Методы интегрирования.

I. **Непосредственное интегрирование** выполняется тогда, когда интеграл при помощи алгебраических преобразований сводится к сумме табличных интегралов.

II. **Внесение функции под знак фифференциала.** Пусть x — независимая переменная и $\int f(x)dx = F(x) + C$. Пусть в интеграле $\int g(x)dx$ подинтегральное выражение можно представить в виде $g(x)dx = f(u)du$, где $u = u(x)$ — некоторая дифференцируемая функция и $\int f(u)du$ является табличным. Тогда сложная функция $F(u(x))$ будет первообразной для подинтегральной функции и

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = (F(u(x)) + C. \tag{2.1}$$

Этот прием называется ***подведением функции под знак дифференциала***.

Частный случай формулы подведения под знак дифференциала — линейная зависимость аргумента.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \tag{2.2}$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на заданном промежутке.

III. **Метод подстановки.** $\int f(x)dx$ можно упростить, если считать что $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая дифференцируемая функция. Тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{2.3}$$

причем в правой части стоит табличный интеграл.

IV. **Интегрирование по частям.** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две дифференцируемые функции. Тогда $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$ или $u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$. Следовательно,

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) называется формулой ***интегрирования по частям***.

Пример 0.0.1. Вычислите интеграл $\int \sin 2x\,dx$ различными способами.

Решение . 1) По формуле (2.2) имеем
$\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, d(2x) = \frac{1}{2} \cos 2x + C$.
Вычислим интеграл, внося под знак дифференциала разные функции, сначала $\sin x$, а потом $\cos x$.
2) $\int \sin 2x\, dx = \int 2 \sin x \cos x\, dx = 2 \int \sin x\, d(\sin x) = \sin^2 x + C$.
3) $\int \sin 2x\, dx = \int 2 \sin x \cos x\, dx = -2 \int \cos x\, d(\cos x) = -\cos^2 x + C$.
Приравняв правые части равенств 2 и 3, получим $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Найдите ошибку в рассуждениях.

Интегрирование рациональных функций.

Самый важный класс функций, интегралы от которых выражаются в элементарных функциях, это дробно-рациональные функции

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n}. \tag{3.1}$$

Дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя ($m < n$). Если дробь неправильная, то разделив столбиком числитель на знаменатель, выделим целую часть и правильную дробь. Будем считать, что дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная.

Интегрирование правильных дробей основано на следующей теореме.

Теорема 0.0.1. *Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена, причем единственным способом, в виде суммы конечного числа простых дробей следующих четырех типов:* I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{B}{(x-a)^k}$; III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, *где* $x^2 + px + q > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *(квадратный трехчлен не имеет действительных корней).*

Из алгебры известно, что любой многочлен степени $n \geqslant 2$ единственным образом разлагается в произведение линейных множителей и квадратных трехчленов с действительными коэффициентами, не имеющих действительных корней.

$Q(x) = b_0(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_rx+q_r)^{l_r}$, где $k_1+\ldots+k_s+\dfrac{l_1\ldots+l_r}{2}=n$.

Если $x=a$ — простой корень многочлена $Q(x)$, то в разложении $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на простые дроби ему соответствует одна простая дробь $\dfrac{A}{x-a}$.

Если $x=a$ — корень кратности k $(k\geqslant 2)$ многочлена $Q(x)$, то ему в разложении соответствует сумма k простых дробей

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}\ .$$

Если множитель x^2+px+q в разложении $Q(x)$ на множители имеет первую степень, то ему соответствует одна дробь вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

Рассмотрим интегрирование простых дробей.

I. $\int\dfrac{A}{x-a}\,dx=\int\dfrac{A}{x-a}\,d(x-a)=A\ln|x-a|+C$.

II. Если $k>1$, то $\int\dfrac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=\dfrac{A}{1-k}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$.

III. Для вычисления интеграла $\int\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ выделим в знаменателе полный квадрат $x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+q-\dfrac{p^2}{4}$. Так как $\dfrac{4q-p^2}{4}=-\dfrac{D}{4}>0$ (D — дискриминант квадратного трехчлена) обозначим $\dfrac{4q-p^2}{4}=a^2$. Введем новую переменную $t=x+\dfrac{p}{2}$. Тогда

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\left(\frac{2N-Mp}{2a}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

$$\left(\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt=\int\frac{Mt\,dt}{t^2+a^2}+\int\frac{N-\frac{Mp}{2}}{t^2+a^2}\,dt=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}\right)$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Интеграл от рациональной функции находится по следующему алгоритму:

1. Если дробь неправильная, то выделяем целую часть.

2. Правильную дробь представляем в виде суммы простых дробей с неопределенными коэффициентами. Для этого знаменатель раскладываем на линейные и квадратичные (не имеющие действительных корней)

множители.

3. Приводим дроби к общему знаменателю. Из равенства дробей и равенства их знаменателей следует равенство их числителей. Приравниваем числители исходной и получившейся после приведения к общему знаменателю дроби.

4. Находим неопределенные коэффициенты, с которыми дроби входят в разложение, применяя для этого понятия равенства многочленов.

5. Вычисляем интеграл от суммы простых дробей.

Интегрирование простейших иррациональных функций.

I. Пусть $R\left(x, \sqrt[n_1]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x}\right)$ — рациональная функция от переменных $x, \sqrt[n_1]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x}$. Подстановкой $x = t^N$, где $N =$ Н.О.К.$(n_1, \ldots, n_k)$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Интегрирование тригонометрических функций.

Рассмотрим вычисление интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

I. Этот интеграл можно свести к интегралу от рациональной дроби с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Выпишем основные соотношения для этой подстановки:

$\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Однако при применении универсальной тригонометрической подстановки часто получаются достаточно сложные интегралы. Рассмотрим несколько частных видов функции $R(\sin x, \cos x)$, интегрирование которых при соответствующей замене выполняется проще.

II. Функция $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная относительно $\sin x$ $(R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x))$. В этом случае замена $y = \cos x$ приводит к интегралу от рациональной дроби. Выпишем основные соотношения для этой подстановки: $\sin x = \sqrt{1-y^2}$, $x = \arccos y$, $dx = -\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

III. Функция $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная относительно $\cos x$ $(R(\sin x, -\cos x) =$

$-R(\sin x, \cos x)$). В этом случае замена $z = \sin x$ приводит к интегралу от рациональной дроби. Выпишем основные соотношения для этой подстановки: $\cos x = \sqrt{1-z^2}$, $x = \arcsin z$, $dx = \dfrac{dy}{\sqrt{1-z^2}}$.

IV. Функция $R(\sin x, \cos x)$ — четная относительно $\sin x$ и $\cos x$ ($R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$). В этом случае замена $u = \operatorname{tg} x$ приводит к интегралу от рациональной дроби. Выпишем основные соотношения для этой подстановки: $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $\sin x = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $x = \operatorname{arctg} u$, $dx = \dfrac{du}{1+u^2}$.

V. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m, n – четные числа, берется с применением формул понижения степени $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

VI. Интеграл от произведения тригонометрических функций с различными аргументами вычисляется с применением тригонометрических формул.