

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №3

Выполнил:

Студент: Гвоздев Святослав

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Внешнее множество решений	2
2.2	Метод Кравчика	2
3	Результаты	3
4	Вывод	3
	Литература	4

1 Постановка задачи

Задана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Необходимо найти корни данной системы точечных нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчика.

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Внешним множеством решений называется объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \quad (1)$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика предназначен для уточнения двухсторонних границ решений систем уравнений, в общем случае нелинейных, заданных на некотором брус $\mathbf{X} \subset \mathbb{IR}$, вида

$$F(x) = 0, \quad \text{где } F(x) = \{F_1(x), \dots, F_n(x)\}^T, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

Также данный метод может быть использован для того, чтобы понять, что решений нет. Отображение $\mathcal{K} : \mathbb{ID} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \bar{x}) := \bar{x} - \Lambda * F(\bar{x}) - (I - \Lambda * \mathbf{L} * (\mathbf{X} - \bar{x})) \quad (3)$$

называется оператором Кравчика на \mathbb{ID} относительно точки \bar{x} . Итерационная схема данного метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{X}^{k+1} \leftarrow \mathbf{X}^k \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^k, \bar{x}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x^k \in \mathbf{X}^k \quad (4)$$

Сходимость данного метода гарантирована при выполнении условия

$$\rho(I - \Lambda * \mathbf{L}) < 1 - \text{спектральный радиус меньше единицы} \quad (5)$$

Частным случаем данного метода является линейный метод Кравчика, итерационная схема которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = (\Lambda * \mathbf{b} + (I - \Lambda * \mathbf{A}) * \mathbf{x}^k) \cap \mathbf{x}^k \quad (6)$$

\mathbf{A} в данном случае является интервальной матрицей коэффициентов соответствующей ИСЛАУ, а \mathbf{b} - вектором свободных членов.

В случае линейности системы и выполнения условия $\eta = \|I - \Lambda * \mathbf{A}\|_{\infty} \leq 1$ в качестве начального приближения можно взять брус

$$\mathbf{x}^0 = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где } \theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_{\infty}}{1 - \eta} \quad (7)$$

3 Результаты

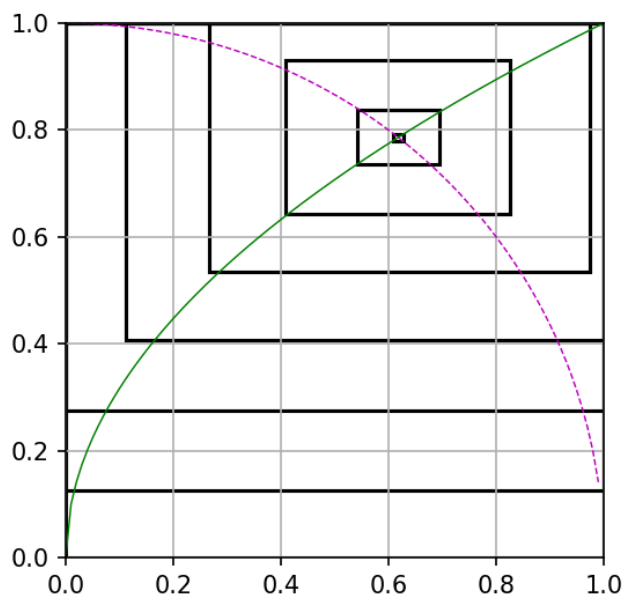


Рис. 1: Метод Кравчика - пересечение параболы и окружности

Получим таблицу результатов для некоторых $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$

№	\mathbf{X}_2	\mathbf{X}_1	ширина \mathbf{X}_1	ширина \mathbf{X}_2
1	[0, 1]	[0, 1]	1.0	1.0
2	[0, 1]	[0.125, 1]	0.875	1.0
3	[0.111684, 1]	[0.406219, 1]	0.0.5937	0.8883
4	[0.266059, 0.973673]	[0.534126, 1]	0.4658	0.7076
5	[0.409351, 0.82672]	[0.64279, 0.92999]	0.2871	0.4173
6	[0.542195, 0.693873]	[0.735163, 0.83714]	0.1020	0.1517
7	[0.608239, 0.627829]	[0.779572, 0.79273]	0.0132	0.0196
8	[0.617871, 0.618197]	[0.786042, 0.786261]	0.000219	0.0003264
9	[0.618034, 0.618034]	[0.786151, 0.786151]	$6.08 \cdot 10^{-8}$	$9.06 \cdot 10^{-8}$

4 Вывод

1. Полученные результаты подтверждают эффективность и сходимость интервального метода Кравчика для решения системы нелинейных уравнений. На каждой итерации метода границы решений сужаются, итерации продолжают до достижения требуемой точности.
2. Точное решение системы $x = 0.6180339, y = 0.7861513$ совпадает с результатами, полученными методом. Таким образом, метод успешно находит корни системы нелинейных уравнений.
3. На 9 итерации метод дошел до $2.52 \cdot e^{-8}$ и $2.46 \cdot e^{-7}$ соответственно
4. Заметим, что $\rho(|I - \Lambda * \mathbf{L}|) = 1.49 > 1$, что подчеркивает важность выбора подходящих параметров и начальных условий для успешной работы метода. Если данное значение больше 1, то сходимость не гарантирована, однако сходимость присутствует.

Список литературы

- [1] Histogram. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram>
- [2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. //Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot
- [4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.