1. Найдите $A+B$ и $A-B$, если

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}.$$

2. Найдите $A+B$, $-A$, $4B$, $3A+2B$, $2A-B$, $2A-3B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ -4 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Найдите произведения AB, BA, $B{\cdot}A^T$, $A^T{\cdot}B$, $B^T{\cdot}A$, $A{\cdot}B^T$, $A^T{\cdot}B^T$ и $B^T{\cdot}A^T$, если а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Найдите $A+B$, $2B-A$, $A{\cdot}B^T$, $B{\cdot}A^T$, $A^T{\cdot}B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

6. Пусть $A=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Найдите произведения AB, BA, BA^T и A^TB.

7. Найдите матрицы $AC+3BC$, $AC+3CB$, $(AB)C$, $A(BC)$, $(A+3B)C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найдите произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Найдите произведения AB, BA, $A^T{\cdot}B^T$ и $B^T{\cdot}A^T$, если

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

10. Найдите матрицу $AB+C$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 20 & -19 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите матрицу $A(B+C)$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

12. Найдите произведения AB и BA, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

13. Найдите произведения AB и BA, если

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Найдите произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -10 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$. Найдите $A\cdot B\cdot A^T$.

16. Пусть матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$. Найдите $A\cdot A^T$, $A^T\cdot A$ и A^2.

17. Найдите $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$, если а) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5 & -3\\ -1 & 3 & 7 & 2\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & -7\end{pmatrix}$.

18. Вычислите A^2, A^3, A^4, $E-2A+A^2$, если матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

19. Найдите матрицу $B=(E+2A+3A^2)(E-A)$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

20. При каком условии на матрицы будут верны равенства

а) $(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2$; б) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$?

21. Дано $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & p & q\\ 0 & 1 & s\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Определите, когда

$AB = BA$.

22. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & m\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. При каких k и m

$AB = BA$?

23. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей A, если

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 7 & -2\end{pmatrix}$.

е) Найдите квадратные матрицы X, перестановочные с любой квадратной матрицей A того же порядка.

24. Какие из следующих произведений входят в развернутое выражение определителя, и с каким знаком а) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{41}a_{55}$;

б) $a_{16}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}a_{64}$; в) $a_{14}a_{22}a_{31}a_{46}a_{53}a_{67}a_{75}$?

Вычислите определители

25. а) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & -4\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}7 & -9\\ 11 & -13\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}-4 & 17\\ 21 & -33\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}18 & -3\\ 25 & -4\end{vmatrix}$;

26. а) $\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ x^2 & x+1\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ x^3 & x^2+x+1\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}(x-3)^2 & 1\\ (x+3)^2 & 1\end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix}x-5 & x-3\\ x & x+2\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}x+y & x-y\\ x-y & x+y\end{vmatrix}$;

27. а) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\operatorname{tg}\alpha & \cos^{-2}\alpha\\ 1 & \operatorname{tg}\alpha\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \sin y & \cos y\end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix}\cos^2 x & 1\\ \cos 2x & 2\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}\cos^2\alpha/(1+\sin^2\alpha) & 2\sin\alpha/(1+\sin^2\alpha)\\ -2\sin\alpha/(1+\sin^2\alpha) & \cos^2\alpha/(1+\sin^2\alpha)\end{vmatrix}$;

28. а) $\begin{vmatrix}ab & ac\\ bd & cd\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}a+b & -b\\ b & a-b\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}a+b & b\\ 2a+b & a+b\end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix}8+x^3 & (x^2+3x+9)^{-1}\\ x^3-27 & (x^2-2x+4)^{-1}\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}\dfrac{1}{x^{2/3}-3} & x^{2/3}\\ 1 & x^{4/3}-9\end{vmatrix}$;

29. а) $\begin{vmatrix}(1-t^2)/(1+t^2) & 2t/(1+t^2)\\ -2t/(1+t^2) & (1-t^2)/(1+t^2)\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}\dfrac{1}{x^{2/7}+3} & x^{2/7}-3\\ x^{2/7} & x^{6/7}+27\end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix}\dfrac{5}{(2-x)^2}+\dfrac{3}{x^2-4} & \dfrac{6}{x+2}\\ x & (x-2)^2\end{vmatrix}$;

30. а) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3^{\log_3 25} & 1 \\ \log_6\left(\log_5 \sqrt[6]{5}\right) & (1/4)^{\log_2 5} \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 234 & -137 \\ -235 & 136 \end{vmatrix}$.

31. Запишите разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ a & b & c & d \\ -4 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ по второй строке.

Вычислите определители

32. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -5 & -3 & 11 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & -7 \end{vmatrix}$;

33. а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -21 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & 17 & 4 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ -7 & -11 & 5 \\ 6 & 4 & -11 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -15 & 13 \end{vmatrix}$.

Решите уравнение или неравенство

34. а) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x+7 & 4 \\ 2x-5 & x-2 \end{vmatrix} = 16$; в) $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ x+2 & x+4 \end{vmatrix} < 1$;

г) $\begin{vmatrix} 2x+3 & x-3 \\ x+1 & x-4 \end{vmatrix} < 9$; д) $\begin{vmatrix} x-1 & x+4 \\ 2x+1 & x+2 \end{vmatrix} < 1$; е) $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+1 \\ x+3 & x+2 \end{vmatrix} \geq -3x$;

35. а) $\begin{vmatrix} \dfrac{x+3}{x-3} & 1 \\ 1 & \dfrac{x-1}{x+4} \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} \dfrac{2x-1}{x-3} & 1 \\ 1 & \dfrac{x+3}{x+1} \end{vmatrix} \leq 0$; в) $\begin{vmatrix} \dfrac{2x+1}{x-3} & 1 \\ 1 & \dfrac{x+3}{x-1} \end{vmatrix} \leq 0$;

36. а) $\begin{vmatrix} \sin x + \cos x & 1 \\ 1 & \sin x - \cos x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} \sin 2x + \cos x & 3\sin x \cos x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} \log_2 x & 3 \\ -1 & \log_2(16x) \end{vmatrix} > 0$; г) $\begin{vmatrix} \log_{1/2} x & 4 \\ 2 & \log_{1/2}(4x) \end{vmatrix} < 0$;

37. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -2 & 2x+1 & x+1 \\ 3 & 2 & x-6 \end{vmatrix} = 4$.

Вычислите определители

38. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \\ -5 & 8 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 12 & -21 \end{vmatrix}$;

39. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 15 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

40. (*) Упростите определитель $\begin{vmatrix} am+bp & an+bq \\ cm+dp & cn+dq \end{vmatrix}$.

41. (*) Дано $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{65} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix} = a$. Чему равен

определитель $\begin{vmatrix} a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \end{vmatrix}$?

42. (*) Не вычисляя определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ докажите, что он делится на 17.

43. (*) Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами.

44. (*) Известно, что если две строки определителя пропорциональны, то определитель равен нулю. Справедливо ли обратное утверждение: если определитель равен нулю, то две строки его пропорциональны?

45. (*) а) Как изменится определитель порядка n, если а) у всех его элементов изменить знак на противоположный; б) его строки записать в обратном порядке; в) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец; г) из каждой строки, кроме последней, вычесть следующую строку, а из последней вычесть прежнюю первую строку.

б) Докажите, что все элементы какой-либо строки определителя равны единице, то определитель равен сумме алгебраических дополнений элементов этой строки.

46. (*) Вычислите определитель а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$.

47. (*) Вычислите определители, используя свойства определителя

а) $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_1+2b_2 & a_1+2b_3 & a_1+2b_4 \\ a_2+2b_1 & a_2+2b_2 & a_2+2b_3 & a_2+2b_4 \\ a_3+2b_1 & a_3+2b_2 & a_3+2b_3 & a_3+2b_4 \\ a_4+2b_1 & a_4+2b_2 & a_4+2b_3 & a_4+2b_4 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \dfrac{x+z}{2} & \dfrac{x+y}{2} & \dfrac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

48. (*) Вычислите определитель порядка n (n>3), приведя его к треугольному виду, если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$.

49. (*) Вычислите определитель порядка n (n>3), приведя его к треугольному виду, если $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

50. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Какая из матриц $B = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ или $F = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ будет обратной матрице A?

51. Имеет ли матрица A обратную, если

а) $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&4&1\\3&5&-2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&-4&1\\1&-5&3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\5&2&-1\\1&4&-7\end{pmatrix}$.

52. При каких значениях λ матрица A имеет обратную, если

а) $A=\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\\lambda+1&0&5\\1&0&\lambda-3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0&\lambda-1&0\\\lambda+2&5&2\\8&3&\lambda-4\end{pmatrix}$.

Вычислите матрицы, обратные данным

53. а) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-5&4\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}7&8\\4&5\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}12&7\\4&3\end{pmatrix}$;

54. а) $A=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&7&3\\3&9&4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$;

55. а) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&11\\-2&-1&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&10\\-2&-1&2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&-4&-1\\5&-5&-4\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&-4&-1\\5&-5&-4\end{pmatrix}$;

56. а) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&5&0&1\\-3&-3&-8&7\\1&-2&8&-9\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\2&5&3&-3\\-3&-4&2&4\\1&4&3&0\end{pmatrix}$.

57. Чему равен определитель целочисленной матрицы A, если матрица A^{-1} также целочисленная.

58. Решите матричные уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если

а) $A=\begin{pmatrix}3&-2\\5&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&2\\-5&8\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$.

Решите матричные уравнения

59. а) $\begin{pmatrix}3&-1\\5&-2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&16\\9&10\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3&2\\5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}$;

60. а) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&1&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&1&3\\6&2&8\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-3&-2\\2&-1&1\\-5&5&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-8&5\\6&-2\\-2&6\end{pmatrix}$;

61. а) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}7&-2\\4&1\\-1&6\end{pmatrix}$; б) $X\cdot\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&3&1\\2&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&3\\7&3&-2\end{pmatrix}$;

62. а) $X\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&5&2\end{pmatrix}$; б) $X\begin{pmatrix}1&2&3\\3&-1&5\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&-2\\3&-2&4\end{pmatrix}$.

Решите матричным методом системы линейных уравнений

63. а) $\begin{cases}3x-4y+5z=-3,\\2x-3y+z=0,\\3x-5y-z=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x-3y+2z=1,\\3x+2y-3z=5,\\5x-4y+z=1;\end{cases}$

64. а) $\begin{cases}x+y-z=9,\\x-y+z=-1,\\-x+y+z=-5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+3y+z=4,\\3x+y-2z=9,\\2x-4y-z=1.\end{cases}$

Решите матричные системы уравнений

65. (*) а) $\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\\2X+3Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\end{cases}$ б) $\begin{cases}2X-Y=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\\-4X+2Y=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix};\end{cases}$

66. (*) а) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Докажите, что система уравнений имеет единственное решение и решите ее методом Крамера

67. а) $\begin{cases} x + 2y - z = 5, \\ 2x - y + z = -6, \\ x - y - 3z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 12, \\ x + y + z = 0, \\ 2x - 3y - 4z = 17; \end{cases}$

68. а) $\begin{cases} x + y - z = 9, \\ x - y + z = -1, \\ -x + y + z = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7, \\ 2x + y + z = 4, \\ 4x - y + 2z = 5. \end{cases}$

69. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8, \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

70. Найдите $4\bar{a}_3 - 2\bar{a}_1 - \bar{a}_2$, $3\bar{a}_1 + 5\bar{a}_2 - \bar{a}_3 + 2\bar{a}_4$, если

$\bar{a}_1 = (4; 1; 3; -5)$, $\bar{a}_2 = (1; 2; -3; -2)$,

$\bar{a}_3 = (7; 9; 1; -3)$, $\bar{a}_4 = (2; -3; 5; 1)$.

71. Найдите $\bar{b}$, если $\bar{a}_1 = (5; -8; -1)$, $\bar{a}_2 = (2; -1; 4)$, $\bar{a}_3 = (-3; 2; -5)$ и

$\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 + 3\bar{a}_3 + 4\bar{b} = 0$.

72. Дано $\bar{a}_1 = (3; 1; -7; 4)$, $\bar{a}_2 = (1; 5; 0; 6)$, $\bar{a}_3 = (-1; 1; 3; 0)$. Найдите линейную комбинацию $3\bar{a}_1 - 2\bar{a}_2 + 7\bar{a}_3$.

73. Будут ли линейно зависимыми системы векторов:

а) $\bar{a}_1 = (3; -2; 4)$, $\bar{a}_2 = (-6; 4; -8)$;

б) $\bar{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\bar{a}_2 = (2; 5; 7)$, $\bar{a}_3 = (4; 9; 13)$;

в) $\bar{a}_1 = (2; -1; 6)$, $\bar{a}_2 = (5; -3; 11)$, $\bar{a}_3 = (5; -1; 15)$;

г) $\bar{a}_1 = (2; -3; 1)$, $\bar{a}_2 = (4; -1; 3)$, $\bar{a}_3 = (2; -4; 3)$;

д) $\bar{a}_1 = (1; -4; 3; 2)$, $\bar{a}_2 = (2; -6; 7; 5)$, $\bar{a}_3 = (2; -7; 3; 1)$, $\bar{a}_4 = (3; -9; 7; 1)$;

е) $\bar{a}_1 = (1; 4; 3; 2)$, $\bar{a}_2 = (2; 6; 7; 5)$, $\bar{a}_3 = (2; 7; 3; 1)$, $\bar{a}_4 = (3; 9; 7; 4)$?

74. Представьте вектор $\bar{b} = (6; -17; 8)$ как линейную комбинацию векторов из примера 69(г).

75. При каком k векторы линейно зависимы, если

а) $\bar{a} = (2; 3; 2; -3)$, $\bar{b} = (7; 11; 5; -6)$, $\bar{c} = (4; 2; 14; -8)$, $\bar{d} = (2; 5; 0; k)$;

б) $\bar{a} = (1; 4; 2; -3)$, $\bar{b} = (3; 10; 5; -6)$, $\bar{c} = (4; 9; 6; 0)$, $\bar{d} = (2; 5; 6; k)$?

76. При каком λ векторы $\bar{a} = (1; 2; 2; -1)$, $\bar{b} = (-1; 2; 0; 3)$, $\bar{c} = (1; 3; -2; 2)$, $\bar{d} = (2; -1; -3; \lambda)$ линейно зависимы?

77. Известно, что вектор $\bar{a} = (3; 1; -8)$ выражается через векторы $\bar{b} = (1; 1; 2)$ и $\bar{c} = (4; 3; 1)$. Найдите коэффициенты этого разложения.

78. Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно зависимыми системы векторов а) $\bar{x}$, $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$; б) $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{y} + \bar{z}$, $\bar{x} + \bar{z}$; в) $\bar{x} - \bar{y}$, $\bar{y} - \bar{z}$, $\bar{z} - \bar{x}$?

79. Пусть **L**$=\{(x_1; x_2; x_3) \mid x_3 = 0\}$. Проверьте, что **L** – линейное пространство.

80. Образует ли линейное пространство множество многочленов, степени которых меньше или равны n, с обычными операциями сложения и умножения многочленов на число.

81. Докажите, что множество положительных чисел $\mathbf{R}_+ = \{x \mid x > 0\}$ с операциями сложения $x \oplus y = xy$ и умножения на число $\alpha \circ x = x^\alpha$ образует линейное пространство.

82. Образуют ли линейное пространство множества векторов из $\mathbf{R}_n$, удовлетворяющих условиям: а) $\{(x_1; x_2; \ldots; x_n) | x_1+x_2+\ldots+x_n = 0\}$; б) $\{(x_1; x_2; \ldots; x_n) | x_1+x_2+\ldots+x_n = 1\}$.

83. В каноническом базисе даны четыре вектора $\overline{f}_1 = (3; -2; 1)$, $\overline{f}_2 = (-1; 1; -2)$, $\overline{f}_3 = (2; 1; -3)$ и $\overline{a} = (3; 5; -6)$. Докажите, что векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ образуют базис. Найдите матрицу перехода к новому базису и координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

84. В каноническом базисе даны четыре вектора $\overline{f}_1 = (1; 1; 1)$, $\overline{f}_2 = (1; 1; 2)$, $\overline{f}_3 = (1; 2; 3)$ и $\overline{a} = (6; 9; 14)$. Докажите, что векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ образуют базис. Найдите матрицу перехода к новому базису и координаты вектора $\overline{a}$ в этом базисе.

85. В каноническом базисе даны векторы

$$\overline{a}_1 = \left(0; \frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \overline{a}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \overline{a}_3 = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}; \frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{-2}{\sqrt{30}}\right).$$

Докажите, что они образуют ортонормированный базис. Найдите матрицу перехода и координаты вектора $\overline{x} = (1; -1; 2)$ в этом базисе.

86. Докажите, что третья строка матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией первых двух.

87. Вычислите ранги матриц а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -4 & 7 & 1 \\ 5 & -5 & 10 & -5 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 13 \\ 5 & 0 & 5 & 21 \\ 1 & -14 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

е) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 10 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

88. При каких значениях m и n ранг матрицы A равен 2, если

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & m & -1 & 11 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & n & -11 & 7 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 2 & 4 & 3 & -9 \\ 2 & m & 7 & 9 & 2 & -22 \\ 3 & -15 & 0 & 10 & -1 & n \end{pmatrix}$.

89. Зная расширенную матрицу системы линейных уравнений, запишите соответствующую ей систему уравнений, исследуйте её на совместность и решите, если система совместна

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right).$$

Решите методом Гаусса системы.

90. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 12; \end{cases}$

91. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 12; \end{cases}$

92. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -16, \\ 10x_1 - 2x_2 + 16x_3 - 4x_4 = -20, \\ 8x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -28; \end{cases}$

93. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \\ x_1 - 13x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12; \end{cases}$

94. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 15, \\ 4x_1 - 3x_3 + 5x_4 = 12, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 19; \end{cases}$

95. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 7x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_1 + 8x_2 + 11x_3 + 6x_4 = -7; \end{cases}$

96. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -11, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 16x_3 + 14x_4 = 12; \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 7x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$

98. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 5x_5 = 7; \end{cases}$

99. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4; \end{cases}$

100. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 2, \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 - 8x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$

101. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 14, \\ 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 25, \\ x_1 - 5x_3 + 7x_4 = 10; \end{cases}$

102. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 5x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$

103. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 - 4x_5 = 5; \end{cases}$

104. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -2, \\ 7x_1 + 14x_2 + 9x_3 + x_4 + 8x_5 = 9; \end{cases}$

105. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 4x_5 = -3, \\ 6x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 11x_4 + 2x_5 = -9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 - 5x_5 = -7; \end{cases}$

106. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 13x_3 - 5x_5 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 24x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 9; \end{cases}$

107. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + x_5 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 11x_3 + 18x_4 - x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 12x_3 + 11x_4 + 3x_5 = -4; \end{cases}$

108. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 - 9x_5 = -5, \\ 4x_1 - 11x_2 + 6x_3 + 11x_4 - 13x_5 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 3; \end{cases}$

109. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 13x_5 = 23; \end{cases}$

110. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -1, \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 12x_1 - 15x_2 + 11x_3 + 15x_4 - 5x_5 = 7; \end{cases}$

111. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 5x_5 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7; \end{cases}$

112. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 1, \\ 5x_1 - 18x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 - 11x_5 = 20. \end{cases}$

113. а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 1, \\ 5x_1 - 18x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 - 11x_5 = 20. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3, \\ 5x_1 - 13x_2 + 24x_3 + 7x_4 + 4x_5 = -2. \end{cases}$

114. При каких λ система уравнений совместна.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

Решите систему при $\lambda = 1$;

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 7x_4 = \lambda; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 5x_1 - 11x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 5, \\ 3x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + \lambda x_4 = -7. \end{cases}$

115. а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

116. (*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + (a+3)x_2 + 6x_3 + 6x_4 = a+1, \\ 3x_1 + 6x_2 + (a+8)x_3 + 9x_4 = a+2, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (a+8)x_4 = a+2. \end{cases}$$

117. (*) Найдите квадратную матрицу третьего порядка, если

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений. Запишите ее фундаментальную систему решений.

118. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 18x_3 + 12x_4 = 0; \end{cases}$

119. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$

120. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

121. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

122. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$

123. $\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 14x_5 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}$

124. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 9x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases}$

125. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$

126. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 10x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 13x_3 + x_4 - 12x_5 = 0; \end{cases}$

127. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 - 8x_4 - 7x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 9x_4 - 16x_5 = 0; \end{cases}$

128. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 11x_3 + 12x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$

129. (*) Докажите, что если ранг однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны.

130. Найдите частное от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4,\ g(x) = x - 2$;

б) $f(x) = 3x^4 + 7x^3 + 10x - 24,\ g(x) = x + 3$;

в) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2,\ g(x) = x^2 - x - 2$.

131. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если

а) $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 9,\ g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$;

б) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7,\ g(x) = x^2 - 3x - 1$;

в) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 8,\ g(x) = x^2 - 5x + 1$.

132. Не выполняя операцию деления, найдите остаток от деления многочлена $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 4x - 2$ на многочлен $g(x) = x + 2$.

133. Используя схему Горнера, выполните деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$, если

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 7x + 2,\ a = -4$;

б) $f(x)=x^4-6x^2+7x-11,\ a=2$;

в) $f(x)=x^4+3x^3-9x^2-23x+14,\ a=-1$.

134. Дан многочлен $f(x)=x^5+2x^4+3x^3+7x^2+8x+3$. Покажите, что $a=-1$ является его корнем. Найдите кратность этого корня.

135. Найдите корни многочлена и разложите многочлен на множители: а) $f(x)=x^3-3x^2-16x-12$; б) $f(x)=x^3-x^2-21x+45$;
в) $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$.

136. Найдите целые корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами:
а) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$; б) $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+16x-12$;
в) $f(x)=x^5-x^4-4x^3+5x^2+x-2$.

137. Найдите рациональные корни многочлена. Разложите многочлен на множители с целыми коэффициентами, если
а) $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$; б) $f(x)=3x^4+5x^3+7x^2+15x-6$.

138. Докажите, что многочлен $f(x)=x^3-x^2-2x-3$ не имеет целых корней.

139. Дан многочлена $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$. Найдите кратный корень этого многочлена и укажите его кратность. Разложите многочлен на множители.

140. Разложите на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней, многочлены
а) $f(x)=x^4+x^3-x^2+5x+6$; б) $f(x)=x^4+x^3-5x^2-17x-12$.

141. Оператор $\boldsymbol{A}$ действует в $\mathbf{R}_3$ по закону
$A\bar{x}=(2x_1-3x_2+x_3;-x_1+2x_2;x_2-3x_3)$. Найдите $A\bar{a},\ A\bar{b}$, если
$\bar{a}=(1;4;2),\ \bar{b}=(3;1;6)$.

142. Покажите, что оператор $\boldsymbol{A}$, который действует в $\mathbf{R}_3$ по закону $A\bar{x}=(x_1-2x_2;-x_1;x_2+x_3)$ – линейный. Найдите матрицу оператора $\boldsymbol{A}$. Найдите образ вектора $\bar{a}=(-2;-4;5)$ двумя способами.

143. Покажите, что оператор $\boldsymbol{A}$, который действует в $\mathbf{R}_3$ по закону $A\bar{x}=[\bar{x};\bar{c}]$, где $\bar{c}=(3;-1;-2)$ – линейный. Найдите матрицу оператора $\boldsymbol{A}$ и образ вектора $\bar{a}=(1;-3;2)$.

144. Является ли оператор $\boldsymbol{A}$, который действует в $\mathbf{R}_3$ по закону $A\bar{x}=(x_1+x_2-x_3;-x_1+2x_2+1;x_1-x_2+3x_3)$ линейным? Найдите образ вектора $\bar{a}=(3;-4;1)$.

145. Вектор $\bar{a}=(-1;4;2)$ является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному числу $\lambda=3$. Найдите образ вектора $\bar{a}$.

146. Образ вектора $\bar{a}=(2;4;1)$ при действии оператора $\boldsymbol{A}$ равен $(8;16;4)$. Найдите собственное значение оператора, которому отвечает вектор $\bar{a}$.

147. Вектор $\bar{a}$ отвечает собственному числу $\lambda=-2$ и его образ при действии оператора $\boldsymbol{A}$ равен $(4;-6;-12)$. Найдите вектор $\bar{a}$.

148. Докажите, что $\lambda=2$ является собственным значением линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&5&1\\2&5&-1\end{pmatrix}$. Найдите собственный вектор, отвечающий $\lambda=2$.

149. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}$, если задана его матрица: а) $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&7\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&2&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\2&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}2&3&3\\1&-1&-5\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора, если

150. $A\overline{x}=(x_1+2x_2;\, 2x_1+x_2;\, 2x_1+2x_2-x_3)$;

151. $A\overline{x}=(3x_1+5x_2-7x_3;\, -2x_2+4x_3;\, 3x_2+2x_3)$.

152. $A\overline{x}=(4x_1-5x_2+2x_3;\, 5x_1-7x_2+3x_3;\, 6x_1-9x_2+4x_3)$.

153. $A\overline{x}=(3x_1+4x_2;\, -x_1-x_2;\, 3x_1+4x_2+2x_3)$.

154. $A\overline{x}=(3x_1+x_2;\, 5x_1-x_2;\, 2x_1+4x_2+x_3)$.

155. $A\overline{x}=(4x_1+3x_2-x_3;\, 4x_2;\, 2x_1+3x_2+x_3)$.

156. $A\overline{x}=(4x_1+3x_2-x_3;\, 2x_2;\, 2x_1+3x_2+x_3)$.

157. $A\overline{x}=(x_1+2x_2-x_3;\, 2x_1-x_2+4x_3;\, x_1-8x_2+11x_3)$.

158. $A\overline{x}=(3x_1+2x_2;\, x_1+4x_2;\, x_1+2x_2-2x_3)$.

159. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 60º, длины векторов равны 5 и 8. Определите длины векторов $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$.

160. Даны два единичных вектора $\overline{a}, \overline{b}$, причем $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})=60^\circ$. Постройте вектор $\overline{d}=3\overline{a}+2\overline{b}$ и найдите его длину.

161. Даны три компланарных единичных вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, причем $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})=30^\circ, (\widehat{\overline{b}, \overline{c}})=45^\circ$. Постройте вектор $\overline{d}=2\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$ и найдите его длину.

162. Три силы $\overline{F}, \overline{G}, \overline{T}$ приложены в одной точке и попарно перпендикулярны. Определите величину их равнодействующей, если известно, что $|\overline{F}|=3, |\overline{G}|=12, |\overline{T}|=4$.

163. На плоскости даны точки $A(-4; 3)$, $B(1; 5)$, $C(9; -4)$. В начале координат приложены силы $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$. Постройте равнодействующую силу, найдите ее модуль и проекции на оси координат.

164. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы

а) $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}-\overline{b}|$; б) $|\overline{a}+\overline{b}|>|\overline{a}-\overline{b}|$; в) $|\overline{a}+\overline{b}|<|\overline{a}-\overline{b}|$;

г) $\overline{a}+\overline{b}\perp\overline{a}-\overline{b}$; д) $\overline{a}+\overline{b} \parallel \overline{a}-\overline{b}$; е) $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}|+|\overline{b}|$;

ж) $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}|-|\overline{b}|$?

165. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы вектор $\overline{a}+\overline{b}$ делил пополам угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$?

166. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $\angle BAD=60^\circ$, $AB=BC=CD=2$, точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразите векторы $\overline{AM}, \overline{AN}, \overline{MN}$ через единичные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ (рис. 1).

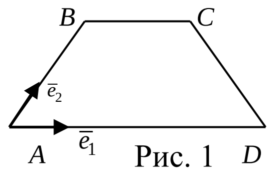

Рис. 1

167. Определите координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(4; -1; 5)$ и $B(6; 2; 1)$.

168. Даны точки $A(3; -1; 7)$ и $B(5; 4; -9)$. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

169. Найдите координаты точки N, если $M(2; -5; 9)$ и $\overline{MN}=(3; -1; 7)$.

170. Дано $\overline{a}=(2; -1; 5)$, $\overline{b}=(-1; 4; 3)$. Найдите векторы $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$, $-3\overline{a}$, $2\overline{a}+3\overline{b}$, $3\overline{a}-2\overline{b}$, $5\overline{a}+4\overline{b}$.

171. Дано $\overline{a}=(3; -5; 8)$, $\overline{b}=(-1; 1; 4)$. Найдите $|\overline{a}+\overline{b}|$, $|\overline{a}-\overline{b}|$.

172. Проверьте, являются ли точки вершинами трапеции $ABCD$, если

а) $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$,

б) $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$, $D(5; -4; 2)$.

173. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин A, B, C. Найдите координаты вершины D, если

а) $A(3; 1; 2)$, $B(7; 5; 11)$, $C(5; 15; -8)$;

б) $A(7; -2; 9)$, $B(1; 5; -4)$, $C(5; 8; -3)$.

174. Даны вершины $A(2; –1; 4)$, $B(3; 2; –6)$, $C(–5; 0; 2)$ треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

175. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $A(5; 9; 3)$, а один из его концов в точке $C(–1; 5; –3)$. Найдите координаты второго конца стержня.

176. Отрезок AB, где $A(–1; 8; 3)$, $B(5; –1; 12)$ разделен на 3 равные части. Найдите координаты точек деления.

177. (*) Векторы $\bar{a}=(2;-3;6)$, $\bar{b}=(-1;2;-2)$ приложены к одной точке. Найдите вектор $\bar{p}$, лежащий на биссектрисе угла между этими векторами, если $|\bar{p}|=3\sqrt{42}$.

178. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 120º, длины векторов $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$. Вычислите

$\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$, $\bar{a}\bar{b}$, $(\bar{a}+\bar{b})^2$, $(3\bar{a}-2\bar{b}, \bar{a}+2\bar{b})$.

179. (*) Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.

Найдите $\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$, если $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=1, |\bar{c}|=4$.

180. При каких k векторы $2\bar{a}+k\bar{b}$ и $k\bar{a}-2\bar{b}$ перпендикулярны, если $|\bar{a}|=2\sqrt{2}$, $|\bar{b}|=1$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 45º.

181. Дано $\bar{a}=(4;-2;-3)$, $\bar{b}=(6;-3;2)$. Вычислите

$\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$, $\bar{a}\bar{b}$, $(\bar{a}+\bar{b})^2$, $(\bar{a}-\bar{b}, 2\bar{a}+\bar{b})$,

$(3\bar{a}-2\bar{b}, \bar{a}+2\bar{b})$, $(4\bar{a}+3\bar{b}, 3\bar{a}-4\bar{b})$.

182. При каких k перпендикулярны векторы, если

а) $\bar{a}=(2k;3;-7)$, $\bar{b}=(3;-5;k)$; б) $\bar{a}=(k;2;-k)$, $\bar{b}=(k;3;-5)$.

183. Найдите направляющие косинусы вектора $\bar{a}=(3;-12;4)$.

184. Найдите направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, если $|\bar{a}|=4$, он образует углы $\beta=45^\circ$, $\gamma=60^\circ$ с осями OY и OZ соответственно и острый угол с осью OX.

185. Существует ли вектор, образующий с осями координат углы

а) $\alpha=135^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$; б) $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$, $\gamma=30^\circ$.

186. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Докажите, что его диагонали AC и BD перпендикулярны.

187. Вычислите проекцию вектора $\bar{a}=(5;2;-1)$ на вектор $\bar{b}=(2;-1;2)$.

188. Вычислите проекцию вектора $\bar{a}=(3;2;-5)$ на вектор $\bar{b}=(-2;6;-3)$.

189. Даны три вектора $\bar{a}=(-4;3;1)$, $\bar{b}=(3;2;-5)$, $\bar{c}=(3;2;-6)$.

Найдите $pr_{\bar{c}}(3\bar{a}-2\bar{b})$.

190. Даны две точки $A(3;-4;-2\sqrt{2})$, $B(2;5;-\sqrt{2})$. Найдите проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, образующую с осями OX и OY углы $\alpha=60^\circ$, $\beta=120^\circ$ и тупой угол с осью OZ.

191. Точки $A(–1; 1; 4)$, $B(–4; 2; 0)$, $C(3; 5; 1)$ – вершины треугольника ABC. Найдите внутренний угол при вершине B и внешний угол при вершине C.

192. Даны точки $A(–4; 2; 7)$, $B(2; 5; –1)$, $C(1; –1; 2)$, $D(3; 2; –4)$.

Найдите $pr_{\overline{CD}}(\overline{AC}+\overline{BD})$.

193. Для трапеции, заданной в задаче 163, найдите угол между векторами $\overline{AM}$ и $\overline{AN}$.

194. Найдите вектор $\bar{c}$, если он перпендикулярен векторам $\bar{a}=(2;-3;1)$ и $\bar{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\bar{c}(\bar{i}+2\bar{j}-7\bar{k})=10$.

195. Точка M под действием силы $\bar{F}=(5;4;7)$ переместилась на расстояние $\bar{S}=(-2;9;5)$. Найдите работу этой силы и угол между направлением силы и направлением перемещения.

196. Найти работу, которую производит сила $\bar{F}=(-1;3;4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(-2; 5; -3)$ в точку $B(-7; 9; -1)$.

197. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 30º, длины векторов $|\bar{a}|=3,\ |\bar{b}|=5$. Вычислите $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|,\ \left|(2\bar{a}+\bar{b})\times(3\bar{a}-2\bar{b})\right|$.

198. Дано $\bar{a}=(-4;2;3),\ \bar{b}=(1;-3;-2)$. Вычислите $\bar{a}\times\bar{b},\ (\bar{b}+\bar{a})\times(2\bar{a}),\ (2\bar{a}+\bar{b})\times\bar{b}$ и $(3\bar{a}-4\bar{b})\times(2\bar{a}+3\bar{b})$.

199. Дано $\bar{a}=(5;-3;4),\ \bar{b}=(3;7;-1)$. Вычислите $\bar{a}\times\bar{b}$.

200. Известно, что $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=26, (\bar{a},\bar{b})=72$. Найдите $|[\bar{a},\bar{b}]|$.

201. Известно, что $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=17, |[\bar{a},\bar{b}]|=45$. Найдите $(\bar{a},\bar{b})$.

202. Даны вершины $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты BD.

203. Даны вершины $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника и длину высоты AH.

204. Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 4 -1)$, $C(-1; 3; 1)$ треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты BD.

205. Векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$ образуют угол 60º, длины векторов $|\bar{m}|=2, |\bar{n}|=\sqrt{3}$. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}=3\bar{m}+\bar{n},\ \bar{q}=2\bar{m}-5\bar{n}$.

206. Векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$ образуют угол 45º, длины векторов $|\bar{m}|=\sqrt{8}, |\bar{n}|=3$. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}=3\bar{m}+\bar{n}, \bar{q}=2\bar{m}-5\bar{n}$.

207. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между которыми равен 30º. Зная, что $|\bar{a}|=6,\ |\bar{b}|=3,\ |\bar{c}|=5$, вычислите $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

208. Дано $\bar{a}=(1;-1;3),\ \bar{b}=(-2;3;-5),\ \bar{c}=(3;1;4)$. Вычислите $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

209. Дано $\bar{a}=(1;5;-1),\ \bar{b}=(3;9;1),\ \bar{c}=(5;29;-8)$. Вычислите $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

210. Докажите, что точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

211. Докажите, что точки $A(2; 5; 7)$, $B(3; 2; 5)$, $C(5; 1; -4)$ и $D(4; 0; 2)$ лежат в одной плоскости.

212. Даны вершины тетраэдра $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(-5; -4; 8)$, $D(6; 3; 7)$. Найдите длину высоты, опущенной на основание ABD из вершины C.

213. Даны вершины тетраэдра $A(-4; 1; 7)$, $B(2; 5; -1)$, $C(3; 2; 4)$, $D(5; 6; 1)$. Найдите длину высоты, опущенной на основание из вершины D.

214. Определите точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с осями координат. Начертите эту прямую.

215. Дана прямая $2x+3y+4=0$ и точка $M_o(4; 1)$. Напишите уравнения прямой, проходящей через точку M_o а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

216. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; 2)$ и $M_2(2; -5)$. Найдите ее угловой коэффициент.

217. Точки $M(2; 1)$, $N(5; 3)$ и $K(3; -4)$ – середины сторон ΔPQT. Напишите уравнения его сторон.

218. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты вершин $A(3; 1)$, $B(7; 5)$, $C(5; –3)$. Напишите уравнения сторон и диагоналей.

219. Точки $M(7; 2)$, $N(–1; –1)$ и $K(3; 8)$ – вершины ΔKMN. Напишите уравнения его высот.

220. Из точки $M_0(4; 6)$ под углом α к оси OX направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Дойдя до оси OX, луч отразился от нее. Напишите уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.

221. Даны две смежные вершины $A(–3; –1)$ и $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3; 0)$ пересечения его диагоналей. Напишите уравнения его сторон.

222. (*) Составьте уравнения сторон треугольника KMN, зная его вершину $M(4; –1)$ и уравнения высоты NH $2x-3y+12=0$ и медианы NP $2x+3y=0$, проведенных из вершины N.

223. Даны две противоположные вершины квадрата $M(–1; 3)$ и $P(6; 2)$. Напишите уравнения его сторон.

224. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y+26=0$ и $5x-12y-65=0$. Найдите площадь квадрата.

225. Найдите проекцию точки $P(–8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;-3)$ и $B(-5;1)$.

226. Найдите точку, симметричную точке $P(8; –9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; –4)$ и $B(–1; –2)$.

227. Точки $K(1; –1)$, $M(–2; 1)$ и $N(3; 5)$ – вершины ΔKMN. Напишите уравнения перпендикуляра, опущенного из вершины K на медиану, проведенную из вершины M.

228. Найдите угол между прямыми а) $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y - 1 = 0$; б) $4x - 3y + 7 = 0$ и $7x + y - 1 = 0$.

229. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; –3; 1)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (1; 2; -4)$.

230. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; 2; –3)$ параллельно векторам $\bar{a} = (1; -2; -1)$ и $\bar{b} = (-3; 1; 5)$.

231. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(7; 2; 3)$, $M_2(5; 6; –4)$ параллельно оси OX.

232. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; –2; 5)$, $M_2(–2; 1; 1)$ и $M_3(4; 3; –1)$.

233. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3; –4; 1)$ параллельно плоскости $2x+5y-4z+21=0$.

234. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(–1; 3; –1)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+5z-2=0$.

235. При каких значениях k и m будут параллельны плоскости

а) $2x+ky+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$;

б) $mx+3y-2z-1=0$ и $6x-15y+kz+7=0$.

236. При каких значениях k будут перпендикулярны плоскости

а) $5x+y-3z+1=0$ и $2x-ky-3z-4=0$;

б) $7x-2y-kz=0$ и $kx+5y-3z-1=0$;

в) $kx-2y-3z+5=0$ и $(k-2)x-3y+kz=0$.

237. Будут ли перпендикулярны плоскости $3x+3y-5z-4=0$ и $3x+7y+6z-1=0$?

238. Вычислите расстояние от точки $P(–1; 1; –2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1; –1; 1)$, $M_2(–2; 1; 3)$, $M_3(4; –5; –2)$.

239. Найдите объем куба, две грани которого лежат в плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$.

240. Докажите, что плоскости $x-2y+z-7=0, 2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ имеют одну общую точку. Найдите эту точку.

241. Найдите угол между плоскостями $5x-2y+6z-13=0$ и $6x+3y-4z-2=0$.

242. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; 0)$ параллельно а) вектору $\bar{a}=(-2; 5; 4)$ б) прямой $\frac{x-3}{7}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-3}$.

243. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; -3; 1)$ и $M_2(3; 5; -1)$.

244. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-5; 1; 4)$ и $M_2(-2; 3; -1)$.

245. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; 1; -2)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-2y+4z-1=0, \\ x+3y+2z+5=0. \end{cases}$

246. а) Составьте каноническое уравнение прямой $\begin{cases} x+3y-2z-6=0, \\ 2x-y+3z+2=0. \end{cases}$ б) Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(4; -3; 5)$ параллельно найденной в пункте а) прямой.

247. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-3; 1; 2)$ перпендикулярно плоскости $3x-7y-2z+17=0$.

248. Найдите точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-7=0$.

249. Найдите точку пересечения прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-5}$ и плоскости $x-2y+z-10=0$.

250. Проверьте, будут ли параллельны прямые $\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+5}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z-26=0, \\ x-y-5z+2=0. \end{cases}$

251. При каких значениях A и D прямая $\begin{cases} x=3+4t, \\ y=1-4t, \\ z=-3+t \end{cases}$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$.

252. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $x-2y+z-6=0$ и $3x+y-2z+4=0$ и точку $M(1; 1; 1)$.

253. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x-y+3z-6=0$ и $x+2y-z+2=0$ параллельно вектору $\bar{a}=(2; -1; -2)$.

254. Найдите угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x+5}{-4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{5}$.

255. (*) Найдите точку Q симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M(5; 4; 6)$ и $N(-2; -17; -8)$.

256. Запишите в матричном виде квадратичную форму

а) $L(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2-3x_2^2+9x_3^2-6x_1x_2+8x_1x_3-12x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+16x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $L(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+4x_2^2+7x_3^2+5x_1x_2+9x_1x_3-18x_2x_3$.

257. Приведите к каноническому виду (главным осям) квадратичную форму. Найдите ортонормированный базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, если

а) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

258. Дана квадратичная форма. Докажите, что она является знакоопределенной (то есть положительной или отрицательной), если

а) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 10x_1x_2 + 4x_1x_3$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

259. Напишите уравнение окружности, если

а) она проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $A(6; -8)$;

б) точки $A(-3; 5)$ и $B(7; -3)$ являются концами одного диаметра;

в) окружность проходит через три точки $A(-1; 2)$, $B(6; -5)$ и $C(6; 3)$.

Какие из уравнений определяют окружность? Найдите центр и радиус каждой из них: а) $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 7 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 12 = 0$; в) $x^2 + y^2 - 3x + 5y + 9 = 0$; г) $x^2 + y^2 + 8x - 2y = 0$.

260. Найдите расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 41$ до прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей $x^2 + y^2 + 5x - 10y = 56$ и $x^2 + y^2 - 3x + 6y = 32$.

261. Определите длину общей хорды двух окружностей $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 6,25 = 0$ и $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 33,75 = 0$.

262. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если

а) его полуоси равны 5 и 2; б) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 8.

263. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите его полуоси и фокусы.

264. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если

а) ее действительная и мнимая оси равны 10 и 8 соответственно;

б) уравнения асимптот $y = \pm 4x/3$, а расстояние между фокусами равно 20.

265. Определите величину параметра p и расположение относительно координатных осей парабол а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = -4x$; в) $x^2 = 8y$.

266. Составьте уравнение параболы, если

а) ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $A(9; 6)$;

б) ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку $A(-1; 3)$;

в) ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $A(2; 2)$.

267. Составьте уравнение параболы, если ее вершина находится в начале координат, она симметрична относительно оси абсцисс и фокус находится в точке $F(3; 0)$.

268. Составьте уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7; 2)$ и директриса $x - 5 = 0$.

269. Проверьте, что уравнение определяет параболу, найдите ее вершину и параметр p, если а) $y^2 = 4x - 12$; б) $y^2 = 7 - 5x$; в) $x^2 = 6y + 2$; г) $y = 2x^2 - 15$.

270. Проверьте, что уравнение определяет параболу, найдите ее вершину и параметр p, если а) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$; б) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

в) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$; г) $x = 2y^2 - 12y + 9$.

271. Приведите кривые второго порядка к каноническому виду

а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

в) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

г) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

д) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

е) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.

272. Рассмотрим матричное уравнение $X^2 + E = O$. а) Проверьте, что матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ удовлетворяет этому уравнению. б) Найдите все решения этого уравнения среди вещественных матриц второго порядка.

273. (*)Как изменится произведение AB матриц A и B, если:

а) переставить i-ую и j-ую строки матрицы A?

б) к i-ой строке матрицы A прибавить j-ую строку, умноженную на число c?

в) переставить i-ый и j-ый столбцы матрицы B?

г) к i-му столбцу матрицы B прибавить j-ый столбец, умноженный на число c?

274. (*)Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A:

а) переставить i-ую и j-ую строки?

б) i-ую строку умножить на число c, не равное нулю?

в) к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на число c, или совершить аналогичное преобразование столбцов?

275. Показать, что для любой матрицы B матрица $A = B \cdot B^{-1}$ является симметрической.