Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

ГРИНШПОН И. Э.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

Сборник заданий для практических занятий

Томск
2021

УДК
ББК

Приведен конспект лекций по разделу «Линейная алгебра», читаемых в первом семестре на первом курса ФВС. Конспект включает в себя действия с матрицами, решение матричных уравнений, решение систем линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса; вводится понятие линейного пространства и его базиса; рассматриваются линейные операторы; для нахождения собственных чисел и собственных векторов линейного оператора приводятся сведения из теории многочленов одной переменной, в том числе, нахождение корней многочленов с целыми коэффициентами; рассматриваются квадратичные формы. Во второй части курса рассмотрены действия с векторами, введены понятия скалярного, векторного и смешанного произведения векторов и их приложения к решению геометрических и физических задач. Третья часть курса посвящена аналитической геометрии. Приведены различные уравнения прямой на плоскости, плоскости, прямой в пространстве. Рассмотрены кривые второго порядка и их приведение к каноническому виду.

Оглавление

Введение

Данное пособие представляет собой сборник задач по линейной алгебре, векторной алгебре и аналитической геометрии.

Целью раздела «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» является приобретение студентами необходимых математических знаний по этому разделу высшей математики, освоение основных понятий и их взаимосвязей. Изучение этого курса даст возможность студентам овладеть мощным аппаратом, помогающим анализировать, моделировать и решать различные прикладные инженерные задачи и стандартные задачи профессиональной деятельности, развивать способность к самоорганизации и самообразованию.

В задачи этого раздела курса математики входят: развитие алгоритмического мышления студентов, овладение методами исследования и решения математических задач, выработка у студентов умения самостоятельно расширять и углублять свои математические знания, проводить анализ прикладных задач.

При изучении курса «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» студент должен понять основные подходы к формированию различных моделей, использующих понятия и результаты математического аппарата, знать основные его алгоритмы и уметь применять их при решении экономических, технических задач и в других дисциплинах, изучаемых в университете. Основными алгоритмами, которыми должен овладеть студент при изучении раздела «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» являются действия с матрицами, алгоритм Гаусса решения систем линейных уравнений, действия с векторами, построение прямых на плоскости и в пространстве, плоскостей и гиперплоскостей в многомерном пространстве, преобразования, проводимые с помощью линейных операторов.

При изучении этого курса необходимо повышать уровень фундаментальной математической подготовки студентов при одновременном усилении прикладной направленности.

В результате изучения дисциплины студент должен:

- **знать** основные понятия и методы линейной алгебры и геометрии, использующиеся при изучении общетеоретических и специальных дисциплин;
- **уметь** применять математические методы для решения практических задач и пользоваться при необходимости математической литературой;
- **владеть** методами решения задач линейной и векторной алгебры и аналитической геометрии, методами решений стандартных задач профессиональной деятельности, способностью к самообразованию.

Пособие предназначено для студентов специальностей 09.03.01 и 09.03.02, но может использоваться и студентами других специальностей при изучении данных разделов.

§1. Действия с матрицами.

Для решения задач необходимо изучить материал § 1 главы 1 теоретического пособия.

Пример 1.1. Найдите сумму и разность матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&-2\\-2&7&5&3\\4&-1&9&-4\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}3&1&6&2\\5&-2&-7&5\\-1&5&-5&9\end{pmatrix}.$$

Решение. По правилу сложения матриц

$$A+B=\begin{pmatrix}1&3&2&-2\\-2&7&5&3\\4&-1&9&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1&6&2\\5&-2&-7&5\\-1&5&-5&9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+3&3+1&2+6&(-2)+2\\(-2)+5&7+(-2)&5+(-7)&3+5\\4-1&(-1)+5&9+(-5)&(-4)+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&8&0\\3&5&-2&8\\3&4&4&5\end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&3&2&-2\\-2&7&5&3\\4&-1&9&-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1&6&2\\5&-2&-7&5\\-1&5&-5&9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-3&3-1&2-6&-2-2\\-2-5&7-(-2)&5-(-7)&3-5\\4-(-1)&-1-5&9-(-5)&-4-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&-4&-4\\-7&9&12&-2\\5&-6&14&-13\end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Пусть $A=\begin{pmatrix}2&-4&5\\-1&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&5&-3\\6&-2&4\end{pmatrix}$. Найдите матрицу $3A+2B$.

Решение. По правилу умножения матрицы на число имеем

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot2&3\cdot(-4)&3\cdot5\\3\cdot(-1)&3\cdot3&3\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-12&15\\-3&9&6\end{pmatrix},$$

$$2B=\begin{pmatrix}2\cdot4&2\cdot5&2\cdot(-3)\\2\cdot6&2\cdot(-2)&2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&10&-6\\12&-4&8\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$3A+2B=\begin{pmatrix}6&-12&15\\-3&9&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&10&-6\\12&-4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+8&-12+10&15+(-6)\\-3+12&9+(-4)&6+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}14&-2&9\\9&5&14\end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Найдите матрицу $3A-2B^T$, где

$$A=\begin{pmatrix}4&2&-3\\-5&7&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7&-6\\-2&1\\5&3\end{pmatrix}.$$

Решение. По правилу умножения матрицы на число имеем

$3A=\begin{pmatrix}12&6&-9\\-15&21&6\end{pmatrix}$, $2B=\begin{pmatrix}14&-12\\-4&2\\10&6\end{pmatrix}$. Транспонируем матрицу $2B$, записав ее строки в столбцы $2B^T=\begin{pmatrix}14&-4&10\\-12&2&6\end{pmatrix}$.

Выполним вычитание матриц

$$3A-2B^T=\begin{pmatrix}12 & 6 & -9\\ -15 & 21 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -4 & 10\\ -12 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 10 & -19\\ -3 & 19 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Найдите произведения матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 7 & 11\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 9 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала произведение AB. Так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то произведение матриц AB существует. По правилу умножения матриц

$$AB=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 7 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 7\\ 9 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4+(-5)\cdot 9 & 1\cdot 7+(-5)\cdot(-4)\\ 7\cdot 4+11\cdot 9 & 7\cdot 7+11\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-41 & 27\\ 127 & 5\end{pmatrix}.$$

Найдем произведение BA. Так как число столбцов матрицы B равно числу строк матрицы A, то произведение матриц BA существует.

$$BA=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 9 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ 7 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 1+7\cdot 7 & 4\cdot(-5)+7\cdot 11\\ 9\cdot 1+(-4)\cdot 7 & 9\cdot(-5)+(-4)\cdot 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}53 & 57\\ -19 & -89\end{pmatrix}.$$

На этом примере мы убедились, что операция умножения матриц некоммутативна, то есть от перемены мест сомножителей произведение меняется.

Пример 1.5. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$. Какое из произведений AB или AC существует? Найдите это произведение.

Решение. По правилу умножения матриц произведение матриц AX существует, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы X. Матрицы A и B этому условию не удовлетворяют (в матрице A три столбца, а в матрице B две строки), поэтому произведение AB не существует. Матрицы A и C удовлетворяют условию существования произведения матриц, поэтому произведение AC существует. Вычислим это произведение:

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-5)+3\cdot 4+(-4)\cdot 1 & 1\cdot 2+3\cdot 3+(-4)\cdot 7\\ (-2)\cdot(-5)+1\cdot 4+2\cdot 1 & (-2)\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -17\\ 16 & 13\end{pmatrix}.$$

Пример 1.6. Найдите произведения матриц AB, BA, A^TB^T, B^TA^T, AA^T, A^TA и ABA, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 8 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. По правилу умножения матриц найдем все заданные в условии примера произведения матриц:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\\ 5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 8 & -2 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 8 & 1\cdot 4+3\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+3\cdot 5 \\ (-2)\cdot 2+1\cdot 8 & (-2)\cdot 4+1\cdot(-2) & (-2)\cdot(-1)+1\cdot 5 \\ 5\cdot 2+(-4)\cdot 8 & 5\cdot 4+(-4)\cdot(-2) & 5\cdot(-1)+(-4)\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & -2 & 14 \\ 4 & -10 & 7 \\ -22 & 28 & -25 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+4\cdot(-2)+(-1)\cdot 5 & 2\cdot 3+4\cdot 1+(-1)\cdot(-4) \\ 8\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+5\cdot 5 & 8\cdot 3+(-2)\cdot 1+5\cdot(-4) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -11 & 14 \\ 37 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^T B^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot 4+5\cdot(-1) & 1\cdot 8+(-2)\cdot(-2)+5\cdot 5 \\ 3\cdot 2+1\cdot 4+(-4)\cdot(-1) & 3\cdot 8+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 37 \\ 14 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^T A^T=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+8\cdot 3 & 2\cdot(-2)+8\cdot 1 & 2\cdot 5+8\cdot(-5) \\ 4\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 4\cdot(-2)+(-2)\cdot 1 & 4\cdot 5+(-2)\cdot(-5) \\ (-1)\cdot 1+5\cdot 3 & (-1)\cdot(-2)+5\cdot 1 & (-1)\cdot 5+5\cdot(-5) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 4 & -22 \\ -2 & -10 & 28 \\ 14 & 7 & -25 \end{pmatrix},$$

$$AA^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot(-2)+3\cdot 1 & 1\cdot 5+3\cdot(-4) \\ (-2)\cdot 1+1\cdot 3 & (-2)\cdot(-2)+1\cdot 1 & (-2)\cdot 5+1\cdot(-4) \\ 5\cdot 1+(-4)\cdot 3 & 5\cdot(-2)+(-4)\cdot 1 & 5\cdot 5+(-4)\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ 1 & 5 & -14 \\ -7 & -14 & 41 \end{pmatrix},$$

$$A^T A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+5\cdot 5 & 1\cdot 3+(-2)\cdot 1+5\cdot(-4) \\ 3\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 5 & 3\cdot 3+1\cdot 1+(-4)\cdot(-4) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 30 & -19 \\ -19 & 26 \end{pmatrix},$$

$$ABA=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & -2 & 14 \\ 4 & -10 & 7 \\ -22 & 28 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 26\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+14\cdot 5 & 26\cdot 3+(-2)\cdot 1+14\cdot(-4) \\ 4\cdot 1+(-10)\cdot(-2)+7\cdot 5 & 4\cdot 3+(-10)\cdot 1+7\cdot(-4) \\ (-22)\cdot 1+28\cdot(-2)+(-25)\cdot 5 & (-22)\cdot 3+28\cdot 1+(-25)\cdot(-4) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 26+4+70 & 78-2-56 \\ 4+20+35 & 12-10-28 \\ -22-56-125 & -66+28+100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 59 & -26 \\ -202 & 62 \end{pmatrix}.$$

В этом примере на умножение матриц при перестановке сомножителей в произведении матриц получили матрицы разных размеров. Мы проверили справедливость еще одного свойства умножения матриц $(AB)^T=B^T A^T$ и $(BA)^T=A^T B^T$.

Пример 1.7. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 4\end{pmatrix}$. Найдите матрицу A^2-A^3-250E.

Решение. По правилу умножения матриц найдем матрицы A^2 и A^3:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+5\cdot(-7) & 2\cdot5+5\cdot4\\ (-7)\cdot2+4\cdot(-7) & (-7)\cdot5+4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-31 & 30\\ -42 & -19\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-31 & 30\\ -42 & -19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ -7 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-31)\cdot2+30\cdot(-7) & (-31)\cdot5+30\cdot4\\ (-42)\cdot2+(-19)\cdot(-7) & (-42)\cdot5+(-19)\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-62-210 & -155+120\\ -84+133 & -210-76\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-272 & -35\\ 49 & -286\end{pmatrix}.$$

Выполним вычитание матриц

$$A^2-A^3=\begin{pmatrix}-31 & 30\\ -42 & -19\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-272 & -35\\ 49 & -286\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}241 & 65\\ -91 & 267\end{pmatrix}.$$

Осталось вычесть единичную матрицу, умноженную на 250:

$$A^2-A^3-250E=\begin{pmatrix}241 & 65\\ -91 & 267\end{pmatrix}-250\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}241 & 65\\ -91 & 267\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}250 & 0\\ 0 & 250\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & 65\\ -91 & 17\end{pmatrix}.$$

Пример 1.8. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$. Найдите матрицы, перестановочные с матрицей A.

Решение. Пусть матрица B перестановочна с матрицей A, то есть $AB=AB$. Пусть матрица B имеет вид $B=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$. По правилу умножения матриц $AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2c\\ -5b & -5d\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & -5c\\ 2b & -5d\end{pmatrix}$. Две матрицы равны, если равны все их соответствующие элементы, то есть $\begin{cases}2a & = & 2a,\\ -5b & = & 2b,\\ 2c & = & -5c,\\ -5d & = & -5d.\end{cases}$ Из этой системы следует, что a и d – любые числа, $b=c=0$.

Матрицы, перестановочные с матрицей A имеют вид $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}$, где $a,d\in\mathbf{R}$.

Упражнения.

1. Найдите $A+B$ и $A-B$, если $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{4}{7}\\ \frac{3}{4} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{14}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}$.

2. Найдите $A+B$, $-A$, $4B$, $3A+2B$, $2A-B$, $2A-3B$, если
$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5\\ -4 & 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & -3 & 1\\ 5 & 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

3. Найдите произведения AB, BA, BA^T, A^TB, B^TA, AB^T, A^TB^T и B^TA^T, если
а) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

Какие выводы из полученных результатов вы можете сделать?

4. Найдите $A + B$, $2B - A$, $A \cdot B^T$, $B \cdot A^T$, $A^T \cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

6. Пусть $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Найдите произведения AB, BA, BA^T и A^TB.

7. Найдите матрицы $AC + 3BC$, $AC + 3CB$, $(AB)C$, $A(BC)$, $(A + 3B)C$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Найдите произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найдите произведения AB, BA, A^TB^T и B^TA^T, если

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

10. Пусть Найдите матрицу $AB + C$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 20 & -19 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите матрицу $A(B + C)$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

12. Найдите произведения AB и BA, если $A=(2 \quad -1 \quad 5)$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13. Найдите произведения AB и BA, если

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Найдите произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите $A \cdot B \cdot A^T$.

16. Пусть матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$. Найдите $A\cdot A^T$, $A^T\cdot A$ и A^2.

17. Найдите $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$, если а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5 & -3\\ -1 & 3 & 7 & 2\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & -7\end{pmatrix}$.

18. Вычислите A^2, A^3, A^4, $E-2A+A^2$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

19. Найдите матрицу $B=(E+2A+3A^2)(E-A)$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

20. При каком условии на матрицы будут верны равенства
а) $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$; б) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$?

21. Дано $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & p & q\\ 0 & 1 & s\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Определите, когда $AB=BA$.

22. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. При каких k и m $AB=BA$?

23. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей A, если
а) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 7 & -2\end{pmatrix}$.

§2. Определители.

Для решения задач необходимо изучить материал §§ 2 и 3 главы 1 теоретического пособия.

Пример 2.1. С каким знаком произведение входит в развернутое выражение определителя, если оно равно а) $a_{25}a_{31}a_{54}a_{12}a_{43}$; б) $a_{42}a_{35}a_{51}a_{14}a_{52}$.

<u>*Решение*</u>. Определитель равен алгебраической сумме $n!$ произведений элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, и умноженных на $(-1)^{s+t}$ и знак произведения определяется суммой числа инверсий $s+t$ в перестановках первых и вторых индексов.

а) Произведение $a_{25}a_{31}a_{54}a_{12}a_{43}$ входит в определитель 5-го порядка. Чтобы определить его знак, подсчитаем число инверсий в перестановках первых и вторых индексов:

Первые индексы: перестановка 2; 3; 5; 1; 4: 1 образует 3 инверсии, 2 – 0 инверсий, 3 – 0 инверсий, 4 – 1 инверсию; всего $s=3+1=4$ инверсии.

Вторые индексы: перестановка 5; 1; 4; 2; 3: 1 образует 1 инверсию, 2 – 2 инверсии, 3 – 2 инверсии, 4 – 1 инверсию; всего $t=1+2+2+1=6$ инверсий.

Так как $s+t=10$ – четное число, то произведение $a_{25}a_{31}a_{54}a_{12}a_{43}$ входит в развернутое выражение определителя со знаком плюс.

б) Произведение $a_{42}a_{35}a_{51}a_{14}a_{52}$ не входит в развернутое выражение определителя, так как в этом произведении находятся два элемента из второго столбца определителя.

Пример 2.2. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. Определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot (-1) = 9$.

Пример 2.3. Дан определитель $D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & a_{23} & 9 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$. Найдите алгебраическое дополнение элемента a_{23}.

Решение. Минор M_{23} получаем, вычеркнув в определителе D вторую строку и третий столбец (минор вычисляем по правилу «звездочки») $M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 7 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 \cdot 0 - 4 \cdot 5 \cdot 0 -$
$-7 \cdot 1 \cdot (-1) = -70 + 7 = -63$.

Алгебраическое дополнение может отличаться от минора только знаком $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Имеем $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 63$.

Пример 2.4. Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель тремя способами.

а) Вычислим определитель по правилу «звездочки»:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 5 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot 7 -$
$-1 \cdot 2 \cdot (-3) = 35 + 36 - 8 - 40 - 42 + 6 = -13$.

б) Вычислим определитель по теореме Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Разложим определитель по элементам первой строки:

$\Delta = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} -$
$-3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (35 + 6) - 3(14 - 12) - 2(4 + 20) = 41 - 6 - 48 = -13$.

в) Вычислим определитель, получив нули в первом столбце (умножим первую строку на (–2) и прибавим ко второй, умножим первую строку на 4 и прибавим к третьей, а затем применим теорему Лапласа, разложив определитель по первому столбцу)[1]:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&-2\\2&5&-3\\-4&2&7\end{vmatrix}\left\langle\begin{matrix}\mathrm{II}-2\mathrm{I}\\\mathrm{III}+4\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&-1&1\\0&14&-1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\14&-1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-1\cdot 14=$$
$$=-13.$$

При вычислении определителя воспользовались свойством: определитель не изменится, если к какой-либо его строке прибавить другую строку, умноженную на некоторое число[2].

Пример 2.5. Вычислите определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3&2\\-2&-3&1&-1\\3&5&4&5\\1&7&-9&-2\end{vmatrix}$.;

Решение. Вычислим определитель, получая нули в первом столбце и применяя теорему Лапласа:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-3&2\\-2&-3&1&-1\\3&5&4&5\\1&7&-9&-2\end{vmatrix}\left\langle\begin{matrix}\mathrm{II}+2\mathrm{I}\\\mathrm{III}-3\mathrm{I}\\\mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix}1&2&-3&2\\0&1&-5&3\\0&-1&13&-1\\0&5&-6&-4\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-5&3\\-1&13&-1\\5&-6&-4\end{vmatrix}\left\langle\begin{matrix}\mathrm{II}+\mathrm{I}\\\mathrm{III}-5\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix}1&-5&3\\0&8&2\\0&19&-19\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}8&2\\19&-19\end{vmatrix}=$$

$$=8\cdot(-19)-2\cdot 19=-152-38=-190.$$

Упражнения.

24. Какие из следующих произведений входят в развернутое выражение определителя, и с каким знаком а) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{41}a_{55}$; б) $a_{16}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{64}$; в) $a_{14}a_{22}a_{31}a_{46}a_{53}a_{67}a_{75}$?

Вычислите определители

25. а) $\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}-3&5\\2&-4\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}7&-9\\11&-13\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}-4&17\\21&-33\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}18&-3\\25&-4\end{vmatrix}$;

26. а) $\begin{vmatrix}x-1&1\\x^2&x+1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}x-1&1\\x^3&x^2+x+1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}(x-3)^2&1\\(x+3)^2&1\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}x-5&x-3\\x&x+2\end{vmatrix}$;

27. а) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\mathrm{tg}\,\alpha&\cos^{-2}\alpha\\1&\mathrm{tg}\,\alpha\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\sin x&\cos x\\\sin y&\cos y\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}\cos^2 x&1\\\cos 2x&2\end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix}\cos^2\alpha/(1+\sin^2\alpha)&2\sin\alpha/(1+\sin^2\alpha)\\-2\sin\alpha/(1+\sin^2\alpha)&\cos^2\alpha/(1+\sin^2\alpha)\end{vmatrix}$;

[1] Римскими цифрами обозначены номера строк, а арабскими соответствующие коэффициенты.

[2] Иногда допускают ошибку, прибавляя к какой-либо строке, умноженной на некоторое число *k*, другую строку. В результате определитель изменится, он увеличится в *k* раз.

28. а) $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a-b \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2a+b & a+b \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 8+x^3 & (x^2+3x+9)^{-1} \\ x^3-27 & (x^2-2x+4)^{-1} \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x^{2/3}-3} & x^{2/3} \\ 1 & x^{4/3}-9 \end{vmatrix}$;

29. а) $\begin{vmatrix} (1-t^2)/(1+t^2) & 2t/(1+t^2) \\ -2t/(1+t^2) & (1-t^2)/(1+t^2) \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x^{2/7}+3} & x^{2/7}-3 \\ x^{2/7} & x^{6/7}-27 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} (x+y)^2 & x+y \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{xy} \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \dfrac{5}{(2-x)^2}+\dfrac{3}{x^2-4} & \dfrac{6}{x+2} \\ x & (x-2)^2 \end{vmatrix}$;

30. а) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3^{\log_3 25} & 1 \\ \log_6\left(\log_5 \sqrt[6]{5}\right) & 0{,}25^{\log_2 5} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 234 & -137 \\ -235 & 136 \end{vmatrix}$.

31. Запишите разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ a & b & c & d \\ -4 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ по второй строке.

Вычислите определители.

32. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -5 & -3 & 11 \end{vmatrix}$;

33. а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -21 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & 17 & 4 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ -7 & -11 & 5 \\ 6 & 4 & -11 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -15 & 13 \end{vmatrix}$.

Решите уравнение или неравенство

34. а) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} x+7 & 4 \\ 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}=16$; в) $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ x+2 & x+4 \end{vmatrix}<1$;

г) $\begin{vmatrix} 2x+3 & x-3 \\ x+1 & x-4 \end{vmatrix}<9$; д) $\begin{vmatrix} x-1 & x+4 \\ 2x+1 & x+2 \end{vmatrix}<1$; е) $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+1 \\ x+3 & x+2 \end{vmatrix}+3x\geq 0$;

35. а) $\begin{vmatrix} \dfrac{x+3}{x-3} & 1 \\ 1 & \dfrac{x-1}{x+4} \end{vmatrix}>0$; б) $\begin{vmatrix} \dfrac{2x-1}{x-3} & 1 \\ 1 & \dfrac{x+3}{x+1} \end{vmatrix}\leq 0$; в) $\begin{vmatrix} \dfrac{2x+1}{x+7} & 1 \\ 1 & \dfrac{x+3}{x-1} \end{vmatrix}\leq 0$;

36. а) $\begin{vmatrix} \sin x+\cos x & 1 \\ 1 & \sin x-\cos x \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} \sin 2x+\cos x & 3\sin x\cos x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$;

в) $\begin{vmatrix} \log_2 x & 3 \\ -1 & \log_2(16x) \end{vmatrix}>0$; г) $\begin{vmatrix} \log_{1/2} x & 4 \\ 2 & \log_{1/2}(4x) \end{vmatrix}<0$;

37. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -2 & 2x+1 & x+1 \\ 3 & 2 & x-6 \end{vmatrix} = 4$.

Вычислите определители

38. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ -5 & 8 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 12 & -21 \end{vmatrix}$;

39. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

40. (*) Упростите определитель $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$.

41. (*) Дано $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{65} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix} = a$. Чему равен определитель $\begin{vmatrix} a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \end{vmatrix}$?

42. (*) Не вычисляя значение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ докажите, что он делится на 17.

43. (*) Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами.

44. (*) Известно, что если две строки определителя пропорциональны, то определитель равен нулю. Справедливо ли обратное утверждение: если определитель равен нулю, то две строки его пропорциональны?

45. (*) Как изменится определитель порядка n, если

а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) его строки записать в обратном порядке;

в) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец;

г) из каждой строки, кроме последней, вычесть следующую строку, а из последней вычесть прежнюю первую строку.

46. (*) Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$.

47. (*) Вычислите определители, используя свойства определителя

а) $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_1+2b_2 & a_1+2b_3 & a_1+2b_4 \\ a_2+2b_1 & a_2+2b_2 & a_2+2b_3 & a_2+2b_4 \\ a_3+2b_1 & a_3+2b_2 & a_3+2b_3 & a_3+2b_4 \\ a_4+2b_1 & a_4+2b_2 & a_4+2b_3 & a_4+2b_4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \dfrac{x+z}{2} & \dfrac{x+y}{2} & \dfrac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}$.

48. (*)Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 3 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & n \end{vmatrix}$ порядка n ($n > 3$), приведя его к треугольному виду.

49. (*)Вычислите определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & n & n & ... & n \\ n & 2 & n & ... & n \\ n & n & 3 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n & n & n & ... & n \end{vmatrix}$ порядка n ($n > 3$), приведя его к треугольному виду.

§3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.

Для решения задач необходимо изучить материал §§ 4, 5 и 6 главы 1 теоретического пособия.

Пример 3.1. Какая из матриц $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ или $D = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ будет обратной для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$?

Решение. По определению обратной матрицы, если A' – матрица обратная матрице A, то произведение $A \cdot A' = E$, где E – единичная матрица. Выполним умножение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-5)+(-1)\cdot 8 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ -8\cdot(-5)+(-5)\cdot 8 & -8\cdot 1+(-5)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \neq E,$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)\cdot(-8) & 2\cdot 1+(-1)\cdot 5 \\ 8\cdot 2+(-5)\cdot(-8) & 8\cdot 1+(-5)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 56 & -17 \end{pmatrix} \neq E,$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2{,}5-1\cdot 4 & 2\cdot(-0{,}5)-1\cdot(-1) \\ 8\cdot 2{,}5-2\cdot 4 & 8\cdot(-0{,}5)-5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратной для матрицы A является матрица D.

Пример 3.2. Докажите, что матрица $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-4&5&2\\3&7&1\end{pmatrix}$ имеет обратную.

Решение. Матрица A имеет обратную, если ее определитель отличен от нуля (матрица невырожденная).

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-4&5&2\\3&7&1\end{vmatrix}=\left\langle\begin{matrix}\mathrm{II}+4\mathrm{I}\\\mathrm{III}-3\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&13&-2\\0&1&4\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}13&-2\\1&4\end{vmatrix}=52+2=54\neq0.$$

Так как матрица A невырожденная, то для нее существует обратная.

Пример 3.3. Найдите матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}1&5&-1\\1&3&3\\-2&-8&-1\end{pmatrix}$.

Решение. Обратную матрицу будем находить двумя способами:

а) По определению $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\left(A_{ij}\right)^T$. Найдем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&5&-1\\1&3&3\\-2&-8&-1\end{vmatrix}=\left\langle\begin{matrix}\mathrm{II}-\mathrm{I}\\\mathrm{III}+2\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&-2&4\\0&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&4\\2&-3\end{vmatrix}=-2.$$ Так как $\det A\neq0$, то матрица A имеет обратную.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&3\\-8&-1\end{vmatrix}=21,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&3\\-2&-1\end{vmatrix}=-5,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&3\\-2&-8\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&-1\\-8&-1\end{vmatrix}=13,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&5\\-2&-8\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&-1\\3&3\end{vmatrix}=18,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\1&3\end{vmatrix}=-4,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&5\\1&3\end{vmatrix}=-2.$$

Составим присоединенную матрицу (она состоит из алгебраических дополнений), транспонируем ее и разделим на определитель матрицы: $A^*=\begin{pmatrix}21&-5&-2\\13&-3&-2\\18&-4&-2\end{pmatrix}$ Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}21&13&18\\-5&-3&-4\\-2&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10{,}5&-6{,}5&-9\\2{,}5&1{,}5&2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

б) Вычислим обратную матрицу методом Жордана-Гаусса. Для этого припишем справа к матрице A единичную матрицу и с помощью элементарных преобразований матрицы перегоним единичную матрицу справа налево. Получившаяся справа матрица будет обратной для матрицы A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&-1&1&0&0\\1&3&3&0&1&0\\-2&-8&-1&0&0&1\end{array}\right)\left\langle\begin{matrix}\mathrm{II}-\mathrm{I}\\\mathrm{III}+2\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&-1&1&0&0\\0&-2&4&-1&1&0\\0&2&-3&2&0&1\end{array}\right)\left\langle\mathrm{II}:(-2)\right\rangle\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&-1&1&0&0\\0&1&-2&0{,}5&-0{,}5&0\\0&2&-3&2&0&1\end{array}\right)\left\langle\begin{matrix}\mathrm{I}-5\mathrm{II}\\\mathrm{III}-2\mathrm{I}\end{matrix}\right\rangle\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&9&-1{,}5&2{,}5&0\\0&1&-2&0{,}5&-0{,}5&0\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\left\langle\begin{matrix}\mathrm{I}-9\mathrm{III}\\\mathrm{II}+2\mathrm{III}\end{matrix}\right\rangle\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-10{,}5&-6{,}5&-9\\0&1&0&2{,}5&1{,}5&2\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right).$$

Следовательно, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -10{,}5 & -6{,}5 & -9 \\ 2{,}5 & 1{,}5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполним проверку.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -8 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -10{,}5 & -6{,}5 & -9 \\ 2{,}5 & 1{,}5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-10{,}5)+5\cdot 2{,}5+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-6{,}5)+5\cdot 1{,}5-1\cdot 1 & 1\cdot(-9)+5\cdot 2-1\cdot 1 \\ 1\cdot(-10{,}5)+5\cdot 2{,}5+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-6{,}5)+3\cdot 1{,}5+3\cdot 1 & 1\cdot(-9)+3\cdot 2+3\cdot 1 \\ -2\cdot(-10{,}5)-8\cdot 2{,}5+(-1)\cdot 1 & -2\cdot(-6{,}5)-8\cdot 1{,}5-1\cdot 1 & -2\cdot(-9)-8\cdot 2-1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -10{,}5+12{,}5-1 & -6{,}5+7{,}5-1 & -9+10-1 \\ -10{,}5+7{,}5+3 & -6{,}5+4{,}5+3 & -9+6+3 \\ 21-20-1 & 13-12-1 & 18-16-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

<u>Вывод</u>: Вид обратной матрицы не зависит от способа ее вычисления.

Пример 3.4. Решите матричные уравнения $A\cdot X = B$ и $Y\cdot A = B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>. Если матрица A имеет обратную, то $X = A^{-1}\cdot B$, $Y = B\cdot A^{-1}$. Вычислим матрицу, обратную матрице A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0{,}5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$X=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}5\cdot 5+2\cdot 2 & 1{,}5\cdot 3+2\cdot(-7) \\ 0{,}5\cdot 5+1\cdot 2 & 0{,}5\cdot 3+1\cdot(-7) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11{,}5 & -9{,}5 \\ 4{,}5 & -5{,}5 \end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 1{,}5+3\cdot 0{,}5 & 5\cdot 2+3\cdot 1 \\ 2\cdot 1{,}5+(-7)\cdot 0{,}5 & 2\cdot 2+(-7)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -0{,}5 & -3 \end{pmatrix}.$$

В ответе получили, что матрицы X и Y различны[3].

Пример 3.5. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Обозначим $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Уравнение имеет вид $A\cdot X = B$. Если матрица A невырожденная, то она имеет обратную. Тогда решение уравнения ищется в виде $X = A^{-1}\cdot B$. Найдем матрицу, обратную матрице A:

---

[3] При решении матричных уравнений нужно быть внимательным и различать случаи, когда умножение на обратную матрицу выполняется справа, а когда слева.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-4)\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 & (-4)\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) \\ 7\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1 & 7\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 1\cdot(-1) \\ (-9)\cdot 1 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 & (-9)\cdot 2 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 12 & 15 \\ -16 & -20 \end{pmatrix}. \text{ Y}$$

Пример 3.6. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Уравнение имеет вид $X \cdot A = B$. Матрицу, обратную матрице A, нашли в примере 3.5: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-4) - 2\cdot 7 + 1\cdot(-9) & 2\cdot 1 - 2\cdot(-2) + 1\cdot 3 & 2\cdot(-1) - 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ (-3)\cdot(-4) + 1\cdot 7 + 4\cdot(-9) & (-3)\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 4\cdot 3 & (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 4\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 - 14 - 9 & 2 + 4 + 3 & -2 - 2 - 1 \\ 12 + 7 - 36 & -2 - 3 + 12 & 3 + 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 9 & -5 \\ -17 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

и $X = \begin{pmatrix} -31 & 9 & -5 \\ -17 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 3.7. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 35 & 30 \end{pmatrix}$.

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 35 & 30 \end{pmatrix}$. Уравнение имеет вид[4] $A \cdot X \cdot B = C$. Если матрицы A и B невырожденные, то они имеют обратные и решение уравнения ищется в виде $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Найдем матрицы, обратные матрицам A и B:

[4] Обратим внимание на то, что переставлять матрицы B и X нельзя. Решение уравнения $A \cdot B \cdot X = C$ не совпадает с решением исходного уравнения $A \cdot X \cdot B = C$, так как $(AB)^{-1}C = B^{-1}A^{-1}C \neq A^{-1}CB^{-1}$.

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1 \neq 0$, значит, матрица A имеет обратную. Вычислим алгебраические дополнения $A_{11} = (-1)^{1+1} 7 = 7, A_{12} = (-1)^{1+2} 5 = -5$, $A_{21} = (-1)^{2+1} 3 = -3, A_{22} = (-1)^{2+2} 2 = 2$ и запишем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 27 = 5 \neq 0$, значит, матрица B имеет обратную. Вычислим алгебраические дополнения $A_{11} = (-1)^{1+1} 8 = 8, A_{12} = (-1)^{1+2} 9 = -9$, $A_{21} = (-1)^{2+1} 3 = -3,\ A_{22} = (-1)^{2+2} 4 = 4$ и запишем обратную матрицу

$$B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 35 & 30 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-7) \cdot 13 + 3 \cdot 35 & (-7) \cdot 11 + 3 \cdot 30 \\ 5 \cdot 13 + (-2) \cdot 35 & 5 \cdot 11 + (-2) \cdot 30 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -91 + 105 & -77 + 90 \\ 65 - 70 & 55 - 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 14 & 13 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 14 \cdot 8 + 13 \cdot (-9) & 14 \cdot (-3) + 13 \cdot 4 \\ -5 \cdot 8 - 5 \cdot (-9) & -5 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 112 - 117 & -42 + 52 \\ -40 + 45 & 15 - 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнения.

50. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Какая из матриц $B = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ или $F = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ будет обратной матрице A?

51. Имеет ли матрица A обратную, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

52. При каких значениях λ матрица A имеет обратную, если

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda + 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda + 2 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$.

Вычислите матрицы, обратные данным

53. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

54. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

55. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 10 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 5 & -5 & -4 \end{pmatrix}$;

56. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -8 & 7 \\ 1 & -2 & 8 & -9 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

57. Чему равен определитель целочисленной матрицы A, если матрица A^{-1} также целочисленная.

58. Решите матричные уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решите матричные уравнения

59. а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

60. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$;

61. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

62. а) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решите матричным методом системы линейных уравнений

63. а) $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = -3, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x - 5y - z = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - 3z = 5, \\ 5x - 4y + z = 1; \end{cases}$

64. а) $\begin{cases} x + y - z = 9, \\ x - y + z = -1, \\ -x + y + z = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y + z = 4, \\ 3x + y - 2z = 9, \\ 2x - 4y - z = 1. \end{cases}$

Решите матричные системы уравнений

65. (*) а) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \end{cases}$

66. (*) а) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$

§ 4. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.

Для решения задач необходимо изучить материал § 7 главы 1 теоретического пособия.

Пример 4.1. Докажите, что система уравнений имеет единственное решение и решите ее методом Крамера $\begin{cases} x + 2y - z = -4, \\ 2x + 5y + 3z = 6, \\ 2x - y + 4z = 15. \end{cases}$

<u>*Решение*</u>. Вычислим определитель матрицы системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 25 = 31 \neq 0$. Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Найдем вспомогательные определители, заменив соответствующий столбец определителя столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -6 & 11 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 11 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -(-42 + 11) = 31,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & 5 \\ 2 & 23 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 23 & 6 \end{vmatrix} = 84 - 115 = -31,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 14 \\ 2 & -5 & 23 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 14 \\ -5 & 23 \end{vmatrix} = 23 + 70 = 93.$$

По формулам Крамера $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{31}{31} = 1,\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-31}{31} = -1,\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{93}{31} = 3$.

Выполним проверку.

$$\begin{cases} 1 - 2 - 3 = -4, \\ 2 - 5 + 9 = 6, \\ 2 + 1 + 12 = 15, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = -4, \\ 6 = 6, \\ 15 = 15. \end{cases}$$

Получили верные равенства, значит, решение системы найдено верно.

Упражнения.

Докажите, что системы линейных уравнений имеют единственное решение. Найдите это решение методом Крамера. Сделайте проверку.

67. а) $\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x - y + z = -6, \\ x - y - 3z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 12, \\ x + y + z = 0, \\ 2x - 3y - 4z = 17; \end{cases}$

68. а) $\begin{cases} x + y - z = 9, \\ x - y + z = -1, \\ -x + y + z = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 12, \\ x + y + z = 0, \\ 2x - 3y - 4z = 17. \end{cases}$

69. Докажите, что системы линейных уравнений имеют единственное решение. Найдите это решение по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8, \\ \quad - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

§5. Линейная зависимость векторов. Линейные пространства.

Для решения задач необходимо изучить материал §§ 9, 10 и 11 главы 1 теоретического пособия.

Пример 5.1. Проверьте, будет ли система векторов $\bar{a}_1 = (1; -2; 1)$, $\bar{a}_2 = (4; -5; -2)$, $\bar{a}_3 = (-2; 10; -11)$ линейно зависимой?

Решение. По определению система векторов линейно зависима, если существуют такие числа λ_1, λ_2, λ_3, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 = \bar{0}$. Для заданной системы векторов имеем $\lambda_1(1; -2; 1) + \lambda_2(4; -5; -2) + \lambda_3(-2; 10; -11) = \bar{0}$. Запишем это равенство в координатной форме: $\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 11\lambda_3 = 0. \end{cases}$

Вычислим определитель матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 10 \\ 1 & -2 & -11 \end{pmatrix}$:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 10 \\ 1 & -2 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = -27 + 36 = 9 \neq 0$. Так как определитель матрицы системы отличен от нуля, то по теореме Крамера система имеет единственное решение и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, = 0$ (однородная система линейных уравнений всегда имеет нулевое решение). Заданная в условии задачи система векторов линейно независима.

При решении задачи стоит обратить внимание на то, что для линейно независимой системы векторов, определитель матрицы, составленной из координат векторов, отличен от нуля. Если этот определитель равен нулю, то система векторов линейно зависима.

Пример 5.2. Проверьте, будет ли система векторов $\bar{a}_1=(1;-2;1)$, $\bar{a}_2=(4;-3;1)$, $\bar{a}_3=(-2;-1;1)$ линейно зависимой?

Решение. По определению система векторов линейно зависима, если существуют такие числа λ_1, λ_2, λ_3, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3=\bar{0}$. Для заданной системы векторов имеем $\lambda_1(1;-2;1)+\lambda_2(4;-3;1)+\lambda_3(-2;-1;1)=\bar{0}$. Запишем это равенство в координатной форме: $\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$

Вычислим определитель матрицы системы $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, система векторов линейно зависима.

Найдем коэффициенты линейной комбинации. Для этого решим систему уравнений. Выразим из первого уравнения λ_1 и подставим в остальные уравнения

$$\begin{cases} \lambda_1=-4\lambda_2+2\lambda_3, \\ -2(-4\lambda_2+2\lambda_3)-3\lambda_2-\lambda_3=0, \\ -4\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_2+\lambda_3=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-4\lambda_2+2\lambda_3, \\ 5\lambda_2-5\lambda_3=0, \\ -3\lambda_2+3\lambda_3=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-4\lambda_2+2\lambda_3, \\ \lambda_2=\lambda_3, \\ \lambda_2=\lambda_3, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-2\lambda_2, \\ \lambda_2=\lambda_3. \end{cases}$$

Положим $\lambda_2 = 1$. Тогда $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -2$ и линейная комбинация имеет вид
$-2_1\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3=\bar{0}$.

Пример 5.3. При каком k векторы $\bar{a}=(1;-4;3;2)$, $\bar{b}=(2;-6;7;1)$, $\bar{c}=(2;-7;3;6)$ и $\bar{d}=(3;-9;k;5)$ линейно зависимы.

Решение. Составим матрицу из координат векторов, записывая координаты в столбцы матрицы $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & -7 & -9 \\ 3 & 7 & 3 & k \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Система векторов линейно зависима, если определитель этой матрицы равен нулю:

$$\det C=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & -7 & -9 \\ 3 & 7 & 3 & k \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}\left\langle\begin{matrix} \text{II}+4\text{I} \\ \text{III}-3\text{I} \\ \text{IV}-2\text{I} \end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k-9 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & k-9 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}\square$$

$$\left\langle\begin{matrix} \text{II}+3\text{I} \\ \text{III}-2\text{I} \end{matrix}\right\rangle=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & k \\ -7 & 0 & -7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 7 & k \\ -7 & -7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & k-7 \\ -7 & -7 \end{vmatrix}=$$

$$=-(0+7(k-7))=-7(k-7).$$

Следовательно, $\det C = 0$, если $k = 7$. При этом значении k система векторов линейно зависима.

Пример 5.4. Известно, что вектор $\bar{a} = (4; -17; 13)$ линейно выражается через векторы $\bar{b} = (2; -3; 1)$ и $\bar{c} = (1; 4; -5)$. Найдите коэффициенты этого разложения.

Решение. По определению линейной комбинации векторов $\bar{a} = \lambda_1 \bar{b} + \lambda_2 \bar{c}$ или $(4; -17; 13) = \lambda_1 (2; -3; 1) + \lambda_2 (1; 4; -5)$. Запишем равенство в координатной форме $\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 4, \\ -3\lambda_1 + 4\lambda_2 & = & -17, \\ \lambda_1 - 5\lambda_2 & = & 13. \end{cases}$ Из первого уравнения выразим λ_2 и подставим во второе уравнение $\lambda_2 = 4 - 2\lambda_1 \Rightarrow -3\lambda_1 + 4(4 - 2\lambda_1) = = -17 \Rightarrow -11\lambda_1 = -33 \Rightarrow \lambda_1 = 3$. Тогда $\lambda_2 = -2$. Проверим справедливость третьего уравнения $\lambda_1 - 5\lambda_2 = 3 - 5 \cdot (-2) = 13$. Следовательно, $\bar{a} = 3\bar{b} - 2\bar{c}$.

Пример 5.5. Проверьте, что множество $\mathbf{R}_3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ векторов относительно операций, введенных в § 9, образует линейное пространство.

Решение. Нам необходимо проверить все 8 аксиом линейного пространства. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3), \bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{R}_3$.

1) $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, $\bar{y} + \bar{x} = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) =$
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,

значит $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;

2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) =$
$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3)$,
$\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) =$
$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3)$,

значит $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;

3) Обозначим $\bar{0} = (0; 0; 0)$. Тогда $(x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = = (x_1, x_2, x_3)$, т. е. существует нулевой элемент, такой что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$;

4) Для каждого $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ элемент $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$ является противоположным. Действительно,

$$\bar{x} + (-\bar{x}) = (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) = (0, 0, 0) = \bar{0}.$$

5) $1 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, т. е. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$;

6) $\alpha(\beta\bar{x}) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \alpha\beta x_3) = \alpha\beta(x_1, x_2, x_3) = \alpha\beta\bar{x}$;

7) $\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) =$
$(\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3) = ((\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) x_2, (\alpha + \beta) x_3) =$
$= (\alpha + \beta)(x_1, x_2, x_3) = (\alpha + \beta)\bar{x}$;

8) $\alpha\bar{x} + \alpha\bar{y} = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3) =$
$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \alpha x_3 + \alpha y_3) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \alpha(x_3 + y_3)) =$
$= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \alpha(\bar{x} + \bar{y})$.

Все аксиомы векторного пространства выполнены, следовательно, множество трехмерных векторов образует линейное пространство.

Пример 5.6. В каноническом базисе $\overline{e}_1=(1;0;0), \overline{e}_2=(0;1;0), \overline{e}_3=(0;0;1)$ даны четыре вектора $\overline{f}_1=(1;-2;4)$, $\overline{f}_2=(2;-3;7)$, $\overline{f}_3=(1;1;2)$ и $\overline{a}=(3;2;7)$. Докажите, что векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$, образуют базис. Найдите матрицу перехода к новому базису и координаты вектора $\overline{a}$ в новом базисе.

Решение. Составим матрицу из координат заданных векторов, записывая координаты векторов в столбцы: $C=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&-3&1\\4&7&2\end{pmatrix}$. Если $\det C\neq 0$, то векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ линейно независимы, образуют в $\mathbf{R}_3$ базис и C – матрица перехода от канонического базиса к базису $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$. Имеем

$$\det C=\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&-3&1\\4&7&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\-1&-2\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ найдем по формуле $\overline{a}_{\{\overline{f}_j\}}=C^{-1}\cdot\overline{a}_{\{\overline{e}_i\}}$.

Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-2&-3&1&0&1&0\\4&7&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&3&2&1&0\\0&-1&-2&-4&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&-3&-2&0\\0&1&3&2&1&0\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-13&3&5\\0&1&0&8&-2&-3\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right).$$

Итак, $C^{-1}=\begin{pmatrix}-13&3&5\\8&-2&-3\\-2&1&1\end{pmatrix}$.

Имеем $\overline{a}_{\{\overline{f}_j\}}=\begin{pmatrix}-13&3&5\\8&-2&-3\\-2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\cdot2+3\cdot3+5\cdot7\\8\cdot2-2\cdot3-3\cdot7\\-2\cdot2+1\cdot3+1\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-11\\6\end{pmatrix}$.

Заметим, что если векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ образуют ортонормированный базис, то есть $|\overline{f}_1|=|\overline{f}_2|=|\overline{f}_3|=1$, скалярные произведения $(\overline{f}_1,\overline{f}_2)=(\overline{f}_1,\overline{f}_3)=$ $=(\overline{f}_2,\overline{f}_3)=0$, и Q – матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, то обратная матрица $Q^{-1}=Q^T$.

Упражнения.

70. Найдите $4\overline{a}_3-2\overline{a}_1-\overline{a}_2$, $3\overline{a}_1+5\overline{a}_2-\overline{a}_3+2\overline{a}_4$, если $\overline{a}_1=(4;1;3;-5)$, $\overline{a}_2=(1;2;-3;-2)$, $\overline{a}_3=(7;9;1;-3)$, $\overline{a}_4=(2;-3;5;1)$.
71. Найдите $\overline{b}$, если $\overline{a}_1=(5;-8;-1)$, $\overline{a}_2=(2;-1;4)$, $\overline{a}_3=(-3;2;-5)$ и $\overline{a}_1+2\overline{a}_2+3\overline{a}_3+4\overline{b}=0$.
72. Дано $\overline{a}_1=(3;1;-7;4)$, $\overline{a}_2=(1;5;0;6)$, $\overline{a}_3=(-1;1;3;0)$. Найдите линейную комбинацию $3\overline{a}_1-2\overline{a}_2+7\overline{a}_3$.
73. Будут ли линейно зависимыми системы векторов:
    а) $\overline{a}_1=(3;-2;4)$, $\overline{a}_2=(-6;4;-8)$; б) $\overline{a}_1=(1;2;3)$, $\overline{a}_2=(2;5;7)$, $\overline{a}_3=(4;9;13)$;

в) $\bar{a}_1 = (2; -1; 6),\ \bar{a}_2 = (5; -3; 11),\ \bar{a}_3 = (5; -1; 15)$;

г) $\bar{a}_1 = (2; -3; 1),\ \bar{a}_2 = (4; -1; 3),\ \bar{a}_3 = (2; -4; 3)$

д) $\bar{a}_1 = (1; -4; 3; 2),\ \bar{a}_2 = (2; -6; 7; 5),\ \bar{a}_3 = (2; -7; 3; 1), \bar{a}_4 = (3; -9; 7; 1)$;

е) $\bar{a}_1 = (1; 4; 3; 2), \bar{a}_2 = (2; 6; 7; 5), \bar{a}_3 = (2; 7; 3; 1), \bar{a}_4 = (3; 9; 7; 4)$?

74. Представьте вектор $\bar{b} = (6; -17; 8)$ как линейную комбинацию векторов из примера 73(г).

75. При каком значении k векторы линейно зависимы, если
а) $\bar{a} = (2; 3; 2; -3), \bar{b} = (7; 11; 5; -6), \bar{c} = (4; 2; 14; -8), \bar{d} = (2; 5; 0; k)$;
б) $\bar{a} = (2; 3; 2; -3),\ \bar{b} = (7; 11; 5; -6),\ \bar{c} = (4; 2; 10; 8), \bar{d} = (2; 5; 2; k)$;
в) $\bar{a} = (1; 4; 2; -3),\ \bar{b} = (3; 10; 5; -6),\ \bar{c} = (4; 9; 6; 0), \bar{d} = (2; 5; 6; k)$?

76. При каком λ векторы $\bar{a} = (1; 2; 2; -1), \bar{b} = (-1; 2; 0; 3), \bar{c} = (1; 3; -2; 2)$, $\bar{d} = (2; -1; -3; \lambda)$ линейно зависимы?

77. Известно, что вектор $\bar{a} = (3; 1; -8)$ выражается через векторы $\bar{b} = (1; 1; 2)$ и $\bar{c} = (4; 3; 1)$. Найдите коэффициенты этого разложения.

78. (*)Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависимыми системы векторов а) $\bar{x},\ \bar{x} + \bar{y},\ \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$; б) $\bar{x} + \bar{y},\ \bar{y} + \bar{z},\ \bar{x} + \bar{z}$; в) $\bar{x} - \bar{y},\ \bar{y} - \bar{z},\ \bar{z} - \bar{x}$?.

79. Пусть $\mathbf{L}=\{(x_1; x_2; x_3)|\ x_3=0\}$. Проверьте, что $\mathbf{L}$ – линейное пространство.

80. Образует ли линейное пространство множество многочленов, степени которых меньше или равны n, с обычными операциями сложения и умножения многочленов на число.

81. Докажите, что множество положительных чисел $\mathbf{R}_+ = \{x\,|\,x > 0\}$ с операциями сложения $x \oplus y = xy$ и умножения на число $\alpha \circ x = x^{\alpha}$ образует линейное пространство.

82. Образуют ли линейное пространство множества векторов из $\mathbf{R}_n$, удовлетворяющих условиям:
а) $\{(x_1; x_2; \ldots; x_n)|x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$;
б) $\{(x_1; x_2; \ldots; x_n)|x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1\}$.

83. В каноническом базисе даны четыре вектора $\bar{f}_1 = (3; -2; 1)$, $\bar{f}_2 = (-1; 1; -2),\ \bar{f}_3 = (2; 1; -3), \bar{a} = (3; 5; -6)$. Докажите, что векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ образуют базис. Найдите матрицу перехода к новому базису и координаты вектора $\bar{a}$ в этом базисе.

84. В каноническом базисе даны четыре вектора $\bar{f}_1 = (1; 1; 1)$, $\bar{f}_2 = (1; 1; 2),\ \bar{f}_3 = (1; 2; 3), \bar{a} = (6; 9; 14)$. Докажите, что векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ образуют базис. Найдите матрицу перехода к новому базису и координаты вектора $\bar{a}$ в этом базисе.

85. В каноническом базисе даны векторы $\bar{a}_1 = \left(0; \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\bar{a}_3 = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}; \frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{-2}{\sqrt{30}}\right)$. Докажите, что они образуют ортонормированный базис. Найдите матрицу перехода и координаты вектора $\bar{a} = (1; -1; 2)$ в этом базисе.

§ 6. Ранг матрицы.

Для решения задач необходимо изучить материал § 12 главы 1 теоретического пособия.

Пример 6.1. Найдите ранги матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 9 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 9 & -1 \\ 3 & 1 & -8 & -4 \end{pmatrix}.$$

<u>*Решение*</u>. Ранг матрицы равен порядку наибольшего отличного от нуля минора матрицы (базисного минора).

а) В матрице существуют ненулевые миноры первого порядка $\Delta_1 = 1$, второго порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$ и третьего порядка $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 56$. Миноров большего порядка в матрице не существует. Следовательно, $r(A_1) = 3$.

б) В матрице существуют ненулевые миноры первого порядка $\Delta_1 = 1$ и второго порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$. Покажем, что оба минора третьего порядка равны нулю:

$$\Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3'' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $r(A_2) = 2$.

Пример 6.2. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 18 \\ 17 & 10 & 18 & 40 \\ 3 & 1 & 7 & 17 \end{pmatrix}$.

<u>*Решение*</u>. Ранг матрицы равен порядку наибольшего отличного от нуля минора матрицы (базисного минора). Но перебирать все миноры данной матрицы – процесс трудоемкий. Поэтому используем второе определение ранга матрицы: ранг – это число ее линейно независимых строк и будем искать ранг матрицы с помощью элементарных преобразований строк матрицы. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 10 \\ 7 & 4 & 8 & 18 \\ 17 & 10 & 18 & 40 \\ 3 & 1 & 7 & 17 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} \text{II}-7\text{I} \\ \text{III}-17\text{I} \\ \text{IV}-3\text{I} \end{matrix} \right\rangle \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & -20 & -52 \\ 0 & 10 & -50 & -130 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} \text{II}-4\text{IV} \\ \text{III}-10\text{IV} \end{matrix} \right\rangle \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2 ($r(A) = 2$) и базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ расположен в левом верхнем углу.

Пример 6.3. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Используем второе определение ранга матрицы – это число ее линейно независимых строк. Ранг матрицы будем искать методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} \text{II}-2\text{I} \\ \text{III}+2\text{I} \\ \text{IV}-6\text{I} \\ \text{V}+\text{I} \end{matrix} \right\rangle \square \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \square$$

$$\left\langle \begin{matrix} \text{III}+3\text{II} \\ \text{IV}-4\text{II} \\ \text{V}+\text{II} \end{matrix} \right\rangle \square \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 3 ($r(A) = 3$). В матрице A есть 3 линейно независимых строки, так как минор $M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Пример 6.4. При каких значениях ***a*** и ***b*** ранг матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & -5 & b & 8 \\ 2 & a & 13 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ равен 2.

Решение. Ранг матрицы будем искать методом элементарных преобразований матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&1&2\\2&3&-1&7&5\\3&8&-5&b&8\\2&a&13&-3&3\end{pmatrix}\left\langle\begin{matrix}\text{II}-2\text{I}\\\text{III}-3\text{I}\\\text{IV}-3\text{I}\end{matrix}\right\rangle\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&1&2\\0&7&-7&5&1\\0&14&-14&b-3&2\\0&a+4&7&-5&-1\end{pmatrix}\left\langle\begin{matrix}\text{III}-2\text{II}\\\text{IV}+\text{II}\end{matrix}\right\rangle\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&1&2\\0&7&-7&5&1\\0&0&0&b-13&0\\0&a+11&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2, если третья и четвертая строки матрицы нулевые. Следовательно, $a + 11 = 0 \Rightarrow a = -11$ и $b - 13 = 0 \Rightarrow b = 13$.

Пример 6.5. Докажите, что третья строка матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-4&1&2\\-3&12&-1\end{pmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух.

Решение. Если третья строка матрицы A является линейной комбинацией первых двух, то строки матрицы линейно зависимы. Вычислим определитель матрицы: $\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-4&1&2\\-3&12&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&9&-2\\0&18&-4\end{vmatrix}=0$ (строки определителя пропорциональны). Так как минор $M=\begin{vmatrix}1&2\\-4&1\end{vmatrix}\neq 0$, то первая и вторая строки матрицы линейно независимы и третья строка является их линейной комбинацией. Найдем коэффициенты этой линейной комбинации. Пусть $(-3,12,-1)=\lambda_1(1,2,-1)+\lambda_2(-4,1,2)$. Это равенство равносильно системе

$$\begin{cases}\lambda_1-4\lambda_2&=&-3,\\2\lambda_1+\lambda_2&=&12,\\-\lambda_1+2\lambda_2&=&-1.\end{cases}$$

Сложив первое и третье уравнения, найдем λ_2: $-2\lambda_2 = -4 \Rightarrow \lambda_2 = 2$. Подставим λ_2 в первое уравнение $\lambda_1 = 4\lambda_2 - 3 = 5$. Проверим, что второе уравнение при этих значениях λ верно: $2\lambda_1 + \lambda_2 = 10 + 2 = 12$. Следовательно, $(-3,12,-1)=5(1,2,-1)+2(-4,1,2)$.

Упражнения.

86. Докажите, что третья строка матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-3&2&-4\\3&-1&5&2\\7&3&11&14\end{pmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух.

87. Вычислите ранги матриц а) $\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&5\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1&-2&3&1&3\\-3&1&-4&7&1\\5&-5&10&-5&5\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 5 & 0 & 5 & 21 \\ 1 & -14 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

88. При каких значениях m и n ранг матрицы A равен 2, если

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & m & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & n & -6 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 2 & 4 & 3 & -9 \\ 2 & m & 7 & 9 & 2 & -22 \\ 3 & -15 & 0 & 10 & -1 & n \end{pmatrix}$.

§ 7. Системы линейных уравнений. Метод Гаусс решения систем линейных уравнений.

Для решения задач необходимо изучить материал §§ 9, 13 и 14 главы 1 теоретического пособия.

Пример 7.1. Найдите общее решение и какое-либо частное решение системы линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 + 13x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна тогда и только когда, когда ранги ее основной и расширенной матриц равны.

Найдем ранг расширенной матрицы системы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 6 & -2 & -1 & 13 & 12 \end{array}\right) \left\langle\begin{matrix} \text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-5\text{I} \\ \text{IV}-6\text{I} \end{matrix}\right\rangle \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & -32 & -40 & -8 & 0 \\ 0 & -44 & -55 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left\langle\begin{matrix} \text{II}:(-3) \\ \text{III}:(-8) \\ \text{IV}:(-11) \end{matrix}\right\rangle \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -11 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ранги основной и расширенной матриц равны $r(A)=r(\tilde{A})=2$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна. Так как ранг матрицы системы равен 2, то два неизвестных являются базисными. В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_4. Минор, составленный из коэффициентов при этих неизвестных $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$. Найдем общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 11x_3 = 2, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9x_2 + 11x_3 + 2, \\ x_4 = -4x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

Задавая свободные переменные, получим частное решение системы: пусть $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, тогда $x_1 = 0$, $x_4 = 1$ и $(0; 1; -1; 1)$ – частное решение системы. Задавая другие значения свободных переменных, получим другое частное решение, например, $(-13; 2; -3; 7)$.

Выполним проверку. Подставим решение $(-13; 2; -3; 7)$ во все уравнения системы

$$\begin{cases} -13 + 14 - 27 + 28 = 2, \\ -26 + 4 - 9 + 35 = 4, \\ -65 + 6 - 15 + 84 = 10, \\ -78 - 4 + 3 + 91 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2, \\ 4 = 4, \\ 10 = 10, \\ 12 = 12. \end{cases}$$

Получили верные равенства.

Пример 7.2. Найдите общее решение и какое-либо частное решение системы линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 - x_5 = 7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 8. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна тогда и только когда, когда ранги ее основной и расширенной матриц равны.

Найдем ранг расширенной матрицы системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & -1 & 7 \\ 3 & -5 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{array}\right) \left\langle \begin{array}{c} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 3\text{I} \\ \text{IV} - \text{I} \end{array} \right\rangle \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -14 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -16 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{III} - 2\text{II} \\ \text{IV} + \text{II} \end{array} \right\rangle \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -14 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -12 & -6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2,4 & -1,2 & 1,8 \end{array}\right) \left\langle \begin{array}{c} \text{I} - \text{III} \\ \text{II} + \text{III} \end{array} \right\rangle \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 21,4 & 8,2 & -2,8 \\ 0 & 1 & 0 & 11,6 & 3,8 & -1,2 \\ 0 & 0 & 1 & -2,4 & -1,2 & 1,8 \end{array}\right).$$

Ранги основной и расширенной матриц равны $r(A) = r(\tilde{A}) = 3$. По теореме Кронекера-Капелли система линейных уравнений совместна. Так как ранг матрицы системы равен 3, то три неизвестных являются базисными. В качестве базисных неизвестных возьмем x_1 x_2 и x_3. Минор, составленный из коэффициентов при этих неизвестных $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -2,8 - 21,4x_4 - 8,2x_5, \\ x_2 = -1,2 - 11,6x_4 - 3,8x_5, \\ x_3 = 1,8 + 2,4x_4 + 1,2x_5. \end{cases}$$

Задавая свободные переменные, получим частное решение системы: пусть $x_4 = -5$, $x_5 = 1$, тогда $x_1 = 96$, $x_2 = 53$, $x_3 = -9$ и $(96; 53; -9; -5; 1)$ – частное решение системы.

Проверку выполните самостоятельно.

Пример 7.3. Найдите общее решение и какое-либо частное решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 9, \\ 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 11, \\ 3x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 12x_4 = 15. \end{cases}$.

<u>*Решение*</u>. Найдем ранг расширенной матрицы системы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 9 \\ 5 & 12 & 3 & -4 & 11 \\ 3 & 7 & 13 & 12 & 15 \end{array}\right) \left\langle \begin{array}{c} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 5\text{I} \\ \text{IV} - 3\text{I} \end{array} \right\rangle \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 10 & 18 & 9 \end{array}\right) \left\langle \begin{array}{c} \text{III} - 3\text{II} \\ \text{IV} - 2\text{II} \end{array} \right\rangle \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -17 & -21 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

В этой системе ранг основной матрицы равен 3 ($r(A) = 3$), а ранг расширенной матрицы равен 4 ($r(\tilde{A}) = 4$). По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Пример 7.4. При каком значении параметра λ система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 17x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -9, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 17x_5 = \lambda. \end{cases}$ совместна. Решите систему при данном значении λ.

<u>*Решение*</u>. Найдем ранг расширенной матрицы системы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 10 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 17 & -3 & 7 & -9 \\ 3 & -7 & 5 & 6 & -17 & \lambda \end{array}\right) \left\langle \begin{array}{c} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 3\text{I} \\ \text{IV} - 3\text{I} \end{array} \right\rangle \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 8 & -15 \\ 0 & 2 & 8 & -6 & 16 & -30 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -8 & \lambda - 21 \end{array}\right)$$

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{III} - 2\text{II} \\ \text{IV} + \text{II} \end{array} \right\rangle \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 8 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 36 \end{array}\right).$$

В этой системе ранг основной матрицы равен 2 ($r(A) = 2$). Чтобы ранг расширенной матрицы был равен 2, необходимо, чтобы $\lambda - 36 = 0$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна при $\lambda = 36$. При этом значении λ имеем $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 8 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 11 & -5 & 13 & -23 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 8 & -15 \end{array}\right)$ ранги основной и расширенной матрицы равны 2 и общее решение системы имеет вид: $\begin{cases} x_1 = -23 - 11x_3 + 5x_4 - 13x_5, \\ x_2 = -15 - 4x_3 + 3x_4 - 8x_5. \end{cases}$

Частное решение найдите самостоятельно. Выполните проверку.

Упражнения.

Решите методом Гаусса системы.

89. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 12; \end{cases}$

90. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 12; \end{cases}$

91. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -16, \\ 10x_1 - 2x_2 + 16x_3 - 4x_4 = -20, \\ 8x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -28; \end{cases}$

92. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 - 13x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12; \end{cases}$

93. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 15, \\ 4x_1 - 3x_3 + 5x_4 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 19; \end{cases}$

94. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 7x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 6x_4 = -7; \end{cases}$

95. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -11, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 16x_3 + 14x_4 = 12; \end{cases}$

96. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 5x_5 = 7; \end{cases}$

98. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4; \end{cases}$

99. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 2, \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 - 8x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$

100. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 14, \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 25, \\ x_1 - 5x_3 + 7x_4 = 10; \end{cases}$

101. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 5x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$

102. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 - 4x_5 = 5; \end{cases}$

103. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\ 7x_1 + 14x_2 + 9x_3 + x_4 + 8x_5 = 9; \end{cases}$

104. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 4x_5 = -3, \\ 6x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 2x_5 = -9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 - 5x_5 = -7; \end{cases}$

105. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 13x_3 - 5x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 24x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 9; \end{cases}$

106. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + x_5 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 11x_3 + 18x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 12x_3 + 11x_4 + 3x_5 = -4; \end{cases}$

107. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 9x_5 = -5, \\ 4x_1 - 11x_2 + 6x_3 + 11x_4 - 13x_5 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 3; \end{cases}$

108. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 13x_5 = 23; \end{cases}$

109. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 12x_1 - 15x_2 + 11x_3 + 15x_4 - 5x_5 = 7; \end{cases}$

110. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7; \end{cases}$

111. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 1, \\ 5x_1 - 18x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 - 11x_5 = 20. \end{cases}$

112. При каких λ система уравнений совместна.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

Решите систему при $\lambda = 1$.

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 7x_4 = \lambda; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 5x_1 - 11x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 5, \\ 3x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + \lambda x_4 = -7. \end{cases}$

113. (*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + (a+3)x_2 + 6x_3 + 6x_4 = a+1, \\ 3x_1 + 6x_2 + (a+8)x_3 + 9x_4 = a+2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (a+8)x_4 = a+2. \end{cases}$$

114. (*) Найдите квадратную матрицу третьего порядка, если

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

§ 8. Системы линейных однородных уравнений.

Для решения задач необходимо изучить материал §15 главы 1 теоретического пособия.

Пример 8.1. Найдите фундаментальную систему решений (ФСР) системы линейных однородных уравнений (СЛОУ), если известно ее общее решение $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 3x_4 + 7x_5, \\ x_2 = x_3 + 9x_4 - 4x_5. \end{cases}$

Решение. Решения, входящие в фундаментальную систему решений системы линейных однородных уравнений, линейно независимы, и любое решение системы линейных однородных уравнений можно представить, как линейную комбинацию решений из фундаментальной системы решений. Число решений в фундаментальной системе решений равно числу свободных неизвестных. Найдем фундаментальную систему решений, придавая последовательно одной неизвестной значение 1, а остальным 0:

$x_3 = 1,\, x_4 = 0,\, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\, x_2 = 1,\;\; \overline{e}_1 = (2;1;1;0;0);$
$x_3 = 0,\, x_4 = 1,\, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\, x_2 = 9,\;\; \overline{e}_2 = (-3;9;0;1;0);$
$x_3 = 0,\, x_4 = 0,\, x_5 = 1 \Rightarrow x_1 = 7,\, x_2 = -4,\;\; \overline{e}_3 = (7;-4;0;0;1).$

Эти решения линейно независимы. Действительно, строки матрицы решений $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы, так как минор, составленный из элементов трех последних столбцов, отличен от нуля.

Общее решение этой системы линейных однородных уравнений имеет вид $\overline{x} = c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 + c_3\overline{e}_3$.

Покажем, что произвольное решение системы линейных однородных уравнений можно выразить через фундаментальную систему решений. Зададим свободные неизвестные. Пусть $x_3 = 5$, $x_4 = -2$, $x_5 = -4$, тогда $x_1 = -12$, $x_2 = 3$, и $\overline{x} = (-12;3;5;-2;-4)$. Коэффициенты разложения вектора $\overline{x}$ по базисным векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ найдем из равенства $(-12;3;5;-2;-4) = c_1(2;1;1;0;0) + c_2(-3;9;0;1;0) + \; + c_3(7;-4;0;0;1)$. Записав это равенство в координатной форме и решив полученную систему уравнений, увидим, что $c_1 = 5$, $c_2 = -2$, $c_3 = -4$ и $(-12;3;5;-2;-4) = 5(2;1;1;0;0) - 2(-3;9;0;1;0) - 4(7;-4;0;0;1) = 5\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 - 4\overline{e}_3$.

Сводным переменным можно придавать любые значения и находить коэффициенты представления решения через ФСР.

Пример 8.2. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 7x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 + 13x_5 = 0. \end{cases}$$
Найдите фундаментальную систему решений.

<u>*Решение*</u>. Составим матрицу систему и преобразуем эту матрицу, получая нули в столбцах:
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & -4 & -7 & -1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 & 13 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} \text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-3\text{I} \\ \text{IV}-\text{I} \end{matrix} \right\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -10 & -4 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} \text{I}+3\text{II} \\ \text{III}-2\text{II} \\ \text{IV}+\text{II} \end{matrix} \right\rangle \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & -7 & -19 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & -7 & -19 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен 2, неизвестные x_1 и x_2 – базисные, неизвестные x_3, x_4 и x_5 – свободные. Запишем общее решение системы
$$\begin{cases} x_1 = 13x_3 + 7x_4 + 19x_5, \\ x_2 = 5x_3 + 2x_4 + 8x_5. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений данной системы линейных однородных уравнений:

$x_3=1,\ x_4=0,\ x_5=0 \Rightarrow x_1=13,\ x_2=5,\ \bar{e}_1=(13;5;1;0;0);$
$x_3=0,\ x_4=1,\ x_5=0 \Rightarrow x_1=7,\ x_2=2,\ \bar{e}_2=(7;2;0;1;0);$
$x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=1 \Rightarrow x_1=19,\ x_2=8,\ \bar{e}_3=(19;8;0;0;1).$

Общее решение системы имеет вид $\bar{x}=c_1\bar{e}_1+c_2\bar{e}_2+c_3\bar{e}_3$.

Эти решения линейно независимы. Действительно, строки матрицы решений $\begin{pmatrix} 13 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 19 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы, так как минор, составленный из элементов трех последних столбцов, отличен от нуля.

Упражнения.

Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений. Запишите ее фундаментальную систему решений.

115. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 18x_3 + 12x_4 = 0; \end{cases}$

116. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

117. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

118. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

119. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$

120. $\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 14x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}$

121. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 9x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 21x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

122. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases}$

123. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 10x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 13x_3 + x_4 - 12x_5 = 0; \end{cases}$

124. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 - 8x_4 - 7x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 9x_4 + 16x_5 = 0; \end{cases}$

125. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 11x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

126. (*) Докажите, что если ранг однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны.

§ 9. Элементы теории многочленов.

Для решения задач необходимо изучить материал § 19 главы 1 теоретического пособия.

Пример 9.1. Найдите частное и остаток при делении многочлена $f(x) = 4x^5 + 7x^4 + 6x^3 + 3x + 1$ на многочлен $g(x) = x^3 + x^2 + 3$.

Решение. Выполним деление «уголком»

$$\begin{array}{l|l}
_\,4x^5 + 7x^4 + 6x^3 + 0x^2 + 3x + 1 & x^3 + x^2 + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{4x^5 + 4x^4 \qquad\quad + 12x^2} & 4x^2 + 3x + 3 \\
\qquad _\,3x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 3x & \\
\qquad \underline{3x^4 + 3x^3 \qquad\quad + 9x} & \\
\qquad\qquad _\,3x^3 - 12x^2 - 6x + 1 & \\
\qquad\qquad \underline{3x^3 + 3x^2 \qquad\quad + 9} & \\
\qquad\qquad\qquad -15x^2 - 6x - 8 &
\end{array}$$

Получили $q(x) = 4x^2 + 3x + 3$ – частное и $r(x) = -15x^2 - 6x - 8$ – остаток.

Пример 9.2. Найдите частное и остаток при делении многочлена $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ на многочлен $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

Решение. Выполним деление «уголком»

$$\begin{array}{l|l}
_\,x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 5x - 2 & x^2 + 3x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + 3x^3 + 2x^2} & x^2 - x - 1 \\
\quad _ -x^3 - 4x^2 - 5x & \\
\quad \underline{-x^3 - 3x^2 - 2x} & \\
\qquad _ -x^2 - 3x - 2 & \\
\qquad \underline{-x^2 - 3x - 2} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Итак, частное $q(x) = x^2 - x - 1$, остаток $r(x) = 0$. Следовательно, $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ делится на $x^2 - x - 1$.

Пример 9.3. Найдите частное и остаток при делении многочлена $x^4 - 15x^2 + 21x + 46$ на двучлен $x + 4$.

<u>*Решение*</u>. Для нахождения частного и остатка применим схему Горнера. Составим таблицу. Так как у делимого член с x^3 отсутствует, то в соответствующий столбец таблицы пишем 0.

коэффициенты делимого					
	1	0	– 15	21	46
–4	1	$(-4)\cdot 1 + 0$ $= -4$	$(-4)\cdot(-4)$ $-15 = 1$	$(-4)\cdot 1 + 21$ $= 17$	$(-4)\cdot 17 +$ $+46 = -22$
коэффициенты частного					остаток

Получили неполное частное $q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 17$ и остаток $r = -22$.

Пример 9.4. Решите уравнение $x^3 - 6x^2 + 2x + 12 = 0$.

<u>*Решение*</u>. Все коэффициенты многочлена $x^3 - 6x^2 + 2x + 12$ – целые. Поэтому рациональные корни многочлена, если они есть, являются целыми и находятся среди делителей свободного члена. Искать рациональные корни следует среди чисел $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Число 2 является корнем многочлена (8 – 24 + 4 + 12 = 0). По теореме Безу многочлен делится на $x - 2$. Выполнив деление, получим $(x-2)(x^2 - 4x - 6) = 0$. Решая квадратное уравнение $x^2 - 4x - 6 = 0$, найдем его корни $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{10}$. Итак, исходное уравнение имеет три действительных корня: $x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{10}, x_3 = 2 - \sqrt{10}$.

Пример 9.5. Найдите рациональные корни многочлена $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.

<u>*Решение*</u>. Рациональные корни многочлена будем искать в виде дроби $\dfrac{p}{q}$.

Возможные значения для числителя дроби p: $\pm1; \pm2; \pm4$, возможные значения для знаменателя дроби q: 1; 2 (знак считаем присоединенным к числителю). Возможные значения рациональных корней: $\pm1; \pm2; \pm4, \pm0{,}5$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = 0{,}5$ – корень многочлена $f(x)$. По теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на двучлен $x - 0{,}5$. Выполнив деление, получим $f(x) = (x - 0{,}5)(2x^2 + 4x + 8) = (2x - 1)(x^2 + 2x + 4)$.

Квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 4$ не имеет действительных корней. Значит, многочлен $f(x)$ имеет единственный рациональный корень: $x = 0{,}5$.

Упражнения.

127. Найдите частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4,\ g(x) = x - 2$;

б) $f(x) = 3x^4 + 7x^3 + 10x - 24,\ g(x) = x + 3$;

в) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2,\ g(x)=x^2-x-2$.

128. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x)=3x^5-4x^4+5x^3+7x^2-x+9,\ g(x)=x^3-2x^2+1$;

б) $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+7,\ g(x)=x^2-3x-1$;

в) $f(x)=x^3+5x^2-7x-8,\ g(x)=x^2-5x+1$.

129. Не выполняя операцию деления, найдите остаток от деления многочлена $f(x)=2x^4+3x^3+7x^2+4x-2$ на многочлен $g(x) = x + 2$.

130. Используя схему Горнера, выполните деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$, если

а) $f(x)=x^4-3x^3-24x^2+7x+2,\ a=-4$;

б) $f(x)=x^4-6x^2+7x-11,\ a=2$;

в) $f(x)=x^4+3x^3-9x^2-23x+14,\ a=-1$.

131. Дан многочлен $f(x)=x^5+2x^4+3x^3+7x^2+8x+3$. Покажите, что $a = -1$ является его корнем. Найдите кратность этого корня.

132. Найдите корни многочлена и разложите многочлен на множители, если

а) $f(x)=x^3-3x^2-16x-12$; б) $f(x)=x^3-x^2-21x+45$;

в) $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$.

133. Найдите целые корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$; б) $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+16x-12$;

в) $f(x)=x^5-x^4-4x^3+5x^2+x-2$.

134. Найдите рациональные корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:

а) $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$; б) $f(x)=3x^4+5x^3+7x^2+15x-6$.

135. Докажите, что многочлен $f(x)=x^3-x^2-2x-3$ не имеет целых корней:

136. Дан многочлена $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$. Найдите кратный корень этого многочлена и укажите его кратность. Разложите многочлен на множители.

137. Разложите на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней, многочлены

а) $f(x)=x^4+x^3-x^2+5x+6$; б) $f(x)=x^4+x^3-5x^2-17x-12$.

§ 10. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Для решения задач необходимо изучить материал §§ 18, 19 и 20 главы 1 теоретического пособия.

Пример 10.1. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует в пространстве $\mathbf{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (2x_1 + x_3; -x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2)$. Покажите, что оператор $\boldsymbol{A}$ линейный. Найдите матрицу оператора $\boldsymbol{A}$. Найдите образ вектора $\overline{a} = (5; 2; -6)$ двумя способами.

<u>*Решение*</u>. 1) Оператор A линейный, если выполнены условия
$A(\overline{x} + \overline{y}) = A\overline{x} + A\overline{y},\ A(\alpha\overline{x}) = \alpha A\overline{x}\ \ (\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{R}_3, \forall \alpha \in \mathbf{R})$.
Пусть $\overline{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\overline{y} = (y_1; y_2; y_3)$, $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$. Тогда

$$A\overline{x} + A\overline{y} = (2x_1 + x_3; -x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2) + (2y_1 + y_3; -y_2 + 3y_3; y_1 + 2y_2) =$$
$$= (2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3; -x_2 - y_2 + 3x_3 + 3y_3; x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2) =$$
$$= (2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3); -(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3); (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)) = A(\overline{x} + \overline{y});$$
$$A(\alpha\overline{x}) = (2\alpha x_1 + \alpha x_3; -\alpha x_2 + 3\alpha x_3; \alpha x_1 + 2\alpha x_2) =$$
$$= (\alpha(2x_1 + x_3); \alpha(-x_2 + 3x_3); \alpha(x_1 + 2x_2)) = \alpha(2x_1 + x_3; -x_2 + 3x_3; x_1 + 2x_2) = \alpha A\overline{x}.$$

2) Построим матрицу оператора. Для этого найдем образы базисных векторов и запишем их в столбцы матрицы[5]:

$$A\overline{e}_1 = (2\cdot 1 + 0; 0 + 3\cdot 0; 1 + 2\cdot 0) = (2; 0; 1),$$
$$A\overline{e}_2 = (2\cdot 0 + 0; -1 + 3\cdot 0; 0 + 2\cdot 1) = (0; -1; 2),$$
$$A\overline{e}_3 = (2\cdot 0 + 1; 0 + 3\cdot 1; 0 + 2\cdot 0) = (1; 3; 0).$$

Матрица оператора будет иметь вид $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Найдем образ вектора $\overline{a} = (5; 2; -6)$.

<u>1 способ</u>. Подставим координаты вектора в формулу, задающую оператор: $A\overline{a} = (2\cdot 5 + (-6); -2 + 3\cdot(-6); 5 + 2\cdot 2) = (4; -20; 9)$.

<u>2 способ</u>. Найдем произведение матриц

$$A\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 - 6 \\ -1\cdot 2 + 3\cdot(-6) \\ 1\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что результат не зависит от способа, которым он был получен (подстановка в формулу или умножение матриц).

Пример 10.2. Образ вектора $\overline{a} = (-1; 4; 7)$ при действии оператора A равен $A\overline{a} = (4; -16; -28)$. Найдите собственное число линейного оператора, отвечающее этому вектору.

<u>*Решение*</u>. 1) Так как $A\overline{a} = -4\overline{a}$, то собственное число линейного оператора, отвечающее вектору $\overline{a}$ равно $\lambda = -4$.

Пример 10.3. Пусть $\overline{a} = (-1; -2; 8)$ – собственный вектор линейного оператора A, отвечающий собственному числу $\lambda = -1{,}5$. Найдите образ этого вектора при действии оператора A.

<u>*Решение*</u>. 1) Так как $A\overline{a} = -1{,}5\overline{a}$, то $A\overline{a} = (1{,}5; 3; -12)$.

---

[5] Если не оговорено особо, то считаем, что векторы заданы в каноническом базисе $\overline{e}_1 = (1; 0; 0), \overline{e}_2 = (0; 1; 0), \overline{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Пример 10.4. Докажите, что число $\lambda = -1$ является собственным числом линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Для $\lambda = -1$ найдите собственный вектор.

Решение. 1 способ. Число λ является собственным числом оператора A, если существует вектор $\overline{x}$ такой, что $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$. В нашем случае, нужно доказать, что $A\overline{x} = -\overline{x}$ для некоторого вектора $\overline{x}$. Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – искомый вектор. Тогда $A\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Запишем соответствующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -x_1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -x_2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 13 & 14 & 0 \\ 13 & 14 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{11}{14} & 0 & 1 \\ \frac{13}{14} & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно $\begin{cases} x_2 = -13x_1/14, \\ x_3 = -11x_1/14. \end{cases}$

Запишем собственный вектор, отвечающий $\lambda = -1$, взяв $x_1 = 14$. Тогда $\overline{c} = (14; -13; -11)$. Любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{c}$ также будет собственным вектором для $\lambda = -1$.

Выполним проверку. $A\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ -13 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - 39 + 11 \\ 42 + 26 - 55 \\ 70 - 26 - 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} = -\overline{c}$, то есть вектор $\overline{c}$ собственный и $\lambda = -1$.

2 способ. Число λ является собственным числом оператора A, если определитель матрицы $A - \lambda E$ равен нулю[6] ($|A - \lambda E| = 0$). Вычислим этот определитель для $\lambda = -1$:

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1+1 & 3 & -1 \\ 3 & -2+1 & 5 \\ 5 & 2 & 3+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 13 & 14 & 0 \\ 13 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Следовательно, $\lambda = -1$ является собственным числом этого оператора. Собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = -1$ найден выше.

Пример 10.5. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (3x_1 - 2x_2; -x_1 + 4x_2; 5x_1 + 3x_2 + x_3)$.

Решение. 1) Построим матрицу оператора. Для этого найдем образы базисных векторов и запишем их в столбцы матрицы:

---

[6] Это утверждение вытекает из правила вычисления собственных чисел линейного оператора.

$A\overline{e}_1 = (3; -1; 5)$, $A\overline{e}_2 = (-2; 4; 3)$, $A\overline{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Матрица оператора будет иметь вид $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Найдем собственные числа линейного оператора. Для этого решим характеристическое уравнение[7] $|A - \lambda E| = 0$.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big((3-\lambda)(4-\lambda)-2\big);$$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$. Итак, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$.

3) Для каждого собственного числа λ найдем собственный вектор. Для этого решим уравнение $(A - \lambda E)\overline{x} = \overline{0}$ или $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

а) $\lambda_3 = 5$. Решим уравнение $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Запишем матричное уравнение в виде системы уравнений и решим эту систему

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0, \\ -x_1 - x_2 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = 0{,}5x_1. \end{cases}$$

Собственный вектор, отвечающий числу $\lambda_3 = 5$, имеет вид $\overline{c}_3 = (2; -2; 1)$.

Выполним проверку: $A\overline{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4 \\ -2-8 \\ 10-6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_2 = 2$. Решим уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Запишем матричное уравнение в виде системы уравнений и решим эту систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 13x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_3 = 13x_2. \end{cases}$$

Собственный вектор, отвечающий числу $\lambda_2 = 2$, имеет вид $\overline{c}_2 = (2; 1; 13)$.

Выполним проверку: $A\overline{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -2+4 \\ 10+3+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 26 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$.

в) $\lambda_1 = 1$. Решим уравнение $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Запишем матричное уравнение в виде системы уравнений и решим эту систему

[7] Применим теорему Лапласа, разложив определитель по третьему столбцу.

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & = & 0, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 0x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 0x_3 & = & 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & 0x_3 & = & 0, \\ & & 2x_2 & + & 0x_3 & = & 0, \\ & & 8x_2 & + & 0x_3 & = & 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0, \\ x_3 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Собственный вектор, отвечающий числу $\lambda_1 = 1$, имеет вид $\overline{c}_1 = (0; 0; 1)$.

Выполним проверку: $A\overline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \overline{c}_1 = (0; 0; 1)$, $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \overline{c}_2 = (2; 1; 13)$, $\lambda_3 = 5 \Rightarrow \overline{c}_3 = (2; -2; 1)$.

Упражнения.

138. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует в $\mathbf{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (2x_1 - 3x_2 + x_3; -x_1 + 2x_2; x_2 - 3x_3)$. Найдите $A\overline{a}, A\overline{b}$, если $\overline{a} = (1; 4; 2), \overline{b} = (3; 1; 6)$.
139. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует в $\mathbf{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (x_1 - 2x_2; -x_1; x_2 + x_3)$. Покажите, что оператор $\boldsymbol{A}$ линейный. Найдите матрицу оператора $\boldsymbol{A}$. Найдите образ вектора $\overline{a} = (-2; -4; 5)$ двумя способами.
140. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует в $\mathbf{R}_3$ по закону $A\overline{x} = [\overline{x}; \overline{c}]$, где $\overline{c} = (3; -1; -2)$. Покажите, что оператор $\boldsymbol{A}$ линейный. Найдите матрицу оператора $\boldsymbol{A}$ и образ вектора $\overline{a} = (1; -3; 2)$.
141. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует в пространстве $\mathbf{R}_3$ по закону $A\overline{x} = (x_1 + x_2 - x_3; -x_1 + 2x_2 + 1; x_1 - x_2 + 3x_3)$. Является ли оператор $\boldsymbol{A}$ линейным? Найдите образ вектора $\overline{a} = (3; -4; 1)$.
142. Вектор $\overline{a} = (-1; 4; 2)$ является собственным вектором оператора, отвечающим собственному числу $\lambda = 3$. Найдите образ вектора $\overline{a}$.
143. Образ вектора $\overline{a} = (2; 4; 1)$ при действии оператора $\boldsymbol{A}$ равен (8; 16; 4). Найдите собственное значение оператора, которому отвечает вектор $\overline{a}$.
144. Вектор $\overline{a}$ отвечает собственному числу $\lambda = -2$ и его образ при действии оператора $\boldsymbol{A}$ равен (4; –6; –12). Найдите вектор $\overline{a}$.
145. Докажите, что $\lambda = 2$ является собственным значением линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите собственный вектор, отвечающий $\lambda = 2$.
146. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$, если задана его матрица: а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

    в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
147. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x} = (x_1 + 2x_2; 2x_1 + x_2; 2x_1 + 2x_2 - x_3)$;

148. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(3x_1+5x_2-7x_3;-2x_2+4x_3;3x_2+2x_3)$.

149. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(4x_1-5x_2+2x_3;5x_1-7x_2+3x_3;6x_1-9x_2+4x_3)$.

150. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(3x_1+4x_2;-x_1-x_2;3x_1+4x_2+2x_3)$.

151. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(3x_1+x_2;5x_1-x_2;2x_1+4x_2+x_3)$.

152. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(4x_1+3x_2-x_3;4x_2;2x_1+3x_2+x_3)$.

153. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(4x_1+3x_2-x_3;2x_2;2x_1+3x_2+x_3)$.

154. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(x_1+2x_2-x_3;2x_1-x_2+4x_3;x_1-8x_2+11x_3)$.

155. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора $A\overline{x}=(3x_1+2x_2;x_1+4x_2;x_1+2x_2-2x_3)$.

§ 11. Действия с векторами.

Для решения задач необходимо изучить материал §§ 1, 2 и 3 главы 2 теоретического пособия[8].

Пусть в пространстве $\mathbf{R}_3$ задана декартова система координат.

Пример 11.1. Даны векторы $\overline{a}=(-1;4;3), \overline{b}=(5;3;-2), \overline{c}=(2;-5;3)$. Найдите длины векторов $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ и $3\overline{a}-2\overline{b}$.

Решение. Координаты вектора $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=(-1;4;3)+(5;3;-2)+$ $+(2;-5;2)=(6;2;3)$. Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т. е. $|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=\sqrt{36+4+9}=7$.

Координаты вектора $3\overline{a}-2\overline{b}=3(-1;4;3)-2(5;3;-2)=(-13;6;13)$. Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т. е. $|3\overline{a}-2\overline{b}|=\sqrt{(-13)^2+6^2+13^2}=\sqrt{169+36+169}=\sqrt{374}$.

Пример 11.2. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если известны координаты точек $A(4; -1; 9)$ и $B(-1; 7; 5)$.

Решение. Координаты вектора равны разности координат его конца и начала, то есть $\overline{AB}=(x;y;z)=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$. Тогда
$\overline{AB}=(-1-4;7+1;5-9)=(-5;8;-4)$.

Пример 11.3. Найдите координаты точки A, если известны координаты вектора $\overline{AB}=(4;5;-7)$ и точки $B(9; 7; 5)$.

[8] Все векторы в разделах «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия» заданы в декартовой системе координат $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

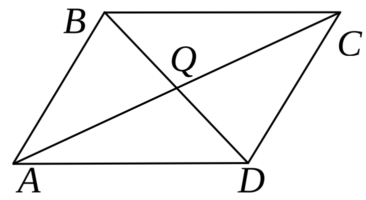
Решение. Координаты вектора равны разности координат его конца и начала, то есть $\overline{AB} = (x;\, y;\, z) = (x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A)$. Тогда $x_A = x_B - x = 5,\ y_A = y_B - y = 2,\ z_A = z_B - z = 12$ и координаты точки A(5; 2; 12).

Пример 11.4. При каких значениях m и n векторы $\overline{a} = (-7; 5; n)$ и $\overline{b} = (14; m; -4)$ коллинеарны?

Решение. Два вектора коллинеарны, если их координаты пропорциональны, то есть $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. Для заданных векторов имеем $\frac{-7}{14} = \frac{5}{m} = \frac{n}{-4}$. Решая эту пропорцию, получим $m = -10$, $n = 2$ и $\overline{a} = (-7; 5; 2)$, $\overline{b} = (14; -10; -4)$.

Пример 11.5. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин A(4; –3; 2), B(5; 9; 4), C(8; 5; –6). Найдите координаты вершины D.

Решение. 1 способ. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Координаты середины отрезка равны полусумме координат концов. Пусть Q – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда $Q\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}; \frac{z_A + z_C}{2}\right)$,



т. е. $Q\left(\frac{4+8}{2}; \frac{-3+5}{2}; \frac{2+(-6)}{2}\right) \Rightarrow Q(6; 1; -2)$.

С другой стороны $Q\left(\frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2}; \frac{z_B + z_D}{2}\right)$. Тогда $x_D = 2x_Q - x_B$, $y_D = 2y_Q - y_B$, $z_D = 2z_Q - z_B$ и $x_D = 12 - 5 = 7$, $y_D = 2 - 9 = -7$, $z_D = -4 - 4 = -8$. Следовательно, D(7; –7; –8).

2 способ. В параллелограмме противоположные стороны параллельны и равны. Это означает равенство векторов $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Найдем координаты вектора $\overline{BC} = (3; -4; -10)$. Тогда $\overline{AD} = (x_D - 4; y_D + 3; z_D - 2)$ и $x_D - 4 = 3;\ y_D + 3 = -4;\ z_D - 2 = -10$. Итак, D(7; –7; –8). Векторы $\overline{AB} = (1; 12; 2)$ и $\overline{DC} = (1; 12; 2)$ также равны[9].

Пример 11.6. Даны координаты вершин A(1; –2; 5), B(3; 4; 2), C(4; 10; 1) треугольника ABC. Найдите координаты точки D, основания биссектрисы AD.

Решение. Найдем координаты векторов, на которых как на сторонах построен треугольник ABC и вычислим их длины:

$$\overline{AB} = (3-1; 4-(-2); 2-5) = (2; 6; -3) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} = 7,$$
$$\overline{AC} = (4-1; 10-(-2); 1-5) = (3; 12; -4) \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = 13.$$

---

[9] Нужно либо показать равенство двух пар векторов $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, либо показать, что вектора $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ параллельны и имеют одинаковую длину.

Из курса школьной геометрии известно, что биссектриса угла делит противоположную сторону треугольника в отношении, равном отношению прилежащих сторон. Значит, отрезок BC делится биссектрисой в отношении $\lambda = 7{:}13$.

По формулам деления отрезка в данном отношении имеем

$$x_D = \frac{x_B + \lambda x_c}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{7}{13}\cdot 4}{1 + \frac{7}{13}} = \frac{\frac{39+28}{13}}{\frac{20}{13}} = \frac{67}{20} = 3{,}35;$$

$$y_D = \frac{y_B + \lambda y_c}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{7}{13}\cdot 10}{1 + \frac{7}{13}} = \frac{\frac{52+70}{13}}{\frac{20}{13}} = \frac{122}{20} = 6{,}1;$$

$$z_D = \frac{z_B + \lambda z_c}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{7}{13}\cdot 1}{1 + \frac{7}{13}} = \frac{\frac{26+7}{13}}{\frac{20}{13}} = \frac{33}{20} = 1{,}65.$$

Итак, координаты точки $D(3{,}35;\ 6{,}1;\ 1{,}65)$.

Упражнения.

156. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60º, длины векторов равны 5 и 8. Определите длины векторов $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$.
157. Даны два единичных вектора $\bar{a}, \bar{b}$, причем $(\bar{a}, \widehat{\ } \bar{b}) = 60^\circ$. Постройте вектор $\bar{d} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$ и найдите его длину.
158. Даны три компланарных единичных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, причем $(\bar{a}, \widehat{\ } \bar{b}) = 30^\circ, (\bar{b}, \widehat{\ } \bar{c}) = 45^\circ$. Постройте вектор $\bar{d} = 2\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c}$ и найдите его длину.
159. Три силы $\bar{F}, \bar{G}, \bar{T}$ приложены в одной точке и попарно перпендикулярны. Определите величину их равнодействующей, если известно, что $|\bar{F}| = 3, |\bar{G}| = 12, |\bar{T}| = 4$.
160. На плоскости даны точки $A(-4;\ 3)$, $B(1;\ 5)$, $C(9;\ -4)$. В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$. Постройте равнодействующую силу, найдите ее модуль и проекции на оси координат.
161. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $\bar{b}$, чтобы а) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$; б) $|\bar{a}+\bar{b}| > |\bar{a}-\bar{b}|$; в) $|\bar{a}+\bar{b}| < |\bar{a}-\bar{b}|$; г) $\bar{a}+\bar{b} \perp \bar{a}-\bar{b}$; д) $\bar{a}+\bar{b} \parallel \bar{a}-\bar{b}$; е) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$; ж) $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}| - |\bar{b}|$?
162. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы вектор $\bar{a}+\bar{b}$ делил пополам угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
163. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle BAD = 60^\circ$,

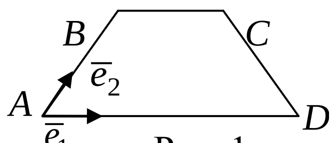


Рис. 1

$AB = BC = CD = 2$, точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразите векторы $\overline{AM}, \overline{AN}, \overline{MN}$ через единичные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ (рис. 1).

164. Определите координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(4; –1; 5)$ и $B(6; 2; 1)$.

165. Даны точки $A(3; –1; 7)$ и $B(5; 4; –9)$. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

166. Найдите координаты точки N, если $\overline{MN} = (3; -1; 7)$ и $M(2; –5; 9)$.

167. Дано $\overline{a} = (2; -1; 5), \overline{b} = (-1; 4; 3)$. Найдите координаты векторов $\overline{a} + \overline{b}, \overline{a} - \overline{b}, -3\overline{a}, 2\overline{a} + 3\overline{b}, 3\overline{a} - 2\overline{b}, 5\overline{a} + 4\overline{b}$.

168. Дано $\overline{a} = (3; -5; 8), \overline{b} = (-1; 1; 4)$. Найдите $|\overline{a} + \overline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|$.

169. Проверьте, являются ли точки вершинами трапеции $ABCD$, если
а) $A(3; –1; 2)$, $B(1; 2; –1)$, $C(–1; 1; –3)$, $D(3; –5; 3)$;
б) $A(–1; 5; –10)$, $B(5; –7; 8)$, $C(2; 2; –7)$, $D(5; –4; 2)$.

170. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин A, B, C. Найдите координаты вершины D, если
а) $A(3; 1; 2)$, $B(7; 5; 11)$, $C(5; 15; –8)$;
б) $A(7; –2; 9)$, $B(1; 5; –4)$, $C(5; 8; –3)$.

171. Даны вершины $A(2; –1; 4)$, $B(3; 2; –6)$, $C(–5; 0; 2)$ треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

172. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $A(5; 9; 3)$, а один из его концов в точке $C(–1; 5; –3)$. Найдите координаты второго конца стержня.

173. Отрезок AB, где $A(–1; 8; 3)$, $B(5; –1; 12)$ разделен на 3 равные части. Найдите координаты точек деления.

174. (*) Векторы $\overline{a} = (2; -3; 6), \overline{b} = (-1; 2; -2)$ приложены к одной точке. Найдите вектор $\overline{p}$, лежащий на биссектрисе угла между этими векторами, если $|\overline{p}| = 3\sqrt{42}$.

§ 12. Скалярное произведение векторов.

Для решения задач необходимо изучить материал § 4 главы 2 теоретического пособия.

Пример 12.1. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 135°, длины векторов $|\overline{a}| = \sqrt{8}$, $|\overline{b}| = 3$. Вычислите $\overline{a}^2, \overline{b}^2, \overline{a} \cdot \overline{b}, (\overline{a} - \overline{b})^2, (2\overline{a} + 5\overline{b}, 4\overline{a} - \overline{b})$.

Решение. По определению скалярного произведения векторов $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$. Тогда $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2 = 8$, $\overline{b}^2 = |\overline{b}|^2 = 9$,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos 135^\circ = \sqrt{8} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6,$$

$$(\overline{a} - \overline{b})^2 = (\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a}^2 - \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b} \cdot \overline{a} + \overline{b}^2 = \overline{a}^2 - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b}^2 =$$
$$= 8 + 12 + 9 = 29,$$

$$(2\overline{a} + 5\overline{b}) \cdot (4\overline{a} - \overline{b}) = 8\overline{a}^2 - 2\overline{a}\overline{b} + 20\overline{b} \cdot \overline{a} - 5\overline{b}^2 = 64 + 12 - 120 - 45 = -89.$$

Пример 12.2. Даны вектора $\bar{a}=(3;-5;6), \bar{b}=(-1;-2;5)$. Вычислите скалярные произведения $\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$, $(3\bar{a}-2\bar{b}, 2\bar{a}+5\bar{b})$.

Решение. Обозначим координаты векторов $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноименных координат. Следовательно,

$$\bar{a}^2 = x_1^2+y_1^2+z_1^2 = 3^2+(-5)^2+6^2 = 9+25+36 = 70,$$

$$\bar{b}^2 = x_2^2+y_2^2+z_2^2 = (-1)^2+(-2)^2+5^2 = 1+4+25 = 30,$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 3\cdot(-1)+(-5)\cdot(-2)+6\cdot 5 = -3+10+30 = 37.$$

Скалярное произведение $(3\bar{a}-2\bar{b}, 2\bar{a}+5\bar{b})$ можно найти двумя способами.

1) $(3\bar{a}-2\bar{b}, 2\bar{a}+5\bar{b}) = 6\bar{a}^2+15\bar{a}\cdot\bar{b}-4\bar{a}\cdot\bar{b}-10\bar{b}^2 = 6\cdot 70+11\cdot 37-10\cdot 30 = 527$,

2) Найдем координаты векторов $3\bar{a}-2\bar{b}=(11;-11;8)$, $2\bar{a}+5\bar{b}=(1;-20;37)$. Тогда $(3\bar{a}-2\bar{b}, 2\bar{a}+5\bar{b}) = 11\cdot 1+(-11)\cdot(-20)+8\cdot 37 = 527$.

Пример 12.3. Вектор $\bar{a}$ образует с осями *OX* и *OY* углы 60º и 120º соответственно. Найдите угол, который вектор $\bar{a}$ образует с осью *OZ*, если известно, что он тупой.

Решение. Обозначим угол с осью абсцисс α = 120º, с осью ординат – β = 120º, с осью аппликат – γ. По свойствам направляющих косинусов $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Тогда[10] $\cos\gamma = -\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} =$

$$= -\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Угол γ = 135º.

Пример 12.4. При каких значениях параметра k вектор $\bar{a}=(k;1;k-1)$ ортогонален вектору $\bar{b}=(k;-7;3)$.

Решение. Два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Имеем $\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = k^2-7+3(k-1) = k^2+3k-10$. Решим уравнение $k^2+3k-10=0$. Его корни k_1 = 2, k_2 = –5. Следовательно, $\bar{a}\perp\bar{b}$ при k = 2 и k = –5.

Пример 12.5. Найдите проекцию вектора $\bar{a}=(-1;-7;1)$ на ось вектора $\bar{b}=(-3;4;12)$.

Решение. По свойству проекции вектора на ось имеем $pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$. Тогда $pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, где $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1), \bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$.

Значит, $pr_{\bar{b}}\,\bar{a} = \dfrac{(-1)\cdot(-3)+(-7)\cdot 4+1\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2+12^2}} = \dfrac{3-28+12}{\sqrt{9+16+144}} = \dfrac{-13}{13} = -1.$

[10] Косинус тупого угла отрицателен.

Пример 12.6. Докажите, что треугольник ABC с вершинами в точках $A(-4; 5; 2)$, $B(2; -1; -5)$, $C(4; 3; -4)$ – прямоугольный.

Решение. Найдем координаты векторов, на которых как на сторонах построен треугольник ABC: $\overline{AC} = (8; -2; -8), \overline{BC} = (2; 4; 1)$. Имеем $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 16 - 8 - 8 = 0$, следовательно, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ и треугольник ABC – прямоугольный.

Упражнения.

164. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 120º, длины векторов $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4$. Вычислите $\overline{a}^2$, $\overline{b}^2$, $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})^2$, $(3\overline{a} - 2\overline{b}, \overline{a} + 2\overline{b})$.
165. (*) Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$. Найдите $\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{c} \cdot \overline{a}$, если $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 1, |\overline{c}| = 4$.
166. При каких k векторы $2\overline{a} + k\overline{b}$ и $k\overline{a} - 2\overline{b}$ ортогональны, если $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 1$ и векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 45º.
167. Дано $\overline{a} = (4; -2; -3)$, $\overline{b} = (6; -3; 2)$. Вычислите $\overline{a}^2$, $\overline{b}^2$, $\overline{a}\overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})^2$, $(\overline{a} - \overline{b}) \cdot (2\overline{a} + \overline{b}), (3\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot (\overline{a} + 2\overline{b}), (4\overline{a} + 3\overline{b}) \cdot (3\overline{a} - 4\overline{b})$.
168. При каких k ортогональны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если
а) $\overline{a} = (2k; 3; -7)$, $\overline{b} = (3; -5; k)$; б) $\overline{a} = (k; 2; -k)$, $\overline{b} = (k; 3; -5)$.
169. Найдите направляющие косинусы вектора $\overline{a} = (3; -12; 4)$.
170. Найдите направляющие косинусы вектора $\overline{a}$, если $|\overline{a}| = 4$, он образует углы β = 45º, γ = 60º с осями OY и OZ соответственно и острый угол с осью OX.
171. Существует ли вектор, образующий с осями координат углы
а) α = 135º, β = 60º, γ = 120º; б) α = 60º, β = 120º, γ = 30º.
172. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$ ортогональны.
173. Вычислите проекцию вектора $\overline{a} = (5; 2; -1)$ на ось вектора $\overline{b} = (2; -1; 2)$.
174. Вычислите проекцию вектора $\overline{a} = (3; 2; -5)$ на ось вектора $\overline{b} = (-2; 6; -3)$.
175. Даны три вектора $\overline{a} = (-4; 3; 1), \overline{b} = (3; 2; -5), \overline{c} = (3; 2; -6)$. Найдите $pr_{\overline{c}}(3\overline{a} - 2\overline{b})$.
176. Даны две точки $A(3; -4; -2\sqrt{2}), B(2; 5; -\sqrt{2})$. Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, образующую с осями OX и OY углы α = 60º, β = 120º и тупой угол с осью OZ.
177. Точки $A(-1; 1; 4)$, $B(-4; 2; 0)$, $C(3; 5; 1)$ – вершины треугольника ABC. Найдите внутренний угол при вершине B и внешний угол при вершине C.
178. Даны точки $A(-4; 2; 7)$, $B(2; 5; -1)$, $C(1; -1; 2)$, $D(3; 2; -4)$. Найдите $pr_{\overline{CD}}(\overline{AC} + \overline{BD})$.

179. Для трапеции, заданной в задаче 152, найдите угол между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$.

180. Найдите вектор $\bar{c}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a}=(2;-3;1)$ и $\bar{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\bar{c}\cdot(\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k})=10$.

181. Точка M под действием силы $\bar{F}=(5;4;7)$ переместилась на расстояние $\bar{S}=(-2;9;5)$. Найдите работу этой силы и угол между направлением силы и направлением перемещения.

182. Найдите работу силы $\bar{F}=(-1;3;4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(-2; 5; -3)$ в точку $B(-7; 9; -1)$.

§ 13. Векторное произведение векторов.

Для решения задач необходимо изучить материал § 5 главы 2 теоретического пособия.

Пример 13.1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 120º, длины векторов $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=\sqrt{3}$. Вычислите $|\bar{a}\times\bar{b}|$, $|(2\bar{a}+5\bar{b})\times(4\bar{a}-\bar{b})|$.

Решение. По определению векторного произведения

$|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$. Тогда $|\bar{a}\times\bar{b}|=2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 120^\circ=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$.

Вычислим векторное произведение $(2\bar{a}+5\bar{b})\times(4\bar{a}-\bar{b})$:

$(2\bar{a}+5\bar{b})\times(4\bar{a}-\bar{b})=2\bar{a}\times\bar{a}-2\bar{a}\times\bar{b}+5\bar{b}\times 4\bar{a}-5\bar{b}\times\bar{b}$. По свойствам векторного произведения $\bar{a}\times\bar{a}=0,\ \bar{b}\times\bar{b}=0,\ \bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}$. Следовательно,

$|(2\bar{a}+5\bar{b})\times(4\bar{a}-\bar{b})|=|-2\bar{a}\times\bar{b}-5\bar{a}\times 4\bar{b}|=22|\bar{a}\times\bar{b}|=66$.

Пример 13.2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a}=(2;-5;1),\ \bar{b}=(4;7;-3)$. Вычислите $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{a}$, $(2\bar{a}+3\bar{b})\times(3a-2\bar{b})$.

Решение. Если вектора заданы своими координатами, то векторное произведение вычисляется через определитель $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$. Вычислять этот определитель будем, раскладывая его по первой строке. Итак,

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -5 & 1\\ 4 & 7 & -3\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 7 & -3\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}2 & -5\\ 4 & 7\end{vmatrix}=8\bar{i}+10\bar{j}+34\bar{k}=$$

$$=(8;10;34);\quad \bar{b}\times\bar{a}=-\bar{a}\times\bar{b}=(-8;-10;-34);$$

$$(2\bar{a}+3\bar{b})\times(3a-2\bar{b})=6\bar{a}\times\bar{a}-4\bar{a}\times\bar{b}+9\bar{b}\times\bar{a}-6\bar{b}\times\bar{b}=-4\bar{a}\times\bar{b}-9\bar{a}\times\bar{b}=$$
$$=-13\bar{a}\times\bar{b}=-13(8;10;34),$$

так как $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{b}=\bar{0}$.

Чтобы вычислить векторное произведение $(2\bar{a}+3\bar{b})\times(3a-2\bar{b})$ можно также найти координаты векторов $2\bar{a}+3\bar{b}$ и $3\bar{a}-2\bar{b}$, а затем вычислить векторное произведение найденных векторов.

Пример 13.3. Даны вершины $A(-4;5;2)$, $B(1;2;5)$, $C(-1;7;8)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты BD.

Решение. По свойству векторного произведения площадь треугольника равна половине модуля векторного произведения векторов, на которых как на сторонах построен треугольник ABC: Найдем координаты этих векторов: $\overline{AB}=(5;-3;3)$, $\overline{AC}=(3;2;6)$.

Вычислим векторное произведение

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 5 & -3 & 3\\ 3 & 2 & 6\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}5 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-24\overline{i}-21\overline{j}+19\overline{k}=$$

$=(-24;-21;19)$. и его модуль

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{(-24)^2+(-21)^2+19^2}=\sqrt{576+441+361}=\sqrt{1378}.$$

Итак, площадь треугольника ABC равна $S=\dfrac{\sqrt{1378}}{2}$.

Из школьного курса геометрии известно, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту, то есть $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$. Так как $|\overline{AC}|=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=\sqrt{9+4+36}=7$, то $\dfrac{\sqrt{1378}}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot BD$. Следовательно, высота $BD=\dfrac{\sqrt{1378}}{7}$.

Пример 13.4. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 45° и их модули равны $|\overline{a}|=3\sqrt{2}, |\overline{b}|=2$. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{m}=2\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{n}=3\overline{a}-2\overline{b}$.

Решение. По свойству векторного произведения площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов, на которых как на сторонах построен параллелограмм.

Модуль векторного произведения векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равен

$$|\overline{m}\times\overline{n}|=|(2\overline{a}+\overline{b})\times(3\overline{a}-2\overline{b})|=|6\overline{a}\times\overline{a}-4\overline{a}\times\overline{b}+3\overline{b}\times\overline{a}-2\overline{b}\times\overline{b}|=|-7\overline{a}\times\overline{b}|=$$

$$=7|\overline{a}\times\overline{b}|=7\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin 45^\circ=42\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=42.$$

Площадь искомого параллелограмма равна 42.

Упражнения.

183. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 30°, длины векторов $|\overline{a}|=3,\ |\overline{b}|=5$. Вычислите $|\overline{a}\times\overline{b}|, |(2\overline{a}+\overline{b})\times(3\overline{a}-2\overline{b})|$.
184. Дано $\overline{a}=(-4;2;3)$, $\overline{b}=(1;-3;-2)$. Вычислите $\overline{a}\times\overline{b}, (\overline{b}+\overline{a})\times(2\overline{a}+\overline{b})$, $(2\overline{a}+\overline{b})\times\overline{b}, (3\overline{a}-4\overline{b})\times(2\overline{a}+3\overline{b})$.
185. Дано $\overline{a}=(5;-3;4)$, $\overline{b}=(3;7;-1)$. Вычислите $\overline{a}\times\overline{b}$.
186. Известно, что $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=26, (\overline{a},\overline{b})=72$. Найдите $|[\overline{a},\overline{b}]|$.
187. Известно, что $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=17, |[\overline{a},\overline{b}]|=45$. Найдите $(\overline{a},\overline{b})$.

188. Даны вершины $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты BD.
189. Даны вершины $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника и длину высоты AH.
190. Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 4 -1)$, $C(-1; 3; 1)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты BD.
191. Векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ образуют угол 60º, длины векторов $|\overline{m}|=2, |\overline{n}|=\sqrt{3}$. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=2\overline{m}-3\overline{n}, \overline{q}=3\overline{m}+4\overline{n}$.
192. Векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ образуют угол 45º, длины векторов $|\overline{m}|=\sqrt{8}, |\overline{n}|=3$. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p}=3\overline{m}+\overline{n}, \overline{q}=2\overline{m}-5\overline{n}$.

§ 14. Смешанное произведение векторов.

Для решения задач необходимо изучить материал § 6 главы 2 теоретического пособия.

Пример 14.1. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 45º, вектор $\overline{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Вычислите смешанное произведение этих векторов, если $|\overline{a}|=\sqrt{2}, \ |\overline{b}|=3, \ |\overline{c}|=2$.

Решение. По определению смешанного произведения $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$. Вектор $\overline{d}=[\overline{a},\overline{b}]$ перпендикулярен плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, следовательно, он параллелен вектору $\overline{c}$. Имеем $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=(\overline{d},\overline{c})=\pm|\overline{d}|\cdot|\overline{c}|$. Но $|\overline{d}|=|[\overline{a},\overline{b}]|= \ =|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin 45^\circ=\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3$.

Значит, $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\pm|\overline{d}|\cdot|\overline{c}|=\pm 3\cdot 2=\pm 6$. Смешанное произведение положительно, если вектора $\overline{c}$ и $\overline{d}$ сонаправлены, и отрицательно, если вектора $\overline{c}$ и $\overline{d}$ противоположно направлены.

Пример 14.2. Даны векторы $\overline{a}=(3;5;-1)$, $\overline{b}=(-7;1;2)$, $\overline{c}=(2;-4;3)$. Вычислите $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$.

Решение. Применим формулу для вычисления смешанного произведения векторов, когда они заданы своими координатами $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Тогда для $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -7 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & 11 & 0 \\ 11 & 11 & 0 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 11 & 11 \end{vmatrix}=-(-11-121)=132$.

Пример 14.3. Докажите, что точки $A(3; 1; -4)$, $B(4; 4; -6)$, $C(6; -3; 5)$ и $D(5; 5; 6)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, если векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Условие компланарности трех векторов – равенство нулю их смешанного произведения. Найдем координаты векторов:

$\overline{AB}=(1;3;-2), \overline{AC}=(-3;-4;9), \overline{AD}=(-2;4;10)$. Их смешанное произведение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 9 \\ -2 & 4 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & 6 \end{vmatrix}=0$, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример 14.4. Даны четыре вершины тетраэдра $A(3; 1; -4)$, $B(4; 4; -6)$, $C(6; -3; 0)$ и $D(5; 5; 1)$. Найдите длину высоты, опущенной на основание из вершины D.

Решение. Вычислим объем тетраэдра: $V=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right|$. Координаты векторов: $\overline{AB}=(1;3;-2), \overline{AC}=(3;-4;6), \overline{AD}=(2;4;5)$ и их смешанное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -13 & 12 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}=-117+24=-93$. Тогда объем тетраэдра $V=\frac{93}{6}=15{,}5$.

Из школьного курса геометрии известно, что объем тетраэдра равен одной трети произведения площади основания на высоту $V=\frac{1}{3}S\cdot h$. Площадь основания $S=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$. Так как $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}-$ $-\overline{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=10\overline{i}-12\overline{j}-13\overline{k}$, то $S=\frac{\sqrt{100+144+169}}{2}=\frac{\sqrt{413}}{2}$. Высота тетраэдра равна $h=\frac{3V}{S}=\frac{93}{\sqrt{413}}$.

Упражнения.

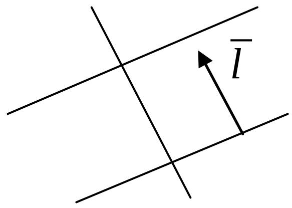
193. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол между которыми равен 30º. Зная, что $|\overline{a}|=6,\ |\overline{b}|=3,\ |\overline{c}|=5$, вычислите $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$.
194. Дано $\overline{a}=(1;-1;3),\ \overline{b}=(-2;3;-5),\ \overline{c}=(3;1;4)$. Вычислите $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$.
195. Дано $\overline{a}=(1;5;-1),\ \overline{b}=(3;9;1),\ \overline{c}=(5;29;-8)$. Вычислите $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$.
196. Докажите, что точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.
197. Докажите, что точки $A(2; 5; 7)$, $B(3; 2; 5)$, $C(5; 1; -4)$ и $D(4; 0; 2)$ лежат в одной плоскости.
198. Даны вершины тетраэдра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(-5; -4; 8)$, $D(6; 3; 7)$. Найдите длину высоты, опущенной на основание ABD из вершины C.
199. Даны вершины тетраэдра $A(-4; 1; 7)$, $B(2; 5; -1)$, $C(3; 2; 4)$, $D(5; 6; 1)$. Найдите длину высоты, опущенной на основание ABC из вершины D.

§ 15. Уравнения прямой на плоскости.

Для решения задач необходимо изучить материал § 2 главы 3 теоретического пособия.

Пример 15.1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-5; 2)$ а) параллельно прямой $2x + 3y - 11 = 0$ б) перпендикулярно прямой $4x + 3y + 32 = 0$.

Решение. а) Так как искомая прямая параллельна данной, то нормальный вектор исходной прямой будет нормальным вектором и для искомой прямой. Возьмем $\bar{n} = (1; 3)$. Тогда уравнение искомой прямой имеет вид $2(x + 5) + 3(y + 2) = 0$ или $2x + 3y + 16 = 0$ (общее уравнение прямой).

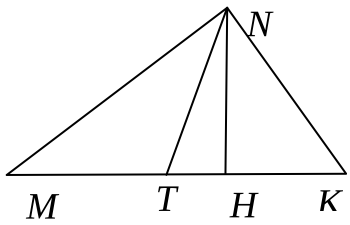


б) Так как искомая прямая перпендикулярна данной, то нормальный вектор исходной прямой для искомой прямой будет направляющим вектором. Имеем $\bar{l} = (4; 3)$. Запишем каноническое уравнение искомой прямой $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{3}$ и приведем дроби к общему знаменателю: $3(x + 5) = 4(y - 2)$. Тогда общее уравнение прямой имеет вид $3x - 4y + 19 = 0$.

Пример 15.2. Вычислите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M(3; 7)$ и $N(-1; 4)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки: $\dfrac{x-3}{-1-3} = \dfrac{y-7}{4-7} \Rightarrow \dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-7}{-3} \Rightarrow y - 7 = \dfrac{3}{4}(x-3) \Rightarrow y = 0{,}75x + 4{,}75$. Угловой коэффициент искомой прямой равен $k = 0{,}75$.

Пример 15.3. Точки $M(4; -9)$, $N(2; 4)$ и $K(10; 1)$ – вершины ΔKMN. Напишите уравнения высоты NH и медианы NT.



Решение. Высота NH перпендикулярна основанию MK, поэтому вектор $\overline{MK}$ будет для высоты NH нормальным вектором. Имеем $\overline{MK} = (6; 10)$ и уравнение высоты имеет вид $6(x - 2) + 10(y - 4) = 0$ или $3x + 5y - 26 = 0$. Точка T – середина стороны MK и ее координаты равны $T\left(\dfrac{4+10}{2}; \dfrac{-9+1}{2}\right) \Rightarrow T(7; -4)$. Чтобы записать уравнение медианы воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (N и T) $\dfrac{x-2}{7-2} = \dfrac{y-4}{-4-4} \Rightarrow \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-4}{-8} \Rightarrow -8(x-2) = 5(y-4)$. Тогда общее уравнение медианы имеет вид $8x + 5y - 36 = 0$.

Пример 15.4. При каком значении параметра k прямые $2x - 7y - 1 = 0$ и $kx + 14y + 9 = 0$ а) параллельны, б) перпендикулярны?

Решение. Прямые заданы общими уравнениями и нормальные векторы этих прямых равны $\bar{n}_1 = (2; -7)$ и $\bar{n}_2 = (k; 14)$.

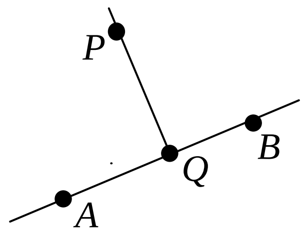
а) Если прямые параллельны, то их нормальные векторы также параллельны. Условие параллельности двух векторов пропорциональность их координат $\frac{2}{k} = \frac{-7}{14}$. Следовательно, $k = -4$.

б) Если прямые перпендикулярны, то их нормальные векторы также перпендикулярны. Условие перпендикулярности двух векторов – равенство нулю их скалярного произведения $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 2k + 14 \cdot (-7) = 0$. Следовательно, $k = 49$.

Пример 15.5. Найдите проекцию точки $P(-2; -8)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; 4)$ и $B(9; 8)$.

Решение. Проекция точки P на прямую AB – это основание перпендикуляра PQ, опущенного из точки P на прямую.

Запишем уравнение прямой AB, проходящей через две точки $A(3; 4)$ и $B(9; 8)$:



$\frac{x-3}{9-3} = \frac{y-4}{8-4} \Rightarrow \frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{4} \Rightarrow 2(x-3) = 3(y-4)$ и общее уравнение прямой, проходящей через точки A и B имеет вид $2x - 3y + 6 = 0$. Нормальный вектор этой прямой $\bar{n} = (2; -3)$ будет направляющим вектором для прямой PQ ($\bar{n} \perp AB, PQ \perp AB \Rightarrow \bar{n} \parallel PQ$).

Запишем каноническое уравнение прямой PQ: $\frac{x+2}{2} = \frac{y+8}{-3}$ т. е. $-3(x+2) = 2(y+8)$ и общее уравнение прямой PQ имеет вид $3x + 2y + 22 = 0$.

Точка Q – точка пересечения прямых AB и PQ. Найдем ее координаты. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ 3x + 2y + 22 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}5y - 3, \\ 3(1{,}5y - 3) + 2y = -22, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}5y - 3, \\ 6{,}5y = -13, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6, \\ y = -2. \end{cases}$$

Координаты точки $Q(-6; -2)$.

Упражнения.

200. Определите точки пересечения прямой $2x - 3y - 12 = 0$ с осями координат. Начертите эту прямую.
201. Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$ и точка $M_o(4; 1)$. Напишите уравнения прямой, проходящей через точку M_o а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.
202. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; -5)$ и $M_2(3; 2)$. Найдите ее угловой коэффициент.
203. Точки $M(2; 1)$, $N(5; 3)$ и $K(3; -4)$ – середины сторон ΔPQT. Напишите уравнения его сторон.
204. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин $A(3; 1)$, $B(7; 5)$, $C(5; -3)$. Напишите уравнения его сторон и диагоналей.
205. Точки $M(7; 2)$, $N(-1; -1)$ и $K(3; 8)$ – вершины ΔKMN. Напишите уравнения его высот.

206. Из точки $M_0(4; 6)$ под углом α к оси OX направлен луч света. Известно, что $\mathrm{tg}\alpha = 3$. Дойдя до оси OX, луч отразился от нее. Напишите уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.
207. Даны две смежные вершины $A(-3; -1)$ и $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3; 0)$ пересечения его диагоналей. Напишите уравнения его сторон.
208. (*) Составьте уравнения сторон ΔKMN, зная его вершину $M(4; -1)$ и уравнения высоты NH: $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы NP: $2x + 3y = 0$, проведенных из вершины N.
209. Даны две противоположные вершины квадрата $M(-1; 3)$ и $P(6; 2)$. Напишите уравнения его сторон.
210. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y + 26 = 0$ и $5x - 12y - 65 = 0$. Найдите площадь квадрата.
211. Найдите проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.
212. Найдите точку, симметричную точке $P(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и $B(-1; -2)$.
213. (*) Точки $K(1; -1)$, $M(-2; 1)$ и $N(3; 5)$ – вершины ΔKMN. Напишите уравнения перпендикуляра, опущенного из вершины K на медиану, проведенную из вершины M.
214. Найдите угол между прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3 + 2y - 1 = 0$.

§ 16. Уравнения плоскости.

Для решения задач необходимо изучить материал § 3 главы 3 теоретического пособия.

Пример 16.1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5; 2; 3)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (2; -3; 7)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{n}$ имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где $(A; B; C)$ – координаты вектора $\overline{n}$, а (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M_0. Следовательно, $2(x-5) - 3(y-2) + 7(z-3) = 0$. Раскрыв скобки, получим общее уравнение плоскости $2x - 3y + 7z - 25 = 0$.

Пример 16.2. Точка $M(-3; 2; 4)$, принадлежащая плоскости, является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость. Напишите уравнение плоскости.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{n}$ имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где $(A; B; C)$ – координаты вектора $\overline{n}$, а (x_0, y_0, z_0) – координаты точки M_0. Вектор $\overline{OM} = (-3; 2; 4)$ является нормальным вектором плоскости. Имеем $-3(x+3) + 2(y-2) + 4(z-4) = 0$. Раскрыв скобки, получим общее уравнение плоскости $-3x + 2y + 4z - 29 = 0$ или $3x - 2y - 4z + 29 = 0$.

Пример 16.3. Напишите общее уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(5; 2; 3)$, $M_2(2; -3; 7)$ и $M_3(4; 1; -2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Для искомой плоскости $\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ 2-5 & -3-2 & 7-3 \\ 4-5 & 1-2 & -2-3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ -3 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}=0$.

Разложим определитель по первой строке[11] $(x-5)\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}+$

$+(z-3)\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 29(x-5)-19(y-2)-2(z-3)=0$. Раскрыв скобки, получим общее уравнение плоскости $29x-19y-2z-101=0$.

Пример 16.4. Найдите расстояние от точки $P(2;-4;7)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1;2;1)$, $M_2(2;3;-1)$ и $M_3(-3;1;2)$.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

Для искомой плоскости $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 2+1 & 3-2 & -1-1 \\ -3+1 & 1-2 & 2-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

Разложим определитель по первой строке $(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+$

$+(z-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(x+1)+(y-2)-(z-1)=0$.

Раскрыв скобки, получим общее уравнение плоскости $x-y+z+2=0$.

Расстояние от точки $P(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $M_1M_2M_3$ находится по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Итак, $d=\dfrac{|2+4+7+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{3}}=\dfrac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$.

Пример 16.5. При каких значениях параметра k плоскости $3x+(k-3)y+z-11=0$ и $kx+(k-1)y-9z+4=0$ будут перпендикулярны?

Решение. Две плоскости перпендикулярны, если их нормальные вектора перпендикулярны. Для заданных плоскостей $\overline{n}_1=(3;k-3;1), \overline{n}_2=(k;k+1;-9)$. Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Имеем $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2=3k+(k-3)(k+1)-9=0$. Решим квадратное уравнение $3k+k^2-3k+k-3-9=0 \Rightarrow k^2+k-12=0 \Rightarrow$ $k_1=3$ и $k_2=-4$. Итак, плоскости перпендикулярны при $k=3$ и $k=-4$.

Упражнения.

[11] эта строка содержит переменные, поэтому преобразование строк определителя к существенному упрощению не приведет.

215. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; –3; 1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (1; 2; -4)$.

216. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; 2; –1)$ параллельно векторам $\overline{a} = (1; -2; -1)$ и $\overline{b} = (-3; 1; 5)$.

217. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7; 2; 3)$, $M_2(5; 6; –4)$ параллельно оси OX.

218. Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; –2; 5)$, $M_2(–2; 1; 1)$ и $M_3(4; 3; –1)$.

219. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; –4; 1)$ параллельно плоскости $2x + 5y – 4z + 21 = 0$.

220. Запишите общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(–1; 3; –1)$ перпендикулярно плоскости $3x – 2y + 5z = 0$.

221. При каких значениях k и m будут параллельны плоскости
   а) $2x + ky + 3z – 5 = 0$ и $mx – 6y – 6z + 2 = 0$;
   б) $mx + 3y – 2z – 1 = 0$ и $5x – 15y + kz + 7 = 0$.

222. При каких значениях k будут перпендикулярны плоскости
   а) $5x + y – 3z + 1 = 0$ и $2x – ky – 3z – 4 = 0$;
   б) $7x – 2y – kz = 0$ и $kx + 5y – 3z – 1 = 0$;
   в) $kx – 2y – 3z + 5 = 0$ и $(k – 2)x – 3y + kz = 0$.

223. Проверьте, будут ли перпендикулярными плоскости $3x + 3y – 5z – 4 = 0$ и $3x + 7y + 6z + 1 = 0$?

224. Вычислите расстояние от точки $P(–1; 1; –2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1; –1; 1)$, $M_2(–2; 1; 3)$ и $M_3(4; –5; –2)$.

225. Две грани куба лежат в плоскостях $2x-2y+z+5=0$ и $2x-2y+z-1=0$. Найдите объем куба.

226. Даны плоскости $x – 2y + z – 7 = 0$, $2x + 2y – z + 2 = 0$ $x – 3y + z – 11 = 0$. Докажите, что они имеют одну общую точку. Найдите координаты этой точки.

227. Найдите угол между плоскостями $5x – 2y + 6z – 13 = 0$ и $6x + 3y – 4z = 0$.

§ 17. Уравнения прямой в пространстве.

Для решения задач необходимо изучить материал § 4 главы 3 теоретического пособия.

Пример 17.1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5; 2; 4)$ а) параллельно вектору $\overline{l} = (2; 3; -4)$, б) параллельно прямой $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

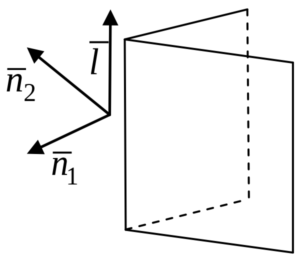
<u>*Решение*</u>. а) Воспользуемся каноническим уравнением прямой, т. е. уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\overline{l} = (m; n; p)$: $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$. Для искомой прямой получим каноническое уравнение $\dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-4}{-4}$.

Параметрическое уравнение прямой имеет вид $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ где $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ – точка, лежащая на прямой, $\overline{l} = (m;\, n;\, p)$ – направляющий вектор прямой, $t \in \mathbf{R}$.

Запишем параметрическое уравнение этой прямой: $\begin{cases} x = 5 + 2t; \\ y = 2 + 3t; \\ z = 4 - 4t. \end{cases}$

б) Прямая $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$ задана каноническим уравнением и ее направляющий вектор $\overline{l} = (4;\, 2;\, 3)$. Тогда каноническое уравнение искомой прямой имеет вид $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.

Пример 17.2. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;\, 2;\, -5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - 4y + z - 4 = 0, \\ 3x + 2y + 4z - 1 = 0. \end{cases}$



<u>Решение</u>. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (аксиома стереометрии). В условии задачи прямая задана как линия пересечения двух плоскостей. Для каждой из плоскостей задан ее нормальный вектор: для плоскости $\pi_1 : \overline{n}_1 = (2;\, -4;\, 1)$ и для плоскости $\pi_2 : \overline{n}_2 = (3;\, 2;\, 4)$. Так как прямая l лежит в плоскости π_1, и $\overline{n}_1 \perp \pi_1$, то $l \perp \overline{n}_1$. Аналогично, так как прямая l лежит в плоскости π_2, и $\overline{n}_2 \perp \pi_2$, то $l \perp \overline{n}_2$. Следовательно, направляющий вектор $\overline{l}$ прямой параллелен векторному произведению векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$: $\overline{l} \parallel \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$. Поэтому за направляющий вектор искомой прямой можно взять вектор $\overline{l} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$. Вычислим векторное произведение $\overline{l} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +$

$+\overline{k} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -18\overline{i} - 5\overline{j} + 16\overline{k} = (-18;\, -5;\, 16).$

Запишем каноническое уравнение искомой прямой $\dfrac{x-4}{-18} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z+5}{16}$.

Пример 17.3. Составьте параметрическое уравнение прямой
$\begin{cases} 3x + y - 4z - 1 = 0, \\ 2x + 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$

<u>Решение</u>. <u>1 способ</u>. Направляющий вектор прямой найдем так, как это было сделано в предыдущем примере. Имеем $\overline{n}_1 = (3;\, 1;\, -4)$, $\overline{n}_2 = (2;\, 2;\, 1)$. То-

где направляющий вектор прямой $\bar{l} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} -$

$-\bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 9\bar{i} - 11\bar{j} + 4\bar{k} = (9; -11; 4)$.

Чтобы записать уравнение прямой, нужно еще задать на прямой точку. Для этого достаточно найти частное решение системы уравнений $\begin{cases} 3x + y - 4z - 1 = 0, \\ 2x + 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$ Пусть $z = 1$. Тогда система примет вид $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0, \\ 2x + 2y - 6 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 3x + (3 - x) - 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 2x - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$ Следовательно, точка $M_0(1; 2; 1)$ лежит на прямой.

Параметрическое уравнение прямой имеет вид $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, лежащая на прямой, $\bar{l} = (m; n; p)$ – направляющий вектор прямой, $t \in \mathbf{R}$.

Запишем параметрическое уравнение искомой прямой: $\begin{cases} x = 1 + 9t, \\ y = 2 - 11t, \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$

<u>2 способ</u>. Воспользуемся аксиомой, через две точки всегда можно провести прямую и притом единственную. Одну точку мы уже нашли $M_0(1; 2; 1)$. Найдем вторую точку. Пусть $z = -3$. Тогда система примет вид $\begin{cases} 3x + y + 11 = 0, \\ 2x + 2y - 10 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ 3x + (5 - x) + 11 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 13, \\ x = -8. \end{cases}$ Следовательно, точка $M_1 = (-8; 13; -3)$ лежит на прямой. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$. Имеем $\dfrac{x - 1}{-8 - 1} = \dfrac{y - 2}{13 - 2} = \dfrac{z - 1}{-3 - 1} \Rightarrow$ $\dfrac{x - 1}{-9} = \dfrac{y - 2}{11} = \dfrac{z - 1}{-4}$. Умножим все дроби на (–1): $\dfrac{x - 1}{9} = \dfrac{y - 2}{-11} = \dfrac{z - 1}{4}$. Приравняв каждую дробь параметру t, получим параметрическое уравнение прямой $\begin{cases} x = 1 + 9t, \\ y = 2 - 11t, \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$

Пример 17.4. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x - 7}{2} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 1}{5}$ и плоскости $4x + 3y - 5z + 9 = 0$.

<u>Решение</u>. <u>1 способ</u>. Каноническое уравнение прямой равносильно системе двух уравнений $\begin{cases} \dfrac{x - 7}{2} = \dfrac{z - 1}{5}, \\ \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 1}{5}. \end{cases}$ Откуда $\begin{cases} x = \dfrac{2(z - 1)}{5} + 7, \\ y = \dfrac{-3(z - 1)}{5} - 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2z + 33}{5}, \\ y = \dfrac{-3z - 7}{5}. \end{cases}$

Подставим найденные значения x и y в уравнение плоскости $4\cdot\frac{2z+33}{5}+3\cdot\frac{-3z-7}{5}-5z+9=0\Rightarrow\frac{8z+132-9z-21-25z+45}{5}=0\Rightarrow$ $\frac{-26z+156}{5}=0\Rightarrow z=6.$

Тогда $x=\frac{2z+33}{5}=\frac{12+33}{5}=9,\ y=\frac{-3z-7}{5}=\frac{-18-7}{5}=-5$. Точка пересечения прямой и плоскости $M(9; –5; 6)$.

2 способ. Запишем параметрическое уравнение заданной прямой $\begin{cases} x=7+2t, \\ y=-2-3t, \\ z=1+5t. \end{cases}$ и подставим выражения для x, y и z в уравнение плоскости

$4(7+2t)+3(-2-3t)-5(1+5t)+9=0\Rightarrow 28+8t-6-9t-5-25t+9=0\Rightarrow$

$-26t+26=0\Rightarrow t=1$. Подставив найденное значение t в параметрическое уравнение прямой, получим точку пересечения прямой и плоскости. Итак, $M(9; –5; 6)$.

Пример 17.5. Найдите угол между прямыми $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{\sqrt{45}}$.

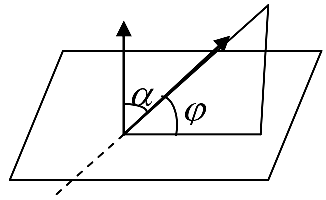
Решение. Угол между прямыми определяется углом между их направляющими векторами. Имеем $\overline{l_1}=(2;4;\sqrt{5}), \overline{l_2}=(2;-1;\sqrt{45})$. По свойствам скалярного произведения

$$\cos\varphi=\frac{\overline{l_1}\cdot\overline{l_2}}{|\overline{l_1}|\cdot|\overline{l_2}|}=\frac{2\cdot2+4\cdot(-1)+\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}}{\sqrt{2^2+4^2+(\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(\sqrt{45})^2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}}{5\cdot\sqrt{50}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}}{5\cdot5\sqrt{2}}=\frac{3}{5\sqrt{2}}=0,6\sqrt{2}.$$

Тогда угол $\varphi=\arccos 0,6\sqrt{2}$.

Пример 17.6. Найдите угол между прямой $\frac{x-1}{6}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $2x – y – 2z +10 = 0$.



Решение. Угол φ между прямой и плоскостью определяется как угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Найдем угол α между направляющим вектором прямой $\overline{l}=(6;3;-2)$ и нормальным вектором плоскости $\overline{n}=(2;-1;-2)$: $\cos\alpha=\frac{\overline{n}\cdot\overline{l}}{|\overline{n}|\cdot|\overline{l}|}=\frac{12-3+4}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{36+9+4}}=\frac{13}{21}$ и $\alpha=\arccos\frac{13}{21}$. Тогда угол $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{13}{21}=\arcsin\frac{13}{21}$.

Упражнения.

228. Дана точка $M_0(2; -3; 0)$. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через эту точку параллельно а) вектору $\bar{a} = (-2; 5; 4)$ б) прямой $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$.

229. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2; -3; 1)$ и $M_2(3; 5; -1)$.

230. Составьте параметрическое уравнение прямой, про~~ходящей чере~~з точки $M_1(-5; 1; 4)$ и $M_2(-2; 3; -1)$.

231. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; 1; -2)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - 2y + 4z - 1 = 0, \\ x + 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$

232. а) Составьте каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x + 3y - 2z - 6 = 0, \\ 2x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$

б) Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(4; -3; 5)$ параллельно найденной в пункте а) прямой.

233. Дана точка $M(-3; 1; 2)$. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости $3x - 7y - 2z + 17 = 0$.

234. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 3 = 0$.

235. Найдите точку пересечения прямой $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-5}$ и плоскости $x - 2y + z - 10 = 0$.

236. Проверьте, будут ли параллельны прямые $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+5}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z - 26 = 0, \\ x - y - 5z + 2 = 0. \end{cases}$

237. При каких значениях A и D прямая $x = 3 + 4t,\ y = 1 - 4t,\ z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$.

238. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $x - 2y + z - 6 = 0$ и $3x + y - 2z + 4 = 0$ и точку $M(1; 1; 1)$.

239. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 6 = 0$ и $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\bar{a} = (2; -1; -2)$.

240. Найдите угол между прямыми $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$ и $\dfrac{x+5}{-4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{5}$.

241. (*) Найдите точку Q симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M(5; 4; 6)$ и $N(-2; -17; -8)$.

§ 18. Квадратичные формы.

Для решения задач необходимо изучить материал § 21 главы 1 теоретического пособия.

Пример 18.1. Запишите в матричном виде квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 9x_1x_2$.

Решение. Матрица $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1,...,n)$ квадратичной формы составлена из коэффициентов этой квадратичной формы.

Найдем матрицу квадратичной формы. Ее элементы, стоящие на главной диагонали равны коэффициентам при квадратах переменных, а остальные – половине соответствующих коэффициентов квадратичной формы, причем коэффициенты, симметричные относительно главной диагонали равны. Поэтому матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & 4{,}5 \\ 4{,}5 & -2 \end{pmatrix}$ и квадратичную форму можно записать в виде

$$L(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 4{,}5 \\ 4{,}5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 18.2. Запишите в матричном виде квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 7x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы. Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и квадратичную форму можно записать в виде $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Пример 18.3. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$. Найдите ортонормированный базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид.

Решение. Квадратичная форма $L(x_1,...,x_n)$ имеет канонический вид, если $a_{ij} = 0\ (i \neq j)$. Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и найдем собственные числа и собственные векторы этой квадратичной формы. Для этого решим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5.$$

Решим уравнение $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ и для каждого λ найдем собственные векторы:

Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1$ и $\bar{c}_1 = (1; -2)$.

Пусть $\lambda_2 = 5$. Тогда $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$ и $\bar{c}_2 = (2; 1)$.

Векторы $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ линейно независимы и попарно ортогональны, так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ и скалярное произведение $\bar{c}_1\bar{c}_2 = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$.

Нормируем векторы: $|\bar{c}_1| = |\bar{c}_2| = \sqrt{5}$ и $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ образуют ортонормированный базис, и квадратичная форма в каноническом виде задается матрицей $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 18.4. Приведите к каноническому виду (главным осям) квадратичную форму $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. Найдите ортонормированный базис, в котором эта квадратичная форма имеет канонический вид.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и найдем собственные числа и собственные векторы этой квадратичной формы. Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$= -\lambda((3-\lambda)^2 - 4) + (-3 + \lambda - 2) + (-2 - 3 + \lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 5) + (\lambda - 5) + (\lambda - 5) = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda - 5)(\lambda - 1) + 2(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 5)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5.$$

Пусть $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \quad 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 0 \quad 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -x_2, \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \text{ и } \bar{c}_1 = (2; 1; -1).$$

Пусть $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1, \\ x_3 = x_1 \end{cases} \text{ и } \bar{c}_2 = (1; -1; 1).$$

Пусть $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overline{0} \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 9x_1 = 0, \\ -9x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0, \\ x_3 = x_2 \end{matrix}$ и $\overline{c}_3 = (0;1;1)$.

Векторы $\overline{c}_1 = (2;1;-1), \overline{c}_2 = (1;-1;1), \overline{c}_3 = (0;1;1)$ линейно независимы, так как определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ и попарно ортогональны, так как $\overline{c}_1 \cdot \overline{c}_2 = 2-1-1=0, \overline{c}_1 \cdot \overline{c}_3 = 0+1-1=0, \overline{c}_2 \cdot \overline{c}_3 = -1+1=0$. Нормируем векторы:

$|\overline{c}_1| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \Rightarrow \overline{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$;

$|\overline{c}_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \overline{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

$|\overline{c}_3| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \overline{e}_3 = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ образуют ортонормированный базис, и квадратичная форма в каноническом виде задается матрицей $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Пример 18.5. Дана квадратичная форма $L(x_1,x_2) = 13x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2$. Докажите, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной).

__Решение__. Квадратичная форма $L(x_1,...,x_n)$ положительно (отрицательно) определена, если $L(x_1,...,x_n) > 0$ ($L(x_1,...,x_n) < 0$) при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля.

Для того, чтобы квадратичная форма $L(x_1,...,x_n)$ положительно (отрицательно) определена, если все собственные числа λ_i матрицы A квадратичной формы положительны (отрицательны). Другое условие знакоопределенности квадратичной формы дает критерий Сильвестра: Квадратичная форма положительно определена, если все главные миноры матрицы этой формы были положительны, т. е. $\Delta_1 > 0, ...\Delta_n > 0$. Квадратичная форма отрицательно определенна, если знаки главных миноров чередуются, причем $\Delta_1 < 0$.

Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1 способ. Найдем собственные числа этой квадратичной формы. Решим характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$:

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (13-\lambda)(5-\lambda)-9=0 \Rightarrow \lambda^2-18\lambda+56=0 \Rightarrow \lambda_1=4,\ \lambda_2=14.$$

Так как корни характеристического уравнения положительны, то квадратичная форма положительно определена.

2 способ. Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена, если все ее главные миноры положительны. Имеем $\Delta_1=13>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=65-9=56>0$. Значит, квадратичная форма положительно определена.

Пример 18.6. Дана квадратичная форма $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+3x_3^2-$ $-6x_1x_2+4x_1x_3$. Докажите, что она является знакоопределенной.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Имеем $\Delta_1=4>0, \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=16-9=7>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -4 & 4{,}5 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 4{,}5 \end{vmatrix}=2(-13{,}5+16)=5>0$. Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена.

Упражнения.

242. Запишите в матричном виде квадратичную форму

а) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+9x_3^2-6x_1x_2+8x_1x_3-12x_2x_3$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+16x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $L(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+4x_2^2+7x_3^2+5x_1x_2+9x_1x_3-18x_2x_3$.

243. Приведите к каноническому виду (главным осям) квадратичную форму. Найдите ортонормированный базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, если а) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

в) $L(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$.

244. Докажите, что квадратичная форма является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной), если

а) $L(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;

б) $L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

в) $L(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$;

г) $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+3x_3^2-10x_1x_2+4x_1x_3$;

д) $L(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-4x_2^2-6x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$.

§ 19. Кривые второго порядка.

Для решения задач необходимо изучить материал § 5 главы 3 теоретического пособия.

Пример 19.1. Докажите, что уравнение $x^2+y^2-6x+8y=11$ задает окружность, найдите ее центр и радиус.

Решение. Уравнение окружности с центром в точке $A(x_0;y_0)$ радиуса R имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Выделим в уравнении полные квадраты относительно переменных x и y: $x^2-6x+9+y^2+8y+16=11+9+16 \Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=36$. Центр окружности находится в точке $A(3; -4)$, а ее радиус $R = 6$.

Пример 19.2. Запишите уравнение окружности, проходящей через точку $B(5; -1)$, если центр ее совпадает с точкой $A(-3; 2)$.

Решение. Уравнение окружности с центром в точке $A(x_0;y_0)$ радиуса R имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Найдем радиус окружности $R=|AB|=\sqrt{(5+3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{73}$ и запишем уравнение окружности $(x+3)^2+(y-2)^2=73$.

Пример 19.3. Запишите уравнение окружности, проходящей через три точки $A(4; 8)$, $B(-3; 7)$ и $C(5; 1)$.

Решение. Уравнение окружности с центром в точке $O(x_0;y_0)$ радиуса R имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Расстояния от точек A, B и C до точки O одинаковы и равны радиусу окружности. Запишем уравнения окружности для точек A, B и C:

$$\begin{cases} (4-x_0)^2+(8-y_0)^2 &= R^2, \\ (-3-x_0)^2+(7-y_0)^2 &= R^2, \Rightarrow \\ (5-x_0)^2+(1-y_0)^2 &= R^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3-x_0)^2+(7-y_0)^2 &= R^2, \\ (4-x_0)^2-(-3-x_0)^2+(8-y_0)^2-(7-y_0)^2 &= 0, \Rightarrow \\ (5-x_0)^2-(-3-x_0)^2+(1-y_0)^2-(7-y_0)^2 &= 0, \end{cases}$$

(первое уравнение вычли из второго и третьего)

$$\begin{cases} (-3-x_0)^2+(7-y_0)^2 &= R^2, \\ 16-8x_0+x_0^2-9-6x_0-x_0^2+64-16y_0+y_0^2-49+14y_0-y_0^2 &= 0, \Rightarrow \\ 25-10x_0+x_0^2-9-6x_0-x_0^2+1-2y_0+y_0^2-49+14y_0-y_0^2 &= 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-3-x_0)^2+(7-y_0)^2 &= R^2, \\ 22-14x_0-2y_0 &= 0, \\ -32-16x_0+12y_0 &= 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 &= 11-7x_0, \\ -16x_0+132-84x_0 &= 32, \\ (-3-x_0)^2+(7-y_0)^2 &= R^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$R=5,\ x_0=1,\ y_0=4.$

(выразили y_0 из второго уравнения, подставили в третье и решили систему)

Запишем уравнение окружности $(x-1)^2+(y-4)^2=25$.

Пример 19.4. Запишите уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если его оси равны 8 и 6. Найдите его эксцентриситет.

Решение. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a – большая полуось эллипса, а b – его меньшая полуось, расстояние между фокусами равно $2c$, причем $b^2=a^2-c^2$. В нашем примере $a=4$, $b=3$, следовательно, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}=0,25\sqrt{7}$.

Пример 19.5. Дан эллипс $36x^2+121y^2=4356$. Найдите его полуоси и фокусы.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду, для этого разделим обе части уравнения на $36\cdot121=4356$. Получим $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{36}=1$. Полуоси эллипса $a=\sqrt{121}=11;\ b=\sqrt{36}=6$.

Фокусное расстояние $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{11^2-6^2}=\sqrt{121-36}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1=(5\sqrt{3};\,0),\ F_2=(-5\sqrt{3};\,0)$.

Пример 19.6. Запишите уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если ее действительная и мнимая оси равны 12 и 4 соответственно. Найдите ее асимптоты и эксцентриситет.

Решение. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a – действительная полуось гиперболы, а b – ее мнимая полуось, расстояние между фокусами равно $2c$, причем $b^2=c^2-a^2$. В нашем примере $a=6$, $b=2$ и $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$.

Уравнения асимптот гиперболы $y=\pm\frac{b}{a}x$, значит, $y=\pm\frac{x}{3}$. Эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{10}}{6}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Пример 19.7. Запишите уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно $\sqrt{180}$ и уравнения асимптот $y=\pm\frac{x}{2}$.

Решение. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где a – действительная полуось гиперболы, b – ее мнимая полуось, расстояние между фокусами равно $2c$, причем $b^2=c^2-a^2$ и уравнения асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x$. В нашем примере $a = 2b$, $2c=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$, $c^2=a^2+b^2=5b^2 \Rightarrow 5b^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow 5b^2=45$ и $b = 3$, $a = 6$. Запишем уравнение гиперболы $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$.

Пример 19.8. Определите величину параметра и расположение относительно координатных осей параболы $y^2=-10x$.

Решение. Уравнение параболы $y^2=2px$, где p – расстояние между фокусом и директрисой. Осью параболы в этом случае служит ось OX. В нашем примере $p = –5$, ветви параболы симметричны относительно оси OX и парабола расположена в левой полуплоскости.

Упражнения.

245. Напишите уравнение окружности, если
   а) проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $A(6; –8)$;
   б) точки $A(3; 2)$ и $B(–1; 6)$ являются концами одного диаметра;
   в) окружность проходит через три точки $A(–1; 5)$, $B(–2; –2)$ и $C(5; 5)$.
246. Какие из уравнений определяют окружность? Найдите центр и радиус каждой из них:
   а) $x^2+y^2+6x-4y-3=0$; б) $x^2+y^2-2x+4y-11=0$;
   в) $x^2+y^2-2x+4y+11=0$; г) $x^2+y^2+x=0$.
247. Вычислите расстояние от центра окружности $x^2+y^2=2y$ до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей $x^2+y^2-3x+6y=32$ и $x^2+y^2+5x-10y=56$.
248. Определите длину общей хорды двух окружностей $x^2+y^2-10x-10y+6,25=0$ и $x^2+y^2+6x+2y-33,75=0$.

249. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если а) его полуоси равны 5 и 2; б) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 8.

250. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите его полуоси и фокусы.

251. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если а) ее действительная и мнимая оси равны 10 и 8 соответственно; б) уравнения асимптот $y = \pm 4x/3$, а расстояние между фокусами 20.

252. Определите величину параметра p и расположение относительно координатных осей парабол а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = -4x$; в) $x^2 = 8y$.

253. Составьте уравнение параболы, если
   а) ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $A(9;\ 6)$;
   б) ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $A(-1;\ 3)$;
   в) ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $A(2;\ 2)$.

254. Составьте уравнение параболы, если ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и фокус находится в точке $F(3;\ 0)$.

255. Составьте уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7;\ 2)$ и директриса $x - 5 = 0$.

256. Проверьте, что уравнение определяет параболу, найдите ее вершину и параметр p, если а) $y^2 = 4x - 3$; б) $y^2 = 4 - 6x$; в) $x^2 = 6y + 2$; г) $y = \dfrac{1}{4}x^2 + x + 2$; д) $y = 4x^2 - 8x + 7$; е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

§20. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

Для решения задач необходимо изучить материал § 6 главы 3 теоретического пособия.

Пример 20.1. Приведите к каноническому виду уравнение кривой $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$.

Решение. Кривая второго порядка в общем виде задается уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{01}x + a_{02}y + c = 0$.

Уравнение можно привести к каноническому виду, перейдя к новой системе координат. Этот процесс разобьем на два этапа:

1 этап. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Первые три слагаемых в уравнении кривой образуют квадратичную форму $L(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, матрица которой $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Главные оси квадратичной формы совпадают с ортонормированным базисом, состоящим из собственных векторов, канонические коэффициенты – с собственными числами матрицы квадратичной формы. Если в качестве главных осей взять собственные векторы квадратичной формы, то кривая примет вид $\tilde{a}_{11}x^2 + \tilde{a}_{22}y^2 + \tilde{a}_{01}x + \tilde{a}_{02}y + c = 0$.

Собственные векторы выберем так, чтобы они образовывали правую пару и длина каждого вектора была равна 1. Используя формулу перехода к новому базису, выразим «новые» координаты через «старые».

<u>2 этап</u>. Отыскание нового начала координат, то есть параллельный перенос системы координат.

Рассмотрим квадратичную форму $L(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$.

Запишем ее матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ и решим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Если $\lambda = 1$, то $(A - E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$ и собственный вектор $\bar{e}_1 = (2; 1)$. Тогда соответствующий единичный вектор $\bar{i}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$.

Если $\lambda = 6$, то $(A - 6E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$ и собственный вектор $\bar{e}_2 = (-1; 2)$. Тогда соответствующий единичный вектор $\bar{j}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$.

Запишем матрицу перехода от базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$ к базису $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$: $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Выразим «старые» координаты через «новые»:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{2x_1 - y_1}{\sqrt{5}}, \\ y = \dfrac{x_1 + 2y_1}{\sqrt{5}} \end{matrix} \text{ и } \begin{cases} x_1 = \dfrac{2x + y}{\sqrt{5}}, \\ y_1 = \dfrac{-x + 2y}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Подставим в уравнение кривой выражение x и y через x_1 и y_1:

$$2\left(\frac{2x_1 - y_1}{\sqrt{5}} \right)^2 - 4\frac{2x_1 - y_1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x_1 + 2y_1}{\sqrt{5}} + 5\left(\frac{x_1 + 2y_1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{8(2x_1 - y_1)}{\sqrt{5}} - \frac{2(x_1 + 2y_1)}{\sqrt{5}} = -9.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение, не содержащие произведение переменных и коэффициенты которого при квадратах переменных равны собственным числам квадратичной формы

$$\frac{2(4x_1^2-4x_1y_1+y_1^2)}{5}-\frac{4(2x_1^2+3x_1y_1-2y_1^2)}{5}+\frac{5(x_1^2+4x_1y_1+4y_1^2)}{5}+$$

$$+\frac{16x_1-8y_1-2x_1-4y_1}{\sqrt{5}}+9=0\Rightarrow$$

$$\frac{8x_1^2-8x_1y_1+2y_1^2-8x_1^2-12x_1y_1+8y_1^2+5x_1^2+20x_1y_1+20y_1^2}{5}+\frac{14x_1-12y_1}{\sqrt{5}}+9=0$$

$$\frac{5x_1^2+30y_1^2}{5}+\frac{14x_1-12y_1}{\sqrt{5}}+9=0\Rightarrow \quad x_1^2+6y_1^2+\frac{14x_1-12y_1}{\sqrt{5}}+9=0.$$

Выделим полные квадраты для переменных x_1 и y_1:

$$\left(x_1+\frac{14x_1}{\sqrt{5}}+\frac{49}{5}\right)+6\left(y_1-\frac{2y_1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}\right)-\frac{49}{5}-\frac{6}{5}+9=0$$

$$\left(x_1+\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2+6\left(y_1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-2=0.$$

Введем новые переменные, то есть перейдем к новой системе координат, выполнив параллельный перенос осей координат $\begin{cases} x_2 &= & x_1+\dfrac{7}{\sqrt{5}}, \\ y_2 &= & y_1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$.

Получили каноническое уравнение эллипса $x_2^2+6y_2^2=2$ или $\dfrac{x_2^2}{2}+\dfrac{x_2^2}{1/3}=1$, полуоси которого равны $a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

Формула перехода к новым координатам примет вид:

$$\begin{cases} x_2 &= & \dfrac{2x+y+7}{\sqrt{5}}, \\ y_2 &= & \dfrac{-x+2y-1}{\sqrt{5}}. \end{cases}.$$

Отметим, что тип кривой второго порядка определяется типом квадратичной формы. Так как $\lambda_1\cdot\lambda_2>0$, то кривая – эллипс.

Упражнения.

257. Приведите кривые второго порядка к каноническому виду
   а) $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$;
   б) $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$;
   в) $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$;
   г) $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$;

д) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

е) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$.

Список литературы

1. Гриншпон И. Э. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Конспект лекций. / И. Э. Гриншпон; – Томск: ТУСУР, 2019. – 128 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/8974 .

2. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия (для экономических специальностей) Учебное пособие. / И. Э. Гриншпон, Л. А. Гутова, Л. И. Магазинников [и др.]; Федеральное агентство по образованию, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск: ТУСУР, 2007. – 247 с.

3. Гриншпон И. Э. Линейная алгебра Учебное пособие / И. Э. Гриншпон; – Томск: ТУСУР, 2012. – 101 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/2278 .

4. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов. Учебное пособие. / А. М. Ахтямов; – Москва: Физматлит, 2004. – 464 с.

5. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; Москва: Наука. – 1980. – 176 с.

6. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии Учебное пособие / Д. В. Клетеник под ред. Н. В. Ефимова; – Санкт-Петербург: Лань, 2019. – 224 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/114702.

7. Магазинников Л. И. Высшая математика I. Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии Учебное пособие / Магазинников Л. И., Магазинникова А. Л. – Томск: ТУСУР, 2007. – 162 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/37.

8. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре Учебное пособие: / Х.Д. Икрамов; под ред. В.В. Воеводина: – Санкт-Петербург: Лань, 2006. – 320 с. [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/165.

Введение

Целью раздела «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» явля-ется приобретение студентами необходимых математических знаний по этому разделу высшей математики, освоение основных понятий и их взаимосвязей. Изучение этого курса даст возможность студентам овладеть мощным аппаратом, помогающим анализировать, моделировать и решать различные прикладные инженерные задачи и стандартные задачи профессиональной деятельности, развивать способность к самоорганизации и самообразованию.

В задачи этого раздела курса математики входят: развитие алгоритмического мышления студентов, овладение методами исследования и решения математических задач, выработка у студентов умения самостоятельно расширять и углублять свои математические знания, проводить анализ прикладных задач.

При изучении курса «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» студент должен понять основные подходы к формированию различных моделей, использующих понятия и результаты математического аппарата, знать основные его алгоритмы и уметь применять их при решении экономических, технических задач и в других дисциплинах, изучаемых в университете. Основные алгоритмы, которыми должен овладеть студент при изучении раздела «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» являются действия с матрицами, алгоритм Гаусса решения систем линейных уравнений, действия с векторами, построение прямых на плоскости и в пространстве, плоскостей и гиперплоскостей в многомерном пространстве, преобразования, проводимые с помощью линейных операторов.

При изучении этого курса необходимо повышать уровень фундаментальной математической подготовки студентов при одновременном усилении прикладной направленности.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать основные понятия и методы линейной алгебры и геометрии, использующиеся при изучении общетеоретических и специальных дисциплин;

уметь применять математические методы для решения практических задач и пользоваться при необходимости математической литературой;

владеть методами решения задач линейной и векторной алгебры и аналитической геометрии, методами решений стандартных задач профессиональной деятельности, способностью к самообразованию.

Теоретический материал изложен в пособии И. Э. Гриншпон Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Конспект лекций. – Томск: ТУСУР, 2019. – Режим доступа: https://edu.tusur.ru/publications/8974.