# 10 Метод Энке

## 10.1 Классический метод Энке

Эффективность численных алгоритмов можно повысить, если вместо отклонений действительных координат от заданных начальных значений (иначе говоря, просто координат) интегрировать отклонения от аналогов на некоторой промежуточной (опорной) орбите, используя при этом априорные сведения о характерных свойствах исследуемого движения. Впервые идея введения таких отклонений (возмущений) была предложена немецким астрономом И.Ф. Энке для исследования кометных орбит (Энке, 1852).

Основная идея метода Энке состоит в том, чтобы подобрать такую опорную орбиту, которая в течение длительного времени была бы близка реальной эволюционирующей орбите. Для отклонений координат реальной орбиты от соответствующих величин на опорной траектории составляется система дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется численными методами. Таким образом, метод Энке нацелен на то, чтобы получить такие дифференциальные уравнения, численное интегрирование которых не требовало бы вычислительных операций с большими величинами, которые обременены большими ошибками округления. Представим классическое изложение метода.

Пусть движение объекта описывается уравнениями (3.1):

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}=-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{P} \tag{10.1}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0),\quad \dot{\mathbf{x}}_0=\dot{\mathbf{x}}(t_0). \tag{10.2}$$

Для получения своих уравнений в качестве промежуточной Энке использовал оскулирующую кеплеровскую орбиту, удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_K}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K=\mathbf{0}. \tag{10.3}$$

Поскольку промежуточная орбита в момент времени $t_0$ оскулирует реальную орбиту, то начальные условия уравнений (10.3) будут совпадать с условиями (10.2):

$$\mathbf{x}_{0K}=\mathbf{x}_K(t_0)=\mathbf{x}(t_0),\quad \dot{\mathbf{x}}_{0K}=\dot{\mathbf{x}}_K(t_0)=\dot{\mathbf{x}}(t_0). \tag{10.4}$$

Пусть $\delta\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_K$ — изохронные отклонения действительных координат от их аналогов на промежуточной орбите. Тогда дифференциальные уравнения для отклонений запишутся

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_K}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}+\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{P},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}-\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K=-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}+\mathbf{P}, \tag{10.5}$$

а начальные условия примут тривиальный вид

$$\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}. \tag{10.6}$$

Отклонения $\delta\mathbf{x}$ можно получить непосредственным интегрированием системы (10.5). Кеплеровский член $\mu\mathbf{x}_K / r_K^3$ определен заранее из аналитического решения $\mathbf{x}_K$ задачи двух тел, а $\mu\mathbf{x}/r^3$ и правая часть уравнений являются функциями действительных координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}$ и времени $t$. Таким образом, система (10.5) самодостаточна и пригодна для использования.

Вблизи эпохи оскуляции $\delta\mathbf{x}$ — малые величины. Кеплеровские члены в уравнениях (10.5), как правило, существенно больше. Поэтому их малая разность будет вычисляться с неудовлетворительной точностью. Энке предложил прием, устраняющий эту трудность, и тем самым повысил практическую ценность своего метода.

Преобразуем разность кеплеровских членов к виду

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K &= \frac{\mu}{r_K^3}\left(\frac{r_K^3}{r^3}\mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_K\right) = \\ &= \frac{\mu}{r_K^3}\left(\left(\frac{r_K^3}{r^3} - 1\right)\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\right). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Поскольку

$$r^2 = (\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}) = r_K^3 + 2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}),$$

то

$$\frac{r^2}{r_K^2} = 1 + \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{r_K^2}.$$

Положим, что

$$2q \equiv \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{r_K^2}, \tag{10.8}$$

тогда

$$\frac{r^2}{r_K^2} = 1 + 2q \quad \Rightarrow \quad \frac{r_K^3}{r^3} - 1 = (1+2q)^{-3/2} - 1 \equiv f(q)q.$$

Разложение в ряд функции $f$ по степеням $q$ дает

$$f(q) = -3 + \frac{15}{2}q - \frac{105}{6}q^2 + \ldots \tag{10.9}$$

В итоге уравнения Энке принимают окончательный вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r_K^3}(fq\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \tag{10.10}$$

с начальными условиями

$$\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \delta\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}, \tag{10.11}$$

где $f$ с заданной точностью определяется конечной суммой ряда (10.9).

Неудобство использования полученных уравнений заключается в том, что $f$ в процессе интегрирования вычисляется приближенно. Однако существуют способы, позволяющие вычислять разность кеплеровских членов без использования рядов.

Представим разность кеплеровских членов в виде

$$\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}-\frac{\mu}{r_K^3}\mathbf{x}_K=\frac{\mu}{r^3}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_K+\mathbf{x}_K-\frac{r^3}{r_K^3}\mathbf{x}_K\right)=$$

$$=\frac{\mu}{r^3}\left(\delta\mathbf{x}-\left(\frac{r^3}{r_K^3}-1\right)\mathbf{x}_K\right).$$

Имеем

$$r^2-r_K^2=2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x}).$$

Расписывая разность квадратов и разрешая относительно разности радиусов, получим

$$r-r_K=\frac{2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x})}{r+r_K}.$$

Тогда

$$\frac{r}{r_K}=1+\frac{2(\mathbf{x}_K,\delta\mathbf{x})+(\delta\mathbf{x},\delta\mathbf{x})}{r_K(r+r_K)}\equiv 1+d$$

и

$$\frac{r^3}{r_K^3}-1=(1+d)^3-1=d(3+3d+d^2)\equiv D.$$

После соответствующей замены получаем уравнения Энке в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{r^3}(\delta\mathbf{x}-D\mathbf{x}_K)=-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}. \qquad (10.12)$$

## 10.2 Обобщение метода Энке

Таким образом, метод Энке формально реализуется по следующей схеме.

Предположим, что движение небесного тела описывается системой уравнений первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{Q}(\mathbf{q},t),\quad \mathbf{q}_0=\mathbf{q}(t_0), \qquad (10.13)$$

В пространстве $\mathbf{q}$ выбирается опорная промежуточная орбита $\mathbf{q}_K=\mathbf{q}_K(t)$, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}_K}{\mathrm{d}t}=\mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K,t),\quad \mathbf{q}_{K0}=\mathbf{q}_K(t_0). \qquad (10.14)$$

Прямым вычитанием уравнений (10.13) из (10.14) получаем уравнения для отклонений $\delta\mathbf{q}=\mathbf{q}-\mathbf{q}_K$:

$$\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{Q}(\mathbf{q}_K+\delta\mathbf{q},t)-\mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K,t),\quad \delta\mathbf{q}_0=\mathbf{q}(t_0)-\mathbf{q}_K(t_0). \qquad (10.15)$$

Если удается в $\mathbf{Q}$ явно выделить невозмущенную $\mathbf{Q}_K$ и возмущенную $\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_K$ части, путем соответствующих преобразований решается проблема вычитания близких величин

$$\mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K+\delta\mathbf{q},t)-\mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K,t). \qquad (10.16)$$

Следуя терминологии С. Херика (1977), разность (10.16) будем называть членом Энке.

Вблизи эпохи оскуляции возмущения $\delta\mathbf{q}$ малы, но со временем возрастают. На достаточно длинных интервалах времени они увеличиваются настолько, что член Энке становится сравнимым с возмущающими членами. В этом случае прибегают к процедуре исправления орбиты путем перевычисления параметров опорного движения на новую эпоху $t_1$. Параметры $\mathbf{q}_K(t_1)$ определяются из текущих значений $\mathbf{q}(t_1)=\mathbf{q}_K(t_1)+\delta\mathbf{q}(t_1)$ до исправления, а в качестве критерия переопределения параметров рассматривается величина члена Энке.

Причиной возрастания $\delta\mathbf{q}$, очевидно, является неточное представление движения промежуточной орбитой, которое, кроме того, усиливается неустойчивостью движения. Представление можно улучшить путем вариации параметров промежуточной орбиты таким образом, чтобы на длительном интервале времени она учитывала основные тенденции динамической эволюции. Однако трудность указанного подхода заключается в том, что уже сама необходимость применения численных методов как лучшей альтернативы аналитическим методам для решения проблемы предполагает сложность исследуемой орбитальной динамики и при этом мало что известно заранее о характере движения. Второй подход более фундаментальный и состоит в поиске новых математических моделей для конструирования промежуточных орбит.

### 10.3 Уравнения Энке в переменных Кустаанхеймо-Штифеля

Метод Энке в KS-интерпретации (Штифель, Шейфеле, 1971) имеет разнообразные преимущества. Во-первых, благодаря линейности исходных уравнений в KS-переменных преобразование Энке не требует специальных алгебраических действий для устранения вычитаний близких по значению величин. Во-вторых, как будет продемонстрировано ниже, в результате преобразования формульный вид дифференциальных уравнений принципиально не меняется. В частности, уравнения в отклонениях, описывающие движение в KS-пространстве, сохраняют вид уравнений возмущенного гармонического осциллятора. В-третьих, опорное решение выражается явно через независимую переменную, обобщенную эксцентрическую аномалию.

Для конструирования дифференциальных уравнений Энке примем в качестве промежуточной орбиты невозмущенное решение системы (9.26)–(9.28):

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}_K}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}\mathbf{u}_K=\mathbf{0},\quad \frac{\mathrm{d}\omega_K}{\mathrm{d}E}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\tau_K}{\mathrm{d}E}=\frac{\mu}{8\omega_K^3}, \qquad (10.17)$$

которое имеет простую форму

$$\mathbf{u}_K = \boldsymbol{\alpha}_K \cos\frac{E}{2} + \boldsymbol{\beta}_K \sin\frac{E}{2},$$
$$\omega_K = \omega_0, \quad \tau_K = \frac{\mu}{8\omega_K^3} E + \tau_0, \tag{10.18}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_K, \boldsymbol{\beta}_K$ — векторные константы, определяемые из начальных данных, а $\omega_0, \tau_0$ — начальные значения для $\omega$, и $\tau$.

Тогда уравнения в возмущениях запишутся в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{4}\delta\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left(-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right) - \frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}, \tag{10.19}$$

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_K = \delta\boldsymbol{\alpha}\cos\frac{E}{2} + \delta\boldsymbol{\beta}\sin\frac{E}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta\omega}{\mathrm{d}E} = -\frac{(\mathbf{u},\mathbf{u})}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right), \tag{10.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu\left(1 - \frac{\omega^3}{\omega_K^3}\right) - 2rV + r\left(\mathbf{x}, \mathbf{P} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)\right] - \frac{2}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}\left(\mathbf{u}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}\right), \tag{10.21}$$

$$\delta\omega = \omega - \omega_K, \quad \delta\tau = \tau - \tau_K.$$

Член Энке в (10.21) как разность кубов легко приводится к выражению малых величин:

$$1 - \frac{\omega^3}{\omega_K^3} = -\frac{\delta\omega}{\omega_K}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_K}\right) + 1\right].$$

Интересная особенность KS-возмущений состоит в том, что они не изохронны. Независимая переменная $E$ в регулярных уравнениях является аналогом возмущенной эксцентрической аномалии, а в невозмущенном случае с точностью до постоянной фазы совпадает с кеплеровской. Как и любая аномалия в орбитальном движении эксцентрическая указывает на местоположение объекта на орбите. Следовательно, отнесенные к аномалии $E$ возмущения становятся изотопными[3].

Благодаря устойчивости решения KS-системы по координатам $\mathbf{u}$ отклонения $\delta\mathbf{u}$ в слабовозмущенном движении остаются малыми на достаточно длительных интервалах времени, в связи с чем реже возникает необходимость исправлять орбиту $\mathbf{u}_K$. Между тем, известно, что решение $\tau = \tau(E)$ неустойчиво. Поэтому независимо от малости возмущающих факторов с течением $E$ отклонения $\delta\tau$ неограниченно возрастают и промежуточное решение $\tau_K$ требует периодического переопределения.

В данном разделе уместно отметить еще один очевидный, но важный аспект в методе Энке, который проявляет себя в случае применения метода к системам, подобно рассмотренной выше, с быстроменяющимися и неограни-

---

[3] от греч.: *isos* — равный и *topos* — место

ченно возрастающими переменными. Такие переменные, как правило, выражаются в виде различных комбинаций долгот и аномалий, либо времени и временных элементов. Соответственно их уравнения описывают саму динамику тела на орбите. Именно эти уравнения и задают шаг интегрирования при численном решении всей системы в целом.

При удачном выборе опорного движения метод Энке приводит к возмущениям, которые, как правило, малы. Для возмущений в указанных переменных это также справедливо. Интегрирование малых возмущений допускает большой шаг интегрирования, за счет чего помимо точности повышается оперативность вычислений.

## 10.4 Метод Энке как метод приведения систем к стандартному виду

В своей монографии (Рой, 1981), А. Рой привел уравнения возмущенного движения, выражаясь языком Н.Н. Боголюбова, к стандартному виду, где применил метод Энке, преобразовав уравнение истинной долготы $\lambda$ к уравнению для ее возмущения $\delta\lambda$:

$$\frac{\mathrm{d}\delta\lambda}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{r^2}-\frac{c_K}{r_K^2}+\frac{c_1\dot{c}_2-c_2\dot{c}_1}{c(c+c_3)}. \qquad (10.22)$$

В уравнении $c, c_1, c_2, c_3$ — соответственно величина и компоненты момента движения.

Остановимся на случае, когда время $t$ выступает как зависимая переменная от эксцентрической аномалии $E$. Рассмотрим метод Энке на примерах KS-системы и системы, записанной в кеплеровских элементах.

В регулярной KS-системе уравнение времени имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=\frac{r}{2\omega}. \qquad (10.23)$$

В невозмущенном движении связь между кеплеровской эксцентрической аномалией и временем задается с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}t}=\frac{2\omega_K}{r_K}. \qquad (10.24)$$

Введем обозначение: $\delta E=E-E_K$ и $\delta r=r-r_K$. Учитывая (10.23) и (10.24), производная для $\delta E$ выразится как

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E}=1-\frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}E}=1-\frac{\omega_K r}{r_K\omega}=\frac{\delta\omega}{\omega}-\frac{\delta r}{r_K}\frac{\omega_K}{\omega}.$$

Таким образом, уравнение для $\delta E$ запишется:

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E}=\frac{\delta\omega}{\omega}-\frac{\delta r}{r_K}\frac{\omega_K}{\omega}. \qquad (10.25)$$

В (10.25) $\delta\omega$ определяется из уравнения (10.20), а $\delta r$ вычисляется по формуле

$$\delta r=r-r_K=(\mathbf{u},\mathbf{u})-(\mathbf{u}_K,\mathbf{u}_K)=2(\mathbf{u}_K,\delta\mathbf{u})+(\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}).$$

Поправка за возмущение $\delta E$ однозначно задает время. Действительно, имея $\delta E$ в шкале $E$, всегда можно определить кеплеровскую аномалию как

$E_K = E - \delta E$. Уравнение (10.24) интегрируется аналитически, а его решение представляет собой известное уравнение Кеплера $t = t(E_K)$, которое точно задает связь между временем и аномалией. Следовательно, уравнение времени (10.23) можно заменить уравнением для возмущения независимой переменной (10.25), не нарушая тем самым достаточность системы.

Аналогичный прием можно повторить применительно к системам в кеплеровских элементах. Запишем уравнение времени в виде

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E} = \frac{R}{n+\nu}, \tag{10.26}$$

где $R = 1 - e\cos E$, $n$ — среднее движение, а

$$\nu = \left( \sin v \sin E + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left( \cos v - 2e\frac{r}{p} \right) \right)\tilde{S} +$$
$$+ \left( \sin E(\cos v + \cos E) - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left( 1 + \frac{r}{p} \right)\sin v \right)\tilde{T},$$

$v$ — истиная аномалия, $p$ — фокальный параметр,

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}T$$

а $S$ и $T$ — соответственно радиальная и трансверсальная составляющие возмущающих ускорений.

Уравнение кеплеровской аномалии примет вид

$$\frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}t} = \frac{n_K}{R_K}. \tag{10.27}$$

Введем обозначение: $\delta n = n - n_K$ и $\delta R = R - R_K$. Дифференцирование $\delta E$ дает уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E} = 1 - \frac{\mathrm{d}E_K}{\mathrm{d}E} = 1 - \frac{Rn_K}{R_K(n+\nu)} = \frac{\delta n + \nu}{n+\nu} - \frac{\delta R n_K}{R_K(n+\nu)},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\delta E}{\mathrm{d}E} = \frac{\delta n + \nu}{n+\nu} - \frac{\delta R n_K}{R_K(n+\nu)}. \tag{10.28}$$

В (10.28) $\delta R$ вычисляется по формуле

$$\delta R = 2e_K \cos E_K \sin^2 \delta E/2 - \delta e \cos E_K \cos\delta E + e\sin E_K \sin\delta E,$$

а для определения $\delta n$ и $\delta e$ можно воспользоваться возмущенными уравнениями, записанными для этих отклонений.

### 10.5 Уравнения Энке в задачах динамики близких спутников планет

В классическом методе Энке в качестве опорной используется орбита невозмущенной задачи двух тел. В последнее время предпринимались попытки усовершенствовать метод Энке путем использования лучшей опорной орбиты.

Перспективным для построения таких опорных орбит оказался подход, основанный на идее введения фиктивного притягивающего центра. Этот подход получил развитие в работах Ю.В. Батракова (1979). Построенные автором промежуточные траектории в методе Энке задают движение по кеплеровской орбите относительно фиктивного притягивающего центра.

Продолжая работы Батракова, В.А. Шефер (1998) предложил в качестве опорного решения в методе Энке рассматривать движение по промежуточной траектории относительно фиктивного центра, которое при этом не является кеплеровским, а описывается уравнениями задачи Гюльдена-Мещерского.

У.Т. Кайнер и М.М. Беннет (1966) показали, что при интегрировании уравнений движения низкого спутника Земли метод Энке можно улучшить, если при построении опорной траектории учесть эффект первого порядка от сжатия Земли.

В основе построения любых промежуточных решений для метода Энке лежат геометрические и динамические свойства орбит, которые могут быть известны заранее. Именно это обеспечивает им практическую ценность в тех или иных задачах численного исследования. Но, к сожалению, чаще всего в начале интегрирования нам мало что известно об исследуемом движении не только в количественном, но даже в качественном аспектах. Очевидно, что применение методов Энке эффективно лишь в случаях, когда известен основной ход эволюционного развития динамики, которая для точного представления требует незначительного исправления за малые возмущения.

Весьма полезными для построения промежуточных решений могут являться некоторые задачи, имеющие аналитическое решение в частных случаях. Рассмотрим данный подход на примере близких спутников планет. Одним из примечательных свойств в динамике близких спутников планет является то, что они движутся по почти круговым экваториальным орбитам. Именно это свойство ниже будет являться отправным пунктом в построении промежуточных орбит метода Энке.

Как известно, в своем движении спутники испытывают действия двух основных факторов: силы притяжения массы центральной планеты, определяющей кеплеровское движение, и гравитационное влияние ее экваториального утолщения за счет сжатия. Причем для близких спутников фактор сжатия вносит существенный вклад в возмущения их кеплеровских орбит настолько, что использование решения задачи двух тел для предсказания положений спутников уже становится неприемлемым даже на малых интервалах времени.

Движение близкого спутника в поле тяготения сжатой планеты можно с высокой точностью интерпретировать общей задачей двух неподвижных центров, которая имеет аналитическое решение в замкнутых формулах. В общем случае для обеспечения высокой точности и малости возмущений именно это решение и целесообразно принять в качестве промежуточного. Однако, исходя из уникальности свойств движения рассматриваемых объектов и простоты конфигураций их орбит, использование такой достаточно "тяжеловесной" теории для построения опорных решений было бы весьма нерациональным.

Намек на изящное разрешение данного вопроса формулируется С. Херриком (1978) в следующем тезисе: "Увеличение центральной силы или массы уменьшает возмущения, поскольку произвольная часть членов высокого порядка переходит в члены, определяемые задачей двух тел". В самом деле, ведь фактор сжатие в динамике близких спутников можно трактовать как "эффект дополнительной массы" центральной планеты. Поэтому для построения опорных решений здесь может быть достаточно использовать кеплеровскую теорию с модифицированным гравитационным параметром.

Изложенную идею легко продемонстрировать на примере уравнений в прямоугольных координатах. Для этого предварительно рассмотрим одну простую задачу.

Пусть спутник движется в экваториальной плоскости центральной планеты по круговой орбите. Тогда $x_3 = 0$ и

$$V = V(r) = -\frac{\lambda}{2r^3},$$

где $\lambda = \mu J_2 b^2$, $J_2$ — коэффициент второй зональной гармоники, $b$ – экваториальный радиус планеты, а дифференциальные уравнения движения (3.1) можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda}{r^5}\mathbf{x}. \tag{10.29}$$

Группируя коэффициенты при кеплеровском множителе, получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{J_2 b^2}{r^2}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{10.30}$$

Таким образом, круговое движение экваториального спутника в поле тяготения сжатой планеты описывается уравнениями задачи двух тел с видоизмененным (увеличенным) гравитационным параметром.

Интересно также заметить, что идея Херрика была заимствована из общей теории возмущений. В терминологии кеплеровских элементов "эффект дополнительной массы" интерпретируется как наличие в среднем движении постоянных возмущений порядка $J_2$ или, что то же самое, вековых возмущений в средней аномалии.

Зададимся целью получить уравнения Энке в KS-переменных, принимая во внимание все их преимущества с практической точки зрения.

В терминологии KS-переменных эффект "дополнительной массы" равносилен повышению частоты в KS-пространстве и уменьшению физического периода, что непосредственно следует из получаемых уравнений. Покажем это.

Согласно принятым условиям задачи, дифференциальные уравнения движения в KS-переменных можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{4}\mathbf{u} = -\frac{1}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(rV), \tag{10.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E} = 0, \tag{10.32}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu - \frac{\partial}{\partial r}(r^2 V)\right]. \tag{10.33}$$

Вычисляя частные производные, преобразуем дифференциальные уравнения (10.31) и (10.33) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{4}\mathbf{u} = -\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}\mathbf{u}, \tag{10.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu - \frac{\lambda}{2r^2}\right].$$

В круговом движении

$$r = \frac{\mu}{4\omega^2}. \tag{10.35}$$

Подставим соотношение (10.35) в дифференциальные уравнения (10.34) и введем новое обозначение

$$\Phi = \frac{(2\omega)^4 \lambda}{2\mu^3}. \tag{10.36}$$

Тогда уравнения движения можно привести к невозмущенной форме с измененной частотой и периодом (Авдюшев, 1999)

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2} + \frac{1}{4}(1 + 4\Phi)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{10.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}E} = \frac{\mu}{8\omega^3}\left[1 - \Phi\right].$$

Таким образом, как показывают уравнения, сжатие центральной планеты в KS-пространстве (как и в физическом) изменяет частоту движения экваториального спутника и его период. При увеличении сжатия, определяемого величиной $J_2$, частота увеличивается, а период уменьшается.

Решение (10.37) представимо в форме

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}\cos\varphi + \boldsymbol{\beta}\sin\varphi, \quad \varphi = \sqrt{\frac{1+4\Phi}{4}}E,$$

$$\omega = \omega_0, \quad \tau = \frac{\mu}{8\omega^3}\left[1 - \Phi\right]E + \tau_0.$$

Очевидно, что решение полученных уравнений может достаточно хорошо представлять движение экваториальных спутников с почти круговыми орбитами (в особенности класса близких спутников, когда величина $\Phi$ существенно изменяет частоту движения). Исходя из этого, в алгоритмах типа Энке при исследовании движения данных объектов именно это решение целесообразно использовать в качестве опорного взамен кеплеровскому.

На основе нового опорного решения уравнения Энке в отклонениях KS-переменных для случая консервативных сил принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta\mathbf{u}=-\frac{1}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(rV)+\Phi\mathbf{u}, \tag{10.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta\omega}{\mathrm{d}E}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\,\delta\tau}{\mathrm{d}E}=\frac{1}{8\omega^2}\left[\mu\Phi-\frac{\partial}{\partial r}(r^2V)\right],$$

а в общем случае

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\delta\mathbf{u}}{\mathrm{d}E^2}+\frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta\mathbf{u}=\frac{r}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left(-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right)-\frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}+\Phi\mathbf{u},$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta\omega}{\mathrm{d}E}=-\frac{r}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right), \tag{10.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\delta\tau}{\mathrm{d}E}=\frac{1}{8\omega^3}\left[\mu\left(1-\frac{\omega^3}{\omega_K^3}\right)[1-\Phi]+\mu\Phi-2rV+r\left(\mathbf{x},\mathbf{P}-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}\right)\right]-\frac{2}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}E}\left(\mathbf{u},\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{u}}{\mathrm{d}E}\right).$$

Появление в уравнениях Энке (10.39) членов с $\Phi$-множителем влечет за собой вычитания величин типа

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2r^3}\mathbf{u}+\Phi\mathbf{u},\quad \mu\Phi-\frac{\lambda}{2r^2},$$

или

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2r^3}\mathbf{u}+\frac{\lambda}{8\omega_K^2\overline{r}^3}\mathbf{u},\quad \frac{\lambda}{2\overline{r}^2}-\frac{\lambda}{2r^2}, \tag{10.40}$$

где

$$\overline{r}=\mu/4\omega^2,$$

которые при вычислении правых частей дифференциальных уравнений приводят к существенной потере точности. С помощью несложных алгоритмических выкладок разности (10.40) можно привести к выражениям с членами, пропорциональными известным малым величинам, и избежать, таким образом, "опасных" вычитаний:

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2r^3}\mathbf{u}+\frac{\lambda}{8\omega_K^2\overline{r}^3}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}\Phi}{(1+\Delta\omega)^2}\left[3\Delta r-3(\Delta r)^2+(\Delta r)^3+2\Delta\omega+(\Delta\omega)^2\right], \tag{10.41}$$

$$\frac{\lambda}{2\overline{r}^2}-\frac{\lambda}{2r^2}=\mu\Phi\left[2\Delta r-(\Delta r)^2\right].$$

Здесь $\Delta r=(r-\overline{r})/r$, а $\Delta\omega=\delta\omega/\omega_K$. Во избежание потери точности при прямом вычитании $r-\overline{r}$, величину $\Delta r$ следует вычислять по следующей формуле:

$$\Delta r=\frac{\delta r+r_K-\overline{r}}{r},$$

где разность $r_K-\overline{r}$ задается с помощью аналитического выражения:

$$r_K-\overline{r}=|\boldsymbol{\alpha}_K|^2-\overline{r}+(2(\boldsymbol{\alpha}_K,\boldsymbol{\beta}_K)\cos\varphi+(|\boldsymbol{\alpha}_K|^2-|\boldsymbol{\beta}_K|^2)\sin\varphi)\sin\varphi.$$