cos f). \quad (78)$$

Для того чтобы найти вековое возмущение долготы, можно воспользоваться уравнением (56) или (57). В связи с этим обратим внимание на то, что в случаях употребления средних элементов обычно принято выбирать эти элементы таким образом, чтобы освободить возмущение δv , разложенное в ряд как функция t , от членов вида $a + \beta t$, где a и β — постоянные. Разумеется, для того чтобы это осуществить, к функции $\int dR$ в (56) необходимо присоединить такую постоянную, чтобы сделать $\beta = 0$. Тогда ясно, что усеченная форма уравнения (57)

$$\delta v = \frac{2}{p} (1 + e \cos f) \frac{d}{df} \delta r + \frac{e}{p} \sin f \cdot \delta r \quad (79)$$

будет содержать вековые возмущения v при условии, что мы отбросим член вида βt . Подставляя вместо δr в (79) его значение из выражения (77), получим

$$\delta v = nt \left[\left(\cos f + \frac{1}{4} e \cos 2f \right) \frac{K^{(c)}}{p} + \left(\sin f + \frac{1}{4} e \sin 2f \right) \frac{K^{(s)}}{p} \right]. \quad (80)$$

Но множитель $\cos f + \frac{1}{4} e \cos 2f$, если его разложить в периодический ряд по средней аномалии, содержит в качестве постоянного члена

$$\frac{(1-e^2)^{3/2} - 1 - \frac{1}{2} e^2}{2e}.$$

Поэтому, чтобы освободить δv от члена, пропорционального t , мы должны написать

$$\begin{aligned} \delta v = nt & \left\{ \left[\frac{1 + \frac{1}{2} e^2 - (1 - e^2)^{3/2}}{2e} + \cos f + \frac{1}{4} e \cos 2f \right] \frac{K^{(c)}}{p} + \right. \\ & \left. + \left[\sin f + \frac{1}{4} e \sin 2f \right] \frac{K^{(s)}}{p} \right\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Это выражение составляет вековую часть возмущения долготы.

Важно отметить, что эти вековые возмущения первого порядка в трех координатах планеты могут быть полностью учтены путем простого допущения, что четыре элемента промежуточной орбиты: e , $\tilde{\omega}$, i , h (h есть долгота узла) — получают приращения, пропорциональные времени, которые, однако, настолько малы, что можно пренебречь их квадратами и произведениями. Чтобы это доказать, найдем значения следующих частных производных:

$$\frac{\partial r}{\partial e}, \quad \frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}}, \quad \frac{\partial v}{\partial e}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}}, \quad \frac{\partial B}{\partial i}, \quad \frac{\partial B}{\partial h}.$$

Дифференцируя уравнения

$$r = a(1 - e \cos u), \quad l = u - e \sin u,$$

мы получаем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos u + ae \sin u \frac{\partial u}{\partial e},$$

$$(1 - e \cos u) \frac{\partial u}{\partial e} - \sin u = 0.$$

Исключением $\partial u / \partial e$ находим

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} = -a \cos f. \quad (82)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} &= -\frac{dr}{ndt} = -\frac{dr}{df} \frac{dj}{ndt} = -\frac{dr}{df} \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} = \\ &= -a \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin f. \end{aligned} \quad (83)$$

Дифференцирование равенства

$$\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \ln \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{1}{2} \ln (1-e) - \frac{1}{2} \ln (1+e)$$

дает

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{df}{\sin f} = \frac{de}{1-e^2}. \quad (84)$$

Но

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{a}{r} de. \quad (85)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \sin f \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) = \frac{(2+e \cos f) \sin f}{1-e^2}. \quad (86)$$

Имеем также

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}} = 1 - \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}. \quad (87)$$

Дифференцируя равенство

$$\sin B = \sin i \sin (f+g),$$

где g — угловое расстояние от узла до перигелия, и помня, что здесь B и i имеют порядок возмущающих сил, мы получаем

$$\frac{\partial B}{\partial i} = \sin (f+g), \quad \frac{\partial B}{\partial h} = -\sin i \cos (f+g). \quad (88)$$

Отсюда очевидно, что вековые возмущения координат r , B , v , заданные уравнениями (77), (78) и (81), можно написать в следующем виде:

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial e} \delta e + \frac{\partial r}{\partial \tilde{\omega}} \delta \tilde{\omega},$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial e} \delta e + \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}} \delta \tilde{\omega}, \quad (89)$$

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial i} \delta i + \frac{\partial B}{\partial h} \delta h,$$

где δe , $\delta \tilde{\omega}$, δi , δh имеют такие значения:

$$\begin{aligned}\delta e &= \frac{K^{(s)}}{2a} nt, \\ e\delta\tilde{\omega} &= -\frac{K^{(c)}}{2a} \sqrt{1-e^2} nt, \\ \delta i &= \frac{1}{2} (k^{(c)} \cos g - k^{(s)} \sin g) nt, \\ \sin i \delta h &= \frac{1}{2} (k^{(c)} \sin g + k^{(s)} \cos g) nt.\end{aligned}\tag{90}$$

Чтобы доказать, что δv не имеет члена вида at^2 , необходимо показать, что dR , входящее в уравнение (56), не имеет постоянного члена. Когда функция R разлагается в периодический ряд по средним аномалиям l и l' , она принимает следующий вид:

$$R = \sum_{j, j'} [K_{j, j'}^{(c)} \cos(jl + j'l') + K_{j, j'}^{(s)} \sin(jl + j'l')].\tag{91}$$

Значение dR получается из этого разложения путем частного дифференцирования по l . Таким образом,

$$dR = \sum_{j, j'} j [-K_{j, j'}^{(c)} \sin(jl + j'l') + K_{j, j'}^{(s)} \cos(jl + j'l')] n dt.\tag{92}$$

Постоянный член функции R , для которого $j=0$, исчезает из этого выражения.

Определение вековых возмущений, коль скоро рассматривается первый порядок возмущающих сил, целиком зависит от установления значений четырех постоянных: $K^{(c)}$, $K^{(s)}$, $k^{(c)}$, $k^{(s)}$. Если предположить, что значения T и Z зависят от двух переменных f и θ' , то эти постоянные даются следующими двойными определенными интегралами:

$$\begin{aligned}K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T \cos f df d\theta', \\ K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T \sin f df d\theta', \\ k^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Z \cos f df d\theta', \\ k^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Z \sin f df d\theta'.\end{aligned}\tag{93}$$

Однако здесь, будет выгодно возвратиться к независимым переменным l и l' . Мы имеем

$$\frac{df}{dl} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}, \quad l' = \theta' - \frac{n'}{n} (f - l)$$

и, следовательно, мы можем положить $d\theta' = dl'$. Поэтому

$$\begin{aligned} K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \left(2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) r \cos f dl dl', \\ K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \left(2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) r \sin f dl dl', \\ k^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial z} r \cos f dl dl', \\ k^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial z} r \sin f dl dl'. \end{aligned} \quad (94)$$

В этих выражениях мы имеем

$$R = m' k^2 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x'x + y'y + z'z}{r'^3} \right), \quad \frac{\partial R}{\partial z} = m' k^2 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) z'. \quad (95)$$

Из уравнения

$$\frac{d^2 x'}{dl'^2} + \frac{a'^3}{r'^3} x' = 0$$

мы получаем выражение

$$\int \frac{x'}{r'^3} dl' = - \frac{1}{a'^3} \int \frac{d^2 x'}{dl'^2} dl' = - \frac{1}{a'^3} \frac{dx'}{dl'},$$

которое приводит к следующим трем равенствам:

$$\int_0^{2\pi} \frac{x'}{r'^3} dl' = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{y'}{r'^3} dl' = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{z'}{r'^3} dl' = 0, \quad (96)$$

так как принимает одинаковые значения при $l' = 0$ и $l' = 2\pi$. Таким образом, в выражениях (94) можно допустить, что

$$R = \frac{m' k^2}{\Delta}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{k^2 m' z'}{\Delta^3}. \quad (97)$$

Первое и второе равенства из (94) могут быть еще более упрощены при помощи подстановки $R + m' \gamma$ вместо функции $\int dR$, где γ — постоянная, которую необходимо определить таким образом, чтобы δv не содержало членов, пропорциональных t .

Также мы имеем

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{m' k^2}{2} \left(\frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta} \right). \quad (98)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 m' a}{2\mu \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} + 2\gamma \right) r \cos f dl dl', \\ K^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 m' a}{2\mu \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} + 2\gamma \right) r \sin f dl dl', \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} k^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 m' a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \frac{z'}{\Delta^3} r \cos f \, dl \, dl', \\ k^{(s)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{k^2 m' a}{\mu \sqrt{1-e^2}} \frac{z'}{\Delta^3} r \sin f \, dl \, dl'. \end{aligned} \quad (99)$$

Сравнение уравнений (56) и (81) показывает, что для определения постоянной γ , если dv не должно содержать членов вида at , необходимо, чтобы

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(3 \int dR + 2r \frac{\partial R}{\partial r} \right) dl \, dl' = \frac{(1-e^2)^{3/2} - 1 - \frac{1}{2} e^2}{\sqrt{1-e^2}} a K^{(c)} n^2, \quad (100)$$

или, делая предыдущие подстановки,

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} m' \left(\frac{2}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} + 3\gamma \right) dl \, dl' = \frac{(1-e^2)^{3/2} - 1 - \frac{1}{2} e^2}{\sqrt{1-e^2}} a K^{(c)} n^2. \quad (101)$$

Но мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r \cos f \, dl \, dl' &= -3ae, \\ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin f \, dl \, dl' &= 0. \end{aligned} \quad (102)$$

Используя эти интегралы и исключая γ из (99), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{(1-e^2)^{3/2} + 1 - \frac{5}{2} e^2}{2\sqrt{1-e^2}} K^{(c)} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m' a}{2\mu \sqrt{1-e^2}} \times \\ &\times \left[\left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} \right) r \cos f + ae \left(\frac{2}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} \right) \right] dl \, dl', \end{aligned} \quad (103)$$

$$K^{(s)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m' a}{2\mu \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} \right) r \sin f \, dl \, dl'.$$

Путем введения эксцентрической аномалии u эти уравнения могут быть приведены к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{(1-e^2)^{3/2} + 1 - \frac{5}{2} e^2}{2\sqrt{1-e^2}} K^{(c)} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m' a}{\mu} \times \\ &\times \left[\left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} \right) a \cos u - \frac{ae}{\Delta} \right] dl \, dl', \end{aligned} \quad (104)$$

$$K^{(s)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m' a}{\mu} \left(\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} \right) a \sin u \, dl \, dl'.$$

Ограничивааясь интегрированием по l' , мы видим, что определение вековых возмущений зависит от следующих трех определенных интегралов:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{\Delta^3} \right) dl', \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl'}{\Delta}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z'}{\Delta^3} dl'.$$

Разложение в ряды величин, подлежащих интегрированию, откладывается до гл. XV.

9. Введение в метод Брауэра. Метод вычисления общих планетных возмущений, описанный в предшествующих разделах этой главы, мало использовался на практике и никогда не применялся в тех случаях, когда с некоторой степенью полноты вычислялись возмущения второго порядка. Лишняя постоянная интегрирования и необходимость вычисления возмущений радиуса-вектора с большей степенью точности, чем требуется для этой координаты, с тем чтобы получить достаточную точность в возмущениях долготы, представляют собой те недостатки, которые препятствовали широкому применению метода. Кроме того, аналитическая и вычислительная работа по определению возмущений второго порядка при помощи этого метода является очень запутанной и громоздкой.

Браузер разработал метод вычисления возмущений прямоугольных координат, который свободен от этих недостатков. Фактически оказывается, что этот метод и метод Гаизена (который будет изложен в гл. XIV) являются единственными методами, с которыми необходимо серьезно считаться в тех случаях практических приложений, когда решено с самого начала использовать численные значения элементов и когда требуется точность, сравнимая с точностью наблюдений.

10. Уравнения движения. Как и выше, рассмотрим неподвижную систему прямоугольных координат с началом в Солнце. Пусть масса Солнца равна единице, масса возмущаемой планеты есть m , масса возмущающей планеты — m' и гауссова постоянная — k . Тогда уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \quad (105)$$

где

$$\mu = k^2(1+m),$$

$$R = k^2 m' \left\{ [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{-1/2} - \frac{x'x + y'y + z'z}{r^3} \right\}. \quad (106)$$

Если для краткости мы положим

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

то уравнения движения можно написать в канонической форме

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial z},\end{aligned}\tag{107}$$

где гамильтониан F определяется следующей формулой:

$$F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} - R.\tag{108}$$

Обозначим через $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ функции от времени и эллиптических элементов, соответствующие эллиптической орбите, которая удовлетворяет уравнениям (105) и (107), если функцию R положить равной нулю, и обозначим радиус-вектор в этом эллипсе через r_0 . Предположим, что система координат ориентирована таким образом, что плоскость xy совпадает с плоскостью эллипса, ось x направлена в неподвижный перигелий, ось y сдвинута на 90° в направлении движения планеты, предполагаемого прямым, а ось z направлена в сторону полусферы, содержащей небесный северный полюс. Тогда мы имеем $\dot{z}_0 = 0, \ddot{z}_0 = 0$, и фактические координаты планеты можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = \delta z, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0 + \delta \dot{x}, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 + \delta \dot{y}, \quad \dot{z} = \delta \dot{z},\end{aligned}$$

где $\delta x, \delta \dot{x}$ и т. д. суть возмущения. Вычитая уравнения эллиптического движения из уравнений (105), мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \delta x &+ \frac{\mu}{r^3} (x_0 + \delta x) - \mu \frac{x_0}{r_0^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta y &+ \frac{\mu}{r^3} (y_0 + \delta y) - \mu \frac{y_0}{r_0^3} = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta z &+ \frac{\mu}{r^3} \delta z = \frac{\partial R}{\partial z}.\end{aligned}\tag{109}$$

Необходимо, чтобы $\delta x, \delta y$ и δz были малыми величинами порядка возмущающих сил, и это ограничивает выбор промежуточной орбиты. Когда возмущения планеты вычисляются в первый раз, можно использовать оскулирующую орбиту, однако если известны приближенные значения возмущений, то лучше воспользоваться промежуточной орбитой. В любом случае шесть постоянных интегрирования, связанных с решением уравнений (109), должны быть определены в соответствии с выбранной исходной орбитой, чтобы теория была справедливой.

Второй член в левых частях уравнений (109) можно разложить по степеням $\delta x, \delta y, \delta z$. Когда это выполнено и члены второго и более высоких порядков перенесены в правые части, в результате получаются

следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta x + \frac{\mu}{r_0^3} \delta x - \frac{3\mu x_0}{r_0^5} (x_0 \delta x + y_0 \delta y) &= G_x, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta y + \frac{\mu}{r_0^3} \delta y - \frac{3\mu y_0}{r_0^5} (x_0 \delta x + y_0 \delta y) &= G_y, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta z + \frac{\mu}{r_0^3} \delta z &= G_z. \end{aligned} \quad (110)$$

В дополнение к членам, входящим в G , которые получаются из разложения в ряды вторых членов левых частей уравнений (109), необходимо разложить частные производные возмущающей функции в ряды Тэйлора по степеням значения R_0 этой возмущающей функции, которое получается в том случае, когда для координат обеих планет подставлены невозмущенные эллиптические значения. Поэтому, если мы ограничиваемся величинами второго порядка относительно возмущающих сил, то

$$\begin{aligned} G_x = & \frac{\partial R_0}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0^2} \delta x + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0 \partial y_0} \delta y + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0 \partial z_0} \delta z + \\ & + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0 \partial x'_0} \delta x' + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0 \partial y'_0} \delta y' + \frac{\partial^2 R_0}{\partial x_0 \partial z'_0} \delta z' + \\ & + \mu \left[\left(\frac{9}{2} \frac{x_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{x_0^3}{r_0^7} \right) \delta x^2 + \left(3 \frac{y_0}{r_0^5} - 15 \frac{x_0^2 y_0}{r_0^7} \right) \delta x \delta y + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{2} \frac{x_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{x_0 y_0^2}{r_0^7} \right) \delta y^2 + \frac{3}{2} \frac{x_0}{r_0^5} \delta z^2 \right], \\ G_y = & \frac{\partial R_0}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0 \partial x_0} \delta x + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0^2} \delta y + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0 \partial z_0} \delta z + \\ & + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0 \partial x'_0} \delta x' + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0 \partial y'_0} \delta y' + \frac{\partial^2 R_0}{\partial y_0 \partial z'_0} \delta z' + \\ & + \mu \left[\left(\frac{3}{2} \frac{y_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{x_0^2 y_0}{r_0^7} \right) \delta x^2 + \left(3 \frac{x_0}{r_0^5} - 15 \frac{x_0 y_0^2}{r_0^7} \right) \delta x \delta y + \right. \\ & \left. + \left(\frac{9}{2} \frac{y_0}{r_0^5} - \frac{15}{2} \frac{y_0^3}{r_0^7} \right) \delta y^2 + \frac{3}{2} \frac{y_0}{r_0^5} \delta z^2 \right], \\ G_z = & \frac{\partial R_0}{\partial z_0} + \frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0 \partial x_0} \delta x + \frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0 \partial y_0} \delta y + \frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0^2} \delta z + \\ & + \frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0 \partial x'_0} \delta x' + \frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0 \partial y'_0} \delta y' + \frac{\partial^2 R_0}{\partial z_0 \partial z'_0} \delta z'. \end{aligned} \quad (111)$$

При вычислении частных производных дифференцирование необходимо выполнять до подстановки численных значений координат, причем координаты возмущающей планеты должны быть отнесены к тем же осям, которые выбраны для возмущенной планеты.

Третье уравнение системы (110) уже рассматривалось выше в этой главе в немного отличной форме, и в дальнейшем мы ограничимся двумя остальными уравнениями.

11. Интегрирование. Чтобы проинтегрировать первые два уравнения из системы (110), рассмотрим следующие линейные дифференциальные уравнения без правой части:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta x + \frac{\mu}{r_0^3} \delta x - \frac{3\mu x_0}{r_0^5} (x_0 \delta x + y_0 \delta y) &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta y + \frac{\mu}{r_0^3} \delta y - \frac{3\mu y_0}{r_0^5} (x_0 \delta x + y_0 \delta y) &= 0. \end{aligned} \quad (112)$$

Общее свойство этого класса дифференциальных уравнений заключается в том, что они обладают следующими частными решениями:

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_1}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_1}, \\ \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_2}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_2}, \\ \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_3}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_3}, \\ \delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, & \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_4},\end{aligned}\quad (113)$$

если c_1, c_2, c_3, c_4 — любые четыре элемента, которые определяют движение в плоскости эллиптической орбиты. Тогда общее решение уравнений (112) имеет вид

$$\begin{aligned}\delta x &= C_1 \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, \\ \delta y &= C_1 \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial y_0}{\partial c_4},\end{aligned}\quad (114)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — четыре постоянные интегрирования. Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned}\dot{\delta x} &= C_1 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}, \\ \dot{\delta y} &= C_1 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4}.\end{aligned}\quad (115)$$

Мы предположим теперь, что решение первых двух уравнений (110) имеет тот же вид, что и (114) и (115), но с C_1, C_2, C_3, C_4 как функциями от времени вместо постоянных. Тогда дифференцирование (114) дает

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \delta x &= C_1 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_4}, \\ \frac{d}{dt} \delta y &= C_1 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_4}.\end{aligned}\quad (116)$$

Вводя условия

$$\begin{aligned}\frac{dC_1}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial c_4} &= 0, \\ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial c_4} &= 0,\end{aligned}\quad (117)$$

получаем также

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \delta x &= C_1 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \ddot{x}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta y &= C_1 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_2} + C_3 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_3} + C_4 \frac{\partial \ddot{y}_0}{\partial c_4} + \\ &+ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4},\end{aligned}\quad (118)$$

где мы применяем следующие обозначения:

$$\ddot{x}_0 = \frac{d^2x_0}{dt^2}, \quad \ddot{y}_0 = \frac{d^2y_0}{dt^2}.$$

Теперь подставим выражения (114) для δx и δy и выражения (118) для вторых производных от δx и δy в первые два уравнения из (110). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} &= G_x, \\ \frac{dC_1}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} + \frac{dC_2}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} + \frac{dC_3}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} + \frac{dC_4}{dt} \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} &= G_y. \end{aligned} \quad (119)$$

Таким образом, интегрирование первых двух уравнений системы (110), каждое из которых является уравнением второго порядка, сведено к интегрированию четырех уравнений (117) и (119), каждое из которых представляет собой уравнение первого порядка. Зависимыми переменными в этих уравнениях являются C_1, C_2, C_3, C_4 , которые входят только в линейных комбинациях своих производных. Решение этих четырех линейных уравнений относительно производных четырех функций C свело бы эту задачу к четырем квадратурам. Это приведение, конечно, возможно, если разрешается считать G_x и G_y известными функциями времени, как подразумевается при обычном процессе последовательных приближений. В системе выражений (111) коэффициенты при δx , δy , z и при их степенях и произведениях известны с самого начала и могут быть разложены в двойные ряды Фурье с коэффициентами, которые являются известными числовыми постоянными, и с аргументами, представляющими собой линейные комбинации выбранных независимых переменных, например, средних аномалий. Если же о δx , δy , z ничего не известно, то в первом приближении их следует положить равными нулю, что ограничивает G_x и G_y их первыми членами. Получающиеся возмущения будут точны до первого порядка относительно возмущающих сил и во втором приближении будут подставлены в выражения (111), что приведет к возмущениям, точным до второго порядка возмущающих сил. Если в силу малости возмущений можно преисбречь невыписанными членами выражений (111), которые содержат кубы δx , δy , z и такие комбинации, как, например, $\delta x^2 \delta y$ и т. д., то повторение этого же процесса приведет к возмущениям, точным до третьего порядка возмущающих сил; с другой стороны, если невыписанные члены выражений (111) ощутимы, то их можно легко учесть. Однако может случиться, что приближенные значения δx , δy , z известны с самого начала. В этом случае их можно подставить в выражения (111), и тогда первое приближение приведет к улучшенным значениям этих возмущений, которые будут точны до второго порядка, если погрешности возмущений, использованных в первом приближении, не слишком велики. Таким образом, становится очевидным преимущество этого метода. Почти во всех случаях, когда такой метод применим к членам солнечной системы, приближения могут быть продолжены до какой угодно требуемой степени точности простым повторением одного и того же процесса, потому что почти всегда достаточно тех членов, которые выписаны в выражениях (111), тогда как при использовании других методов вычисление возмущений третьего порядка приводит к исключительно сложным выражениям.

12. Формальное решение. Четыре уравнения (117) и (119) можно считать линейными уравнениями относительно неизвестных величин dC_1/dt , dC_2/dt , dC_3/dt , dC_4/dt , так как все частные производные, умноженные на них, являются известными функциями от времени. Поэтому, если мы обозначим определитель из коэффициентов через J и алгебраическое дополнение какого-нибудь элемента из J — приписыванием звездочки к обычному обозначению определителя, то решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dC_1}{dt} &= \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} \right|^*, \\ \frac{dC_2}{dt} &= \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} \right|^*, \\ \frac{dC_3}{dt} &= \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} \right|^*, \\ \frac{dC_4}{dt} &= \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} \right|^*.\end{aligned}\tag{120}$$

Если мы подставим эти значения в выражения (114), то мы получим выражения для δx и δy следующего вида:

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x_0}{\partial c_1} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} \right|^* \right\} dt + \\ &\quad + \frac{\partial x_0}{\partial c_2} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} \right|^* \right\} dt + \\ &\quad + \frac{\partial x_0}{\partial c_3} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} \right|^* \right\} dt + \\ &\quad + \frac{\partial x_0}{\partial c_4} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} \right|^* \right\} dt, \\ \delta y &= \frac{\partial y_0}{\partial c_1} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_1} \right|^* \right\} dt + \\ &\quad + \frac{\partial y_0}{\partial c_2} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_2} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_2} \right|^* \right\} dt + \\ &\quad + \frac{\partial y_0}{\partial c_3} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_3} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_3} \right|^* \right\} dt + \\ &\quad + \frac{\partial y_0}{\partial c_4} \int \left\{ \left| \frac{G_x}{J} \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_4} \right|^* + \frac{G_y}{J} \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial c_4} \right|^* \right\} dt.\end{aligned}\tag{121}$$

Если необходимо вычислить δx и δy , то выражения для них можно получить простой заменой x_0 на \dot{x}_0 и y_0 на \dot{y}_0 в восьми множителях, стоящих вне знаков интеграла.

Решение уравнений движения в представленной форме вызывает то же возражение, что и решение в виде (30), а именно что возмущения получаются в форме малых разностей больших чисел. Способ Гаузена для преодоления этой трудности пригоден также и здесь. Однако, прежде чем идти дальше, необходимо выбрать геометрическую интерпретацию величин c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , чтобы упростить рассмотрение задачи.

Для этого можно воспользоваться любой системой из четырех канонических элементов, определяющих эллиптическое движение. Для практических вычислений удобно выбрать такую систему, чтобы необходимые частные производные можно было вычислить, минуя деление на эксцентриситет, и именно так будет здесь сделано.

13. Явное решение. Мы выбираем следующую систему элементов: среднюю долготу $w = l + \tilde{\omega}$; $L = \sqrt{\mu a}$, где a — большая полуось, а $\mu = k^2(1+m) = n^2 a^3$, причем n — среднее движение в единицу времени t , а также ξ и η , определяемые следующими формулами:

$$\xi = +[2\sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2})]^{1/2} \cos \tilde{\omega},$$

$$\eta = -[2\sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2})]^{1/2} \sin \tilde{\omega}.$$

В принятых элементах первые четыре уравнения (107) преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial w}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \xi}, & \frac{d\xi}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (122)$$

где

$$F = -\frac{\mu^2}{2L^2} - R,$$

причем необходимо считать, что гамильтониан F выражен теперь через элементы w , L , ξ , η . Это каноническое преобразование не содержит времени и оставляет гамильтониан неизменным.

Якобиан этого преобразования обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} J_C = J \left(\frac{x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0}{w, L, \eta, \xi} \right) &= +1, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial w_0} \right|^* &= +\frac{\partial w_0}{\partial x_0} = +\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0}, & \left| \frac{\partial y_0}{\partial w_0} \right|^* &= +\frac{\partial w_0}{\partial y_0} = +\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial L_0}, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0} \right|^* &= +\frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} = +\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \xi_0}, & \left| \frac{\partial y_0}{\partial \eta_0} \right|^* &= +\frac{\partial \eta_0}{\partial y_0} = +\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \xi_0}, \\ \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0} \right|^* &= +\frac{\partial w_0}{\partial \dot{x}_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial L_0}, & \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial w_0} \right|^* &= +\frac{\partial w_0}{\partial \dot{y}_0} = -\frac{\partial y_0}{\partial L_0}, \\ \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \eta_0} \right|^* &= +\frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{x}_0} = -\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}, & \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \eta_0} \right|^* &= +\frac{\partial \eta_0}{\partial \dot{y}_0} = -\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0}, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial L_0} \right|^* &= +\frac{\partial L_0}{\partial x_0} = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0}, & \left| \frac{\partial y_0}{\partial L_0} \right|^* &= +\frac{\partial L_0}{\partial y_0} = -\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial w_0}, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} \right|^* &= +\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = -\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial \eta_0}, & \left| \frac{\partial y_0}{\partial \xi_0} \right|^* &= +\frac{\partial \xi_0}{\partial y_0} = -\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \eta_0}, \\ \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0} \right|^* &= +\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_0} = +\frac{\partial x_0}{\partial w_0}, & \left| \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial L_0} \right|^* &= +\frac{\partial L_0}{\partial \dot{y}_0} = +\frac{\partial y_0}{\partial w_0}, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} \right|^* &= +\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{x}_0} = +\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}, & \left| \frac{\partial y_0}{\partial \xi_0} \right|^* &= +\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{y}_0} = +\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0}. \end{aligned} \quad (123)$$

Равенство первых и вторых частей этих соотношений вытекает непосредственно из характера преобразования. Равенство вторых и третьих частей доказывается в различных учебниках, рассматривающих канонические преобразования.

Теперь мы свяжем эллиптические значения w_0, L_0, ξ_0, η_0 переменных w, L, ξ, η с постоянными c_1, c_2, c_3, c_4 эллиптической орбиты. Поскольку R обращается в нуль в аллиптическом движении, мы имеем

$$F_0 = -\frac{\mu^2}{2L_0^2}$$

и

$$\frac{dw_0}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial L_0} = \frac{\mu^2}{L_0^3} = \mu^{1/2}a^{-3/2} = n, \quad \frac{dL_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi_0}{dt} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w_0 &= nt + k_1, & L_0 &= k_2, \\ \eta_0 &= k_3, & \xi_0 &= k_4, \end{aligned} \tag{124}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 , суть постоянные, и

$$n = \mu^2 k_1^{-3}, \quad \frac{\partial n}{\partial k_2} = -3\mu^2 k_2^{-4}.$$

Поэтому мы можем положить $c_1 = k_1, c_2 = k_2, c_3 = k_3, c_4 = k_4$, или

$$\begin{aligned} w_0 &= nt + c_1, & L_0 &= c_2, \\ \eta_0 &= c_3, & \xi_0 &= c_4. \end{aligned} \tag{125}$$

Сравним теперь якобиан J_C с якобианом

$$J_c = \begin{pmatrix} \dot{x}_0, & \dot{x}_0, & \dot{y}_0, & \dot{y}_0 \\ \hline c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \end{pmatrix}.$$

Любую функцию f от переменных x, \dot{x}, y, \dot{y} можно рассматривать как функцию от переменных w, L, ξ, η или от t и постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 . Мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial c_1} &= \frac{\partial f}{\partial w_0}, & \frac{\partial f}{\partial c_2} &= \frac{\partial f}{\partial L_0} - 3\mu^2 c_1^{-4} t \frac{\partial f}{\partial w_0}, \\ \frac{\partial f}{\partial c_3} &= \frac{\partial f}{\partial \eta_0}, & \frac{\partial f}{\partial c_4} &= \frac{\partial f}{\partial \xi_0}. \end{aligned} \tag{126}$$

Следовательно, в якобиане J_c элементы первого, третьего и четвертого столбцов тождественны элементам в соответствующих столбцах якобиана J_C . Элементы второго столбца якобиана J_c получаются прибавлением элементов первого столбца, умноженных на $-3\mu^2 c_1^{-4} t$, к элементам второго столбца якобиана J_C . Поэтому эти два якобиана равны, и

$$J_c = J_C = +1,$$

а алгебраические дополнения якобиана J_c тождественны соответствующим алгебраическим дополнениям якобиана J_C , за исключением алгебраических дополнений элементов первого столбца. Для них мы имеем, согласно соотношениям (126) и (123),

$$\left| \frac{\partial x_0}{\partial c_1} \right|^* = \left| \frac{\partial x_0}{\partial w_0} \right|^* + 3\mu^2 c_1^{-4} t \left| \frac{\partial x_0}{\partial L_0} \right|^* = + \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0} - 3\mu^2 c_1^{-4} t \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0},$$

$$\left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial c_1} \right|^* = \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial w_0} \right|^* + 3\mu^2 c_1^{-4} t \left| \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial L_0} \right|^* = - \frac{\partial x_0}{\partial L_0} + 3\mu^2 c_1^{-4} t \frac{\partial x_0}{\partial w_0}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x_0}{\partial c_2} \right| = - \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}, \quad \left| \frac{\partial x_0}{\partial c_2} \right|^* = + \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0}, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial c_3} \right|^* = + \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}, \quad \left| \frac{\partial x_0}{\partial c_3} \right| = - \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0}, \\ \left| \frac{\partial x_0}{\partial c_4} \right|^* = - \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}, \quad \left| \frac{\partial x_0}{\partial c_4} \right| = + \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0}. \end{aligned} \quad (127)$$

Соответствующие восемь уравнений для другой координаты могут быть получены из этих уравнений при помощи подстановки y_0 вместо x_0 и y_0 вместо x_0 .

14. Выражения для возмущений. Выражения для возмущений получаются при помощи подстановки уравнений (127) в (121). Для удобства обозначений мы разделяем возмущения на две части, обозначая члены, которые не содержат t явным образом в виде множителя, приписыванием нижнего индекса 1, а члены, содержащие t в явном виде, приписыванием нижнего индекса 2.

Таким образом,

$$\delta_x = \delta_1 x + \delta_2 x,$$

$$\delta y = \delta_1 y + \delta_2 y.$$

Мы также вносим множители, стоящие вне знаков интеграла в (121), под знаки интеграла и заключаем их в скобки, чтобы указать, что t , входящее в них выражения, необходимо при интегрировании считать постоянным, как это мы делали ранее. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \delta_1 x = \int \left\{ \left[\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial L_0} \right) - \frac{\partial x_0}{\partial L_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \right) + \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0} \right) \right] G_x + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial L_0} \right) - \frac{\partial y_0}{\partial L_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \right) + \frac{\partial y_0}{\partial \eta_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial y_0}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \eta_0} \right) \right] G_y \right\} dt, \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 y = \int \left\{ \left[\frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial L_0} \right) - \frac{\partial x_0}{\partial L_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} \right) + \frac{\partial x_0}{\partial \eta_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial x_0}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0} \right) \right] G_x + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial L_0} \right) - \frac{\partial y_0}{\partial L_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} \right) + \frac{\partial y_0}{\partial \eta_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \xi_0} \right) - \frac{\partial y_0}{\partial \xi_0} \left(\frac{\partial y_0}{\partial \eta_0} \right) \right] G_y \right\} dt. \end{aligned}$$

Выражения в квадратных скобках можно разложить в двойные ряды Фурье, аргументы которых являются линейными комбинациями l и λ , причем это λ считается при интегрировании постоянным, но после него заменяется на l . Они играют ту же роль, что и выражения N в уравнениях (33) и (41).

Что же касается $\delta_2 x$ и $\delta_2 y$, если мы положим

$$K = \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} G_x + \frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} G_y, \quad (129)$$

то

$$\delta_2 x = 3\mu^2 L_0^{-4} \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \left[\int t K dt - t \int K dt \right].$$

Но

$$\int t K dt = \int t d [\int K dt] = t \int K dt - \int \int K dt dt$$

и, следовательно,

$$\delta_2 x = -3\mu^2 L_0^{-4} \frac{\partial x_0}{\partial \omega_0} \int \int K dt dt.$$

Аналогично

$$\delta_2 y = -3\mu^2 L_0^{-4} \frac{\partial y_0}{\partial \omega_0} \int \int K dt dt. \quad (130)$$

Если о возмущениях вначале ничего не известно, так что необходимо ограничить G_x и G_y их первыми членами, то $\delta_2 x$ и $\delta_2 y$ принимают очень простой вид. В этом случае мы имеем, поскольку $\mu^2 L_0^{-4} = n^2 a / \mu$,

$$\begin{aligned} \delta_2 x &= -\frac{3n^2 a}{\mu} \frac{\partial x_0}{\partial l} \int \int \frac{\partial R_0}{\partial l} dt dt, \\ \delta_2 y &= -\frac{3n^2 a}{\mu} \frac{\partial y_0}{\partial l} \int \int \frac{\partial R_0}{\partial l} dt dt. \end{aligned} \quad (131)$$

Частные производные, входящие в эти выражения, могут быть очень легко вычислены, если x_0 , y_0 и R_0 разложены в ряды Фурье по средним аномалиям.

В любом случае при вычислении возмущений выше первого порядка необходимо использовать полные выражения (130).

Заметим здесь, что двойное интегрирование в (131) не может дать члены вида βt^2 , где β есть постоянная, так как это могло бы произойти лишь в том случае, если бы производная $\partial R_0 / \partial l$ содержала постоянный член; если же функция R_0 разложена в виде двойного ряда Фурье по l и l' , то очевидно, что постоянный член этого разложения исчезает после дифференцирования. Однако интегрирования в (130), которые должны быть применены для возмущений выше первого порядка, дадут, вообще говоря, член вида βt^2 , так как G_x и G_y вообще содержат постоянные члены.

Если требуется получить возмущения компонент скорости δx и δy , то необходимо лишь заменить x_0 и y_0 на \dot{x}_0 и \dot{y}_0 всюду, где они встречаются в уравнениях (128), (129) и (130).

15. Квадратные скобки. Квадратные скобки, входящие в уравнения (128), содержать суммы произведений восьми частных производных, а именно частных производных от x_0 и y_0 по каждому из четырех элементов промежуточной орбиты, причем с самого начала используются постоянные численные значения a , n , e и \bar{b} . Для этих восьми частных производных можно найти аналитические выражения, однако, по-видимому, самым легким путем для их вычисления будет применение гармонического анализа к частным значениям, вычисленным для равнотстоящих значений независимой переменной. При вычислениях также будет удобно умножить отдельные ряды на такие множители, которые сделают коэффициенты функциями только от эксцентриситета и безразмерными. Поэтому вместо рядов, входящих в уравнения (128), мы вычисляем

$$\frac{1}{a} \frac{\partial q}{\partial \omega_0}, \quad na \frac{\partial q}{\partial L_0}, \quad \frac{(\mu a)^{1/4}}{a} \frac{\partial q}{\partial \eta_0}, \quad \frac{\mu a}{a} \frac{1/4}{\partial \xi_0} \frac{\partial q}{\partial \xi_0},$$

где q означает либо x_0 , либо y_0 . Также мы будем вычислять не x_0 и y_0 , а x_0/a и y_0/a .

Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial q}{\partial w_0} &= \frac{1}{a} \frac{\partial q}{\partial l}, \\ na \frac{\partial q}{\partial L_0} &= 2 \frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2}}{a} \frac{\partial q}{\partial e}, \\ \frac{(\mu a)^{1/4}}{a} \frac{\partial q}{\partial \eta_0} &= \frac{1}{2a \sin \frac{\Phi}{2}} \left(\frac{\partial q}{\partial l} - \frac{\partial q}{\partial \tilde{\omega}} \right), \\ \frac{(\mu a)^{1/4}}{a} \frac{\partial q}{\partial \xi_0} &= \frac{\cos \varphi}{a \cos \frac{\Phi}{2}} \frac{\partial q}{\partial e}, \end{aligned} \quad (132)$$

где $\sin \varphi = e$.

Мы имеем также

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial x_0}{\partial e} &= -1 - \frac{a}{r} \sin^2 u, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial y_0}{\partial e} = -\frac{e}{\cos \varphi} \sin u + \frac{a}{r} \cos \varphi \sin u \cos u, \\ \frac{\partial x_0}{\partial a} &= \cos u - e, \quad \frac{\partial y_0}{\partial a} = \cos \varphi \sin u, \end{aligned}$$

где в частных производных по a отброшены члены, умноженные на время.

Кроме того,

$$\frac{\partial x_0}{\partial l} - \frac{\partial x_0}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial x_0}{\partial l} + y_0, \quad \frac{\partial y_0}{\partial l} - \frac{\partial y_0}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial y_0}{\partial l} - x_0.$$

16. Постоянные интегрирования. Полные выражения для возмущений были получены нами без какого бы то ни было рассмотрения вопроса о постоянных интегрирования; легко найти, что эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta x &= c_x + c_{0x}t + c_{1x} \cos l + c_{2x} \cos 2l + c_{3x} \cos 3l + \dots + \\ &\quad + s_{1x} \sin l + s_{2x} \sin 2l + s_{3x} \sin 3l + \dots, \\ \delta y &= c_y + c_{0y}t + c_{1y} \cos l + c_{2y} \cos 2l + c_{3y} \cos 3l + \dots + \\ &\quad + s_{1y} \sin l + s_{2y} \sin 2l + s_{3y} \sin 3l + \dots, \end{aligned} \quad (133)$$

где c и s — числовые коэффициенты.

Эти выражения охватывают все члены возмущений, аргументы которых не зависят от положения возмущающей планеты, за исключением вековых членов и членов, умноженных на t^2 или t^3 , которые появляются в возмущениях второго и более высоких порядков. Мы предположили здесь, что независимой переменной является время, а не истинная аномалия или эксцентрическая аномалия, так как это почти всегда будет иметь место на практике.

Известно, что в нашем распоряжении имеются четыре постоянные интегрирования, которые должны быть связаны с четырьмя независимыми элементами эллиптического движения в соответствии с принципами определения этих элементов. При этом мы не сталкиваемся с тем затруднением, которое встречается в методе, описанном в разделах,

предшествующих разд. 9, и заключается в том, что из-за присутствия лишней постоянной постоянные интегрирования очень сложным образом связаны с вековыми возмущениями. Симметричный характер представленных разложений избавляет нас от этого неудобства. Однако вместо одного неудобства появляется другое, которое состоит в том, что соотношения между элементами и возмущениями прямоугольных координат несколько сложны. Однако эта трудность легко преодолевается путем преобразования возмущений (133) в возмущения истинной долготы в орбите. Обозначая эту долготу через v , получаем с точностью до членов первого порядка (это все, что когда-либо потребуется)

$$\delta v = \frac{1}{r_0^2} (x_0 \delta y - y_0 \delta x).$$

После разложения по l выражение для δv принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta v = & C + C_0 t + C_1 \cos l + C_2 \cos 2l + C_3 \cos 3l + \dots + S_1 \sin l + \\ & + S_2 \sin 2l + S_3 \sin 3l + \dots, \end{aligned} \quad (134)$$

где C и S — снова числовые коэффициенты.

Рассмотрим случай средних элементов, определенных таким образом, чтобы в соответствии с общепринятой практикой постоянные C , C_0 , C_1 и S_1 обратились в нуль. Чтобы это осуществить, мы начинаем с выражения конечного приращения истинной долготы v в виде функции от произвольных приращений четырех элементов: w , n , e и $\tilde{\omega}$. Для общности мы используем буквенное разложение с точностью до третьего порядка эксцентриситета, но на практике обычно следует предпочесть численное разложение, если только эксцентриситет e не очень мал. Обозначая среднюю долготу в основную эпоху через w_0 и полагая для удобства $w_0 - \tilde{\omega} = l$, имеем

$$\begin{aligned} v = w_0 + nt + \left(2e - \frac{1}{4} e^3 \right) \sin(w_0 - \tilde{\omega}) + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 \right) \sin 2(w_0 - \tilde{\omega}) + \\ + \frac{13}{12} e^3 \sin 3(w_0 - \tilde{\omega}), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta v = \Delta w_0 + t \Delta n - e \Delta \tilde{\omega} \left[\left(2 - \frac{1}{4} e^3 \right) \cos l + \left(\frac{5}{2} e - \frac{11}{12} e^3 \right) \cos 2l + \frac{39}{12} e^2 \cos 3l \right] + \\ + \Delta e \left[\left(2 - \frac{3}{4} e^2 \right) \sin l + \left(\frac{5}{2} e - \frac{11}{6} e^3 \right) \sin 2l + \frac{39}{12} e^2 \sin 3l \right]. \end{aligned} \quad (135)$$

Положим теперь

$$\Delta w_0 = -C, \quad \Delta n = -C_0, \quad \Delta e = -\frac{S_1}{2 - \frac{3}{4} e^2}, \quad e \Delta \tilde{\omega} = -\frac{C_1}{2 - \frac{1}{4} e^2}$$

и тогда, складывая (134) и (135), получим для этих возмущений следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta v = & \left(C_2 - \frac{\frac{5}{2} e - \frac{11}{12} e^3}{2 - \frac{1}{4} e^2} C_1 \right) \cos 2l + \left(C_3 - \frac{\frac{39}{12} e^3}{2 - \frac{1}{4} e^2} C_1 \right) \cos 3l + \dots + \\ & + \left(S_2 - \frac{\frac{5}{2} e - \frac{11}{6} e^3}{2 - \frac{3}{4} e^2} S_1 \right) \sin 2l + \left(S_3 - \frac{\frac{39}{12} e^3}{2 - \frac{3}{4} e^2} S_1 \right) \sin 3l + \dots \end{aligned} \quad (136)$$

Новые значения возмущений, которые необходимо использовать вместо выражений (133), получаются подстановкой разложения (136) в следующие формулы:

$$\delta x = -r_0 \sin f_0 \cdot \Delta v, \quad \delta y = +r_0 \cos f_0 \cdot \Delta v,$$

где $r_0 \sin f_0$ и $r_0 \cos f_0$ разложены в ряды Фурье по дугам, кратным l . При таком способе действий коэффициенты $c_x, c_{1x}, s_{1x}, c_y, c_{1y}, s_{1y}$ в нуль не обращаются, но значительно уменьшаются, а остальные коэффициенты в выражениях (133) примут новые значения.

Две постоянные, возникающие при интегрировании уравнения для δz , могут быть выбраны согласно условию, чтобы в выражении для δz коэффициенты при $\sin l$ и $\cos l$ обращались в нуль.

Этим полностью завершается рассмотрение постоянных интегрирования. Хотя при каждом последовательном приближении к значениям возмущений постоянные должны определяться заново, тем не менее во всех случаях пригоден один и тот же процесс, так как постоянные всегда представляют собой малые числа, квадратами которых можно пренебречь.

Можно было бы принять и другие определения средних элементов. Мы делаем это в следующей главе, в которой средние элементы будут выбраны таким образом, чтобы обратились в нуль некоторые возмущения средней долготы вместо истинной, как было сделано здесь. Этот выбор всегда можно сделать произвольным образом, и наиболее целесообразный порядок действий зависит от формы, в которой выражаются возмущения. В данном случае мы могли бы сделать выбор таким образом, чтобы обусловить обращение в нуль определенных коэффициентов, например в выражении для δx , однако сделанный нами выбор обладает преимуществом сохранения некоторой симметрии в выражениях для δx и δy и, по-видимому, лишен недостатков.

Из предыдущего очевидно, что в тех случаях, когда мы выходим за пределы эллиптического невозмущенного движения и начинаем аппроксимировать с некоторой степенью точности действительное движение небесного тела, строгое определение элементов становится возможным только при условии учета возмущений. Так как возмущения можно представить в различной форме, то и элементы будут принимать значения, слегка отличающиеся друг от друга. Поэтому элементы утрачивают свой геометрический смысл и, строго говоря, должны рассматриваться только как параметры, по которым строится теория.

17. Возмущающая функция и ее производные. Если мы отбросим нижний индекс нуль у эллиптических значений координат, условившись, что в этом разделе используются только эллиптические значения, и положим

$$\Delta^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

то, так как $z = 0$, мы получим

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x' x + y' y}{r'^3} \right), \quad (137)$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. В выражении (137) координаты возмущающей планеты должны быть отнесены к тем же осям, что и координаты возмущаемой планеты.

Для целей вычислений выгодно заменить возмущающую функцию R и ее производные безразмерными величинами. Поскольку R имеет размерность, обратную длине, то мы можем это сделать, умножая ее на любую длину. Оказывается, что если использовать для этой цели большую полуось a' возмущающей планеты, то постоянный член функции $a'R$, когда она разложена в ряд, будет порядка массы m' , что удобно при вычислениях. По тем же причинам мы предпочитаем x/a вместо x , a/r вместо $1/r$ и т. д. Тогда, полагая $\alpha = a/a'$ при условии $a < a'$, мы имеем

$$\begin{aligned} a'R &= k^2 m' \left[\frac{a'}{\Delta} - \alpha \left(\frac{x}{a} \frac{x}{a'} + \frac{y}{a} \frac{y}{a'} \right) \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right], \\ a'^2 \frac{\partial R}{\partial x} &= k^2 m' \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right) - \frac{x'}{a'} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right], \\ a'^2 \frac{\partial R}{\partial y} &= k^2 m' \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \left(\frac{y'}{a'} - \alpha \frac{y}{a} \right) - \frac{y'}{a'} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right], \\ a'^2 \frac{\partial R}{\partial z} &= k^2 m' \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \frac{z'}{a'} - \frac{z'}{a'} \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right], \\ a'^3 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} &= k^2 m' \left[\left(3 \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \right), \quad (138) \right. \\ a'^3 \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} &= 3k^2 m' \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \left(\frac{y'}{a'} - \alpha \frac{y}{a} \right) \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right), \\ a'^3 \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} &= 3k^2 m' \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \left(\frac{z'}{a'} \right) \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right), \\ a'^3 \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} &= k^2 m' \left[-3 \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 + 3 \left(\frac{x'}{a'} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 - \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right], \\ a'^3 \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y'} &= k^2 m' \left[-3 \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \left(\frac{y'}{a'} - \alpha \frac{y}{a} \right) \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right) + 3 \frac{x'}{a'} \frac{y'}{a'} \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 \right], \\ a'^3 \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z'} &= k^2 m' \left[-3 \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \left(\frac{z'}{a'} \right) \left(\frac{x'}{a'} - \alpha \frac{x}{a} \right) + 3 \frac{x'}{a'} \frac{z'}{a'} \left(\frac{a'}{r'} \right)^5 \right]. \end{aligned}$$

Остальные частные производные легко могут быть выведены из этих выражений, причем необходимо помнить, что z нельзя полагать равным нулю до выполнения дифференцирования. Если использовать подобные числовые множители в членах функций G , умножаемых на μ , то мы найдем, что возмущения легко получаются в следующем виде:

$$\delta x/a, \quad \delta y/a, \quad \delta z/a.$$

Все множители, входящие в выражения (138), легко могут быть разложены в ряды Фурье при помощи гармонического анализа частных значений, за исключением отношения a'/Δ и его нечетных степеней, которые сходятся очень медленно и которым будет посвящена гл. XV.

Замечания. Литература

Метод вычисления возмущений сферических координат, изложенный в этой главе, был, по-видимому, создан Энке и изложен им в «Berliner Jahrbuch» на 1857 год. Он был использован Ньюкомом в его первой теории движения Урана в 1872 г. и позже в его теории движения четырех внутренних планет (Astron. Papers of the Amer. Ephem.

meris, 3, 395, 1891), которая до настоящего времени составляет основу эфемерид Солнца, Меркурия, Венеры и Марса. Однако этот метод не очень удобен для систематических вычислений возмущений выше первого порядка. Именно до некоторой степени недостаточное рассмотрение Ньюкомом возмущений второго порядка (см. там же, 5, 49, 297, 1895) в основном ответственно за недостатки, обнаруженные в настоящее время в упомянутых эфемеридах.

В методе Энке постоянные интегрирования более многочисленны, чем это необходимо для решения задачи, и потому требуют постоянного внимания. Метод Энке был применен к малой планете (8) Флора Брюновым с некоторыми промахами, что стало предметом горячей полемики между Энке и Ганзеном в «Astronomische Nachrichten», начиная с № 1002 (1855), и в других изданиях. Аналогичные промахи были допущены Ньюкомом для четырех внутренних планет. Ему удалось, однако, избежать серьезных последствий, сделав вековые возмущения предметом отдельного исследования, вместо того чтобы определять их из уравнений Энке.

Метод Браузера был применен (только с точностью до первого порядка) к движению малой планеты (185) Эвника Дэйвисом (Astron. J., 56, 188, 1952).

Глава XIV

МЕТОД ГАНЗЕНА

1. Введение. Среди многих вкладов, внесенных Ганзеном в решение проблемы обсолютных возмущений, три результата играют столь важную роль, что метод, включающий в себя любой из них, мог бы по праву называться методом Ганзена. Сочетание же всех трех выдающихся достижений в едином методе делает его настолько отличным от методов предшественников Ганзена, что придает ему исключительно отирующий с первого взгляда вид, которого он не заслуживает. Этим внешним видом и недостаточной ясностью изложения и объясняется мнимая трудность метода. Что же касается вычисления возмущений первого порядка относительно возмущающих сил, то метод Ганзена превосходит все остальные методы по экономии труда; не ясно, будет ли это верно также для возмущений более высоких порядков, но во всяком случае его единственным соперником является метод Браузера вычисления возмущений в прямоугольных координатах. Кроме того, благодаря быстроте сходимости используемых рядов метод Ганзена в большей степени, чем многие другие, применим к орбитам с большими эксцентриситетами и наклонностями.

Лаплас¹⁾ вычислил неравенства долгого периода таким образом, как если бы они должны были быть прибавлены к средней долготе, а неравенства короткого периода так, как если бы их необходимо было прибавить к истинной долготе. Преимущества первого пути очевидны; одно неравенство долгого периода в средней долготе порождает несколько неравенств в истинной долготе, причем два наибольших из них имеют период, почти совпадающий с периодом обращения планеты, тогда как остальные неравенства будут еще более короткого периода. Однако Лаплас не показал, каким образом оба эти пути решения могут быть согласованы друг с другом. Это вопрос значительной трудности, и фактически никогда не было сделано попыток строгого вычисления возмущений выше первого порядка по методу Лапласа.

Ганзен первым оценил те преимущества, которые получатся в результате прибавления всех возмущений как долгого, так и короткого периодов к средней долготе, или, что то же, к средней аномалии. В этом случае уравнение центра, вычисленное по формуле эллиптического движения, дает непосредственно истинную возмущенную долготу в орбите, тогда как радиус-вектор и широта, полученные по эллиптическим формулам с использованием возмущенной средней аномалии,

¹⁾ P. S. Laplace, Mécanique céleste, English translation by N. Bowditch, with commentary, Hilliard, Gray, Little and Williams, Boston, 1829.

потребуют лишь небольших поправочных членов, для того чтобы быть точными. Применение Ганзеном этого принципа к движению Сатурна, возмущаемому Юпитером, представляет собой самый ранний пример точного вычисления возмущений второго порядка. Этот же метод был позднее использован Хиллом для построения теории движения Юпитера и Сатурна, которая является единственным случаем, когда взаимодействие двух планет аппроксимировалось с точностью до третьего порядка относительно возмущающих сил.

Двумя другими важными достижениями Ганзена, о которых здесь шла речь, являются: а) особый метод интегрирования, при котором определенные функции от независимой переменной, стоящие вне знака интеграла, обозначаются специальными символами и вносятся под знак интеграла, благодаря чему устраняются малые разности больших чисел, и б) использование единственной функции W для нахождения всех возмущений в плоскости оскулирующей орбиты.

2. Принцип метода. Мы можем начать с изучения движения планеты в оскулирующей плоскости, т. е. в плоскости, которая проходит через начало координат и в любой момент времени содержит радиус-вектор и вектор скорости этой планеты. Наклон этой плоскости к любой неподвижной плоскости непрерывно меняется, и сама плоскость может быть поворачиваться относительно радиуса-вектора планеты сначала в одном направлении, а затем в обратном.

Имея дифференциальные уравнения, определяющие движение планеты в оскулирующей плоскости, мы можем затем рассмотреть движение самой этой плоскости, получая уравнения, которые дают широту планеты над неподвижной плоскостью и не зависят от движения в оскулирующей плоскости. Наконец, путем преобразования координат можно показать, каким образом может быть получена долгота (отнесенная к неподвижному направлению в неподвижной плоскости) прибавлением двух очень малых поправок к долготе в оскулирующей орбите. Для большей ясности изложения мы предпочитаем, однако, изменить этот порядок и сначала рассмотреть преобразование координат.

3. Системы координат. Выберем неподвижную плоскость отсчета, проходящую через Солнце, и примем в ней неподвижную прямую за начало счета долгот. Гелиоцентрическое положение планеты можно определить посредством ее долготы L , широты B и радиуса-вектора r . Равным образом положение планеты можно также определить наклонностью I оскулирующей орбиты к неподвижной плоскости отсчета, долготой θ соответствующего восходящего узла, аргументом широты и радиусом-вектором.

Пусть v означает долготу планеты, отсчитываемую в мгновенной плоскости орбиты от некоторой начальной точки, выбранной произвольно, и пусть σ означает долготу узла, отсчитываемую от этой же начальной точки. Тогда аргумент широты равен $v - \sigma$, а L и B определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L - \theta) &= \cos (v - \sigma), \\ \cos B \sin (L - \theta) &= \cos I \sin (v - \sigma), \\ \sin B &= \sin I \sin (v - \sigma). \end{aligned} \tag{1}$$

Положение прямой отсчета в мгновенной плоскости орбиты, от которой отчитываются v и σ , можно определить таким образом, чтобы движение плоскости орбиты не зависело от v , накладывая следующее условие:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \cos I \frac{d\theta}{dt}, \quad (2)$$

которое дает

$$\sigma = \sigma_0 + \int_0^t \cos I d\theta,$$

где σ_0 — аддитивная постоянная интегрирования, для которой мы принимаем $\sigma_0 = \theta_0$.

Непосредственное применение уравнений (1) для определения положения планеты потребовало бы вычисления сначала I и θ по методу вариации произвольных постоянных; подстановка этих величин в (2) дала бы σ . Таким образом, вместе с v и r потребовалось бы пять величин для определения трех координат. Однако можно уменьшить это количество путем соответствующего преобразования. Подставим вместо I и σ величины I_0 и σ_0 — значения I и σ в начальный момент времени. Тогда I и σ могут быть найдены прибавлением к I_0 и σ_0 определенных величин порядка возмущающих сил. Пусть s означает поправку к правой части третьего уравнения из системы (1), и пусть $sA \sin \omega$ и $-sA \cos \omega$ означают поправки к первому и второму уравнениям, где A и ω пока остаются неопределенными. Кроме того, допустим, что в левых частях уравнений (1) мы можем вместо θ подставить $\theta_0 + \Gamma$; при этом не следует понимать под Γ переменную часть θ , а просто считать, что уравнения допускают это преобразование. Собственно говоря, Γ является функцией как от I , так и от θ . Тогда (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos(v - \theta_0) + sA \sin \omega, \\ \cos B \sin(L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos I_0 \sin(v - \theta_0) - sA \cos \omega, \\ \sin B &= \sin I_0 \sin(v - \theta_0) + s. \end{aligned} \quad (3)$$

Мы требуем, чтобы A , ω и Γ были независимы от v . Чтобы показать возможность этого, начнем с введения двух новых переменных p и q , определяемых посредством следующих уравнений:

$$\begin{aligned} p &= \sin I \sin(\sigma - \theta_0), \\ q &= \sin I \cos(\sigma - \theta_0) - \sin I_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Умножим обе части первого уравнения на $\cos(v - \theta_0)$, а обе части второго уравнения — на $\sin(v - \theta_0)$; это дает

$$\begin{aligned} p \cos(v - \theta_0) &= \sin I \sin(\sigma - \theta_0) \cos(v - \theta_0), \\ q \sin(v - \theta_0) &= \sin I \cos(\sigma - \theta_0) \sin(v - \theta_0) - \sin I_0 \sin(v - \theta_0). \end{aligned}$$

Вычитая первое полученное уравнение из второго, находим

$$q \sin(v - \theta_0) - p \cos(v - \theta_0) = \sin I \sin(v - \sigma) - \sin I_0 \sin(v - \theta_0).$$

Однако из сравнения третьего уравнения (1) с третьим уравнением (3) легко видеть, что правая часть только что записанного уравнения

тождественно совпадает с поправкой s , откуда

$$s = q \sin(v - \theta_0) - p \cos(v - \theta_0). \quad (5)$$

Это значение s необходимо подставить в первое и второе уравнения (3); чтобы упростить запись результата, мы полагаем

$$\Upsilon = v - \theta_0, \quad \Theta = \theta - \theta_0 - \Gamma, \quad \Sigma = \sigma - \theta_0,$$

откуда

$$s = q \sin \Upsilon - p \cos \Upsilon.$$

Подставляя в первое и второе уравнения (3) Υ вместо $v - \theta_0$, $L - \theta + \Theta$ вместо $L - \theta_0 - \Gamma$ и только что полученное значение s , мы имеем

$$\begin{aligned} \cos B [\cos(L - \theta) \cos \Theta - \sin(L - \theta) \sin \Theta] &= \\ &= (1 - pA \sin w) \cos \Upsilon + qA \sin w \sin \Upsilon, \\ \cos B [\sin(L - \theta) \cos \Theta + \cos(L - \theta) \sin \Theta] &= \\ &= (\cos I_0 - qA \cos w) \sin \Upsilon + pA \cos w \cos \Upsilon. \end{aligned}$$

Но так как $v - \sigma = \Upsilon - \Sigma$, то, согласно уравнениям (1), мы имеем

$$\begin{aligned} \cos(\Upsilon - \Sigma) \cos \Theta - \cos I \sin(\Upsilon - \Sigma) \sin \Theta &= \\ &= (1 - pA \sin w) \cos \Upsilon + qA \sin w \sin \Upsilon, \\ \cos(\Upsilon - \Sigma) \sin \Theta + \cos I \sin(\Upsilon - \Sigma) \cos \Theta &= \\ &= (\cos I_0 - qA \cos w) \sin \Upsilon + pA \cos w \cos \Upsilon, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\cos \Sigma \cos \Theta + \cos I \sin \Sigma \sin \Theta) \cos \Upsilon + (\sin \Sigma \cos \Theta - \cos I \cos \Sigma \sin \Theta) \sin \Upsilon &= \\ &= (1 - pA \sin w) \cos \Upsilon + qA \sin w \sin \Upsilon, \\ (\cos \Sigma \sin \Theta - \cos I \sin \Sigma \cos \Theta) \cos \Upsilon + (\sin \Sigma \sin \Theta + \cos I \cos \Sigma \cos \Theta) \sin \Upsilon &= \\ &= (\cos I_0 - qA \cos w) \sin \Upsilon + pA \cos w \cos \Upsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Если A , w и Γ (или Θ) должны быть независимы от v (или Υ), то множители при $\cos \Upsilon$ и $\sin \Upsilon$ в этих уравнениях должны в отдельности обратиться в нуль, что приводит к следующим условиям:

$$\begin{aligned} pA \sin w &= 1 - \cos \Sigma \cos \Theta - \cos I \sin \Sigma \sin \Theta, \\ qA \sin w &= \sin \Sigma \cos \Theta - \cos I \cos \Sigma \sin \Theta, \\ qA \cos w &= \cos I_0 - \sin \Sigma \sin \Theta - \cos I \cos \Sigma \cos \Theta, \\ pA \cos w &= \cos \Sigma \sin \Theta - \cos I \sin \Sigma \cos \Theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Эти уравнения определяют четыре неизвестных: $A \sin w$, $A \cos w$, $\sin \Theta$ и $\cos \Theta$. Если значения, полученные для $\sin \Theta$ и $\cos \Theta$, удовлетворяют соотношению

$$\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1,$$

то будет доказана возможность преобразования (3). Чтобы показать это, исключим $A \sin w$ и $A \cos w$ из уравнений (7), что дает следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \cos I (q \sin \Sigma - p \cos \Sigma) \sin \Theta + (q \cos \Sigma + p \sin \Sigma) \cos \Theta &= q, \\ (q \cos \Sigma + p \sin \Sigma) \sin \Theta - \cos I (q \sin \Sigma - p \cos \Sigma) \cos \Theta &= p \cos I_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Но мы имеем

$$p = \sin I \sin \Sigma, \quad q = \sin I \cos \Sigma - \sin I_0,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} q \sin \Sigma - p \cos \Sigma &= -\sin I_0 \sin \Sigma, \\ p \sin \Sigma + q \cos \Sigma &= \sin I - \sin I_0 \cos \Sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда уравнения (8) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \cos I \sin I_0 \sin \Sigma \sin \Theta + (\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) \cos \Theta &= \sin I_0 - \sin I \cos \Sigma, \\ (\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) \sin \Theta - \sin I_0 \cos I \sin \Sigma \cos \Theta &= -\sin I \cos I_0 \sin \Sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \lambda \cos \mu &= \sin I_0 \cos \Sigma - \sin I, \\ \lambda \sin \mu &= \cos I \sin I_0 \sin \Sigma, \end{aligned} \quad (11)$$

приводим уравнения (10) к виду

$$\begin{aligned} \lambda \cos(\Theta - \mu) &= \sin I_0 - \sin I \cos \Sigma, \\ \lambda \sin(\Theta - \mu) &= -\sin I \cos I_0 \sin \Sigma, \end{aligned} \quad (12)$$

Если мы должны получить

$$\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta = 1,$$

то необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов правых частей соотношений (11) была тождественно равна сумме квадратов правых частей уравнений (12), что как раз и имеет место. Поэтому возможность выполнения требуемого преобразования доказана.

Остается найти значения $A \sin \omega$ и $A \cos \omega$. Если мы умножим первое уравнение из (11) на первое уравнение из (12), затем второе уравнение из (11) на второе уравнение из (12) и вычтем получающиеся при этом уравнения, то, умножая затем первое уравнение из (11) на второе уравнение из (12) и второе уравнение из (11) на первое уравнение из (12) и складывая получающиеся уравнения, получим окончательно следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda^2 \cos \Theta &= (\sin I_0 - \sin I \cos \Sigma)(\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) + \\ &\quad + \sin I_0 \cos I_0 \sin I \cos I \sin^2 \Sigma, \\ \lambda^2 \sin \Theta &= (\sin I_0 - \sin I \cos \Sigma) \sin I_0 \cos I \sin \Sigma - \\ &\quad - (\sin I_0 \cos \Sigma - \sin I) \sin I \cos I_0 \sin \Sigma. \end{aligned} \quad (13)$$

Но, возводя оба уравнения (11) в квадрат и складывая их вместе, получаем

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= (\sin I - \sin I_0 \cos \Sigma)^2 + \sin^2 I_0 \cos^2 I \sin^2 \Sigma = \\ &= \sin^2 I + \sin^2 I_0 \cos^2 I - 2 \sin I_0 \sin I \cos \Sigma + \sin^2 I_0 \sin^2 I \cos^2 \Sigma = \\ &= (1 - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma)^2 - \cos^2 I_0 \cos^2 I = \\ &= (1 - \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma)(1 + \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma). \end{aligned}$$

Обе правые части уравнений (13) делятся на

$$1 - \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma;$$

следовательно, если мы положим

$$\kappa = 1 + \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma, \quad (14)$$

то будем иметь

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{(1 + \cos I_0 \cos I) \cos \Sigma - \sin I_0 \sin I}{\kappa}, \\ \sin \Theta &= \frac{(\cos I_0 + \cos I) \sin \Sigma}{\kappa}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если эти значения подставить в (7), то мы получим

$$\begin{aligned} A \sin w &= \frac{\sin I \sin \Sigma}{\kappa} = \frac{p}{\kappa}, \\ A \cos w &= \frac{\sin I_0 \cos I + \cos I_0 \sin I \cos \Sigma}{\kappa} = \operatorname{tg} I_0 + \frac{q}{\kappa \cos I_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь можно написать уравнения (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos (v - \theta_0) + \frac{p}{\kappa} s, \\ \cos B \sin (L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos I_0 \sin (v - \theta_0) - \left(\operatorname{tg} I_0 + \frac{q}{\kappa \cos I_0} \right) s, \\ \sin B &= \sin I_0 \sin (v - \theta_0) + s. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассматривая последние слагаемые первых двух из этих уравнений, легко видеть, что если выбрать неподвижную плоскость отсчета совпадающей в начальный момент времени с оскулирующей плоскостью, то κ будет порядка 2; произведения ps и qs суть порядка квадрата возмущающей силы и, кроме того, умножены на $\sin I$. Следовательно, соответствующим выбором неподвижной плоскости отсчета эти последние слагаемые сделаны почти неощутимыми; поэтому становится очевидной особенная польза этого необычного преобразования.

Мы еще должны определить Γ . Дифференцируя соотношения (15), мы получаем

$$\begin{aligned} \sin \Theta (d\theta - d\Gamma) &= \frac{\cos I_0 \sin I \cos \Sigma + \sin I_0 \cos I}{\kappa} dI + \\ &\quad + \frac{(1 + \cos I_0 \cos I) \sin \Sigma}{\kappa} d\sigma + \frac{\cos \Theta}{\kappa} d\kappa, \\ \cos \Theta (d\theta - d\Gamma) &= - \frac{\sin I \sin \Sigma}{\kappa} dI + \\ &\quad + \frac{(\cos I_0 + \cos I) \cos \Sigma}{\kappa} d\sigma - \frac{\sin \Theta}{\kappa} d\kappa. \end{aligned} \quad (18)$$

Умножая первое из этих уравнений на $\sin \Theta$, а второе — на $\cos \Theta$ и складывая, получим

$$\begin{aligned} d\theta - d\Gamma &= \frac{(\cos I_0 + \cos I) (\cos I_0 \sin I \cos \Sigma + \sin I_0 \cos I)}{\kappa^2} \sin \Sigma dI + \\ &\quad + \frac{\sin I_0 \sin^2 I - (1 + \cos I_0 \cos I) \sin I \cos \Sigma}{\kappa^2} \sin \Sigma d\sigma + \\ &\quad + \frac{(1 + \cos I_0 \cos I - \sin I_0 \sin I \cos \Sigma) (\cos I_0 + \cos I)}{\kappa^2} d\sigma = \\ &= \frac{\sin I_0 \sin \Sigma}{\kappa} dI + \frac{\cos I_0 + \cos I}{\kappa} d\sigma. \end{aligned} \quad (19)$$

Если в этом уравнении мы заменим $d\theta$ его значением $d\sigma/\cos I$, то мы найдем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{\sin I_0 \sin \Sigma}{\kappa} \frac{dI}{dt} + \frac{\sin I - \sin I_0 \cos \Sigma}{\kappa \cos I} \sin I \frac{d\sigma}{dt}. \quad (20)$$

Но уравнения (4) после дифференцирования дают

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \cos I \sin \Sigma \frac{dI}{dt} + \sin I \cos \Sigma \frac{d\sigma}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} &= \cos I \cos \Sigma \frac{dI}{dt} - \sin I \sin \Sigma \frac{d\sigma}{dt}, \end{aligned} \quad (21)$$

откуда

$$\frac{q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt}}{dt} = -\sin I_0 \cos I \sin \Sigma \frac{dI}{dt} + (\sin I - \sin I_0 \cos \Sigma) \sin I \frac{d\sigma}{dt}. \quad (22)$$

Поэтому

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{\kappa \cos I} \cdot \frac{q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt}}{dt}. \quad (23)$$

Из уравнений (1) ясно, что Γ обращается в нуль, когда $t = 0$ и $\theta = \sigma = \theta_0$; следовательно, после интегрирования уравнения (23) аддитивная постоянная обращается в нуль, и мы имеем

$$\Gamma = \int_0^t \frac{q \frac{dp}{dt} - p \frac{dq}{dt}}{\kappa \cos I} dt. \quad (24)$$

Это выражение можно привести к виду, более удобному для вычислений. Если мы введем h посредством следующей формулы:

$$h = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{p}},$$

где k — гауссова постоянная, m — масса планеты, а p — параметр орбиты, и если мы обозначим через \mathcal{W} компоненту возмущающей силы, перпендикулярную к плоскости оскулирующей орбиты, то из метода вариаций произвольных постоянных известно, что

$$\begin{aligned} \sin I \frac{d\theta}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \sin(v - \sigma) \cdot \mathcal{W}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \cos(v - \sigma) \cdot \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (25)$$

В этих выражениях следует подразумевать, что h и r принимают свои мгновенные значения.

При подстановке этих значений в уравнения (21) получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \cos I \sin(v - \theta_0) \cdot \mathcal{W}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{hr}{\mu} \cos I \cos(v - \theta_0) \cdot \mathcal{W}, \end{aligned} \quad (26)$$

и поэтому, в силу соотношения (5), выражение (24) принимает вид

$$\Gamma = \int_0^t \frac{hr s}{\mu \kappa} \mathcal{W} dt. \quad (27)$$

Поскольку как \mathcal{W} , так и s порядка возмущающей силы, то очевидно, что Γ порядка квадрата возмущающей силы, а также порядка квадрата наклонности. Это делает величину Γ почти неощущимой. Пренебрегая кубом возмущающей силы в выражении (27), мы можем считать κ в этом выражении постоянным и вместо κ выбрать $2\cos^2 I_0$; тогда мы имеем весьма приближенно

$$\Gamma = \frac{\hbar}{2\mu \cos^2 I_0} \int_0^t rs\mathcal{W} dt. \quad (28)$$

Если мы продифференцируем соотношение (5), учитывая принцип метода вариации произвольных постоянных, согласно которому первые производные от координат можно брать, не меняя элементы, то в результате получим

$$\frac{ds}{dv} = q \cos(v - \theta_0) + p \sin(v - \theta_0). \quad (29)$$

Объединяя это уравнение с (5), получаем

$$\begin{aligned} p &= -s \cos(v - \theta_0) + \frac{ds}{dv} \sin(v - \theta_0), \\ q &= s \sin(v - \theta_0) + \frac{ds}{dv} \cos(v - \theta_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Эти значения p и q можно использовать в первом и втором уравнениях (17), когда произведения ps и qs достигают заметной величины. Обычно также точность будет достаточной, если положить $\kappa = 2\cos^2 I_0$, или разложить $1/\kappa$ в ряд вида

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2\cos^2 I_0} + \frac{\sin I_0}{4\cos^4 I_0} q + \dots \quad (31)$$

Если мы выберем плоскость орбиты в момент начала счета времени в качестве неподвижной плоскости отсчета, то $I_0 = 0$ и θ_0 становится неопределенным, и так как $\kappa = 2\cos^2(I/2)$, то уравнения (17) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L - \theta_0 - \Gamma) &= \cos(v - \theta_0) + \frac{P}{2\cos^2 \frac{I}{2}} s, \\ \cos B \sin(L - \theta_0 - \Gamma) &= \sin(v - \theta_0) - \frac{q}{2\cos^2 \frac{I}{2}} s, \\ \sin B &= s. \end{aligned} \quad (32)$$

Если мы умножим первое уравнение из (32) на $\cos(v - \theta_0)$, второе — на $\sin(v - \theta_0)$ и сложим получающиеся при этом уравнения, а затем умножим первое уравнение на $\sin(v - \theta_0)$, а второе — на $\cos(v - \theta_0)$ и вычтем полученные уравнения друг из друга, то в результате

найдем следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \cos B \cos(L - v - \Gamma) &= 1 + \frac{p \cos(v - \theta_0) - q \sin(v - \theta_0)}{2 \cos^2 \frac{I}{2}} s = \\ &= 1 - \frac{s^2}{2 \cos^2 \frac{I}{2}}, \\ \cos B \sin(L - v - \Gamma) &= -\frac{p \sin(v - \theta_0) + q \cos(v - \theta_0)}{2 \cos^2 \frac{I}{2}} s = \\ &= -\frac{1}{2 \cos^2 \frac{I}{2}} s \frac{ds}{dv}. \end{aligned} \quad (33)$$

Пренебрегая величинами четвертого порядка относительно возмущающих сил, получим из этих уравнений

$$L = v + \Gamma - \frac{1}{2} s \frac{ds}{dv}. \quad (34)$$

Таким образом величина $\Gamma - \frac{1}{2} s \frac{ds}{dv}$ представляет собой приведение от плоскости мгновенной орбиты к неподвижной плоскости отсчета. Это уравнение, вероятно, является достаточно точным, чтобы представить движение любого объекта в солнечной системе с точностью до тысячной доли секунды дуги, по крайней мере в течение нескольких столетий.

4. Уравнения для v и r . В предыдущем разделе было показано, каким образом координаты планеты подвергаются влиянию движения плоскости орбиты; теперь мы переходим к определению переменных v и r , откладывая до следующего раздела определение поправки s .

Мы начинаем с выбора вспомогательного эллипса в плоскости мгновенной орбиты, один из фокусов которого совпадает с началом координат. Обозначим среднюю аномалию в этом эллипсе через $n_0 z$, эксцентриситет — через e_0 , а большую полуось — через a_0 , причем $n_0^2 a_0^3 = \mu$, $\mu = k^2(1+m)$. Всюду в этой теории n_0 , a_0 , e_0 являются абсолютно постоянными величинами. Пусть теперь во вспомогательном эллипсе E_0 означает эксцентрическую аномалию, f_0 — истинную аномалию, r_0 — радиус-вектор; мы имеем

$$\begin{aligned} n_0 z &= E_0 - e_0 \sin E_0, \\ r_0 \cos f_0 &= a_0 \cos E_0 - a_0 e_0, \\ r_0 \sin f_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin E_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Пусть теперь π_0 есть долгота перигелия вспомогательного эллипса, отсчитываемая от начальной точки, определенной уравнением (2); π_0 также является абсолютной постоянной. Тогда, если мы обозначим через v долготу любой точки на этом эллипсе, отсчитываемую от начальной точки, то мы получим

$$v = f_0 + \pi_0. \quad (36)$$

До сих пор единственная связь между вспомогательным эллипсом и действительным положением планеты заключалась в том, что этот

эллипс лежит в плоскости мгновенной орбиты. Введем теперь условие, чтобы точка с истинной аномалией f_0 лежала на действительном радиусе-векторе планеты. Тогда v представляет собой долготу планеты от начальной точки, а r_0 и f_0 являются радиусом-вектором и истинной аномалией той точки эллипса, в которой истинный радиус-вектор планеты пересекает этот эллипс. Пусть действительный радиус-вектор планеты r , и положим

$$r = r_0(1 + v), \quad (37)$$

т. е. $1 + v$ равно отношению радиуса-вектора к его отрезку, отсекаемому вспомогательным эллипсом.

Когда z и v станут известными функциями времени и постоянных, положение планеты в мгновенной плоскости орбиты также будет известным. Поэтому решение задачи о движении в мгновенной плоскости состоит в определении z , v и в определении смысла, который необходимо приписать постоянным n_0 , a_0 , e_0 , π_0 и произвольным постоянным, которые появляются при интегрировании уравнений для z и v .

Пусть теперь n , a , e , χ означают оскулирующие элементы планеты, причем первые три имеют обычный смысл, а χ есть дуга от начальной точки до мгновенного перигелия. Введем также h посредством формулы $h = k\sqrt{1+m}/\sqrt{p}$, как это было сделано в предыдущем разделе, и обозначим через h_0 эту же функцию от элементов вспомогательного эллипса.

Известно, что

$$r^2 \frac{dv}{dt} = na^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (38)$$

Тогда из этого уравнения, а также предшествующих уравнений имеем

$$\begin{aligned} \frac{a(1-e^2)}{r} &= 1 + e \cos f, & \frac{a_0(1-e_0^2)}{r_0} &= 1 + e_0 \cos f_0, \\ r^2 \frac{dv}{dt} &= na^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{\mu}{h}, & r_0^2 \frac{df_0}{dz} &= n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} = \frac{\mu}{h_0}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f = he \sin f, & \frac{dr_0}{dz} &= \frac{n_0 a_0 e_0}{\sqrt{1-e_0^2}} \sin f_0 = h_0 e_0 \sin f_0, \\ v &= f_0 + \pi_0 = f + \chi, \\ r &= r_0(1 + v). \end{aligned} \quad (39)$$

Из уравнений

$$f = f_0 - \chi + \pi_0$$

и

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos f}{1 - e^2}$$

мы выводим следующее уравнение:

$$\frac{r_0 a}{r a_0} = \frac{r_0 + r_0 \cos f_0 \cdot e \cos(\chi - \pi_0) + r_0 \sin f_0 \cdot e \sin(\chi - \pi_0)}{a_0(1 - e^2)}.$$

Но мы имеем

$$r_0 = a_0(1 - e_0^2) - r_0 e_0 \cos f_0$$

Подставляя это значение r_0 в предыдущее уравнение и полагая

$$\begin{aligned} e \cos(\chi - \pi_0) &= c_0 + \xi(1 - e_0^2), \\ e \sin(\chi - \pi_0) &= \eta(1 - e_0^2). \end{aligned} \quad (40)$$

получаем

$$(1 - e^2) = (1 - e_0^2)[1 - 2e_0\xi - (1 - e_0^2)(\xi^2 + \eta^2)]. \quad (41)$$

Тогда

$$\frac{r_0 a}{ra_0} = \frac{1 + \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0}{1 - 2e_0\xi - (1 - e_0^2)(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (42)$$

Дифференцирование уравнения для v из (39) дает

$$\frac{dv}{dt} = \frac{df_0}{dt} = \frac{df_0}{dz} \frac{dz}{dt}. \quad (43)$$

Почленное деление двух уравнений, написанных во второй строке в (39), дает

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} \frac{r_0^2}{r^2} = \frac{h_0}{h(1+v)^2}. \quad (44)$$

Если мы положим

$$n = n_0(1 + \beta)$$

и подставим значение $r_0 a / ra_0$, определяемое уравнением (42), в уравнение (44), то мы получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(1 + \beta) \left(1 + \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0 \right)^2}{[1 - 2e_0\xi - (1 - e_0^2)(\xi^2 + \eta^2)]^{3/2}}. \quad (45)$$

Аналогичным путем, поскольку $a/a_0 = (1 + \beta)^{-2/3}$, мы получаем

$$1 + v = \frac{1 - 2e_0\xi - (1 - e_0^2)(\xi^2 + \eta^2)}{(1 + \beta)^{2/3} \left(1 + \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0 \right)}. \quad (46)$$

Комбинация уравнений (45) и (46) дает следующее уравнение:

$$(1 + v)^{3/2} \frac{dz}{dt} = \left(1 + \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0 \right)^{1/2}.$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат и умножая результат на $2h/h_0$, получаем

$$2 \frac{h}{h_0} (1 + v)^3 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 2 \frac{h}{h_0} + 2 \frac{h}{h_0} \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + 2 \frac{h}{h_0} \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0.$$

Положим

$$W = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \xi \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + 2 \frac{h}{h_0} \eta \frac{r_0}{a_0} \sin f_0. \quad (47)$$

Тогда

$$2 \frac{h}{h_0} (1 + v)^3 \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = W + \frac{h_0}{h} + 1.$$

Но из уравнения (44) имеем

$$\frac{h}{h_0} (1 + v)^2 \frac{dz}{dt} = 1,$$

и поэтому

$$2(1+v) \frac{dz}{dt} = \bar{W} + \frac{h_0}{h} + 1.$$

Вычитая из этого уравнения следующее уравнение, также полученное из (44),

$$(1+2v) \frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h} \frac{1-2v}{(1+v)^2},$$

находим

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W} + \frac{h_0}{h} \left(\frac{v}{1+v} \right)^2. \quad (48)$$

Однако снова из (44) следует

$$\frac{h_0}{h} = (1+v)^2 \frac{dz}{dt},$$

и поэтому

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W} + v^2 \frac{dz}{dt}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1+\bar{W}}{1-v^2} = 1 + \frac{\bar{W}-v^2}{1-v^2}. \quad (49)$$

Вскоре будет показано, что v можно определить из \bar{W} очень простым способом, который, однако, связан с дифференцированием по времени. Известно, что при получении первой производной по t от любой функции времени t и оскулирующих элементов мы рассматриваем эти оскулирующие элементы постоянными, считая переменным только t . Но если W представлено в виде периодического ряда с одной независимой переменной, то возникает затруднение, так как в этом случае элементы, которые необходимо считать постоянными, становятся связанными сложным образом с временем. Очевидно, члены функции \bar{W} , включающие в себя оскулирующие элементы h , ξ , η , можно было бы оставить в символьической форме в виде множителей рядов, подлежащих дифференцированию. Однако в формулах и при вычислительной работе достигается значительное сокращение, если мы условимся представить \bar{W} в виде функции от некоторой дополнительной независимой переменной, например τ , которая представляет собой время, когда оно входит в явной форме, т. е. в r_0 и f_0 , тогда как оскулирующие элементы представляются в виде функций от t ; функция \bar{W} , выраженная таким образом, как функция от обеих переменных, t и τ , обозначается через W . После дифференцирования по τ можно заменить τ на t , и горизонтальная черточка над любым символом используется для того, чтобы показать, что это выполнено. Если F означает какую-нибудь функцию от координат и если Λ означает эту же функцию, представленную как функция от τ и t , причем члены, содержащие t , представляют оскулирующие элементы, то в символьической форме мы имеем

$$\frac{dF}{dt} = \overline{\left(\frac{d\Lambda}{d\tau} \right)}. \quad (50)$$

Интегрирование этого уравнения даст

$$F = \text{const} + \int \overline{\left(\frac{d\Lambda}{d\tau} \right)} dt. \quad (51)$$

Возвращаясь теперь к вопросу об уравнении для определения v , обозначим величины r , f , z и v , рассматриваемые как функции от τ вместо t , соответственно через ϱ , ω , ζ , v . Поэтому вместо уравнения (49) мы будем иметь следующее:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + \frac{W+v^2}{1-v^2}, \quad (52)$$

в котором

$$W = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \xi \frac{\varrho_0}{a_0} \cos \omega_0 + 2 \frac{h}{h_0} \eta \frac{\varrho_0}{a_0} \sin \omega_0. \quad (53)$$

В этом выражении ϱ_0 и ω_0 — те же самые функции от ζ , что и r_0 и f_0 от z . Аналогично уравнение (44) даст

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{h_0}{h(1+v)^2}. \quad (54)$$

Поскольку уравнение (54) можно написать в следующем виде:

$$\ln \frac{d\zeta}{d\tau} = \ln \frac{h_0}{h} - 2 \ln(1+v),$$

то, дифференцируя это уравнение по τ , мы получаем

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{(d^2\zeta/d\tau^2)}{(d\zeta/d\tau)} (1+v). \quad (55)$$

Полагая τ вместо t , приводим уравнение (48) к виду

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = 1 + W + \frac{h_0}{h} \left(\frac{v}{1+v} \right)^2 \quad (56)$$

и, дифференцируя это уравнение по τ , получаем

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\tau} + 2 \frac{h_0}{h} \frac{v}{(1+v)^3} \frac{dv}{d\tau}. \quad (57)$$

Почленное деление этого уравнения на уравнение (54) дает

$$\frac{d^2\zeta/d\tau^2}{d\zeta/d\tau} = \frac{dW}{d\zeta} + \frac{2v}{1+v} \frac{dv}{d\tau}.$$

Если этот результат подставить в правую часть уравнения (55), то мы найдем следующее уравнение:

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{dW}{d\zeta}.$$

Применяя к этому уравнению обозначение, употребленное в уравнении (50), получаем следующее уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\zeta} \right). \quad (58)$$

Наконец, интегрируя уравнения (49) и (58), умножая уравнение (49) на n_0 и прибавляя величины c_0 и C в качестве произвольных постоянных, мы имеем

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \frac{\bar{W} + v^2}{1 - v^2} n_0 dt, \quad (59)$$

$$v = C - \frac{1}{2} \int \left(\frac{dW}{d\zeta} \right) dt. \quad (60)$$

Эти уравнения являются строгими. Мы видели, что функция W среди других переменных содержит ζ , и смысл этого символа (или z) заключается в том, что величина $n_0\zeta$ означает возмущенную среднюю аномалию. Следовательно, когда мы ограничиваемся величинами первого порядка относительно возмущающих сил, то в уравнении для W можно писать τ вместо ζ . При этом ограничении уравнения, определяющие z и v , принимают следующий простой вид:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int W_0 n_0 dt, \quad (61)$$

$$v = C - \frac{1}{2} \int \left(\frac{dW_0}{d\tau} \right) dt, \quad (62)$$

где

$$W_0 = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \xi \frac{\varrho}{a_0} \cos \omega + 2 \frac{h}{h_0} \eta \frac{\varrho}{a_0} \sin \omega, \quad (63)$$

причем ϱ и ω обозначают эллиптические значения, зависящие от невозмущенной средней аномалии. При том же ограничении допустимо также заменить в последних двух членах выражения (63) отношение h/h_0 единицей; уравнение сохраняется в том же виде, так как оно будет служить для дальнейших приближений.

В тех случаях, когда должны быть рассмотрены величины порядка квадрата и более высоких степеней относительно возмущающих сил, мы не можем более полагать $\zeta = \tau$, а должны писать $\zeta = \tau + \delta\zeta$, где $\delta\zeta$ является функцией от τ и t , такой, что когда τ заменяется на t , то мы имеем $\delta z = z - t$. Поскольку при выполнении интегрирований, которые приводят к значениям z и v , функция W и ее производные записываются с черточками, показывающими, что τ заменено на t , то легко видеть, что нам необходимо знать не $\delta\zeta$, а только соответствующую этой функции функцию δz . Если мы рассматриваем W как функцию от ζ , то применением теоремы Тэйлора мы получаем

$$W = W_0 + \frac{dW_0}{d\tau} \delta\zeta + \frac{1}{2} \frac{d^2W_0}{d\tau^2} \delta\zeta^2 + \dots,$$

где W_0 определяется выражением (63). Если τ заменено на t , то это уравнение принимает вид

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \left(\frac{d\bar{W}_0}{d\tau} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{d\tau^2} \right) \delta z^2 + \dots$$

Мы имеем также

$$\left(\frac{dW}{d\zeta} \right) = \left(\frac{dW_0}{d\tau} \right) + \left(\frac{d^2W_0}{d\tau^2} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3W_0}{d\tau^3} \right) \delta z^2 + \dots$$

Поэтому строгое уравнения (61) и (62) запишутся так:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \left[v^2 + \bar{W}_0 + \left(\frac{d\bar{W}_0}{d\tau} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{d\tau^2} \right) \delta z^2 + \dots \right] \frac{n_0 dt}{1-v^2}, \quad (64)$$

$$v = C - \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{d\bar{W}_0}{d\tau} \right) + \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{d\tau^2} \right) \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{d\tau^3} \right) \delta z^2 + \dots \right] dt. \quad (65)$$

Если мы обозначим $n_0 t + c_0$ через l , $n_0 \tau + c_0$ через λ и допустим, что $n_0 z = l + n_0 \delta z$, то уравнения (64) и (65) можно написать в следующем

виде:

$$n_0 \delta z = \int \left[v^2 + \bar{W}_0 + \left(\frac{dW_0}{d\lambda} \right) n_0 \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W_0}{d\lambda^2} \right) n_0^2 \delta z^2 + \dots \right] \frac{dl}{1-v^2}, \quad (66)$$

$$v = C - \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dW_0}{d\lambda} \right) + \left(\frac{d^2 W_0}{d\lambda^2} \right) n_0 \delta z + \left(\frac{d^3 W_0}{d\lambda^3} \right) n_0^2 \delta z^2 + \dots \right] dl, \quad (67)$$

в котором они оказываются наиболее удобными для практического применения.

5. Выражение для W_0 . Найдем теперь выражение для функции W_0 через составляющие возмущающей силы \mathcal{R} и \mathcal{S} . Если мы продифференцируем выражение (63) по t , то получим

$$\frac{dW_0}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \frac{h}{h_0} - \frac{d}{dt} \frac{h_0}{h} + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{h_0} \xi \right) \frac{\eta}{a_0} \cos \omega + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{h_0} \eta \right) \frac{\eta}{a_0} \sin \omega. \quad (68)$$

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r^2} &= \mathcal{R}, \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) &= r \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (69)$$

В силу уравнений (39) второе из этих уравнений можно написать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{h} = \frac{r}{\mu} \mathcal{S}, \quad (70)$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \frac{h_0}{h} = \frac{h_0}{\mu} r \mathcal{S}, \quad \frac{d}{dt} \frac{h}{h_0} = - \frac{h^2}{\mu h_0} r \mathcal{S}. \quad (71)$$

Чтобы получить производные от $h\xi$ и $h\eta$, мы используем уравнения метода вариации произвольных постоянных, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{\mu} [\sin f \cdot \mathcal{R} + (\cos E + \cos f) \mathcal{S}], \\ e \frac{d\chi}{dt} &= \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{\mu} \left[-\cos f \cdot \mathcal{R} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \cdot \mathcal{S} \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

Из уравнений (40) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{1-e_0^2} \left[\cos(\chi - \pi_0) \frac{de}{dt} - e \sin(\chi - \pi_0) \frac{d\chi}{dt} \right], \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{1}{1-e_0^2} \left[\sin(\chi - \pi_0) \frac{de}{dt} + e \cos(\chi - \pi_0) \frac{d\chi}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Подставляя уравнения (72) в эти уравнения и полагая $f + \chi - \pi_0 = f_0$, согласно (39), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{\mu (1-e_0^2)} \left\{ \sin f_0 \cdot \mathcal{R} + \left[\cos f_0 + \cos E \cos(\chi - \pi_0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r}{p} \sin f \sin(\chi - \pi_0) \right] \mathcal{S} \right\}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{\mu (1-e_0^2)} \left\{ -\cos f_0 \cdot \mathcal{R} + \left[\sin f_0 + \cos E \sin(\chi - \pi_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r}{p} \sin f \cos(\chi - \pi_0) \right] \mathcal{S} \right\}. \end{aligned} \quad (74)$$

Если мы умножим эти уравнения на h и прибавим $\xi dh/dt$ к первому уравнению и $\eta dh/dt$ — ко второму, то после деления на постоянную h_0 мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{h_0} \xi \right) &= \frac{1}{h_0(1-e_0^2)} \left\{ \sin f_0 \cdot \mathcal{R} + \left[\cos f_0 + \cos E \cos(\chi - \pi_0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r}{p} \sin f \sin(\chi - \pi_0) - \frac{h^2}{\mu} (e \cos(\chi - \pi_0) - e_0) r \right] \mathcal{S} \right\}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{h_0} \eta \right) &= \frac{1}{h_0(1-e_0^2)} \left\{ -\cos f_0 \cdot \mathcal{R} + \left[\sin f_0 + \cos E \sin(\chi - \pi_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r}{p} \sin f \cos(\chi - \pi_0) - \frac{h^2}{\mu} e \sin(\chi - \pi_0) r \right] \mathcal{S} \right\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Но поскольку $h^2/\mu = 1/p$, то эти уравнения приводятся к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_0} \frac{d}{dt} (h\xi) &= \frac{1}{h_0(1-e_0^2)} \left[\sin f_0 \cdot \mathcal{R} + \left(\cos f_0 + \frac{\cos f_0 + e_0}{1+e \cos f} \right) \mathcal{S} \right], \\ \frac{1}{h_0} \frac{d}{dt} (h\eta) &= \frac{1}{h_0(1-e_0^2)} \left[-\cos f_0 \cdot \mathcal{R} + \left(\sin f_0 + \frac{\sin f_0}{1+e \cos f} \right) \mathcal{S} \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

Если мы умножим первое из этих уравнений на $2\varrho/a_0 \cos \omega$, а второе — на $2\varrho/a_0 \sin \omega$ и сложим произведения, то мы получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_0} \frac{d}{dt} (h\xi) \frac{\varrho}{a_0} \cos \omega + \frac{2}{h_0} \frac{d}{dt} (h\eta) \frac{\varrho}{a_0} \sin \omega &= 2 \frac{h_0}{\mu} \varrho \sin(f_0 - \omega) \cdot \mathcal{R} + \\ &\quad + 2 \frac{h_0}{\mu} \left[\varrho \cos(f_0 - \omega) + \varrho \frac{\cos(f_0 - \omega) + e_0 \cos \omega}{1+e \cos f} \right] \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (77)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{dt} &= 2 \frac{h_0}{\mu} \varrho \sin(f_0 - \omega) \cdot \mathcal{R} + \frac{h_0}{\mu} \left[2 \frac{\varrho}{r} \cos(f_0 - \omega) - 1 - 2 \frac{h^2}{h_0^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\varrho}{r} \frac{\cos(f_0 - \omega) + e_0 \cos \omega}{1+e \cos f} \right] r \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (78)$$

Если в этом выражении мы умножим член $-2h^2/h_0^2$ на

$$1 := \frac{\varrho}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{\varrho e_0 \cos \omega}{a_0(1-e_0^2)},$$

то уравнение (78) может быть приведено к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{dt} &= 2 \frac{h_0}{\mu} \varrho \sin(f_0 - \omega) \cdot \mathcal{R} + \frac{h_0}{\mu} \left\{ 2 \frac{\varrho}{r} \cos(f_0 - \omega) - 1 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{h^2 \varrho}{h_0^2 a_0 (1-e_0^2)} [\cos(f_0 - \omega) - 1] \right\} r \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (79)$$

Это и есть то уравнение, которое определяет W_0 . Несмотря на его кажущуюся сложность, оно легко может быть решено, как только возмущающие силы приведены к требуемой форме, так как при вычислении самого W_0 мы всегда можем ограничиться эллиптическими значениями, вычисляя множители возмущающих сил, а затем эти множители могут быть выражены в виде неполных рядов. Полное уравнение (79) потребуется только в том случае, когда мы вычисляем возмущения, зависящие от квадратов и произведений возмущающих сил, и тогда оно будет дифференцироваться снова. Прежде чем приступить в дальнейшем к разложению W_0 , найдем уравнение для определения s . Однако

вместо того, чтобы определять непосредственно s , мы предпочтаем определить функцию $u/\cos I$, где u определяется равенством

$$u = \frac{r_0}{a_0} s. \quad (80)$$

6. Уравнение для u . Помня, что $v = f_0 + \pi_0$, мы выводим из соотношения (5) следующее уравнение:

$$u = \frac{r_0}{a_0} q \sin(f_0 + \pi_0 - \theta_0) - \frac{r_0}{a_0} p \cos(f_0 + \pi_0 - \theta_0). \quad (81)$$

Введем в этом уравнении всюду τ вместо t , за исключением двух элементов: p и q , и обозначим получившуюся при этом функцию через R (не следует смешивать с R , которым обозначена возмущающая функция). Дифференцируя эту функцию по t , мы получим

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dq}{dt} \frac{q_0}{a_0} \sin(\omega_0 + \pi_0 - \theta_0) - \frac{dp}{dt} \frac{p_0}{a_0} \cos(\omega_0 + \pi_0 - \theta_0). \quad (82)$$

Исключая из этого уравнения dq/dt и dp/dt посредством (26), имеем

$$\frac{dR}{dt} = \frac{hr}{\mu} \cos I \cdot \frac{q_0}{a_0} \sin(\omega_0 - f_0) \cdot W. \quad (83)$$

После интегрирования этого уравнения мы находим u из следующего выражения:

$$u = \bar{R}, \quad (84)$$

где горизонтальная черта над функцией R указывает, что τ необходимо заменить на t .

Другое выражение для функции R можно получить при помощи теоремы (51):

$$u = \int \left(\frac{dR}{d\tau} \right) dt. \quad (85)$$

Как и в случае уравнения для определения W , когда мы ограничиваемся возмущениями первого порядка относительно возмущающих сил, мы можем подставить эллиптические значения для координат в правой части уравнения (83). Мы полагаем

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{hr}{\mu} \cos I \frac{q_0}{a_0} \sin(\omega - f_0) \cdot W. \quad (86)$$

Тогда

$$u = \bar{R}_0 = \int \left(\frac{dR_0}{d\tau} \right) dt. \quad (87)$$

Если необходимо рассмотреть члены второго и более высоких порядков, то в уравнении (83) следует использовать более точные значения координат. Поскольку эти члены возникают из переменных q_0 и ω_0 , то, применяя теорему Тейлора, мы имеем

$$R = R_0 + \frac{dR_0}{d\tau} \delta\zeta + \frac{1}{2} \frac{d^2R_0}{d\tau^2} \delta\zeta^2 + \dots \quad (88)$$

Когда τ заменено на t , мы будем иметь

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \overline{\left(\frac{dR_0}{d\lambda} \right)} n_0 \delta z + \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{d^2R_0}{d\lambda^2} \right)} (n_0 \delta z)^2 + \dots \quad (89)$$

Кроме того, дифференцирование выражения (88), если мы ограничиваемся членами второго порядка, дает

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{dR_0}{d\tau} + \frac{d^2R_0}{d\tau^2} \delta\zeta + \frac{dR_0}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \delta\zeta,$$

откуда выражение (87) для u принимает следующий вид:

$$u = \int \left[\left(\frac{dR_0}{d\tau} \right) \left(1 + \frac{d}{dt} \delta z \right) + \left(\frac{d^2R_0}{d\tau^2} \right) n_0 \delta z \right] dt. \quad (90)$$

В методе Ганзена возмущения получаются посредством функций W_0 и R_0 , определяемых соответственно формулами (79) и (86). Прежде чем идти дальше, необходимо выбрать независимую переменную для последующего использования. Этот выбор может быть произведен в широких пределах, однако на практике обычно используются только две независимые переменные: время и эксцентрическая аномалия возмущающей планеты. По первой переменной интегрирование выполняется легче, что представляет значительное преимущество, если необходимо рассматривать возмущения второго порядка. С другой стороны, применяемые ряды сходятся быстрее, когда они выражены через эксцентрическую аномалию в качестве аргумента. Мы дадим два варианта формул (79) и (86), соответствующие каждому из указанных путей решения.

7. Время как независимая переменная. Известно, каким образом можно выразить составляющие возмущающей силы \mathcal{R} , \mathcal{S} и \mathcal{W} в виде частных производных от возмущающей функции. Однако вместо последней мы предпочитаем использовать другую функцию Ω , получаемую делением возмущающей функции на μ ; это позволяет нам избавиться от делителя μ , встречающегося в уравнениях и представляющего излишнее усложнение. Таким образом, мы будем иметь

$$\frac{1}{\mu} \mathcal{R} = \frac{\partial \Omega}{\partial r},$$

$$\frac{1}{\mu} \mathcal{S} = \frac{\partial \Omega}{\partial v},$$

$$\frac{1}{\mu} \mathcal{W} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

где z — расстояние от плоскости отсчета, которое после дифференцирования можно положить равным нулю.

Мы видели, что в формулах (79) и (86) можно ограничиться простыми эллиптическими значениями для величин, входящих в множители при возмущающих силах. Для облегчения записи мы, кроме того, отбрасываем нижние индексы, приписанные элементам; l означает теперь $nt + c$, где t — время, а n и c — постоянные. Пусть $T = dW_0/dl$ и $U = dR_0/dl$; мы имеем

$$T = \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\varrho}{r} \sin(f-\omega) \cdot r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{2\varrho}{r} \cos(f-\omega) - 1 + \frac{2\varrho}{a(1-e^2)} [\cos(f-\omega) - 1] \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial l}, \quad (91)$$

$$U = \frac{\cos I}{\sqrt{1-e^2}} r \varrho \sin(\omega-f) \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Требуется преобразовать первое из этих уравнений так, чтобы заменить $\partial\Omega/\partial f$ на $\partial\Omega/\partial l$, поскольку последняя производная очень легко может быть получена дифференцированием периодического разложения Ω по l . Мы полагаем

$$T = Aa \frac{\partial \Omega}{\partial l} + Bar \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad U = Ca^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos I \quad (92)$$

и переходим к определению A , B и C как функций от l и r . Замечая, что из полярного уравнения эллипса мы имеем

$$\frac{e}{a(1-e^2)} = 1 - e \frac{q \cos \omega}{a(1-e^2)},$$

легко видеть, что T состоит из трех частей, первая из которых не зависит от τ , тогда как остальные две части умножены на $q \cos \omega$ и $q \sin \omega$. Чтобы показать это, положим

$$T = \frac{d\Xi}{dl} + \frac{d\Upsilon}{dl} \left(\frac{q}{a} \cos \omega + \frac{3}{2} e \right) + \frac{d\Psi}{dl} \frac{q}{a} \sin \omega. \quad (93)$$

Тогда, сравнивая это выражение с первым уравнением из (91), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Xi}{dl} &= -3 \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left[\left(\frac{ae \cos f}{r} + \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial f} + \frac{ae \sin f}{r} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right], \\ \frac{d\Upsilon}{dl} &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}} \left[\left(\frac{a \cos f}{r} + \frac{\cos f + e}{1-e^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial f} + \frac{a \sin f}{r} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right], \\ \frac{d\Psi}{dl} &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}} \left[\left(\frac{a \sin f}{r} + \frac{\sin f}{1-e^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial f} - \frac{a \cos f}{r} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

Но, согласно теории эллиптического движения, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{df}{dl} &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^3} = \frac{ae \cos f}{r \sqrt{1-e^2}} + \frac{e \cos f}{(1-e^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}}, \\ \frac{dr}{dl} &= \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \frac{df}{dl} &= \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) \sin f, \\ \frac{dr}{de} &= -a \cos f. \end{aligned} \quad (95)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\Xi}{dl} &= -3a \frac{\partial \Omega}{\partial l}, \\ \frac{d\Upsilon}{dl} &= \frac{2}{e} \left(a \frac{\partial \Omega}{\partial l} - \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial f} \right), \\ \frac{d\Psi}{dl} &= \frac{2a}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial l}. \end{aligned} \quad (96)$$

Однако вычисление этих выражений требует разложения функции Ω с точностью до порядка, который превосходит на единицу порядок членов, удерживаемых в возмущениях. Поэтому мы преобразуем T еще раз посредством следующего уравнения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{df}{dl} + \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{dr}{dl}.$$

Вводя вместо вторых множителей в этом выражении их значения из (95), мы получаем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial f} = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \alpha}{\partial l} - \frac{re \sin f}{a(1-e^2)} r \frac{\partial \alpha}{\partial r}. \quad (97)$$

Посредством этого уравнения мы исключаем $\partial \Omega / \partial f$ из второго уравнения (96) и получаем

$$\frac{d\Gamma}{dl} = \frac{2}{1-e^2} \left[\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} a \frac{\partial \alpha}{\partial l} + \frac{r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} ar \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right]. \quad (98)$$

То же преобразование, проделанное с третьим уравнением (96), дает

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dl} &= \frac{2}{1-e^2} \left\{ \left[\frac{r}{a} \sin f + \frac{r^2 \sin f}{a^2(1-e^2)} \right] a \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{a \sqrt{1-e^2} \cos f}{r} + \frac{e \sin^2 f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{re \sin^2 f}{a(1-e^2)^{3/2}} \right] ar \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$1 = \frac{r}{a(1-e^2)} + \frac{er \cos f}{a(1-e^2)}.$$

Умножая член $a \sqrt{1-e^2} \cos f / r$ предыдущего уравнения на этот множитель, мы приводим весь этот член к следующему виду:

$$- \left[\frac{r \cos f}{a(1-e^2)^{3/2}} + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{er}{a(1-e^2)^{3/2}} \right] ar \frac{\partial \alpha}{\partial r}.$$

Теперь мы имеем

$$re \cos f + r - a(1-e^2) = 0.$$

Если мы умножим это уравнение на $[e/a(1-e^2)^{3/2}] ar \partial \Omega / \partial r$ и сложим произведение с предыдущим выражением, то последнее примет следующий вид:

$$- \left(\frac{r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} + 2 \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \right) ar \frac{\partial \alpha}{\partial r}.$$

Кроме того, мы имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} \left[\frac{r}{a} \sin f + \frac{r^2 \sin f}{a^2(1-e^2)} \right] &= \frac{a \sqrt{1-e^2} \cos f}{r} + \frac{\cos f}{\sqrt{1-e^2}} + \\ &\quad + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 f + 2 \frac{er \sin^2 f}{a(1-e^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{2r \cos f + 3ae}{a \sqrt{1-e^2}}, \end{aligned}$$

полученное тем же путем, что и выше. Поэтому

$$\frac{d\Psi}{dl} = \frac{2}{1-e^2} \left\{ \left[\int \frac{2r \cos f + 3ae}{a \sqrt{1-e^2}} dl \right] a \frac{\partial \alpha}{\partial l} - \frac{r \cos f + 2ae}{a \sqrt{1-e^2}} ar \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right\}. \quad (99)$$

Интеграл здесь должен быть взят таким образом, чтобы результат обращался в нуль при $l = 0$.

Подставим первое уравнение из (96) и уравнения (98) и (99) в (93). Тогда легко видеть, что выражения для A , B и C имеют вид

$$\begin{aligned} A = & -3 + \frac{1}{1-e^2} \left[\left(2 \frac{\varrho}{a} \cos \omega + 3e \right) \frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\varrho \sin \omega}{a \sqrt{1-e^2}} \int \left(2 \frac{r}{a} \cos f + 3e \right) dl \right], \\ B = & \frac{1}{1-e^2} \left[\left(2 \frac{\varrho}{a} \cos \omega + 3e \right) \frac{r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} - 2 \frac{\varrho \sin \omega}{a \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \cos f + 2e \right) \right], \\ C = & \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \frac{\varrho}{a} \sin(\omega-f). \end{aligned} \quad (100)$$

При разложении T и U в ряды из периодических членов, аргументы которых состоят из линейных комбинаций λ , l , l' (штрихованные величины относятся к возмущающей планете), мы должны вычислять непосредственно только члены, содержащие $\pm \lambda$, и в случае T — члены, не зависящие от λ . Остальные члены, содержащие более высокие кратности λ , и в случае U члены, не зависящие от λ , могут быть легко дополнены после интегрирования в функциях W_0 и R_0 . Этот способ пригоден при вычислении возмущений не только первого порядка, но и всех последующих порядков.

Коэффициенты A , B , C зависят от следующих функций:

$$\frac{r^2}{a^2}, \quad \frac{r}{a} \cos f, \quad \frac{r}{a} \sin f, \quad \frac{\varrho}{a} \cos \omega, \quad \frac{\varrho}{a} \sin \omega.$$

Периодические разложения этих функций по l и λ уже были выведены в гл. II. Если мы положим

$$P_j = \frac{1}{j} [J_{j-1}(je) - J_{j+1}(je)], \quad Q_j = \frac{1}{j} [J_{j-1}(je) + J_{j+1}(je)] \quad (101)$$

при условии, что

$$P_0 = -3e, \quad Q_0 = 0,$$

когда $j=0$, то в этом случае

$$\begin{aligned} \frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} &= \frac{5}{2}e + \frac{2}{1}Q_1 \cos l + \frac{2}{2}Q_2 \cos 2l + \frac{2}{3}Q_3 \cos 3l + \dots, \\ \int \left(2 \frac{r}{a} \cos f + 3e \right) dl &= \frac{2}{1}P_1 \sin l + \frac{2}{2}P_2 \sin 2l + \frac{2}{3}P_3 \sin 3l + \dots, \\ \frac{r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} &= Q_1 \sin l + Q_2 \sin 2l + Q_3 \sin 3l + \dots, \\ \frac{r}{a} \cos f + 2e &= \frac{1}{2}e + P_1 \cos l + P_2 \cos 2l + P_3 \cos 3l + \dots. \end{aligned} \quad (102)$$

В соответствии с утверждением, сделанным выше относительно этих функций от τ , достаточно положить

$$2 \frac{\varrho}{a} \cos \omega + 3e = 2P_1 \cos \lambda, \quad 2 \frac{\varrho \sin \omega}{a \sqrt{1-e^2}} = 2Q_1 \sin \lambda. \quad (103)$$

Подставляя (102) и (103) в выражения (100), мы получаем

$$\begin{aligned} A &= -3 + \frac{2}{1-e^2} \left[-\frac{5}{2} eP_1 \cos \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (P_1 Q_j \mp Q_1 P_j) \cos(jl \pm \lambda) \right], \\ B &= \frac{1}{1-e^2} \left[-eQ_1 \sin \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} (P_1 Q_j \mp Q_1 P_j) \sin(jl \pm \lambda) \right], \\ C &= -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (P_1 Q_j \mp Q_1 P_j) \sin(jl \pm \lambda). \end{aligned} \quad (104)$$

Чтобы найти члены в W_0 и R_0 , содержащие $\pm k\lambda$ в аргументах, по членам, имеющим в аргументах $\pm \lambda$, мы усматриваем из предыдущих уравнений, что в T и U коэффициенты последних являются линейными функциями от P_1 и Q_1 и что в случае — λ мы должны только переменить знак у Q_1 , чтобы получить соответствующий коэффициент. Также очевидно, что для $\pm k\lambda$ мы должны только написать P_k вместо P_1 и Q_k вместо Q_1 . Эти соотношения между коэффициентами, очевидно, не изменяются при интегрировании этих функций по t , так как λ не зависит от этой переменной. Поэтому, поскольку они верны для T и U , они в равной степени будут верны и для W_0 и R_0 . Чтобы сделать суть дела более ясной, допустим, что W_0 или R_0 представлено в виде следующей суммы:

$$\sum a^{(k)} \frac{\sin(k\lambda + \beta t)}{\cos}, \quad (105)$$

где a — числа, а βt означает ту часть аргумента, которая содержит l и l' . Тогда, если k означает целое положительное число, большее единицы, и если L и M — два неопределенных пока коэффициента, то мы будем иметь

$$\begin{aligned} a^{(k)} &= LP_k + MQ_k, \\ a^{(-k)} &= LP_k - MQ_k, \\ a^{(1)} &= LP_1 + MQ_1, \\ a^{(-1)} &= LP_1 - MQ_1. \end{aligned} \quad (106)$$

Из третьего и четвертого соотношений мы выводим

$$L = \frac{a^{(1)} + a^{(-1)}}{2P_1}, \quad M = \frac{a^{(1)} - a^{(-1)}}{2Q_1}. \quad (107)$$

Если эти значения подставить в первое и второе соотношения из (106) и для краткости положить

$$\eta^{(k)} = \frac{P_k}{2P_1} + \frac{Q_k}{2Q_1}, \quad \theta^{(k)} = \frac{P_k}{2P_1} - \frac{Q_k}{2Q_1}, \quad (108)$$

то

$$a^{(\pm k)} = \eta^{(k)} a^{(\pm 1)} + \theta^{(k)} a^{(\mp 1)}. \quad (109)$$

Кроме того, в случае R_0 мы можем вычислить $a^{(0)}$ по $a^{(1)}$ и $a^{(-1)}$; поскольку $Q_0 = 0$, то очевидно, что, полагая $\eta^{(0)} = P_0/2P_1$, мы получим

$$a^{(0)} = \eta^{(0)} (a^{(1)} + a^{(-1)}). \quad (110)$$

Поскольку $\eta^{(k)}$ является величиной $|k-1|$ -го порядка, а $\theta^{(k)}$ — величиной $|k+1|$ -го порядка относительно эксцентрикитета, то часто оказывается возможным пренебречь вторым членом правой части соотношения (109). Поскольку обе функции, $q/a \cos \omega$ и $q/a \sin \omega$, имеют эллиптические значения, которые остаются неизменными на протяжении всех приближений, то отсюда вытекает, что это упрощение пригодно для возмущений не только первого порядка, но и всех последующих порядков.

8. Постоянные интегрирования — время как независимая переменная. После интегрирования функции T необходимо дополнить функцию W_0 включением некоторых постоянных интегрирования. Чтобы определить эти постоянные, заметим, что интеграл от функции (93) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_0 = k_0 + \int \frac{d\Xi}{dl} dl + c_1 \left(\frac{q}{a} \cos \omega + \frac{3}{2} e \right) + \left(\frac{q}{a} \cos \omega + \frac{3}{2} e \right) \int \frac{d\Upsilon}{dl} dl + \\ + c_2 \frac{q}{a} \sin \omega + \frac{q}{a} \sin \omega \int \frac{d\Psi}{dl} dl = \\ = k_0 + c_1 \left(\frac{q}{a} \cos \omega + \frac{3}{2} e \right) + c_2 \frac{q}{a} \sin \omega + \int T dl, \end{aligned} \quad (111)$$

где k_0 , c_1 , c_2 — постоянные. Мы имеем

$$\frac{q}{a} \cos \omega + \frac{3}{2} e = P_1 \cos \lambda + P_2 \cos 2\lambda + P_3 \cos 3\lambda + \dots,$$

$$\frac{q}{a} \sin \omega = (Q_1 \sin \lambda + Q_2 \sin 2\lambda + Q_3 \sin 3\lambda + \dots) \sqrt{1 - e^2}.$$

и если мы положим

$$k_1 = c_1 P_1, \quad k_2 = c_2 Q_1 \sqrt{1 - e^2},$$

то величины, которые должны быть прибавлены к $\int T dl$, чтобы дополнить W_0 , принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} k_0 + k_1 \left(\cos \lambda + \frac{P_2}{P_1} \cos 2\lambda + \frac{P_3}{P_1} \cos 3\lambda + \dots \right) + \\ + k_2 \left(\sin \lambda + \frac{Q_2}{Q_1} \sin 2\lambda + \frac{Q_3}{Q_1} \sin 3\lambda + \dots \right). \end{aligned} \quad (112)$$

Если в этом выражении мы заменим τ на t и затем проинтегрируем, то получим соответствующие члены в $n_0 \delta z$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} k_0 n_0 t + k_1 \left(\sin l + \frac{1}{2} \frac{P_2}{P_1} \sin 2l + \frac{1}{3} \frac{P_3}{P_1} \sin 3l + \dots \right) - \\ - k_2 \left(\cos l + \frac{1}{2} \frac{Q_2}{Q_1} \cos 2l + \frac{1}{3} \frac{Q_3}{Q_1} \cos 3l + \dots \right). \end{aligned} \quad (113)$$

На этом этапе очевидно, что численное значение k_0 зависит от смысла, придаваемого величине n_0 , и что k_0 должно быть выбрано таким образом, чтобы смысл n_0 оставался неизменным. Здесь мы отклонимся на некоторое время от основной темы, чтобы обсудить смысл элементов.

В тех случаях, когда необходимо вычислить обсолютные возмущения какого-либо объекта по методу, в котором численные значения каких-нибудь элементов предполагаются известными с самого начала, желательно знать эти значения со всей возможной степенью точности;

иначе погрешности в принятых численных значениях элементов могут вызвать значительные ошибки в выражениях для возмущений. Обычно принято начинать вычисления с оскулирующими элементами, так как эти элементы определены с динамической точки зрения строго и могут быть вычислены без особого труда. Однако если возмущения уже вычислены, то вообще говоря целесообразно связать их с какими-нибудь средними элементами, а не с оскулирующими элементами. Благодаря такому приему численные значения возмущений будут меньше, а их выражения несколько упростятся. Интуитивно средние элементы можно примерно представить следующим образом: они почти совпадают со средними значениями оскулирующих элементов за большое число обращений объекта. Операционно их можно определить различными способами в зависимости от тех методов, которые применяются для вычисления возмущений. В данном случае естественно дать им следующее определение. Средняя долгота в орбите для эпохи выбирается таким образом, чтобы $n_0\delta z$ не содержало постоянного члена. Среднее движение во вспомогательном эллипсе выбирается так, чтобы $n_0\delta z$ не содержало члена, пропорционального времени. Эксцентриситет и перигелий вспомогательного эллипса выбираются таким образом, чтобы $n_0\delta z$ не содержало чисто периодических членов с аргументами $\sin l$ и $\cos l$. Наклонность и узел в эпоху выбираются так, чтобы $i/\cos l$ не содержала чисто периодических членов с аргументами $\sin l$ и $\cos l$.

Разность между любым средним элементом и соответствующим ему оскулирующим элементом является величиной порядка возмущающих сил. Поэтому возмущения, предназначенные для использования с оскулирующими элементами, отличаются от возмущений, соответствующих средним элементам, по крайней мере на квадрат возмущающих сил.

Мы можем представить себе два пути перехода от оскулирующих элементов к средним элементам. Определив возмущения, соответствующие оскулирующим элементам, мы можем взять шесть членов, написанных выше, и вычислить изменения в элементах, необходимые для обращения их в нуль. Строго говоря, затем следовало бы проверить, не являются ли эти изменения в элементах настолько большими, чтобы произвести изменения в возмущениях. С другой стороны, мы можем с самого начала считать элементы, которые в действительности являются оскулирующими, средними элементами и после получения возмущений сравнить теорию с наблюдениями; новые элементы, полученные при помощи дифференциального исправления, будут фактически средними элементами. При строгом подходе необходимо снова проверить, не являются ли изменения в элементах настолько большими, чтобы вызвать изменения в возмущениях. В тех случаях, когда требуется высокая точность, может оказаться затруднительным выбрать какой-либо из этих двух способов; любой из них включает в себя последовательные приближения. Однако если для рассматриваемого объекта достаточны возмущения первого порядка, то обычно предпочитают второй способ, так как в любом случае необходимо проверять теорию при помощи сравнения с наблюдениями.

Теперь мы покажем, каким образом можно определить постоянные k_0 , k_1 , k_2 , во-первых, в предположении, что элементы являются оскулирующими в момент времени $t = 0$, и, во-вторых, в предположении, что они являются средними элементами. В первом случае необходимо, чтобы величина $n_0\delta z$, а также ее первая производная \bar{W}_0 обращались в нуль в указанную эпоху. Это требует, чтобы в функции W_0 коэффи-

циенты при $\sin \lambda$, $\cos \lambda$ и членах, не зависящих от λ , в отдельности обращались в нуль. В связи с этим напомним, что любой член в функции W_0 вида

$$a^{(\pm 1)} \sin (\pm \lambda + \beta t)$$

может быть представлен в виде

$$a^{(\pm 1)} \sin \beta t \cos \lambda \pm a^{(\pm 1)} \cos \beta t \sin \lambda,$$

и любой член

$$a^{(\pm 1)} \cos (\pm \lambda + \beta t)$$

можно написать в виде

$$a^{(\pm 1)} \cos \beta t \cos \lambda \mp a^{(\pm 1)} \sin \beta t \sin \lambda.$$

Представляя функцию W_0 таким способом, мы вычисляем для момента времени $t = 0$ сумму всех членов, независимых от λ , сумму всех членов, умноженных на $\sin \lambda$, и сумму всех членов, умноженных на $\cos \lambda$. Затем мы полагаем каждую из постоянных k_0 , k_1 , k_2 в отдельности равной соответственно этим трем суммам, взятым со знаком минус.

Во втором случае мы желаем определить k_0 , k_1 , k_2 таким образом, чтобы намеченные члены в $n_0 dz$ тождественно обратились в нуль. Рассматривая сперва k_0 , легко видеть, что постоянные члены в \bar{W}_0 порождаются членами в функции W_0 со следующими аргументами: $\cos(\lambda - l)$, $\cos(-\lambda + l)$, $\cos(2\lambda - 2l)$, $\cos(-2\lambda + 2l)$, $\cos(3\lambda - 3l)$ и т. д.— и никакими иными. Поэтому мы суммируем коэффициенты всех этих членов и полагаем k_0 равным этой сумме, взятой со знаком минус. Что касается k_1 , то члены в \bar{W}_0 с аргументом $\cos l$ возникают из членов в функции \bar{W}_0 , имеющих аргумент $\cos(\pm l)$, а также из всех остальных косинусоидальных членов, содержащих только кратности λ и l , причем кратность λ , сложенная с кратностью l , в сумме дает единицу. Сложим все коэффициенты членов такого рода и обозначим их сумму через Σ_1 ; таким образом, мы имеем в \bar{W}_0 член $\Sigma_1 \cos l$, а в $n_0 dz$ — член $\Sigma_1 \sin l$. Но в $n_0 dz$ имеется также еще один член с тем же аргументом, порожденный членом с аргументом $\sin \lambda$ в T . Обозначим этот член через $s \sin \lambda$. В таком случае мы имеем в W_0 член $sn_0 t \sin \lambda$, в \bar{W}_0 член $sn_0 t \sin l$ и в $n_0 dz$ члены $-sn_0 t \cos l + s \sin l$. Отсюда следует, что мы должны положить

$$k_1 = -(s + \Sigma_1).$$

Мы определяем k_2 при помощи аналогичного процесса, помня, что при суммировании коэффициентов синусоидальных членов любые отрицательные аргументы должны быть сделаны положительными переменой знака коэффициента. Если обозначим член в T с аргументом $\cos \lambda$ через $c \cos \lambda$, а коэффициент при $\sin l$ в \bar{W}_0 через Σ_2 , то найдем

$$k_2 = -(c - \Sigma_2).$$

В случае R_0 мы находим при помощи процесса, аналогичного процессу для W_0 , что эта функция должна быть дополнена выражением

$$\begin{aligned} k_3 \left(\frac{1}{2} \frac{P_0}{P_1} + \cos \lambda + \frac{P_2}{P_1} \cos 2\lambda + \frac{P_3}{P_1} \cos 3\lambda + \dots \right) + \\ + k_4 \left(\sin \lambda + \frac{Q_2}{Q_1} \sin 2\lambda + \frac{Q_3}{Q_1} \sin 3\lambda + \dots \right). \end{aligned}$$

Постоянные k_3 и k_4 определяются аналогично, как и k_1 и k_2 , но с упрощением: не появляются величины, обозначенные выше через s и t , так как не требуется дальнейшего интегрирования.

Мы должны еще рассмотреть аддитивную постоянную интегрирования, которая появляется при интегрировании \bar{W}_0 . Из уже сказанного мы можем заключить, что должны вычислить для момента времени $t=0$ функцию $n_0 \delta z$ с оскулирующими элементами и положить указанную постоянную равной этому значению, взятому со знаком минус, тогда как в случае средних элементов мы полагаем эту постоянную просто равной нулю.

Теперь мы определили шесть постоянных интегрирования, и известно, что никакие другие постоянные не могут существовать независимо от этих шести. Однако в уравнении (62) для v мы до сих пор имеем постоянную интегрирования, обозначенную там через C (не смешивать с функцией C , на которую умножается возмущающая сила в выражении для U). Поскольку эта постоянная должна быть функцией от остальных шести, то, очевидно, должно существовать некоторое уравнение, определяющее v без дополнительного интегрирования. Для того чтобы найти это уравнение, мы замечаем, что уравнение (63) можно использовать для вывода значения h/h_0 через W_0 . Если мы обозначим через X_0 часть функции W_0 , не зависящую от λ , а через X_1 — часть, умноженную на $\cos \lambda$, то

$$X_0 = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \xi \left(-\frac{3}{2} e_0 \right),$$

$$X_1 = 2 \frac{h}{h_0} \xi (P_1),$$

откуда

$$2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 = X_0 + \frac{3}{2} \frac{e_0}{P_1} X_1. \quad (114)$$

В этом уравнении мы подставляем вместо h_0/h его значение из (44) и получаем следующее уравнение:

$$\frac{2}{(1+v)^2 \left(1 + \frac{d}{dt} \delta z \right)} - (1+v)^2 \left(1 + \frac{d}{dt} \delta z \right) - 1 = X_0 + \frac{3}{2} \frac{e_0}{P_1} X_1. \quad (115)$$

Это уравнение, когда известно $d/dt \delta z$, дает v без дополнительного интегрирования. Чтобы привести его к виду, удобному для вычислений, мы прибавим к обеим частям такую величину, чтобы левая часть стала равной $-6v$; тогда, деля обе части на -6 , мы получаем

$$v = -\frac{1}{6} \left(X_0 + \frac{3}{2} \frac{e_0}{P_1} X_1 \right) - \frac{1}{2} \left[(1+v)^2 \frac{d}{dt} \delta z + v^2 \right] + \\ + \frac{\left[(1+v)^2 \frac{d}{dt} \delta z + 2v + v^2 \right]^2}{3(1+v)^2 \left(1 + \frac{d}{dt} \delta z \right)}. \quad (116)$$

Это уравнение является точным. Если мы можем ограничиться членами первого порядка относительно возмущающих сил, то оно приводится к следующему виду:

$$v = -\frac{1}{6} \left(X_0 + \frac{3}{2} \frac{e_0}{P_1} X_1 \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta z \quad (117)$$

или, если должны быть включены члены второго порядка, к уравнению вида

$$v = -\frac{1}{6} \left(X_0 + \frac{3}{2} \frac{e_0}{P_1} X_1 \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta z + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{dt} \delta z + \frac{1}{2} v \right)^2 + \frac{3}{4} v^2. \quad (118)$$

Так как мы уже видели, что постоянная часть выражения X_0 равна k_0 , постоянная часть X_1 равна k_1 и что в случае средних элементов, рассмотренном выше, $d/dt \delta z$ не содержит постоянной части, то отсюда следует, что в этом же случае постоянная часть v равна

$$C = -\frac{1}{6} \left(k_0 + \frac{3}{2} \frac{e_0}{P_1} k_1 \right), \quad (119)$$

тогда как в случае оскулирующих элементов постоянная C должна быть дополнена путем прибавления к правой части выражения (119) половины постоянной части $d/dt \delta z$, взятой с обратным знаком.

Уравнение (117) можно почти так же легко применить для определения полного значения v , как и другие, и оно приспособлено лучше других уравнений для нахождения членов, умноженных на $n_0 t$.

9. Эксцентрическая аномалия в качестве независимой переменной. Под эксцентрической аномалией как независимой переменной следует понимать переменную, которая связана с t посредством некоторых постоянных элементов, точные значения которых пока остаются неопределенными, но будут определены в конце таким образом, чтобы сделать этот выбор независимой переменной возможно более выгодным. Обозначим эту переменную через E_0 и соответствующий радиус-вектор — через r_0 . Тогда, используя нижний индекс нуль для обозначения названных выше постоянных элементов, мы можем написать следующие уравнения

$$n_0 t + c_0 = E_0 - e_0 \sin E_0, \quad n_0 dE_0 = \frac{r_0}{a_0} dE_0.$$

В связи с этим определим T и U формулами

$$T = \frac{dW_0}{dE_0} \text{ и } U = \frac{dR_0}{dE_0}.$$

Тогда

$$T = \frac{h_0 r_0}{a_0 n_0} \left\{ 2 \frac{\varrho}{r} \cos(f_0 - \omega) - 1 + \frac{2h^2 \varrho}{h_0^2 a_0 (1 - e_0^2)} [\cos(f_0 - \omega) - 1] \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial f} + \\ + 2 \frac{h_0 r_0}{a_0 n_0} \frac{\varrho}{r} \sin(f_0 - \omega) r \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \quad (120)$$

$$U = \frac{r_0}{a_0 n_0} h r \frac{\varrho}{a_0} \sin(\omega - f_0) \frac{\partial \alpha}{\partial z} \cos I.$$

В том случае, когда мы ограничиваемся первым порядком возмущающих сил, первое из этих выражений приводится к следующему виду:

$$T = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \left\{ 2\varrho \cos(f - \omega) - r + \frac{2\varrho r}{a(1 - e^2)} [\cos(f - \omega) - 1] \right\} \frac{\partial \alpha}{\partial f} + \\ + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \varrho \sin(f - \omega) r \frac{\partial \alpha}{\partial r}, \quad (121)$$

в котором нижний индекс нуль подразумевается. Так как, согласно теории эллиптического движения,

$$\frac{df}{dE} = \frac{\sin f}{\sin E} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{r}, \quad \frac{dr}{dE} = \frac{er \sin f}{\sqrt{1-e^2}},$$

то отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial E} = \frac{a \sqrt{1-e^2}}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial f} + \frac{er \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial r}. \quad (122)$$

Посредством этого уравнения мы исключаем $\partial \Omega / \partial f$ из уравнения (121). Таким образом получаем

$$T = Ma \frac{\partial \Omega}{\partial E} + Nar \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad (123)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{a^2(1-e^2)} \left\{ 2r\varrho \cos(f-\omega) - r^2 + \frac{2r^2\varrho}{a(1-e^2)} [\cos(f-\omega) - 1] \right\}, \\ N &= \frac{1}{a \sqrt{1-e^2}} \left\{ 2\varrho \sin(f-\omega) - \left\{ 2\varrho \cos(f-\omega) - r + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2r\varrho}{a(1-e^2)} [\cos(f-\omega) - 1] \right\} \frac{er \sin f}{a(1-e^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (124)$$

Мы исключаем r , f , ϱ и ω из этих уравнений посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos f &= \cos E - e, & \frac{\varrho}{a} \cos \omega &= \cos \varepsilon - e, \\ \frac{r}{a} \sin f &= \sqrt{1-e^2} \sin E, & \frac{\varrho}{a} \sin \omega &= \sqrt{1-e^2} \sin \varepsilon, \\ \frac{r}{a} &= -1 - e \cos E, & \frac{\varrho}{a} &= 1 - e \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε означает ту же функцию от t , что и E от t . При преобразовании N замечаем, что

$$\begin{aligned} \frac{er^2 \sin f}{a^2(1-e^2)^{3/2}} &= \frac{(1-e \cos E)e \sin E}{1-e^2}, \\ \frac{2\varrho r}{a^2(1-e^2)^{3/2}} [\cos(f-\omega) - 1] \frac{er \sin f}{a(1-e^2)} &= -\frac{2}{1-e^2} [\cos(\varepsilon - E) - 1] e \sin E, \\ \frac{2\varrho \sin(f-\omega)}{a \sqrt{1-e^2}} - \frac{2\varrho \cos(f-\omega)}{a \sqrt{1-e^2}} \frac{er \sin f}{a(1-e^2)} &= 2 \frac{\sin E}{(1-e^2)} \frac{\varrho}{a} \cos \omega - 2 \frac{\cos E}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\varrho}{a} \sin \omega = \\ &= 2 \frac{\sin E}{1-e^2} (\cos \varepsilon - e) - 2 \cos E \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{1-e^2} \left[-3 \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) + 2e \cos E - \frac{1}{2} e^2 \cos 2E + e^2 \cos(\varepsilon + E) - \right. \\ &\quad \left. - 3e \cos \varepsilon + (4 - e^2) \cos(\varepsilon - E) - e \cos(\varepsilon - 2E) \right], \\ N &= \frac{1}{1-e^2} \left[e \sin E - \frac{1}{2} e^2 \sin 2E + e^2 \sin(\varepsilon + E) - \right. \\ &\quad \left. - e \sin \varepsilon - (2 - e^2) \sin(\varepsilon - E) + e \sin(\varepsilon - 2E) \right]. \end{aligned} \quad (125)$$

Таким образом, мы видим, что M и N являются конечными функциями от ϵ и E .

Когда приближение ограничивается первым порядком относительно возмущающих сил, то второе из выражений (120) приводится к следующему виду:

$$U = \frac{r^2 Q}{a \sqrt{1-e^2}} \sin(\omega - f) \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos I.$$

Вводя множитель Q таким образом, чтобы это уравнение приняло вид

$$U = Q a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cos I, \quad (126)$$

находим, что

$$\begin{aligned} Q = e \sin E - \frac{1}{2} e^2 \sin 2E + \frac{1}{2} e^2 \sin(\epsilon + E) - \frac{3}{2} e \sin \epsilon + \\ + \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) \sin(\epsilon - E) - \frac{1}{2} e \sin(\epsilon - 2E). \end{aligned} \quad (127)$$

Итак, Q , подобно M и N , выражается в конечном виде через ϵ и E .

10. Постоянные интегрирования — эксцентрическая аномалия как независимая переменная. В случае оскулирующих элементов порядок вычисления постоянных интегрирования в точности совпадает с порядком, описанным уже для того случая, когда независимой переменной является время, а вместо множителей $\cos \lambda$ и $\sin \lambda$ появляются $\cos \epsilon$ и $\sin \epsilon$. В случае средних элементов постоянные k определяются аналогичным путем, что и ранее, однако величины, прибавляемые к интегралам для дополнения значений W_0 и R_0 , выглядят несколько проще; они сводятся к следующим значениям:

$$k_0 + k_1 \cos \epsilon + k_2 \sin \epsilon \quad (128)$$

и

$$k_3 (\cos \epsilon - e) + k_4 \sin \epsilon. \quad (129)$$

11. Возмущающая функция и ее производные. Точные выражения, выведенные в этой главе для возмущений, могут быть проинтегрированы лишь путем последовательных приближений. Мы только что получили удобные уравнения для первого приближения, в котором возмущения получаются из функций T и U , причем все входящие в эти функции переменные ограничены своими эллиптическими значениями. Во втором приближении мы определим приращения δT и δU , которые после прибавления к T и U дадут значения этих функций, получающиеся в том случае, если к эллиптическим (невозмущенным) значениям переменных прибавить возмущения первого порядка. По приращениям δT и δU будут определены возмущения второго порядка.

В гл. XV будет показано, каким образом величины

$$\Omega, \frac{\partial \Omega}{\partial z}, r \frac{\partial \Omega}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial \Omega}{\partial t} \text{ или } \frac{\partial \Omega}{\partial f}$$

могут быть выражены бесконечными рядами. Очевидно, что при вычислении возмущений второго порядка понадобятся вторые частные производные от Ω . Рассмотрим теперь этот вопрос подробно.

Пусть x, y, z обозначают прямоугольные координаты возмущаемой планеты, отнесенные к любой системе осей, а x', y', z' — координаты

возмущающей планеты, отнесенные к тем же осям. Тогда известно, что

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \quad (130)$$

где

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Расположим оси x и y в мгновенной плоскости орбиты возмущающей планеты и обозначим координаты в этом случае через X_1, Y_1, Z , где Z — исчезающее малая величина. Тогда частная производная от Ω по z имеет следующее выражение:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) z', \quad (131)$$

и при вычислении остальных производных от Ω мы можем принять для Ω следующую формулу:

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{X_1 x' + Y_1 y'}{r'^3} \right), \quad (132)$$

где теперь

$$\Delta^2 = (X_1 - x')^2 + (Y_1 - y')^2 + z'^2.$$

Возмущающая функция не зависит от выбора начала координат, и поэтому мы можем выбрать это начало по нашему усмотрению. Наиболее простые выражения, соответствующие использованию переменных Ганзена, получаются при выборе в качестве прямой, от которой отсчитываются долготы, линии узлов мгновенной орбиты возмущающей планеты относительно мгновенной орбиты возмущаемой планеты в момент времени $t=0$. Пусть взаимная наклонность этих двух плоскостей орбит обозначена через γ , и пусть φ — дуга, идущая в направлении движения от оси X до узла, а ψ — дуга от оси X' до того же узла в том же направлении. Тогда прямоугольные координаты, отнесенные к плоскости мгновенной орбиты возмущаемой планеты и к узлу как к началу счета долгот, равны

$$\begin{aligned} X_1 &= r \cos(\nu - \varphi), & x' &= r' \cos(\nu' - \psi), \\ Y_1 &= r \sin(\nu - \varphi), & y' &= r' \cos \gamma \sin(\nu' - \psi), \\ Z &= 0, & z' &= -r' \sin \gamma \sin(\nu' - \psi). \end{aligned} \quad (133)$$

Требуется заменить ν и ν' на f_0 и f'_0 . Мы имеем

$$\nu = f_0 - \pi_0, \quad \nu' = f'_0 - \pi'_0$$

и полагаем

$$\pi_0 - \varphi = \Pi, \quad \pi'_0 - \psi = \Pi'.$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_1 &= r \cos(f_0 + \Pi), & x' &= r' \cos(f'_0 + \Pi'), \\ Y_1 &= r \sin(f_0 + \Pi), & y' &= r' \cos \gamma \sin(f'_0 + \Pi'), \\ Z &= 0, & z' &= -r' \sin \gamma \sin(f'_0 + \Pi'). \end{aligned} \quad (134)$$

Если мы подставим эти значения в выражение (132) и положим

$$H = \cos(f_0 + \Pi) \cos(f'_0 + \Pi') + \cos \gamma \sin(f_0 + \Pi) \sin(f'_0 + \Pi'), \quad (135)$$

то получим

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^3} H \right) \quad (136)$$

и

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'H. \quad (137)$$

Это — уравнение, которое в тригонометрии на плоскости определяет сторону треугольника через остальные две стороны и косинус угла, заключенного между ними, откуда легко видеть, что H есть косинус угла между двумя радиусами-векторами.

Частным дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial l} &= -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr'H', \\ r \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \frac{m'}{1+m} \left[\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr'H - \frac{r^2}{\Delta^3} \right], \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) r' \sin \gamma \sin (f_0 + \Pi'), \end{aligned} \quad (138)$$

где

$$H' = -\frac{\partial H}{\partial f_0} = \sin (f_0 + \Pi) \cos (f'_0 + \Pi') - \cos \gamma \cos (f_0 + \Pi) \sin (f'_0 + \Pi'). \quad (139)$$

Таким образом, частные производные от Ω , связанные с определением T и U , выражаются как функции от семи переменных: r , r' , f_0 , f'_0 , γ , Π и Π' . В первом приближении допустимо считать последние три величины постоянными, благодаря чему они легко получаются из начальных элементов обеих планет при помощи формул сферической тригонометрии для использования в выражениях (138). Если для возмущений первого порядка применяются выражения (92), то вместо первого уравнения из (138) мы имеем уравнение для $\partial \Omega / \partial l$, которое можно получить непосредственным дифференцированием ряда, выражающего функцию Ω .

Теперь мы найдем δT и δU , применяя к выражениям (91) теорему Тейлора. Однако сначала мы заметим, что поскольку $r = r_0(1+v)$, $r' = r'_0(1+v')$, а r_0 и f_0 — функции от $n_0z = l + n_0\delta z$, то, очевидно, мы можем вычислить частные производные по $n\delta z$, $n'\delta z'$, v , v' (отбрасывая нижний индекс у n) вместо того, чтобы брать их по r , r' , f_0 , f'_0 . Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{\partial T}{\partial l} n\delta z + \frac{\partial T}{\partial l'} n'\delta z' + \frac{\partial T}{\partial v} v + \frac{\partial T}{\partial v'} v' + \frac{\partial T}{\partial h} \delta h + \\ &\quad + \frac{\partial T}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial T}{\partial \Pi} \delta \Pi + \frac{\partial T}{\partial \Pi'} \delta \Pi', \\ \delta U &= \frac{\partial U}{\partial l} n\delta z + \frac{\partial U}{\partial l'} n'\delta z' + \frac{\partial U}{\partial v} v + \frac{\partial U}{\partial v'} v' + \frac{\partial U}{\partial h} \delta h + \\ &\quad + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial U}{\partial \Pi} \delta \Pi + \frac{\partial U}{\partial \Pi'} \delta \Pi' + \frac{\partial U}{\partial I} \delta I. \end{aligned} \quad (140)$$

Члены выражений для δT и δU , которые зависят от $\delta \gamma$, $\delta \Pi$ и $\delta \Pi'$, могут быть сделаны вместо этого зависимыми от u , u' , du/dE , и это полезно сделать, поскольку последние три величины уже имеются в нашем распоряжении после первого приближения. Мы можем воспользоваться выражениями (135) — (139), так как γ , Π и Π' входят только таким образом в функции T и U . Обозначим приращение функции Ω , порож-

даемое только приращениями величин γ , Π и Π' , символом δ' . Тогда

$$\delta' \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi} \delta \Pi + \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi'} \delta \Pi'. \quad (141)$$

Это выражение необходимо теперь привести к следующему виду:

$$\delta' \Omega = Au + B \frac{du}{dE} + Cu',$$

где символы A , B , C не следует смешивать с выражениями в предыдущих разделах, обозначенными теми же буквами.

Если мы определим два угла, Φ и Ψ , формулами

$$\Phi = \pi_0 - \sigma - \Pi, \quad \Psi = \pi'_0 - \sigma' - \Pi', \quad (142)$$

то, согласно формулам сферической тригонометрии, мы имеем

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin \Phi &= \sin I' \sin (\theta - \theta'), \\ \sin \gamma \cos \Phi &= \cos I' \sin I - \sin I' \cos I \cos (\theta - \theta'), \\ \sin \gamma \sin \Psi &= \sin I \sin (\theta - \theta'), \\ \sin \gamma \cos \Psi &= -\cos I \sin I' + \sin I \cos I' \cos (\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (143)$$

откуда при помощи (2) можно вывести следующие выражения:

$$\begin{aligned} d\gamma &= \cos \Phi dI + \frac{\sin I \sin \Phi}{\cos I} d\sigma - \cos \Psi dI' - \frac{\sin I' \sin \Psi}{\cos I'} d\sigma', \\ d\Pi &= \operatorname{ctg} \gamma \left(\sin \Phi dI - \frac{\sin I \cos \Phi}{\cos I} d\sigma \right) - \\ &\quad - \operatorname{cosec} \gamma \left(\sin \Psi dI' - \frac{\sin I' \cos \Psi}{\cos I'} d\sigma' \right), \\ d\Pi' &= \operatorname{cosec} \gamma \left(\sin \Phi dI - \frac{\sin I \cos \Phi}{\cos I} d\sigma \right) - \\ &\quad - \operatorname{ctg} \gamma \left(\sin \Psi dI' - \frac{\sin I' \cos \Psi}{\cos I'} d\sigma' \right). \end{aligned} \quad (144)$$

Из уравнений (4) мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\sin(\sigma - \theta_0)}{\cos I} dp + \frac{\cos(\sigma - \theta_0)}{\cos I} dq, \\ d\sigma &= \frac{\cos(\sigma - \theta_0)}{\sin I} dp - \frac{\sin(\sigma - \theta_0)}{\sin I} dq, \end{aligned} \quad (145)$$

которые после подстановки в выражения (144) вместе с аналогичными соотношениями для dI' и $d\sigma'$ дают

$$\begin{aligned} \delta \gamma &= \frac{q_1}{\cos I} - \frac{q'_1}{\cos I'}, \\ \delta \Pi &= \operatorname{ctg} \gamma \frac{p_1}{\cos I} - \operatorname{cosec} \gamma \frac{p'_1}{\cos I'}, \\ \delta \Pi' &= \operatorname{cosec} \gamma \frac{p_1}{\cos I} - \operatorname{ctg} \gamma \frac{p'_1}{\cos I'}, \end{aligned} \quad (146)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= -\delta p \cos \Phi_0 + \delta q \sin \Phi_0, \\ q_1 &= \delta p \sin \Phi_0 + \delta q \cos \Phi_0, \\ p'_1 &= -\delta p' \cos \Psi_0 + \delta q' \sin \Psi_0, \\ q'_1 &= \delta p' \sin \Psi_0 + \delta q' \cos \Psi_0, \end{aligned} \quad (147)$$

а Φ_0 и Ψ_0 — значения Φ и Ψ при $\sigma = \theta_0$ и $\sigma' = \theta'_0$. Величины p_1 и q_1 можно выразить через u и du/dE . Поскольку здесь мы не должны проводить различие между r и r_0 , f и f_0 , то имеем уравнение вида

$$u = \delta q \frac{r}{a} \sin(f + \pi_0 - \theta_0) - \delta p \frac{r}{a} \cos(f + \pi_0 - \theta_0),$$

которое в силу соотношений (147) можно написать в следующем виде:

$$u = q_1 \frac{r}{a} \sin(f + \Pi) + p_1 \frac{r}{a} \cos(f + \Pi). \quad (148)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} r \sin f &= a \sqrt{1-e^2} \cos E = -\frac{r \cos f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{re}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \frac{d}{dE} r \cos f &= -a \sin E = -\frac{r \sin f}{\sqrt{1-e^2}}, \end{aligned}$$

то имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dE} &= q_1 \frac{r}{a \sqrt{1-e^2}} [\cos(f + \Pi) + e \cos \Pi] - \\ &\quad - p_1 \frac{r}{a \sqrt{1-e^2}} [\sin(f + \Pi) + e \sin \Pi]. \end{aligned} \quad (149)$$

Путем исключения получаем из уравнений (148) и (149)

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{u}{1-e^2} [\cos(f + \Pi) + e \cos \Pi] - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{du}{dE} \sin(f + \Pi), \\ q_1 &= \frac{u}{1-e^2} [\sin(f + \Pi) + e \sin \Pi] + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{du}{dE} \cos(f + \Pi). \end{aligned} \quad (150)$$

Частным дифференцированием выражения (136) мы получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} &= -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin \varphi \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi'), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi} &= -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' [\sin(f + \Pi) \cos(f' + \Pi') - \\ &\quad - \cos \varphi \cos(f + \Pi) \sin(f' + \Pi')], \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi'} &= -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' [\cos(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') - \\ &\quad - \cos \varphi \sin(f + \Pi) \cos(f' + \Pi')]. \end{aligned} \quad (151)$$

Подставляя эти выражения, а также (146) в (141), находим

$$\begin{aligned} \delta' \Omega &= -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin \varphi \cos(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') \frac{p_1}{\cos I} - \\ &\quad - \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin \varphi \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') \frac{q_1}{\cos I} + \\ &\quad + \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin \varphi \sin(f + \Pi) \cos(f' + \Pi') \frac{p'_1}{\cos I'} + \\ &\quad + \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' \sin \varphi \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') \frac{q'_1}{\cos I'}. \end{aligned} \quad (152)$$

Из уже полученного выражения для $\partial\Omega/\partial z$ легко видеть, что выражение (152) равносильно следующему:

$$\begin{aligned}\delta' \Omega = & \frac{\partial \Omega}{\partial z} r \cos(f + \Pi) \frac{p_1}{\cos I} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} r \sin(f + \Pi) \frac{q_1}{\cos I} + \\ & + \frac{\partial \Omega}{\partial z'} r' \cos(f' + \Pi') \frac{p'_1}{\cos I'} + \frac{\partial \Omega}{\partial z'} r' \sin(f' + \Pi') \frac{q'_1}{\cos I'}.\end{aligned}\quad (153)$$

Если мы подставим в это выражение значение au , определяемое формулой (148), и соответствующее значение $a'u'$, то получим

$$\delta' \Omega = a \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{u}{\cos I} + a' \frac{\partial \Omega}{\partial z'} \frac{u'}{\cos I'}.\quad (154)$$

Дифференцируя это выражение по f и r , имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial f} \delta' \Omega = & a \frac{\partial^2 \Omega}{\partial f \partial z} \frac{u}{\cos I} + a \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{du}{df} \frac{1}{\cos I} + a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial f \partial z'} \frac{u'}{\cos I'}, \\ r \frac{\partial}{\partial r} \delta' \Omega = & ar \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z} \frac{u}{\cos I} + a \frac{\partial \Omega}{\partial z} r \frac{du}{dr} \frac{1}{\cos I} + a' r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z'} \frac{u'}{\cos I'}.\end{aligned}\quad (155)$$

Но из (148) находим

$$\begin{aligned}r \frac{du}{dr} = u, \\ a \frac{du}{df} = q_1 r \cos(f + \Pi) - p_1 r \sin(f + \Pi),\end{aligned}$$

или, исключая p_1 и q_1 при помощи (150),

$$a \frac{du}{df} = -\frac{re \sin f}{1-e^2} u + \frac{r}{\sqrt{1-e^2}} \frac{du}{dE}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial f} \delta' \Omega = & \left(a \frac{\partial^2 \Omega}{\partial f \partial z} - \frac{re \sin f}{1-e^2} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \frac{u}{\cos I} + \frac{r}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{1}{\cos I} \frac{du}{dE} + \\ & + a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial f \partial z'} \frac{u'}{\cos I'},\end{aligned}\quad (156)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \delta' \Omega = \left(ar \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z} + a \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) \frac{u}{\cos I} + a' r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z'} \frac{u'}{\cos I'}.$$

Из третьего уравнения (138) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \delta' \Omega = & \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} \sin \gamma \cdot r' \sin(f' + \Pi') \Delta \delta' \Delta - \\ & - \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos \gamma \cdot r' \sin(f' + \Pi') \delta \gamma - \\ & - \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin \gamma \cdot r' \cos(f' + \Pi') \delta \Pi'.\end{aligned}\quad (157)$$

Но, очевидно,

$$\Delta \delta' \Delta = -rr' \delta' H,$$

и, следовательно,

$$\delta' \Omega = -\frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \Delta \delta' \Delta.$$

Сравнивая это выражение с выражением (154), получаем

$$\Delta \delta' \Delta = \sin \gamma \cdot ar' \sin(f' + \Pi') \frac{u}{\cos I} - \sin \gamma \cdot a'r \sin(f + \Pi) \frac{u'}{\cos I'}.\quad (158)$$

Подставляя (158) и первое и третье выражения (146) в (157), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \delta' \Omega = & \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} \sin^2 \gamma \cdot ar'^2 \sin^2(f' + \Pi') \frac{u}{\cos I} - \\ & - \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} \sin^2 \gamma \cdot a' rr \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') \frac{u'}{\cos I'} - \\ & - \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos \gamma \cdot r' \sin(f' + \Pi') \left(\frac{q_1}{\cos I} - \frac{q'_1}{\cos I'} \right) - \\ & - \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin \gamma \cdot r' \cos(f' + \Pi') \left(\operatorname{cosec} \gamma \frac{p_1}{\cos I} - \right. \\ & \left. - \operatorname{ctg} \gamma \frac{p'_1}{\cos I'} \right). \quad (159) \end{aligned}$$

Дифференцированием выражения для Ω получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = & \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} \sin^2 \gamma \cdot r'^2 \sin^2(f' + \Pi') - \frac{m'}{1+m} \frac{1}{\Delta^3}, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial z'} = & - \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} \sin^2 \gamma \cdot rr' \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') + \\ & + \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos \gamma, \end{aligned}$$

в силу чего, если мы подставим значения p_1, q_1, p'_1, q'_1 , определяемые (150), выражение (159) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \delta' \Omega = & \left(a \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{a}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{e \sin f}{r(1-e^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial f} \right) \frac{u}{\cos I} - \\ & - \frac{1}{r\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{du}{dE \cos I} + a' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial z'} \frac{u'}{\cos I'}. \quad (160) \end{aligned}$$

Остается рассмотреть еще $\cos I$. Однако если мы выберем плоскость мгновенной орбиты возмущаемой планеты в начальную эпоху за основную плоскость отсчета, то начальное значение I обратится в нуль, а I будет очень малой величиной в течение значительного промежутка времени до и после этой эпохи. Поэтому мы оставляем $\cos I$ в алгебраической форме до самого конца, после чего его можно либо положить равным единице, либо разложить в ряд, согласно теореме Тейлора, смотря по необходимости.

В разложениях для первого приближения мы видели, что может оказаться выгодным исключить производную $\partial \Omega / \partial f$, заменив ее на $\partial \Omega / \partial t$ или $\partial \Omega / \partial E$ в соответствии с используемой независимой переменной, причем любая из последних двух производных может быть получена непосредственным дифференцированием ряда, представляющего функцию Ω . Этот способ будет применен также во втором приближении. В этом случае, очевидно, понадобятся следующие производные:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}, \quad r' \frac{\partial \Omega}{\partial r'}, \quad rr' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial r'}, \quad r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z}, \quad r' \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r' \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z'}, \quad r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z'}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial z'} \end{aligned}$$

в дополнение к производным, использованным в первом приближении.

Однако Ω и ее производные являются однородными функциями от r и r' и в применяемые формулы, производные от Ω по r и r' , входят не сами, а только в комбинации с r или r' в качестве множите-

лей. Следовательно, при помощи известных соотношений между частными производными однородных функций производные по r' легко могут быть получены из производных по r . Из девяти производных, приведенных выше, только шесть должны быть вычислены непосредственно. Это производные

$$r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}, \quad r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z'}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial z'}.$$

Дифференцируя второе и третье уравнения из (138), мы получаем

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= \frac{m'}{1+m} \left[\frac{3}{\Delta^5} (r^2 - rr' H)^2 + \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) rr' H - 2 \frac{r^2}{\Delta^3} \right], \\ r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z} &= \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} (r^2 - rr' H) \sin \gamma \cdot r' \sin (f' + \Pi'), \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} &= \frac{m'}{1+m} \left[\frac{3}{\Delta^5} \sin^2 \gamma \cdot r'^2 \sin^2 (f' + \Pi') - \frac{1}{\Delta^3} \right], \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z'} &= \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin \gamma \cdot r \sin (f + \Pi), \\ r \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial z'} &= - \frac{m'}{1+m} \frac{3}{\Delta^5} (r^2 - rr' H) \sin \gamma \cdot r \sin (f + \Pi) + \frac{\partial \Omega}{\partial z'}, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial z'} &= - \frac{m'}{1+m} \left[\frac{3}{\Delta^5} \sin^2 \gamma \cdot rr' \sin (f + \Pi) \sin (f' + \Pi') + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cos \gamma \right]. \end{aligned} \quad (161)$$

При использовании метода Ганзена, как и в случае других методов вычисления абсолютных возмущений, требуется произвести некоторые простые преобразования применяемых рядов при помощи введения постоянных множителей таким образом, чтобы все коэффициенты стали безразмерными величинами, а также чтобы главные члены в различных рядах были приведены к одному и тому же порядку величины. Поэтому, например, выгодно произвести следующие замены:

$$\begin{aligned} a'/\Delta &\text{ вместо } 1/\Delta, \quad (a'/\Delta)^3 \text{ вместо } 1/\Delta^3, \\ r/a &\text{ вместо } r, \quad r'/a' \text{ вместо } r'. \end{aligned}$$

С этими изменениями и при $a = a/a'$, если считать $a' > a$, следующие выражения дают все те производные возмущающей функции, которые должны быть вычислены для получения возмущений первого и второго порядков. Также для краткости мы положим m' вместо $m'/1+m$. Кроме того, если требуется вести вычисления, выбрав в качестве единицы секунду дуги вместо радиана, то m' необходимо умножить на $206264^{\circ}8$.

$$\begin{aligned} a\Omega &= m'a \left[\frac{a'}{\Delta} - a \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \frac{r}{a} H \right], \\ ar \frac{\partial \Omega}{\partial r} &= m'a \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \left(a^2 \frac{r^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a'^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{a'}{\Delta} - a \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \frac{r}{a} H \right], \\ a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= m'a^2 \sin \gamma \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \frac{r'}{a'} \sin (f' + \Pi') - \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \sin (f' + \Pi') \right], \\ ar^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} &= m'a \left[\frac{3}{4} \left(a^2 \frac{r^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a'^2} \right) \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 - \frac{r'^2}{a'^2} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{a'}{\Delta} - a \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \frac{r}{a} H \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 r \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r \partial z} &= -\frac{3}{2} m' a^2 \sin \gamma \left[\left(a^2 \frac{r^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a'^2} \right) \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 \right] \frac{r'}{a'} \sin(f' + \Pi'), \\
 a^3 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} &= -m' a^3 \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 - 3 \sin^2 \gamma \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \frac{r'^2}{a'^2} \sin^2(f' + \Pi') \right], \quad (162) \\
 a a' \frac{\partial \Delta}{\partial z'} &= m' a^2 \sin \gamma \left[-\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 + \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right] \frac{r}{a} \sin(f + \Pi), \\
 a a' r \frac{\partial^2 \Delta}{\partial r \partial z'} &= m' a^2 \sin \gamma \left[\frac{3}{2} \left(a^2 \frac{r^2}{a^2} - \frac{r'^2}{a'^2} \right) \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 + \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 + \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \right] \times \\
 &\quad \times \frac{r}{a} \sin(f + \Pi), \\
 a^2 a' \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z \partial z'} &= m' a^2 \cos \gamma \left[\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 - \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 - \right. \\
 &\quad \left. - 3 \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 \frac{r'}{a'} \frac{r}{a} \sin(f' + \Pi') \sin(f + \Pi) \right].
 \end{aligned}$$

Можно отметить, что если γ не очень велико, то едва ли когда-нибудь понадобится вычислять шестое и девятое из этих выражений; даже рассматривая действие Юпитера на Сатурн, можно пренебречь членами, умноженными на $\sin \gamma$.

12. Возмущения второго порядка. Как и в случае возмущений первого порядка, прежде чем приступить к явному разложению δT и δU , необходимо надлежащим образом выбрать независимую переменную. Эксцентрическая аномалия неудобна для применения при вычислениях возмущений второго порядка из-за многочисленных преобразований, которые необходимо проделать, прежде чем станет возможным интегрирование. Поэтому мы останавливаемся на средней аномалии, отсылая читателя к работам Ганзена для случая, когда используется эксцентрическая аномалия.

Мы видели в предыдущем разделе, что δT и δU можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \delta T &= A' n \delta z + B' v + C' \delta \frac{h}{h_0} + D' \frac{u}{\cos I} + E' \frac{d}{dt} \frac{u}{\cos I} + \\
 &\quad + F' n' \delta z' + G' v' + H' \frac{u'}{\cos I'}, \\
 \delta U &= A'' n \delta z + B'' v + C'' \delta \frac{h}{h_0} + D'' \frac{u}{\cos I} + E'' \frac{d}{dt} \frac{u}{\cos I} + \\
 &\quad + F'' n' \delta z' + G'' v' + H'' \frac{u'}{\cos I'}.
 \end{aligned} \quad (163)$$

Член в δU , умноженный на δI , отброшен, так как он почти никогда не имеет какого-либо практического значения. Первые множители выписанных членов снабжены штрихами, для того чтобы избежать путаницы с величинами, которые были обозначены в первом приближении через A , B и C и будут использованы в дальнейшем. Наконец, вместо d/dE мы написали d/dt в двух членах, содержащих E' и E'' , так как производную по времени получить легче, чем другие производные.

Следует заметить, что вторые множители первых пяти членов в δT и δU охватывают все возмущения первого порядка планеты, возму-

щаемой всеми остальными планетами, и что вторые множители последних трех членов охватывают все возмущения первого порядка возмущающей планеты. Если имеется более одной возмущающей планеты, то каждая из них дает еще три члена, в точности сходных с уже выписанными членами. Мы ограничиваемся здесь единственной возмущающей планетой, поскольку легко видно, как поступить в том случае, когда их больше.

Теперь остается найти выражения для первых множителей в выражениях (163). Обращая внимание сначала на δT , видим, что они имеют вид

$$A' = \frac{\partial T}{\partial l}, \quad F' = \frac{\partial T}{\partial l'}$$

и могут быть найдены непосредственным дифференцированием ряда для T .

Что касается B' , то мы имеем

$$B' = r \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Но T было получено в следующем виде:

$$T = Aa \frac{\partial \alpha}{\partial l} + Bar \frac{\partial \alpha}{\partial r}.$$

Допустим, что $B' = V + X$, где V обозначает часть B' , получающуюся из функции T , в которой мы r считаем переменной величиной, а через X обозначена часть B' , получающаяся из функции T , в которой мы считаем переменными A и B . В таком случае мы имеем

$$V = A \frac{\partial}{\partial l} ar \frac{\partial \alpha}{\partial r} + Bar \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \alpha}{\partial r},$$

причем множитель при A может быть получен непосредственным дифференцированием, а множитель при B был дан в предыдущем разделе. Чтобы найти X , берем выражение (79), откуда

$$X = - \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left[2 \frac{\varrho}{r} \cos(f-\omega) \frac{\partial \alpha}{\partial f} + 2 \frac{\varrho}{r} \sin(f-\omega) r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right].$$

Но мы имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial f} = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \alpha}{\partial l} - \frac{er \sin f}{a(1-e^2)} r \frac{\partial \alpha}{\partial r},$$

и поэтому

$$X = - \frac{2r\varrho}{a^2(1-e^2)} \cos(f-\omega) a \frac{\partial \alpha}{\partial l} - \\ - \frac{2\varrho}{a(1-e^2)^{3/2}} [\sin(f-\omega) - e \sin \omega] ar \frac{\partial \alpha}{\partial r}.$$

Дифференцируя выражение (79) по h/h_0 , получаем

$$C' = - \frac{4\varrho}{(1-e^2)^{3/2}} [\cos(f-\omega) - 1] \frac{\partial \alpha}{\partial f};$$

замечая, что

$$\bar{T} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \alpha}{\partial f},$$

отсюда находим

$$C' = 2 [T + X + \bar{T}].$$

Множитель $\delta(h/h_0)$ можно определить из следующего уравнения:

$$\delta \frac{h}{h_0} = - \left(\frac{d}{dt} \delta z + 2v \right).$$

Множители D' , E' , H' могут быть получены аналогичным образом, как и V . Мы имеем

$$D' = Aa^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial l \partial z} + B \left(a^2 r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r \partial z} + a^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right),$$

$$E' = Aa^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z},$$

$$H' = Aaa' \frac{\partial^2 \alpha}{\partial l \partial z'} + Ba a' r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r \partial z'},$$

и

$$G' = -V - T.$$

Коэффициент X можно разложить аналогично множителям A и B . Если мы положим

$$X = M' a \frac{\partial \alpha}{\partial l} + N' ar \frac{\partial \alpha}{\partial r},$$

то найдем

$$M' = -\frac{P_0}{1-e^2} \left(\frac{1}{2} P_0 + P_1 \cos l + P_2 \cos 2l + P_3 \cos 3l + \dots \right) -$$

$$-\sum_0^\infty \left(\frac{P_1 P_j}{1-e^2} \pm Q_1 Q_j \right) \cos(\lambda \mp jl),$$

$$N' = -\frac{P_0}{1-e^2} (P_1 \sin l + 2P_2 \sin 2l + 3P_3 \sin 3l + \dots) +$$

$$+\sum_0^\infty i \left(Q_1 Q_j \pm \frac{P_1 P_j}{1-e^2} \right) \sin(\lambda \mp jl).$$

Очевидно,

$$N' = -\frac{\partial M'}{\partial l}.$$

Обращая теперь внимание на δU , находим

$$A'' = \frac{\partial U}{\partial l}, \quad B'' = Y + U,$$

где

$$Y = \frac{\hbar}{n} r^2 \frac{q}{a} \sin(\omega - f) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r \partial z} \cos I = \\ = Ca^2 r \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r \partial z} \cos I,$$

причем C — множитель, использованный в первом приближении для U . Мы имеем также

$$C'' = U$$

и, пренебрегая величинами третьего порядка относительно I и второго порядка относительно возмущающих сил, получаем

$$\begin{aligned} D'' &= Ca^2 \left[a \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \frac{e \sin f}{r(1-e^2)} \frac{\partial \Delta}{\partial f} - \frac{a}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right] \cos I = \\ &= C \left[a^3 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} + \frac{er \sin f}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{\partial \Delta}{\partial l} - \frac{1+2e \cos f+e^2}{(1-e^2)^2} ar \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right] \cos I, \\ E'' &= -C \frac{a^2}{r \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Delta}{\partial l} = C \frac{a}{r} \bar{T}. \end{aligned}$$

Кроме того, мы имеем

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{\partial U}{\partial t}, \\ G'' &= -(Y + 2U), \\ H'' &= Ca^2 a' \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z \partial z'} \cos I. \end{aligned}$$

Таким образом, второе выражение (163) можно написать в следующем более простом виде:

$$\begin{aligned} \delta U &= A'' n \delta z + F'' n' \delta z' + Y(v - v') + U \left(v - 2v' + \delta \frac{h}{h_0} \right) + \\ &\quad + D'' \frac{u}{\cos I} + E'' \frac{d}{dt} \frac{u}{\cos I} + H'' \frac{u'}{\cos I}. \end{aligned}$$

Выразив δT и δU в виде тригонометрических рядов, мы получаем δW_0 посредством формулы

$$\delta W_0 = \int \delta T n dt,$$

а также вычисляем

$$-\frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \delta W_0 \right)}.$$

Определение постоянных интегрирования выполняется по тем же правилам, что и при первом приближении. Однако дополнительные члены к δW_0 несколько более сложны, чем дополнительные члены к W_0 , и может понадобиться сохранить эти постоянные в буквенном виде до тех пор, пока не будет выполнено второе интегрирование, после чего эти постоянные можно определить легче.

Мы обозначаем члены второго порядка, которые необходимо прибавить к $n \delta z$ и v , через $n \delta^2 z$ и δv ; они определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{d}{dt} n \delta^2 z &= \overline{\delta W_0} + \overline{\left(\frac{\partial \delta W_0}{\partial \lambda} \right)} n \delta z + v^2, \\ \frac{1}{n} \frac{d}{dt} \delta v &= -\frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \delta W_0 \right)} - \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial^2 \delta W_0}{\partial \lambda^2} \right)} n \delta z. \end{aligned}$$

Для возмущений широты второго порядка уравнения имеют вид

$$\delta R_0 = \int \delta U n dt,$$

$$\delta \left(\frac{u}{\cos I} \right) = \overline{\delta R_0} + \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} R_0 \right)} n \delta z.$$

Следует помнить, что для всех переменных, входящих в первые множители выражений для δT и δU , нужно воспользоваться эллиптическими (невозмущенными) значениями.

Как только получено выражение для $(a'/\Delta)^6$, возмущения второго порядка можно вычислить с затратой труда, сравнимой с той, которая необходима для получения возмущений первого порядка. Тем не менее легко сообразить, что если приближения должны быть проведены до третьего порядка, то потребуется намного большее количество труда из-за большого числа необходимых производных возмущающей функции. Может показаться, что вычисления можно было бы сократить, совершенно избегая разложений в ряды Тейлора и используя вместо них при вычислении возмущающей функции возмущенные значения координат. Однако переменные Ганзена не годятся для такого метода, так как получаются очень сложные алгебраические выражения. Для возмущений порядка выше второго, по-видимому, более всего подходит метод вычисления возмущений в прямоугольных координатах.

Замечания. Литература

Применение методов, изложенных в гл. XI—XIV, ограничено орбитами с умеренным эксцентриситетом; для эксцентриситетов, превышающих, например, 0,3, очень медленная сходимость рядов заставляет отказаться от их применения. Вероятно, этот практический предел можно значительно расширить, применяя быстродействующие вычислительные машины. Однако было бы очень желательно иметь методику, которая была бы применима к любому эллипсу. Такой метод был придуман Ганзеном, который описывает его в *Suppl. aux Compt. Rend. acad. sci.* (1), применения к комете Энке, имеющей эксцентриситет, равный 0,84. Ганзен называет этот метод методом частных аномалий. Принцип его заключается в разбиении исходного эллипса на небольшое число частичных дуг и выборе внутри каждой такой дуги некоторой независимой переменной, тесно связанной с обычными переменными таким образом, чтобы ряд, представляющий возмущения, быстро сходился внутри данной частичной дуги, становясь, однако, непригодным вне ее. Ганзен получает столько же отдельных рядов для возмущений, сколько имеется частичных дуг. Затем, чтобы найти координаты для любого момента времени, значение времени подставляется в соответствующий ряд. Этот метод неприменим в своем первоначальном виде к тем случаям, когда вследствие тесного сближения с большой планетой характер орбиты совершенно меняется, однако даже здесь этот метод можно применить дважды: один раз до этого изменения и второй — после него. Большой интерес представило бы применение этого метода к такому случаю, как, например, действие Юпитера на движение малой планеты (3) Юнона, и сравнение полученных при этом результатов с результатами, достигнутыми при помощи метода, изложенного в этой главе. Может оказаться, что улучшенная сходимость компенсирует большее число рядов.

ВОЗМУЩАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

1. Введение. Пусть m и m' — две материальные точки, которые предполагаются движущимися по эллиптическим орбитам относительно общего центрального тела; для определенности допустим, что точка m' более удалена от центрального тела, чем m . Тогда возмущающая функция для действия точки m' на m может быть написана в следующем виде:

$$R = k^2 m' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)$$

или для действия m на m'

$$R' = k^2 m \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right),$$

где x, y, z, x', y', z' — прямоугольные координаты, отнесенные к какой-нибудь неподвижной системе осей с фиксированными направлениями в пространстве и началом в центральном теле, r и r' — расстояния от центрального тела и

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

т. е. Δ означает расстояние между m и m' .

Как правило, в случае вычисления абсолютных возмущений не обязательно вводить численное значение постоянной k^2 , которая появляется благодаря присутствию $\mu = k^2(1+m)$ или $k^2(1+m')$ в числителе выражений для возмущений. Поэтому мы приходим к функции Ω , определяемой посредством следующей формулы:

$$R = \mu \Omega,$$

которая дает

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)$$

и

$$\Omega' = \frac{m}{1+m'} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right).$$

В полярных координатах мы имеем

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos H \right),$$

$$\Omega' = \frac{m}{1+m'} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r'}{r^2} \cos H \right),$$

где

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= r'^2 - 2rr' \cos H + r^2, \\ \cos H &= \cos(f + \Pi) \cos(f' + \Pi') + \cos \gamma \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') = \\ &= \cos(f - f' + \Pi - \Pi') - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi'),\end{aligned}\quad (1)$$

f и f' — истинные аномалии, Π и Π' — угловые расстояния от восходящего узла орбиты тела m' на орбите тела m до перигелиев, γ — взаимная наклонность и H — угол между r и r' . Заметим, что выражение для Δ^2 представляет собой просто теорему косинусов для плоского треугольника с вершинами в центральном теле и обеих рассматриваемых материальных точках.

Если отношение r'/r намного больше единицы для любых допустимых значений r и r' , то Δ намного превосходит r , и $1/\Delta$, будучи очень малой величиной, может быть разложено в быстро сходящийся ряд; эти условия выполняются для спутника, возмущаемого Солнцем. В противном случае, например, когда одна планета возмущает движение другой, разложение в ряд для $1/\Delta$ может сходиться крайне медленно; этому случаю и посвящена настоящая глава. Мы будем предполагать, что разложение в ряд величины $1/\Delta$ законно всегда в тех случаях, когда оно вообще выполнимо, исключая, таким образом, любой случай, в котором Δ может обратиться в нуль в результате пересечения орбит. В то время как можно установить необходимые и достаточные условия для сходимости ряда, представляющего $1/\Delta$, такого же рода условия для сходимости рядов, представляющих сами возмущения, неизвестны; для практических целей законность этих разложений можно считать установленной опытным путем.

Член $1/\Delta$ известен под названием главной части возмущающей функции. Другой член называется непрямым членом; он выражает действие возмущающей планеты на Солнце. Он возникает из-за того, что мы продолжаем использовать гелиоцентрические координаты, и обращался бы в нуль, если бы мы согласились выбрать начало координат в центре масс Солнца и возмущающего тела. Рассмотрим сначала член $1/\Delta$, который представляет наибольшие затруднения при разложении, причем, как это уже было отмечено в предыдущих главах, предпочитаем иметь дело с a'/Δ , где a' — большая полуось внешней орбиты, для того чтобы величины, входящие в разложение, были безразмерными и имели удобный порядок. Мы умножаем уравнения для Ω или R на a' . Тогда, если a означает отношение a/a' , мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^2}{a'^2} &= \left(a \frac{x}{a} - \frac{x'}{a'} \right)^2 + \left(a \frac{y}{a} - \frac{y'}{a'} \right)^2 + \left(a \frac{z}{a} - \frac{z'}{a'} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{r'}{a'} \right)^2 - 2a \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \cos H + a^2 \frac{r^2}{a^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

Задача состоит в разложении a'/Δ в ряд, члены которого могут быть рассмотрены друг за другом при последовательных операциях вычисления возмущений. Применяемые ряды являются почти исключительно тригонометрическими рядами, в которых коэффициент каждого члена умножается на синус или косинус линейной комбинации аномалий обеих планет с линейными комбинациями остальных углов, также входящими в аргументы, или же без них. Литература на эту тему весьма часто применяемыми независимыми переменными являются средняя, эксцентртическая или истинная аномалии обеих

планет. Мы будем рассматривать здесь главным образом средние аномалии, так как они лучше всего подходит для получения окончательных результатов в численной форме.

Возможны два общих метода решения этой задачи: численный метод и буквенный метод. При численном методе мы приступаем по возможности непосредственно к получению ряда следующего вида:

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum [C_{j, k} \cos(jl' + kl) + S_{j, k} \sin(jl' + kl)],$$

где C и S — числа, l' и l — средние аномалии обеих планет, а j и k могут принимать все положительные и отрицательные целочисленные значения, включая и нуль, хотя одно из них всегда можно ограничить неотрицательными значениями. При численном методе необходимо также, чтобы получить определенные производные от a'/Δ , разложить в ряды некоторые из нечетных степеней этого отношения; для возмущений первого порядка потребуется по крайней мере третья степень, а для возмущений второго порядка — по крайней мере пятая.

При буквенном методе, с его предельной общностью, аргументами становятся линейные комбинации из всех угловых элементов орбиты, а коэффициентами — функции остальных элементов. Поэтому, если мы выберем в качестве элементов уже знакомые a , e , i , l , π , θ , то мы можем написать

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum F_{j, k, m, j', k', m'}(a, e, i, e', i') \cos(jl + k\pi + m\theta + j'l' + k'\pi' + m'\theta').$$

Однако эта форма разложения применяется редко или никогда не применяется вследствие очень большой сложности функций от a , входящих в нее. Принято начинать сперва с численного значения a , которое обычно представляет собой наиболее точно известный элемент. Кроме того, плоскость орбиты возмущаемой планеты обычно выбирают в качестве плоскости отсчета, а восходящий узел орбиты внешней планеты на орбите внутренней — за начало счета долгот. Тогда, если J — взаимная наклонность, а Π и Π' — долготы перигелиев от этого нового начала, то мы можем написать:

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum G_{j, k, j', k'}(a, e, e', J) \cos(jl + k\Pi + j'l' + k'\Pi').$$

Эта форма очень удобна для получения производных от a'/Δ по всем элементам, за исключением a , для которого необходимо принять специальное условие. Этот ряд обладает важным свойством, впервые упоминаемым Даламбером и состоящим в том, что самая низкая степень e , e' или $\sin^2 \frac{1}{2} J$, входящая в любой коэффициент, равна $j + j'$. Это свойство делает сходимость по степеням e , e' и $\sin^2 \frac{1}{2} J$ весьма быстрой, если эти три величины достаточно малы. Однако сходимость этого ряда может быть очень медленной, если a начинает стремиться к единице. В этом случае для того же малого значения $j + j'$ может понадобиться большое число членов. Этот ряд удобен благодаря тому, что коэффициенты, связанные с большими значениями j или j' , очень сильно уменьшаются по величине после интегрирования, так что никогда не возникает необходимости вычислять все значительные члены разложения a'/Δ .

В этой главе мы дадим несколько методов разложения отношения a'/Δ . Сначала мы проведем непосредственное численное решение, пригод-

ное для быстродействующих автоматических вычислительных машин, затем менее прямое численное решение, соответствующее использованию менее мощных средств вычисления, затем изложим метод для получения любого члена разложения a'/Δ с точностью до самого низкого порядка по e , e' и $\sin^2 \frac{1}{2} J$, входящих в коэффициент, и, наконец, дадим буквенно-разложение до третьего порядка относительно e , e' и $\sin^2 \frac{1}{2} J$, постоянный член которого будет дан с точностью до четвертого порядка.

Прежде чем приступить к какому-либо численному разложению отношения a'/Δ и его нечетных степеней, необходимо решить, с каким числом десятичных знаков следует вести вычисления. Обычно предел будет установлен искомым членом самого долгого периода среди возмущений. Член разложения a'/Δ , имеющий некоторый аргумент $jl' + kl$, может быть умножен на j или k в зависимости от того, является ли возмущаемая планета внешней или внутренней, а также на

$$\frac{3m'}{\arg 1''} \cdot \frac{n^2}{(jn' + kn)^2},$$

где n и n' — средние движения. Рассмотрим, например, большое неравенство в движении Сатурна, вызываемое Юпитером и имеющее аргумент $5l' - 2l$. Член a'/Δ с этим аргументом будет умножен на $206265 \times 5 \times 3 \times 0,001 \times 30^2$ или почти на 3 000 000. Следовательно, при подготовительных вычислениях потребуются семь десятичных знаков, чтобы определить это возмущение с точностью до секунды дуги, или десять десятичных знаков, если необходима точность в 0",001. Для $(a'/\Delta)^3$ необходима меньшая точность, так как соответствующий член этого разложения умножается только на

$$\frac{m'}{\arg 1''} \cdot \frac{n}{jn' + kn}.$$

2. Численный метод. Одним из наиболее очевидных путей разложения отношения a'/Δ и его нечетных степеней является применение двойного гармонического анализа частных значений. Такой процесс вполне выполним, если только мы согласны иметь дело с большим количеством частных значений функций. Так, например, в случае вычисления возмущений Марса от Земли, когда $a = 0,66$, и если необходимо вести вычисления с восемью десятичными знаками, потребуется 100×80 , или 8000 частных значений. Это же количество частных значений определит в данном случае функцию $(a'/\Delta)^3$ с точностью до шести десятичных знаков, которая является достаточной. О таком объеме вычислительной работы нечего и думать, если в распоряжении нет автоматической электронной вычислительной машины. Однако при использовании способа, придуманного Брауэром, возможно заменить большую часть гармонического анализа перемножением рядов, сведя таким путем работу к уровню возможностей малых счетных машин.

Возможность этой замены зависит от быстроты сходимости ряда для $(\Delta/a')^2$ по сравнению с a'/Δ или $(a'/\Delta)^3$. В случае Марса и Земли оказывается, что 16×10 , или 160 частных значений дадут значение $(\Delta/a')^2$ с точностью до восьми десятичных знаков. Мы начинаем с вычисления 160 частных значений величин $(\Delta/a')^2$, a'/Δ , $(a'/\Delta)^3$. Тогда гармонический анализ даст разложения в ряды этих трех функций. Ряд для $(\Delta/a')^2$ является точным, а остальные два — лишь приближенными и теперь должны быть исправлены.

Для удобства записи обозначим точное значение отношения Δ/a' через D , а приближенное значение — через δ . В таком случае для начала мы имеем D^2 , δ^{-1} и δ^{-3} . Процедура состоит сначала в умножении δ^{-1} самого на себя, что дает δ^{-2} . Образуем произведение $D^2\delta^{-2} = 1 + E$; отклонение E от единицы свидетельствует о погрешности в δ^{-1} . Умножим E само на себя, получая E^2 , затем E на E^2 , что дает E^3 , и продолжаем до тех пор, пока получаются члены сколько-нибудь существенной величины. Тогда

$$D^{-1} = \delta^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}E + \frac{3}{8}E^2 - \frac{5}{16}E^3 + \frac{35}{128}E^4 \dots \right).$$

Чтобы получить D^{-3} , умножим δ^{-3} на D^2 и определим F по формуле

$$F = D^2\delta^{-3} - D^{-1}.$$

Тогда

$$D^{-3} = \delta^{-3} - FD^{-2},$$

где D^{-2} получается по следующей формуле:

$$D^{-2} = \delta^{-2} (1 - E + E^2 - E^3 + E^4 - \dots).$$

Если требуется D^{-5} , то его можно получить при помощи формул

$$G = D^2\delta^{-5} - D^{-3}, \quad D^{-5} = \delta^{-5} - GD^{-2},$$

если известно δ^{-5} , или, в противном случае, по формуле

$$D^{-5} = D^{-3}D^{-2}$$

и аналогично для более высоких отрицательных нечетных степеней D .

Только что описанный метод является, по-видимому, слишком трудоемким для приложений с настольной счетной машиной. В применении к Марсу и Земле при вычислении D^{-2} и D^{-3} было образовано почти полмиллиона отдельных произведений чисел.

Необходимо отметить, что в тех случаях, когда за независимые переменные выбраны эксцентрические аномалии u и u' , разложение в ряд для $(\Delta/a')^2$ является замкнутым выражением и содержит только семь различных аргументов. Это выражение очень легко получить по векторным постоянным $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$ для обеих планет, которые, вообще говоря, могут быть отнесены к любой удобной плоскости отсчета, пока мы не позаботимся о том, чтобы для обеих планет была избрана одна и та же плоскость. Примем следующую символическую запись:

$$\begin{aligned} PP' &= P_xP'_x + P_yP'_y + P_zP'_z, \\ QQ' &= Q_xQ'_x + Q_yQ'_y + Q_zQ'_z, \\ PQ' &= P_xQ'_x + P_yQ'_y + P_zQ'_z, \\ P'Q &= P'_xQ_x + P'_yQ_y + P'_zQ_z. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\Delta/a')^2 &= 1 + \frac{1}{2}e'^2 + a^2 \left(1 + \frac{1}{2}e^2 \right) - 2PP'aee' + \\ &+ 2(PP'aee' - a^2e)\cos u + \\ &+ 2P'Qae'(1 - e^2)^{1/2}\sin u + \\ &+ 2(PP'aee' - e')\cos u' + \\ &+ 2PQ'a(1 - e'^2)^{1/2}\sin u' - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -a [PP' + QQ' (1 - e^2)^{1/2} (1 - e'^2)^{1/2}] \cos(u - u') + \\
 & + a [PQ' (1 - e'^2)^{1/2} - P'Q (1 - e^2)^{1/2}] \sin(u - u') - \\
 & - a [PP' - QQ' (1 - e^2)^{1/2} (1 - e'^2)^{1/2}] \cos(u + u') - \\
 & - a [PQ' (1 - e'^2)^{1/2} + P'Q (1 - e^2)^{1/2}] \sin(u + u') + \\
 & + \frac{1}{2} a^2 e^2 \cos 2u + \frac{1}{2} e'^2 \cos 2u'.
 \end{aligned}$$

В том случае, когда за независимые переменные выбраны эксцентрические аномалии, ряды для a'/Δ и его нечетных степеней сходятся быстрее, чем при употреблении средних аномалий. Можно посоветовать вести вычисления с эксцентрическими аномалиями до тех пор, пока не будут получены эти ряды, и перейти затем к средним аномалиям как независимым переменным, применяя для этого функции Бесселя.

3. Численный метод с использованием коэффициентов Лапласа. Главный недостаток только что описанного метода для вычисления a'/Δ и его нечетных степеней заключается в том, что все коэффициенты разложения должны быть вычислены с одним и тем же числом десятичных знаков, хотя лишь небольшая часть членов с этими коэффициентами может внести что-либо существенное в возмущения. В случае движения Марса, возмущаемого Землей, ряды, полученные для a'/Δ и $(a'/\Delta)^3$, содержат соответственно 740 и 891 различных аргументов, однако для вычисления возмущений используется лишь 157 различных аргументов. Количество работы намного сократилось бы, если бы можно было избежать вычисления большинства лишних коэффициентов. Этого можно добиться за счет некоторого усложнения аналитической методики.

Если эксцентрикитеты невелики, то r мало отличается от a , и внимательное рассмотрение уравнения (2) показывает, что a'/Δ и его нечетные степени не очень отличаются от выражения

$$(1 - 2a \cos H + a^2)^{-1/2} \quad (3)$$

и его нечетных степеней. Если функцию (3) и ее нечетные степени разложить в ряды Фурье, то результат может быть выражен следующим образом:

$$(1 - 2a \cos H + a^2)^{-s/2} = \frac{1}{2} b_{s/2}^0 + \sum_1^{\infty} b_{s/2}^{(j)} \cos jH, \quad (4)$$

где s — некоторое положительное нечетное целое число. Коэффициенты $b_{s/2}^{(j)}$, изученные впервые Лапласом, известны под названием коэффициентов Лапласа и были подробно исследованы и табулированы. Оказывается возможным получить любой из этих коэффициентов независимо от остальных, что делает весьма полезным метод, который будет сейчас изложен. Принцип метода заключается в следующем. Для частных значений средней аномалии одной планеты вычисляем сначала частные значения коэффициентов Лапласа для требуемых значений j и s , соответствующих угловой переменной $u - Q$ для другой планеты, где u — эксцентрическая аномалия, а Q — некоторый вспомогательный угол. Затем коэффициенты Лапласа умножаются на два множителя, мало отличающихся от единицы, так чтобы представить действительное значение $(a'/\Delta)^s$ вместо выражения (4). Теперь можно произвести гармонический анализ для получения $(a'/\Delta)^s$ в виде двойного ряда Фурье, содержа-

щего среднюю аномалию одной планеты и эксцентрическую аномалию другой. Наконец, преобразование Бесселя дает эти ряды как функции от двух средних аномалий.

Если постоянные k , K , k_1 , K_1 (где k не следует смешивать с гауссовой постоянной) определяются посредством следующих уравнений:

$$\begin{aligned} k \cos(\Pi' - K) &= \cos \Pi, & k_1 \cos(\Pi' - K_1) &= \cos \varphi \cos \Pi, \\ k \sin(\Pi' - K) &= \cos \varphi \sin \Pi, & k_1 \sin(\Pi' - K_1) &= \sin \Pi, \end{aligned}$$

то выражение (1) принимает более простой вид:

$$\cos H = k \cos(f' + K) \cos f + k_1 \sin(f' + K_1) \sin f \quad (5)$$

11

$$\frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \cos H = k \frac{r'}{a'} \cos(f' + K) [\cos u - e] + k_1 \cos \varphi \frac{r'}{a'} \sin(f' + K_1) \sin u, \quad (6)$$

где $\cos \varphi = (1 - e^2)^{1/2}$.

Присоединением к (6) следующих уравнений:

$$\frac{r'}{a'} = 1 - e' \cos u', \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos u$$

находим, что

$$\left(\frac{\Delta}{a'} \right)^2 = \gamma_0 - \gamma_1 \cos u - \beta_0 \sin u + \gamma_2 \cos^2 u, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \left(\frac{r'}{a'} \right)^2 + a^2 + 2kae \left(\frac{r'}{a'} \right) \cos(f' + K), \\ \gamma_1 &= 2a^2e + 2ka \left(\frac{r'}{a'} \right) \cos(f' + K), \\ \beta_0 &= 2k_1a \cos \varphi \cdot \left(\frac{r'}{a'} \right) \sin(f' + K_1), \\ \gamma_2 &= a^2e^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Другая форма уравнений (8), которая может оказаться более удобной при вычислениях, когда в распоряжении имеются векторные постоянные обеих орбит, отнесенные к любой подходящей плоскости, записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1 + a^2 - 2PP'aee' + 2(PP'a\cos u' - e') \cos u' + \\ &\quad + 2PQ'a\cos \varphi' \sin u' + e'^2 \cos^2 u', \\ \gamma_1 &= 2a^2e + 2PP'a[\cos u' - e'] + 2PQ'a \cos \varphi' \sin u', \\ \beta_0 &= 2P'Qa \cos \varphi [\cos u' - e'] + 2QQ'a \cos \varphi \cos \varphi' \sin u', \\ \gamma_2 &= a^2e^2, \end{aligned}$$

где использована та же символическая запись, что и на стр. 404—405.

Из уравнений (8) видно, что γ_0 , γ_1 и β_0 —функции от аномалии внешней планеты, тогда как величина γ_2 является постоянной и имеет порядок квадрата эксцентриситета внутренней планеты. Чтобы получить γ_1 и β_0 в удобной для вычислений форме, мы полагаем $\cos u' - e'$ вместо $r'/a' \cos f'$ и $\cos \varphi' \sin u'$ вместо $r'/a' \sin f'$. Положим также

$$\gamma_1 = f \cos F, \quad \beta_0 = f \sin F,$$

где эту новую величину f не следует смешивать с истинной аномалией, а F — с функцией, обозначенной выше этим же символом. Тогда получим выражения вида

$$f \cos F = e' p \sin P + 2ka \cos K \cos u' - 2ka \cos \varphi' \sin K \sin u',$$

$$f \sin F = -e' p \cos P + 2k_1 a \cos \varphi \sin K_1 \cos u' + 2k_1 a \cos \varphi \cos \varphi' \cos K_1 \sin u',$$

в которых мы положили

$$p \sin P = 2a^2 \left(\frac{e}{e'} \right) - 2ka \cos K,$$

$$p \cos P = 2k_1 a \cos \varphi \sin K_1.$$

В этих выражениях не следует смешивать P с векторной постоянной, обозначаемой этим же символом.

Если, кроме того, мы введем вспомогательные постоянные, определяемые посредством следующих уравнений:

$$v \sin V = 2ka \cos \varphi' \sin K,$$

$$v \cos V = 2k_1 a \cos \varphi \cos \varphi' \cos K_1,$$

$$w \sin W = p - 2a^2 \frac{e}{e'} \sin P,$$

$$w \cos W = v \cos(V - P),$$

$$w_1 \sin W_1 = v \sin(V - P),$$

$$w_1 \cos W_1 = 2a^2 \frac{e}{e'} \cos P,$$

то уравнения, определяющие γ_1 и β_0 , принимают следующий вид:

$$f \sin(F - P) = w \sin(u' + W) - e' p,$$

$$f \cos(F - P) = w_1 \cos(u' + W_1),$$

из которых, если известно P , легко получаются $f \sin F$ и $f \cos F$. Далее, удобной формой для вычисления γ_0 является следующая:

$$\gamma_0 = 1 + a^2 - 2a^2 e^2 - 2e' \cos u' + e'^2 \cos^2 u' + ef \cos F.$$

Если мы положим $D = \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_2$ (это D следует отличать от символа, означающего Δ/a' и использованного ранее), то уравнение (7) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\Delta}{a'} \right)^2 = D - f \cos(u - F) + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2u.$$

Теперь, если величина γ_2 настолько мала, что можно пренебречь всеми членами, умноженными на ее квадрат, то мы имеем

$$\frac{a'}{\Delta} = [D - f \cos(u - F)]^{-1/2} - \frac{1}{4} \gamma_2 \cos 2u [D - f \cos(u - F)]^{-3/2},$$

$$\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^3 = [D - f \cos(u - F)]^{-3/2} - \frac{3}{4} \gamma_2 \cos 2u [D - f \cos(u - F)]^{-5/2}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{a'}{\Delta} \right)^5 = [D - f \cos(u - F)]^{-5/2} - \frac{5}{4} \gamma_2 \cos 2u [D - f \cos(u - F)]^{-7/2}.$$

Однако эти уравнения страдают тем недостатком, что требуют более высоких степеней выражений в квадратных скобках, чем степени

отношения a'/Δ . Этот недостаток можно устранить путем разделения $(a'/\Delta)^s$ на два сомножителя, один из которых может быть разложен посредством коэффициентов Лапласа, а второй множитель, который имеет порядок $1 + \gamma_2$ и состоит из очень малого числа членов, легко может быть разложен при помощи гармонического анализа или каким-либо иным способом.

Если записать уравнение (7) в виде

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = \gamma_0 - f \cos(u - F) + \gamma_2 \cos^2 u, \quad (10)$$

то очевидно, что оно может быть разделено на два сомножителя первой степени относительно $\cos u$ и $\sin u$. Ганзен показал, что если мы определим две величины C и q следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} C &= \gamma_0 + \gamma_2 \sin^2 Q, \\ f \sin F &= \left(q - \frac{\gamma_2 C}{q}\right) \sin Q, \\ f \cos F &= \left(q + \frac{\gamma_2 C}{q}\right) \cos Q, \end{aligned} \quad (11)$$

то получим уравнение

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = [C - q \cos(u - Q)] \left[1 - \frac{\gamma_2}{q} \cos(u + Q)\right], \quad (12)$$

которое представляет собой требуемую форму.

Наиболее легким способом решения уравнений (11) является способ последовательных приближений. Записывая эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} C &= \gamma_0 + \frac{\gamma_2}{q^2} (q \sin Q)^2, \\ q \sin Q &= \frac{f \sin F}{1 - \frac{\gamma_2 C}{q^2}}, \\ q \cos Q &= \frac{f \cos F}{1 + \frac{\gamma_2 C}{q^2}}, \end{aligned}$$

мы начинаем со значений $f \sin F$ и $f \cos F$ в качестве первого приближения к $q \sin Q$ и $q \cos Q$. Возводя второе и третье уравнения в квадрат и складывая их, получаем приближение к q^2 , а из первого уравнения — приближение к C . Используя полученные значения снова в правых частях этих трех уравнений, мы получаем улучшенные значения q^2 и C , и в большинстве случаев окончательные результаты можно получить при помощи двух или трех приближений.

Может оказаться полезным видоизменить уравнение (12). Полагая

$$a = \frac{C - \sqrt{C^2 - q^2}}{q}, \quad N = \frac{2}{C + \sqrt{C^2 - q^2}}, \quad b = \frac{q - \sqrt{q^2 - \gamma_2^2}}{\gamma_2}, \quad (13)$$

мы имеем

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^s = N^s [1 - 2a \cos(u - Q) + a^2]^{-s/2} [1 - 2b \cos(u + Q) + b^2]^{-s/2}. \quad (14)$$

Поскольку b является малой величиной, то ее легко можно вычислить путем разложения выражения под квадратным корнем по теореме бинома

$$b = \frac{\gamma_2}{2q} + \frac{\gamma_2^3}{8q^3} + \frac{\gamma_2^5}{16q^5} + \dots$$

Вычислительная процедура заключается в следующем.

Допустим, что гармонический анализ необходимо произвести для внешней планеты. Разделим период по средней аномалии внешней планеты на $2n$ равных частей и для каждого частного значения средней аномалии определим эксцентрическую аномалию, решая уравнение Кеплера. Затем вычислим частные значения $\gamma_0, \gamma_1, \beta_0$ и, если необходимо использовать уравнение (14), частные значения величин $C, q, q \sin Q, q \cos Q, N, a, b$. Для каждого частного значения Q и b можно разложить вторую скобку из (14) в ряд Фурье с аргументами $\cos ju, \sin ju$ при помощи гармонического анализа для нескольких частных значений u ; в силу быстрой сходимости этого ряда нет смысла разлагать ее посредством коэффициентов Лапласа. Первая квадратная скобка из (14) может быть разложена в ряд Фурье с аргументами $\cos j(u - Q)$ при помощи коэффициентов Лапласа; вычисление этих коэффициентов описывается ниже. Допустим, что это разложение уже выполнено. Тогда мы преобразуем полученный ряд путем подстановки численных значений угла Q и кратных этого угла в другой ряд с аргументами $\cos ju, \sin ju$. Тогда мы имеем $2n$ частных значений рядов, выражающих первую и вторую квадратные скобки из (14), которые необходимо перемножить между собой, а также умножить на N^s , что даст $2n$ частных значений $(a'/\Delta)^s$, каждое из которых разложено в ряд Фурье. Постоянный член и коэффициенты могут быть выражены в виде рядов Фурье по l' . Выбирая $2n$ частных значений постоянного члена, мы подвергаем их гармоническому анализу и аналогичным образом поступаем с $2n$ частными значениями каждого коэффициента этих рядов. В результате после замены произведений синусов и косинусов суммами и разностями последних получаются двойные ряды Фурье для $(a'/\Delta)^s$, аргументы которых содержат эксцентрическую аномалию внутренней планеты и среднюю аномалию внешней.

Эти ряды можно преобразовать теперь к двум средним аномалиям посредством бесселевых функций. При таком преобразовании каждый член ряда, содержащий кратность эксцентрической аномалии в аргументе, превращается в ряд членов, содержащих различные кратности средней аномалии. Формула этого преобразования может быть представлена в следующем виде:

$$A \frac{\sin(\beta - ku)}{\cos} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} A \frac{k}{j} J_{j-k}(je) \frac{\sin(\beta - jl)}{\cos}, \quad (15)$$

где l — средняя аномалия, β — какой-нибудь угол, e — эксцентриситет, а J — бесселева функция первого рода порядка $j - k$ с аргументом je . При использовании этого уравнения необходимо помнить, что

$$J_{-s}(x) = (-1)^s J_s(x), \quad J_s(-x) = (-1)^s J_s(x), \quad J_{-s}(-x) = J_s(x).$$

4. Буквенный метод. Буквенное разложение возмущающей функции может быть выполнено несколькими способами. Выбор переменных зависит от характера интересующей нас задачи. В большинстве планетных теорий наиболее выгодным является разложение по средним аномалиям. При этом с самого начала подставляют числовое значение для отношения больших осей. В таком случае коэффициенты будут функциями от эксцентриситетов и наклонностей. Аргументы будут содержать средние аномалии и долготы перигелиев, отсчитываемые от

линии пересечения плоскостей орбит. Однако разложения по истинным или эксцентрическим аномалиям сходятся, вообще говоря, быстрее. Преобразования любого из этих разложений к средним аномалиям могут быть легко выполнены. Тем не менее по некоторым соображениям выгоднее произвести промежуточное разложение по эксцентрическим аномалиям.

В случае двух планет, движущихся в одной и той же плоскости по круговым орбитам, разложение обратной величины их взаимного расстояния $1/\Delta$, главной части возмущающей функции, можно сразу написать при помощи коэффициентов Лапласа. Общая теория этих функций будет дана в конце этой главы.

В том случае, когда

$$a = a/a', \quad a < a',$$

имеем

$$\frac{a'}{\Delta} = [1 + a^2 - 2a \cos(\lambda - \lambda')]^{-1/2} = \sum_0^{\infty} b_{1/2}^{(i)} \cos i(\lambda - \lambda'), \quad (16)$$

или вообще

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^{2s} = [1 + a^2 - 2a \cos(\lambda - \lambda')]^{-s} = \sum_0^{\infty} b_s^{(i)} \cos i(\lambda - \lambda'). \quad (17)$$

Если орбиты являются эллиптическими, то взаимное расстояние можно выразить через радиусы-векторы и истинные аномалии следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(f - f' + \Pi - \Pi') = \\ &= r'^2 \left[1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2 \frac{r}{r'} \cos(f - f' + \Pi - \Pi') \right] \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \left[1 + \left(\frac{r}{r'} \right)^2 - 2 \frac{r}{r'} \cos(f - f' + \Pi - \Pi') \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

При помощи теоремы Тейлора и используя выражения для r , r' , f и f' через эксцентрические или средние аномалии, можно выразить Δ^{-1} через эти же переменные. Если мы ограничимся классическим способом обозначения для функций и их производных, то разложения примут очень сложную форму, которая затруднит и запись и понимание. Для того чтобы упростить выражения, целесообразно ввести сокращенные обозначения. Труд, затраченный на изучение таких обозначений, окупается с лихвой. Поэтому мы отклоняемся от основной темы для изложения вопроса о разложении функций посредством символьических операторов.

Пусть $f(x)$ — аналитическая функция от x . В таком случае, согласно теореме Тейлора (h — приращение x), имеем

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x), \end{aligned}$$

где $f^{(n)}(x)$ означает n -ю производную от $f(x)$ по x , причем $f^{(0)}(x)$ означает саму функцию $f(x)$. Обозначим через D_x дифференциальный оператор d/dx , и пусть D_x^n означает d^n/dx^n , так что функция, к которой

он применяется, дифференцируется n раз. Тогда $f(x+h)$ можно написать в следующей символической форме:

$$f(x+h) = \sum_0^{\infty} \frac{h^n}{n!} \cdot D_x^n f(x).$$

Если основание натуральных логарифмов обозначено через E , то известно, что E , возведенное в любую степень, например y , выражается формулой

$$E^y = \sum_0^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Следовательно, символически мы можем написать

$$\frac{h^n}{n!} D_x^n = E^{hD_x} \quad \text{и} \quad f(x+h) = E^{hD_x} f(x).$$

Смысл этого выражения состоит не в том, что E^{hD_x} умножается на $f(x)$, а в том, что каждый член разложения E^{hD_x} действует на функцию $f(x)$, давая первое выражение для $f(x+h)$, которое приведено выше. Кроме того, поскольку логарифм любой величины y определяется по формуле $y = E^{\ln y}$, то мы можем написать

$$\begin{aligned} f(px) &= f(E^{\ln px}) = f(E^{(\ln p + \ln x)}) = \\ &\quad \sum_0^{\infty} \frac{(\ln p)^n}{n!} \left(\frac{d}{d \ln x} \right)^n f(x), \end{aligned} \tag{19}$$

где p — любой множитель, не зависящий от x . Используя символ D для обозначения

$$\frac{d}{d \ln x} = x \frac{d}{dx},$$

имеем

$$f(px) = E^{(\ln p)D} f(x) = p^D f(x).$$

В приложениях p будет порядка единицы. Если мы положим $p = 1 + \delta$, то мы можем разложить $p^D = (1 + \delta)^D$, согласно формуле бинома Ньютона:

$$p^D = 1 + D\delta + \frac{D(D-1)}{2!} \delta^2 + \dots$$

Для краткости мы записываем это разложение в виде

$$p^D = \sum_0^{\infty} \binom{D}{k} \delta^k,$$

где символ $\binom{D}{k}$ означает коэффициент при x^k в разложении $(1+x)^D$. Тогда $f(px)$ можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(px) &= p^D f(x) = \sum_0^{\infty} \binom{D}{k} \delta^k f(x) = \\ &= \left[1 + D\delta + \frac{1}{2}(D^2 - D)\delta^2 + \frac{1}{6}(D^3 - 3D^2 + 2D)\delta^3 + \dots \right] f(x). \end{aligned}$$

При расшифровке этого выражения необходимо помнить, что $D^j f(x)$ представляет собой j -ю производную от $f(x)$ по $\ln x$. Таким образом,

$$Df = x \frac{df}{dx},$$

$$D^2f = x^2 \frac{d^2f}{dx^2} + x \frac{df}{dx}$$

и т. д.

В случае функции от двух переменных x и x' мы имеем

$$f(x+h, x'+h') = E^{hD_x+h'D_{x'}} f(x, x')$$

и

$$f(px, p'x') = p^D p'^{D'} \cdot f(x, x'). \quad (20)$$

Возвращаясь теперь к возмущающей функции, можно разложить эту функцию в ряд по истинным аномалиям следующим образом. Наша задача состоит в том, чтобы выразить соотношение (18) в форме (19) так, чтобы функция $f(x)$ имела форму (16), которая не зависит от эксцентриситетов. Если, как и в гл. II, мы введем следующую показательную функцию:

$$\psi = E^{it}$$

и функцию β от эксцентриситета e равенством

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

то мы имеем

$$r = a \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} (1+\beta\psi)^{-1} \left(1 + \frac{\beta}{\psi}\right)^{-1},$$

что позволяет нам написать для краткости

$$r = a\varrho$$

и аналогично

$$r' = a'\varrho'.$$

Поэтому выражение (18) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a'\varrho'} \left[1 + \left(\frac{a\varrho}{a'\varrho'} \right)^2 - 2 \frac{a\varrho}{a'\varrho'} \cos(f - f' + \Pi - \Pi') \right]^{-1/2}.$$

Считая это выражение функцией от $(\varrho/\varrho')a$, мы имеем, согласно (19),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{a'\varrho} \left(\frac{\varrho}{\varrho'} \right)^D [1 + a^2 - 2a \cos(f - f' + \Pi - \Pi')]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{a'} \varrho^D (\varrho')^{-D-1} [1 + a^2 - 2a \cos(f - f' + \Pi - \Pi')]^{-1/2}, \end{aligned}$$

где теперь $D = ad/da$, или, разлагая в ряд,

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\Delta} &= \left[\frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \right]^D \left[\frac{(1-\beta'^2)^2}{1+\beta'^2} \right]^{-D-1} (1+\beta\psi)^{-D} \left(1 + \frac{\beta}{\psi}\right)^{-D} (1+\beta'\psi')^{D+1} \times \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\beta'}{\psi'}\right)^{D+1} \frac{a'}{\Delta_0}, \end{aligned} \quad (21)$$

если мы положим

$$\frac{a'}{\Delta_0} = [1 + a^2 - 2a \cos(f - f' + \Pi - \Pi')]^{-1/2}.$$

Теперь $(1 + \beta\psi)^{-D} (1 + \beta/\psi)^{-D}$ может быть выражено через гипергеометрическую функцию F Гаусса. Определение этой функции таково:

$$F(A, B, C, x) = 1 + \frac{AB}{C \cdot 1} x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{C(C+1)2!} x^2 + \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (1 + \beta\psi)^{-D} \left(1 + \frac{\beta}{\psi}\right)^{-D} &= F(D, D, 1, \beta^2) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} (\beta\psi)^j \binom{-D}{j} F(D+j, D, j+1, \beta^2) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^j \binom{-D}{j} F(D+j, D, j+1, \beta^2) \quad (22) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (1 + \beta'\psi')^{D+1} \left(1 + \frac{\beta'}{\psi'}\right)^{D+1} &= F(-D-1, -D-1, 1, \beta'^2) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta'\psi')^k \binom{D+1}{k} F(-D-1+k, -D-1, k+1, \beta'^2) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta'/\psi')^k \binom{D+1}{k} F(-D-1+k, -D-1, k+1, \beta'^2). \quad (23) \end{aligned}$$

Для получения этого разложения другим путем полагаем

$$r_0 = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \quad \text{и} \quad a = \frac{r_0}{r'_0},$$

Тогда мы можем написать следующее разложение:

$$\begin{aligned} \frac{r'_0}{\Delta} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^j \beta'^k \binom{-D}{j} \binom{D+1}{k} F(D+j, D, j+1, \beta^2) \times \\ &\times F(-D-1+k, -D-1, k+1, \beta^2) \frac{1}{\Delta_0} \cdot 2 \cos(if \pm kf'), \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_0^2 = 1 + \left(\frac{r_0}{r'_0}\right)^2 - 2 \frac{r_0}{r'_0} \cos(f - f' + \Pi - \Pi').$$

Теперь $1/\Delta_0$ является также функцией от эксцентриситетов. Это не представляет большого неудобства. В случае астероида, вообще говоря, $\beta > \beta'$, где β' пропорционально эксцентриситету орбиты большой планеты. В таком случае используемое эффективное значение a уменьшится и разложение по степеням a будет сходиться быстрее.

Если плоскости орбит наклонены друг к другу под углом γ , который обычно мал, то мы можем написать квадрат взаимного расстояния в следующем виде:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos V,$$

где V — угол между радиусами-векторами. Если долготы перигелиев отсчитываются от линии пересечения этих двух плоскостей орбит, то

мы имеем

$$\cos V = \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos(f - f' + \Pi - \Pi') + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(f + f' + \Pi + \Pi'),$$

или

$$\begin{aligned} \cos V &= \cos(f - f' + \Pi - \Pi') + \sin^2 \frac{\gamma}{2} [-\cos(f - f' + \Pi - \Pi') + \\ &\quad + \cos(f + f' + \Pi + \Pi')] = \\ &= \cos(f - f' + \Pi - \Pi') - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi'). \end{aligned}$$

Обычно разложение Δ^{-1} производится только по $\sin^2(\gamma/2)$. Однако это дает ряд, сходящийся медленнее, чем в том случае, когда при разложении используются как $\cos^2(\gamma/2)$, так и $\sin^2(\gamma/2)$.

Пусть теперь

$$\Delta_0^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos(f - f' + \Pi - \Pi').$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \Delta_0^{-1} \left[1 - \frac{2\alpha \sin^2(\gamma/2) \cos(f + f' + \Pi + \Pi')}{\Delta_0^2} \right]^{-1/2} = \\ &= \Delta_0^{-1} \left\{ 1 - \frac{2\alpha \sigma [\psi\psi'h + (\psi\psi'h)^{-1}]}{\Delta_0^2} \right\}^{-1/2} = \\ &= \Delta_0^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (-1)^k \left(\frac{2\alpha \sigma}{\Delta_0^2} \right)^k [\psi\psi'h + (\psi\psi'h)^{-1}]^k. \end{aligned} \quad (25)$$

В этом выражении $h = E^{i(\Pi+\Pi')}$ и $\sigma = \frac{1}{2} \sin^2(\gamma/2)$.

Одна особенность этого ряда заключается в том, что коэффициент при косинусе дуги, кратной аргументу $f + f' + \Pi + \Pi'$, соответствует той же степени σ . Если мы положим

$$\frac{2a_1}{1+a_1^2} = \frac{2\alpha \cos^2(\gamma/2)}{1+\alpha^2} \quad \text{и} \quad \cos^2 \frac{\gamma}{2} = v,$$

то мы имеем

$$\begin{aligned} &\left[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos(f - f' + \Pi - \Pi') \right]^{-s} = \\ &= \left(\frac{a_1}{av} \right)^s [1 + a_1^2 - 2a_1 \cos(f - f' + \Pi - \Pi')]^{-s} = \\ &= \left(\frac{a_1}{av} \right)^s \sum_{-\infty}^{+\infty} b_i^s \cos i(f - f' + \Pi - \Pi'). \end{aligned} \quad (26)$$

Символическое разложение по эксцентризитетам и средним аномалиям может быть рассмотрено одновременно.

Положим

$$\chi = E^{iu} \quad \text{и} \quad e = \frac{2\beta}{1+\beta^2};$$

тогда

$$r = \frac{a}{1+\beta^2} (1 - \beta\chi) \left(1 - \frac{\beta}{\chi} \right) \quad \text{и} \quad \psi = \chi \left(1 - \frac{\beta}{\chi} \right) / (1 - \beta\chi).$$

Введем теперь, кроме оператора $D = ad/da$, операторы $B = \chi d/d\chi$ и $B' = \chi' d/d\chi'$; тогда

$$\frac{a'}{\Delta} = (1 + \beta'^2)^{D+1} (1 + \beta^2)^{-D} \left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right)^{D+B} (1 - \beta\chi)^{D-B} \left(1 - \frac{\beta'}{\chi'}\right)^{-D-1+B'} \times \\ \times (1 - \beta'\chi')^{-D-1-B'} \Delta_u^{-1}. \quad (27)$$

Здесь Δ_u равно значению функции после замены r на a , r' на a' , ψ на χ и ψ' на χ' . Мы снова можем записать $(1 - \beta/\chi)^{D+B} (1 - \beta\chi)^{D-B}$ через гипергеометрическую функцию F , и выражение для a'/Δ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\Delta} = & (1 + \beta'^2)^{D+1} (1 + \beta^2)^{-D} \left[F(-D+B, -D-B, 1, \beta^2) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{\chi} \right)^j \binom{D+B}{j} F(-D-B+j, -D+B, j+1, \beta^2) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} (-\beta\chi)^j \binom{D-B}{j} F(-D+B+j, -D-B, j+1, \beta^2) \left. \right] \times \\ & \times \left[F(D+1+B', D+1-B', 1, \beta'^2) + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\beta'}{\chi'} \right)^k \binom{-D-1+B'}{k} F(D+1-B'+k, D+1+B', k+1, \beta'^2) + \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta'\chi')^k \binom{-D-1-B'}{k} F(D+1+B'+k, D+1-B', k+1, \beta'^2) \right] \Delta_u^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Тот факт, что мы имеем дело с действительными рядами Фурье, проявляется в том, что это выражение не изменяет знака, если мы меняем $V-1$ на $-V-1$, или i на $-i$, или χ на χ^{-1} , или B на $-B$. Некоторые авторы, например Ньюком и Пуанкаре, записали это выражение при помощи символьических операторов $\Pi_{n, n'}^{m, m'}$. Тогда

$$\frac{a'}{\Delta} = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \beta^m \beta'^{m'} \chi^n \chi'^{n'} \Pi_{n, n'}^{m, m'} \Delta_u^{-1}. \quad (29)$$

Операторы $\Pi_{n, n'}^{m, m'}$ известны под названием операторов Ньюкома. Напишем теперь

$$\Pi_{n, n'}^{m, m'} = \Pi_{n, 0}^{m, 0} \Pi_{0, n'}^{0, m'} \quad \text{и} \quad m = n + 2p.$$

Затем сравнением уравнений (28) и (29) находим

$$\begin{aligned} \Pi_{n, 0}^{m, 0} = & (-1)^n \binom{D-B}{n} \left[\binom{-D}{p} + \binom{-D}{p-1} \frac{(-D-B+n)(-D-B)}{(n+1) \cdot 1} + \right. \\ & + \left. \binom{-D}{p-2} \frac{(-D+B+n)(-D+B+n+1)(-D-B)(-D-B+1)}{(n+1)(n+2) \cdot 2!} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Оператор $\Pi_{0, n'}^{0, m'}$ может быть найден из этого выражения при помощи замены n на n' , m на m' или p на p' , D на $-D-1$ и B на B' . Если n отрицательно, то мы заменим B на $-B$ и B' на $-B'$. Для опера-

торов Π_n^m , обозначаемых таким способом вместо $\Pi_{n,0}^{m,0}$, легко можно получить ряд рекуррентных формул.

Оператор Π_n^m является функцией от D и B , выражаемой в виде $\Pi_n^m(D, B)$. Из уравнения (28) мы усматриваем, что для $n \geq 0$

$$(1 + \beta^2)^{-D} (1 - \beta\chi)^{D-B} = \sum_n \sum_m \Pi_n^m(D, B) \beta^m \chi^n,$$

$$(1 + \beta'^2)^{-D} (1 - \beta'\chi')^B = \sum_{n'} \sum_{m'} \Pi_{n'}^{m'}(D, 0) \beta'^{m'} \chi'^{n'}, \quad m' = n' + 2p, \\ p = 0, 1, \dots,$$

и

$$(1 - \beta\chi)^{-B} = \sum_{j'} \sum_{k'} \Pi_{k'}^{j'}(0, B) \beta^{j'} \chi^{k'}, \quad j' = k' + 2q, \\ q = 0, 1, \dots. \quad (31)$$

Пусть теперь $j' = m - m'$ и $k' = n - n'$; тогда из равенства (31) мы имеем

$$\Pi_n^m(D, B) = \sum_{n'} \sum_{m'} \Pi_{n'}^{m'}(D, 0) \Pi_{n-n'}^{m-m'}(0, B).$$

Если мы заменим m' на $n' + 2p$ и $m - m'$ на $n - n' + 2q$ и если $m = n + 2s$, то мы суммируем по значениям $p \geq 0$, $q \geq 0$, так чтобы $p + q = s$. Для значений $n < 0$ мы просто заменяем B на $-B$, так что для $n \geq 0$ необходимо вычислить только $\Pi_n^m(D, 0)$ и $\Pi_n^m(0, B)$.

Рекуррентная формула

$$\Pi_n^m(D, B) = \sum_{k=0}^m A_n^{m-k}(B) \Pi_{n-k}^{m-k}(D, B) \quad (32)$$

может быть выведена следующим путем. Мы можем написать (см. уравнение (27))

$$(1 + \beta^2)^{-D} \left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right)^{D+B} (1 - \beta\chi)^{D-B}$$

в виде

$$\left[(1 + \beta^2)^{-1} \left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right) (1 - \beta\chi) \right]^{D-B} (1 + \beta^2)^{-B} \left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right)^{2B}$$

или

$$\left[1 - \frac{\beta}{\chi} (1 + \beta^2)^{-1} (1 + \chi^2) \right]^{D-B} (1 + \beta^2)^{-B} \left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right)^{2B}.$$

Чтобы найти Π_{n-m}^{n+m} , мы должны выбрать из разложения первой квадратной скобки формулы (32) все степени от $n - m$ по $n + m$. Степени выше указанной никогда не дадут нужной степени β , а степени ниже указанной никогда не дадут нужной степени χ . Тогда мы получим для одного члена выражение вида

$$(-1)^{n+m-k} \binom{D-B}{n+m-k} \left(\frac{\beta}{\chi}\right)^{n+m-k} (1 + \beta^2)^{-n-m+k} (1 + \chi^2)^{n+m-k} \times \\ \times (1 + \beta^2)^{-B} \left(1 - \frac{\beta}{\chi}\right)^{2B}. \quad (33)$$

Чтобы получить соответствующую степень β и χ , мы должны взять $2j$ -ю степень β^2 из разложения бинома $(1 + \beta^2)^{-B-n-m-k}$, $(k - 2j)$ -ю степень β/χ из $(1 - \beta/\chi)^{2B}$ и $(n - j)$ -ю степень χ^2 из $(1 + \chi^2)^{n+m-k}$.

Собирая все члены вместе и учитывая, что

$$\Pi_{n+m-k}^{r+m-h} = \binom{D-B}{n+m-k} (-1)^{n+m-h},$$

находим

$$\Pi_{n+m}^{n-m} = \sum_{h=0}^m \sum_{i=0}^{\leq k/2} \binom{-B-n-m+k}{j} \binom{2B}{k-2j} \binom{m+n-k}{n-i} \Pi_{n+m-k}^{n+m-k}. \quad (34)$$

Эта формула впервые была дана Чесионом. Мы упомянули ее здесь скорее как курьез, чем как реальное с практической точки зрения средство для вычисления операторов. Прямое вычисление операторов посредством определяющей формулы и первой рекуррентной формулы, по-видимому, является наиболее удобным.

Наилучший путь для разложения возмущающей функции по средним аномалиям состоит в преобразовании посредством бесселевых функций разложения по эксцентрическим аномалиям, полученного нами ранее. Если

$$\Delta^{-1} = \sum_p \sum_{p'} B_{pp'} E^{i(pu+p'u')},$$

то

$$\Delta^{-1} = \sum_m \sum_{m'} A_{mm'} E^{i(ml+m'l')},$$

где

$$A_{mm'} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{m} \frac{p'}{m'} B_{pp'} J_{m-p}(ml) J_{m'-p'}(m'l'),$$

а $J_k(x)$ — бесселева функция порядка k . Для вычисления одного члена, например члена с аргументом $ml + nl'$, умножим Δ^{-1} на

$$\frac{r}{a} \frac{r'}{a'} E^{\frac{ml}{2}(x-x^{-1})} E^{\frac{nl'}{2}(x'-x'^{-1})}$$

и разложим в ряд по эксцентрической аномалии. Тогда коэффициент при $E^{i(ml+nl')}$ в разложении по средним аномалиям будет тем же самым, что и коэффициент при $\chi^n \chi'^n$ в разложении последней функции. Умножив (28) на

$$\frac{r}{a} \frac{r'}{a'} E^{\frac{ml}{2}(x-x^{-1})} E^{\frac{nl'}{2}(x'-x'^{-1})},$$

получим

$$(1+\beta'^2)^D (1+\beta^2)^{-D-1} \left[F(-D-1+B, -D-1-B, 1, \beta^2) + \right. \\ \left. + \sum_1^\infty \left(-\frac{\beta}{\chi} \right)^j \binom{D+1+B}{j} F(-D-1-B+j, -D-1+B, j+1, \beta^2) + \right. \\ \left. + \sum_1^\infty (-\beta \chi)^j \binom{D+1-B}{j} F(-D-1+B+j, -D-1-B, j+1, \beta^2) \right] \times \\ \times \left[F(D+B', D-B', 1, \beta'^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\beta'}{\chi'} \right)^k \binom{-D+B'}{k} F(D-B'+k, D+B', k+1, \beta'^2) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta' \chi')^k \binom{-D-B'}{k} F(D+B'+k, D-B', k+1, \beta'^2) \times \\
 & \quad \times \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(me) \chi^p \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_q(ne') \chi'^q. \tag{35}
 \end{aligned}$$

Для коэффициента при части члена с аргументом $ml+nl'$, которая не зависит от наклонности, мы находим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[F(-D-1+p, -D-1-p, 1, \beta^2) J_{m-p}(me) + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} J_{m+j-p}(me) \cdot (-\beta)^j \binom{D+1+p}{j} F(-D-1-p+j, -D-1+p, j+1, \beta^2) + \\
 & + \sum_{j=1}^{\infty} J_{m-j-p}(me) \cdot (-\beta)^j \binom{D+1-p}{j} F(-D-1+p+j, -D-1-p, j+1, \beta^2) \times \\
 & \quad \times \left[F(D-p, D+p, 1, \beta'^2) J_{n+p}(ne') + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} J_{n+k+p}(ne') \cdot (-\beta')^k \binom{-D-p}{k} F(D+p+k, D-p, k+1, \beta'^2) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} J_{n-k+p}(ne') \cdot (-\beta')^k \binom{-D-p}{k} F(D-p+k, D+p, k+1, \beta'^2) \times \\
 & \quad \times b_{l/2}^{(p)} \cdot (1+\beta'^2)^D (1+\beta^2)^{-D-1}. \tag{36}
 \end{aligned}$$

Аналогичным путем могут быть найдены операторы Ньюкома для разложения по средним аномалиям. В этом случае $(r/a)^p E^{iq\psi}$ должны быть выражены через средние аномалии. Так как эти выражения не замкнуты, то получающиеся выражения для операторов будут более сложными, чем в случае применения эксцентрических аномалий. Поскольку преобразования, необходимые для перехода от эксцентрических аномалий к средним, выполняются очень просто, то фактически операторы для разложения по средним аномалиям не нужны. Часть коэффициента наиболее низкого порядка относительно эксцентриситета в любом от-

Таблица 1

$m = 2, n = -5$	j	k	Степени β	Степени β'
0	2	-5	2	5
1	1	-4	1	4
2	0	-3	0	3
3	-1	-2	1	2
4	-2	-1	2	1
5	-3	0	3	0

дельном члене можно очень легко найти из выражения (36). Обратимся, например, к члену с аргументом $2l-5l'$. Этот член дает большую часть большого неравенства в движении Юпитера и Сатурна. Возможные комбинации p и j приведены в табл. 1.

Имеются четыре члена третьего порядка относительно e и e' , содержащие e^3 , $e^2 e'$, ee'^2 и e'^3 . Выберем член с e'^3 в коэффициенте, так что

$p = 2, j = 0, k = -3$. Тогда из выражения (36) мы получаем

$$\left[J_{-3}(-5e') + J_{-2}(-5e')(-\beta') \frac{-D+B'}{4!} + \right. \\ \left. + J_{-1}(-5e')(-\beta')^2 \frac{(-D+B')(-D+B'-1)}{2!} + \right. \\ \left. + J_0(-5e')(-\beta')^3 \frac{(-D+B')(-D+B'-1)(-D+B'-2)}{3!} \right] b_{1/2}^{(3)}.$$

Поскольку

$$J_m(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

и

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x),$$

то с точностью до третьей степени e' имеем выражение

$$\left[\frac{1}{3!} \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)(D+2) + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{(D+2)(D+3)}{2!} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{(D+2)(D+3)(D+4)}{3!} \right] e'^3 b_{1/2}^{(3)} \cos(2l - 5l' + 2\Pi - 2\Pi'),$$

которое приводится к следующему:

$$\frac{1}{48} (D^3 + 24D^2 + 176D + 389) e'^3 b_{1/2}^{(3)} \cos(2l - 5l' + 2\Pi - 2\Pi').$$

Чтобы выполнять буквенное разложение возмущающей функции систематическим образом, мы можем расположить члены так, чтобы, полагая $u + \Pi = \eta$ и $u' + \Pi' = \eta'$, иметь

$$\frac{a'}{\Delta_u} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ A_{1/2}^{(j)} \cos(j\eta - j\eta') + A_{3/2}^{(j)} \cos[(j+1)\eta - (j-1)\eta'] + \\ + A_{5/2}^{(j)} \cos[(j+2)\eta - (j-2)\eta'] + \dots \}.$$

Если для сокращения записи мы вместо $E^{i(\Pi-\Pi')}$ используем обозначение g , то из разложения (25) мы получим

$$\frac{1}{\Delta_u} = \frac{1}{\Delta_0} \left\{ 1 - \frac{2a\sigma [\chi\chi'h + (\chi\chi'h)^{-1}]}{\Delta_0^2} \right\}^{-1/2} = \\ = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{2a\sigma}{\Delta_0^2}\right)^k [\chi\chi'h + (\chi\chi'h)^{-1}]^k = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} (2a\sigma)^k \sum_{m=0}^{+\infty} b_{2k+1}^{(j)} \left(\frac{\chi}{\chi'} g\right)^j [\chi\chi'h + (\chi\chi'h)^{-1}]^k. \quad (37)$$

Вместо последней квадратной скобки в этом выражении мы можем написать

$$[\chi\chi'h + (\chi\chi'h)^{-1}]^k = (\chi\chi'h)^k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\chi\chi'h)^{-2m} = \\ = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\chi\chi'h)^{k-2m}. \quad (38)$$

Положим теперь $k - 2m = n$ или $k = 2m + n$. Выражение (37) можно написать в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \geq -(-n/2)}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (-1)^{2m+n} (2a\sigma)^{2m+n} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{2m+n+\frac{1}{2}}^{(j)} \left(\frac{\chi}{\chi'} g \right)^j (\chi \chi' h)^n,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \geq -(-n/2)}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (-1)^{2m+n} (2a\sigma)^{2m+n} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{2m+n+\frac{1}{2}}^{(j)} \chi^{j+n} \chi'^{-j+n} g^j h^n.$$

Аргумент в тригонометрической форме имеет следующий вид: $\cos [(j+n)\eta - (j-n)\eta']$. Из этого выражения, полагая $n=0$, мы находим

$$A_{1/2}^{(j)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) (-1)^{2m} (2a\sigma)^{2m} b_{2m+\frac{1}{2}}^{(j)}$$

и т. д.

5. Непрямой член. Если отбросить множитель $k^2 m'$ или $k^2 m$, то непрямой член возмущающей функции равен или $-r/r'^2 \cos H$, или $-r'/r^2 \cos H$ в зависимости от того, является ли возмущаемая планета внутренней или внешней. Достаточно рассмотреть первый случай, ибо во втором случае можно поступить точно таким же образом. Мы имеем

$$\begin{aligned} -\frac{r}{r'^2} \cos H &= -\frac{r}{r'^2} \left[\cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos(f-f'+\gamma) + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(f+f'+\theta) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{r}{r'^2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} [g E^i(f-f') + g^{-1} E^{-i}(f-f')] - \\ &\quad -\frac{1}{2} \frac{r}{r'^2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} [h E^i(f+f') + h^{-1} E^{-i}(f+f')]. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь мы имеем

$$\frac{r}{a} E^{if} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{i} [J_{j-1}(je) - \beta^2 J_{j+1}(je)] \Lambda^j,$$

$$\frac{r}{a} E^{-if} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{i} [\beta^2 J_{j-1}(je) - J_{j+1}(je)] \Lambda^{-j},$$

где

$$\eta = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-e^2}), \quad \beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}, \quad \Lambda = E^{it}.$$

Дифференциальные уравнения эллиптического движения дают

$$\frac{a^2}{r^2} E^{if} = -\frac{d^2}{dl^2} \frac{r}{a} E^{if},$$

и, следовательно,

$$\frac{a^2}{r^2} E^{if} = \sum_{-\infty}^{+\infty} j\eta [J_{j-1}(je) - \beta^2 J_{j+1}(je)] \Lambda^j,$$

$$\frac{a^2}{r^2} E^{-if} = \sum_{-\infty}^{+\infty} j\eta [\beta^2 J_{j-1}(je) - J_{j+1}(je)] \Lambda^{-j}.$$

Подставляя эти значения в выражение (39), находим, что в нем коэффициент при $\cos(jl + j'l' + \gamma)$ равен

$$-\frac{a}{a'^2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\eta}{j} [J_{j-1}(je) - \beta^2 J_{j+1}(je)] \cdot j'\eta' [\beta'^2 J_{j'-1}(j'e') - J_{j'+1}(j'e')]$$

и коэффициент при $\cos(jl + j'l' + \theta)$ равен

$$-\frac{a}{a'^2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\eta}{j} [J_{j-1}(je) - \beta^2 J_{j+1}(je)] \cdot j'\eta' [J_{j'-1}(j'e') - \beta'^2 J_{j'+1}(j'e')].$$

В частном случае, когда j равно 0, средние множители этих выражений становятся равными $-\frac{3}{2}e$.

Непрямой член возмущающей функции можно представить в другой форме, которая пригодна для определения численных значений коэффициентов в тех случаях, когда в распоряжении имеются вспомогательные постоянные из разд. 3. Если мы положим

$$h = ak \cos K, \quad g = \frac{1}{2} p \cos P,$$

$$h_1 = \frac{1}{2} v \cos V, \quad g_1 = \frac{1}{2} v \sin V,$$

где g и h не следует смешивать с показательными функциями, обозначенными выше этими же символами, и

$$P_j = \frac{1}{j} [J_{j-1}(je) - J_{j+1}(je)], \quad Q_j = \frac{1}{j} [J_{j-1}(je) + J_{j+1}(je)]$$

при условии, что

$$P_0 = -3e, \quad Q_0 = 0,$$

то мы находим следующее выражение:

$$a' \frac{r}{r'^2} \cos H = \sum \frac{1}{2} j'^2 [h P_j P_{j'} \pm h_1 Q_j Q_{j'}] \cos(\pm j'l' - jl) - \\ - \sum \frac{1}{2} j'^2 [g Q_j P_{j'} \pm g_1 P_j Q_{j'}] \sin(\pm j'l' - jl),$$

в котором j и j' принимают все положительные целочисленные значения, включая и нуль, а двойной знак берется двояким образом, т. е. суммирование выполняется сначала при знаке «плюс», а затем — при знаке «минус».

6. Буквенное разложение. Для того чтобы закончить изучение возмущающей функции, мы получим разложение по средним аномалиям в явном виде с точностью до членов третьего порядка относительно эксцентризитетов и взаимной наклонности, за исключением членов, необходимых для получения постоянной части возмущающей функции, которые будут даны с точностью до четвертого порядка; вековые возмущения зависят от постоянной части возмущающей функции и часто требуются с более высокой точностью, чем периодические возмущения. Разложение, которое будет приведено ниже, можно получить, следуя правилам, указанным в предыдущем разделе; однако удобнее вывести его из более обширных разложений, выполненных Леверье, Ньюкомом и другими исследователями. Для сокращения записи мы принимаем

следующие обозначения:

$$A_i = b_{1/2}^{(i)}, \quad B_i = ab_{3/2}^{(i)}, \quad \sigma = \sin \frac{1}{2} \varphi, \quad D_a^k = \frac{d^k}{da^k};$$

поэтому, например,

$$(4 + 7aD_a + a^2 D_a^2) A_2$$

означает

$$4b_{1/2}^{(2)} + 7a \frac{db_{1/2}^{(2)}}{da} + a^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(2)}}{da^2}.$$

В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned} \frac{a'}{\Delta} &= \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} A_j + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) [-4j^2 + 2aD_a + a^2 D_a^2] A_j - \frac{1}{4} \sigma^2 (B_{j-1} + B_{j+1}) - \right. \\ &\quad - \frac{1}{16} (e^2 + e'^2) \sigma^2 [-4j^2 + 2aD_a + a^2 D_a^2] (B_{j-1} + B_{j+1}) + \\ &\quad + \frac{1}{128} e^4 [16j^4 - 9j^2 - 8j^2 aD_a - 8j^2 a^2 D_a^2 + 4a^3 D_a^3 + a^4 D_a^4] A_j + \\ &\quad + \frac{1}{128} e'^4 [16j^4 - 17j^2 - (24j^2 - 24) aD_a - \\ &\quad \quad \quad - (8j^2 - 36) a^2 D_a^2 + 12a^3 D_a^3 + a^4 D_a^4] A_j + \\ &\quad + \frac{1}{32} e^2 e'^2 [16j^4 - (16j^2 - 4) aD_a - (8j^2 - 14) a^2 D_a^2 + \\ &\quad \quad \quad + 8a^3 D_a^3 + a^4 D_a^4] A_j \Big\} \cos(jl' - jl + j\Pi' - j\Pi) + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{4} ee' [4j^2 + 2j - 2aD_a - a^2 D_a^2] A_j - \right. \\ &\quad - \frac{1}{8} ee' \sigma^2 [4j^2 + 2j - 2aD_a - a^2 D_a^2] (B_{j-1} + B_{j+1}) + \\ &\quad + \frac{1}{32} e^3 e' [-16j^4 - 28j^3 - 14j^2 - 2j + (12j^2 + 18j + 6) aD_a + \\ &\quad \quad \quad + (8j^2 + 9j - 3) a^2 D_a^2 - 6a^3 D_a^3 - a^4 D_a^4] A_j + \\ &\quad + \frac{1}{32} ee'^3 [-16j^4 - 28j^3 - 10j^2 - 2j + (20j^2 + 18j - 6) aD_a + \\ &\quad \quad \quad + (8j^2 + 9j - 21) a^2 D_a^2 - 10a^3 D_a^3 - a^4 D_a^4] A_j \Big\} \times \\ &\quad \times \cos[(j+1)l' - (j+1)l + j\Pi' - j\Pi] + \\ &\quad + \frac{1}{64} e^2 e'^2 [16j^4 + 56j^3 + 64j^2 + 20j - (16j^2 + 36j + 20) aD_a - \\ &\quad \quad \quad - (8j^2 + 18j - 2) a^2 D_a^2 + 8a^3 D_a^3 + a^4 D_a^4] A_j \times \\ &\quad \times \cos[(j+2)l' - (j+2)l + j\Pi' - j\Pi] + \\ &\quad + \frac{1}{16} e^2 \sigma^2 [4j^2 - 3j - 1 - (4j - 2) aD_a + a^2 D_a^2] B_j \times \\ &\quad \times \cos[(j+1)l' - (j+1)l + (j+1)\Pi' - (j-1)\Pi] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} e'^2 \sigma^2 [4j^2 - j - 1 - (4j - 2) \alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] B_j \times \\
& \quad \times \cos [(j - 1) l' - (j - 1) l + (j + 1) \Pi' - (j - 1) \Pi] + \\
& + \frac{1}{8} ee' \sigma^2 [-4j^2 + 2j + 2 + (4j - 2) \alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] B_j \times \\
& \quad \times \cos [jl' - jl + (j + 1) \Pi' - (j - 1) \Pi] + \\
& + \frac{1}{16} e^2 e' [-8j^3 + 14j^2 - 5j - (4j^2 - 7j + 4) \alpha D_\alpha + \\
& \quad + (2j + 1) \alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^3 D_\alpha^3] A_j \times \\
& \quad \times \cos [(j - 1) l' - (j - 2) l + j \Pi' - j \Pi] + \\
& + \left\{ \frac{1}{2} e [-2j - \alpha D_\alpha] A_j - \frac{1}{4} e \sigma^2 [-2j - \alpha D_\alpha] (B_{j-1} + B_{j+1}) + \right. \\
& + \frac{1}{16} e^3 [8j^3 - 10j^2 + 2j + (4j^2 - 7j + 3) \alpha D_\alpha - \\
& \quad - (2j + 2) \alpha^2 D_\alpha^2 - \alpha^3 D_\alpha^3] A_j + \\
& + \frac{1}{8} ee'^2 [8j^3 + (4j^2 - 4j - 2) \alpha D_\alpha - (2j + 4) \alpha^2 D_\alpha^2 - \alpha^3 D_\alpha^3] A_j \Big\} \times \\
& \quad \times \cos [jl' - (j - 1) l + j \Pi' - j \Pi] + \\
& + \left\{ \frac{1}{2} e' [2j + 1 + \alpha D_\alpha] A_j - \frac{1}{4} e' \sigma^2 [2j + 1 + \alpha D_\alpha] (B_{j-1} + B_{j+1}) + \right. \\
& + \frac{1}{16} e'^3 [-8j^3 - 14j^2 - 5j - 1 - (4j^2 - j - 7) \alpha D_\alpha + \\
& \quad + (2j + 7) \alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^3 D_\alpha^3] A_j + \\
& + \frac{1}{8} e^2 e' [-8j^3 - 4j^2 - (4j^2 - 4j - 4) \alpha D_\alpha + (2j + 5) \alpha^2 D_\alpha^2 + \alpha^3 D_\alpha^3] A_j \Big\} \times \\
& \quad \times \cos [(j + 1) l' - jl + j \Pi' - j \Pi] + \\
& + \frac{1}{16} ee'^2 [8j^3 + 18j^2 + 8j + (4j^2 - j - 10) \alpha D_\alpha - (2j + 8) \alpha^2 D_\alpha^2 - \alpha^3 D_\alpha^3] A_j \times \\
& \quad \times \cos [(j + 2) l' - (j + 1) l + j \Pi' - j \Pi] + \\
& + \frac{1}{4} e \sigma^2 [2j - 2 - \alpha D_\alpha] B_j \cos [(j + 1) l' - jl + (j + 1) \Pi' - (j - 1) \Pi] + \\
& + \frac{1}{4} e' \sigma^2 [-2j - 1 + \alpha D_\alpha] B_j \cos [jl' - (j - 1) l + (j + 1) \Pi' - (j - 1) \Pi] - \\
& - \left\{ \frac{1}{8} e^2 [4j^2 - 5j + (4j - 2) \alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] A_j - \right. \\
& - \frac{1}{16} e^2 \sigma^2 [4j^2 - 5j + (4j - 2) \alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] (B_{j-1} + B_{j+1}) \Big\} \times \\
& \quad \times \cos [jl' - (j - 2) l + j \Pi' - j \Pi] + \\
& + \left\{ \frac{1}{4} ee' [-4j^2 - 2j - (4j + 2) \alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] A_j - \right. \\
& - \frac{1}{8} ee' \sigma^2 [-4j^2 - 2j - (4j + 2) \alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] (B_{j-1} + B_{j+1}) \Big\} \times \\
& \quad \times \cos [(j + 1) l' - (j - 1) l + j \Pi' - j \Pi] + \\
& + \left\{ \frac{1}{8} e'^2 [4j^2 + 9j + 4 + (4j + 6) \alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] A_j - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{16} e'^2 \sigma^2 [4j^2 + 9j + 4 + (4j + 6) a D_a + a^2 D_a^2] (B_{j-1} + B_{j+1}) \} \times \\
& \quad \times \cos [(j+2) l' - jl + j\Pi' - j\Pi] + \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 B_j \cos [(j+1) l' - (j-1) l + (j+1) \Pi' - (j-1) \Pi] + \\
& + \frac{1}{48} e^3 [-8j^3 + 30j^2 - 26j - (12j^2 - 27j + 9) a D_a - (6j - 6) a^2 D_a^2 - \\
& \quad - a^3 D_a^3] A_j \cos [jl' - (j-3) l + j\Pi' - j\Pi] + \\
& + \frac{1}{16} e^2 e' [8j^3 - 6j^2 - 5j + (12j^2 - j - 4) a D_a + (6j + 1) a^2 D_a^2 + a^3 D_a^3] A_j \times \\
& \quad \times \cos [(j+1) l' - (j-2) l + j\Pi' - j\Pi] + \\
& + \frac{1}{16} ee'^2 [-8j^3 - 18j^2 - 8j - (12j^2 + 25j + 10) a D_a - (6j + 8) a^2 D_a^2 - a^3 D_a^3] A_j \times \\
& \quad \times \cos [(j+2) l' - (j-1) l + j\Pi' - j\Pi] + \\
& + \frac{1}{48} e'^3 [8j^3 + 42j^2 + 65j + 27 + (12j^2 + 51j + 51) a D_a + \\
& \quad + (6j + 15) a^2 D_a^2 + a^3 D_a^3] A_j \times \\
& \quad \times \cos [(j+3) l' - jl + j\Pi' - j\Pi] + \\
& + \frac{1}{4} e \sigma^2 [-2j + 2 - a D_a] B_j \cos [(j+1) l' - (j-2) l + (j+1) \Pi' - (j-1) \Pi] + \\
& + \frac{1}{4} e' \sigma^2 [2j + 3 + a D_a] B_j \cos [(j+2) l' - (j-1) l + (j+1) \Pi' - (j-1) \Pi].
\end{aligned}$$

Непрямой член можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& -\frac{r}{a} \frac{a'^2}{r'^2} \cos H = \left[1 - \frac{1}{2} (e^2 + e'^2) - \sigma^2 \right] \cos (l' - l + \Pi' - \Pi) + \\
& \quad + ee' \cos (2l' - 2l + \Pi' - \Pi) - \\
& \quad - \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{4} e'^2 - \frac{3}{2} \sigma^2 \right] e \cos (l' + \Pi' - \Pi) + \\
& \quad + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e'^2 - \frac{3}{8} e^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] e \cos (l' - 2l + \Pi' - \Pi) + \\
& \quad + \left[2 - e^2 - \frac{3}{2} e'^2 - 2\sigma^2 \right] e' \cos (2l' - l + \Pi' - \Pi) + \\
& \quad + \frac{3}{4} e^2 e' \cos (2l' - 3l + \Pi' - \Pi) - \frac{3}{16} ee'^2 \cos (l' - \Pi' + \Pi) + \\
& \quad + \frac{27}{16} ee'^2 \cos (3l' - 2l + \Pi' - \Pi) - \frac{3}{2} e \sigma^2 \cos (l' + \Pi' + \Pi) + \\
& \quad + \frac{1}{8} e^2 \cos (l' + l + \Pi' - \Pi) + \frac{3}{8} e^2 \cos (l' - 3l + \Pi' - \Pi) - \\
& \quad - 3ee' \cos (2l' + \Pi' - \Pi) + \frac{3}{8} e'^2 \cos (l' + l - \Pi' + \Pi) + \\
& \quad + \frac{27}{8} e'^2 \cos (3l' - l + \Pi' - \Pi) + \sigma^2 \cos (l' + l + \Pi' + \Pi) + \\
& \quad + \frac{1}{24} e^3 \cos (l' + 2l + \Pi' - \Pi) + \frac{1}{3} e^3 \cos (l' - 4l + \Pi' - \Pi) + \\
& \quad + \frac{1}{4} e^2 e' \cos (2l' + l + \Pi' - \Pi) + \frac{1}{16} ee'^2 \cos (l' + 2l - \Pi' + \Pi) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{81}{16} ee'^2 \cos(3l' + \Pi' - \Pi) + \frac{1}{6} e'^3 \cos(2l' + l - \Pi' + \Pi) + \\
 & + \frac{16}{3} e'^3 \cos(4l' - l + \Pi' - \Pi) + \frac{1}{2} e\sigma^2 \cos(l' + 2l + \Pi' + \Pi) + \\
 & + 2e'\sigma^2 \cos(2l' + l + \Pi' + \Pi).
 \end{aligned}$$

В тех случаях, когда мы вычисляем возмущения, испытываемые нижней планетой со стороны верхней, непрямой член возмущающей функции можно полностью учесть путем замены в первом слагаемом

$$b_{1/2}^{\pm 1} \text{ на } b_{1/2}^{(\pm 1)} - a, \quad a \frac{db_{1/2}^{(\pm 1)}}{da} \text{ на } a \frac{db_{1/2}^{(\pm 1)}}{da} - a, \quad b_{3/2}^{(0)} \text{ на } b_{3/2}^{(0)} - 2,$$

все же остальные коэффициенты Лапласа и их производные остаются неизменными. Однако в случае возмущений верхней планеты со стороны нижней это правило не будет столь же простым, а потому проще вычислить непрямой член отдельно.

Необходимо заметить, что в случае возмущений первого порядка непрямой член можно вообще не вычислять, если условиться прибавлять произведение возмущающей массы на гелиоцентрические прямоугольные координаты x' , y' , z' возмущающей планеты в качестве поправок к гелиоцентрическим прямоугольным координатам x , y , z возмущаемой планеты. Но если необходимо получить возмущения второго или более высоких порядков, то проще вычислить оба члена возмущающей функции вместе.

7. Коэффициенты Лапласа. Теперь мы возвращаемся к методам вычисления коэффициентов $b_s^{(j)}$ в разложении

$$(1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s^{(j)} \cos j\theta, \quad (40)$$

где $a = a/a'$, $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ и $b_s^{(-j)} = b_s^{(j)}$. Эти коэффициенты являются функциями только от a . Выражение в круглых скобках можно записать в виде следующего произведения двух сомножителей:

$$1 - 2a \cos \theta + a^2 = [1 - a(\cos \theta + i \sin \theta)] [1 - a(\cos \theta - i \sin \theta)],$$

где $i = \sqrt{-1}$; полагая $z = E^{i\theta}$, мы можем написать

$$1 - 2a \cos \theta + a^2 = (1 - az)(1 - az^{-1}),$$

откуда

$$(1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-s} = (1 - az)^{-s} (1 - az^{-1})^{-s}$$

и

$$\begin{aligned}
 (1 - az)^{-s} (1 - az^{-1})^{-s} &= \frac{1}{2} b_s^{(0)} + \frac{1}{2} b_s^{(1)} (z + z^{-1}) + \frac{1}{2} b_s^{(2)} (z^2 + z^{-2}) + \dots = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s^{(j)} z^j.
 \end{aligned} \quad (41)$$

Множители $(1 - az)^{-s}$ и $(1 - az^{-1})^{-s}$ можно разложить по степеням z по формуле бинома Ньютона, что дает

$$(1 - az)^{-s} = 1 + \frac{s}{1} az + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} a^2 z^2 + \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 z^3 + \dots,$$

$$(1 - az^{-1})^{-s} = 1 + \frac{s}{1} az^{-1} + \frac{s(s+1)}{1 \cdot 2} a^2 z^{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 z^{-3} + \dots.$$

Перемножая эти два ряда, мы получаем следующее выражение для коэффициента при z^j , который равен $\frac{1}{2} b_s^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_s^{(j)} &= \frac{s(s+1)(s+2) \dots (s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots j} \times \\ &\times a^j \left[1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} a^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1 \cdot 2 (j+1)(j+2)} a^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Когда $j = 0$, множитель, стоящий вне квадратных скобок, становится равным единице.

Ряд (42) представляет собой частный случай гипергеометрических рядов. Используя общепринятые обозначения для такого рода рядов, имеем

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)} = \frac{s(s+1)(s+2) \dots (s+j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots j} a^j F(s, s+j, j+1, a^2).$$

Свойства коэффициентов Лапласа и способы их вычисления могут быть выведены на основании хорошо известной теории гипергеометрических рядов. Можно также отметить, что существуют подробные таблицы коэффициентов Лапласа и их производных, так что вычислителю на практике очень редко понадобится вычислять их с самого начала. Однако полезно установить здесь некоторые свойства коэффициентов Лапласа, что поможет пониманию существа вопроса и даст возможность вычислителю работать с большей свободой.

Согласно правилам, установленным в гл. II, мы имеем

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-s} \cos j\theta d\theta,$$

$$b_s^{(j)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - 2a \cos \theta + a^2)^{-s} \cos j\theta d\theta.$$

Как и в случае бесселевых функций, мы можем вывести для $b_{1/2}^{(j)}$ выражение в виде определенного интеграла, содержащего явно a^j . Мы имеем

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^\pi \left(\sin^{2j} \theta + \frac{1}{2} a^2 \sin^{2j+2} \theta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a^4 \sin^{2j+4} \theta + \dots \right) d\theta$$

Однако

$$\int_0^\pi \sin^{2j} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2j} \pi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha^j \sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2j-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2j} \alpha^j \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2j+1}{2j+2} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2j+1) (2j+3)}{2 \cdot 4 \cdot (2j+2) (2j+4)} \alpha^4 + \dots \right].$$

Правая часть этого выражения равносильна $\frac{1}{2} b_{1/2}^{(j)}$, как можно усмотреть из (42). Поэтому

$$b_{1/2}^{(j)} = \frac{2}{\pi} \alpha^j \int_0^\pi \frac{\sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \frac{4}{\pi} \alpha^j \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (43)$$

Уравнение (43) можно использовать для вычисления $b_{1/2}^{(j)}$ при помощи гармонического анализа. Кроме того, (43) можно обобщить, получая

$$\frac{1}{2} b_s^{(j)} = \frac{2s(2s+2)\dots(2s+2j-2)}{1 \cdot 3 \dots (2j-1)} \frac{\alpha^j}{\pi} \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} + \alpha \cos \theta}{1 - \alpha^2} \right]^{2s-1} \frac{\sin^{2j} \theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (44)$$

Для частных случаев, когда j равно нулю или единице, имеем

$$b_{1/2}^{(0)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}}, \\ b_{1/2}^{(1)} = \frac{4}{\pi} \alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{20}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \\ = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\alpha} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta} d\theta \right]. \quad (45)$$

Оба определенных интеграла в выражениях (45) являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода. Если мы обозначим их через F_1 и E_1 , то

$$b_{1/2}^{(0)} = \frac{4}{\pi} F_1, \quad b_{1/2}^{(1)} = \frac{4}{\pi} \frac{F_1 - E_1}{\alpha}.$$

Коэффициенты $b_s^{(j)}$ для любого частного значения α связаны друг с другом рекуррентными формулами, хотя и не конечными. Дифференцируя выражение (41) и умножая после этого на z , мы получаем

$$sa(z - z^{-1}) [1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2]^{-(s+1)} = \frac{1}{2} \sum j b_s^{(j)} z^j. \quad (46)$$

Если это выражение умножить на $1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2$, то, согласно (41), получается

$$sa(z - z^{-1}) \sum b_s^{(j)} z^j = [1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2] \sum j b_s^{(j)} z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{j-1} в обеих частях, мы имеем

$$sa(b_s^{(j-2)} - b_s^{(j)}) = (j-1)(1 + \alpha^2) b_s^{(j-1)} - \alpha(j-2) b_s^{(j-2)} - ja b_s^{(j)},$$

откуда

$$b_s^{(j)} = \frac{i-1}{i-s} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) b_s^{(j-1)} - \frac{i+s-2}{i-s} b_s^{(j-2)}. \quad (47)$$

Поэтому $b_s^{(j)}$ выражается через два коэффициента, непосредственно предшествующие ему в ряде, откуда вытекает, что если известны $b_s^{(0)}$ и $b_s^{(1)}$, то и весь ряд коэффициентов может быть последовательно определен. Однако эта процедура обладает недостатком, состоящим в том, что поскольку коэффициент $b_s^{(j)}$ уменьшается с ростом j , то последовательные значения коэффициентов становятся все менее точными. Это затруднение можно преодолеть, вычисляя сначала коэффициенты $b_s^{(j)}$ и $b_s^{(j-2)}$ для самых больших нужных значений j , а затем используя последовательно эту формулу для получения $b_s^{(j-2)}, b_s^{(j-3)}, \dots$ вплоть до коэффициента $b_s^{(0)}$. Другой путь преодоления этой трудности состоит в следующем. Обозначим множитель, на который необходимо умножить коэффициент $b_s^{(j-1)}$, чтобы получить $b_s^{(j)}$, через $p_s^{(j)}$. Тогда (47) можно написать в следующем виде:

$$p_s^{(j)} = \frac{i-1}{i-s} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{i+s-2}{i-s} \frac{1}{p_s^{(j-1)}}. \quad (48)$$

Теперь положим

$$F_s^{(j)} = \frac{i+s-1}{i} \frac{\alpha}{1+\alpha^2}, \quad p_s^{(j)} = F_s^{(j)} \gamma_s^{(j)}.$$

В таком случае уравнение (48) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{i+s-1}{i} \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \gamma_s^{(j)} = \frac{i-1}{i-s} \frac{1+\alpha^2}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\gamma_s^{(j-1)}} \right),$$

или

$$\frac{(i-s)(i+s-1)}{i(i-1)} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \right)^2 \gamma_s^{(j)} = 1 - \frac{1}{\gamma_s^{(j-1)}}.$$

Полагая

$$\lambda_s^{(j)} = \frac{(i-s)(i+s-1)}{i(i-1)} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2} \right)^2,$$

мы получаем

$$\gamma_s^{(j-1)} = \frac{1}{1 - \lambda_s^{(j)} \gamma_s^{(j)}}. \quad (49)$$

Поэтому, исходя из значения $\gamma_s^{(j)}$ для самого большого значения j , которое мы должны рассмотреть, мы получим последовательным применением уравнения (49) значения всех величин γ_s от $\gamma_s^{(j)}$ назад до $\gamma_s^{(1)}$, а при помощи уравнения $p_s^{(j)} = F_s^{(j)} \gamma_s^{(j)}$ — значения всех величин p_s от $p_s^{(j)}$ до $p_s^{(1)}$ и, наконец, значения b_s — из следующих уравнений:

$$b_s^{(1)} = b_s^{(0)} p_s^{(1)}, \quad b_s^{(2)} = b_s^{(0)} p_s^{(1)} p_s^{(2)}, \quad b_s^{(3)} = b_s^{(0)} p_s^{(1)} p_s^{(2)} p_s^{(3)} \text{ и т. д.}$$

Можно показать, что величина $\gamma_s^{(j)}$ для наибольшего требуемого значения j определяется следующей непрерывной дробью:

$$\begin{aligned} \gamma_s^{(j)} &= \frac{1+\alpha^2}{1-\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{1-\frac{\alpha^2}{1-\frac{\alpha^2}{1-\frac{\alpha^2}{\dots}}}}}} \\ &= \frac{1+\alpha^2}{1-\frac{\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{1-\frac{\alpha^2}{1-\frac{\alpha^2}{1-\frac{\alpha^2}{\dots}}}}}} \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$a = \frac{s(1-s)}{i(i+1)}, \quad b = \frac{(j+s)(j+1-s)}{(i+1)(i+2)},$$

$$c = \frac{(s+1)(2-s)}{(i+2)(i+3)}, \quad d = \frac{(i+s+1)(i+2-s)}{(i+3)(i+4)} \text{ и т. д.}$$

Когда j очень велико, непрерывная дробь (50) сходится быстро; для бесконечно большого j мы имеем $\gamma_i^{(\infty)} = 1 + a^2$, откуда при j бесконечно большом $b_j^{(j)}/b_j^{(j-1)} = a$. Легко проверить числовое значение, полученное для $\gamma_i^{(j)}$, перевычисляя его с учетом еще одного члена в разложении (50). Если величина $\gamma_i^{(j)}$ при этом не изменится, то она вычислена достаточно точно.

Удобный метод вычисления $b_{1/2}^{(0)}$ может быть получен следующим образом. Преобразование, известное как преобразование Ландена, имеет следующий вид:

$$\cos \theta = a \sin^2 \theta' + \cos \theta' \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'}. \quad (51)$$

Возводя в квадрат обе части и вычитая результат из единицы, получаем

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta' (1 - a^2 \sin^2 \theta' + a^2 \cos^2 \theta' - 2a \cos \theta' \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'}),$$

откуда

$$\sin \theta = \sin \theta' (\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'} - a \cos \theta'). \quad (52)$$

Если допустить, что радикалы в (51) и (52) необходимо брать с положительным знаком, то очевидно, что θ и θ' могут быть вместе равны нулю и, возрастаю, вместе достигают π и 2π . Из формулы (51) имеем

$$1 - 2a \cos \theta + a^2 = 1 + a^2 - 2a^2 \sin^2 \theta' - 2a \cos \theta' \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'},$$

откуда следует

$$\sqrt{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'} - a \cos \theta'. \quad (53)$$

Здесь оба радикала снова должны быть взяты положительными. Дифференцируя соотношение (53) и деля результат на (52), получаем

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2a \cos \theta + a^2}} = \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'}}. \quad (54)$$

откуда мы находим

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2a \cos \theta + a^2}} = \int \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \theta'}}, \quad (55)$$

причем в обоих интегралах пределами являются 0 и π либо 0 и 2π . Подставляя

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

можно написать формулу (55) в следующем виде:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-a^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (1+a^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \int \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2 \theta' + (1-a^2) \sin^2 \theta'}}.$$

Подставим в левой части 2θ вместо θ , а затем $\pi/2 - \theta$ вместо θ ; тогда в результате получится

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1+a)^2 \cos^2 \theta + (1-a)^2 \sin^2 \theta}} = \int \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2 \theta' + (1-a^2) \sin^2 \theta'}} . \quad (56)$$

Теперь, если мы положим $m = 1+a$, $n = 1-a$, то

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta}} = \int \frac{d\theta'}{\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \cos^2 \theta' + mn \sin^2 \theta'}} . \quad (57)$$

Это уравнение указывает правило вычисления полного эллиптического интеграла первого рода посредством арифметически-геометрического среднего. Правую часть можно рассматривать как преобразованную форму левой. Это преобразование можно повторять снова и снова, получая в результате ряд из коэффициентов при $\cos^2 \theta$ и $\sin^2 \theta$, быстро стремящихся к равенству между собой. Изменения, которые испытывают m и n , имеют следующий характер:

$$m = m, \quad m' = \frac{m+n}{2}, \quad m'' = \frac{m'+n'}{2}, \quad m''' = \frac{m''+n''}{2}, \dots , \\ n = n, \quad n' = \sqrt{mn}, \quad n'' = \sqrt{m'n'}, \quad n''' = \sqrt{m''n''}, \dots .$$

Пусть μ означает общий предел, к которому стремятся обе эти величины; тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\mu} . \quad (58)$$

Символ $M(m, n)$ часто используется для обозначения величины μ . В таком случае, согласно (43), имеем

$$b_{1/2}^{(0)} = \frac{2}{M(1, \sqrt{1-a^2})} . \quad (59)$$

Аналогичным путем можно вывести следующее выражение:

$$b_{1/2}^{(1)} = \frac{a^2 + 2(m'^2 - n'^2) + 4(m''^2 - n''^2) + 8(m'''^2 - n'''^2) + \dots}{a\mu} . \quad (60)$$

Теперь мы располагаем всеми необходимыми данными для вычисления коэффициентов $b_{1/2}^{(j)}$ для любого значения j . Обращаясь затем к другим значениям s , мы можем написать уравнение (46) в следующем виде:

$$sa(z - z^{-1}) \sum b_{s+1}^{(j)} z^j = \sum j b_s^{(j)} z^j .$$

Сравнивая коэффициенты при z^j в этом уравнении, получаем

$$jb_s^{(j)} = sa [b_{s+1}^{(j-1)} - b_{s+1}^{(j+1)}] . \quad (61)$$

Эта формула выражает коэффициент $b_s^{(j)}$ через два коэффициента, принадлежащие ряду, в котором s больше единицы. Эти два коэффициента не являются последовательными, однако, исключая коэффициент $b_{s+1}^{(j+1)}$ подстановкой его значения, вычисленного по формуле (47), получим

$$b_s^{(j)} = \frac{s}{l-s} [2ab_{s+1}^{(j-1)} - (1+a^2)b_{s+1}^{(j)}] . \quad (62)$$

Однако удобнее выразить $b_{s+1}^{(j-1)}$ через $b_s^{(j)}$. Перегруппировав члены в уравнении (62) и полагая $1+j$ вместо j , мы находим

$$2ab_{s+1}^{(j-1)} = (1+\alpha^2)b_{s+1}^{(j)} + \frac{j-s}{s} b_s^{(j)},$$

$$(1+\alpha^2)b_{s+1}^{(j+1)} = 2ab_{s+1}^{(j)} - \frac{j-s+1}{s} b_s^{(j+1)},$$

и если мы положим $j+1$ вместо j и $s+1$ вместо s в уравнении (47), то мы получим

$$b_{s+1}^{(j+1)} = \frac{j(1+\alpha^2)b_{s+1}^{(j)} - (j+s)\alpha b_{s+1}^{(j-1)}}{(j-s)\alpha}.$$

Исключая $b_{s+1}^{(j+1)}$ и $b_{s+1}^{(j-1)}$ из этих трех последних уравнений, мы получаем

$$b_{s+1}^{(j)} = \frac{(j+s)(1+\alpha^2)b_s^{(j)} - 2(j-s+1)\alpha b_s^{(j+1)}}{s(1-\alpha^2)^2}. \quad (63)$$

Может оказаться более выгодным иметь в этой формуле коэффициент $b_{s+1}^{(j-1)}$ вместо $b_{s+1}^{(j+1)}$. Полагая $-j$ вместо j , получаем следующее выражение:

$$b_{s+1}^{(j)} = \frac{(s-j)(1+\alpha^2)b_s^{(j)} + 2(j+s-1)\alpha b_s^{(j-1)}}{s(1-\alpha^2)^2}. \quad (64)$$

Из этого выражения находим

$$b_{s+1}^{(j+1)} = \frac{2(j+s)\alpha b_s^{(j)} - (j-s+1)(1+\alpha^2)b_s^{(j+1)}}{s(1-\alpha^2)^2}. \quad (65)$$

Беря сумму и разность уравнений (63) и (65), мы получаем формулы, которые лучше приспособлены для вычислений:

$$\frac{1}{2} (b_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)}) = \frac{(j+s)b_s^{(j)} - (j-s+1)b_s^{(j+1)}}{2s(1-\alpha^2)},$$

$$\frac{1}{2} (b_{s+1}^{(j)} - b_{s+1}^{(j+1)}) = \frac{(j+s)b_s^{(j)} + (j-s+1)b_s^{(j+1)}}{2s(1-\alpha^2)}. \quad (66)$$

§ 8. Производные от коэффициентов Лапласа. Производные от коэффициентов Лапласа по α входят в буквенное разложение возмущающей функции. В тех случаях, когда α очень мало, можно воспользоваться для вычисления коэффициентов $b_s^{(j)}$ рядом (42), записанным в следующем виде:

$$b_s^{(j)} = \sum_{k=0}^{h=\infty} A_k \alpha^{j+2k}.$$

Отсюда мы получаем непосредственно

$$\alpha \frac{db_s^{(j)}}{d\alpha} = \sum_{k=0}^{h=\infty} (j+2k) A_k \alpha^{j+2k},$$

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_s^{(j)}}{d\alpha^2} = \sum_{k=0}^{h=\infty} (j+2k)(j+2k-1) A_k \alpha^{j+2k} \text{ и т. д.}$$

Однако α часто является настолько большим, что эти ряды сходятся крайне медленно. В таких случаях лучше вычислять производные

прямо по коэффициентам Лапласа. Дифференцируя уравнение (41) по a , получаем

$$s(z + z^{-1} - 2a)[1 - a(z + z^{-1}) + a^2]^{-(s+1)} = \frac{1}{2} \sum \frac{db_s^{(j)}}{da} z^j,$$

или

$$s(z + z^{-1} - 2a) \sum b_{s+1}^{(j)} z^j = \sum \frac{db_s^{(j)}}{da} z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при z^j , находим следующее уравнение:

$$\frac{db_s^{(j)}}{da} = s [b_{s+1}^{(j-1)} - 2ab_{s+1}^{(j)} + b_{s+1}^{(j+1)}]. \quad (67)$$

Коэффициенты b_{s+1} в этом уравнении могут быть заменены коэффициентами b_s . Из уравнения (61) находим, что

$$b_{s+1}^{(j-1)} = b_{s+1}^{(j+1)} + \frac{i}{sa} b_s^{(j)}.$$

Подставляя это уравнение в (67), находим

$$a \frac{db_s^{(j)}}{da} = jb_s^{(j)} + 2sa [b_{s+1}^{(j+1)} - ab_{s+1}^{(j)}]. \quad (68)$$

Исключая $b_{s+1}^{(j+1)}$ и $b_{s+1}^{(j)}$ посредством их значений, определяемых соотношениями (63) и (65), получаем

$$a \frac{db_s^{(j)}}{da} = \frac{[j + (j+2s)a^2] b_s^{(j)} - 2(j-s+1) ab_s^{(j+1)}}{1-a^2}. \quad (69)$$

Изменение знака j в этом уравнении дает

$$a \frac{db_s^{(j)}}{da} = \frac{2(j+s-1) ab_s^{(j-1)} - [j + (j-2s)a^2] b_s^{(j)}}{1-a^2}. \quad (70)$$

Из (67) получаем следующее уравнение:

$$\frac{db_s^{(j)}}{da} - \frac{db_s^{(j-2)}}{da} = -s [b_{s+1}^{(j-1)} - b_{s+1}^{(j+1)} + b_{s+1}^{(j-3)} - 2a(b_{s+1}^{(j-2)} - b_{s+1}^{(j)})].$$

При помощи уравнения (61) коэффициенты b_{s+1} в этом уравнении можно заменить коэффициентами b_s :

$$a \left(\frac{db_s^{(j)}}{da} - \frac{db_s^{(j-2)}}{da} \right) = -(j-2) b_s^{(j-2)} + 2(j-1) ab_s^{(j-1)} - jb_s^{(j)}. \quad (71)$$

Посредством уравнения (71) представляется возможным определить $db_s^{(j)}/da$, когда известны $db_s^{(0)}/da$ и $db_s^{(1)}/da$. Но уравнения (69) и (70) дают

$$a \frac{db_s^{(0)}}{da} = \frac{2sa^2 b_s^{(0)} + 2(s-1) ab_s^{(1)}}{1-a^2}, \quad (72)$$

$$a \frac{db_s^{(1)}}{da} = \frac{2sab_s^{(0)} + [(2s-1)a^2 - 1] b_s^{(1)}}{1-a^2}. \quad (73)$$

Дифференцируя уравнение (71) $p-1$ раз по a , получим ряд формул следующего типа:

$$a^p \left(\frac{d^p b_s^{(j)}}{da^p} - \frac{d^p b_s^{(j-2)}}{da^p} \right) = -(j+p-1) a^{p-1} \frac{d^{p-1} b_s^{(j)}}{da^{p-1}} - (j-p-1) a^{p-1} \times \\ \times \frac{d^{p-1} b_s^{(j-2)}}{da^{p-1}} + 2(j-1) \left[a^p \frac{d^{p-1} b_s^{(j-1)}}{da^{p-1}} + (p-1) a^{p-1} \frac{d^{p-2} b_s^{(j-1)}}{da^{p-2}} \right]. \quad (74)$$

Записывая в уравнении (74) $p+1$ вместо p , мы получаем уравнение, которое дает различные производные от $b_s^{(j)}$ через производные от $b_s^{(0)}$ и $b_s^{(1)}$.

В том случае, когда $s=1/2$, уравнения (72) и (73) принимают вид

$$\alpha(1-\alpha^2) \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} = \alpha b_{1/2}^{(0)} - b_{1/2}^{(1)}, \quad \frac{db_{1/2}^{(0)}}{d\alpha} = \alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha}. \quad (75)$$

Дифференцируя первое уравнение (75) и исключая после этого коэффициент $b_{1/2}^{(0)}$ и его производную при помощи обоих уравнений, находим следующее уравнение:

$$\alpha^2(1-\alpha^2) \frac{d^2b_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^2} = (3\alpha^2 - 1)\alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{d\alpha} + b_{1/2}^{(1)}. \quad (76)$$

Если уравнение (76) продифференцировать $p-1$ раз, то получится уравнение следующего типа:

$$\begin{aligned} \alpha^{p+1}(1-\alpha^2) \frac{dp+1}{d\alpha^{p+1}} b_{1/2}^{(1)} &= \alpha^2 \left[(3p+1)\alpha^p \frac{dpb_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^p} + (3p^2-p-1)\alpha^{p-1} \frac{dp-1}{d\alpha^{p-1}} b_{1/2}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + p^2(p-2)\alpha^{p-2} \frac{dp-2}{d\alpha^{p-2}} b_{1/2}^{(1)} \right] - (p+1)\alpha^p \frac{dpb_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^p}. \end{aligned} \quad (77)$$

Из второго уравнения (75) выводим уравнение вида

$$\alpha^p \frac{dpb_{1/2}^{(0)}}{d\alpha^p} = \alpha \left[\alpha^p \frac{dpb_{1/2}^{(1)}}{d\alpha^p} + (p-1)\alpha^{p-1} \frac{dp-1}{d\alpha^{p-1}} b_{1/2}^{(1)} \right]. \quad (78)$$

Полагая j равным нулю, получаем из уравнения (66) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (1-\alpha^2)(b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)}) &= b_s^{(0)} + \frac{s-1}{s} b_s^{(1)}, \\ (1+\alpha^2)(b_{s+1}^{(0)} - b_{s+1}^{(1)}) &= b_s^{(0)} - \frac{s-1}{s} b_s^{(1)} \end{aligned} \quad (79)$$

и, дифференцируя их p раз, находим

$$\begin{aligned} (1-\alpha)^2 \frac{dp}{d\alpha^p} (b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)}) &= 2p(1-\alpha) \frac{dp-1}{d\alpha^{p-1}} (b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)}) - \\ &\quad - p(p-1) \frac{dp-2}{d\alpha^{p-2}} (b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)}) + \frac{dpb_s^{(0)}}{d\alpha^p} + \frac{s-1}{s} \frac{dpb_s^{(1)}}{d\alpha^p}, \\ (1+\alpha)^2 \frac{dp}{d\alpha^p} (b_{s+1}^{(0)} - b_{s+1}^{(1)}) &= -2p(1+\alpha) \frac{dp-1}{d\alpha^{p-1}} (b_{s+1}^{(0)} - b_{s+1}^{(1)}) - \\ &\quad - p(p-1) \frac{dp-2}{d\alpha^{p-2}} (b_{s+1}^{(0)} - b_{s+1}^{(1)}) + \frac{dpb_s^{(0)}}{d\alpha^p} - \frac{s-1}{s} \frac{dpb_s^{(1)}}{d\alpha^p}. \end{aligned} \quad (80)$$

Этих уравнений достаточно, чтобы определить столько производных от коэффициентов $b_s^{(j)}$, сколько потребуется.

Следует заметить, что в разложении возмущающей функции k -я производная от $b_{1/2}^{(j)}$ всегда умножается на α^k , k -я производная от $b_{1/2}^{(j)}$ — на α^{k+1} и т. д. Если $f(\alpha)$ — некоторая функция от α , то

$$\alpha \frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{d\ln \alpha}.$$

Формулы и вычисления несколько упрощаются, если мы условимся всегда дифференцировать по $\ln a$ вместо a . Обозначая k -ю производную по a через D_a^k и k -ю производную по $\ln a$ через D^k , можно любую линейную функцию от $a^j D_a^j$ преобразовать в линейную функцию от D^j по следующим формулам:

$$aD_a = D,$$

$$a^2 D_a^2 = -D + D^2,$$

$$a^3 D_a^3 = 2D - 3D^2 + D^3,$$

$$a^4 D_a^4 = -6D + 11D^2 - 6D^3 + D^4,$$

$$a^5 D_a^5 = 24D - 50D^2 + 35D^3 - 10D^4 + D^5,$$

которые могут быть продолжены по следующему правилу. Обозначив абсолютную величину коэффициента при D^j в уравнении для $a^k D_a^k$ через $A_{j,k}$, получаем

$$A_{j,k} = (k-1) A_{j,k-1} + A_{j-1,k-1}.$$

Заметим, что знаки в столбцах чередуются.

Обратно, любая линейная функция от D^j может быть преобразована в линейную функцию от D_a^j по следующим формулам:

$$D = aD_a,$$

$$D^2 = aD_a + a^2 D_a^2,$$

$$D^3 = aD_a + 3a^2 D_a^2 + a^3 D_a^3,$$

$$D^4 = aD_a + 7a^2 D_a^2 + 6a^3 D_a^3 + a^4 D_a^4,$$

$$D^5 = aD_a + 15a^2 D_a^2 + 25a^3 D_a^3 + 10a^4 D_a^4 + a^5 D_a^5,$$

которые могут быть неограниченно продолжены по следующему правилу. Обозначим коэффициент при $a^j D_a^j$ в уравнении для D^k через $B_{j,k}$, получим

$$B_{j,k} = jB_{j,k-1} + B_{j-1,k-1}.$$

Замечания. Литература

Первое буквенное разложение возмущающей функции до третьего порядка относительно эксцентриситетов и наклонности было дано Лапласом и его «Небесной механике». Понтекулан (De Pontécoulant, Système du Monde) продолжил это разложение до шестого порядка. Разложение до шестого порядка было опубликовано Пирсом (Perrin, Astron. J., 1, 1, 1849). Неверрье в первом томе Аналов Парижской обсерватории довел разложение до членов седьмого порядка, приводя значения всех коэффициентов в явном виде.

Чисто численное разложение, в которое в буквеннном виде входят только независимые переменные, впервые было применено Ганзеном в его премированным мемуаре о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна. В форме, когда в качестве независимых переменных используются эксцентрические аномалии, оно впервые было указано Коши и применено Ганзеном к возмущениям малых планет, причем первое приложение было сделано к астероиду Эгерия («Auseinandersetzung einer Zweckmäßigen Methode zur Berechnung der Absoluten Störungen der Kleinen Planeten»). Дальнейшая модификация, изложенная в этой главе, когда используется средняя аномалия одной пла-

неты и эксцентрическая аномалия другой, была применена Хиллом в его теории Юпитера и Сатурна (*Astron. Papers Amer. Ephemeris*, 4, 1890). Ньюком (*Astron. Papers*, 3, 1—200, 1891) дает символическое буквенное разложение по эксцентрическим аномалиям с точностью до шестого порядка, которое применяется в своих теориях движения четырех внутренних планет в этом же томе. В пятом томе он дает аналогичное разложение по средним аномалиям, которое и применяется для вычисления вековых возмущений четырех внутренних планет в этом же томе.

Численное разложение, приведенное в разд. 2, опубликовано Браузером (*Astron. J.*, 52, 64, 1946). Первое применение этого разложения к Марсу и Земле было дано Клеменсом (*Astron. Papers*, 11, pt. II, 1949).

Многочисленные рекуррентные соотношения между коэффициентами Лапласа и их производными даны Цейпелем (*Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. VI, 2, 1. Hälfte, 1912, SS. 557—663).

Лучшими таблицами коэффициентов Лапласа являются таблицы Рэнкля (*Smithson. Contr. Knowledge*, 9, Appendix, 1856) и Брауна и Браузера (*Trans. Astron. Obs. Yale Univ.*, 6, 5, 69—157, 1932). Рэнкл дает также производные по α .

ВЕКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

1. Введение. В предыдущих главах мы видели, что в тех случаях, когда возмущенные координаты планеты разлагаются общепринятым способом по степеням возмущающих масс, выражения первого порядка для координат содержат несколько смешанных вековых членов, т. е. периодических членов, умноженных на время, вида $kt \cos \theta$, $kt \sin \theta$.

Кроме того, если используется метод вариации произвольных постоянных, то выражения первого порядка для элементов орбиты, за исключением большой полуоси, содержат члены, пропорциональные времени. Если разложения проведены до членов второго порядка, то появляются члены, умноженные на квадрат времени. Эта прогрессия продолжается неограниченно, так как с каждым последовательным приближением появляется более высокая степень времени.

Появление такого рода вековых и смешанных вековых членов не вызвано каким-либо особым свойством, присущим уравнениям движения, а представляет собой следствие принятого метода интегрирования. В теории движения спутника значения движений перигея и узла вводятся с самого начала процесса интегрирования и исправляются при последовательных приближениях. При таком способе вычислений мы не допускаем появления времени в коэффициентах периодических членов. В теории движения планет положение является гораздо более сложным. Кроме того, те выражения, которые понадобились бы для представления решения в форме, напоминающей решение основной задачи в теории движения Луны, оказались бы очень громоздкими из-за медленной сходимости разложения в ряд возмущающей функции по степеням отношений больших осей.

Присутствие времени в коэффициентах возмущений при изучении движения планет не препятствует построению планетных теорий, годных в течение многих столетий, хотя такое представление движений и непригодно для бесконечно большого промежутка времени. Тот факт, что эта общепринятая форма имеет практическое значение в теории движения планет, тогда как она была бы совершенно непригодной в теории движения Луны, объясняется тем, что вековые изменения элементов планетных орбит примерно в тысячу раз медленнее вековых изменений элементов орбиты Луны.

Тем не менее представляется возможным изучить некоторые характерные особенности планетных орбит в отдаленном прошлом и будущем, упрощая эту задачу коренным образом. Такой метод впервые был разработан Лагранжем.

2. Вековая часть возмущающей функции. Применение метода Лагранжа для определения вековых возмущений требует, чтобы возмущающая функция была ограничена своей вековой частью, т. е. чтобы все периодические члены, которые в своих аргументах содержат средние долготы (или средние аномалии) планет, были отброшены. Кроме того, решение в первом приближении ограничивается включением тех членов вековой части, которые имеют второй порядок относительно эксцентрикитетов и наклонностей.

Упрощающая особенность заключается в том, что непрямой член возмущающей функции не содержит вековых членов. Чтобы доказать это, рассмотрим взаимные возмущения двух планет с массами m_1, m_2 и гелиоцентрическими координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Непрямой член возмущающей функции в уравнениях движения планеты m_1 имеет вид

$$R_{1i} = -k^2 m_2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3}.$$

Если в этом соотношении координаты планеты m_2 выражены через среднюю аномалию l_2 и постоянные интегрирования, то они будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{k^2 (m_0 + m_2) x_2}{r_2^3} = -\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -n_2^2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial l_2^2}$$

с аналогичным соотношением для y_2 и z_2 . Поэтому

$$\begin{aligned} R_{1i} &= \frac{m_2 n_2^2}{m_0 + m_2} \left(x_1 \frac{\partial^2 x_2}{\partial l_2^2} + y_1 \frac{\partial^2 y_2}{\partial l_2^2} + z_1 \frac{\partial^2 z_2}{\partial l_2^2} \right) = \\ &= \frac{m_2 n_2}{m_0 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial l_2^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2). \end{aligned}$$

Теперь выражение $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$ можно разложить в двойной ряд Фурье по средним аномалиям l_1, l_2 . После дифференцирования по l_2 остаются только члены, содержащие в аргументах l_2 . Таким образом, непрямой член возмущающей функции не может содержать каких-либо вековых членов.

Поэтому мы можем ограничиться при разложении возмущающей функции разложением вековой части обратной величины взаимного расстояния между двумя планетами. Полагая $a = a_1/a_2 < 1$, мы можем написать с точностью до членов второго порядка относительно эксцентрикитетов и взаимной наклонности следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{\Delta_{12}} &= \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)} + \frac{1}{4} (e_1^2 + e_2^2) \left[a \frac{db_{1/2}^{(0)}}{da} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{da^2} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} ab_{3/2}^{(1)} \sin^2 \frac{1}{2} \gamma + \\ &\quad + \frac{1}{2} e_1 e_2 \cos (\Pi_1 - \Pi_2) \left[b_{1/2}^{(1)} - a \frac{db_{1/2}^{(1)}}{da} - \frac{1}{2} a^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{da^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

в котором использованы обозначения гл. XV.

Если $i_1, i_2, \theta_1, \theta_2$ — наклонности и узлы, отнесенные к произвольной неподвижной системе отсчета, то

$$\cos \gamma = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos (\theta_1 - \theta_2),$$

откуда с точностью до членов второго порядка имеем

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma = \operatorname{tg}^2 i_1 + \operatorname{tg}^2 i_2 - 2 \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} i_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Согласно формулам гл. XV, имеем также

$$\alpha \frac{db_{1/2}^{(0)}}{da} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(0)}}{da^2} = \frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(1)},$$

$$b_{1/2}^{(1)} - \alpha \frac{db_{1/2}^{(1)}}{da} - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^{(1)}}{da^2} = -\frac{1}{2} \alpha b_{3/2}^{(2)}.$$

Таким образом, если мы положим

$$a_2 N_{12} = \frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(1)}, \quad a_2 P_{12} = \frac{1}{8} \alpha b_{3/2}^{(2)},$$

то мы можем написать

$$\frac{1}{\Delta_{12}} = \frac{1}{2a_2} b_{1/2}^{(0)} + N_{12} [e_1^2 + e_2^2 - \operatorname{tg}^2 i_1 - \operatorname{tg}^2 i_2 + 2 \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} i_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - 2P_{12} e_1 e_2 \cos(\Pi_1 - \Pi_2). \quad (2)$$

Поскольку эксцентриситеты и наклонности в отдаленные эпохи могут обратиться (и в некоторых случаях действительно обращаются) в нуль, так что перигелии и узлы становятся неопределенными, то в это выражение лучше подставить

$$\begin{aligned} h_1 &= e_1 \sin \Pi_1, & p_1 &= \operatorname{tg} i_1 \sin \theta_1, \\ k_1 &= e_1 \cos \Pi_1, & q_1 &= \operatorname{tg} i_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (3)$$

и соответствующие соотношения для второй планеты. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{12}} &= \frac{1}{2a_2} b_{1/2}^{(0)} + N_{12} [h_1^2 + k_1^2 + h_2^2 + k_2^2 - p_1^2 - q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 + \\ &\quad + 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)] - 2P_{12} (h_1 h_2 + k_1 k_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты N_{12} и P_{12} являются функциями от a_1 и a_2 степени -1 .

Уравнения (21) гл. XI показывают, что $da/dt = 0$, если возмущающая функция ограничена своей вековой частью. Если отбрасываются степени e и $\operatorname{tg} i$ выше второй, то уравнения (24) и (25) указанной главы можно применить в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= +\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial k_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= +\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial q_1}, \\ \frac{dk_1}{dt} &= -\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial h_1}, & \frac{dq_1}{dt} &= -\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial p_1}, \\ \frac{dh_2}{dt} &= +\frac{1}{n_2 a_2^2} \frac{\partial R_2}{\partial k_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= +\frac{1}{n_2 a_2^2} \frac{\partial R_2}{\partial q_2}, \\ \frac{dk_2}{dt} &= -\frac{1}{n_2 a_2^2} \frac{\partial R_2}{\partial h_2}, & \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{1}{n_2 a_2^2} \frac{\partial R_2}{\partial p_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

а интегрирование уравнений для e_1 , e_2 можно отложить до тех пор, пока не будут проинтегрированы уравнения (5). Для этих последних уравнений можно отбросить первый член выражения (4), так как он зависит только от a_1 , a_2 . Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} R_1 &= fm_2 [N_{12}(h_1^2 + h_2^2 + k_1^2 + k_2^2) - 2P_{12}(h_1 h_2 + k_1 k_2)] + \\ &\quad + fm_2 N_{12} (-p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 - q_2^2 + 2p_1 p_2 + 2q_1 q_2) \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$R_2 = \frac{m_1}{m_2} R_1.$$

В этих выражениях символом f обозначена постоянная k^2 , для того чтобы избежать путаницы с переменной k .

Форма выражения (6) показывает, что уравнения (5) распадаются на две независимые системы — одну систему для переменных h, k и одну систему для переменных p, q . Это разделение на две системы является следствием ограничения R_1, R_2 членами второй степени относительно этих переменных. При более полном разложении R , включающем члены четвертой степени, такое разделение переменных было бы невозможно.

3. Решение для двух планет. При помощи выражений (6) уравнения (5) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{dh_1}{dt} = + (1, 1) k_1 - [1, 2] k_2, \quad (7)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = - [2, 1] k_1 + (2, 2) k_2,$$

$$\frac{dk_1}{dt} = - (1, 1) h_1 + [1, 2] h_2,$$

$$\frac{dk_2}{dt} = + [2, 1] h_1 - (2, 2) h_2,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = - (1, 1) q_1 + (1, 2) q_2,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = + (2, 1) q_1 - (2, 2) q_2,$$

$$\frac{dq_1}{dt} = + (1, 1) p_1 - (1, 2) p_2,$$

$$\frac{dq_2}{dt} = - (2, 1) p_1 + (2, 2) p_2,$$

где

$$(1, 1) = \frac{2fm_2N_{12}}{n_1a_1^2}, \quad [2, 1] = \frac{2fm_1P_{21}}{n_2a_2^2},$$

$$[1, 2] = \frac{2fm_2P_{12}}{n_1a_1^2}, \quad (2, 2) = \frac{2fm_1N_{21}}{n_2a_2^2},$$

$$(1, 2) = \frac{2fm_2N_{12}}{n_1a_1^2}, \quad (2, 1) = \frac{2fm_1N_{21}}{n_2a_2^2}$$

и $N_{12} = N_{21}$, $P_{12} = P_{21}$.

Эти уравнения представляют собой две системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые могут быть проинтегрированы при помощи известного метода введения показательных функций в качестве частных решений. Однако выгодно сделать преобразование переменных, чтобы привести определитель из коэффициентов к симметричному виду.

Пусть

$$H_1 = \psi_1 h_1, \quad K_1 = \psi_1 k_1, \quad P_1 = \psi_1 p_1, \quad Q_1 = \psi_1 q_1,$$

$$H_2 = \psi_2 h_2, \quad K_2 = \psi_2 k_2, \quad P_2 = \psi_2 p_2, \quad Q_2 = \psi_2 q_2.$$

Тогда уравнения в переменных H и P принимают следующий вид:

$$\frac{dH_1}{dt} = + (1, 1) K_1 - \frac{\psi_1}{\psi_2} [1, 2] K_2, \quad (9)$$

$$\frac{dH_2}{dt} = - \frac{\psi_2}{\psi_1} [2, 1] K_1 + (2, 2) K_2,$$

$$\frac{dP_1}{dt} = - (1, 1) Q_1 + \frac{\psi_1}{\psi_2} (1, 2) Q_2,$$

$$\frac{dP_2}{dt} = + \frac{\psi_2}{\psi_1} (2, 1) Q_1 - (2, 2) Q_2. \quad (10)$$

Уравнения для переменных K и Q могут быть написаны путем замены K на $-H$, Q на $-P$ в правых частях, H на K , P на Q в левых частях.

Чтобы получить симметричные определители, мы должны подчинить ψ_1 , ψ_2 следующим условиям:

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} [2, 1] = \frac{\psi_1}{\psi_2} [1, 2],$$

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} (2, 1) = \frac{\psi_1}{\psi_2} (1, 2),$$

или

$$\left(\frac{\psi_2}{\psi_1} \right)^2 = \frac{[1, 2]}{[2, 1]} = \frac{(1, 2)}{(2, 1)} = \frac{m_2 n_2 a_2^2}{m_1 n_1 a_1^2}.$$

Поэтому

$$\psi_1 = (m_1 n_1)^{1/2} a_1, \quad \psi_2 = (m_2 n_2)^{1/2} a_2 \quad (11)$$

удовлетворяют этим требованиям.

Положим затем

$$\begin{aligned} (1, 1) &= A_{11} = \frac{2fN_{12}}{a_1^2} \frac{m_2}{n_1}, \\ (2, 2) &= A_{22} = \frac{2fN_{12}}{a_2^2} \frac{m_1}{n_2}, \\ -\frac{\psi_1}{\psi_2} [1, 2] &= A_{12}, \\ -\frac{\psi_2}{\psi_1} [2, 1] &= A_{21} \end{aligned} \left. \right\} = -\frac{2fP_{12}}{a_1 a_2} \left(\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} \right)^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1}{\psi_2} (1, 2) &= B_{12}, \\ \frac{\psi_2}{\psi_1} (2, 1) &= B_{21} \end{aligned} \left. \right\} = +\frac{2fN_{12}}{a_1 a_2} \left(\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} \right)^{1/2},$$

$$B_{11} = -A_{11}, \quad B_{22} = -A_{22}.$$

После этих подстановок уравнения для H и K принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= A_{11} K_1 + A_{12} K_2, & \frac{dK_1}{dt} &= -A_{11} H_1 - A_{12} H_2, \\ \frac{dH_2}{dt} &= A_{21} K_1 + A_{22} K_2, & \frac{dK_2}{dt} &= -A_{21} H_1 - A_{22} H_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть частное решение этих уравнений будет

$$H_1 = M_1 \sin(gt + \beta), \quad K_1 = M_1 \cos(gt + \beta),$$

$$H_2 = M_2 \sin(gt + \beta), \quad K_2 = M_2 \cos(gt + \beta).$$

Подстановка в уравнения для H или в уравнения для K дает

$$\begin{aligned} (A_{11} - g)M_1 + A_{12}M_2 &= 0, \\ A_{21}M_1 + (A_{22} - g)M_2 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие разрешимости получается приравниванием нулю определителя, составленного из коэффициентов, что дает

$$g^2 - (A_{11} + A_{22})g + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0. \quad (14)$$

Это уравнение имеет два действительных корня g_1, g_2 , которые положительны и различны в силу свойств коэффициентов Лапласа.

Поэтому полным решением будет

$$\begin{aligned} \psi_1 h_1 &= H_1 = M_1^{(1)} \sin(g_1 t + \beta_1) + M_1^{(2)} \sin(g_2 t + \beta_2), \\ \psi_1 k_1 &= K_1 = M_1^{(1)} \cos(g_1 t + \beta_1) + M_1^{(2)} \cos(g_2 t + \beta_2), \\ \psi_2 h_2 &= H_2 = M_2^{(1)} \sin(g_1 t + \beta_1) + M_2^{(2)} \sin(g_2 t + \beta_2), \\ \psi_2 k_2 &= K_2 = M_2^{(1)} \cos(g_1 t + \beta_1) + M_2^{(2)} \cos(g_2 t + \beta_2), \end{aligned} \quad (15)$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{M_2^{(1)}}{M_1^{(1)}} &= \frac{A_{11} - g_1}{-A_{12}} = \frac{-A_{21}}{A_{22} - g_1}, \\ \frac{M_2^{(2)}}{M_1^{(2)}} &= \frac{A_{11} - g_2}{-A_{12}} = \frac{-A_{21}}{A_{22} - g_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Постоянными интегрирования являются β_1, β_2 и, например, $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}$. В таком случае значения $M_2^{(1)}, M_2^{(2)}$ определяются отношениями (16).

Уравнения для P и Q имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= +B_{11}Q_1 + B_{12}Q_2, & \frac{dQ_1}{dt} &= -B_{11}P_1 - B_{12}P_2, \\ \frac{dP_2}{dt} &= +B_{21}Q_1 + B_{22}Q_2, & \frac{dQ_2}{dt} &= -B_{21}P_1 - B_{22}P_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть частным решением будет

$$\begin{aligned} P_1 &= L_1 \sin(ft + \gamma), & Q_1 &= L_1 \cos(ft + \gamma), \\ P_2 &= L_2 \sin(ft + \gamma), & Q_2 &= L_2 \cos(ft + \gamma). \end{aligned}$$

Подстановка в уравнения для переменных P или в уравнения для Q дает

$$\begin{aligned} (B_{11} - f)L_1 + B_{12}L_2 &= 0, \\ B_{21}L_1 + (B_{22} - f)L_2 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$f^2 - (B_{11} + B_{22})f + B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = 0.$$

Но

$$B_{11}B_{22} = \frac{4f^2 m_1 m_2 N_{12}^2}{n_1 n_2 a_1^2 a_2^2} = B_{12}^2;$$

следовательно, это уравнение сводится к следующему:

$$f[f - (B_{11} + B_{22})] = 0. \quad (19)$$

Поэтому один из корней равен нулю, а второй отрицателен, так как B_{11} и B_{22} оба отрицательны.

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1 p_1 &= P_1 = L_1^{(1)} \sin \gamma_1 + L_1^{(2)} \sin (f_2 t + \gamma_2), \\ \psi_1 q_1 &= Q_1 = L_1^{(1)} \cos \gamma_1 + L_1^{(2)} \cos (f_2 t + \gamma_2), \\ \psi_2 p_2 &= P_2 = L_2^{(1)} \sin \gamma_1 + L_2^{(2)} \sin (f_2 t + \gamma_2), \\ \psi_2 q_2 &= Q_2 = L_2^{(1)} \cos \gamma_1 + L_2^{(2)} \cos (f_2 t + \gamma_2),\end{aligned}\quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}\frac{L_2^{(1)}}{L_1^{(1)}} &= \frac{-B_{11}}{B_{12}} = \frac{B_{21}}{-B_{22}}, \\ \frac{L_2^{(2)}}{L_1^{(2)}} &= \frac{B_{11} - f_2}{-B_{12}} = \frac{-B_{21}}{B_{22} - f_2}.\end{aligned}\quad (21)$$

Тот факт, что один корень этих уравнений равен нулю, находит динамическое объяснение в том, что возможно решение, при котором плоскости орбит этих двух планет совпадают. В этом случае наклонности и долготы восходящих узлов орбит двух планет одинаковы и не зависят от времени. Поэтому

$$\psi_1^{-1} L_1^{(1)} = \psi_2^{-1} L_2^{(1)},$$

или, что равносильно тому же,

$$L_1 = \psi_1, \quad L_2 = \psi_2$$

должны быть решением уравнений (18) для $f = 0$, что легко проверить.

Постоянными интегрирования в решении относительно величин p и q являются γ_1 , γ_2 и $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$. Значения $L_2^{(1)}$, $L_2^{(2)}$ в таком случае получаются при помощи отношений (21).

4. Обобщение решения на любое число планет. Решение, полученное для системы, которая состоит из Солнца и двух планет, легко может быть обобщено на систему, состоящую из Солнца и произвольного числа планет.

Если число планет равно n , то число взаимных расстояний будет равно $\frac{1}{2} n(n-1)$. Обратные величины этих расстояний имеют разложение следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta_{sr}} &= \frac{1}{2a_r} b_{1/2}^{(0)} + N_{sr} [h_s^2 + k_s^2 + h_r^2 + k_r^2 - p_s^2 - q_s^2 - p_r^2 - q_r^2 + \\ &\quad + 2(p_s p_r + q_s q_r)] - 2P_{sr}(h_s h_r + k_s k_r),\end{aligned}$$

где предполагается, что $a = a_s/a_r < 1$.

Уравнения примут вид

$$\frac{dh_s}{dt} = (s, s)k_s - \sum_r [s, r]k_r, \quad (22)$$

$$\frac{dk_s}{dt} = -(s, s)h_s + \sum_r [s, r]h_r,$$

$$\frac{dp_s}{dt} = -(s, s)q_s + \sum_r (s, r)q_r,$$

$$\frac{dq_s}{dt} = (s, s)p_s - \sum_r (s, r)p_r, \quad (23)$$

где

$$(s, s) = \sum_r \frac{2f m_r}{n_s a_s^2} N_{sr},$$

$$(s, r) = \frac{2f m_r}{n_s a_s^2} N_{sr},$$

$$[s, r] = \frac{2f m_r}{n_s a_s^2} P_{sr},$$

причем все суммирования выполняются по r , $1 \leq r \leq n$, за исключением $r = s$.

Интересно отметить, что в общем решении взаимная наклонность остается постоянной. Это следует из соотношения

$$\begin{aligned} 4 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma &= p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2 - 2(p_1 p_2 + q_1 q_2) = \\ &= \frac{1}{\psi_1^2} (P_1^2 + Q_1^2) + \frac{1}{\psi_2^2} (P_2^2 + Q_2^2) - \frac{2}{\psi_1 \psi_2} (P_1 P_2 + Q_1 Q_2) = \\ &= \left[\frac{L_1^{(2)}}{\psi_1} - \frac{L_2^{(2)}}{\psi_2} \right]^2, \end{aligned}$$

т. е. равно постоянной величине.

Из этого выражения для $\sin^2 \frac{1}{2} \gamma$ мы делаем вывод, что решение, в котором $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}$ равны нулю, требует, чтобы $\gamma = 0$. Это подтверждает заключения, сделанные выше, а именно: корень $f = 0$ означает, что совпадение плоскостей орбит двух планет представляет возможное решение уравнений.

Если

$$\begin{aligned} \psi_r &= (m_r n_r)^{1/2} a_r, \\ H_r &= \psi_r h_r, \quad K_r = \psi_r k_r, \quad A_{ss} = (s, s), \\ P_r &= \psi_r p_r, \quad Q_r = \psi_r q_r, \quad B_{ss} = -(s, s), \\ A_{sr} &= A_{rs} = -\frac{2f P_{sr}}{a_s a_r} \left(\frac{m_s m_r}{n_s n_r} \right)^{1/2}, \\ B_{sr} &= B_{rs} = +\frac{2f N_{sr}}{a_s a_r} \left(\frac{m_s m_r}{n_s n_r} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

то уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dH_s}{dt} &= A_{ss} K_s + A_{sr} K_r, \\ \frac{dK_s}{dt} &= -A_{ss} H_s - A_{sr} H_r, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_s}{dt} &= B_{ss} Q_s + B_{sr} Q_r, \\ \frac{dQ_s}{dt} &= -B_{ss} P_s - B_{sr} P_r, \end{aligned} \tag{25}$$

$$s = 1, \dots, n,$$

$$r = 1, \dots, n, r \neq s.$$

Коэффициенты можно также написать в следующем виде:

$$A_{ss} = -B_{ss} = \sum \frac{2f m_s m_r}{\psi_s^2} N_{sr},$$

$$A_{sr} = -\frac{2im_s m_r}{\psi_s \psi_r} P_{sr},$$

$$B_{sr} = +\frac{2im_s m_r}{\psi_s \psi_r} N_{sr}.$$

Из этих соотношений легко видеть, что

$$B_{ss}\psi_s + \sum_r B_{sr}\psi_r = 0. \quad (26)$$

Как и ранее, член с $s=r$ должен быть исключен из каждого суммирования.

Частным решением для переменных P, K является

$$H_s = M_s \sin(gt + \beta), \quad K_s = M_s \cos(gt + \beta),$$

что приводит к следующему характеристическому уравнению относительно g :

$$A(g) \equiv \begin{vmatrix} A_{11} - g & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - g & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - g \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Для переменных P, Q частное решение имеет вид

$$P_s = L_s \sin(ft + \gamma), \quad Q_s = L_s \cos(ft + \gamma)$$

со следующим характеристическим уравнением:

$$B(f) \equiv \begin{vmatrix} B_{11} - f & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} - f & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} - f \end{vmatrix} = 0. \quad (28)$$

Оба определителя симметричны; в определителе $A(g)$ постоянные части элементов, расположенных по главной диагонали, положительны, а элементы, лежащие вне главной диагонали, отрицательны. В определителе $B(f)$ постоянные части элементов по главной диагонали отрицательны, а элементы, расположенные вне главной диагонали, положительны.

Характеристическое уравнение $B(f) = 0$ имеет корень $f = 0$. Из соотношений (26) легко видеть, что при $f = 0$ $L_s = \psi_s$ является решением этих уравнений. Динамическая причина этого нулевого корня та же, что и в случае двух планет.

Сильвестер показал, что независимо от значений $A_{ss}, A_{sr}, B_{ss}, B_{sr}$ все корни характеристических уравнений $A(g) = 0, B(f) = 0$ действительны.

Для случая двух планет непосредственно очевидно, что эти корни должны быть действительными и различными, поскольку

$$(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2 > 0.$$

Для общего случая доказательства нет. Однако для восьми больших планет солнечной системы от Меркурия до Нептуна оказывается, что

все корни g положительны и различны, а все корни f , за исключением нулевого корня, отрицательны и различны.

Поэтому общее решение для этих восьми планет имеет следующий вид:

$$a_s h_s \sqrt{m_s n_s} = H_s = \sum_{j=1}^8 M_s^{(j)} \sin(g_j t + \beta_j), \quad (29)$$

$$a_s k_s \sqrt{m_s n_s} = K_s = \sum_{j=1}^8 M_s^{(j)} \cos(g_j t + \beta_j),$$

$$a_s p_s \sqrt{m_s n_s} = P_s = L_s^{(1)} \sin \gamma_1 + \sum_{j=2}^8 L_s^{(j)} \cos(f_j t + \gamma_j), \quad (30)$$

$$a_s q_s \sqrt{m_s n_s} = Q_s = L_s^{(1)} \cos \gamma_1 + \sum_{j=2}^8 L_s^{(j)} \cos(f_j t + \gamma_j),$$

$$s = 1, \dots, 8.$$

Постоянными интегрирования являются постоянные фазы β_j , γ_j и коэффициенты $M_s^{(j)}$, $L_s^{(j)}$, $j = 1, \dots, 8$, для какого-нибудь одного значения s . Отношения $M_r^{(j)}/M_s^{(j)}$, $L_r^{(j)}/L_s^{(j)}$ получаются как отношения соответствующих миноров каждого из определителей $A(g_j)$, $B(f_j)$.

Очевидно, что систему отсчета можно выбрать таким образом, чтобы было $L_s^{(1)} = 0$ для всех значений s , поскольку при $f_1 = 0$ частным решением является

$$L_s^{(1)} = C \psi_s,$$

где C — произвольная постоянная, и если C положить равной нулю, то $L_s^{(1)}$ обратится в нуль.

5. Определение постоянных интегрирования. При $t = 0$ выражения (29) принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^8 M_1^{(j)} \sin \beta_j &= h_1 \psi_1, & \sum_{j=1}^8 M_1^{(j)} \cos \beta_j &= k_1 \psi_1, \\ \sum_{j=1}^8 M_2^{(j)} \sin \beta_j &= h_2 \psi_2, & \sum_{j=1}^8 M_2^{(j)} \cos \beta_j &= k_2 \psi_2, \\ \dots &\dots & \dots &\dots \\ \sum_{j=1}^8 M_8^{(j)} \sin \beta_j &= h_8 \psi_8, & \sum_{j=1}^8 M_8^{(j)} \cos \beta_j &= k_8 \psi_8. \end{aligned} \quad (31)$$

Правые части этих уравнений выражены через значения элементов орбит для $t = 0$; левые части содержат шестнадцать постоянных интегрирования β_1, \dots, β_8 и, например, $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \dots, M_1^{(8)}$. Отношения

$$\frac{M_2^{(1)}}{M_1^{(1)}}, \frac{M_3^{(1)}}{M_1^{(1)}}, \dots, \frac{M_8^{(1)}}{M_1^{(1)}}$$

получаются как отношения соответствующих миноров определителя (27) при $g = g_1$; отношения

$$\frac{M_2^{(2)}}{M_1^{(2)}}, \frac{M_3^{(2)}}{M_1^{(2)}}, \dots, \frac{M_8^{(2)}}{M_1^{(2)}}$$

получаются по этим минорам при $g = g_2$ и т. п. Поэтому эти отношения можно считать известными.

Подстановка g_1 и g_2 последовательно в первое из линейных уравнений, имеющих определителем (27), дает для общего случая n планет

$$(A_{11} - g_1) M_1^{(1)} + A_{12} M_2^{(1)} + \dots + A_{1n} M_n^{(1)} = 0,$$

$$(A_{11} - g_2) M_1^{(2)} + A_{12} M_2^{(2)} + \dots + A_{1n} M_n^{(2)} = 0,$$

откуда путем исключения A_{11} находим

$$(g_2 - g_1) M_1^{(1)} M_1^{(2)} = A_{12} (M_2^{(1)} M_1^{(1)} - M_1^{(1)} M_2^{(2)}) + A_{13} (M_3^{(1)} M_1^{(1)} - M_3^{(1)} M_1^{(2)}) + \dots + A_{1n} (M_n^{(1)} M_1^{(1)} - M_n^{(1)} M_1^{(2)}).$$

Второе из этих уравнений дает

$$(g_2 - g_1) M_2^{(1)} M_2^{(2)} = A_{21} (M_1^{(2)} M_2^{(1)} - M_1^{(1)} M_2^{(2)}) + A_{23} (M_3^{(2)} M_2^{(1)} - M_3^{(1)} M_2^{(2)}) + \dots + A_{2n} (M_n^{(2)} M_2^{(1)} - M_n^{(1)} M_2^{(2)}).$$

Этот процесс можно продолжить для всех n уравнений. Если все эти соотношения сложить, то правая часть суммы обращается в нуль и сумма принимает следующий вид:

$$(g_2 - g_1) [M_1^{(1)} M_1^{(2)} + M_2^{(1)} M_2^{(2)} + \dots + M_n^{(1)} M_n^{(2)}] = 0.$$

При допущении, что не существует попарно равных корней, необходимо, чтобы

$$M_1^{(1)} M_1^{(2)} + M_2^{(1)} M_2^{(2)} + \dots + M_n^{(1)} M_n^{(2)} = 0,$$

или вообще

$$M_1^{(r)} M_1^{(s)} + M_2^{(r)} M_2^{(s)} + \dots + M_n^{(r)} M_n^{(s)} = 0. \quad (32)$$

Теперь можно использовать это свойство, чтобы разрешить уравнения (31) относительно $M_1^{(j)} \sin \beta_j$, $M_1^{(j)} \cos \beta_j$. Умножая эти уравнения соответственно на $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$, \dots , $M_8^{(r)}$ и складывая произведения, получаем

$$[M_1^{(r)1} + M_2^{(r)1} + \dots + M_8^{(r)1}] \sin \beta_r = M_1^{(r)} h_1 \psi_1 + M_2^{(r)} h_2 \psi_2 + \dots + M_8^{(r)} h_8 \psi_8,$$

$$[M_1^{(r)2} + M_2^{(r)2} + \dots + M_8^{(r)2}] \cos \beta_r = M_1^{(r)} k_1 \psi_1 + M_2^{(r)} k_2 \psi_2 + \dots + M_8^{(r)} k_8 \psi_8.$$

Отсюда находим

$$M_1^{(r)} \sin \beta_r = \frac{h_1 \psi_1 + \frac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}} h_2 \psi_2 + \dots + \frac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}} h_8 \psi_8}{1 + \left(\frac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}} \right)^2 + \left(\frac{M_3^{(r)}}{M_1^{(r)}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}} \right)^2}, \quad (33)$$

$$M_1^{(r)} \cos \beta_r = \frac{k_1 \psi_1 + \frac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}} k_2 \psi_2 + \dots + \frac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}} k_8 \psi_8}{1 + \left(\frac{M_2^{(r)}}{M_1^{(r)}} \right)^2 + \left(\frac{M_3^{(r)}}{M_1^{(r)}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{M_8^{(r)}}{M_1^{(r)}} \right)^2}. \quad (34)$$

Но все отношения $M_i^{(r)}/M_1^{(r)}$, которые входят в эти выражения, известны; следовательно, величины $M_1^{(r)}$, β_r могут быть получены последовательно для $r = 1, \dots, 8$. Совершенно аналогичные выражения можно написать для $L_1^{(r)} \sin \gamma_r$, $L_1^{(r)} \cos \gamma_r$.

6. Метод Якоби решения характеристических уравнений. Решение характеристических уравнений и вычисление миноров для

отдельных корней представляет сложную вычислительную задачу. Метод, придуманный Якоби, имеет огромную практическую ценность.

Допустим, что в уравнения

$$\begin{aligned}(A_{11} - g)M_1 + A_{12}M_2 + \dots + A_{1n}M_n &= 0, \\ A_{21}M_1 + (A_{22} - g)M_2 + \dots + A_{2n}M_n &= 0, \\ \cdot &\cdot &\cdot &\cdot &\cdot &\cdot &\cdot &\cdot \\ A_{n1}M_1 + A_{n2}M_2 + \dots + (A_{nn} - g)M_n &= 0\end{aligned}$$

вводится преобразование

$$\begin{aligned}M_r &= M'_r \cos \varphi - M'_s \sin \varphi, \\ M_s &= M'_r \sin \varphi + M'_s \cos \varphi.\end{aligned}$$

Это дает для $j \neq r, j \neq s$

$$A_{jr}M_r + B_{js}M_s = (A_{jr} \cos \varphi + A_{js} \sin \varphi)M'_r + (-A_{jr} \sin \varphi + A_{js} \cos \varphi)M'_s$$

и

$$\begin{aligned}(A_{rr} - g)M_r + A_{rs}M_s &= [A_{rr} \cos \varphi + A_{rs} \sin \varphi - g \cos]M'_r + \\ &+ [-A_{rr} \sin \varphi + A_{rs} \cos \varphi + g \sin \varphi]M'_s,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{sr}M_r + (A_{ss} - g)M_s &= (A_{sr} \cos \varphi + A_{ss} \sin \varphi - g \sin \varphi)M'_r + \\ &+ (-A_{sr} \sin \varphi + A_{ss} \cos \varphi - g \cos \varphi)M'_s.\end{aligned}$$

Умножая последние два результата сначала на $\cos \varphi, \sin \varphi$ и складывая произведения, а затем умножая на $-\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ и снова складывая, получим

$$\begin{aligned}[A_{rr} \cos^2 \varphi + A_{ss} \sin^2 \varphi + 2A_{rs} \sin \varphi \cos \varphi - g]M'_r + \\ + [-(A_{rr} - A_{ss}) \sin \varphi \cos \varphi + A_{rs}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]M'_s\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}[-(A_{rr} - A_{ss}) \sin \varphi \cos \varphi + A_{rs}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]M'_r + \\ + [A_{rr} \sin^2 \varphi + A_{ss} \cos^2 \varphi - 2A_{rs} \sin \varphi \cos \varphi - g]M'_s.\end{aligned}$$

Если φ определяется уравнением

$$-\frac{1}{2}(A_{rr} - A_{ss}) \sin 2\varphi + A_{rs} \cos 2\varphi = 0$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2A_{rs}}{A_{rr} - A_{ss}},$$

то коэффициенты при M'_r и M'_s в этих преобразованных уравнениях становятся равными нулю. Это преобразование дает новый определитель, в котором новые элементы A'_{rs}, A'_{sr} , расположенные вне диагонали, обращаются в нуль. Это преобразование действует только на элементы, расположенные в столбцах и строках r и s .

Для решения характеристических уравнений (27) и (28) это преобразование выбрано так, что оно обращает в нуль численно наибольший элемент, расположенный вне главной диагонали. При втором преобразо-

зовании наибольший по численному значению элемент, лежащий вне главной диагонали нового определителя, выбирается для аналогичного преобразования. Такая последовательность преобразований выполняется до тех пор, пока все элементы, расположенные вне главной диагонали, не станут по своему численному значению меньше заранее указанного предела.

Идеальной целью, которая потребовала бы бесконечного числа преобразований, явилось бы получение в конце концов определителя, в котором элементы, расположенные вне главной диагонали, все были равны нулю. В этом случае характеристическое уравнение свелось бы к n отдельным линейным уравнениям (если нет равных корней) следующего вида:

$$A_{11}^* - g_1 = 0,$$

$$A_{22}^* - g_2 = 0,$$

.

$$A_{nn}^* - g_n = 0.$$

Полное преобразование равносильно нахождению некоторого ортогонального преобразования

$$\begin{aligned} H_s &= \sum_j c_{sj} H_j^*, \\ K_s &= \sum_j c_{sj} K_j^*, \end{aligned} \tag{35}$$

с условием

$$\sum_j c_{sj}^2 = 1, \tag{36}$$

которое приводит исходные уравнения к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dh_s^*}{dt} &= A_{ss}^* k_s^*, \\ \frac{dk_s^*}{dt} &= -A_{ss}^* h_s^*. \end{aligned} \tag{37}$$

Это же относится к уравнениям для p и q с той лишь разницей, что один из коэффициентов B_{ii}^* , будет равен нулю, представляя нулевой корень характеристического уравнения (28).

В указанном методе вычисления вековых возмущений отбрасываются четвертые и более высокие степени эксцентриситетов и наклонностей, а также все члены возмущающей функции, кроме вековых, и в приложениях, выполненных до настоящего времени, не принимается во внимание существование Плутона. Из всех этих упрощений наиболее важным является, по-видимому, преображение эффектом второго порядка, обусловленным определенными периодическими членами в возмущающей функции, особенно теми членами, которые соответствуют большому неравенству в движении Юпитера и Сатурна. Хилл учел эти члены при вычислении взаимных вековых возмущений в эксцентриситетах и перигелиях Юпитера и Сатурна; он также включил главные влияния четвертых и шестых степеней эксцентриситетов.

Наиболее полным решением для всей солнечной системы является решение Брауэра и Вуркома, которые включили главные уточнения, введенные Хиллом. Значения g_j и f_j , полученные в этом решении, даны

в табл. 1. Значение g_6 было увеличено от $+23'',0858$ до $+27'',7741$ при помощи указанного выше уточнения; корни g_5 , g_7 и g_8 также изменены, но в гораздо меньшей степени. Кроме этих изменений, решение относительно вековых вариаций в h и k содержит теперь также малые члены с аргументами вида

$$(2g_5 - g_6)t + 2\beta_5 - \beta_6$$

и

$$(2g_6 - g_5)t + 2\beta_6 - \beta_5.$$

Планета Плутон не была включена в эти вычисления из-за трудности, состоящей в том, что орбиты Нептуна и Плутона могут пересечься, если допустить неограниченные изменения долгот перигелиев и узлов. В силу малости возмущений от Нептуна в движении планет, являющихся по отношению к нему нижними, представляется вероятным, что включение Плутона не изменило бы существенно решение для остальных планет.

Периодические члены, представляющие решение, имеют очень долгие периоды, примерно в пределах от 47 000 до 2 000 000 лет, а наибольший коэффициент при этих членах меньше, чем 0,2. Поскольку эти периоды несоизмеримы, то очевидно, что в пределах точности теории максимальное значение e или $\operatorname{tg} i$ для любой планеты равно сумме всех коэффициентов (взятых с положительным знаком) в ряде для h или p . (Коэффициенты в рядах для k и q соответственно тождественны коэффициентам рядов для h и p .) Очевидно также, что в том случае, когда один из коэффициентов численно больше суммы всех остальных, величинам e или $\operatorname{tg} i$ можно присвоить минимальное значение, равное разности между наибольшим коэффициентом и суммой всех остальных. В противном случае им нельзя присвоить никакого минимального значения, и в некоторый момент времени e или i могут обратиться в нуль, тогда как π или θ в этот же момент времени мгновенно изменяется на 180° . Этот последний случай действительно имеет место для эксцентриситетов Венеры и Земли.

С другой стороны, если один коэффициент больше суммы всех остальных, то перигелий (или узел) рассматриваемой планеты будет иметь среднее движение, равное изменению аргумента члена с наибольшим коэффициентом. Если это условие не выполняется, то среднему движению перигелия или узла нельзя дать подобную простую интерпретацию.

7. Вековые возмущения малых планет. Для тела с пренебрежимо малой массой, как, например, малая планета, уравнения для вековых возмущений будут теми же, что и уравнения (5). Если символы без нижних индексов относятся к элементам орбиты этого малого тела, то

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= +\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k}, & \frac{dp}{dt} &= +\frac{1}{na^4} \frac{\partial R}{\partial q}, \\ \frac{dk}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial p}\end{aligned}\tag{38}$$

Таблица 1

Годичные изменения аргументов

j	g_j	i_j
1	$+ 5'',4633$	$- 5,2015$
2	$+ 7 ,3447$	$- 6,5708$
3	$+ 17 ,3283$	$- 18,7436$
4	$+ 18 ,0023$	$- 17,6333$
5	$+ 4 ,2959$	$0,0000$
6	$+ 27 ,7741$	$- 25,7335$
7	$+ 2 ,7193$	$- 2,9027$
8	$+ 0 ,6333$	$- 0,6775$

при

$$R = \sum_j fm_j [N_j(h^2 + h_j^2 + k^2 + k_j^2) - 2P_j(hh_j + kk_j)] + \\ + \sum_j fm_j [N_j(-p^2 - p_j^2 - q^2 - q_j^2 + 2pp_j + 2qq_j)], \quad (39)$$

где суммирование распространяется на все большие планеты. Если ввести это выражение для R , то уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{dh}{dt} = + \frac{2}{na^2} (\sum fm_j N_j) k - \frac{2}{na^2} \sum fm_j P_j k_j, \quad (40)$$

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{2}{na^2} (\sum fm_j N_j) h + \frac{2}{na^2} \sum fm_j P_j h_j,$$

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{2}{na^2} (\sum fm_j N_j) q + \frac{2}{na^2} \sum fm_j N_j q_j,$$

$$\frac{dq}{dt} = + \frac{2}{na^2} (\sum fm_j N_j) p - \frac{2}{na^2} \sum fm_j N_j p_j. \quad (41)$$

Теперь h_j , k_j , p_j , q_j представляет собой известные функции от времени, определяемые выражениями (29), (30); коэффициенты N_j , P_j — функции от a , a_j — больших полуосей орбит возмущаемого тела с пренебрежимо малой массой и отдельных возмущающих планет. Эти коэффициенты могут быть табулированы как функции от a . Полагая

$$\frac{2}{na^2} \sum fm_j N_j = g,$$

что представляет собой положительную величину, мы можем написать эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{dh}{dt} = + gk - \sum v_j \cos(g_j t + \beta_j), \quad (42)$$

$$\frac{dk}{dt} = - gh + \sum v_j \sin(g_j t + \beta_j),$$

$$\frac{dp}{dt} = - gq + \sum \mu_j \cos(f_j t + \gamma_j), \quad (43)$$

$$\frac{dq}{dt} = + gp - \sum \mu_j \sin(f_j t + \gamma_j).$$

Как и раньше, величины g , v_j , μ_j можно табулировать как функции от a , тогда как g , f_j , β_j , γ_j — известные постоянные для вековых изменений элементов орбит больших планет.

Дифференцирование первого из уравнений (39) дает следующее уравнение:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = g \frac{dk}{dt} + \sum v_j g_j \sin(g_j t + \beta_j) = \\ = - g^2 h + \sum v_j (g + g_j) \sin(g_j t + \beta_j),$$

решением которого является

$$h = v \sin(gt + \beta) + \sum \frac{v_j}{g - g_j} \sin(g_j t + \beta_j), \quad (44)$$

$$k = v \cos(gt + \beta) + \sum \frac{v_j}{g - g_j} \cos(g_j t + \beta_j),$$

Аналогично уравнения для p и q дают следующее уравнение:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -g \frac{dq}{dt} - \sum \mu_j f_j \sin(f_j t + \gamma_j) = \\ = -g^2 p + \sum \mu_j (g - f_j) \sin(f_j t + \gamma_j),$$

решение которого имеет вид

$$p = \mu \sin(-gt + \gamma) + \sum \frac{\mu_j}{g + f_j} \sin(f_j t + \gamma_j), \\ q = \mu \cos(-gt + \gamma) + \sum \frac{\mu_j}{g + f_j} \cos(f_j t + \gamma_j). \quad (45)$$

В этих выражениях v , μ , β и γ — постоянные интегрирования. Величину v часто называют собственным эксцентриситетом, тогда как μ следовало бы называть собственной наклонностью (или тангенсом собственной наклонности). Запишем эти выражения в следующем виде:

$$h = v \sin(gt + \beta) + h_0, \\ k = v \cos(gt + \beta) + k_0, \quad (46)$$

$$p = \mu \sin(-gt + \gamma) + p_0, \\ q = \mu \cos(-gt + \gamma) + q_0. \quad (47)$$

Такая форма решения хорошо известна в задачах о малых колебаниях, которые возникают при различных приложениях методов теорети-

Таблица 2

Приведение к собственным элементам малых планет
(Уравнения (44), (45))

a	h_0	k_0	p_0	q_0
1,9	+0,04548	-0,00204	+0,13176	-0,08498
2,0	+0,21462	-0,12304	-0,05376	+0,05407
2,1	-0,06567	+0,07736	-0,00378	+0,01613
2,2	-0,02370	+0,04805	+0,00742	+0,00755
2,3	-0,01218	+0,04044	+0,01240	+0,00374
2,4	-0,00683	+0,03713	+0,01517	+0,00162
2,5	-0,00406	+0,03504	+0,01691	+0,00029
2,6	-0,00557	+0,03018	+0,01813	-0,00065
2,7	+0,00415	+0,03909	+0,01902	-0,00132
2,8	+0,00361	+0,03707	+0,01966	-0,00181
2,9	+0,00422	+0,03679	+0,02018	-0,00221
3,0	+0,00490	+0,03690	+0,02057	-0,00252
3,1	+0,00552	+0,03720	+0,02090	-0,00276
3,2	+0,00610	+0,03761	+0,02117	-0,00298
3,3	+0,00662	+0,03804	+0,02139	-0,00316
3,4	+0,00711	+0,03857	+0,02156	-0,00330
3,5	+0,00756	+0,03912	+0,02173	-0,00342
3,6	+0,00796	+0,03968	+0,02186	-0,00351
3,7	+0,00834	+0,04026	+0,02197	-0,00360
3,8	+0,00868	+0,04085	+0,02205	-0,00365
3,9	+0,00902	+0,04144	+0,02213	-0,00371
4,0	+0,00933	+0,04206	+0,02219	-0,00376
4,1	+0,00961	+0,04264	+0,02225	-0,00380
4,2	+0,00987	+0,04322	+0,02230	-0,00384

ческой механики. По терминологии теории малых колебаний члены, имеющие множителем v или μ , представляют свободные колебания, остальные члены составляют вынужденные колебания. Очевидно, что члены, имеющие множителем v или μ , отражают существенные динамические свойства решения, тогда как вынужденные колебания отражают влияния на движение извне. Поэтому ясно, что, образуя разности $h - h_0$, $k - k_0$, $p - p_0$, $q - q_0$, мы освобождаем «наблюденные» величины h , k , p , q от несущественных членов и получаем динамически важные свободные колебания.

Значения h_0 , k_0 , p_0 , q_0 могут быть табулированы для эпохи 1950, 0 и отнесены к эклиптике и равноденствию этой даты. Они приводятся в табл. 2 как функции от большой полуоси a . Трудности, обусловленные присутствием малых делителей, встречаются в окрестности $a = 2,03$ и $2,64$ для h_0 и k_0 и в окрестности 1,94 для p_0 и q_0 . Малый делитель при $a = 2,64$ порожден аргументом $(2g_6 - g_5)t + 2\beta_8 - \beta_5$, упомянутым в разд. 6.

Когда эта процедура доведена до конца, то оказывается, что большинство малых планет распадается на группы, причем члены каждой

Таблица 3

Семейство Корониды

Пла- нета	a	v	μ	$\beta + \gamma$
962	2,9046	0,0658	0,0338	0,538
1363	2,9032	0,0434	0,0338	0,496
1100	2,8988	0,0469	0,0372	0,618
311	2,8983	0,0441	0,0377	0,713
811	2,8965	0,0624	0,0392	0,190
1497	2,8956	0,0630	0,0379	0,633
1245	2,8931	0,0437	0,0422	0,458
208	2,8927	0,0470	0,0372	0,943
1029	2,8907	0,0613	0,0391	0,509
720	2,8878	0,0508	0,0361	0,505
263	2,8870	0,0412	0,0372	0,745
321	2,8861	0,0478	0,0379	0,383
277	2,8856	0,0523	0,0373	0,729
534	2,8846	0,0518	0,0379	0,562
1442	2,8763	0,0420	0,0372	0,611
1079	2,8736	0,0463	0,0364	0,173
1482	2,8727	0,0478	0,0349	0,806
462	2,8725	0,0518	0,0360	0,260
158	2,8701	0,0472	0,0375	0,977
1223	2,8695	0,0436	0,0372	0,291
1389	2,8654	0,0500	0,0377	0,046
832	2,8649	0,0452	0,0368	0,791
993	2,8643	0,0457	0,0362	0,942
761	2,8639	0,0457	0,0370	0,772
243	2,8611	0,0469	0,0363	0,172
1289	2,8609	0,0521	0,0364	0,385
1423	2,8605	0,0426	0,0371	0,191
1350	2,8585	0,0532	0,0395	0,513
658	2,8542	0,0451	0,0368	0,125
167	2,8540	0,0425	0,0366	0,706
452	2,8522	0,0541	0,0362	0,728
1336	2,8501	0,0501	0,0358	0,049
975	2,8436	0,0484	0,0379	0,429

группы обладают удивительно сходными собственными значениями ν и μ . Существование такого рода групп было установлено Хираймой, который назвал их семействами. Для иллюстрации этих семейств мы приводим в табл. 3 собственные элементы наиболее компактного из известных семейств — семейства астероида (158) Корониды, взятые из новой работы Брауэра. Угол $\beta + \gamma$ выражается в десятичных долях радиана.

Даже принимая во внимание несовершенство теории и неточность элементов, использованных при вычислениях, вряд ли можно сомневаться в том, что члены семейства Корониды физически связаны друг с другом и, вероятно, являются осколками того, что было некогда большим телом. Из различных механизмов, которые предлагались для объяснения разрушения такого тела, наиболее приемлемыми представляются взрыв, быстрое вращение, приливное разрушение и столкновение, причем факты склоняют в пользу столкновения. Некоторую дисперсию в элементах следует ожидать как следствие дисперсии в скорости и направлении отдельных осколков в момент разрушения.

Брауэр исследовал элементы 1537 малых планет и предварительно распределил 458 из них по 28 семействам и группам. Основная особенность групп, в отличие от семейств, определяется тем, что собственная долгота перигелия малой планеты, согласно теории, увеличивается с той же скоростью, с которой уменьшается собственная долгота узла. Следовательно, сумма этих двух углов не меняется. Замечательно то, что среди групп малых планет имеется несколько таких, в которых суммы углов $\beta + \gamma$ сильно концентрируются в окрестности определенной величины. С другой стороны, малые планеты, принадлежащие к семействам Хираймы, не обнаруживают подобной концентрации. Быть может, это просто проблема возраста, а именно: семейства старше, чем группы, которые обнаруживают эту концентрацию сумм углов $\beta + \gamma$.

Замечания. Литература

Метод, изложенный в этой главе, является достаточным для установления верхних пределов, а в большинстве случаев и нижних пределов для эксцентриситетов и наклонностей орбит больших планет, за исключением Плутона. Что же можно сказать о реальности этих результатов? По общему признанию, они являются только приближениями. Зная общий характер разложений, мы должны ожидать, что строгое решение задачи дало бы результаты, отличающиеся от приближенных значительно меньше, чем на 50%, однако математического доказательства этого утверждения не существует.

В случае больших осей орбит дело обстоит иначе. Лагранж в 1776 г. показал, что возмущения оскулирующих больших осей не содержат вековых членов первого порядка. Пуассон доказал в 1809 г., что в этих возмущениях отсутствуют чисто вековые члены второго порядка. Исследование возмущений порядка выше второго является крайне трудоемким. Из независимых последовательных исследований, проведенных Аретю, Эгинитисом и Меффру (все из Парижа), следует, что существуют вековые члены третьего порядка. Эти члены, хотя и очень малые, по своему существу означают постепенный распад солнечной системы. Однако это еще нельзя считать доказанным. Возможно, что эти члены могут взаимно уничтожиться с возмущениями еще более высоких порядков. Не были также учтены полностью эффекты общей теории относительности. Во всяком случае, будущее реально существующей системы зависит как от гравитационных сил, так частично и от сил негравитационного характера.

Пример вычисления вековых возмущений для орбит с большими эксцентриситетами можно найти в статье Брауэра (*Astron. J.*, 52, 190, 1947) о вековых изменениях элементов кометы Энке. Таблицы для облегчения подобных приложений составлены Хамидом (*Astron. J.*, 64, 142, 1959).

Г л а в а XVII

КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

1. Общие принципы. Говорят, что система дифференциальных уравнений является канонической, если она имеет следующий вид:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j}, \\ j = 1, \dots, n.$$

Функция F называется гамильтонианом этой системы. Порядок системы равен $2n$; эта система называется также системой с n степенями свободы.

Можно рассмотреть два различных случая:

1) F является функцией от $\xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n$; независимая переменная не входит явно в F . В этом случае

$$\frac{dF}{dt} = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \sum \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dt} = 0.$$

Следовательно, существует соотношение

$$F = \text{const},$$

являющееся интегралом этой системы.

2) F является функцией от $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n, t$. Тогда

$$\frac{dF}{dt} = \sum \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} + \sum \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

В таком случае можно написать

$$F = \int \frac{\partial F}{\partial t} dt + \text{const},$$

но это уже не будет интегралом. Интеграл $F = \text{const}$ не существует.

Простой прием дает возможность свести второй случай к первому. Для этого напишем ξ_{n+1} вместо t всюду, где бы оно ни встречалось в F . Поскольку

$$\frac{d\xi_{n+1}}{dt} = +1,$$

то уравнения можно написать в следующем виде:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial \xi_j}, \\ j = 1, \dots, n+1,$$

при условии, что

$$F^* = F + \eta_{n+1}$$

и

$$\frac{d\eta_{n+1}}{dt} = - \frac{\partial F^*}{\partial \xi_{n+1}} = - \frac{\partial F}{\partial \xi_{n+1}} = - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Эта новая система с гамильтонианом F^* имеет $n + 1$ степеней свободы, и существует интеграл

$$F^* = F + \eta_{n+1} = \text{const.} \quad (\text{A})$$

Очевидно, это то же самое, что и результат

$$F = \int \frac{\partial F}{\partial t} dt + \text{const}, \quad (\text{B})$$

полученный ранее для второго случая.

Поэтому можно свести второй случай к первому за счет увеличения числа степеней свободы на единицу. Следовательно, общность не уменьшится, если предположить, что независимая переменная t не входит явно в гамильтониан.

2. Канонические преобразования. Особая важность канонической формы дифференциальных уравнений при рассмотрении задач динамики заключается в том, что эта форма дает возможность установления общих правил, которым подчиняются преобразования от одной системы переменных к другой. При соблюдении этих правил сохраняется канонический вид уравнений, а при помощи целесообразного выбора преобразований первоначально поставленная задача может быть заменена более простой. Часто в связи с этим можно уменьшить число степеней свободы и в некоторых случаях достичь таким путем полного решения. Поэтому необходимо выяснить некоторые общие свойства преобразований, сохраняющих каноническую форму уравнений. Чтобы упростить обозначения, мы будем употреблять запись

$$f(\xi_j; \eta_j; t) \text{ вместо } f(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n, t).$$

Рассмотрим общий случай; заданные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, & \frac{d\eta_j}{dt} &= - \frac{\partial F}{\partial \xi_j}, \\ F &\equiv F(\xi_j; \eta_j; t), & j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть преобразование к новым переменным дано в следующем виде:

$$\xi_j = \xi_j(x_k; y_k; t), \quad \eta_j = \eta_j(x_k; y_k; t). \quad (2)$$

Речь идет о том, при каких условиях это преобразование будет каноническим, т. е. при каких условиях новые уравнения будут иметь вид

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial y_j}, \quad \frac{dy_j}{dt} = - \frac{\partial F^*}{\partial x_j},$$

где F^* является функцией от $x_j; y_j; t$ ($j = 1, \dots, n$).

Дифференцирование уравнений (2) дает

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} = + \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad (3a)$$

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \frac{\partial \eta_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial \xi_j}. \quad (3b)$$

$$(j = 1, \dots, n).$$

Пусть a означает какую-нибудь из новых переменных: $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n$. Умножим уравнения (3а) последовательно на $\partial \eta_j / \partial a$, а уравнения (3б) на $-\partial \xi_j / \partial a$ и сложим эти $2n$ произведений. В результате получим следующие выражения:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial t} \frac{\partial \eta_j}{\partial a} - \frac{\partial \xi_j}{\partial a} \frac{\partial \eta_j}{\partial t} \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial a} - \frac{\partial \xi_j}{\partial a} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right) \frac{dx_k}{dt} + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial a} - \frac{\partial \xi_j}{\partial a} \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} \right) \frac{dy_k}{dt} = + \frac{\partial F}{\partial a}.$$

При помощи скобок Лагранжа эти выражения могут быть написаны в следующем виде:

$$[t, a] + \sum_{k=1}^n [x_k, a] \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^n [y_k, a] \frac{dy_k}{dt} = + \frac{\partial F}{\partial a}.$$

Теперь, если удовлетворяются следующие условия:

$$[t, a] = 0, \quad (4)$$

$$[x_k, x_l] = 0, \quad [y_k, y_l] = 0, \quad [x_k, y_l] = 0, \quad (l \neq k), \quad (5)$$

$$[x_k, y_k] = +1,$$

то новые уравнения имеют вид

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = - \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad (6)$$

т. е. это преобразование является каноническим и гамильтониан F остается неизменным. Это, конечно, следует понимать в том смысле, что гамильтониан новых уравнений (6) получается путем выражения гамильтониана $F(\xi_j; \eta_j; t)$ уравнений (1) как функции от $x_j; y_j; t$ при помощи уравнений преобразования (2).

Условие (4), а именно $[t, a] = 0$, удовлетворяется, если уравнения преобразования не содержат времени.

3. Определитель Якоби. Допустим на время, что условия (4) и (5) удовлетворены. Возникает важный вопрос, являются ли новые переменные $x_j; y_j$ однозначным решением уравнений преобразования (2) в окрестности «точки» $\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n$. Для этого необходимо, чтобы определитель Якоби J не обращался в нуль. Этот определитель имеет вид

$$(I) \quad J \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \eta_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

При помощи взаимной замены строк и столбцов получается определитель

$$(II) \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} & \frac{\partial \eta_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Далее, заменим взаимным образом в определителе (II) первые n столбцов столбцами с номерами от $n+1$ до $2n$. Это потребует n^2 перемен знака. Совершим затем n перемен знака в n строках правой половины этого определителя. Окончательная перемена знака равна $(-1)^{n^2+n} = +1$ независимо от того, является ли n нечетным или четным. В таком случае

$$(III) \quad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial x_1} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial x_n} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_1} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \cdots & -\frac{\partial \xi_n}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \eta_n}{\partial y_n} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial y_n} & \cdots & -\frac{\partial \xi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Умножение определителей (I) и (III) по правилу «столбец на строку» дает

$$(IV) \quad J^2 = \begin{vmatrix} [x_1 x_1] \dots [x_n x_1] [y_1 x_1] \dots [y_n x_1] \\ [x_1 x_2] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [x_1 x_n] \dots [x_n x_n] [y_1 x_n] \dots [y_n x_n] \\ [x_1 y_1] \dots [x_n y_1] [y_1 y_1] \dots [y_n y_1] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [x_1 y_n] \dots [x_n y_n] [y_1 y_n] \dots [y_n y_n] \end{vmatrix}.$$

Но условия (5) дают

$$J^2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ +1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & +1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ненулевые элементы этого определителя могут быть перенесены на главную диагональ при помощи n^2 перемен знака. Эти n элементов со знаком минус окончательно дают

$$J^2 = (-1)^{n^2+n} = +1.$$

Следовательно, $J = \pm 1$.

4. Бесконечно малые контактные преобразования. Пусть F — гамильтониан некоторой системы канонических уравнений с n степенями свободы, и допустим, что F не содержит явно времени. Обозначим переменные в момент времени t через

$$\xi_1, \dots, \xi_n, \quad \eta_1, \dots, \eta_n,$$

а их значения в момент времени $t + \Delta t$ через

$$\xi'_1, \dots, \xi'_n, \quad \eta'_1, \dots, \eta'_n.$$

Тогда в момент t имеем

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j},$$

а в момент $t + \Delta t$

$$\frac{d\xi'_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta'_j}, \quad \frac{d\eta'_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi'_j}.$$

Эти дифференциальные уравнения дают

$$\xi'_j - \xi_j = \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \Delta t, \quad \eta'_j - \eta_j = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \Delta t.$$

Поэтому дифференциал

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_j} d\xi_j + \frac{\partial F}{\partial \eta_j} d\eta_j \right) = dF$$

можно написать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n [(\xi'_j - \xi_j) d\eta_j - (\eta'_j - \eta_j) d\xi_j] = \Delta t dF,$$

или

$$\sum_{j=1}^n [\xi'_j d\eta'_j - \xi_j d\eta_j - \xi'_j (d\eta'_j - d\eta_j) - (\eta'_j - \eta_j) d\xi_j] = \Delta t dF.$$

Если квадратом Δt можно пренебречь, то допускается замена ξ'_j на ξ_j в качестве множителя при разности $d\xi'_j - d\xi_j$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [\xi'_j d\eta'_j - \xi_j d\eta_j] &= \Delta t dF + \sum_{j=1}^n d[\xi_j (\eta'_j - \eta_j)] = \\ &= \Delta t d \left[F - \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \right]. \end{aligned}$$

Функция

$$F - \sum \xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j}$$

выражается через первоначальные переменные $\xi_j; \eta_j$. Рассмотрим теперь последовательность таких преобразований, каждое из которых действует в течение бесконечно малого промежутка времени. Тогда этот результат принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n (\xi_j^{(0)} d\eta_j^{(0)} - \xi_j^{(0)} d\eta_j^{(0)}) = d \int_{t_0}^{t_1} \left[F - \sum \xi_j \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \right] dt.$$

Это приводит к следующему вопросу: пусть преобразование от $\xi_j; \eta_j$ к $x_j; y_j$ таково, что

$$\sum_{j=1}^n (x_j dy_j - \xi_j d\eta_j) = dW(\xi_j; \eta_j); \quad (7)$$

будет ли это преобразование каноническим, если W — произвольная функция от $\xi_j; \eta_j$?

Пусть это преобразование имеет вид

$$\xi_j = \xi_j(x_k; y_k), \quad \eta_j = \eta_j(x_k; y_k).$$

По этим формулам преобразования можно выразить функцию W через $x_j; y_j$.

Следовательно, пусть

$$\sum_{j=1}^n (x_j dy_j - \xi_j d\eta_j) = dW_1(x_j; y_j),$$

или

$$\sum_{k=1}^n x_k dy_k - \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} dy_k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_1}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_1}{\partial y_k} dy_k.$$

Приравнивая коэффициенты, мы получаем следующие уравнения:

$$(a) \quad - \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} = \frac{\partial W_1}{\partial x_k},$$

$$(6) \quad x_k - \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} = \frac{\partial W_1}{\partial y_k}.$$

Дифференцирование уравнений (а) и (б) по y_k и x_k соответственно дает

$$-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} - \sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k \partial y_k} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \partial y_k},$$

$$1 - \sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} - \sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k \partial y_k} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \partial y_k}.$$

Вычитая эти уравнения, находим

$$-1 + [x_k, y_k] = 0.$$

Таким же путем из (а) получаем

$$-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} - \sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Меняя в (а) k на l и дифференцируя по x_k , находим

$$-\sum_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_l} - \sum_j \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Вычитание дает

$$[x_k, x_l] = 0.$$

Аналогичным образом легко видеть, что

$$[y_k, y_l] = 0, \quad [x_k, y_l] = 0 \quad (l \neq k).$$

Таким образом, скобки Лагранжа удовлетворяют требованию, чтобы это преобразование было каноническим без изменения гамильтониана.

Допустим далее, что W_1 содержит время. В таком случае

$$\xi_j = \xi_j(x_j; y_j; t), \quad \eta_j = \eta_j(x_j; y_j; t),$$

и уравнение

$$\sum (x_j dy_j - \xi_j d\eta_j) = dW_1(x_j; y_j; t) \tag{8}$$

дает

$$\begin{aligned} \sum_k x_k dy_k - \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \eta_j}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \eta_j}{\partial t} dt \right) &= \\ &= \sum_k \frac{\partial W_1}{\partial x_k} dx_k + \sum_k \frac{\partial W_1}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial W_1}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

В дополнение к соотношениям (а) и (б) мы получаем

$$(в) \quad - \sum_j \xi_j \frac{\partial \eta_j}{\partial t} = \frac{\partial W_1}{\partial t}.$$

Дифференцирование (а) по t и (в) по x_k дает следующие выражения:

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial t} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k \partial t} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \partial t},$$

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \eta_j}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial^2 \eta_j}{\partial x_k \partial t} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \partial t}.$$

Вычитая их, находим

$$[t, x_k] = 0.$$

Аналогично, комбинируя (б) и (в), получаем

$$[t, y_k] = 0.$$

Таким образом, этот результат остается в силе независимо от того, содержат ли функция \tilde{W}_1 и уравнения преобразования $\xi_j = \xi_j(x_k; y_k; t)$, $\eta_j = \eta_j(x_k; y_k; t)$ время в явном виде или нет.

5. Примеры.

1) Возьмем преобразование

$$\xi_j = \sqrt{2x_j} \cos y_j, \quad \eta_j = \sqrt{2x_j} \sin y_j,$$

тогда

$$d\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2x_j}} \cos y_j dx_j - \sqrt{2x_j} \sin y_j dy_j,$$

$$d\eta_j = \frac{1}{\sqrt{2x_j}} \sin y_j dx_j + \sqrt{2x_j} \cos y_j dy_j.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_j d\eta_j - \xi_j d\eta_j &= \sin y_j \cos y_j dx_j + 2x_j \cos^2 y_j dy_j, \\ x_j dy_j - \xi_j d\eta_j &= -\sin y_j \cos y_j dx_j - x_j (2 \cos^2 y_j - 1) dy_j = \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2y_j dx_j - x_j \cos 2y_j dy_j = \\ &= d \left[-\frac{1}{2} x_j \sin 2y_j \right]. \end{aligned}$$

Поэтому это преобразование является каноническим без изменения гамильтониана.

2) Рассмотрим следующее преобразование от $\xi_j; \eta_j$ к $x_j; y_j$ по формулам

$$\xi_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n,$$

$$\eta_j = a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jn}y_n,$$

где коэффициенты a_{jk} — постоянные. Предположим далее, что это преобразование ортогонально, т. е.

$$\sum \xi_j^2 = \sum x_j^2, \tag{A}$$

$$\sum \eta_j^2 = \sum y_j^2. \tag{B}$$

Очевидно,

$$\xi_j + \eta_j = a_{j1}(x_1 + y_1) + a_{j2}(x_2 + y_2) + \dots + a_{jn}(x_n + y_n)$$

и

$$\sum (\xi_j + \eta_j)^2 = \sum (x_j + y_j)^2. \tag{C}$$

Теперь выражение $\frac{1}{2}[(C) - (A) - (B)]$ дает

$$\sum \xi_j \eta_j = \sum x_j y_j,$$

а следовательно,

$$\sum \xi_j d\eta_j = \sum x_j dy_j,$$

которое показывает, что это преобразование является каноническим.

Уравнения для вековых изменений в H и K ; P и Q , приведенные в разд. 4 гл. XVI под номерами (24) и (25), имеют каноническую форму с гамильтонианом

$$F = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^n A_{sr} (K_s K_r + H_s H_r).$$

Ортогональное преобразование (35) из этого раздела имеет форму, указанную выше. Следовательно, получающиеся уравнения (37) сохраняют канонический вид.

3) Другие примеры этого типа с правой частью уравнения (7), равной нулю, принадлежат к числу тех, которые часто используются в связи с переменными Делонэ L , G , H , l , g , h . Для некоторых целей представляется более удобным использовать в качестве угловых переменных

$$l + g + h, \quad g + h, \quad h.$$

Пусть X_1 , X_2 , X_3 — переменные, которыми следует воспользоваться вместо L , G , H , чтобы сохранить каноническую форму уравнений. Тогда, если

$$L dl + G dg + H dh = X_1 d(l + g + h) + X_2 d(g + h) + X_3 dh,$$

это преобразование будет каноническим. Мы находим, что

$$X_1 = L, \quad X_1 + X_2 = G, \quad X_1 + X_2 + X_3 = H,$$

или

$$X_1 = L, \quad X_2 = G - L, \quad X_3 = H - G.$$

Поэтому переменные

$$L, \quad l + g + h,$$

$$G - L, \quad g + h,$$

$$H - G, \quad h$$

представляют каноническую систему переменных.

Небольшое неудобство состоит в том, что $G - L$ и $H - G$ отрицательны. Это неудобство можно устраниТЬ, используя следующую систему:

$$x_1 = L, \quad y_1 = l + g + h,$$

$$x_2 = L - G, \quad y_2 = -g - h,$$

$$x_3 = G - H, \quad y_3 = -h.$$

С этими переменными посредством преобразования из примера (1) связана следующая система:

$$L, \quad l + g + h,$$

$$\sqrt{2(L-G)} \cos(g+h), \quad -\sqrt{2(L-G)} \sin(g+h),$$

$$\sqrt{2(G-H)} \cos h, \quad -\sqrt{2(G-H)} \sin h.$$

Эти переменные известны как переменные Пуанкаре.

4) В некоторых отношениях углы $l+g+h$, l , $l+g$ являются более естественными при разложении возмущающей функции, чем углы, использованные в предыдущем примере. Легко подыскать каноническую систему, эквивалентную системе Делонэ, для которой эти величины являются угловыми переменными. Приравнивая коэффициенты при dl , dg , dh в

$$L dl + G dg + H dh = X_1 d(l+g+h) + X_2 dl + X_3 d(l+g),$$

мы находим, что

$$X_1 = H, \quad Y_1 = l+g+h,$$

$$X_2 = L - G, \quad Y_2 = l,$$

$$X_3 = G - H, \quad Y_3 = l+g$$

представляет собой требуемую систему переменных с присоединенной системой переменных

$$\begin{aligned} H, & \quad l+g+h, \\ \sqrt{2(L-G)} \cos l, & \quad \sqrt{2(L-G)} \sin l, \\ \sqrt{2(G-H)} \cos(l+g), & \quad \sqrt{2(G-H)} \sin(l+g). \end{aligned}$$

6. Определяющая функция. Пусть задана функция $S(x_j; \eta_j)$, и пусть

$$y_j = \frac{\partial S}{\partial x_j}, \quad \xi_j = \frac{\partial S}{\partial \eta_j} \quad (9)$$

— уравнения преобразования. Выражение

$$\sum (x_j dy_j - \xi_j d\eta_j)$$

можно написать в следующем виде:

$$d \sum x_j y_j - \sum y_j dx_j - \sum \xi_j d\eta_j.$$

Отсюда, в силу (9), имеем

$$d \sum x_j y_j - \sum \frac{\partial S}{\partial x_j} dx_j - \sum \frac{\partial S}{\partial \eta_j} d\eta_j = d \left[\sum x_j y_j - S \right] = dW.$$

Поэтому преобразование (9) является каноническим без изменения гамильтониана. Функция S называется определяющей функцией этого преобразования. Она выражается через половину старых переменных и половину новых переменных. Преобразование (9) не получается в явной форме

$$\xi_j = f_j(x_k; y_k), \quad \eta_j = g_j(x_k; y_k),$$

а, наоборот, в неявной форме вида

$$\xi_j = \varphi_j(x_k; \eta_k), \quad y_j = \psi_j(x_k; \eta_k).$$

7. Метод Делонэ. Делонэ применил свой метод к решению основной проблемы теории Луны. Уравнения в переменных Делонэ были

получены в разд. 8 гл. XI. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{h}}, \quad \frac{d\tilde{h}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial H}\end{aligned}\quad (10)$$

с

$$\tilde{F} = \frac{\mu^2}{2L^2} + R. \quad (11)$$

Значок \sim (тильда) использован для h и F с тем, чтобы эти символы без тильды использовать для модифицированной формы этих уравнений.

В основной проблеме теории Луны возмущающая функция R может быть разложена в виде бесконечной суммы косинусоидальных членов с аргументами вида

$$j_1(l + g + \tilde{h} - l' - \tilde{\omega}') + j_2l + j_3(l + g) + j_4l',$$

в которых l' — средняя аномалия Солнца, а $\tilde{\omega}'$ — долгота перигея орбиты Солнца. Этот аргумент можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}(j_1 + j_2 + j_3)l + (j_1 + j_3)g + j_1(\tilde{h} - \tilde{\omega}') + (j_4 - j_1)l' &= \\ = p_1l + p_2g + p_3(\tilde{h} - \tilde{\omega}') + p_4l',\end{aligned}$$

где l' рассматривается как линейная функция времени вида

$$l' = n't + \text{const};$$

n' и $\tilde{\omega}'$ считаются постоянными.

В этом разделе мы используем v вместо n' , k вместо l' , так как штрихи понадобятся для другой цели. Если, далее, написать h вместо $\tilde{h} - \tilde{\omega}'$, то общий аргумент в R примет следующий вид:

$$p_1l + p_2g + p_3h + p_4k,$$

в котором коэффициенты p — целые числа; без потери общности p_1 можно выбрать неотрицательным; коэффициенты же p_2 , p_3 и p_4 могут быть как положительными, так и отрицательными, включая и нуль.

Функция \tilde{F} зависит явным образом от t , так как $k = vt + \text{const}$. Для того чтобы получить гамильтониан, не зависящий от t , удобно ввести k и K в качестве дополнительных переменных, полагая

$$\frac{dk}{dt} = v = -\frac{\partial F}{\partial K}.$$

Это требует прибавления $-vK$ к \bar{F} . Тогда уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial K}, \\ F &= \frac{\mu^2}{2L^2} - vK + R. \end{aligned} \tag{12}$$

Переменная K входит в гамильтониан F только посредством члена $-vK$.

Для того чтобы рассмотреть принцип метода Делонэ, введем \bar{F} посредством выражения

$$\bar{F} = F_0 + P_1 + Q_1 \cos \theta,$$

в котором $F_0 = (\mu^2/2L^2) - vK$, а P_1 представляет собой сумму всех непериодических членов в функции R (т. е. членов, для которых $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$). Член $Q_1 \cos \theta$ является единственным критическим периодическим членом из R . Делонэ затем переходит к решению уравнений (12), в которых функция F заменена на \bar{F} . Это решение выполняется при помощи канонического преобразования переменных

$$L, G, H, K, l, g, h, k$$

к новым переменным

$$L', G', H', K', l', g', h', k',$$

таким, что гамильтониан \bar{F} после этого преобразования становится функцией только от L', G', H', K' .

Это преобразование применяется затем к уравнениям с полным гамильтонианом F . Однако при этом преобразовании $F_0 + P_1 + Q_1 \cos \theta$ будет функцией только от L', G', H', K' . Поэтому критический член с аргументом θ исчезнет. Новые переменные должны теперь быть подставлены во все остальные члены R . Это не изменит характерных особенностей функции R , за исключением того, что исчезает член $Q_1 \cos \theta$. Аргумент θ может появиться снова в преобразованном ряде для R , но соответствующий член будет иметь меньший коэффициент.

Этот метод требует полностью буквенного разложения возмущающей функции. Коэффициенты выражаются в виде степенных рядов по e , $\gamma = \sin \frac{1}{2} I$, e (которое используется для обозначения эксцентриситета орбиты Солнца, так что символ e' остается для другой цели) и $a = a/a_{\odot}$. Общий множитель возмущающей функции равен $v^2 a^2$. В ходе интегрирования появляются степени $v/n = vL^3/\mu^2$ как члены степенных рядов. Хотя в качестве переменных использованы L, G, H, a, e, γ, a , n могут быть выражены через эти переменные, характерная особенность метода Делонэ и состоит в том, что возмущающая функция не разлагается явным образом по этим каноническим элементам.

Метод Делонэ состоит в исключении путем последовательных преобразований наиболее значительных членов в R . Делонэ рассматривает e , γ , v/n , ϵ как малые величины первого порядка малости, a/a_\odot — как малую второго порядка. Вообще говоря, решение доводится до восьмого порядка в только что указанном смысле. (Для членов с $p_1=0$, $p_4=0$ он доводит коэффициенты до девятого порядка; кроме того, в силу малости ϵ он считает ϵ^3 , ϵ^4 , ϵ^5 , ϵ^6 соответственно величинами четвертого, пятого, шестого и седьмого порядков.)

8. Преобразование Делонэ. Пусть

$$\theta = p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k$$

является критическим аргументом для преобразования Делонэ. Каноническое преобразование переменных

$$L, G, H, K, l, g, h, k$$

к переменным

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \theta, g, h, k$$

можно совершить при условии, что $p_1 \neq 0$, используя формулу

$$\begin{aligned} L dl + G dg + H dh + K dk &= \\ &= \Theta_1 d\theta + \Theta_2 dg + \Theta_3 dh + \Theta_4 dk = \\ &= p_1 \Theta_1 dl + (\Theta_2 + p_2 \Theta_1) dg + (\Theta_3 + p_3 \Theta_1) dh + (\Theta_4 + p_4 \Theta_1) dk. \end{aligned}$$

Это дает

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{L}{p_1}, & \Theta_2 &= G - \frac{p_2}{p_1} L, \\ \Theta_3 &= H - \frac{p_3}{p_1} L, & \Theta_4 &= K - \frac{p_4}{p_1} L, \end{aligned}$$

или

$$L = p_1 \Theta_1, \quad G = \Theta_2 + p_2 \Theta_1, \quad H = \Theta_3 + p_3 \Theta_1, \quad K = \Theta_4 + p_4 \Theta_1. \quad (13)$$

Если $p_1=0$ и $p_4 \neq 0$, то l отсутствует в θ и k может играть ту же роль, что и l в случае, когда $p_1 \neq 0$; члены с $p_1=p_4=0$ представляют отдельную задачу.

Новые уравнения для задачи с преобразованием $F \rightarrow \bar{F}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_1}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}, & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_1}, \\ \frac{d\Theta_2}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_2}, \\ \frac{d\Theta_3}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_3}, \\ \frac{d\Theta_4}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_4}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этих уравнений, поскольку \bar{F} является функцией от $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \theta$, вытекает, что

$$\Theta_2 = \text{const}, \quad \Theta_3 = \text{const}, \quad \Theta_4 = \text{const}.$$

Поэтому эта система уравнений на самом деле сводится к системе с одной степенью свободы

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \Theta_1}, \quad (15)$$

в которой $\bar{F} \equiv \bar{F}(\Theta_1, \theta)$ с $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$, входящими в качестве постоянных. После того как эти уравнения разрешены, так что Θ_1 и θ известны как функции от времени и двух постоянных интегрирования, переменные g, h, k могут быть найдены при помощи квадратур. Решение относительно k является тривиальным. Поскольку $\partial F/\partial \Theta_4 = \partial F/\partial K = -v$, то k останется равным $vt + \text{const}$, как и следовало ожидать.

Для того чтобы упростить обозначения, напишем x вместо Θ_1 , y вместо θ . Тогда уравнения этой задачи могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial x},$$

$$\bar{F} \equiv F_0 + P_1(x) + Q_1(x) \cos(y).$$

Эти уравнения допускают следующий интеграл:

$$\bar{F} = C = \text{const.}$$

Чтобы исследовать форму решения, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = -Q_1(x) \sin y,$$

которое показывает, что x как функция от t будет иметь минимумы или максимумы при $y = j\pi$; если имеются максимумы для $y = 0, 2\pi, \dots$, то минимумы существуют для $y = \pi, 3\pi, \dots$ или наоборот. Поэтому максимальные и минимальные значения x могут быть найдены из уравнений

$$C = F_0 + P_1 + Q_1,$$

$$C = F_0 + P_1 - Q_1.$$

Пусть такими значениями x будут x_{\min} и x_{\max} . Тогда для частных значений y могут быть найдены значения x в этом интервале, которые удовлетворяют интегралу $\bar{F} = C$. Поскольку уравнение, из которого необходимо найти x , не изменяется, если y изменить на $-y$, то очевидно, что x является четной функцией от y с периодом 2π . Следовательно, x можно представить следующим рядом Фурье:

$$x = a_0 + a_1 \cos y + a_2 \cos 2y + \dots$$

Далее, уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = -\frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{dP_1}{dx} - \frac{dQ_1}{dx} \cos y$$

дает

$$\frac{dy}{dt} = b_0 + b_1 \cos y + b_2 \cos 2y + \dots,$$

откуда получаем уравнение

$$dt = \frac{dy}{b_0 + b_1 \cos y + b_2 \cos 2y + \dots}, \quad (16)$$

которое можно написать в следующем виде:

$$dt = (\beta_0 + \beta_1 \cos y + \beta_2 \cos 2y + \dots) dy \quad (17)$$

при условии, что знаменатель в правой части уравнения (16) не обращается в нуль для любого действительного значения y . Выполнение этого условия обеспечивается, если для всего интервала значений x , $x_{\min} < x < x_{\max}$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{dF_0}{dx} + \frac{dP_1}{dx} \right| > \left| \frac{dQ_1}{dx} \right|.$$

Если справедливо уравнение (17), то интегрирование дает

$$t + c = \beta_0 y + \beta_1 \sin y + \frac{1}{2} \beta_2 \sin 2y + \dots,$$

или

$$\begin{aligned} y &= \frac{t+c}{\beta_0} + Y_1 \sin \frac{t+c}{\beta_0} + Y_2 \sin 2 \frac{t+c}{\beta_0} + \dots = \\ &= xt + \gamma + Y_1 \sin(xt + \gamma) + Y_2 \sin 2(xt + \gamma) + \dots. \end{aligned} \quad (18)$$

Когда это разложение подставлено в выражение для x , то получается

$$x = X_0 + X_1 \cos(xt + \gamma) + X_2 \cos 2(xt + \gamma) + \dots. \quad (19)$$

Это и есть форма решения, при котором угловая переменная y изменяется на полный оборот. Это единственный тип решения, который будет рассмотрен в данном разделе. Остается получить этот результат в виде такого канонического преобразования $x, y \rightarrow x', y'$, что

$$\bar{F}(x, y) = \bar{F}^*(x')$$

с преобразованными уравнениями следующего вида:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial \bar{F}^*}{\partial y'} = 0, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}^*}{\partial x'} = \text{const.}$$

Очевидно, что новой переменной y' является линейная функция от t

$$y' = xt + \gamma.$$

Поэтому это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} y &= y' + Y_1 \sin y' + Y_2 \sin 2y' + \dots, \\ x &= X_0 + X_1 \cos y' + X_2 \cos 2y' + \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

в котором коэффициенты $Y_1, Y_2, \dots, X_0, X_1, \dots$ могут быть функциями только от x' (а не от y').

Условие того, что это преобразование должно быть каноническим, будет следующим:

$$J \equiv \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial x'} = +1.$$

Можно заметить, что тогда как соответствующее условие является необходимым условием при любом числе степеней свободы, оно является также достаточным в задачах с одной степенью свободы. Подстановка

разложений (20) в J дает

$$\left[\frac{dX_0}{dx'} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{dX_j}{dx'} \cos jy' \right] \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} jY_j \cos jy' \right] + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} jX_j \sin jy' \sum_{j=1}^{\infty} \frac{dY_j}{dx'} \sin jy' = +1.$$

Левую часть этого выражения можно разложить в ряд по косинусам дуг, кратных y' . Поскольку это соотношение должно сохранять силу для всех значений y' , то необходимо, чтобы коэффициенты всех косинусоидальных членов обратились в нуль и чтобы постоянный член этого ряда был равен $+1$. Этот постоянный член имеет вид

$$\frac{dX_0}{dx'} + \frac{1}{2} \sum jY_j \frac{dX_j}{dx'} + \frac{1}{2} \sum jX_j \frac{dY_j}{dx'} = \\ = \frac{d}{dx'} \left[X_0 + \frac{1}{2} \sum jX_j Y_j \right] = +1.$$

Это уравнение удовлетворяется следующим разложением:

$$x' = X_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} jX_j Y_j. \quad (21)$$

Произвольная постоянная интегрирования, прибавляемая к X_0 (или x'), не представляет никакого интереса, так как сама величина x' является произвольной постоянной этой задачи.

Это и составляет суть преобразования Делонэ. Рассмотренный нами вопрос касался установления формы решения и нахождения разложения (21). В приложениях теории Делонэ принимают указанную форму решения, а коэффициенты $X_0, X_2, X_4, \dots, Y_1, Y_2, \dots$ получаются посредством процесса последовательных приближений.

Возвращаясь теперь к старым обозначениям, легко видеть, что результатом преобразования Делонэ является следующая система новых канонических переменных:

$$\begin{aligned} L' &= p_1 x', \\ G' &= \Theta_2 + p_2 x', \\ H' &= \Theta_3 + p_3 x', \\ K' &= \Theta_4 + p_4 x'. \end{aligned}$$

Соотношения между старыми и новыми переменными имеют вид

$$\begin{aligned} L &= L' + p_1 \varphi(x', y'), \\ G &= G' + p_2 \varphi(x', y'), \\ H &= H' + p_3 \varphi(x', y'), \\ K &= K' + p_4 \varphi(x', y'); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x', y') &= x - x' = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} jX_j Y_j + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos jy'. \end{aligned} \quad (23)$$

Остается получить новые переменные l' , g' , h' , k' , которые вместе с L' , G' , H' , K' образуют каноническую систему. Частные производные от \bar{F} по L , G , H могут быть выражены при помощи соотношений (22) через переменные Θ_1 и θ (или x и y во временных обозначениях). Как только эти переменные становятся известными функциями t , переменные l , g , h получаются посредством квадратур. Очевидно, как и ранее, $k = vt + \text{const.}$

Результат интегрирования получается в виде соотношений

$$\begin{aligned} l &= l' + \sum l'_j \sin jy', \\ g &= g' + \sum g'_j \sin jy', \\ h &= h' + \sum h'_j \sin jy', \\ k &= k', \end{aligned} \tag{24}$$

в которых l' , g' , h' , k' являются новыми переменными. Коэффициенты синусоидальных членов являются функциями от x' и поэтому будут постоянными в задаче с функцией \bar{F} в качестве гамильтониана. Соотношения

$$\begin{aligned} p_1l + p_2g + p_3h + p_4k &= \theta, \\ p_1l' + p_2g' + p_3h' + p_4k' &= y' \end{aligned}$$

удовлетворены. Значения dl'/dt , dg'/dt , ..., выраженные через новые переменные, легко получаются из преобразованного гамильтониана \bar{F}^* .

Следующий шаг состоит в применении этого преобразования к остальным членам R , после чего можно начать следующее преобразование.

9. Решение задачи Делонэ путем нахождения определяющей функции. В этом разделе мы обозначим переменные

$$L, G, H, K, l, g, h, k$$

через

$$L_1, L_2, L_3, L_4, l_1, l_2, l_3, l_4.$$

Поэтому уравнения задачи Делонэ принимают следующий вид:

$$\frac{dL_j}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l_j}, \quad \frac{dl_j}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial L_j},$$

где

$$\bar{F} = F_0 + \bar{F}_1,$$

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L_1^2} - vL_4,$$

$$\bar{F}_1 = P_1 + Q_1 \cos(p_1l_1 + p_2l_2 + p_3l_3 + p_4l_4) = P_1 + Q_1 \cos \theta,$$

где P_1 , Q_1 — функции от L_1 , L_2 , L_3 (переменная L_4 входит только в F_0).

Задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо совершить такое преобразование от переменных L_j ; l_j к переменным L'_j ; l'_j при помощи определяющей функции $S(L'_j; l_j)$, чтобы новый гамильтониан стал функцией только от переменных L'_1 , L'_2 , L'_3 , L'_4 .

В теории движения Луны функция F_1 имеет множитель v^2/n^2 , который мал по сравнению с главным членом $\frac{1}{2} \mu^2 L_1^{-2} = \frac{1}{2} \mu a^{-1} = \frac{1}{2} n^2 a^2$. Присутствие этого малого множителя указывается приписыванием нижнего индекса 1 функции \bar{F}_1 и коэффициентам P_1, Q_1 .

Разложим теперь определяющую функцию S по степеням этой же малой величины:

$$S \equiv S_0 + S_1 + S_2 + \dots$$

За S_0 необходимо выбрать

$$S_0 = L'_1 l_1 + L'_2 l_2 + L'_3 l_3 + L'_4 l_4,$$

чтобы, ограничивая функцию S членом S_0 , получить просто тождественное преобразование вида

$$L_j = \frac{\partial S_0}{\partial l_j} = L'_j, \quad l'_j = \frac{\partial S_0}{\partial L'_j} = l_j.$$

Гамильтониан не изменится при этом преобразовании; следовательно,

$$\bar{F}(L_j; l_j) = \bar{F}^*(L'_j), \quad (25)$$

где \bar{F}^* есть новый гамильтониан, который должен быть функцией только от переменных L'_j и не содержать переменных l'_j . Записывая более подробно, получаем

$$F_0(L_1, L_4) + \bar{F}_1(L_1, L_2, L_3, \theta) = \bar{F}^*(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4).$$

Подставим в обеих частях этого уравнения

$$S \equiv S_0 + S_1 + S_2 + \dots,$$

$$L_j = \frac{\partial S}{\partial l_j}, \quad l'_j = \frac{\partial S}{\partial L'_j}.$$

Тогда

$$F_0 \left(L'_1 + \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \frac{\partial S_2}{\partial l_1} + \dots, L'_4 + \frac{\partial S_1}{\partial l_4} + \frac{\partial S_2}{\partial l_4} + \dots \right) + \\ + \bar{F}_1 \left(L'_1 + \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \dots, L'_2 + \frac{\partial S_1}{\partial l_2} + \dots, L'_3 + \frac{\partial S_1}{\partial l_3} + \dots, \theta \right) = F_0^* + \bar{F}_1^* + \bar{F}_2^*.$$

Разлагая в ряд по теореме Тейлора и собирая члены соответствующих порядков в обеих частях, находим

$$F_0(L'_1, L'_4) = F_0^*,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'_1} \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + \frac{\partial F_0}{\partial L'_4} \frac{\partial S_1}{\partial l_4} + \bar{F}_1(L'_1, L'_2, L'_3, \theta) = \bar{F}_1^*,$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'_1} \frac{\partial S_2}{\partial l_1} + \frac{\partial F_0}{\partial L'_4} \frac{\partial S_2}{\partial l_4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'_1^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l_1} \right)^2 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial L'_j} \frac{\partial S_1}{\partial l_j} = \bar{F}_2^*.$$

Это разложение может быть продолжено неограниченно.

Обозначения упростились, оставаясь тем не менее однозначными. Например, $\partial \bar{F}_1 / \partial L'_1$ означает $\partial \bar{F}_1 / \partial L_1$ с L_1, L_2, \dots , замененными на L'_1, L'_2, \dots . Аналогично P'_1 будет означать P_1 (функцию от L_1, L_2, L_3), в которой L_1, L_2, L_3 заменены на L'_1, L'_2, L'_3 .

Из выражения для F_0 следует, что

$$\frac{\partial F_0}{\partial L_1} = -\frac{\mu^2}{L_1^3} = -n', \quad \frac{\partial F_0}{\partial L_4} = -v, \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_1^2} = \frac{3\mu^2}{L_1^4} = \frac{3n'}{L'}.$$

Поэтому члены первого порядка дают

$$-n' \frac{\partial S_1}{\partial l_1} - v \frac{\partial S_1}{\partial l_4} + P'_1 + Q'_1 \cos \theta = \bar{F}'_1.$$

Это уравнение эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$P'_1 = \bar{F}'_1, \\ n' \frac{\partial S_1}{\partial l_1} + v \frac{\partial S_1}{\partial l_4} = Q'_1 \cos \theta,$$

последнее из которых требует, чтобы

$$S_1 = \frac{Q'_1}{p_1 n' + p_4 v} \sin \theta, \quad (26)$$

так что

$$\frac{\partial S_1}{\partial l_j} = \frac{p_j Q'_1}{p_1 n' + p_4 v} \cos \theta.$$

Члены второго порядка дают

$$-n' \frac{\partial S_2}{\partial l_1} - v \frac{\partial S_2}{\partial l_4} + \frac{3}{2} \frac{n'}{L_1^2} \frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4 v)^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] + \\ + \frac{Q'_1}{p_1 n' + p_4 v} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial P'_1}{\partial L'_j} \cos \theta + \\ + \frac{Q'_1}{p_2 n' + p_4 v} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial Q'_1}{\partial L'_j} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right] = \bar{F}'_2.$$

Это уравнение позволяет выразить \bar{F}'_2 посредством членов, независящих от θ , в следующем виде:

$$\bar{F}'_2 = \frac{3}{4} \frac{n'}{L_1^2} \frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4 v)^2} + \frac{1}{2} \frac{Q'_1}{p_1 n' + p_4 v} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial Q'_1}{\partial L'_j}$$

и определяет функцию S_2 следующим образом:

$$n' \frac{\partial S_2}{\partial l_1} + v \frac{\partial S_2}{\partial l_4} = \frac{Q'_1}{p_1 n' + p_4 v} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial P'_1}{\partial L'_j} \cos \theta + \\ + \left[\frac{3}{4} \frac{n'}{L_1^2} \frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4 v)^2} + \frac{1}{2} \frac{Q'_1}{p_1 n' + p_4 v} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial Q'_1}{\partial L'_j} \right] \cos 2\theta.$$

В результате получается

$$S_2 = \frac{Q'_1}{(p_1 n' + p_4 v)^2} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial P'_1}{\partial L'_j} \sin \theta + \\ + \left[\frac{3}{8} \frac{n'}{L_1^2} \frac{p_1^2 Q_1'^2}{(p_1 n' + p_4 v)^3} + \frac{1}{4} \frac{Q'_1}{(p_1 n' + p_4 v)^2} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial Q'_1}{\partial L'_j} \right] \sin 2\theta.$$

Тогда решение с точностью до второго порядка имеет вид

$$\begin{aligned} L_j &= L'_j + \frac{\partial S_1}{\partial l_j} + \frac{\partial S_2}{\partial l_j} + \dots, \\ l'_j &= l_j + \frac{\partial S_1}{\partial L'_j} + \frac{\partial S_2}{\partial L'_j} + \dots, \quad (j = 1, 2, 3), \\ l'_4 &= l_4. \end{aligned}$$

Это решение дает L_j , l'_j в виде функций от L'_j , θ . Остается получить явные выражения для L_j , l_j через L'_j и $\theta' = p_1 l'_1 + p_2 l'_2 + p_3 l'_3 + p_4 l'_4$ и произвести подстановку этого решения в члены гамильтониана, которые не были включены в F .

Для того чтобы знаменатель $p_1 n' + p_4 v$, присутствующий в S , не был равен нулю, следует предположить, что рассматриваются только такие аргументы θ , для которых коэффициенты p_1 и p_4 не равны оба нулю. Однако этот знаменатель может быть меньше любого наперед заданного значения, если для рассматриваемой частной задачи отношение v/n' настолько близко к отношению двух целых чисел q/r , что для $p_1 = aq$, $p_4 = -ar$, где a — положительное целое число, значение $p_1 n' + p_4 v$ мало по сравнению с v . Аргументы θ , для которых это имеет место, также должны быть исключены.

В теории движения Луны малые делители этого типа не играют никакой практической роли, однако в других задачах небесной механики, которые встречаются в солнечной системе, они значительны и могут определить характер движения.

Цель последовательности преобразований заключается в том, чтобы исключить из F до нужного порядка все аргументы θ , которые не были устранены по соображениям, указанным выше. Получающаяся при этом система уравнений все еще содержит в себе основные трудности задачи. Тем не менее число степеней свободы уменьшилось, а сами уравнения не загромождены несущественными членами.

При решении основной задачи теории движения Луны можно выделить три различных этапа. На первом этапе могут быть исключены члены, содержащие в аргументе l . Разложение решения ведется по степеням $(v/n)^2$. Второй этап связан с исключением членов, не зависящих от l , но содержащих в аргументе k . Решение относительно этих членов ведется по степеням v/n . На третьем этапе остаются только аргументы g и h . Поскольку F_0 не зависит от G и H , то гамильтониан в действительности имеет множителем $v^2 a^2$. Тем не менее исключение g и h может быть достигнуто по существу тем же методом, который был использован для исключения аргументов l и k . После этого этапа гамильтониан не зависит от угловых переменных, и задача, следовательно, решена полностью.

Окончательный гамильтониан дает непосредственно движения перигея и узлов. Эти движения представляют особенный интерес и имеют важное значение из-за того, что они могут быть сравнены с наблюдениями более точно, чем коэффициенты периодических членов. Точность, с которой та или иная теория движения Луны дает теоретические значения для движений перигея и узла, является поэтому важным критерием пригодности всей этой теории в целом.

10. Пример преобразования Делонэ. Первая из последовательности операций, как Делонэ называл свои преобразования, не является типич-

ной. Она связана с исключением членов с аргументами вида $p_4 k$. Вторая операция связана с исключением единственного члена с аргументом l . Эта операция представляет собой типичный пример исключения члена, имеющего множителем первую степень e , если отвлечься от очевидного упрощения, обусловленного тем, что $\theta = l$. Для краткости рассмотрим эту операцию в предположении, что $\gamma, \varepsilon (= e')$ и a/a_\odot равны нулю. Это не повлияет на характерные особенности задачи.

Для этой первой операции гамильтониан рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$\bar{F} = F_0 + P_1 + Q_1 \cos l,$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{\mu}{2a} = \frac{\mu^2}{2L^2}, \\ P_1 &= v^2 a^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 \right], \\ Q_1 &= v^2 a^2 \left[-\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 - \frac{1}{384} e^5 \right]. \end{aligned}$$

Поскольку $k (= l')$ не присутствует в аргументе, то не обязательно включать в F_0 член $-vK$.

Необходимо проинтегрировать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial l} = -Q_1 \sin l, \\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial L} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial a} \frac{da}{dL} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial e} \frac{de}{dL} = \\ &= -2a^{1/2}\mu^{-1/2} \frac{\partial \bar{F}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{e} a^{-1/2}\mu^{-1/2} \frac{\partial \bar{F}}{\partial e} = \\ &= n + \frac{v^2}{n} \left[-\frac{7}{4} - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2} + \frac{21}{16} e^2 - \frac{19}{384} e^4 \right) \cos l \right], \quad (27) \end{aligned}$$

в которых использовано следующее соотношение:

$$n = a^{-3/2}\mu^{1/2} = L^{-3}\mu^2.$$

Поскольку $G = \text{const}$, то соотношение

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2}$$

дает

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{G^2}{L^3 e} \frac{dL}{dt} \\ &= \frac{1-e^2}{e} a^{-1/2}\mu^{-1/2} \frac{dL}{dt}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{de}{dt} = \frac{v^2}{n} (1-e^2) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} e^2 + \frac{1}{384} e^4 \right) \sin l. \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) равносильны уравнениям, заданным первоначально. В этих уравнениях, кроме e и l , присутствует n ; но n можно выразить через G и e посредством соотношения

$$n = G^{-3}\mu^2 (1-e^2)^{3/2}.$$

При помощи этой замены уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} &= \frac{\mu^2}{G^3} (1 - e^2)^{3/2} + \frac{v^2 G^3}{\mu^2} \left[\left(-\frac{7}{4} - \frac{3}{4} e^2 \right) (1 - e^2)^{-3/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - e^2)^{-3/2}}{e} \left(\frac{1}{2} + \frac{21}{16} e^2 - \frac{19}{384} e^4 \right) \cos l \right], \\ \frac{de}{dt} &= \frac{v^2 G^3}{\mu^2} (1 - e^2)^{-1/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} e^2 + \frac{1}{384} e^4 \right) \sin l,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} &= \frac{\mu^2}{G^3} \left(1 - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 \right) + \\ &\quad + \frac{v^2 G^3}{\mu^2} \left[-\frac{7}{4} - \frac{27}{8} e^2 + \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2} + \frac{33}{16} e^2 + \frac{1097}{384} e^4 \right) \cos l \right], \quad (29)\end{aligned}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{v^2 G^3}{\mu^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{16} e^2 + \frac{61}{384} e^4 \right] \sin l. \quad (30)$$

Делонэ получает решение этих уравнений в следующей форме:

$$\begin{aligned}e \cos l &= - \left(\frac{1}{2} + \frac{21}{8} e_0^2 + \frac{805}{128} e_0^4 \right) \frac{v^2 G^6}{\mu^4} - \\ &\quad - \left(\frac{7}{8} + \frac{339}{32} e_0^2 \right) \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} - \frac{143}{64} \frac{v^6 G^{18}}{\mu^{12}} + \\ &\quad + \left[e_0 + \left(\frac{15}{16} e_0 + \frac{371}{64} e_0^3 \right) \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} + \frac{153}{32} e_0 \frac{v^6 G^{18}}{\mu^{12}} \right] \cos l' + \\ &\quad + \left[\left(\frac{27}{16} e_0^2 + \frac{943}{192} e_0^4 \right) \frac{v^2 G^6}{\mu^4} + \frac{381}{64} e_0^2 \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} \right] \cos 2l' + \\ &\quad + \frac{847}{384} e_0^3 \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} \cos 3l', \quad (31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e \sin l &= e_0 \sin l' + \\ &\quad + \left[\left(\frac{27}{16} e_0^2 + \frac{943}{192} e_0^4 \right) \frac{v^2 G^6}{\mu^4} + \frac{381}{64} e_0^2 \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} \right] \sin 2l' + \\ &\quad + \frac{847}{384} e_0^3 \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} \sin 3l', \quad (32)\end{aligned}$$

где l' определяется уравнением

$$\frac{dl'}{dt} = \frac{\mu^2}{G^3} \left[1 - \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{3}{8} e_0^4 - \left(\frac{7}{4} + \frac{27}{8} e_0^2 \right) \frac{v^2 G^6}{\mu^4} - \frac{9}{4} \frac{v^4 G^{12}}{\mu^8} \right].$$

Смысл величины e_0 определяется тем фактом, что она представляет собой коэффициент при $\sin l'$ в выражении для $e \sin l$.

Решение (31), (32) дает выражение для e^2 , которое, будучи подставленным в

$$a = \frac{G^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2},$$

дает для a следующее выражение:

$$\begin{aligned} a = & \frac{G^2}{\mu} \left\{ 1 + e_0^2 + e_0^4 + e_0^6 + e_0^8 + \right. \\ & + \left(\frac{1}{4} + \frac{73}{16} e_0^2 + \frac{8467}{256} e_0^4 \right) \frac{\nu^4 G^{12}}{\mu^8} + \\ & + \left(\frac{7}{8} + \frac{751}{32} e_0^2 \right) \frac{\nu^6 G^{18}}{\mu^{12}} + \frac{49}{16} \frac{\nu^8 G^{24}}{\mu^{16}} - \\ & - \left[\left(e_0 + \frac{31}{8} e_0^3 + \frac{1825}{192} e_0^5 \right) \frac{\nu^2 G^6}{\mu^4} + \right. \\ & + \left(\frac{7}{4} e_0 + \frac{409}{32} e_0^3 \right) \frac{\nu^4 G^{12}}{\mu^8} + \\ & + \left. \frac{189}{32} e_0 \frac{\nu^6 G^{18}}{\mu^{12}} \right] \cos l' - \\ & - \left[\left(\frac{1}{4} e_0^2 + \frac{27}{16} e_0^4 \right) \frac{\nu^4 G^{12}}{\mu^8} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{19}{8} e_0^2 \frac{\nu^6 G^{18}}{\mu^{12}} \right] \cos 2l' \right\}. \end{aligned}$$

Постоянная часть этого выражения обозначается через a_0 . Из нее можно получить G как функцию от a_0 :

$$G = \sqrt{\mu a_0} \left[\sqrt{1 - e_0^2} - \left(\frac{1}{8} + \frac{43}{32} e_0^2 + \frac{1267}{512} e_0^4 \right) \frac{\nu^4}{n_0^4} - \right. \\ \left. - \left(\frac{7}{16} + \frac{457}{64} e_0^2 \right) \frac{\nu^6}{n_0^6} - \frac{169}{128} \frac{\nu^8}{n_0^8} \right], \quad (33)$$

где

$$n_0 = a_0^{-3/2} \mu^{1/2}.$$

Подставляя этот результат в выражения для $e \cos l$, $e \sin l$ и a , получаем

$$\begin{aligned} e \cos l = & - \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{8} e_0^2 - \frac{11}{128} e_0^4 \right) \frac{\nu^2}{n_0^2} - \\ & - \left(\frac{7}{8} + \frac{171}{32} e_0^2 \right) \frac{\nu^4}{n_0^4} - \frac{119}{64} \frac{\nu^6}{n_0^6} + \\ & + \left[e_0 + \left(\frac{15}{16} e_0 + \frac{11}{64} e_0^3 \right) \frac{\nu^4}{n_0^4} + \frac{153}{32} e_0 \frac{\nu^6}{n_0^6} \right] \cos l' + \\ & + \left[\left(\frac{27}{16} e_0^2 - \frac{29}{192} e_0^4 \right) \frac{\nu^2}{n_0^2} + \frac{381}{64} e_0^2 \frac{\nu^4}{n_0^4} \right] \cos 2l' + \\ & + \frac{847}{384} e_0^3 \frac{\nu^4}{n_0^4} \cos 3l', \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \sin l = & e_0 \sin l' + \\ & + \left[\left(\frac{27}{16} e_0^2 - \frac{29}{192} e_0^4 \right) \frac{\nu^2}{n_0^2} + \frac{381}{64} e_0^2 \frac{\nu^4}{n_0^4} \right] \sin 2l' + \\ & + \frac{847}{384} e_0^3 \frac{\nu^4}{n_0^4} \sin 3l', \quad (35) \end{aligned}$$

$$a = a_0 \left\{ 1 - \left[\left(e_0 - \frac{1}{8} e_0^3 + \frac{1}{192} e_0^5 \right) \frac{\nu^2}{n_0^2} + \left(\frac{7}{4} e_0 + \frac{17}{32} e_0^3 \right) \frac{\nu^4}{n_0^4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{157}{32} e_0 \frac{\nu^6}{n_0^6} \right] \cos l' - \left[\left(\frac{1}{4} e_0^2 - \frac{1}{16} e_0^4 \right) \frac{\nu^4}{n_0^4} + \frac{19}{8} e_0^2 \frac{\nu^6}{n_0^6} \right] \cos 2l' \right\}. \quad (36)$$

Кроме того, имеем

$$\frac{dl'}{dt} = n_0 \left[1 - \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4} e_0^2 \right) \frac{v^2}{n_0^2} - \frac{15}{8} \frac{v^4}{n_0^4} \right],$$

тогда как решение относительно l из $e \cos l, e \sin l$ дает

$$\begin{aligned} l = l' &+ \frac{1}{e_0} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{45}{16} e_0^2 - \frac{91}{384} e_0^4 \right) \frac{v^2}{n_0^2} + \right. \\ &+ \left(\frac{7}{8} + \frac{723}{64} e_0^2 \right) \frac{v^4}{n_0^4} + \frac{77}{64} \frac{v^6}{n_0^6} \left. \right] \sin l' + \\ &+ \left(-\frac{1}{e_0^2} \right) \frac{1}{8} \frac{v^4}{n_0^4} \sin 2l'. \end{aligned}$$

Появление e_0 в качестве делителя в выражении для l представляет собой распространяющее явление в теории возмущений. Оно связано с неопределенностью перигея в случае круговых орбит. Подобная неопределенность существует также в выражении для g . Однако это не влияет ни на среднюю долготу $h + g + l$, ни на истинную долготу.

Дифференциальные уравнения дают

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h + g + l) &= n - \frac{v^2}{n} \left(1 + \frac{9}{8} e^2 + \frac{3}{32} e^4 \right) + \\ &+ \frac{v^2}{n} \left(\frac{7}{4} e - \frac{3}{32} e^3 + \frac{3}{256} e^5 \right) \cos l, \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{v^2}{n} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} e^2 \right) + \frac{v^2}{n} \left(\frac{3}{2} e + \frac{9}{16} e^3 \right) \cos l. \end{aligned}$$

Если в этих выражениях заменить a, e, l их выражениями через a_0, e_0, l' , то получим

$$\begin{aligned} h + g + l &= h' + g' + l' + \\ &+ \left[\left(\frac{13}{4} e_0 - \frac{9}{32} e_0^3 + \frac{5}{256} e_0^5 \right) \frac{v^2}{n_0^2} + \left(\frac{175}{16} e_0 + \frac{405}{128} e_0^3 \right) \frac{v^4}{n_0^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1283}{32} e_0 \frac{v^6}{n_0^6} \right] \sin l' + \frac{3}{2} e_0^2 \frac{v^4}{n_0^4} \sin 2l', \\ h &= h' + \left[\left(\frac{3}{2} e_0 + \frac{9}{16} e_0^3 \right) \frac{v^2}{n_0^2} + \frac{21}{4} e_0 \frac{v^4}{n_0^4} \right] \sin l' + \frac{9}{16} e_0^2 \frac{v^4}{n_0^4} \sin 2l'. \end{aligned}$$

Наконец, если выражение для e^2 , найденное из (34) и (35), подставить в соотношение

$$L = G (1 - e^2)^{-1/2},$$

то получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a_0 \mu} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{16} e_0^2 - \frac{1}{64} e_0^4 \right) \frac{v^4}{n_0^4} - \frac{7}{32} e_0^2 \frac{v^6}{n_0^6} - \right. \\ &- \left[\left(\frac{1}{2} e_0 - \frac{1}{16} e_0^3 + \frac{1}{384} e_0^5 \right) \frac{v^2}{n_0^2} + \left(\frac{7}{8} e_0 + \frac{17}{64} e_0^3 \right) \frac{v^4}{n_0^4} + \frac{157}{64} e_0 \frac{v^6}{n_0^6} \right] \cos l' - \\ &\quad \left. - \frac{3}{16} e_0^2 \frac{v^4}{n_0^4} \cos 2l' \right\}. \end{aligned}$$

Если L и l записаны в виде

$$L = L_0 + L_1 \cos l' + L_2 \cos 2l' + \dots,$$

$$l = l' + l_1 \sin l' + l_2 \sin 2l' + \dots$$

и если в соответствии с формулой (21) разд. 8

$$\begin{aligned} L' &= L_0 + \frac{1}{2}(L_1 l_1 + 2L_2 l_2 + \dots) = \\ &= L_0 \left[1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} e_0^2 - \frac{83}{512} e_0^4 \right) \frac{v^4}{n_0^4} - \left(\frac{7}{16} + \frac{69}{16} e_0^2 \right) \frac{v^6}{n_0^6} - \frac{169}{128} \frac{v^8}{n_0^8} \right], \end{aligned}$$

то

$$L', G, H, l', g', h'$$

будут новыми каноническими переменными в задаче, в которой гамильтониан является функцией только от L', G, H . Справедливость этого проверяется путем подстановки решения в \bar{F} . Это дает

$$\bar{F}^* = \frac{\mu}{a_0} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{v^2}{n_0^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e_0^2 \right) + \frac{v^4}{n_0^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e_0^2 - \frac{67}{256} e_0^4 \right) + \dots \right\}.$$

Затем подстановка производится во все остальные члены функции F . После этого можно предпринять следующую операцию.

11. Решение этой же задачи при помощи определяющей функции. Гамильтониан тот же, что и в предыдущем разделе. Пусть S означает определяющую функцию, разложенную в ряд по степеням v^2 , и пусть

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots, \\ S_0 &= L'l + G'g + H'h, \\ L &= \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g} = G', \quad H = \frac{\partial S}{\partial h} = H', \\ l' &= \frac{\partial S}{\partial L'}, \quad g' = \frac{\partial S}{\partial G'}, \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'}. \end{aligned} \tag{37}$$

Разность $S - S_0$ будет функцией от L', G', H', l .

Пусть гамильтониан преобразован в функцию от L', G', H' . Тогда

$$\bar{F}(L, G, H, l) = \bar{F}^*(L', G', H').$$

Подстановка уравнений (37) в левую часть этого уравнения дает с точностью до членов второго порядка

$$F_0 \left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial S_2}{\partial l} \right) + \bar{F}_1 \left(L' + \frac{\partial S_1}{\partial l}, G', H', l \right) = F_0^* + \bar{F}_1^* + \bar{F}_2^*,$$

или, согласно разложению в ряд Тейлора, находим

$$\begin{aligned} F_0(L') &= F_0^*, \\ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \bar{F}_1 &= \bar{F}_1^*, \\ \frac{\partial F_0}{\partial l} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} &= \bar{F}_2^*. \end{aligned}$$

Подстановка в часть функции \bar{F} , содержащую члены первого порядка,

$$\bar{F}_1 = P_1 + Q_1 \cos l$$

дает

$$\begin{aligned}\bar{F}_1^* &= P_1' = \frac{v^2}{n'} L' \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e'^2 \right), \\ \frac{\partial S_1}{\partial l} &= \frac{Q_1}{n'} \cos l = \\ &= \frac{v^2}{n'^2} L' \left(-\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 - \frac{1}{384} e'^5 \right) \cos l, \\ S_1 &= \frac{v^2}{n'^2} L' \left(-\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 - \frac{1}{384} e'^5 \right) \sin l.\end{aligned}$$

Члены второго порядка дают

$$-n' \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{3}{2} \frac{n'}{L'} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial L'} + \frac{\partial Q_1}{\partial L'} \cos l \right) \frac{\partial S_1}{\partial l} = \bar{F}_2^*.$$

Находим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial L'} &= \frac{v^2}{n'} \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{4} e'^2 \right), \\ \frac{\partial Q_1}{\partial L'} &= \frac{v^2}{n'} \left(-\frac{1}{2e} - \frac{21}{16} e + \frac{19}{384} e'^3 \right).\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения, получаем

$$\begin{aligned}\bar{F}_2^* &= \frac{v^4}{n'^3} L' \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{51}{512} e'^4 \right), \\ \frac{\partial S_2}{\partial l} &= \frac{v^4}{n'^4} L' \left[\left(-\frac{7}{8} e' - \frac{17}{64} e'^3 + \frac{65}{1536} e'^5 \right) \cos l + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{51}{512} e'^4 \right) \cos 2l \right], \\ S_2 &= \frac{v^4}{n'^4} L' \left[\left(-\frac{7}{8} e' - \frac{17}{64} e'^3 + \frac{65}{1536} e'^5 \right) \sin l + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} e'^2 - \frac{51}{1024} e'^4 \right) \sin 2l \right].\end{aligned}$$

В этих выражениях штрихованные величины n' , e' связаны с новыми переменными следующими соотношениями:

$$n' = \frac{\mu^2}{L'^3}, \quad e'^2 = 1 - \frac{G'^2}{L'^2},$$

так что

$$\begin{aligned}\frac{\partial n'}{\partial L'} &= -\frac{3\mu^2}{L'^4}, \quad \frac{\partial e'}{\partial L'} = \frac{G'^2}{e'L'^3} = \frac{1-e'^2}{e'L'}, \\ \frac{\partial e'}{\partial G'} &= \frac{-G'}{e'L'^2} = -\frac{(1-e'^2)^{1/2}}{e'L'}.\end{aligned}$$

При помощи этих соотношений могут быть без труда получены производные от S по L' , G' , а следовательно, и решение.

В качестве примера мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial L'} &= l' = l - \frac{v^2}{n'^2} \left(\frac{1}{2e'} + \frac{45}{16} e' - \frac{91}{384} e'^3 \right) \sin l - \\ &\quad - \frac{v^4}{n'^4} \left(\frac{7}{8e'} + \frac{723}{64} e' + \frac{3755}{1536} e'^3 \right) \sin l + \\ &\quad + \frac{v^4}{n'^4} \left(\frac{21}{16} + \frac{653}{256} e'^2 \right) \sin 2l.\end{aligned}$$

Это уравнение несколько более общего типа, чем уравнение Кеплера. Решение относительно l и функций от l , выраженных через l' , можно получить при помощи разложения Лагранжа. С точностью до четвертой степени это решение имеет следующий вид:

$$l = l' + \left[\frac{v^2}{n'^2} \left(\frac{1}{2e'} + \frac{45}{16} e' - \frac{91}{384} e'^3 \right) + \frac{v^4}{n'^4} \left(\frac{7}{8e'} + \frac{723}{64} e' + \frac{3755}{1536} e'^3 \right) \right] \sin l' + \frac{v^4}{n'^4} \left(\frac{1}{8e'^2} + \frac{3}{32} + \frac{1975}{1536} e'^2 \right) \sin 2l'.$$

Новый гамильтониан выражается через новые переменные следующим образом:

$$\bar{F}^* = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{v^2}{n'} L' \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e'^2 \right) + \frac{v^4}{n'^3} L' \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{51}{512} e'^4 \right) + \dots,$$

тогда как решение Делонэ дает для соответствующих членов

$$F^* = \frac{\mu}{2a_0} + v^2 a_0^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e_0^2 + \frac{v^2}{n_0^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e_0^2 - \frac{67}{256} e_0^4 \right) + \dots \right].$$

Можно показать, что эти два выражения тождественны друг другу. Из решения Делонэ находим

$$a_0 = a' \left[1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{83}{256} e'^4 \right) \frac{v^4}{n'^4} + \dots \right],$$

$$e_0^2 = e'^2 \left[1 - \left(\frac{21}{16} + \frac{691}{128} e'^2 \right) \frac{v^4}{n'^4} + \dots \right];$$

поэтому

$$\frac{\mu}{2a_0} = \frac{\mu^2}{L'^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{v^4}{n'^4} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{83}{512} e'^4 \right) + \dots \right],$$

$$v^2 a_0^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e_0^2 \right) = \frac{\mu^2}{L'^2} \frac{v^2}{n'^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} e'^2 \right) + \dots,$$

$$\frac{v^4 a_0^2}{n_0^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e_0^2 - \frac{67}{256} e_0^4 \right) = \frac{\mu^2}{L'^2} \frac{v^4}{n'^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e'^2 - \frac{67}{256} e'^4 \right) + \dots.$$

Сумма этих выражений с точностью до членов четвертого порядка совпадает с выражением, полученным выше.

Для того чтобы найти решение с той степенью точности, которая была достигнута Делонэ, необходимо довести определяющую функцию и разложение в ряд Тейлора до членов четвертого порядка. Выражения становятся при этом более сложными; тем не менее этот метод значительно проще оригинального метода Делонэ. Кроме того, можно отметить следующие преимущества указанного метода:

а) Новый гамильтониан получается непосредственно в процессе нахождения определяющей функции.

б) Величины a' , n' , e' связаны с новыми переменными L' , G' теми же формулами, что и в эллиптическом движении, тогда как в методе Делонэ a_0 , n_0 , e_0 зависят от этих переменных сложным образом в виде степенных рядов, в которые входят e_0 , v^2/n_0^2 и т. д. и которые становятся все более сложными по мере продолжения решения.

в) В то время как Делонэ при каждой операции исключает только один член, применяя метод определяющей функции, представляется

вполне возможным одновременное выполнение преобразования над любым количеством членов.

12. Движение искусственного спутника. Для спутника, очень близкого к центральной планете, главное возмущающее ускорение возникает не из-за силы притяжения Солнца, а вследствие несферичности планеты.

Пятый, самый близкий спутник Юпитера, расположенный на среднем расстоянии от центра планеты, превышающем лишь в 2,54 раза ее экваториальный радиус, дает наиболее поразительный пример такого типа движения среди естественных спутников в солнечной системе. Для этого спутника как эксцентриситет, так и наклонность к экваториальной плоскости Юпитера очень малы. Достаточно очень простой теории, чтобы объяснить наблюдаемые характерные особенности этой орбиты. Аналогичные упрощающие условия относятся к возмущениям, обусловленным влиянием сжатия, в движении других естественных спутников в солнечной системе. Более общее решение задачи о движении спутника потребовалось только после того, как на орбиты вокруг Земли были выведены искусственные спутники. Первый искусственный спутник Земли (Спутник 1) имел наклонность выше 60° .

Пусть в прямоугольной системе координат плоскость xy совпадает с экваториальной плоскостью планеты. Уравнения движения частицы с преенебрежимо малой массой в гравитационном поле этой планеты имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (38)$$

Если планета обладает осевой симметрией относительно полярной оси, то силовая функция может быть разложена в ряд

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{J_k R^k}{r^k} P_k(\sin \beta) \right],$$

где R — экваториальный радиус планеты, а β — широта, отнесенная к экваториальной плоскости; P_k — полиномы Лежандра и J_k — коэффициенты, которые зависят от распределения масс внутри центральной планеты. В гл. III было показано, что член с $k=1$ отсутствует, если центр масс планеты лежит в начале системы координат. Если планета симметрична относительно экватора, то в этом разложении присутствуют только четные гармоники. Для Земли разложение, включающее вторые и четвертые гармоники, является почти достаточным для обычных приложений. Тем не менее наблюдения искусственных спутников показали, что трети и, возможно, пятые гармоники могут дать заметные эффекты. В этом разделе мы ограничимся главным образом рассмотрением «основной задачи» теории движения искусственных спутников, в которой силовая функция ограничена главным членом μ/r и второй гармоникой.

Следовательно, силовую функцию необходимо выбрать в виде

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{J_2 R^2}{r^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \beta \right) \right].$$

Пусть I означает мгновенную наклонность плоскости орбиты, g — аргументperiцентра, f — истинную аномалию. Тогда

$$\sin \beta = \sin I \sin(g + f),$$

$$2 \sin^2 \beta = \sin^2 I [1 - \cos(2g + 2f)].$$

Подстановка этих выражений в U дает

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu J_2 R^2}{a^3} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 I \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 I \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g+2f) \right].$$

Теперь уравнения (1) можно написать в переменных Делонэ

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned}$$

если

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + U - \frac{\mu}{r} = F_0 + F_1,$$

где

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2},$$

$$F_1 = \frac{\mu^4 J_2 R^2}{L^6} \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g+2f) \right].$$

За исключением функций

$$\frac{a^3}{r^3} \text{ и } \frac{a^3}{r^3} \cos(2g+2f),$$

присутствующих в F_1 , как F_0 , так и F_1 выражаются в явном виде через переменные Делонэ. Эти функции могут быть разложены при помощи известных выражений в эллиптическом движении в следующие ряды:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{r^3} &= \frac{L^3}{G^3} + \sum_{j=1}^{\infty} 2P_j \cos jl \equiv \frac{L^3}{G^3} + \sigma_1, \\ \frac{a^3}{r^3} \cos(2g+2f) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Q_j \cos(2g+jl) \equiv \sigma_2. \end{aligned} \tag{39}$$

Коэффициенты P_j , Q_j являются степенными рядами по e и, следовательно, функциями от G/L .

Легко видеть, что $Q_0 = 0$, так как

$$Q_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{a^3}{r^3} \cos 2f dl.$$

При помощи подстановки

$$dl = \frac{L}{G} \frac{r^2}{a^2} df$$

этот интеграл принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{\pi} \frac{L}{G} \int_0^\pi \frac{a}{r} \cos 2f df = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{L^3}{G^3} \int_0^\pi (1 + e \cos f) \cos 2f df = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Важное свойство функции F состоит в том, что отсутствует переменная h . Поэтому h является так называемой циклической координатой; уравнение для H дает

$$H = \text{const},$$

и потому эта задача по сути дела является задачей движения только с двумя степенями свободы. Поэтому можно было бы фактически не обращать внимания на уравнения для dH/dt и dh/dt , получить решение для L , G , l , g (оставляя H в качестве постоянной, входящей в разложение) и в конечном счете найти h квадратурой, подставляя выражения для L , G , l , g через время и четыре постоянные интегрирования в выражение для dh/dt . Однако удобнее рассматривать эту задачу как задачу с тремя степенями свободы. Упрощение, получающееся от постоянства H , является почти несомненным, а решение в точности совпадает с найденным при помощи альтернативной процедуры.

Когда используется метод канонического преобразования, то решение получается в том случае, если найдено такое преобразование, что новый гамильтониан является функцией только от L , G , H . Поскольку h отсутствует в первоначальных уравнениях, то это равносильно утверждению, что цель состоит в том, чтобы найти преобразование, которое исключает как l , так и g . Удобно выполнить это преобразование в два этапа. На первом этапе исключается угловая переменная l . Такое преобразование можно назвать исключением короткопериодических членов. На втором этапе необходимо исключить переменную g . Это исключение долгопериодических членов. Гамильтониан, остающийся после второго этапа, определяет вековые члены в l , g и h .

Для исключения короткопериодических членов напишем

$$F(L, G, H, l, g, -) = F^*(L', G', H', -, g', -)$$

и введем разложение по степеням J_2 по формуле

$$\begin{aligned} S(L', G', H', l, g, h) &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots, \\ S_0 &= L'l + G'g + H'h, \end{aligned}$$

где S_1 , S_2 , ... суть функции от L' , G' , H' , l , g и

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial S}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial S}{\partial g}, \quad H = \frac{\partial S}{\partial h} = \frac{\partial S_0}{\partial h} = H', \\ l' &= \frac{\partial S}{\partial L'}, \quad g' = \frac{\partial S}{\partial G'}, \quad h' = \frac{\partial S}{\partial H'}. \end{aligned} \tag{40}$$

Разложение с точностью до второй степени относительно J_2 , подобное использованному в разд. 9, дает

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0^*, \\ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + F_1 &= F_1^*, \\ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g} &= \frac{\partial F_1^*}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'} + F_2^*. \end{aligned}$$

Положим для краткости

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 I = A, \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 I = B;$$

тогда получим следующее выражение:

$$F_1 = \frac{\mu^4 J_2 R^2}{2L^6} \left(A \frac{L^3}{G^3} + A\sigma_1 + B\sigma_2 \right),$$

в котором слагаемые $A\sigma_1$, $B\sigma_2$ являются периодическими функциями от l , не содержащими членов, не зависящих от l , тогда как слагаемое AL^3/G^3 не зависит от l . Поскольку

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'} = -\frac{\mu^2}{L'^3},$$

то часть первого порядка дает

$$F_1^* = \frac{A}{2} \frac{\mu^4 J_2 R^2}{L'^3 G'^3}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2L'^3} (A\sigma_1 + B\sigma_2). \quad (42)$$

В большинстве задач небесной механики необходимо было бы на этом этапе ввести разложения в бесконечные ряды. Здесь же упрощающее обстоятельство заключается в том, что уравнение для $\partial S_1 / \partial l$ является не дифференциальным уравнением в частных производных, а обыкновенным дифференциальным уравнением. Поэтому S_1 можно определить из соотношения

$$S_1 = \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2L'^3} \int (A\sigma_1 + B\sigma_2) dl.$$

Используя метод, примененный для доказательства того, что $Q_0 = 0$, легко найти

$$\begin{aligned} \int \sigma_1 dl &= \int \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{L^3}{G^3} \right) dl = \frac{L^3}{G^3} (f - l + e \sin f), \\ \int \sigma_2 dl &= \int \frac{a^3}{r^3} \cos (2g + 2f) dl = \\ &= \frac{L^3}{G^3} \left[\frac{1}{2} \sin (2g + 2f) + \frac{e}{2} \sin (2g + f) + \frac{e}{6} \sin (2g + 3f) \right]. \end{aligned}$$

Не нужно никаких постоянных интегрирования. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3} \left\{ A' (f - l + e' \sin f) + \right. \\ &\quad \left. + B' \left[\frac{1}{2} \sin (2g + 2f) + \frac{e'}{2} \sin (2g + f) + \frac{e'}{6} \sin (2g + 3f) \right] \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

где штрихи у A , B , e указывают на то, что L , G , H в этих функциях должны быть заменены на L' , G' , H' .

При помощи выражения для S_1 можно получить решение первого порядка. Необходимые для этого вспомогательные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial L} &= \frac{1 - e^2}{eL} = \frac{G^2}{eL^3}, \quad \frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{eL} = -\frac{G}{eL^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial e} &= \left[\frac{a}{r} + \frac{1}{1 - e^2} \right] \sin f. \end{aligned}$$

Поскольку A' , B' являются простыми функциями от H'/G' , то выражение (43) для S_1 получается как функция от G' , H' , e' , f , g , в которой f

представляет собой функцию от e' и l . Пусть $\partial S_1 / \partial e'$ означает производную от S_1 по e' , так что

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial e'} &= \left(\frac{\partial S_1}{\partial e'} \right) + \frac{\partial S_1}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial e'} = \\ &= \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3} \left\{ A' \left[(1 + e' \cos f) \frac{\partial f}{\partial e'} + \sin f \right] + \right. \\ &\quad + B' \left[\left(\cos(2g + 2f) + \frac{e'}{2} \cos(2g + f) + \frac{e'}{2} \cos(2g + 3f) \right) \frac{\partial f}{\partial e'} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sin(2g + f) + \frac{1}{6} \sin(2g + 3f) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Это выражение можно упростить, используя тождество

$$(1 + e' \cos f) \cos(2g + 2f) = \cos(2g + 2f) + \frac{e'}{2} [\cos(2g + f) + \cos(2g + 3f)],$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial e'} &= \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3} \left\{ A' \left[(1 + e' \cos f) \frac{\partial f}{\partial e'} + \sin f \right] + \right. \\ &\quad + B' \left[(1 + e' \cos f) \frac{\partial f}{\partial e'} \cos(2g + 2f) + \frac{1}{2} \sin(2g + f) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \sin(2g + 3f) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$(1 + e' \cos f) \frac{\partial f}{\partial e'} = \left[\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) + \frac{a}{r} \right] \sin f,$$

то это выражение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial e'} &= \frac{\mu^2 J_2 R^2}{2G'^3} \left\{ A' \left(\frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} + \frac{a}{r} + 1 \right) \sin f + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} B' \left[\left(-\frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} - \frac{a}{r} + 1 \right) \sin(2g + f) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{a^2}{r^2} \frac{G'^2}{L'^2} + \frac{a}{r} + \frac{1}{3} \right) \sin(2g + 3f) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Пусть теперь

$$j_2 = \frac{\mu^2 J_2 R^2}{L'^4}.$$

Так как

$$\frac{\partial S_1}{\partial L'} = \frac{\partial S_1}{\partial e'} \frac{\partial e'}{\partial L'}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial G'} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial G'} \right) + \frac{\partial S_1}{\partial e'} \frac{\partial e'}{\partial G'}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial l} = \frac{\partial S_1}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial l},$$

то решение, получаемое при $S = S_0 + S_1$, может быть написано в следующей форме:

$$\begin{aligned}L &= L' \left\{ 1 + j_2 \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 I' \right) \left(\frac{a^3}{r^3} - (1 - e'^2)^{-3/2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 I' \right) \frac{a^3}{r^3} \cos(2g + 2f) \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G &= G' \left\{ 1 + j_2 (1 - e'^2)^{-2} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos^2 I' \right) \left[\cos(2g + 2f) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e' \cos(2g + f) + \frac{1}{3} e' \cos(2g + 3f) \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l &= l' - \frac{j_2}{e'} (1 - e'^2)^{-1/2} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 I' \right) \left(\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) + \frac{a}{r} + 1 \right) \sin f + \right. \\
&\quad + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cos^2 I' \right) \left[\left(-\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) - \frac{a}{r} + 1 \right) \sin (2g + f) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) + \frac{a}{r} + \frac{1}{3} \right) \sin (2g + 3f) \right] \right\}, \\
g &= g' + \frac{j_2}{e'} (1 - e'^2)^{-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 I' \right) \left(\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) + \frac{a}{r} + 1 \right) \sin f + \right. \\
&\quad + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cos^2 I' \right) \left[\left(-\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) - \frac{a}{r} + 1 \right) \sin (2g + f) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{a^2}{r^2} (1 - e'^2) + \frac{a}{r} + \frac{1}{3} \right) \sin (2g + 3f) \right] \right\} + \\
&\quad + j_2 (1 - e'^2)^{-2} \left\{ \left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{4} \cos^2 I' \right) (f - l + e' \sin f) + \right. \\
&\quad + \left(\frac{9}{4} - \frac{15}{4} \cos^2 I' \right) \left[\frac{1}{2} \sin (2g + 2f) + \frac{e'}{2} \sin (2g + f) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e'}{6} \sin (2g + 3f) \right] \right\}, \\
h &= h' - j_2 (1 - e'^2)^{-2} \cos I' \left[\frac{3}{2} (f - l + e' \sin f) - \frac{3}{4} \sin (2g + 2f) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4} e' \sin (2g + f) - \frac{1}{4} e' \sin (2g + 3f) \right].
\end{aligned}$$

Этим завершается исключение короткопериодических членов, если достаточно вычислить эти члены в элементах только с точностью до первой степени j_2 . В этом случае мы не интересуемся определением функции S_2 .

В силу того что F_1^* не зависит от g' , долгопериодические члены, т. е. такие члены, которые включают в себя только аргумент g , должны возникнуть из F_2^* . Уравнение для F_2^* может быть приведено к следующему виду:

$$F_2^* = [] + \frac{\partial F_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g},$$

где квадратные скобки $[]$ означают ту часть выражения $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2$, которая не зависит от l . Эти вычисления не представляют трудностей, но являются трудоемкими. В результате окончательно получается

$$\begin{aligned}
F_2^* &= \frac{\mu^2 j_2^2}{4L'^2} \left\{ \left[\frac{3}{32} (5 - 18 \cos^2 I' + 5 \cos^4 I') (1 - e'^2)^{-5/2} + \right. \right. \\
&\quad + \frac{3}{8} (1 - 6 \cos^2 I' + 9 \cos^4 I') (1 - e'^2)^{-3} - \\
&\quad - \frac{15}{32} (1 - 2 \cos^2 I' - 7 \cos^4 I') (1 - e'^2)^{-7/2} + \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{16} (1 - 16 \cos^2 I' + 15 \cos^4 I') e'^2 (1 - e'^2)^{-7/2} \cos 2g' \right] \right\},
\end{aligned}$$

где g' подставлено вместо g , причем разность имеет множителем j_2 . Новый гамильтониан

$$F^* = \frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\mu^2 j_2 L'}{2G'^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H'^2}{G'^2} \right) + F_2^*$$

является функцией от L' , G' , H' , g' . Следовательно, L' и H' суть постоянные. Если вводится новая определяющая функция S^* и если

$$S^* = L''l' + G''g' + H''h' + S_1^*(L', G'', H'', g'),$$

то подстановка выражения

$$G' = G'' + \frac{\partial E_1^*}{\partial g'}$$

в гамильтониан F^* дает

$$F_0^* + F_1^*\left(L'', G'' + \frac{\partial S_1^*}{\partial g'}, H''\right) + F_2^*(L'', G'', H'', g') = F_0^{**} + F_1^{**} + F_2^{**}.$$

Приравнивая слагаемые равного порядка, получаем

$$\begin{aligned} F_0^* &= F_0^{**}, \\ F_1^* &= F_1^{**}, \\ \frac{\partial F_1^*}{\partial G''} - \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} + F_2^* &= F_2^{**}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial G''} = \frac{3}{4} \frac{\mu^2 j_2 L''}{G''^4} (1 - 5 \cos^2 I'').$$

Часть функции F_2^* , которая зависит от g' , дает следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1^*}{\partial g'} &= -\frac{j_2 e''^2 (1 - e''^2)^{-2} G''}{16} \frac{(1 - 16 \cos^2 I'' + 15 \cos^4 I'')}{(1 - 5 \cos^2 I'')} \cos 2g', \\ S_1^* &= -\frac{j_2 e''^2 (1 - e''^2)^{-2} G''}{32} \frac{(1 - 16 \cos^2 I'' + 15 \cos^4 I'')}{(1 - 5 \cos^2 I'')} \sin 2g'', \end{aligned}$$

где g' заменено на g'' . Дифференцирование по g'' , L'' , G'' , H'' дает

$$\begin{aligned} G' &= G'' \left\{ 1 + j_2 e''^2 (1 - e''^2)^{-2} \left[-\frac{1}{16} (1 - 11 \cos^2 I'') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{5}{2} \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} \right] \cos 2g'' \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l' &= l'' + j_2 (1 - e''^2)^{-1/2} \left[\frac{1}{16} (1 - 11 \cos^2 I'') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} \right] \sin 2g'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g' &= g'' + j_2 (1 - e''^2)^{-2} \left[-\frac{1}{32} (2 + e''^2) + \frac{11}{32} (2 + 3e''^2) \cos^2 I'' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{4} (2 + 5e''^2) \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{25}{2} e''^2 \cos^6 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-2} \right] \sin 2g'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h' &= h'' + j_2 e''^2 (1 - e''^2)^{-2} \cos I'' \left[-\frac{11}{16} - 5 \cos^2 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{25}{2} \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-2} \right] \sin 2g''. \end{aligned}$$

Благодаря тому что $\partial F_1^*/\partial G''$ имеет множителем j_2 , долгопериодические члены в элементах имеют первый порядок относительно j_2 , хотя они возникают из функции F_2^* , имеющей множителем j_2^2 . Деление на j_2

будет также происходить и с теми долгопериодическими членами, которые порождаются четвертой гармоникой. Факты наблюдений свидетельствуют о том, что J_4 одного и того же порядка величины, как и J_2^2 . Следовательно, в вычисления значений долгопериодических членов крайне необходимо включать четвертую гармонику.

Эти члены не представляют затруднений. Дальнейшие подробности можно найти в статье Брауэра (Astron. J., 64, 378—397, 1959). Следует заметить, что величины γ_2 , γ_4 , используемые в этой статье, эквивалентны соответственно $\frac{1}{2}j_2$ и $-\frac{3}{8}j_4$ и что $j_4 = \mu^4 J_4 R^4 L'^{-8}$. Результаты приводятся здесь без вывода:

$$\Delta_4 G' = \frac{j_4}{l_2} G'' e''^2 (1 - e''^2)^{-2} \left[-\frac{5}{16} + \frac{15}{16} \cos^2 I'' + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} \right] \cos 2g'',$$

$$\Delta_4 l' = \frac{j_4}{l_2} (1 - e''^2)^{-1/2} \left[\frac{5}{16} - \frac{15}{16} \cos^2 I'' - \frac{5}{2} \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} \right] \sin 2g'',$$

$$\Delta_4 g' = \frac{j_4}{l_2} (1 - e''^2)^{-2} \left[-\frac{5}{32} (2 + e''^2) + \frac{15}{32} (2 + 3e''^2) \cos^2 I'' + \right. \\ \left. + \frac{5}{4} (2 + 5e''^2) \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{25}{2} e''^2 \cos^6 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-2} \right] \sin 2g'',$$

$$\Delta_4 h' = \frac{j_4}{l_2} e''^2 (1 - e''^2)^{-2} \cos I'' \left[-\frac{15}{16} - 5 \cos^2 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{25}{2} \cos^4 I'' (1 - 5 \cos^2 I'')^{-2} \right] \sin 2g''.$$

Вековые движения, полученные из F_2^{**} и включающие влияния, обусловленные четвертой гармоникой, имеют следующие выражения:

$$\frac{dl''}{dt} = n'' \left\{ 1 + \frac{3}{4} j_2 \eta^{-3} (-1 + 3 \cos^2 I'') + \frac{3}{128} j_2^2 \eta^{-7} [-15 + 16\eta + 25\eta^2 + \right. \\ \left. + (30 - 96\eta - 90\eta^2) \cos^2 I'' + (105 + 144\eta + 25\eta^2) \cos^4 I''] + \right. \\ \left. + \frac{45}{128} j_4 \eta^{-7} e''^2 [-3 + 30 \cos^2 I'' - 35 \cos^4 I''] \right\},$$

$$\frac{dg''}{dt} = n'' \left\{ \frac{3}{4} j_2 \eta^{-4} (-1 + 5 \cos^2 I'') + \frac{3}{128} j_2^2 \eta^{-8} [-35 + 24\eta + 25\eta^2 + \right. \\ \left. + (90 - 192\eta - 126\eta^2) \cos^2 I'' + (385 + 360\eta + 45\eta^2) \cos^4 I''] + \right. \\ \left. + \frac{15}{128} j_4 \eta^{-8} [-21 + 9\eta^2 + (270 - 126\eta^2) \cos^2 I'' + \right. \\ \left. + (-385 + 189\eta^2) \cos^4 I''] \right\},$$

$$\frac{dh''}{dt} = n'' \cos I'' \left\{ -\frac{3}{2} j_2 \eta^{-4} + \frac{3}{32} j_2^2 \eta^{-8} [-5 + 12\eta + 9\eta^2 + \right. \\ \left. + (-35 - 36\eta - 5\eta^2) \cos^2 I''] + \right. \\ \left. + \frac{15}{32} j_4 \eta^{-8} (-5 + 3\eta^2) (3 - 7 \cos^2 I'') \right\},$$

где $n'' = a''^{-3/2} \mu^{1/2}$, $\eta = \sqrt{1 - e''^2}$.

Особенный интерес представляет характерное свойство долгопериодических возмущений, выражющееся в появлении делителя $1 - 5 \cos^2 I''$ в некоторых членах. В G' и l' появляется первая степень этого делителя; в g' и h' присутствует вторая степень этого делителя в добавление к его первой степени. Для наклонностей, которые дают малые значения выражения $1 - 5 \cos^2 I''$, т. е. для I'' , близких к $63^\circ 26'$, эти малые делители делают указанные выражения нереальными. Это означает, что выбранная форма решения непригодна для наклонностей, близких к этой критической наклонности. Эта проблема исследована Хори в статье, опубликованной в Astron. J. (65, 291—300, 1960). Хори показал, что трудность, связанная с малым делителем вблизи критической наклонности, преодолевается при разложении решения по степеням $\sqrt{j_2}$, а не по степеням j_2 .

13. Связь с проблемой двух неподвижных центров. Неожиданное свойство рассмотренного решения заключается в том, что при $j_4 = -j_2^2$ те члены, которые содержат делители $1 - 5 \cos^2 I''$ и $(1 - 5 \cos^2 I'')^2$ и умножены на j_2 , взаимно уничтожаются с аналогичными членами, умноженными на j_4/j_2 . Поэтому для частного значения отношения $j_4/j_2^2 = -1$ малые делители исчезают, и решение имеет силу для любых наклонностей, даже для критической наклонности и ее близкой окрестности. Результаты, полученные из анализа наблюдений искусственных спутников, свидетельствуют о том, что для Земли отношение j_4/j_2^2 приблизительно равно $-1,4$. Поэтому для Земли это частное решение не годится, но является лучшим приближением, чем то решение, в котором пренебрегают четвертой гармоникой.

Уничтожение членов с делителями $1 - 5 \cos^2 I''$ и $(1 - 5 \cos^2 I'')^2$ при частном значении отношения $j_4/j_2^2 = -1$ должно иметь более глубокую причину. Ответ на этот вопрос дал Винти, который показал, что для силовой функции

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (J_2)^l R^{2l}}{r^{2l}} P_{2l}(\sin \beta) \right]$$

может быть получено решение, выраженное через эллиптические интегралы. Это решение не имеет особенности в окрестности критической наклонности. Вывод, данный Винти, сложен; более простой подход состоит в следующем.

Рассмотрим движение частицы с пренебрежимо малой массой под действием гравитационного притяжения двух неподвижных центров с одинаковыми массами, равными $m/2$, и координатами $x = y = 0, z = \pm c$. В силу осевой симметрии относительно оси z и симметрии относительно плоскости xy потенциальная функция будет иметь следующий вид:

$$U = \frac{k^2 m}{r} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l} P_{2l}(\sin \beta)}{r^{2l}} \right], \quad (44)$$

где коэффициенты B_{2l} являются постоянными, которые могут зависеть только от c . Эти коэффициенты могут быть вычислены заданием значения U для некоторой точки, лежащей на оси симметрии, т. е. оси z .

В данном случае имеем

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{k^2 m}{2} \left[\frac{1}{r-c} + \frac{1}{r+c} \right] = \\ &= \frac{k^2 m}{2r} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r} \right)^j + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{c}{r} \right)^j \right] = \\ &= \frac{k^2 m}{r} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c^{2l}}{r^{2l}} \right]. \end{aligned}$$

На оси $z \sin \beta = \pm 1$. Поскольку $P_{2l}(\pm 1) = +1$, то общее выражение дает

$$U_{(\sin \beta = \pm 1)} = U_1 = \frac{k^2 m}{r} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{r^{2l}} \right],$$

откуда

$$B_{2l} = c^{2l}.$$

Со времен Эйлера (1760) известно, что проблема двух неподвижных центров принадлежит к числу разрешимых проблем динамики; решение можно выразить через эллиптические интегралы, не прибегая к бесконечным рядам.

Потенциальная функция (44) при $B_{2l} = c^{2l}$ соответствует частному случаю вытянутого сфериона, т. е. внешнее гравитационное поле в частном случае вытянутого сфериона можно моделировать гравитационным полем двух неподвижных центров с равными массами. Такая модель неприменима к внешнему гравитационному полю сжатого сфериона, которое требует отрицательного значения для коэффициента B_2 . Единственное изменение, необходимое для перехода от случая двух неподвижных центров, лежащих на оси z , к специальному потенциалу в форме Винти для сжатого сфериона, заключается в замене c на $c\sqrt{-1}$. В решение проблемы двух неподвижных центров с одинаковыми массами $m/2$ входят только четные степени c . Путем замены c^2 на $-c^2$ можно совершить переход к решению Винти.

14. Влияние сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника. В большинстве реально существующих случаев движения искусственных спутников влияние сопротивления атмосферы является наиболее значительным после влияния сжатия. Принимая во внимание уменьшение большой полуоси вследствие влияния сопротивления атмосферы, можно утверждать, что теория, в которой не учитывается сопротивление атмосферы, вряд ли пригодна. Это особенно верно, если высота перигея меньше, чем, например, 200 миль (320 км).

Подход, сочетающий свободную от учета сопротивления атмосферы теорию возмущений, вызываемых сжатием, с теорией влияния сопротивления атмосферы на эллиптическое движение, несомненно дает лишь грубое решение этой задачи.

В данном разделе мы будем заниматься проблемой совместного учета возмущений, обусловливаемых сжатием планеты и влиянием сопротивления атмосферы, в едином решении. Такой подход представляет собой по сути дела знакомый уже принцип метода вариации произвольных постоянных. Использование канонических переменных имеет особые пре-

имущества при рассмотрении этой задачи вследствие легкости, с которой можно совершить необходимое преобразование переменных.

Уравнения движения искусственного спутника с учетом сопротивления атмосферы имеют в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 следующий вид:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_j} + X_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (45)$$

в которых силовая функция U включает члены, учитывающие возмущения от сжатия, а члены X_j представляют влияние сопротивления.

Эти уравнения можно привести к каноническому виду

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j} + X_j, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_j},$$

если

$$\dot{\xi}_j = \dot{x}_j, \quad \eta_j = x_j,$$

$$F = -\frac{1}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 + U.$$

Здесь введено в отличие от более распространенных обозначений взаимное изменение роли переменных ξ и η с тем, чтобы знак функции F совпадал со знаком F в переменных Делонэ.

Мы предполагаем, что влияние сопротивления на мгновенную скорость прямо пропорционально площади поперечного сечения спутника, плотности атмосферы и квадрату скорости V относительно атмосферы и обратно пропорционально массе.

Для того чтобы сделать эту задачу более доступной, допустим, что плотность атмосферы, начиная с высоты перигея, можно представить простой показательной формулой. Это предположение подразумевает не только упрощенную формулу для плотности атмосферы в пространстве между перигеем и апогеем, но также и сферически симметричную атмосферу. Дальнейшие уточнения можно ввести после того, как эта основная задача будет решена.

Пусть ω есть угловая скорость вращения атмосферы, r — радиус-вектор и a — мгновенная большая полуось орбиты. Тогда выражение для X_j имеет следующий вид:

$$X_j = -A(\dot{x}_j + \delta_j)V \exp(-ar), \quad (46)$$

где A и a — постоянные,

$$V^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] - 2\omega(\dot{x}_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_2 \dot{x}_1) + \omega^2(x_1^2 + x_2^2) \quad (47)$$

и

$$\delta_1 = +\omega x_2, \quad \delta_2 = -\omega x_1, \quad \delta_3 = 0.$$

Первое слагаемое выражения для V^2 является знакомым выражением для квадрата орбитальной скорости при эллиптическом движении, применимым к возмущенному движению, если a представляет собой оскулирующее значение большой полуоси.

Уравнения в прямоугольных координатах при $X_j = 0$ эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{dL_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_k}, \quad \frac{dl_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

(если используются обозначения L_k , l_k вместо L , G , H , l , g , h), где

$$F = \frac{\mu^2}{2L_k^2} - \frac{\mu}{r} + U.$$

Решение проблемы движения искусственного спутника без сопротивления найдено в следующем виде:

$$\frac{dL''_k}{dt} = \frac{\partial F^{**}}{\partial l''_k} = 0, \quad \frac{dl''_k}{dt} = -\frac{\partial F^{**}}{\partial L''_k} = \text{const} \quad (49)$$

с $F^{**}(L''_1, L''_2, L''_3)$ при условии, что наклонность не слишком близка к критической наклонности. Соотношения, которые выражают L_k , l_k через L''_k , l''_k , уже имеются.

Если включены возмущающие ускорения X_j , вызванные сопротивлением атмосферы, то уравнения (48) принимают следующий вид:

$$\frac{dL_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_k} + P_k, \quad \frac{dl_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_k} - Q_k, \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_j X_j \frac{\partial x_j}{\partial l_k}, \\ Q_k &= \sum_j X_j \frac{\partial x_j}{\partial L_k}, \end{aligned} \quad (51)$$

а уравнения (49) приводятся к следующим:

$$\frac{dL''_k}{dt} = P''_k, \quad \frac{dl''_k}{dt} = -\frac{\partial F^{**}}{\partial L''_k} = -Q''_k, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} P''_k &= \sum_j P_j \frac{\partial l_j}{\partial l''_k} + \sum_j Q_j \frac{\partial L_j}{\partial l''_k}, \\ Q''_k &= \sum_j P_j \frac{\partial l_j}{\partial L''_k} + \sum_j Q_j \frac{\partial L_j}{\partial L''_k}. \end{aligned} \quad (53)$$

Общее доказательство для преобразований типа встречающихся в уравнениях (50) – (53) состоит в следующем. Пусть заданы уравнения

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_j} + X_j, \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} - Y_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (54)$$

в которых X_j , Y_j – произвольные функции от переменных x_j , y_j и t . Пусть

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(x'_k, y'_k), \\ y_j &= y_j(x'_k, y'_k) \end{aligned}$$

есть каноническое преобразование, при котором гамильтониан остается неизменным. Тогда уравнения после этого преобразования имеют вид

$$\frac{dx'_j}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial y'_j} + X'_j, \quad \frac{dy'_j}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial x'_j} - V', \quad (55)$$

где

$$F(x_j, y_j) = F^*(x'_j, y'_j).$$

Задача состоит в выражении X'_j, Y'_j через x'_j, y'_j .

Умножая уравнения (54) на $\partial y_j / \partial y'_p, -\partial x_j / \partial y'_p$ и складывая произведения, получаем следующие выражения:

$$\sum_j \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} + X_j \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} \right),$$

$$-\sum_j \frac{dy_j}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} + Y_j \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} \right),$$

сумма которых имеет вид

$$\sum_j \left[\frac{dx_j}{dt} \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} - \frac{dy_j}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} \right] = \frac{\partial F^*}{\partial y'_p} + \sum_j \left(X_j \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} + Y_j \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} \right). \quad (56)$$

Подстановка в левую часть

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \frac{dx'_k}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial y'_k} \frac{dy'_k}{dt} \right),$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial y_j}{\partial x'_k} \frac{dx'_k}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial y'_k} \frac{dy'_k}{dt} \right)$$

дает

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k \left\{ \left[\frac{\partial x_j}{\partial x'_k} \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} - \frac{\partial y_j}{\partial x'_k} \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} \right] \frac{dx'_k}{dt} + \left[\frac{\partial x_j}{\partial y'_k} \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} - \frac{\partial y_j}{\partial y'_k} \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} \right] \frac{dy'_k}{dt} \right\} = \\ = \sum_k \left([x'_k, y_p] \frac{dx'_k}{dt} + [y'_k, y_p] \frac{dy'_k}{dt} \right) = \\ = \frac{dx'_p}{dt}, \end{aligned}$$

поскольку все скобки Лагранжа равны нулю, за исключением

$$[x'_p, y_p] = +1.$$

Подставляя в уравнение (56) с учетом уравнения (55), получаем

$$X'_p = \sum_j \left(X_j \frac{\partial y_j}{\partial y'_p} + Y_j \frac{\partial x_j}{\partial y'_p} \right). \quad (57)$$

Если при этом выводе используются множители $\partial y_j / \partial x'_p, \partial x_j / \partial x'_p$, то в результате получится выражение вида

$$\sum_k \left([x'_k, x'_p] \frac{dx'_k}{dt} + [y'_k, x'_p] \frac{dy'_k}{dt} \right) = \frac{\partial F}{\partial x'_p} + \sum_j \left(X_j \frac{\partial y_j}{\partial x'_p} + Y_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \right),$$

левая часть которого равна $-dy'_p/dt$. Принимая во внимание уравнение (55), получаем

$$Y'_p = \sum_j \left(X_j \frac{\partial y_j}{\partial x'_p} + Y_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_p} \right). \quad (58)$$

Выражения (57), (58) в точности соответствуют выражениям (53), тогда как (51) представляет собой просто частный случай.

Основные черты этой теории полностью содержатся в уравнениях (45) — (53). Ближайшая задача заключается в составлении подобных выражений, необходимых для получения конкретных выражений для P_k'' и Q_k'' в уравнениях (53). В этом разделе будет рассмотрен частный случай $\omega = 0$. Это упрощение означает пренебрежение вращением атмосферы и заметно уменьшает сложность этой задачи.

При допущении, что $\omega = 0$, выражения для X_j принимают следующий вид:

$$X_j = -Ax_j V \exp(-ar).$$

Поэтому, если p_k , q_k , p_k'' , q_k'' суть те же функции от x_j , что и P_k , Q_k , P_k'' , Q_k'' от X_j , то мы имеем

$$\frac{dL_k''}{dt} = -AV p_k'' \exp(-ar),$$

$$\frac{dl_k''}{dt} = -\frac{\partial F^{**}}{\partial L_k''} + AV q_k'' \exp(-ar).$$

Функции p_k'' , q_k'' могут быть получены в два приема. Легко найти, что

$$\begin{aligned} p_1 &= L_1 \left(\frac{2a}{r} - 1 \right), & q_1 &= 2e \sin u + \frac{2}{e} \frac{L_2}{L_1} \sin f, \\ p_2 &= L_2, & q_2 &= -\frac{2}{e} \sin f, \\ p_3 &= L_3, & q_3 &= 0, \end{aligned} \tag{59}$$

где u — эксцентрическая аномалия, f — истинная аномалия.

Далее, мы можем положить

$$\begin{aligned} p_k'' &= \sum_j \left(p_j \frac{\partial l_j}{\partial l_k''} + q_j \frac{\partial L_j}{\partial L_k''} \right) = p_k + \delta p_k, \\ q_k'' &= \sum_j \left(p_j \frac{\partial l_j}{\partial L_k''} + q_j \frac{\partial L_j}{\partial L_k''} \right) = q_k + \delta q_k, \end{aligned}$$

где δp_k , δq_k — члены, имеющие множителем j_2 (по крайней мере). В этих слагаемых мы можем заменить p_k , q_k их выражениями (59), но со всеми величинами, замененными на соответствующие им эквиваленты с двумя штрихами. Это допустимо, если можно предположить, что A того же порядка величины, как и j_2 . Возвращаясь теперь к обозначениям L , G , H , l , g , h вместо L_k , l_k , получаем

$$\delta p_1 = (p_1)'' \left(\frac{\partial l}{\partial l''} - 1 \right) + (p_2)'' \frac{\partial g}{\partial l''} + (p_3)'' \frac{\partial h}{\partial l''} + (q_1)'' \frac{\partial L}{\partial l''} + (q_2)'' \frac{\partial G}{\partial l''},$$

$$\delta p_2 = (p_1)'' \frac{\partial l}{\partial g''} + (p_2)'' \left(\frac{\partial g}{\partial g''} - 1 \right) + (p_3)'' \frac{\partial h}{\partial g''} + (q_1)'' \frac{\partial L}{\partial g''} + (q_2)'' \frac{\partial G}{\partial g''},$$

$$\delta p_3 = 0,$$

$$\delta q_1 = (p_1)'' \frac{\partial l}{\partial L''} + (p_2)'' \frac{\partial g}{\partial L''} + (p_3)'' \frac{\partial h}{\partial L''} + (q_1)'' \left(\frac{\partial L}{\partial L''} - 1 \right) + (q_2)'' \frac{\partial G}{\partial L''},$$

$$\delta q_2 = (p_1)'' \frac{\partial l}{\partial G''} + (p_2)'' \frac{\partial g}{\partial G''} + (p_3)'' \frac{\partial h}{\partial G''} + (q_1)'' \frac{\partial L}{\partial G''} + (q_2)'' \left(\frac{\partial G}{\partial G''} - 1 \right),$$

$$\delta q_3 = (p_1)'' \frac{\partial l}{\partial H''} + (p_2)'' \frac{\partial g}{\partial H''} + (p_3)'' \frac{\partial h}{\partial H''} + (q_1)'' \frac{\partial L}{\partial H''} + (q_2)'' \frac{\partial G}{\partial H''},$$

если значения функций p_j, q_j , в которых элементы L_k, l_k заменены элементами L''_k, l''_k , обозначить через $(p_j)''$, $(q_j)''$. Все эти выражения следует взять из теории, свободной от учета сопротивления атмосферы, с точностью до первой степени j_2 .

В качестве примера типа разложения, которое требуется для практических приложений, приведем вычисление членов уравнения для dL''/dt . Оно связано с определением члена δp_1 , более простого, чем δp_2 , так как аргумент l'' входит только в короткопериодические члены.

Для краткости напишем θ вместо $\cos I''$. Мы находим, что δp_1 состоит из двух частей, одна из которых имеет множителем $-1 + 3\theta^2$, а другая $-3(1 - \theta^2)$. Окончательный результат дается следующим выражением:

$$\begin{aligned}\delta p_1 = & \frac{3}{4} j_2 L'' \left\{ (-1 + 3\theta^2) \left[-\eta^{-3} + \frac{a''^3}{r''^3} - 2 \frac{a''^4}{r''^4} \right] + \right. \\ & \left. + 3(1 - \theta^2) \left(\frac{a''^3}{r''^3} - 2 \frac{a''^4}{r''^4} \right) \cos(2g'' + 2f'') \right\}.\end{aligned}$$

Двойной штрих означает, что функции эллиптического движения должны быть вычислены при помощи элементов с двумя штрихами.

Если теперь ввести

$$x = \frac{r}{a} - 1, \quad x'' = \frac{r''}{a''} - 1,$$

то δp_1 можно написать с точностью до второй степени x , т. е. до второй степени e'' , в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta p_1 = & -\frac{3}{2} j_2 L'' \left\{ (-1 + 3\theta^2) \left[1 + \frac{3}{4} e''^2 - \frac{5}{2} x'' + 7x''^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}(1 - \theta^2)[1 - 5x'' + 14x''^2] \cos(2g'' + 2f'') \right\}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом разложение до второй степени x дает

$$\begin{aligned}-AV \exp(-ar) = & \frac{-A\mu}{L} \exp(-aa) \times \\ & \times \left[1 - (1 - aa)x + \left(\frac{1}{2} + aa + \frac{1}{2} a^2 a^2 \right) x^2 \right],\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}-AV'' \exp(-ar'') \delta p_1 = & \\ = & \frac{3}{2} A j_2 \exp(-aa'') \left\{ (-1 + 3\theta^2) \left[\left(1 + \frac{3}{4} e''^2 \right) - \right. \right. \\ & - \left(\frac{7}{2} + aa'' \right) x'' \left(10 + \frac{7}{2} aa'' + \frac{1}{2} a^2 a''^2 \right) x''^2 \left. \right] + \\ & + \frac{3}{2}(1 - \theta^2) \left[1 - (6 + aa'')x'' + \right. \\ & \left. + \left(\frac{39}{2} + 6aa'' + \frac{1}{2} a^2 a''^2 \right) x''^2 \right] \cos(2g'' + 2f'') \right\}.\end{aligned}$$

При помощи таблиц Кэли получаем следующий окончательный результат:

$$-AV'' \exp(-ar'') \delta p_t =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} A j_2 \exp(-aa'') \left\{ (-1 + 3\theta^2) \left[1 + \left(4 + \frac{5}{4} aa'' + \frac{1}{4} a^2 a''^2 \right) e''^2 + \right. \right. \\ &+ \left(\frac{7}{2} + aa'' \right) e'' \cos l'' + \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{4} aa'' + \frac{1}{4} a^2 a''^2 \right) e''^2 \cos 2l'' \Big] + \\ &+ \frac{3}{2} (1 - \theta^2) \left[\left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4} aa'' + \frac{1}{8} a^2 a''^2 \right) e''^2 \cos 2g'' + \right. \\ &+ \left(1 + \frac{1}{2} aa'' \right) e'' \cos (2g'' + l'') + \\ &+ \left. \left[1 + \left(\frac{11}{4} + \frac{5}{2} aa'' + \frac{1}{4} a^2 a''^2 \right) e''^2 \right] \cos (2g'' + 2l'') + \right. \\ &+ \left(5 + \frac{1}{2} aa'' \right) e'' \cos (2g'' + 3l'') + \\ &+ \left. \left. \left(\frac{125}{8} + \frac{11}{4} aa'' + \frac{11}{8} a^2 a''^2 \right) e''^2 \cos (2g'' + 4l'') \right] \right\}. \end{aligned}$$

Главную часть dL/dt можно разложить по x в следующем виде:

$$\begin{aligned} -AVL \left(\frac{2a}{r} - 1 \right) \exp(-ar) &= -A\mu \exp(-aa) \times \\ &\times \left[1 - (3 - aa)x + \left(\frac{9}{2} + 3aa + \frac{1}{2} a^2 a^2 \right) x^2 \right]. \end{aligned}$$

В эту функцию A входит в качестве единственного малого множителя; следовательно, необходимо подставить полные значения элементов с точностью до первой степени j_2 . Если эту функцию от a и x обозначить через ψ и применить двойные штрихи обычным образом, то мы получим следующее выражение:

$$\psi = \psi'' + \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} \right)'' \delta a + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)'' \delta x,$$

в котором

$$x = \frac{1}{2} e^2 - e \cos l - \frac{1}{2} e^2 \cos 2l,$$

$$x^2 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 \cos 2l.$$

Теория, свободная от учета влияния сопротивления атмосферы, дает выражения для величин $a - a''$, $e - e''$, $l - l''$. Из последних двух можно вычислить выражение для $\delta x = x - x''$.

Дальнейшие подробности можно найти в статье Брауэра и Хори (Astron. J. 66, 1961).

15. Приложение к движению малой планеты, возмущаемой Юпитером. Мы предположим, что Юпитер движется по невозмущенной эллиптической орбите с большой полуосью a_1 , эксцентриситетом e_1 и что плоскость орбиты Юпитера совпадает с плоскостью xy . Уравнения дви-

жения астероида с пренебрежимо малой массой будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial H},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \frac{\mu^2}{2L^2} + F_1, \\ F_1 &= k^2 m_1 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1}{r_1^3} \right].\end{aligned}$$

Возмущающую функцию можно разложить в бесконечный ряд по коэффициентам с аргументами вида

$$\begin{aligned}j_1(l+g+\tilde{h}-l_1-\tilde{\omega}_1) + j_2l + j_3(l+g) + j_4l_1 = \\ = (j_1 + j_2 + j_3)l + (j_1 + j_3)g + j_1(\tilde{h} - \tilde{\omega}_1) + (j_4 - j_1)l_1 = \\ = p_1l + p_2g + p_3h + p_4k,\end{aligned}$$

если h вводится вместо $\tilde{h} - \tilde{\omega}_1$, k вместо l_1 . Без ограничения общности p_4 можно считать положительным целым числом или нулем; p_2 , p_3 и p_4 — целые числа как положительные, так и отрицательные, включая нуль. Поскольку

$$l_1 = n_1 t + e_1 - \tilde{\omega}_1,$$

то в этих аргументах в явном виде присутствует время. Для того чтобы получить гамильтониан, не зависящий от времени t , мы вводим четвертую степень свободы, полагая

$$\frac{dk}{dt} = v = -\frac{\partial F}{\partial K},$$

если v используется вместо n_1 . Необходимым дополнением к \tilde{F} является член $-vK$. Новая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial k}, & \frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial K},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F &= F_0 + F_1, \\ F_0 &= \frac{\mu^2}{2L^2} - vK,\end{aligned}$$

$$F_1 = \sum C_{p_1, p_2, p_3, p_4}^{m_2, m_3, m_4} e^{m_2} \left(\sin \frac{1}{2} I \right)^{2m_3} e_1^{m_4} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k).$$

Коэффициенты C являются функциями от a и a_1 степени — 1. При помощи разложения, данного Леверье или Ньюкомом, их можно выразить через коэффициенты Лапласа и их производные. Соотношения Даламбера дают

$$\begin{aligned} m_2 &= |j_2| + 2k_2 = |p_1 - p_2| + 2k_2, \\ 2m_3 &= |j_3| + 2k_3 = |p_2 - p_3| + 2k_3, \\ m_4 &= |j_4| + 2k_4 = |p_3 + p_4| + 2k_4, \end{aligned}$$

где k_2, k_3, k_4 — положительные целые числа или нуль. Пусть для краткости записи введено обозначение

$$\frac{\partial F_0}{\partial L} = -\frac{\mu^2}{L^3} = -n,$$

причем подразумевается, что n всегда означает функцию $\mu^2 L^{-3}$.

Введем теперь определяющую функцию S с целью исключения короткопериодических членов, т. е. аргументов, которые содержат l и k . Соответствующее преобразование должно дать

$$F(L, G, H, K, l, g, h, k) = F^*(L', G', H', K', -, g', h', -).$$

При

$$\begin{aligned} S(L', G', H', K', l, g, h, k), \\ S_0 = L'l + G'g + H'h + K'k \end{aligned}$$

производим разложение по степеням m_1 с тем, чтобы получить

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1, \\ F^* &= F_0^* + F_1^* + F_2^* + \dots, \\ S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots \end{aligned}$$

Разложение в ряд Тэйлора дает

$$\begin{aligned} F_0 &= F_0^*, \\ \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_0}{\partial K'} \frac{\partial S_1}{\partial k} + F_1 &= F_1^*, \end{aligned}$$

или

$$-n' \frac{\partial S_1}{\partial l} - v \frac{\partial S_1}{\partial k} + F_1 = F_1^*.$$

Этому уравнению можно удовлетворить следующими разложениями:

$$S_1 = \sum' \frac{C'}{p_1 n' + p_4 v} \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k), \quad (60)$$

$$F_1^* = \sum'' C' \cos(p_2 g' + p_3 h'),$$

в которых члены, включенные в \sum' , являются теми членами из F_1 , у которых по крайней мере одно из p_1 и p_4 отлично от нуля, а \sum'' есть сумма членов, для которых $p_1 = p_4 = 0$. Обозначение C' указывает, что эти коэффициенты являются функциями от L', G', H' .

Члены второго порядка получаются из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial L'} \frac{\partial S_2}{\partial l} + \frac{\partial F_0}{\partial K'} \frac{\partial S_2}{\partial k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} + \frac{\partial F_1}{\partial G'} \frac{\partial S_1}{\partial g} + \frac{\partial F_1}{\partial H'} \frac{\partial S_1}{\partial h} = \\ = \frac{\partial F_1^*}{\partial g} \frac{\partial S_1}{\partial G'} + \frac{\partial F_1^*}{\partial h} \frac{\partial S_1}{\partial H'} + F_2^*, \end{aligned}$$

из которого члены с $p_1 = p_4 = 0$ используются для определения функции F_2^* , а все остальные члены — для получения S_2 .

В планетной теории, кроме членов первого порядка относительно возмущающей массы, часто представляется достаточным вычислить только вековые члены и некоторые из наиболее значительных периодических членов до второго порядка. В этом отношении планетная теория в значительной степени отличается от теории движения Луны: в планетной теории главную трудность представляет разложение возмущающей функции, но приближения должны быть доведены, вообще говоря, только до второго или же, в исключительных случаях, до третьего порядка относительно возмущающих масс. В основной задаче теории движения Луны, напротив, разложение возмущающей функции является простым делом, тогда как приближения должны быть доведены до высокого порядка относительно v/n .

Здесь можно дать лишь самый краткий очерк метода, предложенного Цейпелем. Важно заметить, что исключение l и k возможно только в том случае, когда отсутствуют малые делители $p_1 n' + p_4 v$, которые могут сделать ряд для S_1 и последующие ряды для S_2 и т. д. нереальными. С математической точки зрения это представляет собой серьезный вопрос: всегда существуют такие целые числа p_1 и p_4 , что $(p_1 n' + p_4 v)/v$ для заданного отношения v/n' может стать меньше любой указанной наперед величины. Замечания по этому поводу, сделанные в гл. XI, применимы и здесь. В большинстве случаев применение планетной теории соизмеримость связана с такими далекими членами в разложении возмущающей функции, что с практической точки зрения можно без риска пренебречь этими членами.

С другой стороны, предположим, что среднее движение слишком близко к соизмеримости, так что нельзя включить члены с аргументами, например, вида $p(al - \beta k) + p_2 g + p_3 h$ в определяющую функцию. Нам ничто не мешает включить члены с подобными аргументами в F^* .

В первом случае единственными угловыми переменными, остающимися после исключения короткопериодических членов, являются g и h ; в новой системе уравнений L и K — постоянные. Остающиеся при этом уравнения фактически являются уравнениями вековых возмущений.

Преобразованием переменных их можно привести к виду, рассмотренному в гл. XVI. Если определяются возмущения только первого порядка на основании функций S_1 и F^* , то эти уравнения вековых возмущений как раз соответствуют уравнениям, полученным простым отбрасыванием всех тех членов, которые в своих аргументах содержат l и k . Продолжая вычисления до второго порядка, т. е. получая F_2^* в дополнение к F_1 , мы прибавляем к уравнениям вековых возмущений вековые члены, порождаемые квадратами и произведениями периодических членов.

Во втором случае, когда в F^* сохраняется единственная линейная комбинация вида $al - \beta k$ и ее кратные, новую систему можно привести от первоначальных четырех степеней свободы к трем степеням свободы при помощи преобразования к линейной комбинации $al - \beta k$ как к одной из переменных. Может оказаться предпочтительным включение кратных g и h в этот аргумент в зависимости от индивидуальных характерных свойств рассматриваемой проблемы.

Характер разложений, необходимых в общем приложении этого метода, становится ясным из исследования решения, основанного на

функции S_1 . Переменные l, g, h, k получаются из следующих уравнений

$$\begin{aligned} l &= l' - \sum' \left[\frac{\frac{\partial C'}{\partial L'}}{p_1 n' + p_4 v} + \frac{3 p_1 n' \frac{C'}{L'}}{(p_1 n' + p_4 v)^2} \right] \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k), \\ g &= g' - \sum' \frac{\frac{\partial C'}{\partial G'}}{p_1 n' + p_4 v} \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k), \\ h &= h' - \sum' \frac{\frac{\partial C'}{\partial H'}}{p_1 n' + p_4 v} \sin(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k), \\ k &= k'. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты C' содержат множителем возмущающую массу, то достаточно в возмущениях первого порядка заменить l, g, h в аргументах на l', g', h' . Чтобы получить согласие с точностью до второго порядка, необходимо принять во внимание разности между l и l', g и g' , h и h' в аргументах. Для этого требуется выполнить перемножения рядов в дополнение к тем, которые были необходимы для получения функции S_2 .

Если возмущающая функция разложена по кеплеровым элементам, то коэффициенты C являются функциями от $a_1, a = a/a_1, e, \gamma^2 = \sin^2 \frac{1}{2} I, e_1$. Соотношения между переменными Кеплера и Делонэ дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial L} &= \frac{na}{\mu} \left(2a \frac{\partial C}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial C}{\partial e} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial G} &= \frac{na}{\mu} \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial C}{\partial e} + \frac{1-2\gamma^2}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial C}{\partial(\gamma^2)} \right], \\ \frac{\partial C}{\partial H} &= -\frac{na}{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial C}{\partial(\gamma^2)}. \end{aligned}$$

Множитель na/μ использован вместо L с целью получить для конечного результата безразмерное выражение. Необходимо помнить, что коэффициенты C содержат множитель $k^2 m_1$, который имеет ту же размерность, что и μ . Переменные L, G, H определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} L &= L' \left[1 + \frac{n'a'}{\mu} \sum' \frac{p_1 C'}{p_1 n' + p_4 v} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k) \right], \\ G &= G' \left[1 + \frac{n'a'}{\mu \sqrt{1-e'^2}} \sum' \frac{p_2 C'}{p_1 n' + p_4 v} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k) \right], \\ H &= H' \left[1 + \frac{n'a'}{\mu \sqrt{1-e'^2} (1-2\gamma'^2)} \sum' \frac{p_3 C'}{p_1 n' + p_4 v} \cos(p_1 l + p_2 g + p_3 h + p_4 k) \right]; \end{aligned}$$

переменная K не предстает для нас интереса.

Наконец, возмущения первого порядка в кеплеровых элементах получаются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\delta a}{a} &= \frac{2\delta L}{L}, \quad \delta e = \left(\frac{\delta L}{L} - \frac{\delta G}{G} \right) \frac{1-e^2}{e}, \\ \delta \gamma &= \left(\frac{\delta G}{G} - \frac{\delta H}{H} \right) \frac{1-2\gamma^2}{4\gamma}. \end{aligned}$$

Использование кеплеровых переменных в разложении возмущающей функции добавляет осложнения, которые частично могут быть устранины в том случае, если разложение ведется по переменным, более близким к переменным Делонэ. Можно использовать следующую систему видоизмененных переменных Делонэ:

$$L, L-G, G-H, K, l+g+h, -g-h, -h, k.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} e_2 &= 1 - \frac{G^2}{L^2} = \\ &= 2 \frac{L-G}{L} - \left(\frac{L-G}{L} \right)^2, \\ \gamma^2 &= \sin^2 \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{H}{G} \right) = \\ &= \frac{G-H}{2L} \left(1 - \frac{L-G}{L} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

то нетрудно показать, что коэффициенты в возмущающей функции можно разложить в ряды по степеням

$$E_1 = \frac{L-G}{L}, \quad E_2 = \frac{G-H}{L}.$$

Если, далее, коэффициенты C считать функциями от L, E_1, E_2 , то необходимые соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial L} &= \left(\frac{\partial C}{\partial L} \right) - \frac{E_1}{L} \frac{\partial C}{\partial E_1} - \frac{E_2}{L} \frac{\partial C}{\partial E_2}, \\ \frac{\partial C}{\partial (L-G)} &= \frac{1}{L} \frac{\partial C}{\partial E_1}, \\ \frac{\partial C}{\partial (G-H)} &= \frac{1}{L} \frac{\partial C}{\partial E_2}. \end{aligned}$$

16. Уравнения в переменных Делонэ для общей задачи движения планет. В задачах, рассматривавшихся до сих пор в этой главе, преобразования от прямоугольных координат к переменным Делонэ имели общую особенность, которая состоит в том, что была задана только единственная система уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

с аналогичными уравнениями для y и z . Эти уравнения затем заменились следующей эквивалентной системой:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, \quad G = L \sqrt{1-e^2}, \quad H = G \cos I, \\ F &= \frac{\mu^2}{2L^2} + R. \end{aligned}$$

В планетной задаче, в которой рассматривается Солнце с массой m_0 и две планеты с массами m_1 и m_2 , первоначально имеется девять уравнений, каждое из которых второго порядка. Интегралы центра масс позволяют привести эту систему уравнений к шести уравнениям второго порядка. При соответствующем выборе координат, предложенном Якоби, эти уравнения обладают общей силовой функцией.

В качестве отправного пункта могут служить уравнения, полученные в разд. 8 гл. X. Если ξ_0 , η_0 , ζ_0 , ξ_1 , η_1 , ζ_1 , ξ_2 , η_2 , ζ_2 — координаты Солнца и двух планет в декартовой системе координат, начало которой лежит в центре масс этих трех тел, и если

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1 - \xi_0, \\x_2 &= \xi_2 - \xi_0 - \kappa_1 (\xi_1 - \xi_0),\end{aligned}$$

где

$$\kappa_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1},$$

то уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1) m_2} \frac{\partial F}{\partial x_2},\end{aligned}\tag{61}$$

где

$$F = k^2 \left[\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right].$$

Здесь записаны только уравнения для x_1 и x_2 ; уравнения для y и z имеют ту же структуру. Пусть

$$\begin{aligned}r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;\end{aligned}$$

в таком случае

$$\begin{aligned}r_{01}^2 &= r_1^2, \\ r_{02}^2 &= (x_2 + \kappa_1 x_1)^2 + (y_2 + \kappa_1 y_1)^2 + (z_2 + \kappa_1 z_1)^2 = \\ &= r_2^2 + 2\kappa_1 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \kappa_1^2 r_1^2.\end{aligned}$$

Если массы m_1 и m_2 малы по сравнению с m , то разность $r_{02}^{-1} - r_2^{-1}$ может быть разложена в быстро сходящийся ряд по степеням κ_1 .

Если ввести κ_2 , m'_1 , m'_2 посредством следующих формул:

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \\ \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} &= \frac{1}{\kappa_1 m_0} = \frac{1}{m'_1}, \\ \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1) m_2} &= \frac{1}{\kappa_2 (m_0 + m_1)} = \frac{1}{m'_2},\end{aligned}$$

то уравнения (61) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k^2 m_0 m_1}{m'_1} \frac{x_1}{r_1^3} &= \frac{\partial R_1}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k^2 m_0 m_2}{m'_2} \frac{x_2}{r_2^3} &= \frac{\partial R_2}{\partial x_2},\end{aligned}\tag{62}$$

где

$$R_1 = \frac{R}{m'_1}, \quad R_2 = \frac{R}{m'_2},$$

$$R = k^2 \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + m_0 m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right].$$

Эти уравнения можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}_j}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial l_j}, & \frac{dl_j}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{L}_j}, \\ \frac{d\bar{G}_j}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial g_j}, & \frac{dg_j}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{G}_j}, \\ \frac{d\bar{H}_j}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}_j}{\partial h_j}, & \frac{dh_j}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}_j}{\partial \bar{H}_j}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$j = 1, 2,$$

если

$$\bar{F}_j = \frac{\mu_j}{2a_j} + R_j, \quad \mu_j = \frac{k^2 m_0 m_j}{m'_j},$$

$$\bar{L}_j = \sqrt{\mu_j a_j}, \quad \bar{G}_j = \bar{L}_j \sqrt{1 - e_j^2}, \quad \bar{H}_j = \bar{G}_j \cos I_j.$$

Уравнения (63) неудобны тем, что гамильтонианы различны для этих двух систем уравнений. Это неудобство можно устраниТЬ, полагая

$$L_j = \bar{L}_j m_j, \quad F = \bar{F}_j m'_j.$$

Поэтому окончательные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dL_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l_j}, & \frac{dl_j}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_j}, \\ \frac{dG_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g_j}, & \frac{dg_j}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_j}, \\ \frac{dH_j}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h_j}, & \frac{dh_j}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_j}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$j = 1, 2,$$

где

$$F = k^2 \frac{m_0 m_1}{2a_1} + k^2 \frac{m_0 m_2}{2a_2} + k^2 \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + m_0 m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right],$$

$$L_1 = m'_1 \sqrt{\mu_1 a_1} = m_1 \sqrt{\frac{k^2 m_0^2 a_1}{m_0 + m_1}}, \quad (62)$$

$$L_2 = m'_2 \sqrt{\mu_2 a_2} = m_2 \sqrt{\frac{k^2 m_0 (m_0 + m_1) a_2}{m_0 + m_1 + m_2}}$$

и с обычными выражениями для G_1, G_2, H_1, H_2 .

Этот результат можно распространить на любое число планет. Пусть $r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$, где x_j, y_j, z_j — прямоугольные координаты, отнесенные

к центру масс тел m_0, m_1, \dots, m_{j-1} . Тогда

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{k^2 m_0 m_j}{2a_j} + \sum_{j=2}^n k^2 m_0 m_j \left(\frac{1}{r_{0j}} - \frac{1}{r_j} \right) + \sum_{j \neq p} k^2 \frac{m_j m_p}{r_{jp}}, \quad (66)$$

$$L_j = m_j \sqrt{k^2 m_0 \frac{m_0 + m_1 + \dots + m_{j-1}}{m_0 + m_1 + \dots + m_j} a_j},$$

$$G_j = L_j \sqrt{1 - e_j^2}, \quad H_j = G_j \cos I_j.$$

Небольшое неудобство этих уравнений заключается в том, что переменные L_j, G_j, H_j имеют множителем планетную массу m_j . Его можно преодолеть, вводя

$$m_j = \beta_j \sigma,$$

где σ — величина порядка планетных масс, а β_j — конечные числовые множители. Если затем разделить переменные L_j, G_j, H_j и гамильтониан F на σ , то получится

$$L_j = \beta_j \sqrt{k^2 m_0 \frac{m_0 + m_1 + \dots + m_{j-1}}{m_0 + m_1 + \dots + m_j} a_j},$$

$$F = \sum_{j=1}^n \frac{k^2 m_0 \beta_j}{2a_j} + \sum_{j=2}^n k^2 m_0 \beta_j \left(\frac{1}{r_{0j}} - \frac{1}{r_j} \right) + \sigma \sum_{j \neq p} \frac{k^2 \beta_j \beta_p}{r_{jp}}, \quad (67)$$

$$G_j = L_j \sqrt{1 - e_j^2}, \quad H_j = G_j \cos I_j.$$

Поэтому теория возмущений для проблемы Солнца и n планет должна быть построена по степеням единственного малого параметра σ . Если результаты необходимо получить в самой общей форме, то отношения $B_j = m_j/\sigma$ следует сохранить в разложениях в явном виде. В некоторых задачах их можно заменить численными значениями с самого начала.

Замечания. Литература

В этой главе буква F использована для обозначения гамильтониана системы канонических дифференциальных уравнений. Мы избегали привычного обозначения H , чтобы сохранить этот символ для одной из переменных Делонэ. Необходимо отметить, что символ F использовался для различных целей в предшествующих главах.

Метод Уиттекера, использованный в гл. XI, приводит к уравнениям возмущенного движения в переменных Делонэ настолько естественным путем, что оказывается ненужным спускать эти уравнения в настоящей главе. Обычная процедура заключается в выражении уравнений задачи двух тел в канонической форме, используя сферические полярные координаты и связанные с ним импульсы, и в получении дифференциального уравнения Гамильтона — Якоби в частных производных. При этом выборе координат переменные могут быть разделены, и таким образом можно получить решение этой проблемы. Из последних работ, которые приводят это решение, мы сошлемся на следующие: M. F in la y-F e u n d l i c h, Celestial Mechanics, Pergamon Press, London, 1958; W. M. S m a g t, Celestial Mechanics, Longmans, Green, London, 1953 (готовится русский перевод — Ред.); H. G o l d s t e i n, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1951; E. W. B r o w n, C. A. S h o o k, Planetary Theory, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933.

Единственным вопросом, рассмотренным в этой главе, для которого было существенным решением уравнения Гамильтона — Якоби путем разделения переменных, был вопрос о движении искусственного спутника. Метод, использованный Гарфинкелем (B. G a f i n k e l, Astron. J., 64, 353, 1959), зависит от решения задачи с видоизмененным гамильтонианом в качестве приближения к гамильтониану реально существующей задачи. Этот метод впервые был предложен Штерном (T. h. F. S t e r n e, Astron. J., 63, 28, 1958). Другим методом является метод Винти (J. P. V i n t i,

J. Research Nat. Bur. Standards, 63B, 105, 1959), оказывающейся, по существу, аналитическим тождественным классической проблеме двух неподвижных центров, которая может быть решена путем разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. Связь между проблемой движения искусственного спутника под действием притяжения вытянутого сфероида и проблемой движения частицы, притягиваемой двумя неподвижными центрами, была открыта впервые в 1959 г. Пайнсом. В одной из дискуссий между Пайнсом и Браузером было найдено преобразование в задаче двух неподвижных центров, необходимое для получения потенциала сжатого сфероида.

Относительные решения проблемы двух неподвижных центров см. книгу Шарлье (C. V. L. Chalier, Die Mechanik des Himmels, Band 1, Kapitel 3, Leipzig, 1903) или Уиттекера «Аналитическая динамика» (ОНТИ, М.-Л., 1937).

Вообще для разрешимых проблем динамики можно выбрать обобщенные координаты и импульсы и получить уравнение Гамильтона — Якоби, которое может быть решено посредством разделения переменных. Проблема трех тел не принадлежит к числу проблем этого типа. Поэтому для решения этой проблемы методами теории возмущений требуется другой, отличный принцип.

В своей основе этот принцип является принципом метода Делонэ, которым восхищались и который пропагандировали Хилл и Пуанкаре. Справочным мемуаром по этому вопросу является работа Хилла (C. W. Hill, On the extension of Delaunay's method in the lunar theory to the general problem of planetary motion, Collected Mathematical Works, vol. IV, Memoir 66, Carnegie Inst. of Washington, 1907, p. 169—206).

Вклад Цейпеля, сделанный им в труде «Recherches sur le mouvement des petites planètes» (Arkiv Mat., Astron., Fysik, 11, №№ 1 и 7; 12, № 9; 13, № 3 (1916—1917)), представляет собой двойной вклад. Цейпель вводит определяющую функцию как средство для выполнения преобразования Делонэ и использует эту процедуру для исключения при одном преобразовании членов с любыми аргументами (а не просто кратными одного аргумента, как это сделал Хилл) при условии, что они не порождают малых делителей.

В сущности этот же метод, по-видимому, независимо открыт Брауном (E. W. Brown, C. A. Shook, Planetary Theory, chapt. 6, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1933). Интересно отметить, что если η, y — старые и новые угловые переменные, а ξ, x — импульсы, то определяющей функцией Цейпеля является $S(x, \eta)$, тогда как Браун и Шук применяют $S(\xi, y)$. В принципе обе эти функции эквивалентны. В этой главе мы использовали методику Цейпеля, которая, по-видимому, обладает явными преимуществами. (Теоретически имеются две другие альтернативы $S(\xi, x)$ и $S(\eta, y)$, но для теории возмущений небесной механики эти формы непригодны.)

Содержание этой главы ограничено изложением метода канонических переменных как мощного общего метода для решения задач небесной механики. Относительно приложений к резонансным проблемам мы ссылаемся на упомянутые выше мемуары Хилла и Цейпеля, на «Новые методы небесной механики» (t. II, Gauthier-Villars, Paris, 1893) Пуанкаре, на «Теорию планет» (гл. 8) Брауна и Шука и на статью Хори (Astron. J., 65, 291, 1960) об орbitах в окрестности критической наклонности в задаче о движении искусственного спутника.

Приложение

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

A. Учебники и монографии общего характера

1. Аппель П., Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости, ОНТИ, 1936.
2. Вентцель М. К., Основы теоретической астрономии, Геодезиздат, 1962.
3. Гаусс К. Ф., Теоретическая астрономия, в кн.: А. Н. Крылов, Сочинения, т. 6, изд. АН СССР, 1936.
4. Горячев И. Н., Способ Halphen'a для вычисления вековых возмущений планет и применение его к Церере, Томск, 1937.
5. Дубощин Г. Н., Введение в небесную механику, Гостехиздат, 1938.
6. Дубощин Г. Н., Основы теории устойчивости движения, изд. МГУ, 1952.
7. Дубощин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
8. Дубощин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
9. Дубяго А. Д., Определение орбит, Гостехиздат, 1949.
10. Жонголович И. Д., Амелин В. М., Сборник таблиц и nomogramm для обработки наблюдений искусственных спутников Земли, изд. АН СССР, 1960.
11. Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, М., ИЛ, 1959.
12. Иванов А. А., Основной курс теоретической астрономии, Гостехиздат, Берлин, 1923.
13. Идельсон И. И., Способ наименьших квадратов, изд. 2-е, Кубуч, 1932.
14. Идельсон И. И., Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике, изд. 2-е, ОНТИ, 1936.
15. Искусственные спутники Земли, Сборники, вып. 1—17 (1958—1963).
16. Крат В. А., Фигуры равновесия небесных тел, Гостехиздат, 1950.
17. Куликов К. А., Фундаментальные постоянные астрономии, Гостехиздат, 1956.
18. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
19. Ляпунов А. М., Собрание сочинений в 6 томах, изд. АН СССР, 1954—1959.
т. 1, 1954. Теория потенциала. Теория вероятностей. Теория рядов. Гидростатика и гидродинамика. Теоретическая и небесная механика.
т. 2, 1956. Общая задача об устойчивости движения.
т. 3, 1959. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Исследования по теории фигур небесных тел. Об уравнении Клеро и более общих уравнениях теории фигур планет. Об одной задаче Чебышева.
т. 4, 1959. О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости.
20. Михайлов А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, ОНТИ, 1939.
21. Михайлов А. А., Теория затмений, Гостехиздат, 1954.
22. Мультон Р. Ф., Введение в небесную механику, ОНТИ, 1935.
23. Ньютона И., Математические начала натуральной философии, в кн.: А. Н. Крылов, Сочинения, т. 7, изд. АН СССР, 1936.
24. Орлов А. Я., Теоретическая астрономия, Одесса, 1921.
25. Орлов А. Я., Орлов Б. А., Курс теоретической астрономии, Гостехиздат, 1940.
26. Пицетти П., Основы механической теории фигуры планет, ОНТИ, 1933.
27. Проблемы движения искусственных небесных тел, сборник статей, изд. АН СССР, 1963.

28. Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.
29. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 1—3, ОНТИ — Гостехиздат, 1933—1949.
30. Субботин М. Ф., Вспомогательные таблицы для вычисления орбит и эфемерид, Гостехиздат, 1941.
31. Уиттескер Е., Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937.
32. Щиголов Б. М., Математическая обработка наблюдений, изд. 2-е, Физматгиз, 1962.
33. Эйлер Л., Новая теория движения Луны, в кн.: А. Н. Крылов, Сочинения, Дополнения к т. 5 и 6, изд. АН СССР, 1937.

B. Специальные статьи

К ГЛАВЕ I. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Баженов Г. М., О некоторых применениях матриц в небесной механике. Бюлл. Ин-та теор. астрон., IV, № 4 (1949).
2. Белькович И., Матрицы-краковианы и их применение в астрономии, Астрон. ж., 8, вып. 2 (1931).
3. Брумберг В. А., Случайные начальные условия и случайные параметры в задачах небесной механики, Астрон. ж., 38, вып. 4 (1961).
4. Гонтковская В. Т., Об определении орбит с помощью решения системы интегральных уравнений, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 4 (1962).

К ГЛАВЕ II. РАЗЛОЖЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

5. Субботин М. Ф., О новой аномалии, заключающей как частные случаи эксцентрисическую, истинную и тангенциальную аномалию, Докл. АН СССР, 4 (13), № 4 (108) (1936).
6. Тяхт А. П., О решении уравнения Кеплера, Бюлл. Астрон. ин-та, № 53 (1945).
7. Шароф Ш. Г., Разложение некоторых функций координат эллиптического движения в ряды до 9-й степени эксцентриситета, Бюлл. Ин-та теор. астрон. VI, № 8 (1957).

К ГЛАВЕ III. ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ТЕЛАМИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

8. Жонголович И. Д., Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним, Труды Ин-та теор. астрон., вып. III (1952).
9. Жонголович И. Д., Потенциал земного притяжения, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VI, № 8 (1957).

К ГЛАВЕ IV. ПСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

10. Мячин В. Ф., Оценка погрешности численных методов интегрирования уравнений небесной механики, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 8 (1962).
11. Рожнов М. Д., Интерполирование с центральными разностями, Астрон. ежегодник СССР на 1942 г., изд. АН СССР, 1941.
12. Сочилина А. С., О накоплении ошибок при численном интегрировании в некоторых задачах небесной механики, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 4 (1959).
13. Субботин М. Ф., О таблицах функций, применяемых в астрономических вычислениях, Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 6 (1938).
14. Субботин М. Ф., Об интерполировании величин, даваемых астрономическими ежегодниками, Астрон. цирк. № 135 (1953).
15. Щиголов Б. М., Об ошибках интерполяции от округлений в таблице функций, Сообщ. ГАИШ, № 103 (1960).

К ГЛАВЕ V. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

16. Бартенева О. Н., Некоторые вспомогательные таблицы для интегрирования по методу Коузла, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 9 (1960).
17. Брумберг В. А., Численное решение краевых задач небесной механики методом наискорейшего спуска, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 4 (1962).
18. Кулаков Д. К., Численные методы небесной механики в применении к изучению движения VIII спутника Юпитера, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IV, № 7 (1950).
19. Кулаков Д. К., Интегрирование уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по квадратурному методу Коузла с автоматическим выбором шага, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 10 (1960).
20. Неймин Г. И., Об учете возмущений высших порядков при вычислении специальных возмущений, Астрон. ж., 11, вып. 2 (1934).
21. Нумеров Б. В., Метод экстраполирования возмущений особых координат, Бюлл. Астрон. ин-та, № 3 (1924).
22. Нумеров Б. В., К вопросу о численном интегрировании уравнений возмущенного движения в особых координатах, Бюлл. Астрон. ин-та, № 19 (1928).
23. Субботин М. Ф., О численном интегрировании дифференциальных уравнений, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, № 7 (1933).
24. Тихт А., Аналитическая теория систематического влияния высших порядков в методе экстраполирования, Бюлл. Астрон. ин-та, № 42 (1937).
25. Ханина Ф. Б., Формулы и таблицы для интерполяции особых координат и вычисления компонентов скоростей, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VI, № 2 (1955).
26. Щиголов Б. М., Резниковский П. Т., О применении способа Рунге при численном решении уравнений небесной механики, Сообщ. ГАИШ, № 92 (1953).

К ГЛАВЕ VI. АБЕРРАЦИЯ

27. Кулаков Д. К., Об учете aberrации планет, Астрон. ж., 36, вып. 2 (1959).
28. Кулаков К. А., О значениях парадлакса Солнца и постоянной aberrации, Астрон. ж., 31, вып. 6 (1954).

К ГЛАВЕ VII. СРАВНЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЙ И ТЕОРИИ

29. Загребин Д. В., Шумихина К. Г., Таблицы основных прецессионных величин на 1950—2000 гг., Бюлл. Ин-та теор. астрон., V, № 10 (1954).
30. Зверев М. С., Фундаментальные постоянные астрономии, Астрон. ж., 28, вып. 2 (1951).
31. Идельсон Н. И., Редукционные вычисления в астрономии, Астрон. ежегодник СССР на 1941 г., изд. АН СССР, 1940.
32. Идельсон Н. И., Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии, Астрон. ежегодник СССР на 1942 г., изд. АН СССР, 1941.

К ГЛАВЕ VIII. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

33. Маковер С. Г., Решение системы нормальных уравнений при помощи матриц, Астрон. ж., 33, вып. 3 (1956).
34. Резниковский П. Т., Об одном варианте решения системы нормальных уравнений в методе наименьших квадратов, Сообщ. ГАИШ, № 54 (1950).

К ГЛАВЕ IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСПРАВЛЕНИЕ ОРБИТ

35. Самойлова-Яхонтова Н. С., Исправление эллиптических орбит, Бюлл. Астрон. ин-та, № 53 (1945).
36. Самойлова-Яхонтова Н. С., К вопросу об улучшении элементов эллиптических орбит, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IV, № 6 (1949).

37. Сочилина А. С., Некоторые изменения в методике улучшения орбит искусственных спутников Земли, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IX, № 1 (1963).
 38. Субботин М. Ф., О дифференциальном исправлении орбиты с эксцентрицитом, мало отличающимся от единицы, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 6 (1959).

К ГЛАВЕ X. ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ. РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ

39. Брумберг В. А., Постоянные конфигурации в проблеме четырех тел и их устойчивость, Астрон. ж., 34, вып. 1 (1957).
 40. Дубошин Г. Н., Моисеев Н. Д., Степанов В. В., О качественных методах небесной механики, Успехи астрон. наук, 2 (1933).
 41. Егоров В. А., О некоторых задачах динамики полета к Луне, Успехи физ. наук, 63, вып. 1а (1957).
 42. Моисеев Н. Рейн И., Современное состояние теории ограниченной проблемы трех тел, Успехи астрон. наук, 3 (1933).
 43. Моисеев Н. Д., О современном состоянии качественной небесной механики, Астрон. ж., 16, вып. 4 (1939).
 44. Орлов А. А., О лагранжевых частных решениях в задаче трех тел с переменными массами, Астрон. ж., 16, вып. 6 (1939).
 45. Рябов Ю. А., О периодических решениях вблизи «треугольных» точек либрации ограниченной плоской круговой задачи трех тел, Астрон. ж., 29, вып. 5 (1952).
 46. Субботин М. Ф., О некоторых свойствах движения в задаче n тел, Докл. АН СССР, 27, № 5 (1940).
 47. Чеботарев Г. А., Теория периодических орбит в небесной механике, Успехи астрон. наук, 5 (1950).
 48. Щиголев Б. М., Промежуточные орбиты в задаче трех тел (обзор), Труды ГАИШ, 24 (1954).

К ГЛАВЕ XI. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

49. Брумберг В. А., Абсолютные возмущения искусственных спутников Луны, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 10 (1962).
 50. Егоров А. В., Об определении истинной аномалии в возмущенном движении, Астрон. ж., 35, вып. 1 (1958).
 51. Перли Ф. Х., Метод вариации произвольных постоянных с эксцентрической аномалией в качестве независимой переменной, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 6 (1962).
 52. Самойлова-Яхонтова Н. С., Замечания по поводу вычисления частных возмущений в элементах, Астрон. ж., 35, вып. 5 (1958).

К ГЛАВЕ XII. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ

53. Домбронский Ч. Ч., Маленькая поправка к таблицам движения Луны Э. В. Броуна, Астрон. ж., 18, вып. 3 (1941).
 54. Дубошин Г. Н., О дифференциальных уравнениях движения спутников планет, Астрон. ж., 30, вып. 3 (1953).
 55. Железняк М. Б., Митрофанова Э. А., Таблицы для приведения координат Луны к эфемеридному времени, Бюлл. Ин-та теор. астрон., V, № 10 (1954).
 56. Загребин Д. В., Об учете эмпирического члена при составлении лунной эфемериды, Бюлл. Ин-та теор. астрон., V, № 1 (1951).
 57. Загребин Д. В., Метод исправления таблиц Броуна с целью улучшения лунной эфемериды, Астрон. ж., 30, вып. 1 (1953).
 58. Митрофанова Э. А., Об улучшении эфемериды Луны, Бюлл. Ин-та теор. астрон., V, № 4 (1952).
 59. Токмолова С. С., Аналитическая теория движения седьмого спутника Юпитера, Труды Ин-та теор. астрон., вып. V (1956).
 60. Шор В. А., Применение быстродействующих вычислительных машин к решению ограниченной задачи методом Хилла — Броуна, часть 1, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 8 (1960); часть 2, там же, VIII, № 3 (1961); часть 3, там же, VIII, № 5 (1962).
 61. Щиголев Б. М., О промежуточной орбите Хилла в задаче трех тел, Труды ГАИШ, 28 (1960).

К ГЛАВЕ XIII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КООРДИНАТАХ

62. Гребенников Е. А., Аналитическая теория движения Япета, Астрон. ж., 35, № 6 (1958).
63. Гребенников Е. А., Возмущения движения восьмого спутника Сатурна Япета, Астрон. ж., 36, вып. 2 (1959).
64. Орлов А. А., Об интегрировании дифференциальных уравнений возмущенного движения в прямоугольных координатах по способу малого параметра, Сообщ. ГАИШ, № 88—89 (1953).
65. Полосова Н. Г., Применение электронных счетных машин к построению аналитических теорий движения планет, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 8 (1960).
66. Проскурин В. Ф., Теория движения Цереры, часть I, Труды Ин-та теор. астрон., вып. II (1952); часть II, там же, вып. IX (1962).
67. Шароф Ш. Г., Теория движения Плутона, часть I, Труды Ин-та теор. астрон. вып. IV (1955).

К ГЛАВЕ XIV. МЕТОД ГАНЗЕНА

68. Яровой Яровой М. С., О применении идеальных координат Ганзена, Астрон. ж., 37, вып. 5 (1960).

К ГЛАВЕ XV. ВОЗМУЩАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

69. Баженов Г. М., Исследование разложений в тригонометрические ряды выражений вида $[1 - 2h \cos z + h^2]^{-n/2}$, в которых n — нечетное число, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VI, № 1 (1955).
70. Дубошин Г. Н., Разложение обратного расстояния в теории притяжения, Прикладная математика и механика, 10, вып. 3 (1946).
71. Еленская Е. Б., Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности, Бюлл. Ин-та теор. астрон., V, № 2 (1952); V, № 5 (1953); VI, № 7 (1957).
72. Еленская Е. Б., Разложение пертурбационной функции для эксцентрикитета, близкого к единице, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 6 (1962).
73. Лих Р. А., Некоторые изменения в методике разложения пертурбационной функции, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 6 (1959).
74. Орлов Б. А., Разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома, Труды Астрон. обс. Ленингр. ун-та, 6 (1936) (Ученые записки ЛГУ).
75. Самойлов-Яхонтова Н. С., К вопросу о сходимости разложений пертурбационной функции по степеням эксцентрикитета, Бюлл. Астрон. ин-та, № 46 (1939).
76. Субботин М. Ф., Улучшение сходимости основных разложений теории возмущенного движения, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IV, № 1 (1947).
77. Субботин М. Ф., Таблицы для разложений пертурбационной функции, получаемых при помощи линейного преобразования и преобразования Лежандра, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IV, № 1 (1947).

К ГЛАВЕ XVI. ВЕКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

78. Дубошин Г. Н., Об устойчивости солнечной системы, Успехи астрон. наук, 2 (1941).
79. Яровой Яровой М. С., О явном выражении вековых возмущений первого порядка через элементы, Астрон. ж., 37, № 4 (1960).

К ГЛАВЕ XVII. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

80. Бадалян Г. К., О проблеме двух неподвижных центров, Астрон. ж., 11, вып. 4 (1934).
81. Бадалян Г. К., Об упрощении уравнения траектории в проблеме двух неподвижных центров, Докл. АН СССР, 24, № 2 (1939).
82. Демин В. Г., Об орбитах задачи двух неподвижных центров, Астрон. ж., 37, вып. 6 (1960).

83. Демин В. Г., Об эллиптических орбитах задачи двух неподвижных центров, Сообщ. ГАИШ, № 115 (1960).
84. Жонголович И. Д., Некоторые формулы, относящиеся к движению материальной точки в поле тяготения уровенного эллипсоида вращения, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 7 (1960).
85. Жонголович И. Д., Возмущения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 10 (1960).
86. Лемехова Е. Н., Метод Делонэ в применении к искусственным спутникам Луны, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VIII, № 7 (1962).
87. Лях Р. А., К вопросу о влиянии сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 5 (1959).
88. Проскурин В. Ф., Батраков Ю. В., Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли, Бюлл. Ин-та теор. астрон., VII, № 7 (1960).
89. Таратынова Г. П., О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосфере, Успехи физ. наук, 63, вып. 1а (1957).
90. Фоминов А. М., Движение искусственных спутников Земли в геоцентрической атмосфере, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IX, № 3 (1963).
91. Чеботарев Г. А., Движение искусственных спутников Земли по орбитам с малыми эксцентриситетами, Бюлл. Ин-та теор. астрон., IX, № 1 (1963).

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие редактора перевода</i>	5
<i>Предисловие</i>	7
ГЛАВА I. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ	11
1. Историческое введение (11). 2. Законы движения и закон тяготения (13). 3. Уравнения движения задачи двух тел (15). 4. Движение центра масс (16). 5. Уравнения движения относительно центра масс (17). 6. Уравнения относительного движения (19). 7. Интегралы площадей (19). 8. Интегралы живых сил (интеграл энергии) (22). 9. Движение в плоскости орбиты (23). 10. Третий закон Кеплера (26). 11. Эксцентрическая аномалия (26). 12. Средняя аномалия (27). 13. Формулы для определения положения в плоскости орбиты (28). 14. Движение относительно центра масс (29). 15. Интеграл энергии (30). 16. Потенциальная энергия (31). 17. Переход к системе координат с началом в центре масс (32). 18. Интегралы площадей (33). 19. Координаты, отнесенные к эклиптике (34). 20. Координаты, отнесенные к экватору (36). 21. Введение матриц (38). 22. Изменение порядка произведений матриц (40). 23. Матрицы поворота (40). 24. Общие повороты координатных систем (42). 25. Применение полярных координат (45). 26. Приведение к эклиптике (46). 27. Вычисление элементов по координатам и компонентам скорости в заданный момент времени (46). 28. Точность элементов (49). 29. Экваториальные постоянные (50). 30. Выражения через начальные координаты и компоненты скорости (50). 31. Гауссова постоянная (55). Замечания. Литература (57).	58
ГЛАВА II. РАЗЛОЖЕНИЯ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ	58
1. Введение (58). 2. Разложения в ряд Фурье (58). 3. Выражение истинной аномалии через эксцентрическую аномалию (60). 4. Выражение средней аномалии через истинную аномалию (61). 5. Введение функций Бесселя (62). 6. Приложение бесселевых функций (67). 7. Вычисление бесселевых функций (75). 8. Решение уравнения Кеплера (78). 9. Решение уравнений движения в функции средней аномалии (80). 10. Вращающаяся система координат (86). 11. Комплексные прямоугольные координаты (95). 12. Разложения при помощи гармонического анализа (98). Замечания. Литература. (103).	104
ГЛАВА III. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПРИТЯЖЕНИЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ	104
1. Введение (104). 2. Притяжение частицы телом конечных размеров и с произвольным распределением масс (104). 3. Полиномы Лежандра (107). 4. Главные члены U (109). 5. Введение полярных координат (112). 6. Выражение для U_3 (113). 7. Выражение для U_4 (113). 8. Потенциал сфера (115). 9. Потенциал для двух тел конечных размеров (116). Замечания. Литература (119).	120
ГЛАВА IV. ИСЧИСЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	120
1. Представление функций (120). 2. Разности (121). 3. Обнаружение случайных ошибок (123). 4. Прямое интерполирование (125). 5. Формулы Эверетта и Бесселя (128). 6. Формула Ньютона (130). 7. Формула Лагранжа для интерполирования на середину (130). 8. Обратное интер-	120

полирование (131). 9. Погрешность интерполированной величины (132). 10. Численное дифференцирование (132). 11. Специальные формулы (134). 12. Численное интегрирование (134). 13. Накопление ошибок при численном интегрировании (140). 14. Символические операторы (141). Замечания. Литература (147).	
ГЛАВА V. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ	148
1. Введение (149). 2. Уравнения для метода Коулла (150). 3. Численный пример приложения метода Коулла (151). 4. Уравнения для метода Энке (155). 5. Численный пример приложения метода Энке (158). 6. Уравнения движения относительно центра масс (160). 7. Интегрирование с увеличенным значением массы Солнца (162). 8. Относительные преимущества методов Коулла и Энке (163). Замечания. Литература (164).	
ГЛАВА VI. АБЕРРАЦИЯ	166
1. Введение (165). 2. Звездная aberrация (167). 3. Планетная aberrация (169). 4. Суточная aberrация (170). 5. Вычисление годичной aberrации (171). 6. Эфемериды (175). 7. Частные случаи aberrации (176). Замечания. Литература (177).	
ГЛАВА VII. СРАВНЕНИЕ НАБЛЮДЕНИЙ И ТЕОРИИ	178
1. Введение (178). 2. Движения плоскостей отсчета (179). 3. Прецессия (179). 4. Нутация (180). 5. Геоцентрический параллакс (182). 6. Практические указания (184). Замечания. Литература (184).	
ГЛАВА VIII. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	185
1. Введение (185). 2. Частотное распределение ошибок наблюдений (185). 3. Наиболее вероятное значение измеренной величины (188). 4. Веса наблюдений (190). 5. Непрямые измерения (190). 6. Условные уравнения (191). 7. Веса уравнений (192). 8. Составление нормальных уравнений (193). 9. Нормальные уравнения (194). 10. Формальное решение (196). 11. Численный пример (199). 12. Комбинации неизвестных (201). 13. Корреляции (202). 14. Нормальные места (204). Замечания. Литература (204).	
ГЛАВА IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСПРАВЛЕНИЕ ОРБИТ	205
1. Введение (205). 2. Применение прямоугольных экваториальных координат (206). Замечания. Литература (218).	
ГЛАВА X. ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ. РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ	219
1. Интегралы центра масс (219). 2. Интегралы площадей и интеграл энергии (221). 3. Ограниченнная задача трех тел (223). 4. Критерий Тиссерана (224). 5. Поверхности и кривые нулевой скорости (226). 6. Частные решения Лагранжа (228). 7. Малые колебания относительно равновесных решений (230). 8. Различные формы уравнений движения (234). Замечания. Литература (237).	
ГЛАВА XI. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ	238
1. Основные принципы метода (238). 2. Скобки Лагранжа (241). 3. Независимость скобок Лагранжа от времени (242). 4. Метод Уиттекера вычисления скобок Лагранжа (243). 5. Производные от кеплеровых элементов (247). 6. Модификация уравнений для устранения t вне тригонометрических аргументов (248). 7. Альтернативные виды уравнений (24) в случаях малого эксцентриситета или малой наклонности (250). 8. Система $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$, (251). 9. Каноническая система элементов (252). 10. Возмущения первого порядка. Вековые и периодические члены (253). 11. Возмущения второго порядка (256). 12. Малые делители (257). 13. Гауссова форма уравнений (260). 14. Прямой вывод уравнений Гаусса (263). Замечания. Литература (266).	
ГЛАВА XII. ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ	268
1. Постановка задачи (268). 2. Уравнения движения (268). 3. Разложение возмущающей функции по эллиптическим элементам (270). 4. Свой-	

ства возмущающей функции (275). 5. Интегрирование главных членов по методу вариации произвольных постоянных (277). 6. Вековые члены (278). 7. Главные периодические члены (280). 8. Вариация (281). 9. Эвекция (283). 10. Годичное уравнение (285). 11. Параллактическое неравенство (285). 12. Главное возмущение в широте (286). 13. Применение третьего закона Кеплера к спутниковым орбитам (286). 14. Члены без множителя m (287). 15. Дальнейшие приближения (288). 16. Комментарии к теориям Делонэ и Ганзена (290). 17. Вводные замечания к работе Хилла «Researches in the Lunar Theory» (291). 18. Уравнения Хилла для движения Луны (292). 19. Введение и в (294). 20. Решение относительно u и v по степенным m (296). 21. Результаты для вариационной орбиты (298). 22. Масштабный множитель a (301). 23. Преобразование уравнений (302). 24. Функция Θ (307). 25. Движение перигея (311). 26. Движение узла (317). 27. Метод дифференциальной поправки Брауна (320). 28. Лунная теория Брауна (322). Замечания. Литература (324).	325
ГЛАВА XIII. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КООРДИНАТАХ	325
1. Введение (325). 2. Дифференциальные уравнения (325). 3. Интегрирование (329). 4. Способ Ганзена (330). 5. Множители q_1 и q_2 (331). 6. Лишняя постоянная (334). 7. Возмущения первого порядка (335). 8. Вековые возмущения (338). 9. Введение в метод Браузера (344). 10. Уравнения движения (344). 11. Интегрирование (346). 12. Формальное решение (349). 13. Явное решение (350). 14. Выражения для возмущений (352). 15. Квадратные скобки (353). 16. Постоянные интегрирования (354). 17. Возмущающая функция и ее производные (356). Замечания. Литература (357).	359
ГЛАВА XIV. МЕТОД ГАНЗЕНА	359
1. Введение (359). 2. Принцип метода (360). 3. Системы координат (360). 4. Уравнения для u и r (367). 5. Выражение для W_0 (373). 6. Уравнение для u (375). 7. Время как независимая переменная (376). 8. Постоянные интегрирования — время как независимая переменная (381). 9. Эксцентрисическая аномалия в качестве независимой переменной (385). 10. Постоянные интегрирования — эксцентрисическая аномалия как независимая переменная (387). 11. Возмущающая функция и ее производные (387). 12. Возмущения второго порядка (395). Замечания. Литература (399).	400
ГЛАВА XV. ВОЗМУЩАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ	400
1. Введение (400). 2. Численный метод (403). 3. Численный метод с использованием коэффициентов Лапласа (405). 4. Буквенный метод (409). 5. Непрямой член (420). 6. Буквенное разложение (421). 7. Коэффициенты Лапласа (425). 8. Производные от коэффициентов Лапласа (431). 9. Замечания. Литература (434).	436
ГЛАВА XVI. ВЕКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ	436
1. Введение (436). 2. Вековая часть возмущающей функции (437). 3. Решение для двух планет (439). 4. Обобщение решения на любое число планет (442). 5. Определение постоянных интегрирования (445). 6. Метод Якоби решения характеристических уравнений (446). 7. Вековые возмущения малых планет (449). Замечания. Литература (453).	454
ГЛАВА XVII. КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ	454
1. Общие принципы (454). 2. Канонические преобразования (455). 3. Определитель Якоби (456). 4. Бесконечно малые контактные преобразования (458). 5. Примеры (461). 6. Определяющая функция (463). 7. Метод Делонэ (463). 8. Преобразование Делонэ (466). 9. Решение задачи Делонэ путем нахождения определяющей функции (470). 10. Пример преобразования Делонэ (473). 11. Решение этой же задачи при помощи определяющей функции (478). 12. Движение искусственного спутника (481). 13. Связь с проблемой двух неподвижных центров (489). 14. Влияние сопротивления атмосферы на движение искусственного спутника (490). 15. Приложение к движению малой планеты, возмущаемой Юпитером (496). 16. Уравнения в переменных Делонэ для общей задачи движения планет (501). Замечания. Литература (504).	506
<i>Приложение. Дополнительная литература на русском языке</i>	<i>506</i>

Д. Браузер и Дж. Клеменс

**Методы
небесной механики**

Редакторы Г. И. Кузьменко
и Л. В. Самсоненко

Художник Н. С. Хмелевская

Художественный редактор
Е. И. Подмаркова

Технический редактор Г. М. Дудаева

Корректоры И. П. Максимова

и Р. Я. Новик

Сдано в производство 28/XII 1963 г.

Подписано к печати 9/IV 1964 г.

Бумага 70×108/16=16,1 бум. л.

44,2 печ. л.

Уч.-изд. л. 33,2. Изд. № 27/1504

Цена 2 р. 52 к. Зак. 25

(Темплан 1964 г. Изд-ва ИЛ, пор. № 94)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
«Главполиграфпром»

Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати
Москва, Трехпрудный пер., д. 9.