

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА
ВЕЛИКОГО

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

**Отчет по лабораторной работе №2
по дисциплине "Интервальный анализ"**

Выполнил:

Студент: Гвоздев Святослав

Группа: 5030102/00201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2023 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Распознающий функционал	2
2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части . . .	2
2.3	Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы	3
2.4	Оценки вариабельности решения	3
3	Результаты	4
3.1	Максимум распознающего функционала	4
3.2	Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части	4
3.2.1	Равномерное уширение	4
3.3	Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части	5
4	Вывод	5

1 Постановка задачи

Имеем ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [2, 4] * x_1 + [4, 6] * x_2 = [5, 9] \\ 3 * x_1 + [-6, -4] * x_2 = [-1, 1] \\ [0.5, 1.5] * x_1 = [1, 3] \\ [0.5, 1.5] * x_2 = [0, 2] \end{cases}$$

Необходимо найти решения ЛЗД. Для этого нужно

- исследовать разрешимость ЛЗД (найти максимум распознающего функционала)
- коррекция ЛЗД
 - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части (равномерное/неравномерное)
 - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим функционалом называется функция

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (1)$$

Пусть

$$T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (2)$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \geq 0$, то $\tau \in \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ совместна и точка τ лежит в допусковом множестве решений.
- если $T > 0$ то $\tau \in \text{int } \Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных - матрицы и правой части.
- если $T < 0$ то $\Xi_{\text{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части

Равномерное уширение правой части ИСЛАУ

Расширение вектора \mathbf{b} происходит путем его замены на вектор:

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \geq 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], \dots, [-1, 1])^T \quad (3)$$

Тогда

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = T + K \quad (4)$$

Но Arg max Tol - не изменится (положение точки T)

Неравномерное уширение правой части ИСЛАУ

Если линейная задача о допусках с матрицей \mathbf{A} и вектором правой части \mathbf{b} первоначально не имела решений, то новая задача с той же матрицей \mathbf{A} и уширенным вектором

$$(\mathbf{b}_i + K \cdot v_i \cdot [-1, 1])_{i=1}^m \quad (5)$$

в правой части становится разрешимой при $K \geq |T_v|$, где

$$T_v = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ v_i^{-1} \left(\text{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \text{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right) \right\} \quad (6)$$

Значение Arg max Tol - изменится

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы

Общая схема равномерного метода заключается в том, что необходимо модифицировать матрицу \mathbf{A} за счет ее замены на $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, где \mathbf{E} состоит из $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$

Причем значения точечных величин \mathbf{e}_{ij} удовлетворяют двум условиям:

$$0 \leq \mathbf{e}_{ij} \leq \text{rad } \mathbf{a}_{ij} \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \tau = K, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad K > 0 \quad (8)$$

Если $K \geq |T|$, то тогда линейная задача о допусках с матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = ([\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{e}_{ij}, \bar{\mathbf{a}}_{ij} + \bar{\mathbf{e}}_{ij}])$ и правой частью \mathbf{b} становится разрешимой.

2.4 Оценки вариабельности решения

Абсолютной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \cdot \left\| \text{Tol}(x) \right\| \frac{\max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x)}{\|\mathbf{b}\|} \quad (9)$$

Относительной вариабельностью оценки называется величина

$$\text{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \text{cond } A \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n} \text{Tol}(x) \quad (10)$$

3 Результаты

3.1 Максимум распознающего функционала

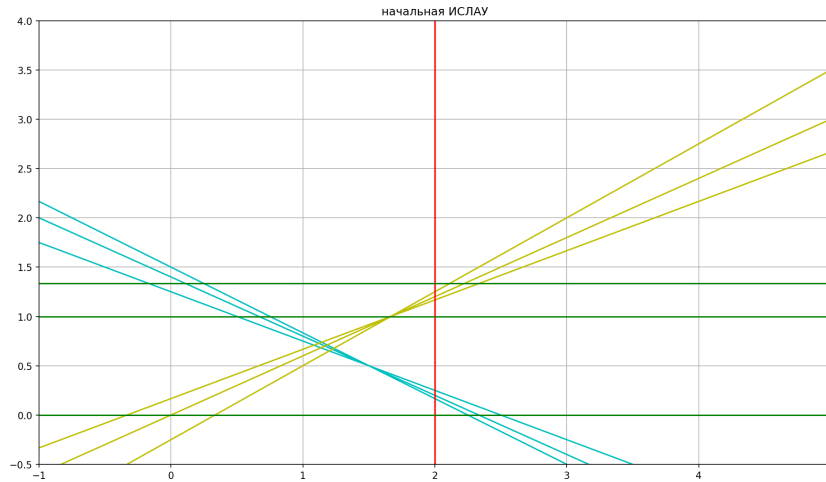


Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала

Максимум со значением $T = -0.333$ расположен в точке $\tau = (1.333, 0.6667)$.

3.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части

3.2.1 Равномерное уширение

Положим $K = 1$. Получается максимум со значением $T = 0.6667$ расположен в точке $\tau = (1.333, 0.6667)$. При этом видим, что точка максимума осталась прежней.

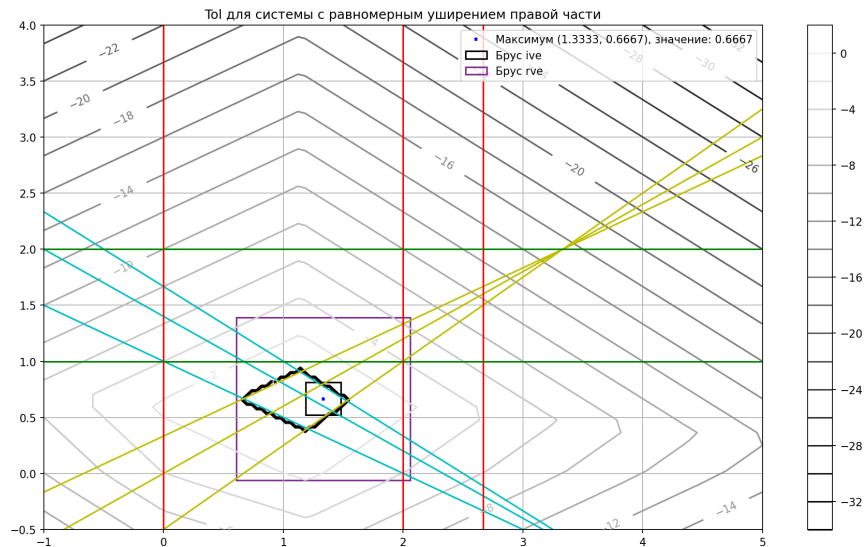


Рис. 2: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \text{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \text{rve}$. Область обведенная черной линией - допустовое множество
 $\text{ive} : 0.1473502$ $\text{rve} : 0.726363348$

3.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части

Для построения интервальной матрицы \mathbf{E} с уравновешанными интервальными элементами $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ выбираем такие \mathbf{e}_{ij} , что:

$$\begin{cases} 0 \leq \mathbf{e} \leq 1 = \text{rad}(\mathbf{a}_{11}), \text{rad}(\mathbf{a}_{12}), \text{rad}(\mathbf{a}_{22}) \\ 0 \leq \mathbf{e} \leq 0.5 = \text{rad}(\mathbf{a}_{31}), \text{rad}(\mathbf{a}_{42}) \\ 1.333 * \mathbf{e} + 0.666 * \mathbf{e} = K \geq |T| = 0.333 \end{cases} \Rightarrow 0.1666 \leq \mathbf{e} \leq 0.5$$

сформируем матрицу

$$E = \begin{pmatrix} [-0.5, 0.5] & [-0.4, 0.4] \\ [-0.3, 0.3] & [-0.5, 0.5] \\ [-0.5, 0.5] & 0 \\ 0 & [-0.3, 0.3] \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$A' = \begin{pmatrix} [2.5, 3.5] & [4.4, 5.6] \\ [2.7, 3.3] & [-5.5, -4.5] \\ [1, 1] & 0 \\ 0 & [0.8, 1.2] \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$A = \begin{pmatrix} [2, 4] & [4, 6] \\ [3, 3] & [-6, -4] \\ [0.5, 1.5] & 0 \\ 0 & [0.5, 1.5] \end{pmatrix} \quad (13)$$

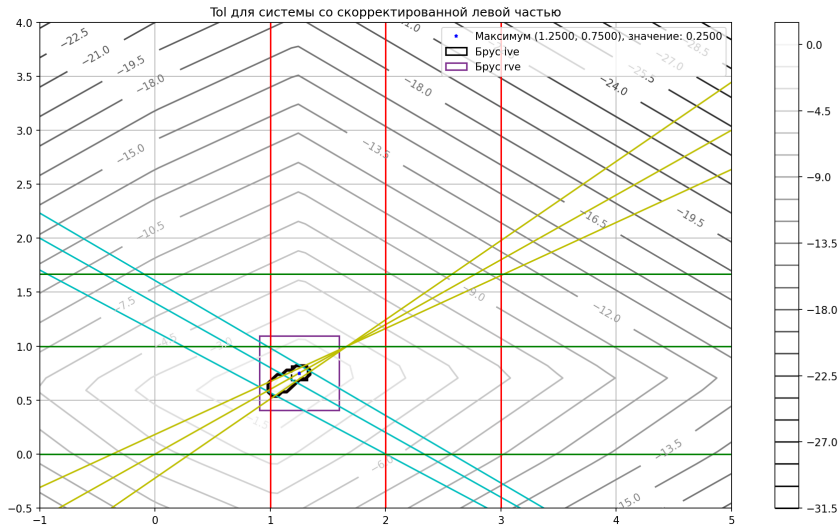


Рис. 3: Допусковое множество решений со скорректированной матрицей

На данном рисунке черный квадрат имеет сторону $2 \cdot \text{ive}$, а фиолетовый - $2 \cdot \text{rve}$. Область обведенная черной линией - допустовое множество
 $\text{ive} : 0.068321425$ $\text{rve} : 0.3444088$

4 Вывод

1. После корекции правой части равномерным уширением вектора \mathbf{b} безусловный максимум распознающего функционала $Tol = 0.667$ в точке $(1.333, 0.667)$, а форма поверхности распознающего функционала Tol не изменилась.

Таблица 1: Значения параметров

Тип	Tol	Точка	Комментарий
Origin	-0.333	(1.333, 0.667)	без расширения
Right	0.6667	(1.333, 0.667)	расширение на $K = 1$
Left	0.25	(1.25, 0.75)	сужение матрицы на матрицу (11)

2. Квадрат *rve* на нашем примере не очень хорошо приближает допустовое множество решений, а вот квадрат *ive* почти полностью принадлежит Ξ_{tol} . И это очевидно, ведь мы имеем хорошую обусловленность матрицы ($\text{cond}(\text{mid } \mathbf{A}) = 1.638$).