” Теория автоматического управления ”

Лабораторная работа №1

Управляемость и наблюдаемость

Выполнил: Бухарев Святослав Андреевич

Факультет: СУиР

Группа: R3381

Вариант 9

Преподаватели: Перегудин А. А., Пашенко А. В.

Санкт-Петербург

Задание 1. Исследование управляемости

Как говорится Here we go again…

В соответствии с моим вариантом (9) по Таблице 1 возьмём матрицы A и B и точку x_1 из Таблицы 2 для Заданий 1, 2 и 5 (Таблицы см. в приложении):

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполним следующие шаги.

Исследование управляемости системы

- Найдём матрицу управляемости системы, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы в целом:

Так как наши матрицы имеют размерности A - n × n (3×3), B - n × m (3×1), то получим матрицу управляемости размерности n × nm (3×3):

$$U = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$U = \begin{bmatrix} -5 & 17 & -17 \\ -3 & 9 & -3 \\ 5 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

– матрица управляемости системы.

Ранг:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -5 & 17 & -17 \\ -3 & 9 & -3 \\ 5 & -11 & 5 \end{bmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank} U = \mathrm{n} = 3$$

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система полностью управляема.***

- Найдём собственные числа матрицы А, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для управляемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом:

1) $\lambda_1 = -1$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_1 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -1 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 + 2i & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -2 + 2i & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4 + 2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_2 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

3) $\lambda_3 = -1 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6-2i & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -2-2i & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4-2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_3 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы А управляемы, значит система полностью управляема.***

- Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом:

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-3+i}{2} & \frac{-3-i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3-3i}{2} \\ \frac{3+3i}{2} \end{bmatrix}$$

В вещественном виде:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Получаем, что все собственные числа матрицы А различны (-1; -1-2i; -1+2i), а также, все элементы матрицы $P^{-1}B$ не равны нулю, сл-но, ***каждое собственное число управляемо и вся система полностью управляема.***

- Найдём Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$, далее вычислим его собственные числа:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt$$

Грамиан управляемости относительно t_1.

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 5{,}41 & 3{,}66 & -4{,}21 \\ 3{,}66 & 2{,}74 & -2{,}77 \\ -4{,}21 & -2{,}77 & 4{,}81 \end{bmatrix}$$

Собственные числа будут равны:

$$\lambda_1 = 0.164$$

$$\lambda_2 = 1.125$$

$$\lambda_3 = 11.671$$

- все положительные, значит $\det P(t_1) > 0$, а это значит ***матрица Грамиана невырождена.***

- Найдём управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1.

Для этого с помощью Матлаба посчитаем данную формулу:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^{-1} x_1$$

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

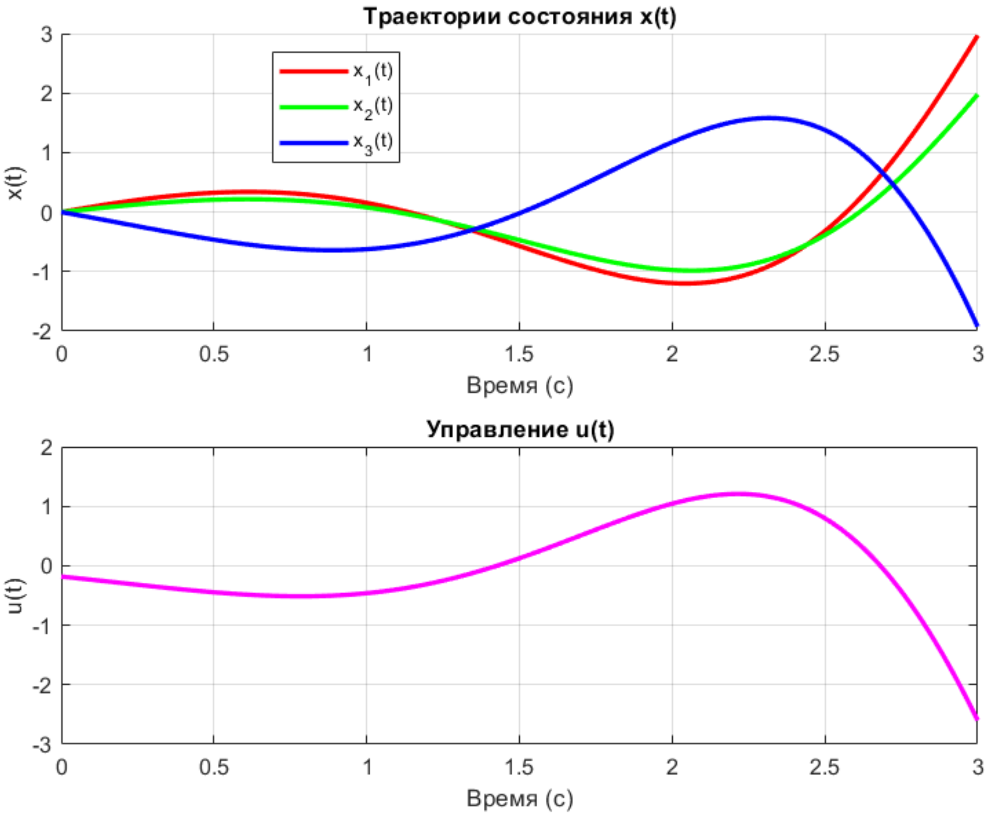

Рисунок 1. Моделирование системы.

Выводы:

Как итог, проделав ряд вычислений и проверок, я убедился, что моя система является управляемой, и не просто управляемой, а полностью управляемой.

Задание 2. Еще одно исследование управляемости

Возьмём матрицу A из таблицы 2 и матрицу B и точки x' и x'' из Таблицы 3:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \; x' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \; x'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполним следующие шаги.

- Проверим обе точки x' и x'' на принадлежность управляемому подпространству системы:

Составим матрицу управляемости системы и найдём её ранг:

$$U = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 \\ -1 & 11 & -17 \\ 1 & -11 & 17 \end{bmatrix}$$

$$rank\ U = 2$$

А теперь расширенную матрицу управляемости с нашим состоянием x':

$$[U \quad x'] = [B \quad AB \quad A^2B \quad x']$$

$$[U \quad x'] = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 & 2 \\ -1 & 11 & -17 & 2 \\ 1 & -11 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

$$rank\ [U \quad x'] = 3$$

Получаем:

$$rank\ U \neq rank\ [U \quad \mathrm{x}']$$

$$\mathrm{x}' \notin Range\ U$$

И точка x' не принадлежит управляемому подпространству системы.

Теперь составим расширенную матрицу управляемости с нашим состоянием x'':

$$[U \quad \mathrm{x}''] = [B \quad AB \quad A^2B \quad \mathrm{x}'']$$

$$[U \quad \mathrm{x}''] = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 & 3 \\ -1 & 11 & -17 & 2 \\ 1 & -11 & 17 & -2 \end{bmatrix}$$

$$rank\ [U \quad \mathrm{x}''] = 2$$

Получаем:

$$rank\ U = rank\ [U \quad \mathrm{x}'']$$

$$\mathrm{x}'' \in Range\ U$$

Точка x'' принадлежит управляемому подпространству системы.

Примем целевой точкой $x_1 = \mathrm{x}''$.

- Выполним все шаги **Задания 1** для рассматриваемой системы и выбранной целевой точки x_1:

Найдём матрицу управляемости системы, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы в целом:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 \\ -1 & 11 & -17 \\ 1 & -11 & 17 \end{bmatrix}$$

$$rank\ U = 2$$

Матрица управляемости размерности n × nm (3×3):

$$rank\ U = 2 \neq n$$

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система не полностью управляема.***

Найдём собственные числа матрицы A, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для управляемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом:

1) $\lambda_1 = -1$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\, X_1 = 2 \neq \mathrm{n}$$

- неуправляемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -1 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6+2i & -4 & 6 & 1 \\ 4 & -2+2i & 4 & -1 \\ -4 & 2 & -4+2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_2 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

3) $\lambda_3 = -1 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6-2i & -4 & 6 & 1 \\ 4 & -2-2i & 4 & -1 \\ -4 & 2 & -4-2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_3 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

Как итог, ***не все собственные числа матрицы А управляемы, а значит система является только частично управляемой.***

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-3+i}{2} & \frac{-3-i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-5i}{2} \\ \frac{1+5i}{2} \end{bmatrix}$$

В вещественном виде:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Получаем, что все собственные числа матрицы А различны (-1; -1-2i; -1+2i), а также, один элемент матрицы $P^{-1}B$ равен нулю, сл-но, ***только два собственных числа управляемы, а одно – неуправляемо, и вся система частично управляема.***

Найдём Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$, далее вычислим его собственные числа:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt$$

Грамиан управляемости относительно t_1.

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \begin{bmatrix} 14,68 & 7,38 & -7,38 \\ 7,38 & 4,3 & -4,3 \\ -7,38 & -4,3 & 4,3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа будут равны:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-\sqrt{295426} + 582}{50}$$

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{295426} + 582}{50}$$

- не все они положительные, значит ***матрица Грамиана вырождена.***

В связи с чем придётся считать псевдообратную матрицу для нахождения управления.

Найдём управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1.

Для этого с помощью Матлаба посчитаем данную формулу (где обратную матрицу заменим на псевдообратную):

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left(P(t_1)\right)^+ x_1$$

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

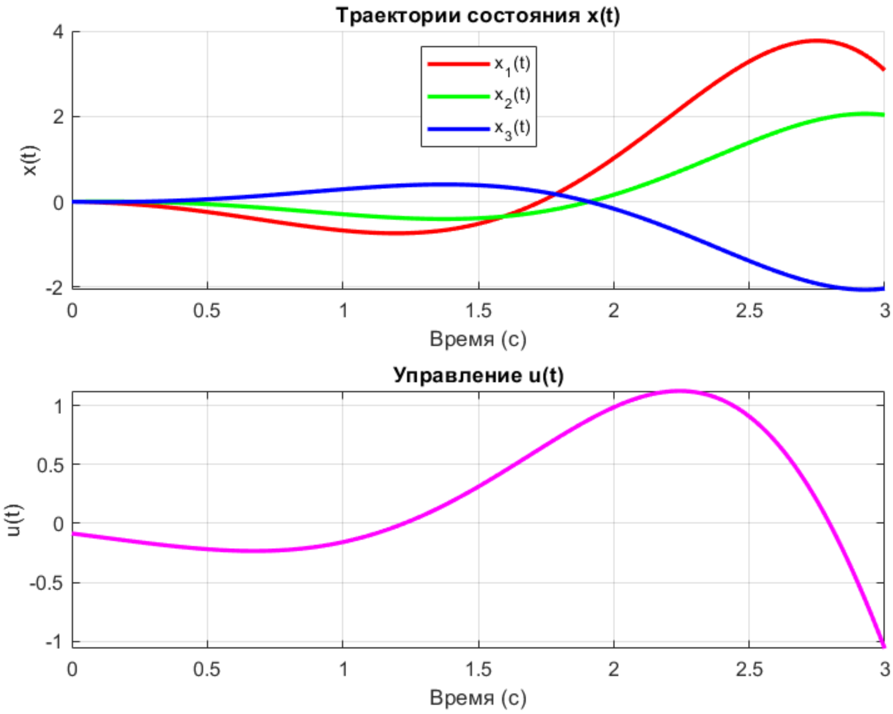

Рисунок 2. Моделирование системы.

Выводы:

Как итог, я выяснил, что система не является полностью управляемой, и поэтому, чтобы найти управление для состояния x_1, которое лежит в подпространстве управления, мы должны использовать псевдообратную матрицу для поиска управления $u(t)$, чем я в итоге и воспользовался.

Задание 3. Исследование наблюдаемости

В соответствии с моим вариантом возьмём матрицы A, C и сигнал $f(t)$ из Таблицы 4 (№14):

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} \quad C = [3 \ -2 \ \ 3] \quad f(t) = -3e^{-4t}cos(2t) + 2e^{-4t}sin(2t)$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

и выполним следующие шаги.

Исследование наблюдаемости системы

- Найдём матрицу наблюдаемости системы, определим ее ранг, сделаем вывод о наблюдаемости системы в целом:

Так как наши матрицы имеют размерности A - n × n (3×3), C - k × n (1×3), то получим матрицу наблюдаемости размерности nk × n (3×3):

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 14 & -18 & -2 \end{bmatrix}$$

– матрица наблюдаемости системы.

Ранг:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 14 & -18 & -2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank} \mathrm{V} = \mathrm{n} = 3$$

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система полностью наблюдаема.***

- Найдём собственные числа матрицы А, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

1) $\lambda_1 = 1$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_1 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -4 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2i & 9 & 1 \\ -5 & 7 + 2i & -3 \\ 3 & -7 & 1 + 2i \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_2 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

3) $\lambda_3 = -4 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-2i & 9 & 1 \\ -5 & 7-2i & -3 \\ 3 & -7 & 1-2i \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_3 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы A наблюдаемы, а значит система является полностью наблюдаемой.***

- Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-3+i}{2} & \frac{-3-i}{2} \\ -1 & \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4-2i & 0 \\ 0 & 0 & -4+2i \end{bmatrix}$$

$$CP = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$$

В вещественном виде:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$CP = [2 \ \ -0{,}5 \ \ -0{,}5]$$

Получаем, что все собственные числа матрицы А различны (1; -4-2i; -4+2i), а также, все элементы матрицы CP не равны нулю, сл-но, ***каждое собственное число наблюдаемо и вся система полностью наблюдаема.***

- Найдём Грамиан наблюдаемости системы относительно времени t_1 = 3, вычислим его собственные числа. Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Грамиан наблюдаемости относительно t_1.

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан наблюдаемости:

$$Q(t_1) = \begin{bmatrix} 806{,}14 & -805{,}23 & 806{,}47 \\ -805{,}23 & 804{,}5 & -805{,}52 \\ 806{,}47 & -805{,}52 & 806{,}81 \end{bmatrix}$$

Собственные числа будут равны:

$$\lambda_1 = 0{,}002$$

$$\lambda_2 = 0{,}147$$

$$\lambda_3 = 2417{,}3$$

- все положительные, значит $\det Q(t_1) > 0$, а это значит ***матрица Грамиана наблюдаемости невырождена.***

- Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0,\ t_1]$ определим начальные условия системы.

$$f(t) = -3e^{-4t}cos(2t) + 2e^{-4t}sin(2t)$$

С помощью Матлаба найдём начальные условия системы, используя формулу:

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t}\, C^T y(t)\, dt$$

Получаем начальные условия:

$$\begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

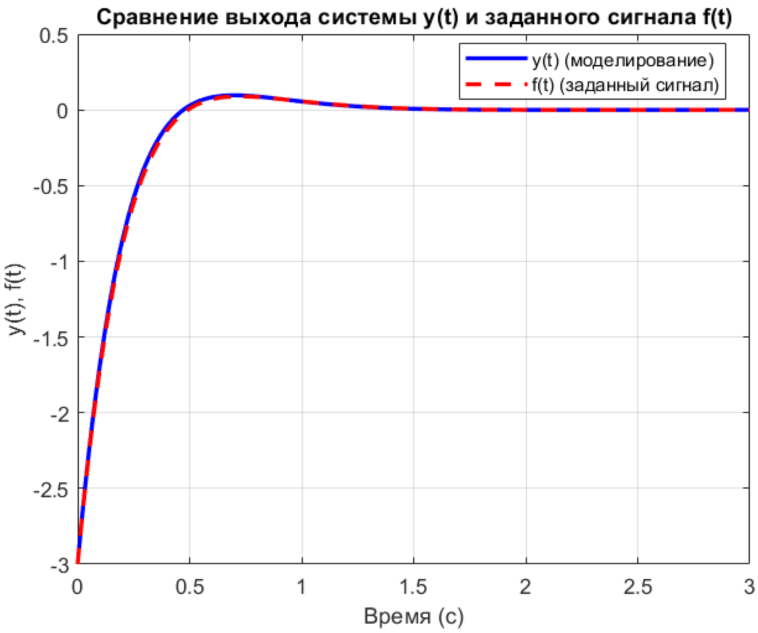

Рисунок 3. Моделирование выхода системы.

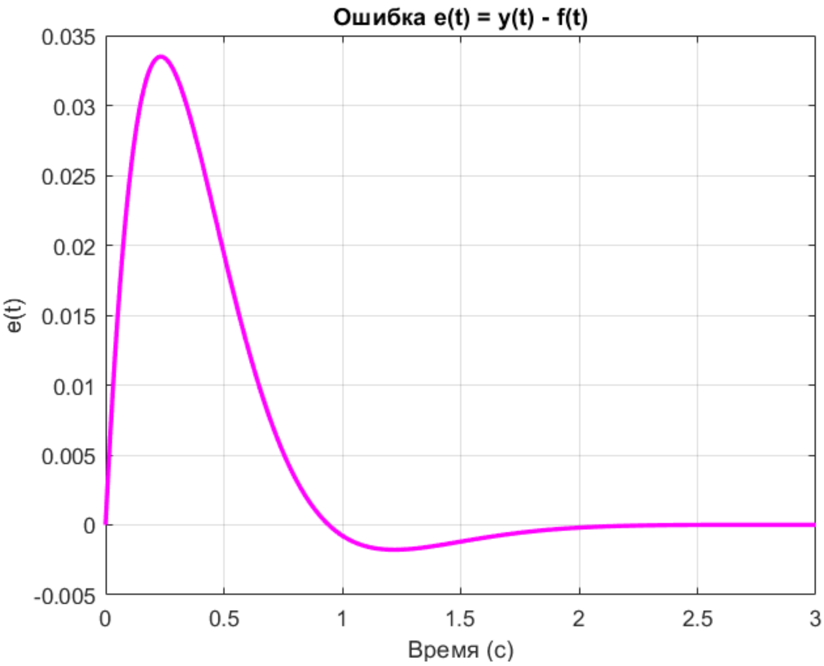

Рисунок 4. Моделирование ошибки

Выводы:

Как итог, проделав ряд вычислений с помощью Матлаба, я выяснил, что система является полностью наблюдаемой, благодаря чему я нашёл единственный вектор, соответствующий начальным условиям этой системы, зная её выход.

Задание 4. Еще одно исследование наблюдаемости

Возьмём матрицу А и сигнал $f(t)$ из Таблицы 4 (№14) и матрицу С из Таблицы 5 (№14):

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad f(t) = -3e^{-4t}cos(2t) + 2e^{-4t}sin(2t)$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

и выполним следующие шаги.

Исследование наблюдаемости системы

- Найдём матрицу наблюдаемости системы, определим ее ранг, сделаем вывод о наблюдаемости системы в целом:

Так как наши матрицы имеют размерности A - n × n (3×3), C - k × n (1×3), то получим матрицу наблюдаемости размерности nk × n (3×3):

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & -6 \\ 36 & -48 & -12 \end{bmatrix}$$

– матрица наблюдаемости системы.

Ранг:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & -6 \\ 36 & -48 & -12 \end{bmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rank} \mathrm{V} = 2 \neq n$$

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система не полностью наблюдаема.***

- Найдём собственные числа матрицы А, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом:

1) $\lambda_1 = 1$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 9 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\, X_1 = 2 \neq \mathrm{n}$$

- ненаблюдаемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -4 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 2i & 9 & 1 \\ -5 & 7 + 2i & -3 \\ 3 & -7 & 1 + 2i \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\, X_2 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

3) $\lambda_3 = -4 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - 2i & 9 & 1 \\ -5 & 7 - 2i & -3 \\ 3 & -7 & 1 - 2i \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\, X_3 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

Как итог, ***одно собственное число матрицы А ненаблюдаемо, остальные два наблюдаемы, система не полностью наблюдаема.***

- Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-3+i}{2} & \frac{-3-i}{2} \\ -1 & \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4-2i & 0 \\ 0 & 0 & -4+2i \end{bmatrix}$$

$$CP = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3+3i}{2} & \frac{-3-3i}{2} \end{bmatrix}$$

В вещественном виде:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$CP = [0 \ \ -1{,}5 \ \ -1{,}5]$$

Получаем, что все собственные числа матрицы А различны (1; -4-2i; -4+2i), а также, один элемент матрицы CP равен нулю, сл-но, ***только два собственных числа наблюдаемы, а одно – ненаблюдаемо, и вся система частично наблюдаема.***

- Найдём Грамиан наблюдаемости системы относительно времени t_1 = 3, вычислим его собственные числа. Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t}\, C^T C e^{At} dt$$

Грамиан наблюдаемости относительно t_1.

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан наблюдаемости:

$$Q(t_1) = \begin{bmatrix} 1{,}01 & 0{,}23 & 1{,}24 \\ 0{,}23 & 0{,}11 & 0{,}34 \\ 1{,}24 & 0{,}34 & 1{,}58 \end{bmatrix}$$

Собственные числа будут равны:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0{,}0723$$

$$\lambda_3 = 2{,}6304$$

- одно собственное число равно 0, значит ***матрица Грамиана наблюдаемости вырождена.***

- Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0,\ t_1]$ определим начальные условия системы.

$$f(t) = -3e^{-4t}cos(2t) + 2e^{-4t}sin(2t)$$

С помощью Матлаба найдём начальные условия системы, используя формулу:

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t}\, C^T y(t)\, dt$$

Получаем начальные условия:

$$\begin{bmatrix} -0{,}89 \\ 0{,}78 \\ -0{,}11 \end{bmatrix}$$

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

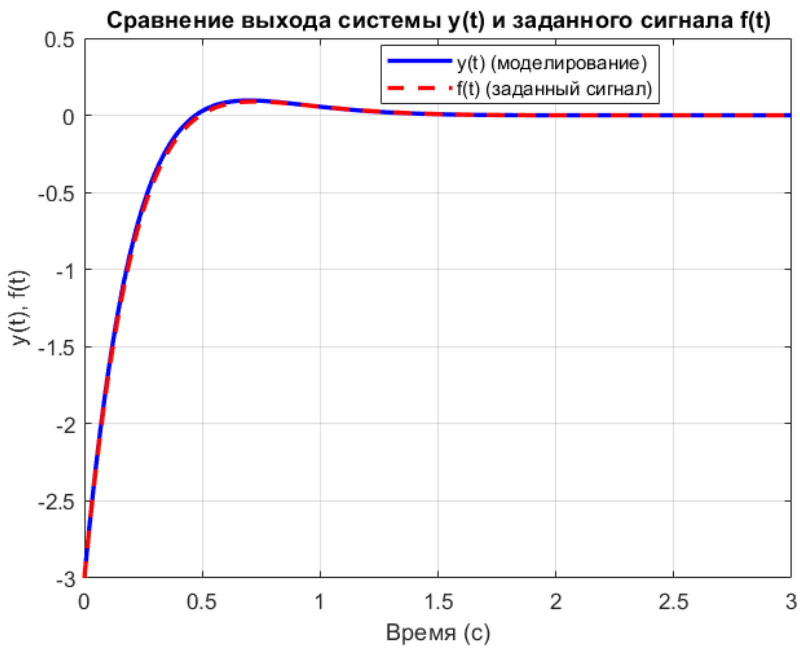

Рисунок 5. Моделирование выхода системы.

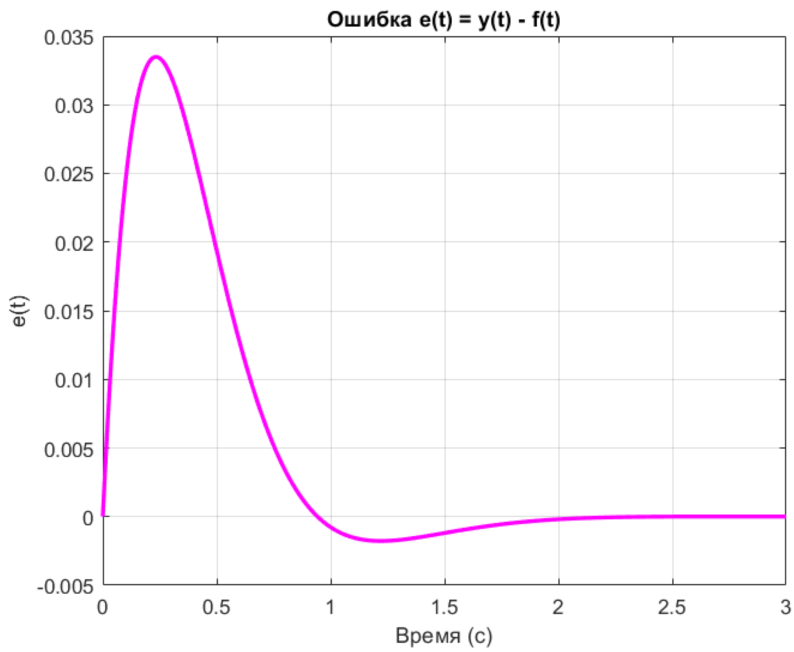

Рисунок 6. Моделирование ошибки

Выводы:

Заменив матрицу С, я получил не полностью наблюдаемую систему, из-за чего нельзя было точно восстановить начальные условия, только приблизительно, за счёт использования псевдообратной матрицы. Так как мы считаем, что $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0, t_1]$, но сама система не полностью наблюдаема, то мы получаем небольшую ошибку $e(t)$ между $y(t)$ и $f(t)$.

- Определить, мог ли выход вида $y(t) = f(t)$ быть порожден начальными условиями, отличными от найденных. Если да, то привести хотя бы три таких вектора начальных условий и выполнить для каждого из них (включая изначально найденный) моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов (одинаковые выходы при разном поведении векторов состояния систем).

С помощью Матлаба найдём другие вектора начальных условий:

$$x0_2 = \begin{bmatrix} -1{,}47 \\ 0{,}2 \\ 0{,}47 \end{bmatrix}$$
$$x0_3 = \begin{bmatrix} -2{,}04 \\ -0{,}38 \\ 1{,}04 \end{bmatrix}$$
$$x0_4 = \begin{bmatrix} -0{,}31 \\ 1{,}36 \\ -0{,}69 \end{bmatrix}$$

И выполним моделирование:

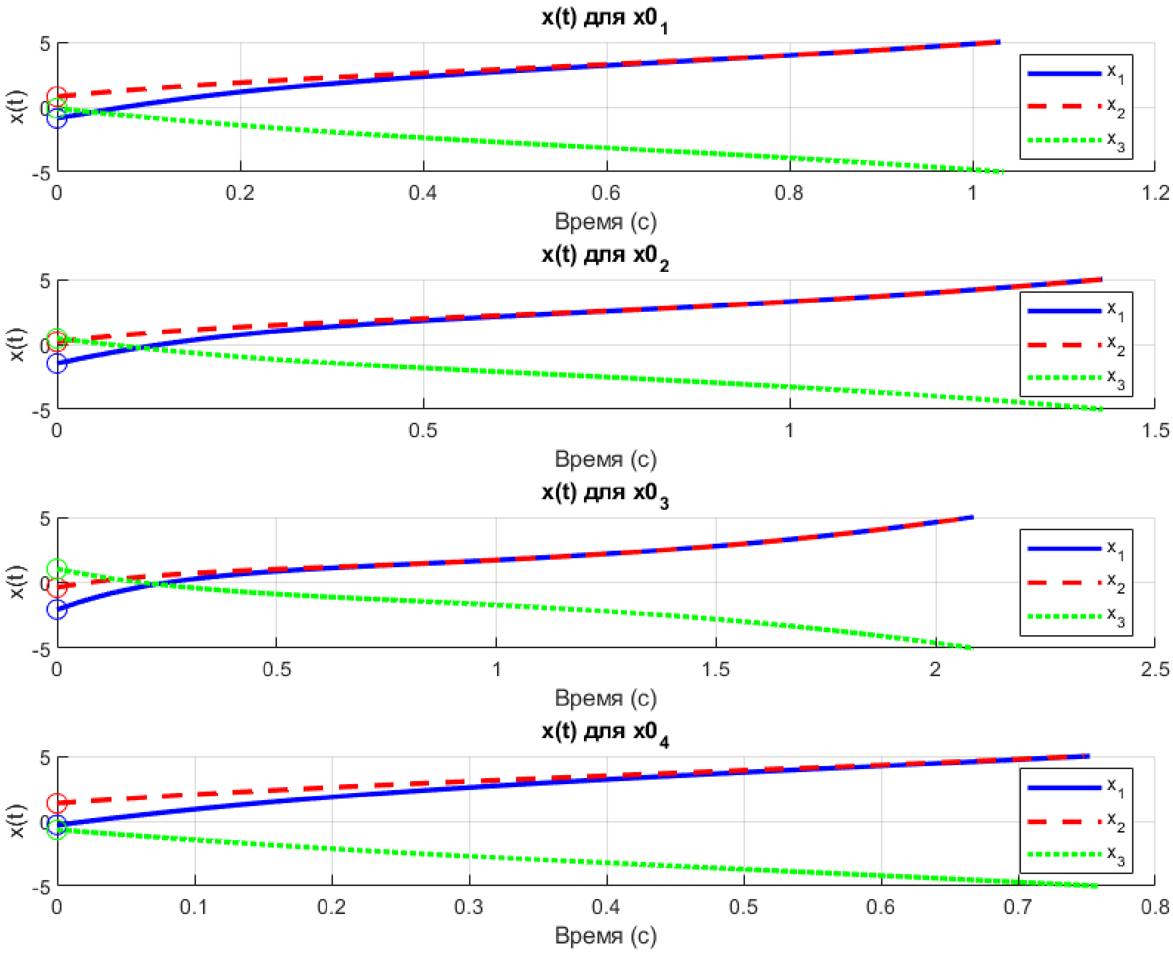

Рисунок 7. Графики векторов состояния систем $x(t)$ с начальными условиями

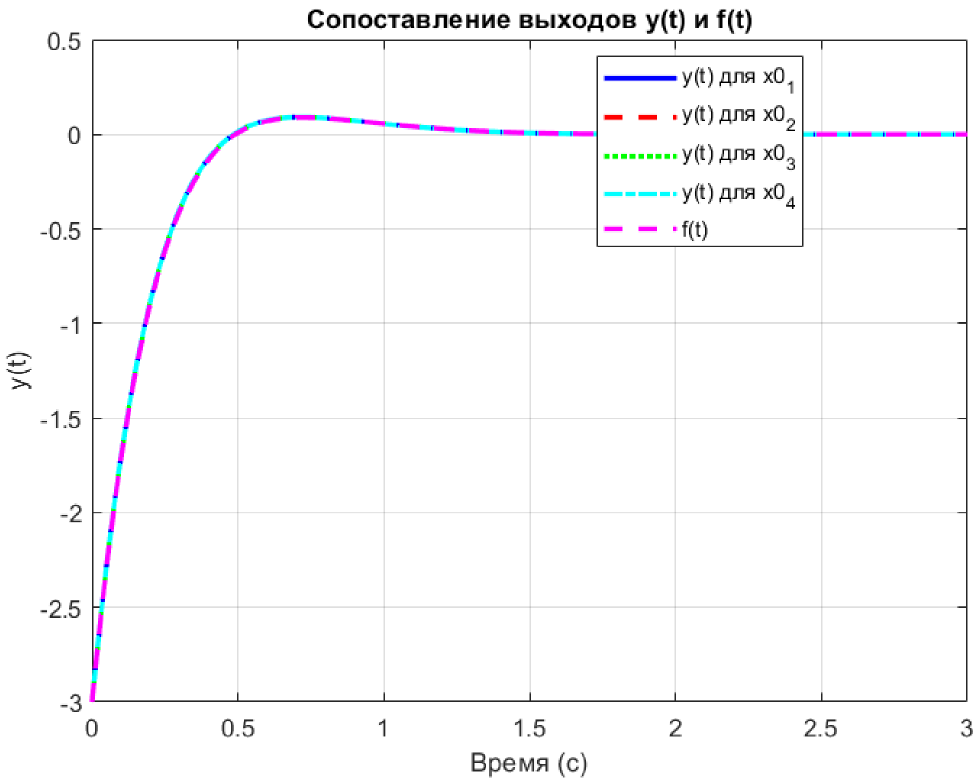

Рисунок 8. Графики выходов системы $y(t)$.

Задание 5. Исследование управляемости по выходу

Возьмём матрицу A из Таблицы 2 и матрицы B и C из Таблицы 6:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

и выполним следующие шаги:

- Найдём Жорданову форму нашей системы:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & \dfrac{-3+i}{2} & \dfrac{-3-i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ \dfrac{3-3i}{2} \\ \dfrac{3+3i}{2} \end{bmatrix}$$

Теперь её вещественную часть:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Определим управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел и системы в целом:

Управляемость:

1) $\lambda_1 = -1$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_1 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -1 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 + 2i & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -2 + 2i & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4 + 2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_2 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

3) $\lambda_3 = -1 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 - 2i & -4 & 6 & -5 \\ 4 & -2 - 2i & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4 - 2i & 5 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_3 = 3 = \mathrm{n}$$

- управляемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы А управляемы, значит вся система полностью управляема.***

Наблюдаемость:

1) $\lambda_1 = -1$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_1 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -1 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 2i & -4 & 6 \\ 4 & -2 + 2i & 4 \\ -4 & 2 & -4 + 2i \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_2 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

3) $\lambda_3 = -1 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2i & -4 & 6 \\ 4 & -2-2i & 4 \\ -4 & 2 & -4-2i \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank} X_3 = 3 = \mathrm{n}$$

- наблюдаемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы А наблюдаемы, а значит система является полностью наблюдаемой.***

- Найдём матрицу управляемости системы по выходу при $D = 0_{2\times 2}$, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы по выходу:

$$U = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$U_{\text{вых}} = [CU \quad D]$$

$$U = \begin{bmatrix} -5 & 17 & -17 \\ -3 & 9 & -3 \\ 5 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$U_{\text{вых}} = \begin{bmatrix} 9 & -15 & 9 \\ 27 & -45 & 27 \end{bmatrix}$$

$$rank\ U_{\text{вых}} = 1$$

Матрица выхода у нас:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$rank\ C = 1$$

Получаем:

$$rank\ U_{\text{вых}} = rank\ C$$

Следовательно, ***система является полностью управляемой по выходу***.

Получается, что в нашем случае достаточно иметь матрицу $D = 0$, чтобы обеспечить полную управляемость по выходу.

Выводы:

Причиной управляемости или неуправляемости по выходу является ранг матрицы управляемости по выходу, если он меньше, чем ранг матрицы выхода, то мы не сможем контролировать каждый выход системы, а именно, не сможем повлиять на какой-то выход с помощью заданного управления. Напротив, если же ранги данных матриц равны, мы за любой промежуток времени можем добиться любого выхода, использую ограниченное управление.

Выводы:

В ходе выполнения данной лабораторной работы, я разбирался с такими понятиями, как управляемость и наблюдаемость системы. По исходным данным я определял насколько хорошо можно управлять объектом и восстанавливать его начальное состояние, зная конечное. Также, я разобрался с таким понятием, как управляемость по выходу, с помощью которого можно судить, насколько точно мы можем повлиять на выход системы с помощью заданного управления.

Приложение

Вариант	Задания		Вариант	Задания		Вариант	Задания	
	1, 2 и 5	3 и 4		1, 2 и 5	3 и 4		1, 2 и 5	3 и 4
1	№ 1	№ 6	11	№ 6	№ 11	21	№ 11	№ 1
2	№ 2	№ 7	12	№ 7	№ 12	22	№ 12	№ 2
3	№ 3	№ 8	14	№ 8	№ 13	24	№ 13	№ 3
4	№ 4	№ 9	14	№ 9	№ 14	24	№ 14	№ 4
5	№ 5	№ 10	15	№ 10	№ 15	25	№ 15	№ 5
6	№ 1	№ 11	16	№ 6	№ 1	26	№ 11	№ 6
7	№ 2	№ 12	17	№ 7	№ 2	27	№ 12	№ 7
8	№ 3	№ 13	18	№ 8	№ 3	28	№ 13	№ 8
9	№ 4	№ 14	19	№ 9	№ 4	29	№ 14	№ 9

Таблица 1: Распределение Заданий по Вариантам.

№	A	B	x_1	№	A	B	x_1
1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 4 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 13 & -11 & 14 \\ 10 & -7 & 10 \\ -10 & 6 & -11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -6 & -8 & -3 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Таблица 2: Исходные данные для Задания 1 и Задания 2.

№	B	x_1'	x_1''	№	B	x_1'	x_1''	№	B	x_1'	x_1''
1	$\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-2\\3\end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-6\\-3\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-5\\-3\\3\end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-5\\4\\-1\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\3\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\3\\-2\end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\-3\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-6\\-1\\4\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\3\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\3\\-2\end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix}4\\-7\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-8\\3\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-4\\0\\0\end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix}11\\7\\-7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Таблица 3: Исходные данные для Задания 2

№	A	C	$f(t)$
9	$\begin{bmatrix} -18 & -47 & -9 \\ 8 & 19 & 2 \\ -3 & -11 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$	$2e^{-2t}\cos(5t) - 4e^{-2t}\sin(5t)$
10	$\begin{bmatrix} -10 & -7 & -18 \\ -3 & -4 & -8 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$	$e^{-2t}\cos(5t) - 2e^{-2t}\sin(5t)$
11	$\begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 18 & -2 \end{bmatrix}$	$3e^{-5t}\cos(2t) - 1e^{-5t}\sin(2t)$
12	$\begin{bmatrix} -13 & 2 & -12 \\ -6 & -1 & -8 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & -2 & 9 \end{bmatrix}$	$21e^{-5t}\cos(2t) - 7e^{-5t}\sin(2t)$
13	$\begin{bmatrix} -10 & -6 & 16 \\ 3 & 0 & -7 \\ -5 & -8 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$	$-6e^{-4t}\cos(2t) + 4e^{-4t}\sin(2t)$
14	$\begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$	$-3e^{-4t}\cos(2t) + 2e^{-4t}\sin(2t)$

Таблица 4: Исходные данные для Задания 3 и Задания 4 (номера 9-15)

№	C	№	C	№	C
1	$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix}7 & 14 & 0\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix}0 & -5 & -5\end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix}7 & 0 & 7\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix}3 & 6 & 0\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix}0 & -7 & -7\end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix}3 & 0 & 3\end{bmatrix}$

Таблица 5: Исходные данные для Задания 4

№	B	C	№	B	C	№	B	C
1	$\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\0 & -3 & 0\end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix}-2\\5\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\0 & 3 & 9\end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & -4 & 2\end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\0 & -3 & 3\end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 3 & 5\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}-2\\5\\-3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -3 & -2\\0 & 9 & 6\end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 9 & 3\end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix}-4\\1\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\0 & 3 & -3\end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix}-5\\-3\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\0 & 6 & 9\end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -4 & -3\\0 & -8 & -6\end{bmatrix}$

Таблица 6: Исходные данные для Задания 5