

” Теория автоматического управления ”

Лабораторная работа № А

Линейно-квадратичные радости

Выполнил: Бухарев Святослав Андреевич

Факультет: СУиР

Группа: R3381

Вариант 9

Преподаватели: Перегудин А. А., Пашенко А. В.

Санкт-Петербург

Задание 1. Исследование LQR

В соответствии с моим вариантом по Таблице 1 (9) возьмём матрицы A и B из Таблицы 2:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T \quad (1)$$

Выполним следующие шаги:

- Проверим систему на стабилизируемость.
- Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$.
- Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* > 0$ и $R^* > 0$ и значением пара метра $\alpha > 0$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R) :
 - (Q^*, R^*) ;
 - $(\alpha Q^*, R^*)$;
 - $(Q^*, \alpha R^*)$;
 - $(\alpha Q^*, \alpha R^*)$.
- Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества:

$$J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (2)$$

путём решения соответствующего **матричного уравнения Риккати** при $\nu = 1$:

$$A^T P + PA + Q - \nu P B R^{-1} B^T P = 0, K = -R^{-1} B^T P \quad (3)$$

- Найдём соответствующую матрицу регулятора K , обеспечивающую минимизацию функционала качества (2).
- Вычислим соответствующее минимизированное значение функционала качества (2)

$$J_{min} = x_0^T P x_0 \quad (4)$$

где P – решение соответствующего уравнения Риккати (3).

- Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы и построить графики управления $u(t)$, вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ и экспериментального значения функционала качества $J_{exp}(t)$ (2). Сопоставить последнее с вычисленным ранее J_{min} .
- Сравним полученные результаты для различных пар (Q, R) , сделать выводы.

Используя данные из лабораторной работы 2, сделаем вывод, что **наша система стабилизируема**, так как $\sigma(A) = \{-3, 1 - 2i, 1 + 2i\}$, где

$1 - 2i, 1 + 2i$ – управляемые собственные числа, и

-3 – неуправляемое, но устойчивое собственное число.

Построим схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором

$u = Kx$:

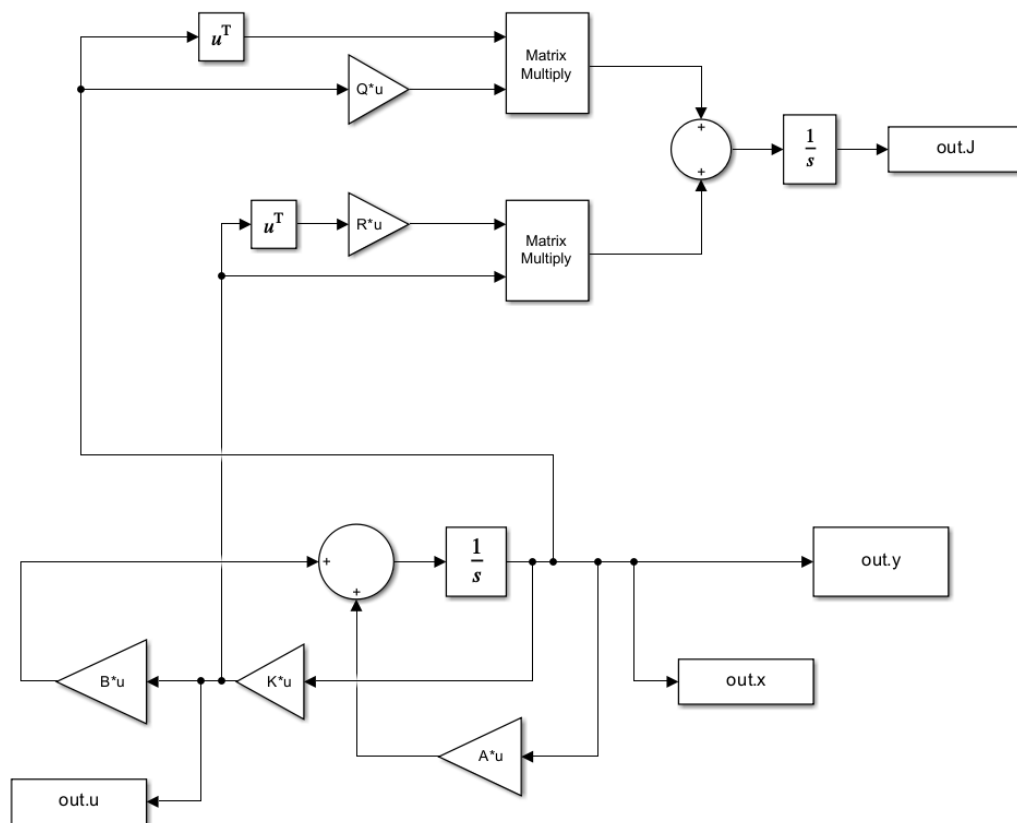


Рис. 1. Схема моделирования системы.

Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* > 0$ и $R^* > 0$ и значением параметра $\alpha = 5$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R) :

$$1) \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

$$2) \quad \alpha Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$3) \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha R = 5$$

$$4) \quad \alpha Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \alpha R = 5$$

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$$

путем решения соответствующего **матричного уравнения Риккати** при $\nu = 1$:

$$A^T P + PA + Q - \nu P B R^{-1} B^T P = 0, \quad K = -R^{-1} B^T P$$

Первая пара

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $Q \succcurlyeq 0, R \succ 0$
2. пара (A, B) – стабилизируема
3. пара (Q, A) – наблюдаема

Вычислим матрицу K :

$$K = [-5.1745 \quad 0.3388 \quad -4.3566]$$

Вычислим минимизированное значение функционала качества:

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 11.0832$$

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы:

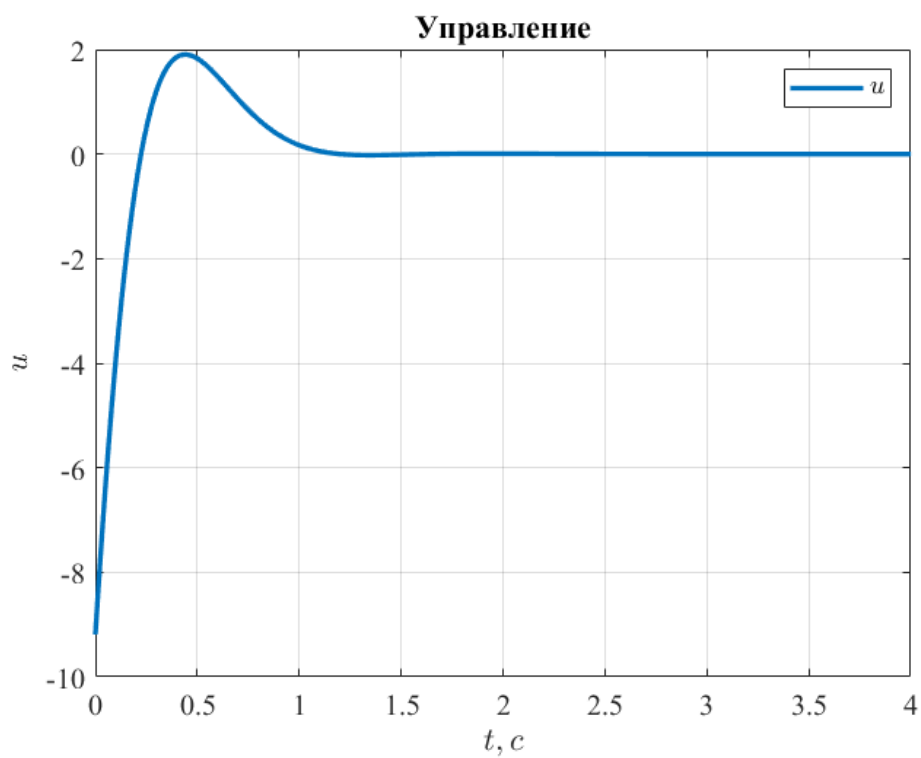


Рис. 2. График управления $u(t)$

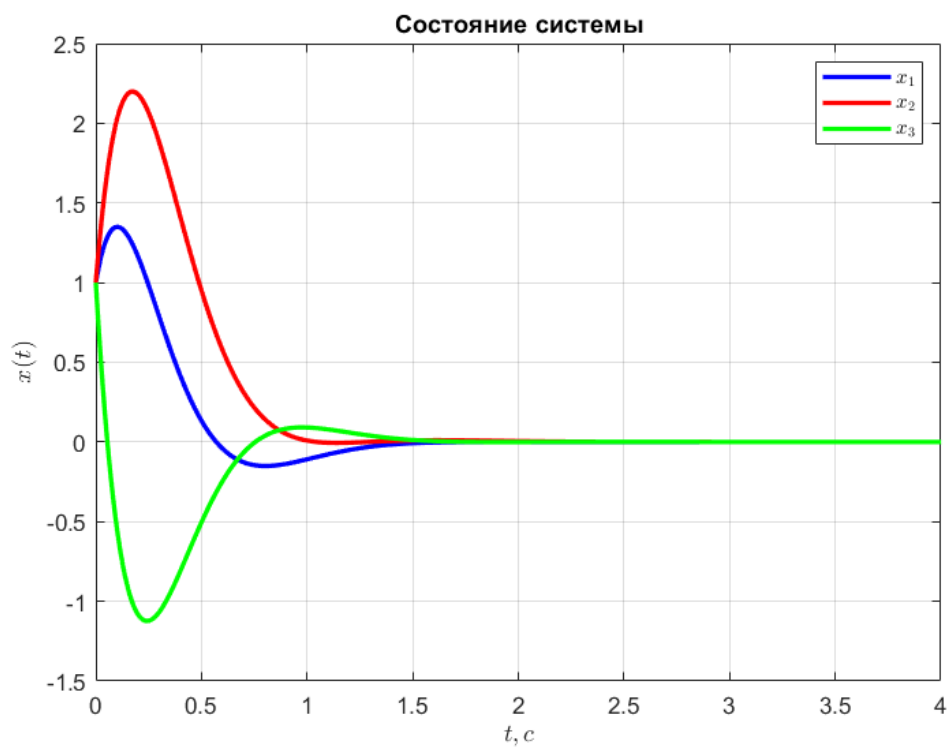


Рис. 3. График состояния системы $x(t)$

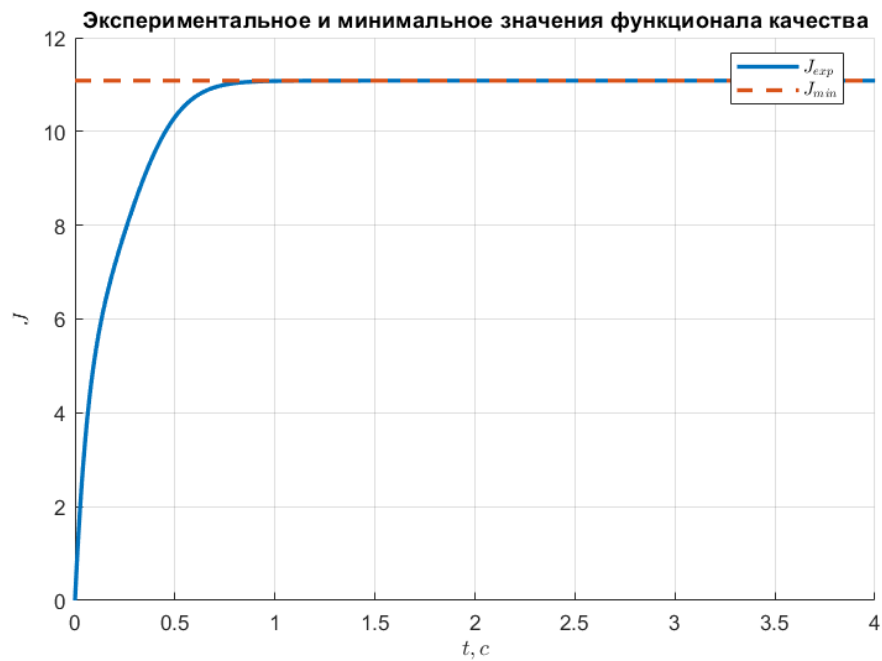


Рис. 4. Сопоставление функционала качества $J_{exp}(t)$ с J_{min}

Вторая пара

$$aQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $aQ \geq 0$, $R > 0$
2. пара (A, B) — стабилизируема
3. пара (Q, A) — наблюдаема

Вычислим матрицу К:

$$K = [-8.6581 \quad -0.3768 \quad -6.4088]$$

Вычислим минимизированное значение функционала качества:

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 25.0591$$

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы:

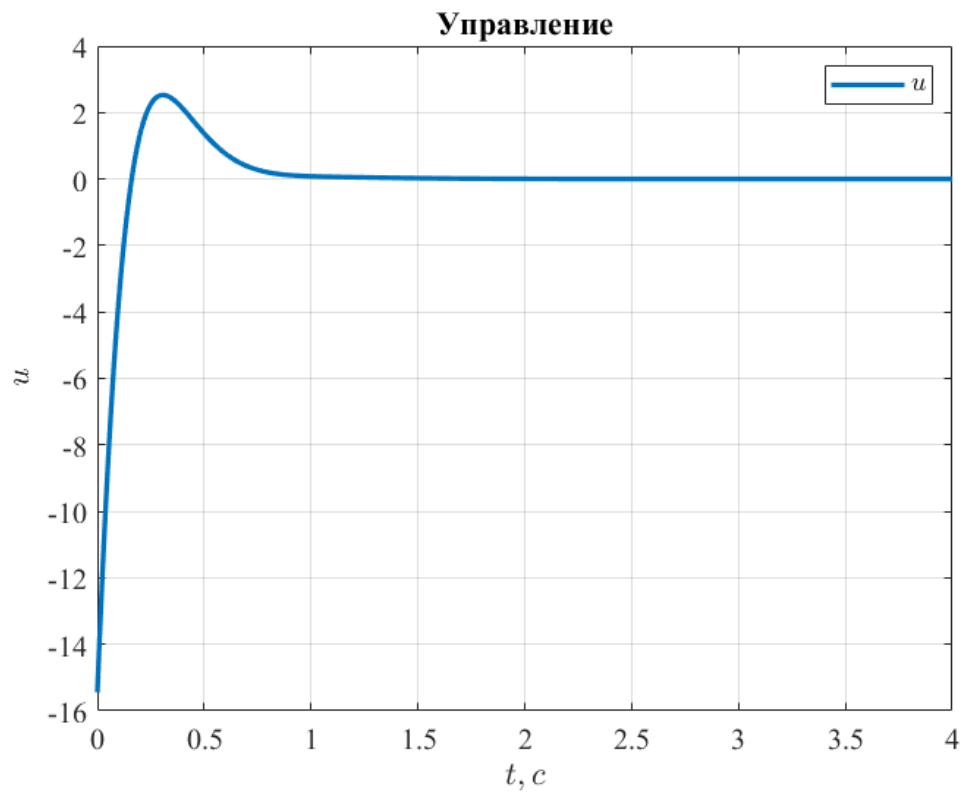


Рис. 5. График управления $u(t)$

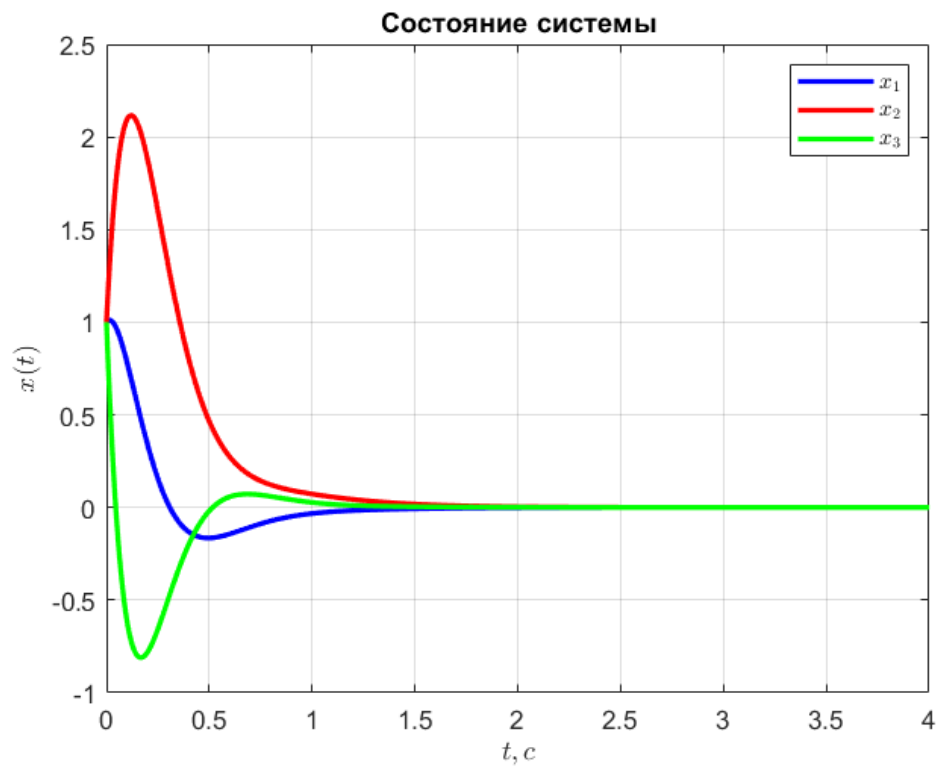


Рис. 6. График состояния системы $x(t)$

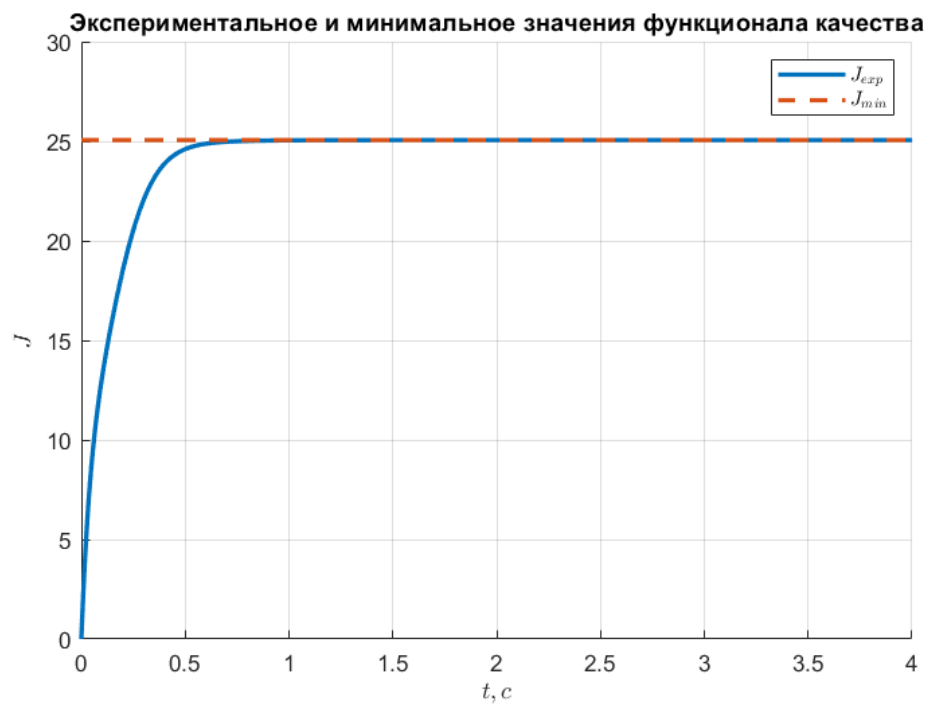


Рис. 7. Сопоставление функционала качества $J_{exp}(t)$ с J_{min}

Третья пара

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad aR = 5$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $aQ \geq 0, R > 0$
2. пара (A, B) – стабилизируема
3. пара (Q, A) – наблюдаема

Вычислим матрицу К:

$$K = [-3.2994 \quad 0.6025 \quad -3.0282]$$

Вычислим минимизированное значение функционала качества:

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 28.8368$$

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы:

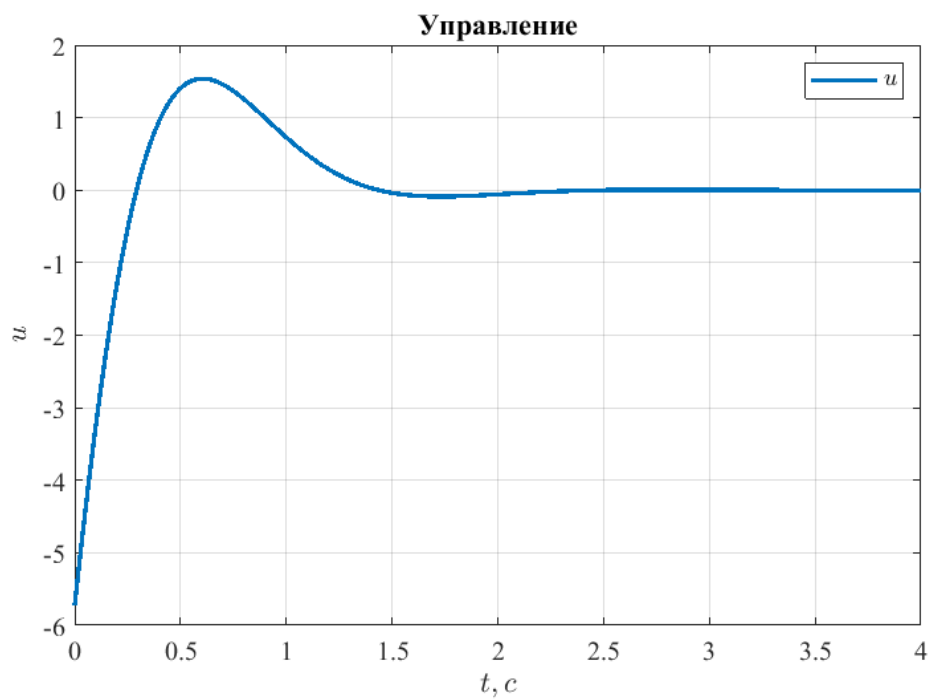


Рис. 8. График управления $u(t)$

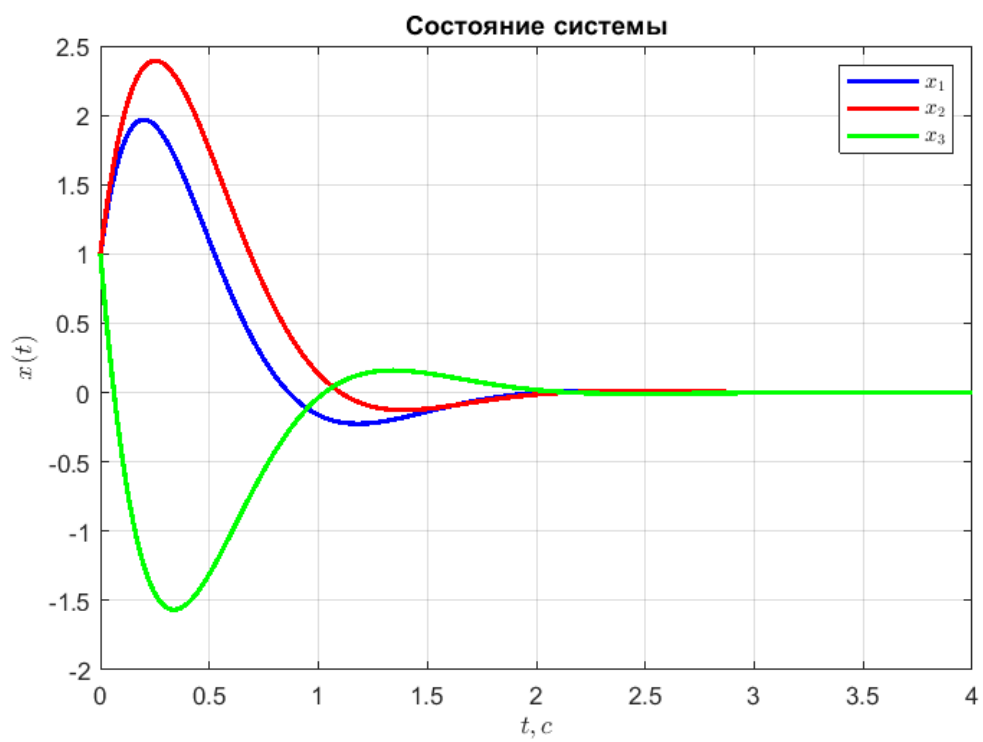


Рис. 9. График состояния системы $x(t)$

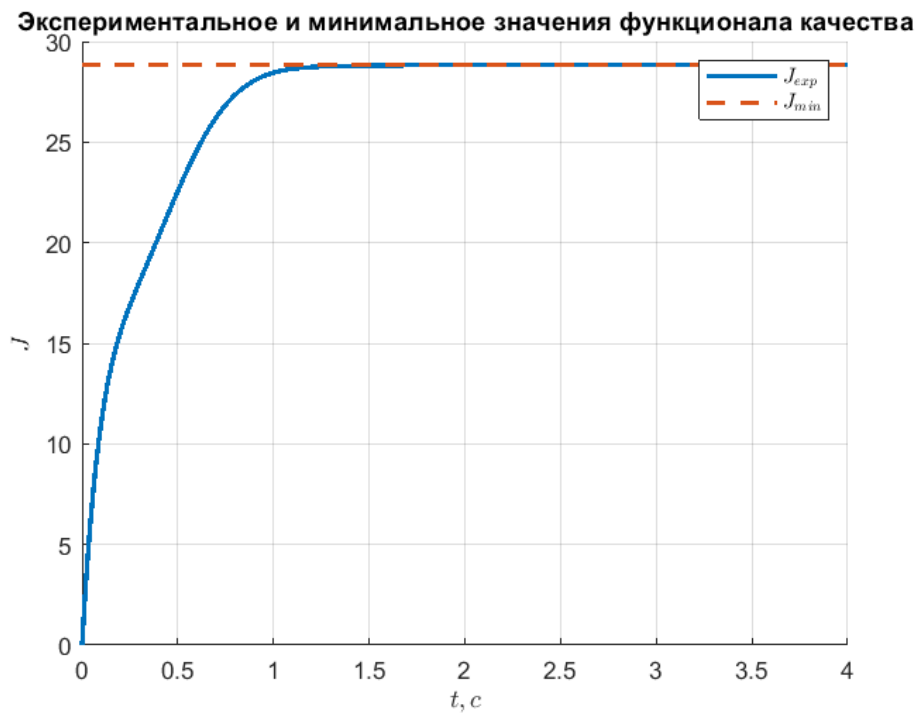


Рис. 10. Сопоставление функционала качества $J_{exp}(t)$ с J_{min}

Четвёртая пара

$$aQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad aR = 5$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $aQ \geq 0$, $R > 0$
2. пара (A, B) – стабилизируема
3. пара (Q, A) – наблюдаема

Вычислим матрицу К:

$$K = [-5.1745 \quad 0.3388 \quad -4.3566]$$

Вычислим минимизированное значение функционала качества:

$$J_{min} = x_0^T P x_0 = 55.4160$$

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы:

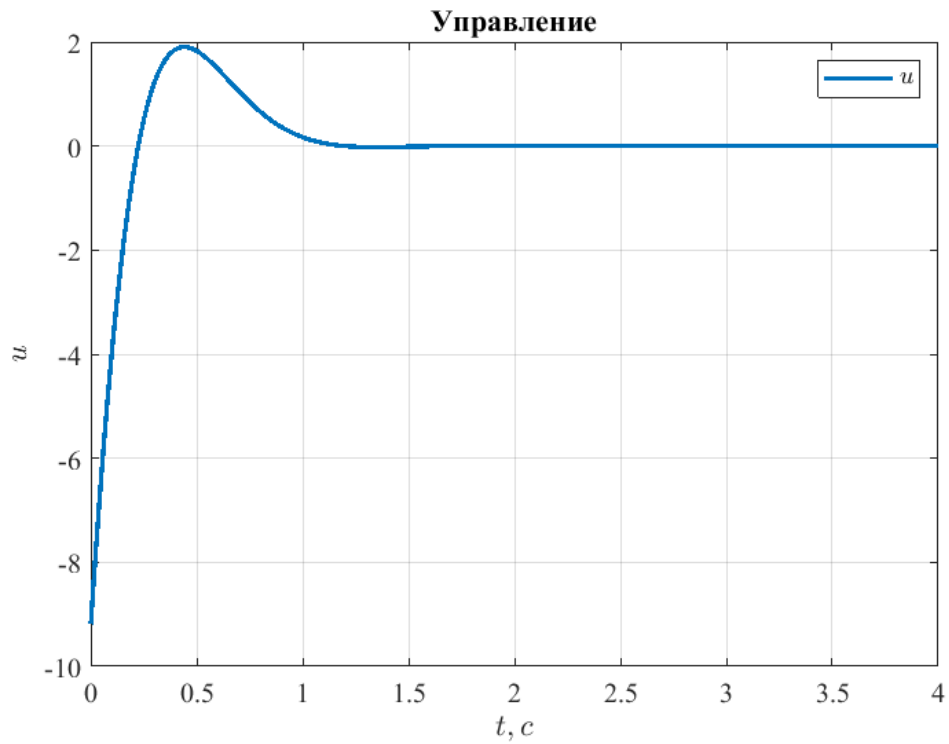


Рис.11. График управления $u(t)$

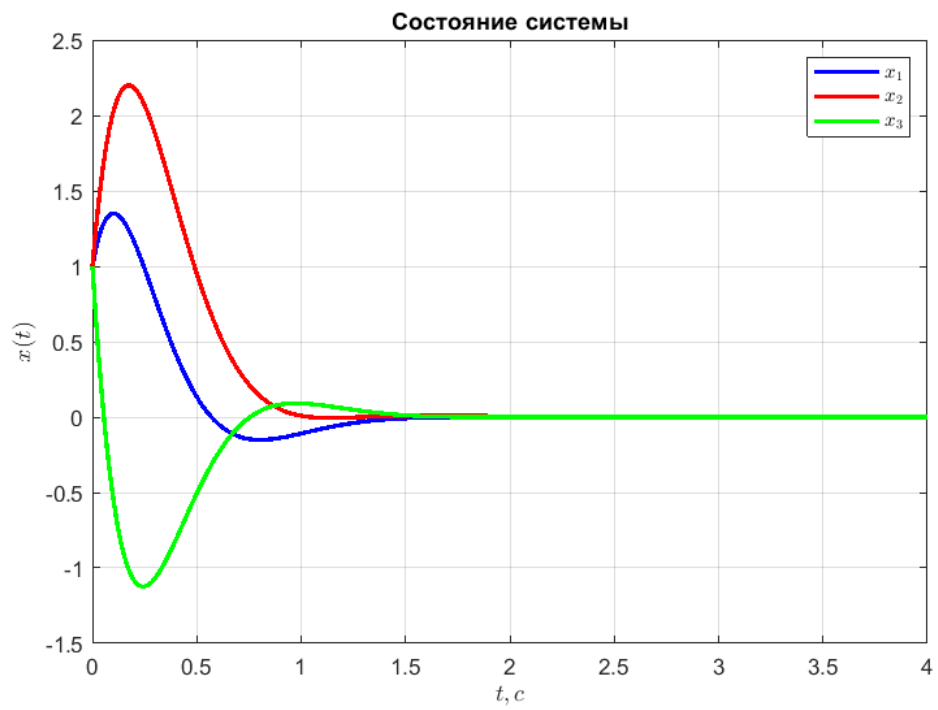


Рис. 12. График состояния системы $x(t)$

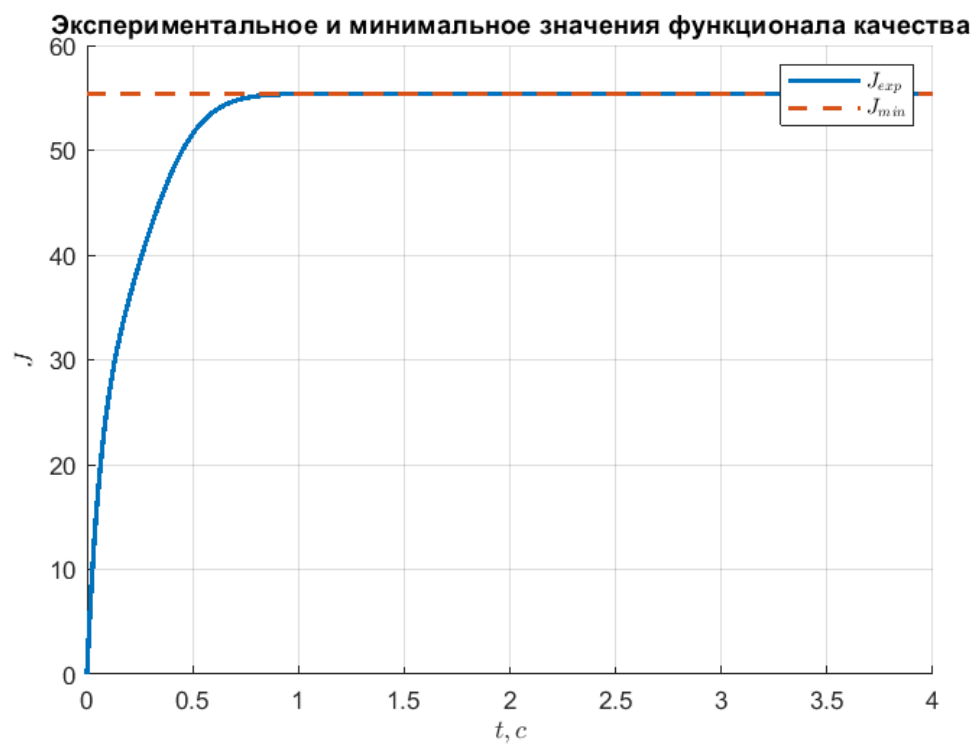


Рис. 13. Сопоставление функционала качества $J_{exp}(t)$ с J_{min}

Выводы:

Как мы видим, все значения J_{exp} совпали с J_{min} , значит регуляторы LQR были синтезированы верно, и критерий качества действительно оказывается минимальным при положительно определённой матрице P , а сама система асимптотически устойчивой. Также, если говорить про конкретные значения параметров Q и R , то всё сработало, как и ожидалось, при увеличении Q во втором случае, управление становится больше, так как ограничения на него небольшие, при увеличении R в третьем случае, управление наоборот меньше, так как ограничения на него повысились, в следствии чего и система стабилизируется позже. А в четвертом случае, увеличив значимость всех параметров, J_{min} — становится максимальным в сравнении с предыдущими значениями, но в то же время графики управления и состояния такие же, как и в первом случае, так как пропорционально увеличили важность обеих компонент оценки качества.

Задание 2. Исследование LQE/фильтра Калмана

В соответствии с моим вариантом по Таблице 1 (9) возьмём матрицы A и C из Таблицы 3:

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f \\ y = Cx + \xi \end{cases} \quad x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad (5)$$

Так как у меня нечётный вариант — задамся детерминированными сигналами $f(t)$ и $\xi(t)$ (гармонические возмущения), исследуя таким образом LQE.

Возьмём сигналы:

$$f(t) = 10\sin(\pi t)$$

$$\xi(t) = 9\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

Далее, выполним следующие шаги:

- Проверим систему на обнаруживаемость.
- Построим схему моделирования системы (5) с наблюдателем состояния $\hat{\dot{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$.

- Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* > 0$ и $R^* > 0$ и значением параметра $\alpha > 0$ и сформировать четыре набора пар матриц (Q, R) :
 - (Q^*, R^*) ;
 - $(\alpha Q^*, R^*)$;
 - $(Q^*, \alpha R^*)$;
 - $(\alpha Q^*, \alpha R^*)$.
- Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезировать наблюдатель, минимизирующий «критерий доверия»:

$$J = \int_0^\infty (f^T(t)Q^{-1}f(t) + \xi^T(t)R^{-1}\xi(t)) dt \quad (6)$$

путем решения соответствующего **матричного уравнения Риккати** при $\nu = 1$:

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0, \quad L = -PC^T R^{-1} \quad (7)$$

- Найдём соответствующую матрицу коррекции наблюдателя L , обеспечивающую минимизацию функционала качества (2). Где P – решение соответствующего уравнения Риккати (3).
- Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Построим сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.
- Сравним полученные результаты для различных пар (Q, R) , сделать **выводы**.

Используя данные из лабораторной работы 2, сделаем вывод, что **наша система полностью наблюдаема и в то же время обнаруживаемая**, так как $\sigma(A) = \{\pm 3i, \pm 2i\}$, где все 4 собственных числа – наблюдаемы.

Построим схему моделирования системы (5), с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y):$$

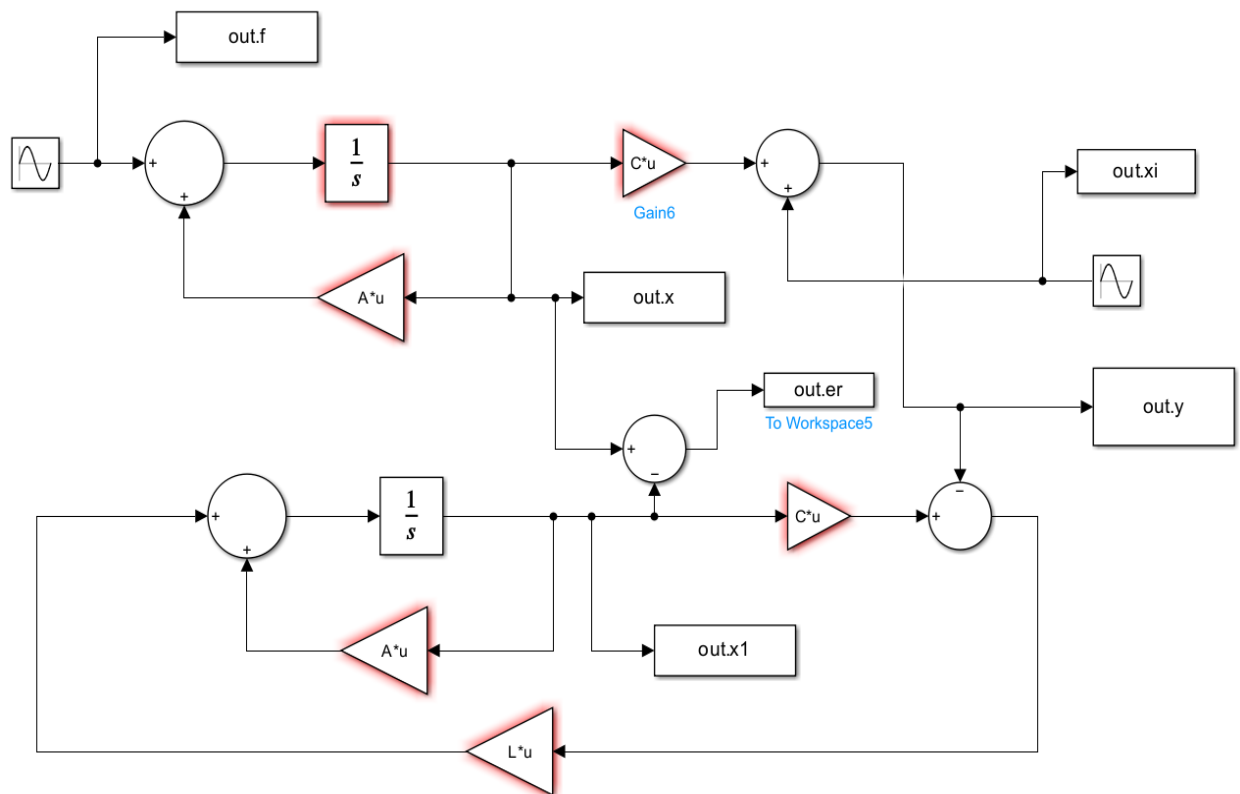


Рис. 14. Схема моделирования системы.

Зададимся подходящими значениями матриц $Q^* > 0$ и $R^* > 0$ и значением параметра $\alpha = 5$ и сформируем четыре набора пар матриц (Q, R) :

$$1) \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$2) \ aQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$3) \ Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad aR = 5$$

$$4) \ aQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad aR = 5$$

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества:

$$J = \int_0^{\infty} (f^T(t)Q^{-1}f(t) + \xi^T(t)R^{-1}\xi(t)) dt$$

путем решения соответствующего **матричного уравнения Риккати** при $\nu = 1$:

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0, \quad L = -PC^T R^{-1}$$

Первая пара

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $Q \geq 0, R > 0$
2. пара (C, A) – обнаруживаемая
3. пара (Q, A) – управляема

Вычислим матрицу L:

$$L = \begin{bmatrix} 14.3842 \\ 24.2319 \\ 12.7356 \\ -20.2043 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-12.0603 \pm 8.1642i, -0.3706 \pm 2.2211i\}$$

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} 264.9603 \\ 0.0876 \\ 1.1421 \\ 7.4295 \end{bmatrix}$$

Выполним компьютерное моделирование системы:

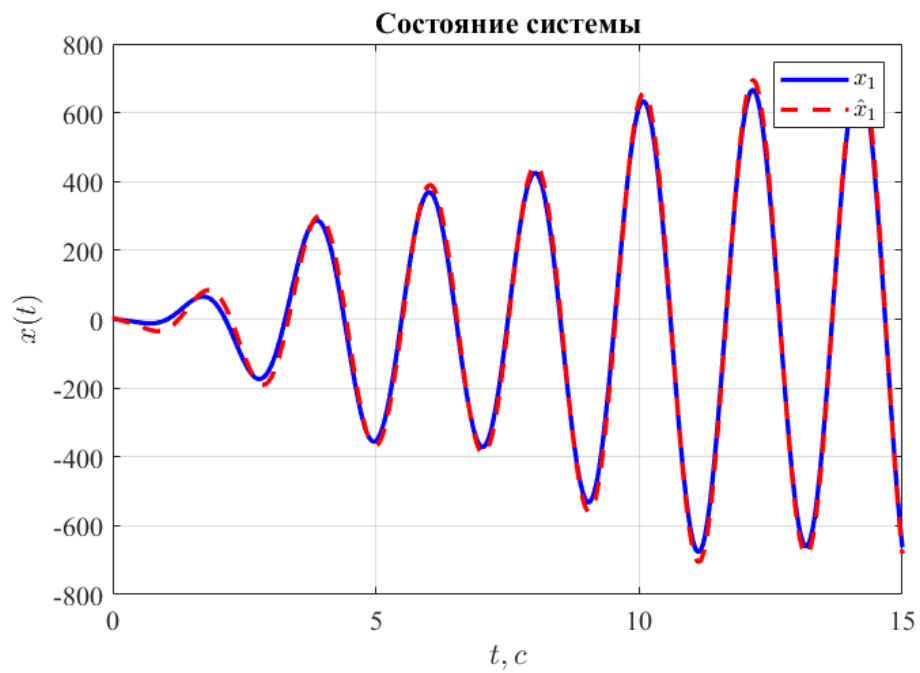


Рис. 15. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

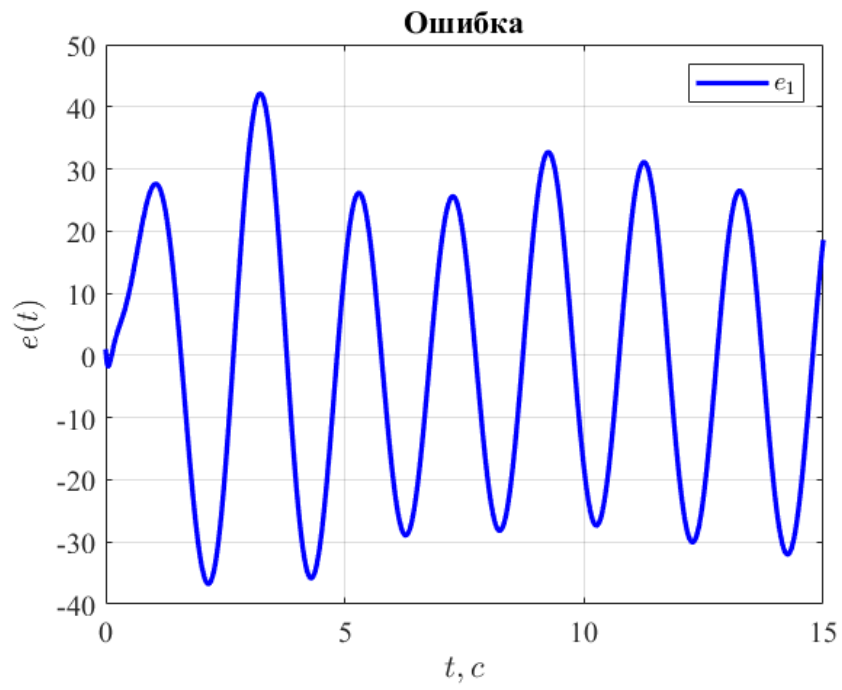


Рис. 16. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

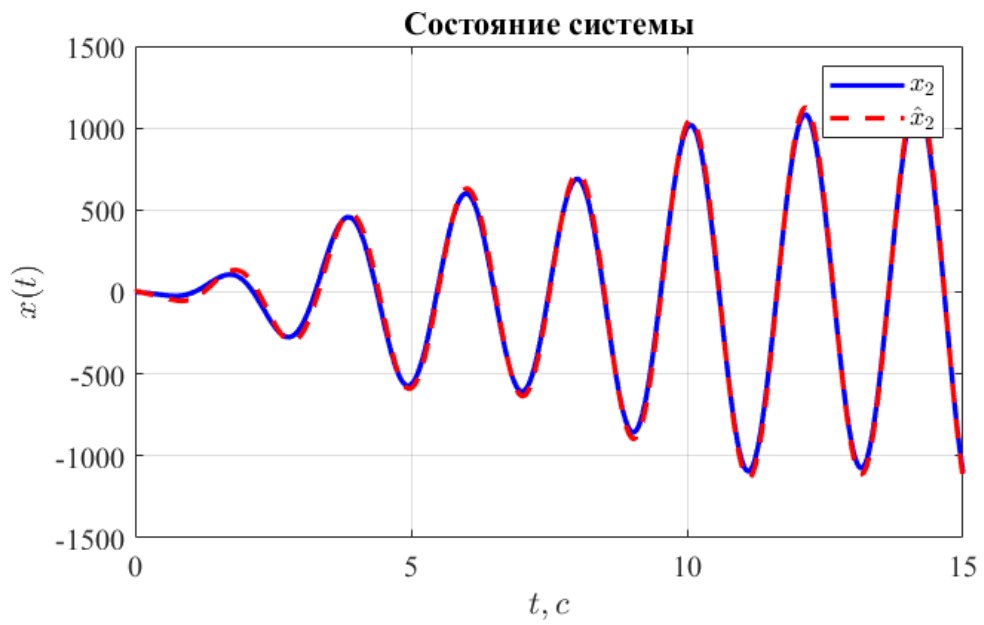


Рис. 17. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

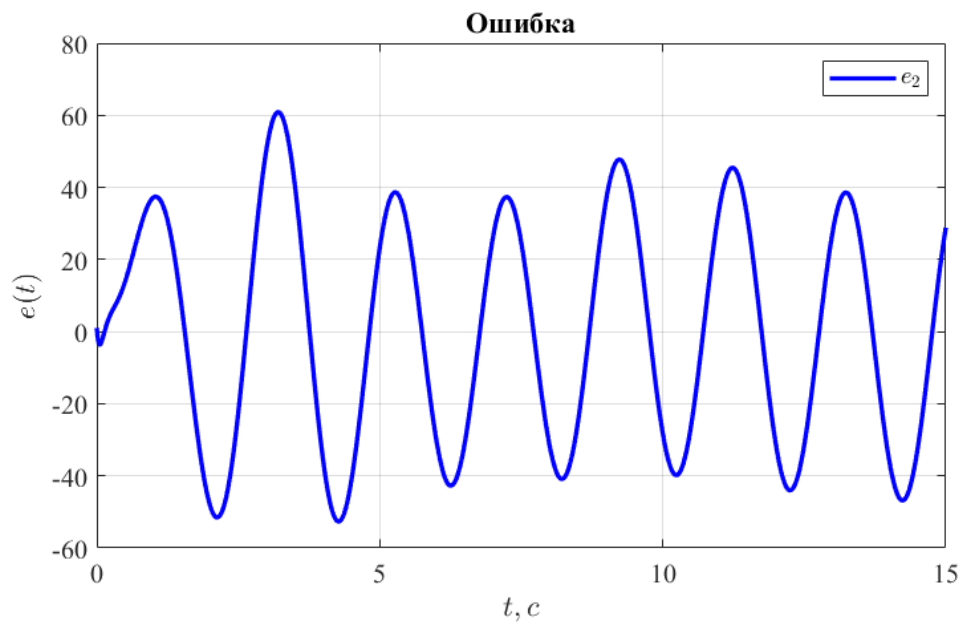


Рис. 18. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

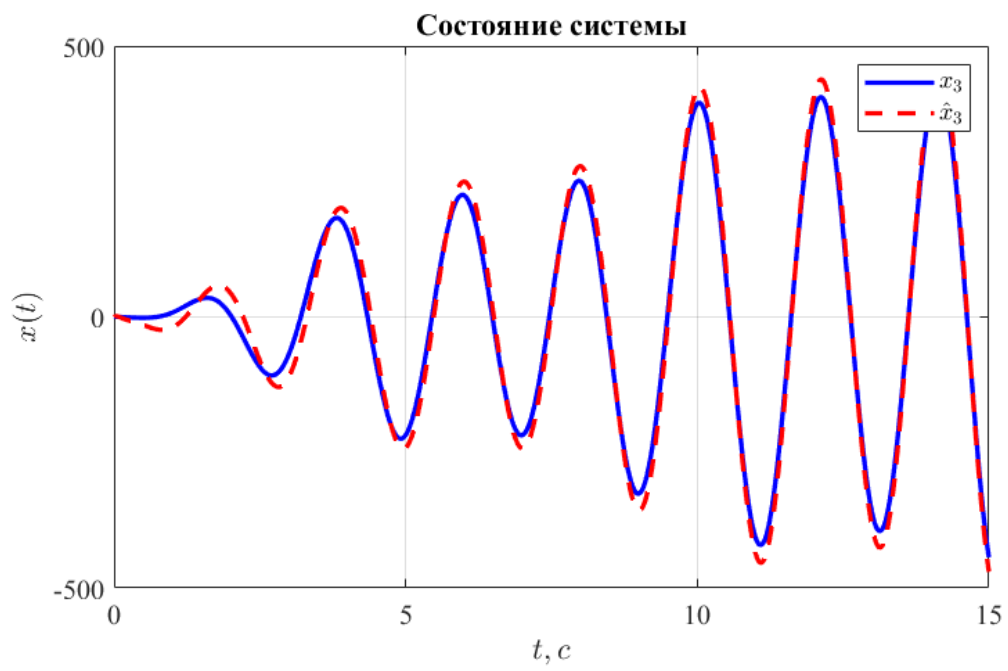


Рис. 19. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

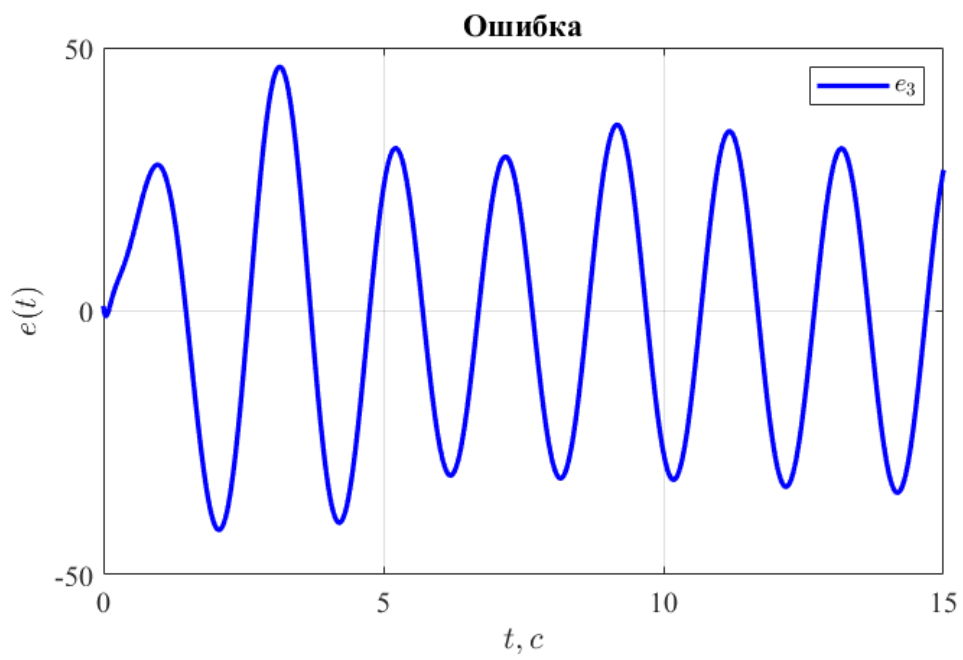


Рис. 20. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

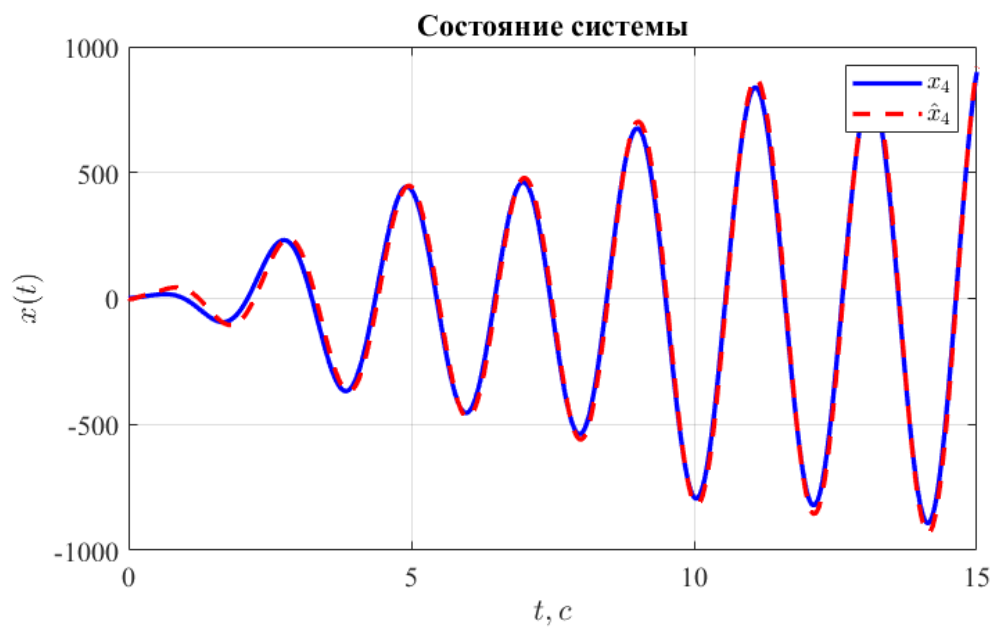


Рис. 21. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

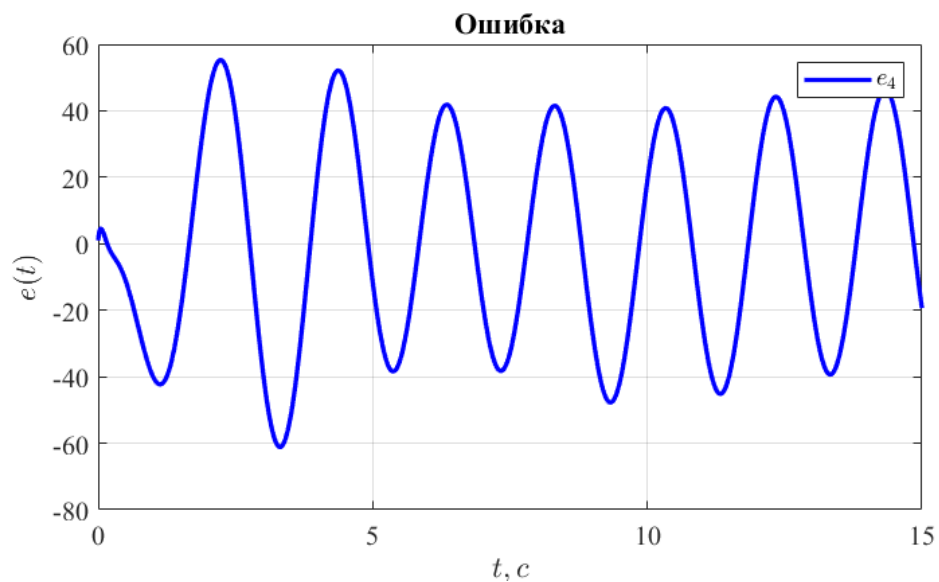


Рис. 22. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

Вторая пара

$$aQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $Q \succcurlyeq 0, R \succ 0$
2. пара (C, A) – обнаруживаемая
3. пара (Q, A) – управляема

Вычислим матрицу L:

$$L = \begin{bmatrix} 28.3139 \\ 48.2062 \\ 26.0800 \\ -40.3409 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-21.2230 \pm 4.8602i, -0.3706 \pm 2.2212i\}$$

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} 1163.1 \\ 0.2 \\ 3.7 \\ 37.0 \end{bmatrix}$$

Выполним компьютерное моделирование системы:

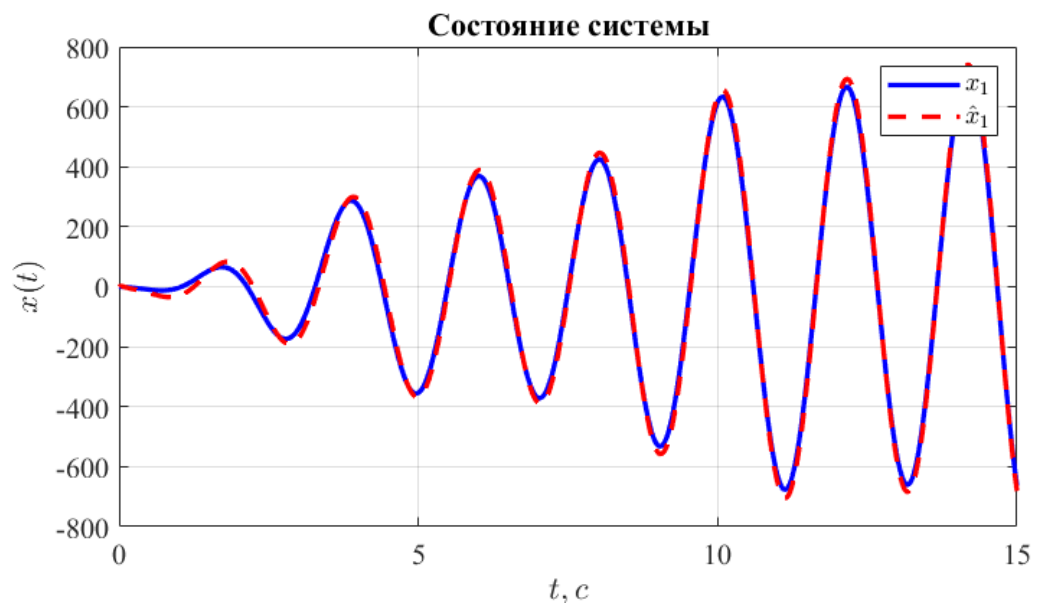


Рис. 23. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

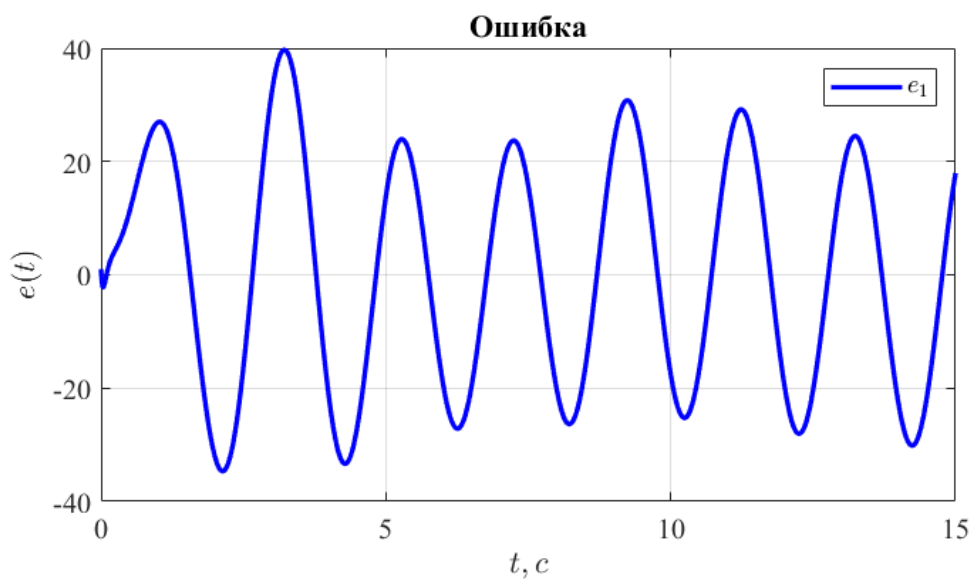


Рис. 24. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

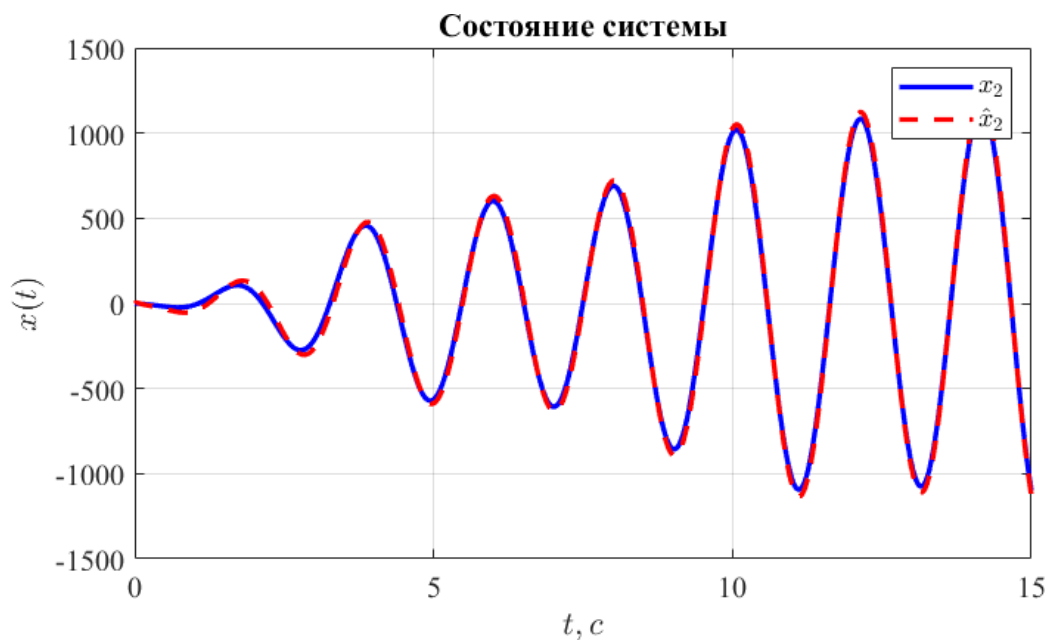


Рис. 25. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

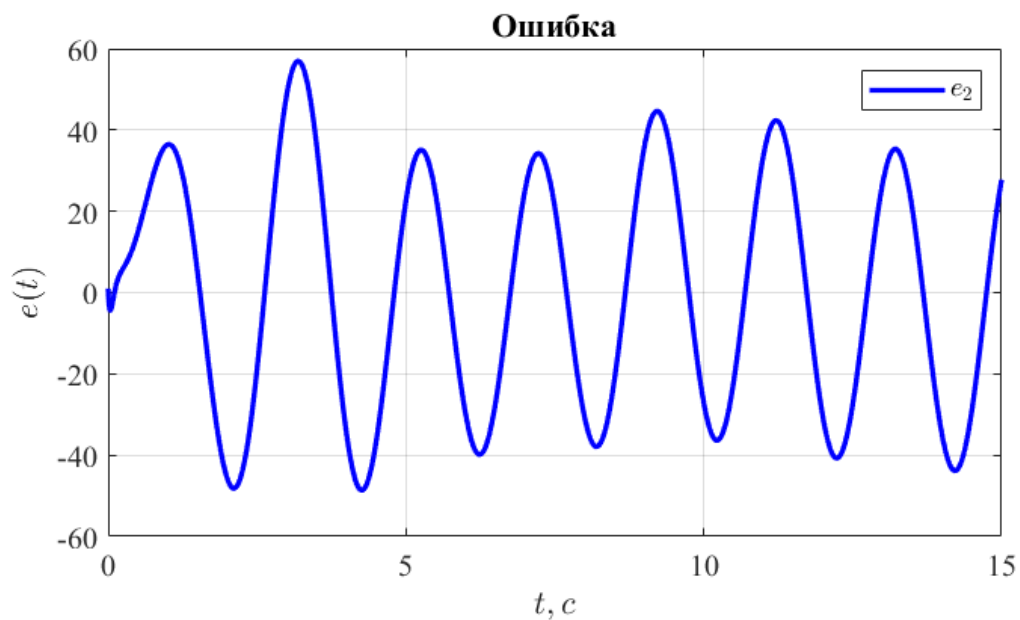


Рис. 25. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

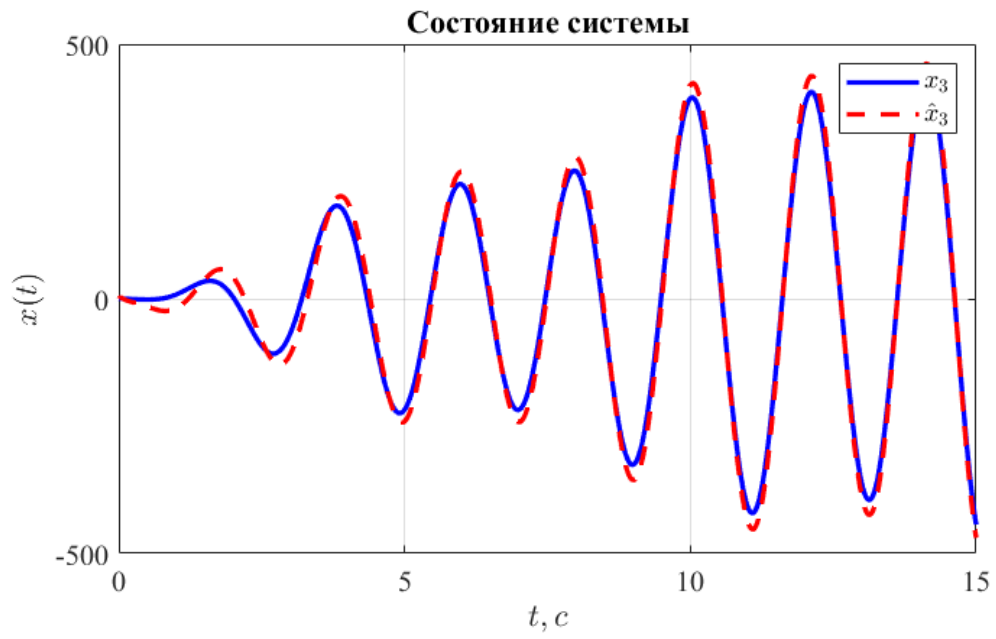


Рис. 26. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

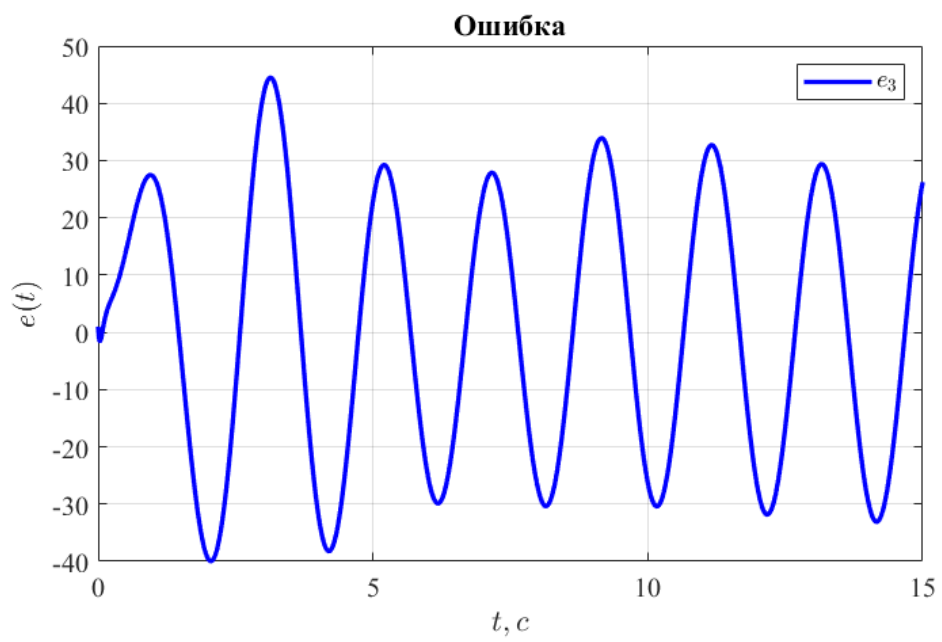


Рис. 27. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

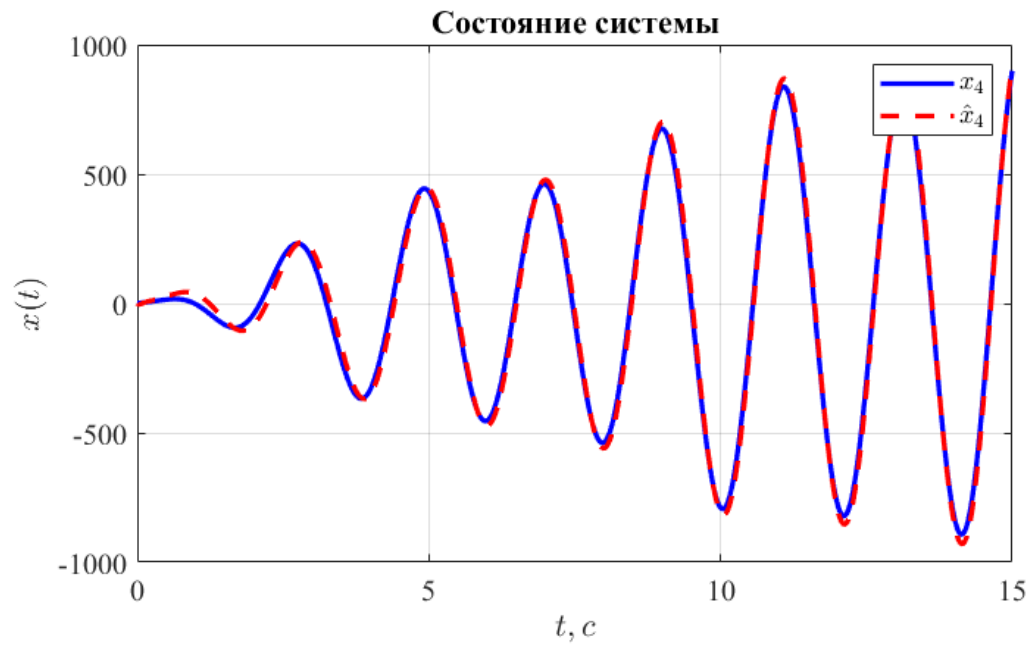


Рис. 28. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

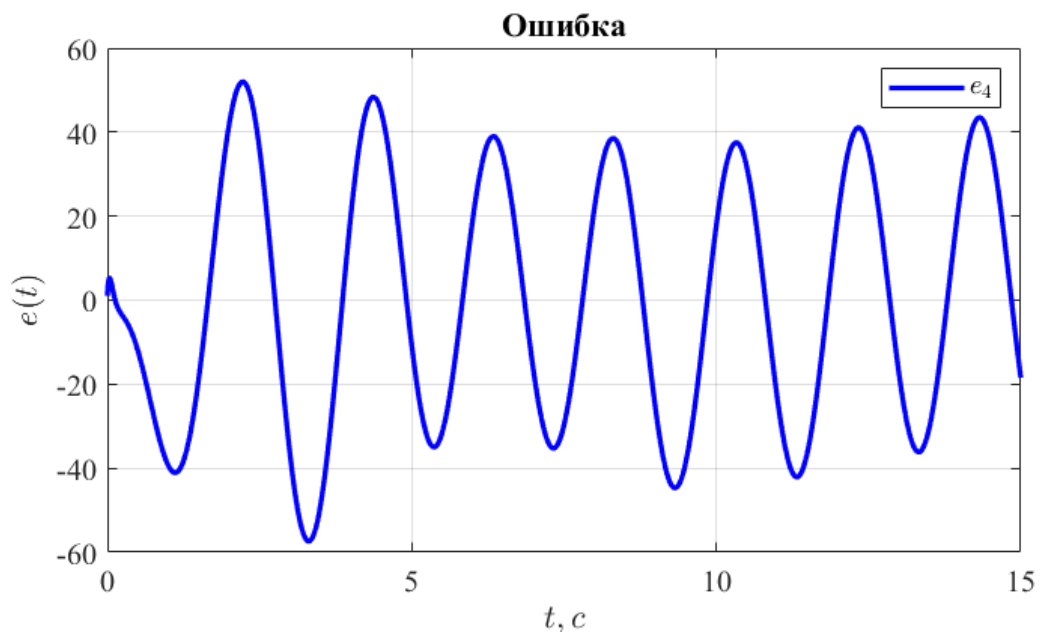


Рис. 29. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

Третья пара

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad aR = 5$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

4. $Q \succcurlyeq 0, R \succ 0$
5. пара (C, A) – обнаруживаемая
6. пара (Q, A) – управляема

Вычислим матрицу L:

$$L = \begin{bmatrix} 7.6654 \\ 12.7427 \\ 6.4498 \\ -10.5700 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-7.2213 \pm 6.5539i, -0.3707 \pm 2.2207i\}$$

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} 339.2493 \\ 0.1441 \\ 1.9308 \\ 7.4804 \end{bmatrix}$$

Выполним компьютерное моделирование системы:

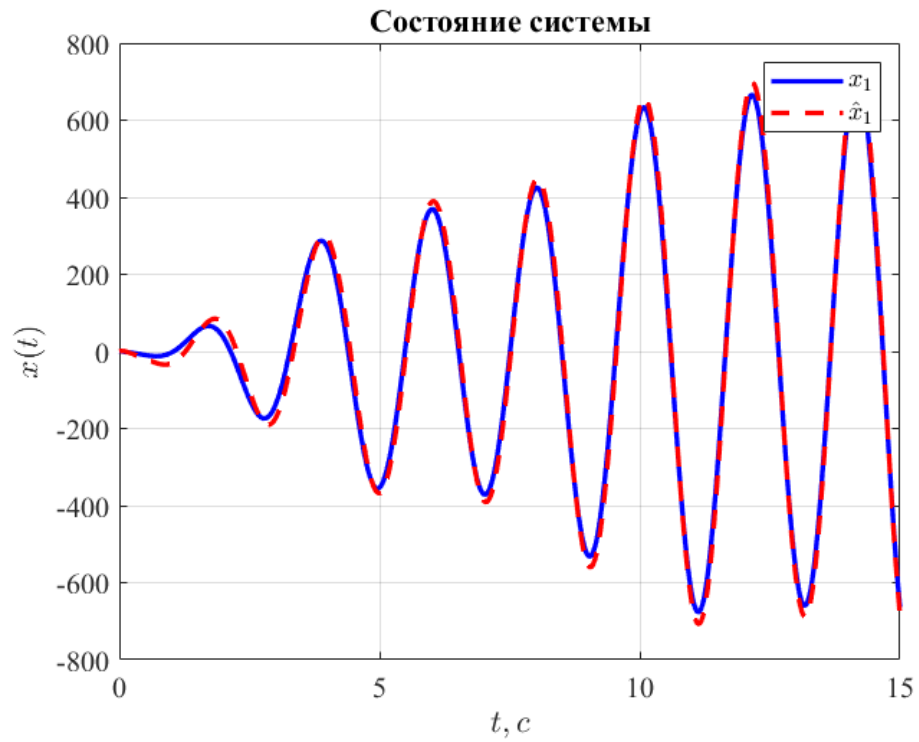


Рис. 30. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

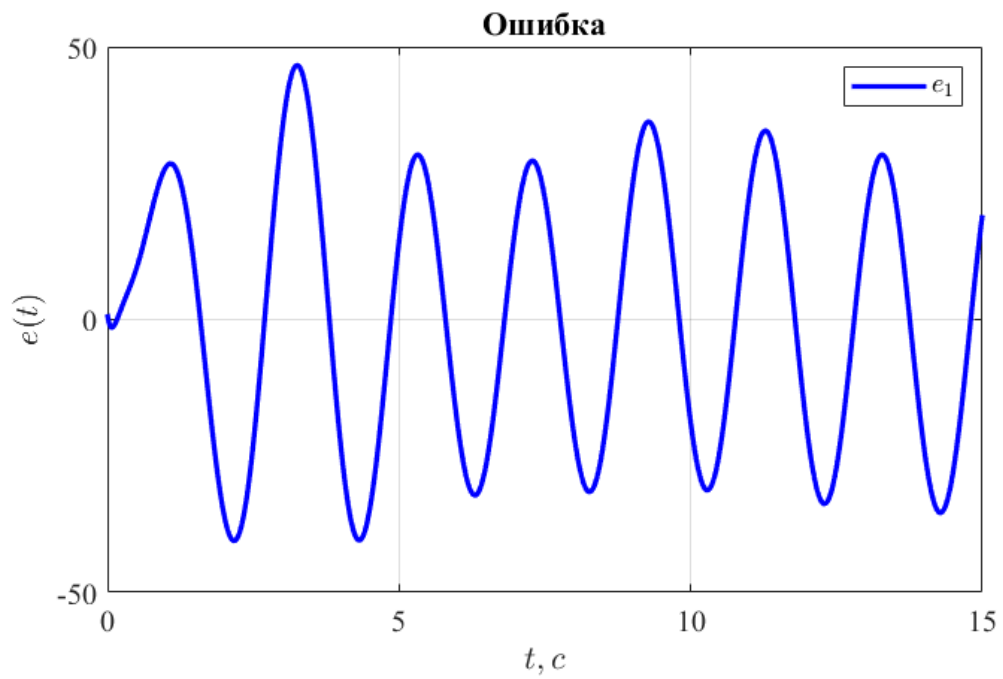


Рис. 31. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

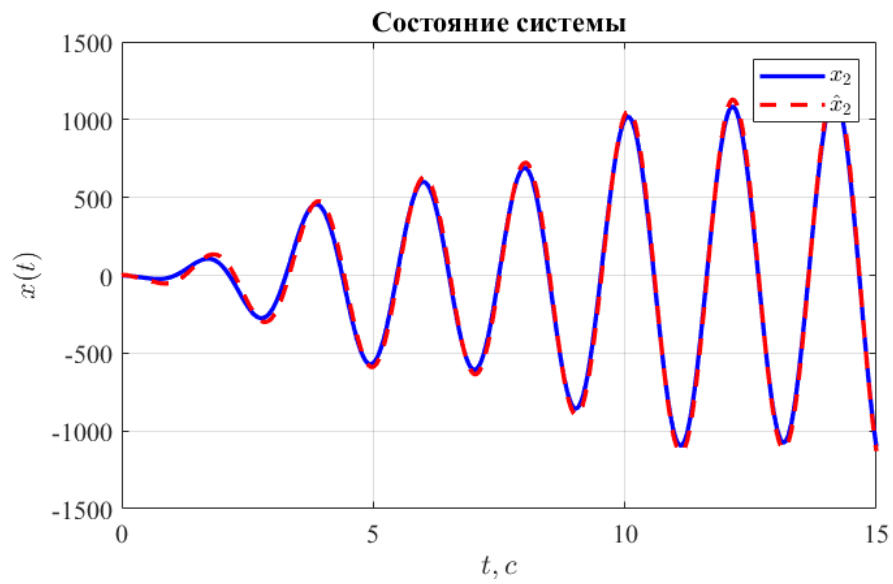


Рис. 32. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

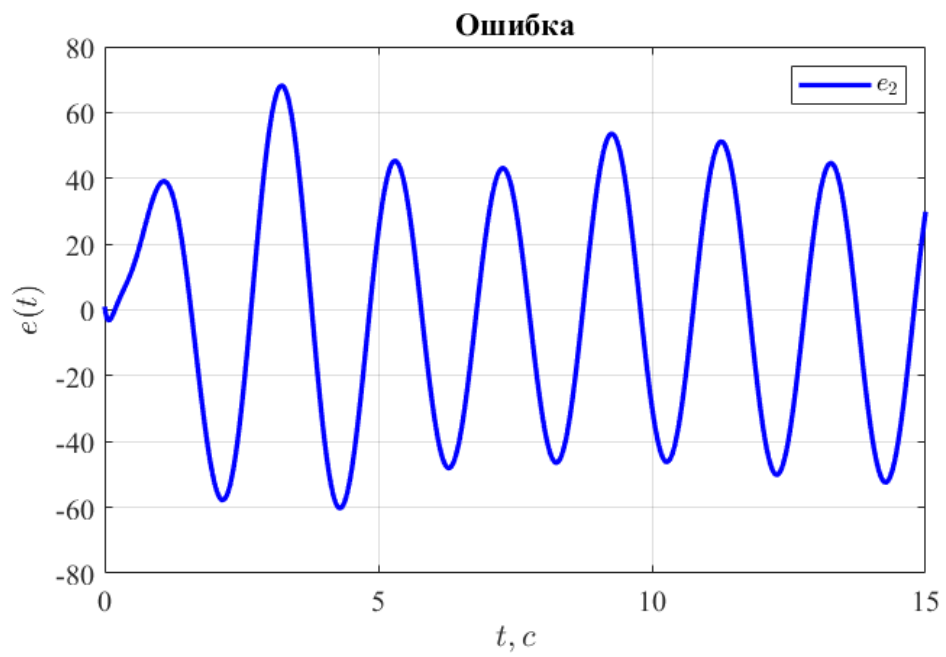


Рис. 33. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

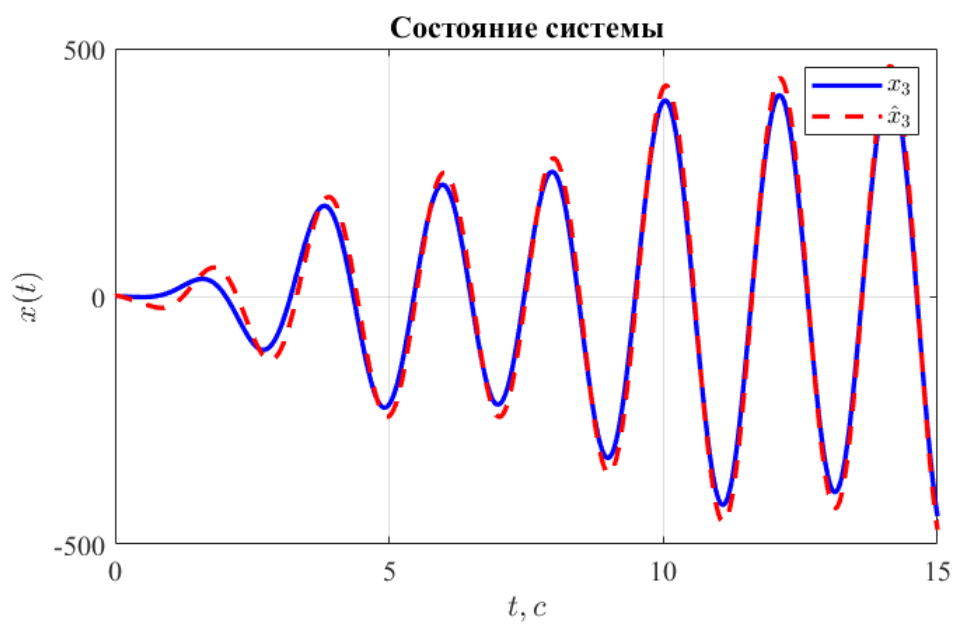


Рис. 34. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

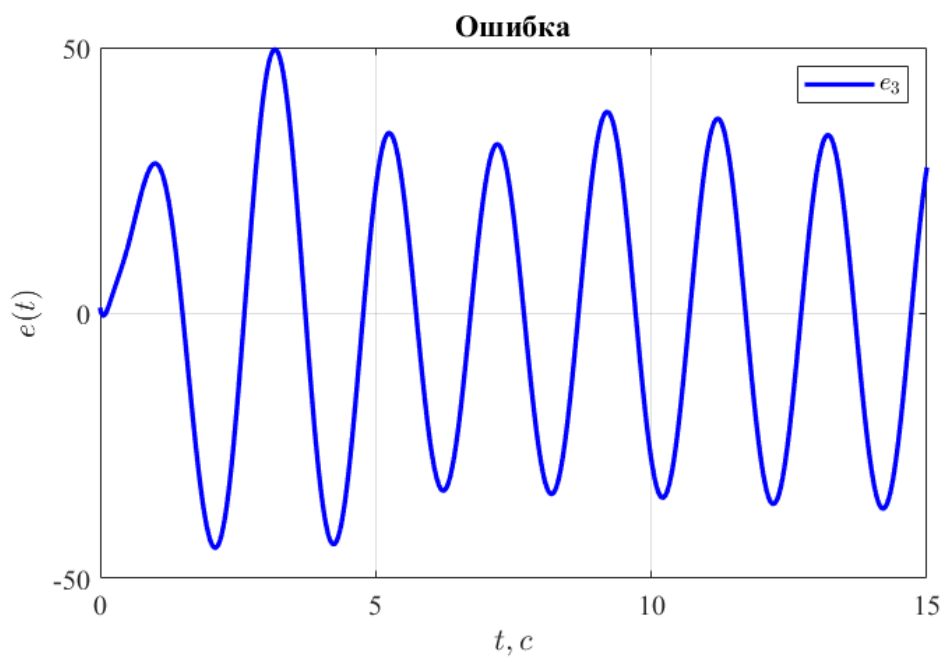


Рис. 35. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

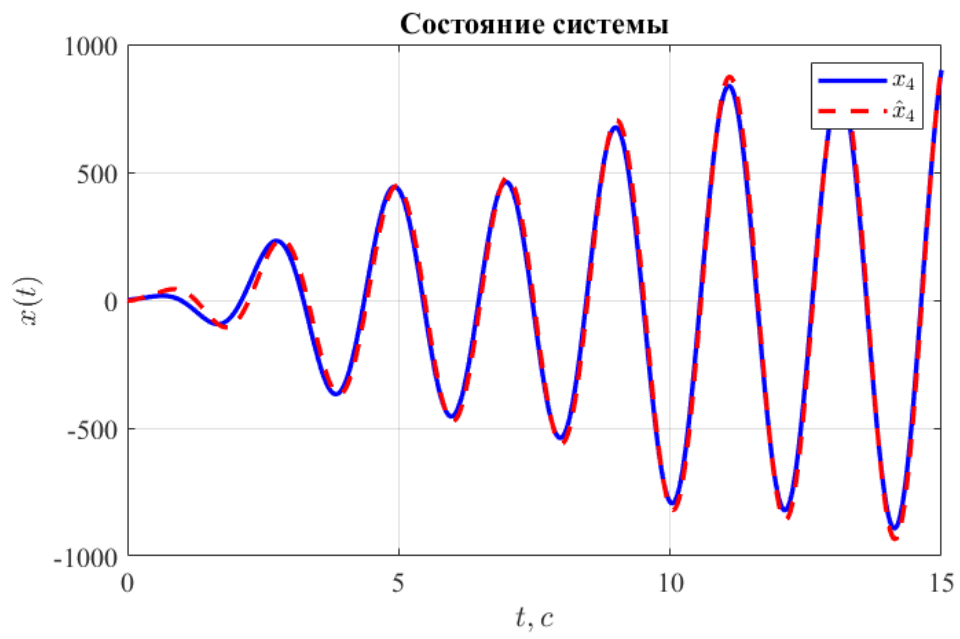


Рис. 36. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

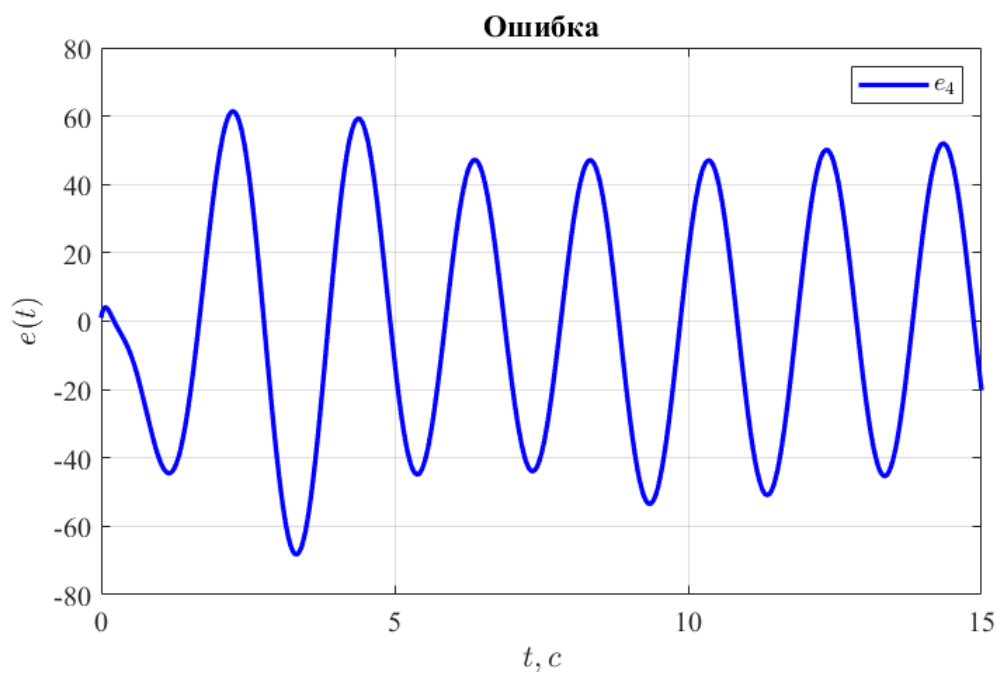


Рис. 37. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

Четвёртая пара

$$aQ = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad aR = 5$$

Необходимые условия для синтеза LQR:

1. $Q \succcurlyeq 0, R \succ 0$
2. пара (C, A) – обнаруживаемая
3. пара (Q, A) – управляема

Вычислим матрицу L:

$$L = \begin{bmatrix} 14.3842 \\ 24.2319 \\ 12.7356 \\ -20.2043 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + LC) = \{-12.0603 \pm 8.1642i, -0.3706 \pm 2.2211i\}$$

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} 1324.8 \\ 0.4 \\ 5.7 \\ 37.1 \end{bmatrix}$$

Выполним компьютерное моделирование системы:

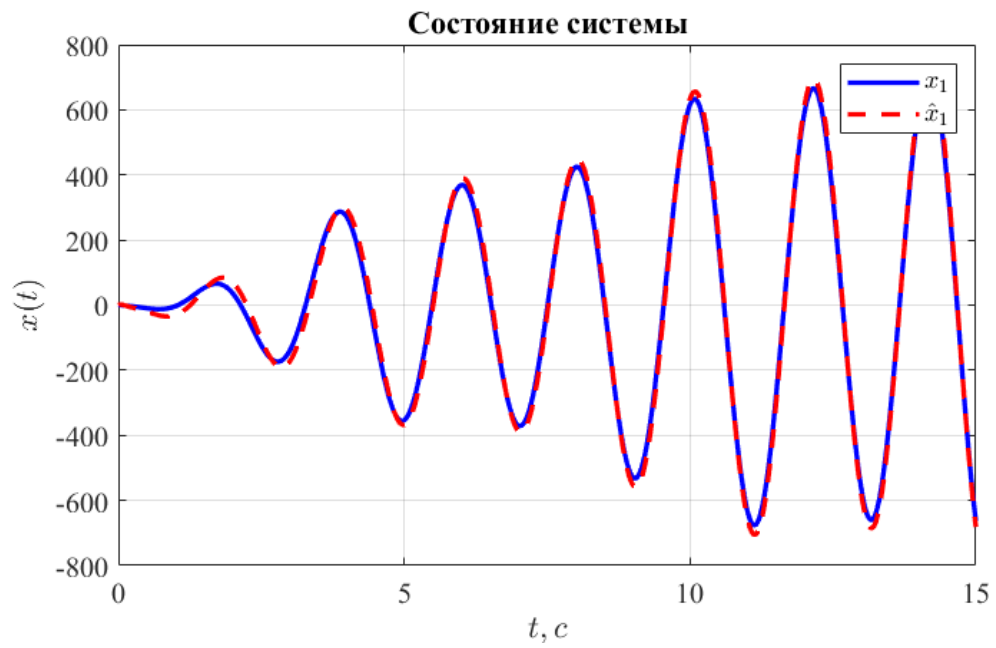


Рис. 38. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

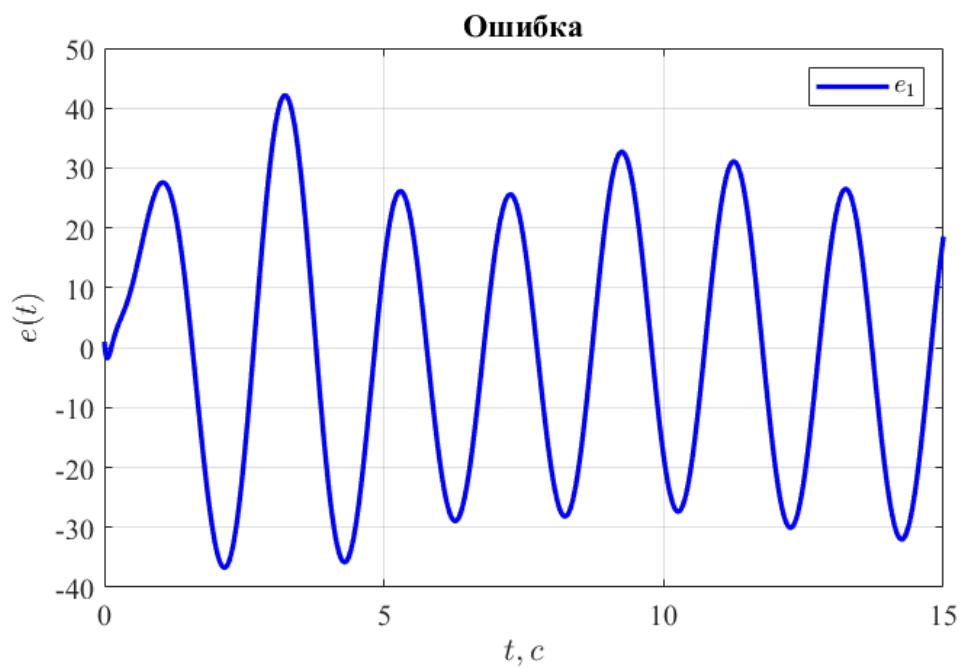


Рис. 39. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

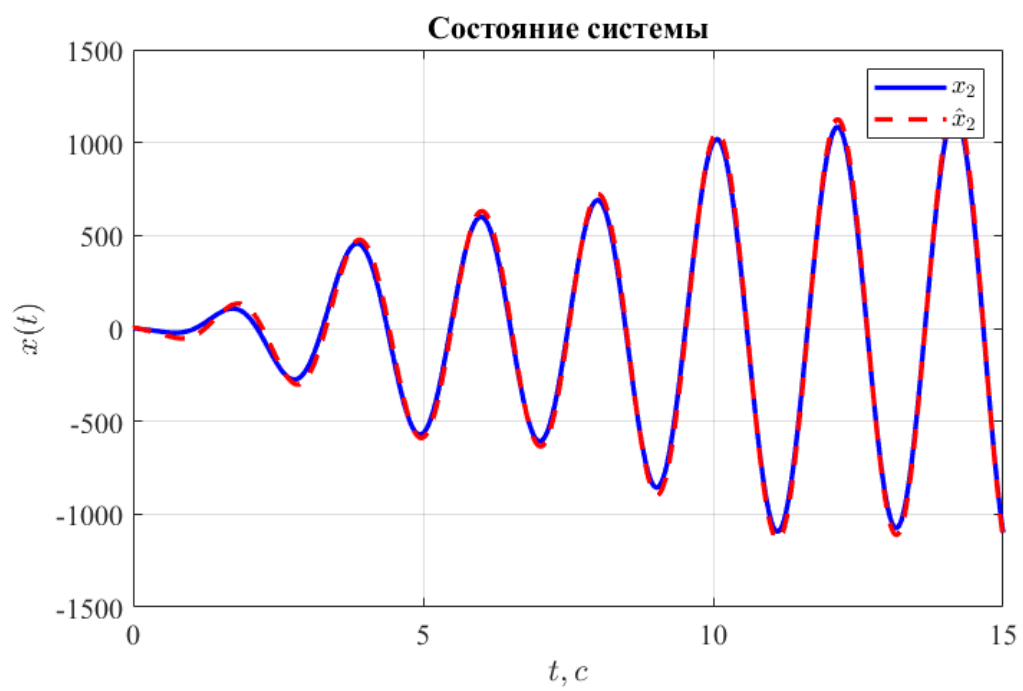


Рис. 40. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

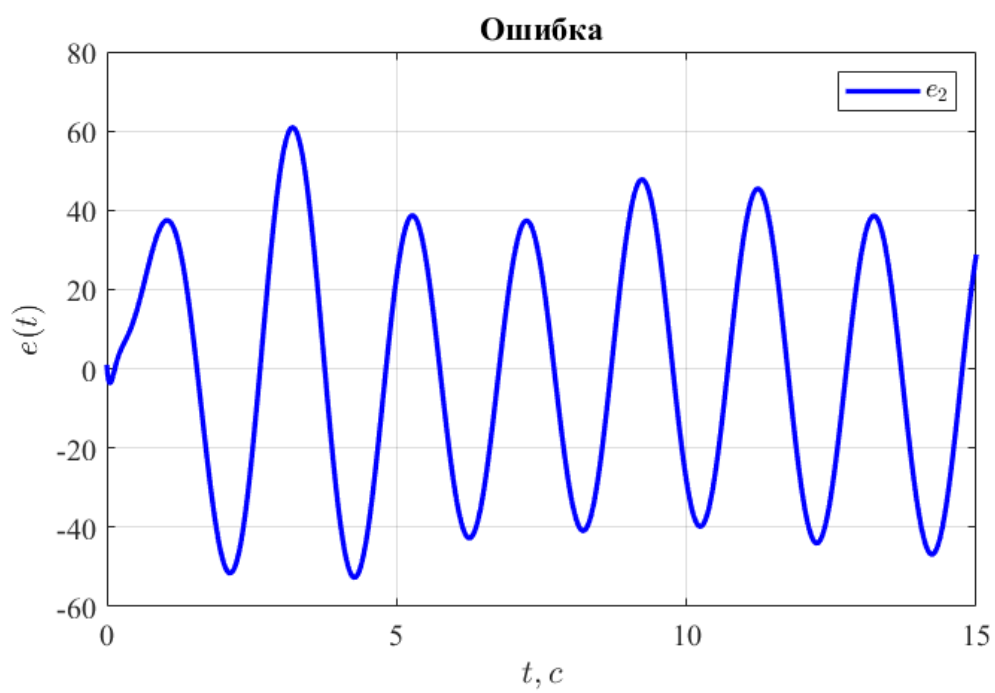


Рис. 41. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

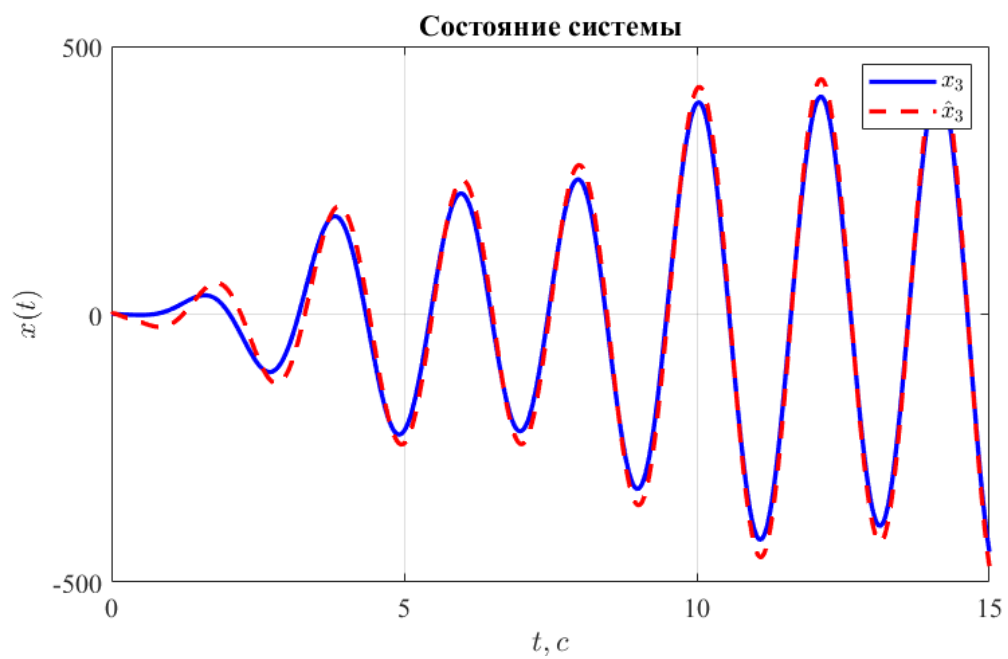


Рис. 42. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

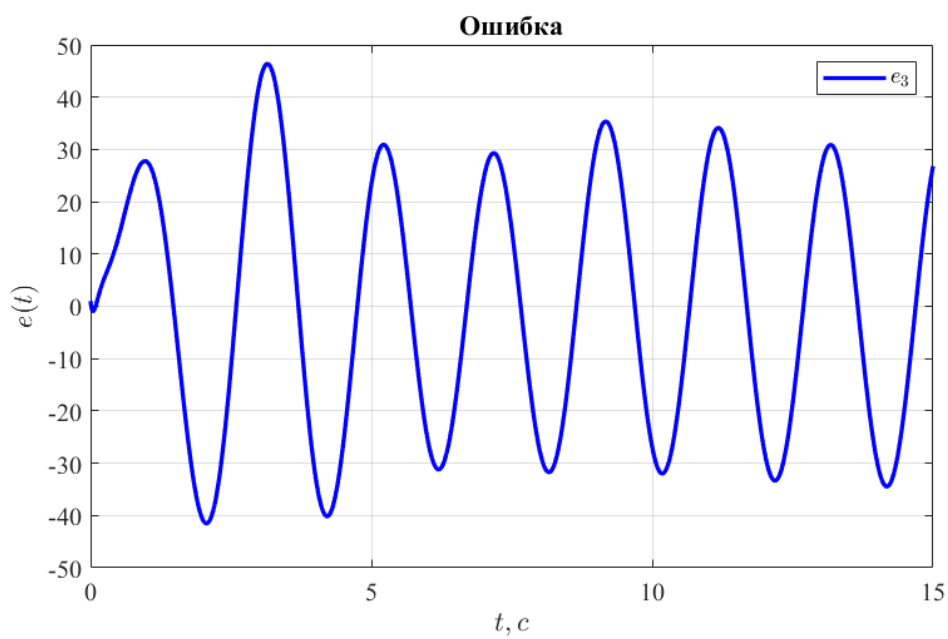


Рис. 43. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

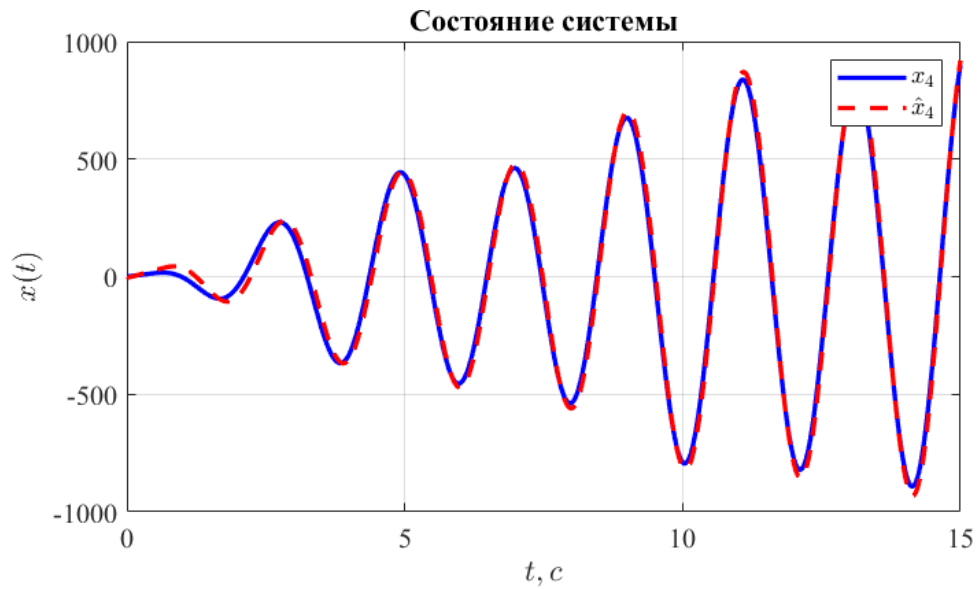


Рис. 44. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

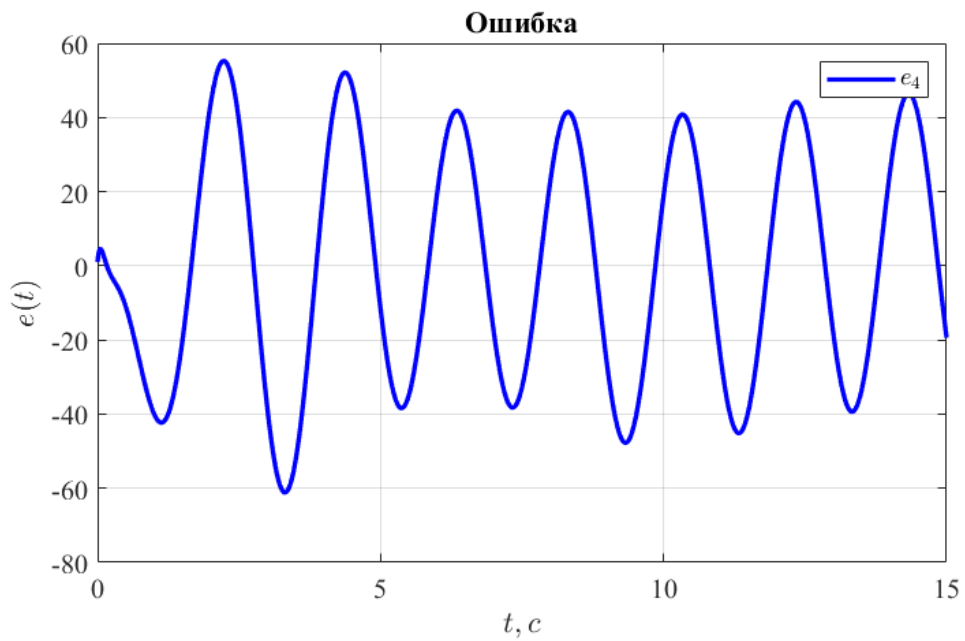


Рис. 45. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

Выводы:

Проведя анализ графиков, с трудом, но можно заметить, что в 3 случае, где мы повышаем только компоненту R , и тем самым обозначаем некую уверенность в том, что на сигнал мало влияют шумы, график ошибки

немного больше, чем в других случаях, что говорит, о том, что наша уверенность опрометчива и шум действительно достаточно влияет на сигнал. Также, из этих же предположений, значения матрицы L получаются меньше по сравнению с остальными, так как мы думаем, что шума почти нет. В противоположном же 2 случае, где увеличиваем только компоненту Q , мы считаем, что шума было много и воздействуем на сигнал с помощью матрицы L сильнее. Кроме этого, как и в предыдущем задании, пропорционально увеличив значения обеих компонент, мы получили идентичные результаты матрицы L и графиков в первом и четвёртом случаях.

Задание 3. Синтез LQG

В соответствии с моим вариантом по Таблице 1 (9) возьмём матрицы A и C из Таблицы 3:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f \\ y = Cx + Du + \xi \end{cases} \quad x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T, \quad (8)$$

Так как у меня нечётный вариант — задамся случайными сигналами $f(t)$ и $\xi(t)$ (гауссовский белый шум), исследуя таким образом LQG.

Далее, выполним следующие шаги:

- Проверим систему на стабилизируемость и обнаруживаемость.
- Построим схему моделирования системы (8), замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния и закона управления $u = K\hat{x}$.
- Зададимся значениями пар матриц (Q_K, R_K) для регулятора и (Q_L, R_L) для наблюдателя.
- Синтезируем матрицу регулятора K используя решение соответствующего матричного уравнения Рикатти (3).
- Синтезируем матрицу коррекции наблюдателя L используя решение соответствующего матричного уравнения Рикатти (7).
- Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$ сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Используя данные из лабораторной работы 2, сделаем вывод, что ***наша система полностью управляема и наблюдаема, а также, стабилизируема и обнаруживаема.***

Спектр матрицы $\sigma(A) = \{-12, 4, 8, 20\}$, $\text{rank } U = \text{rank } V = n = 4$, где матрицы U и V – матрицы управляемости и наблюдаемости соответственно.

Построим схему моделирования системы (8), замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния и закона управления $u = K\hat{x}$.

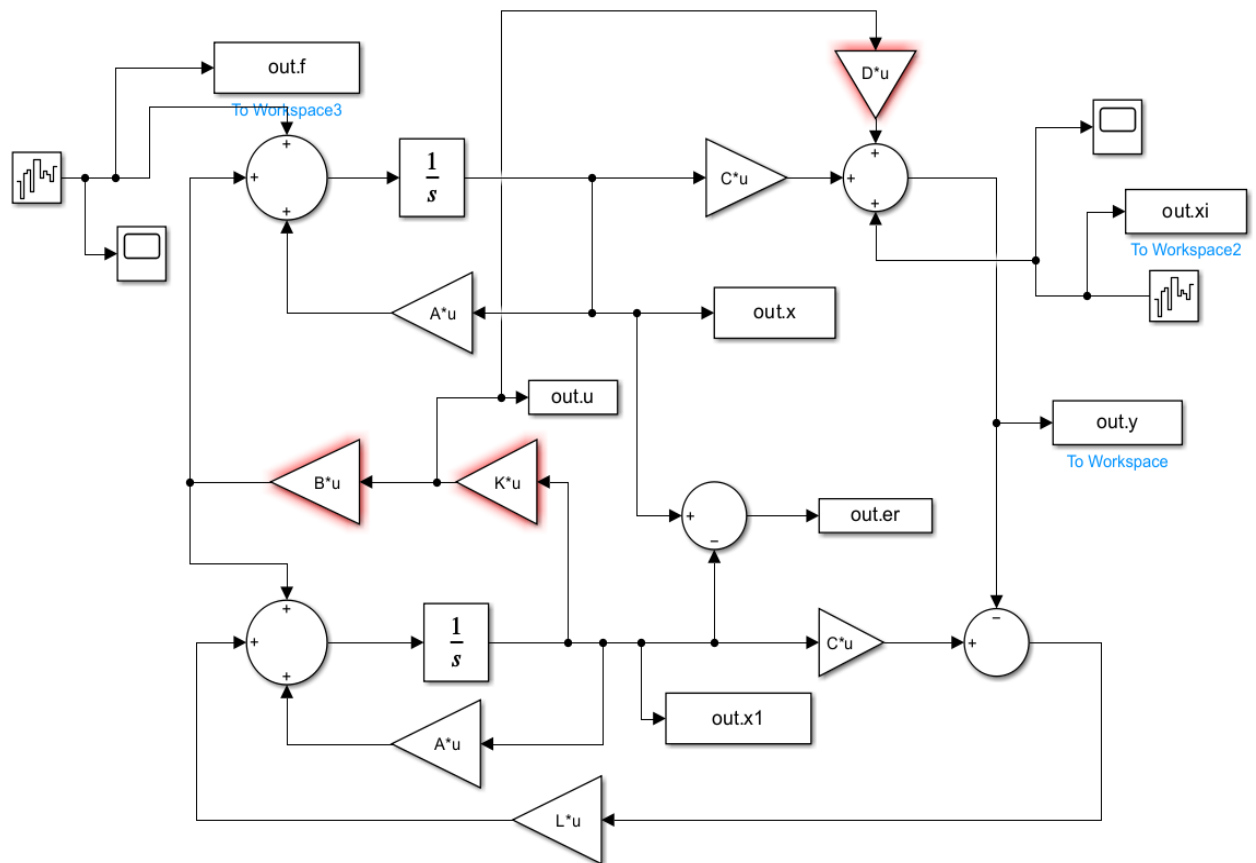


Рис. 46. Схема моделирования системы.

Зададимся значениями пар матриц (Q_K, R_K) для регулятора и (Q_L, R_L) для наблюдателя.

$$Q_K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_K = 0.01$$

$$Q_L = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad R_L = 100$$

Синтезируем матрицы регулятора K, L используя решения соответствующих матричных уравнений Рикатти:

$$K = \begin{bmatrix} 201.5957 & -284.0467 & 183.6294 & 101.0307 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + BK) \approx \{-110, -14, -10, -7\}$$

$$L = \begin{bmatrix} 4.0954 & -2.0087 \\ -2.0057 & 2.0087 \\ -4.0954 & -2.0087 \\ -2.0057 & -2.0087 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + LC) \approx \{-4, -8, -12, -20\}$$

Выполним компьютерное моделирование системы:

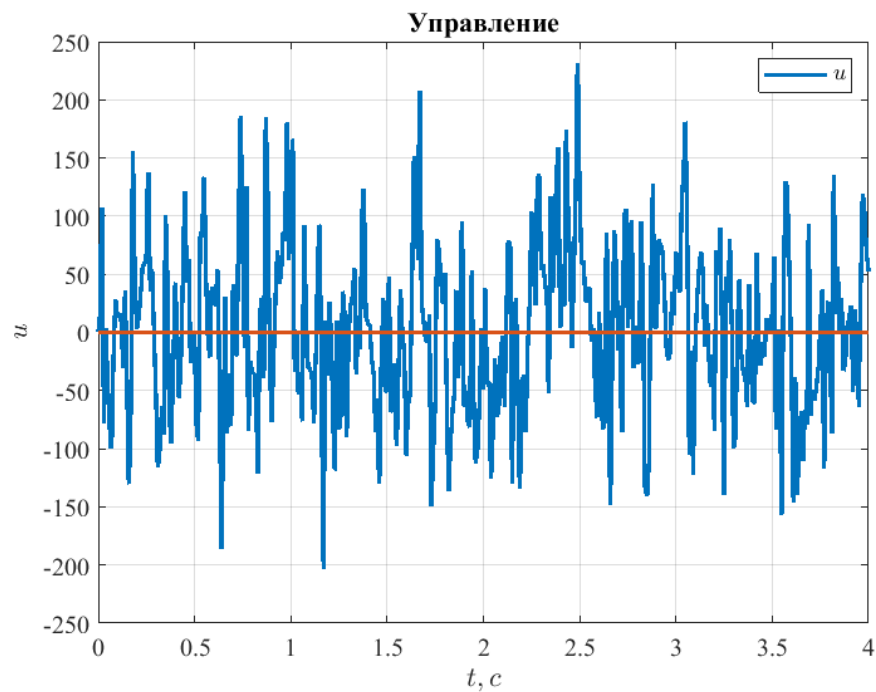


Рис 47. График управления

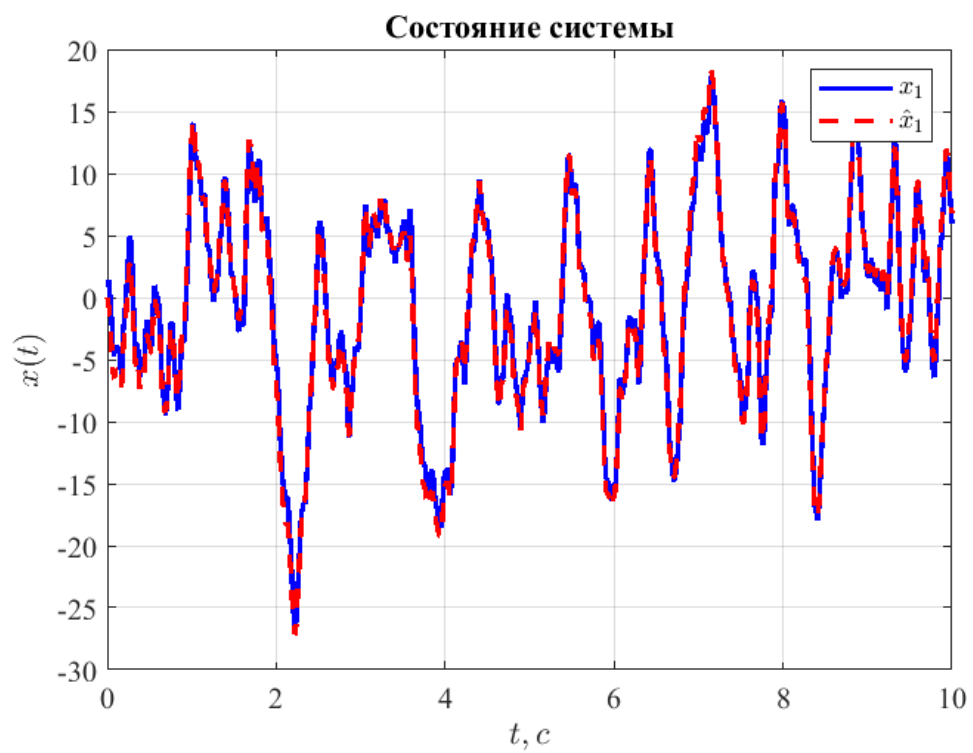


Рис. 48. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

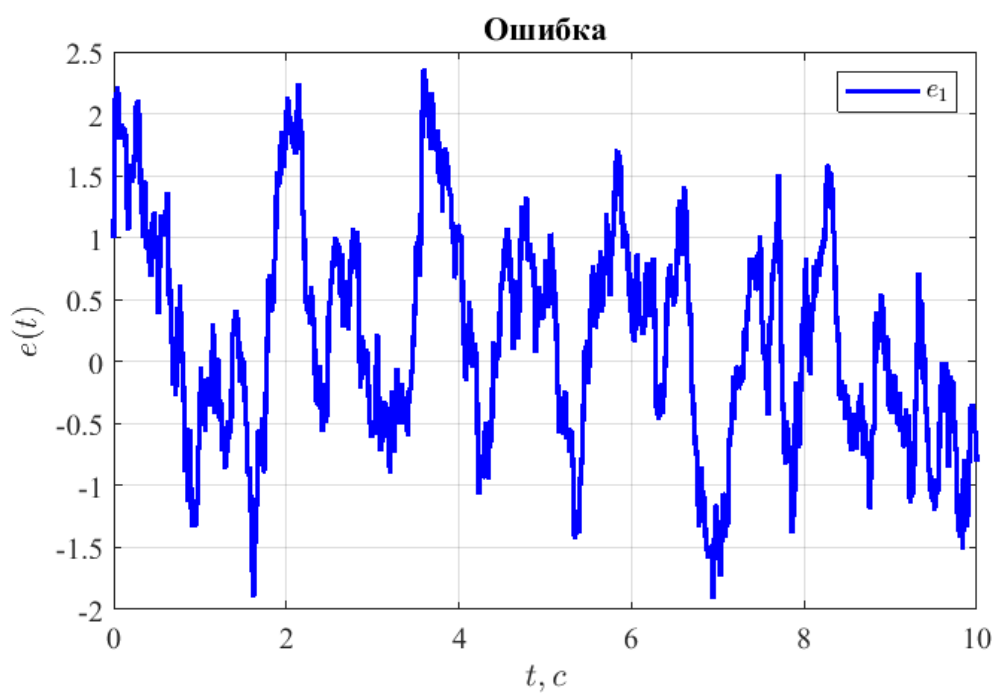


Рис. 49. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

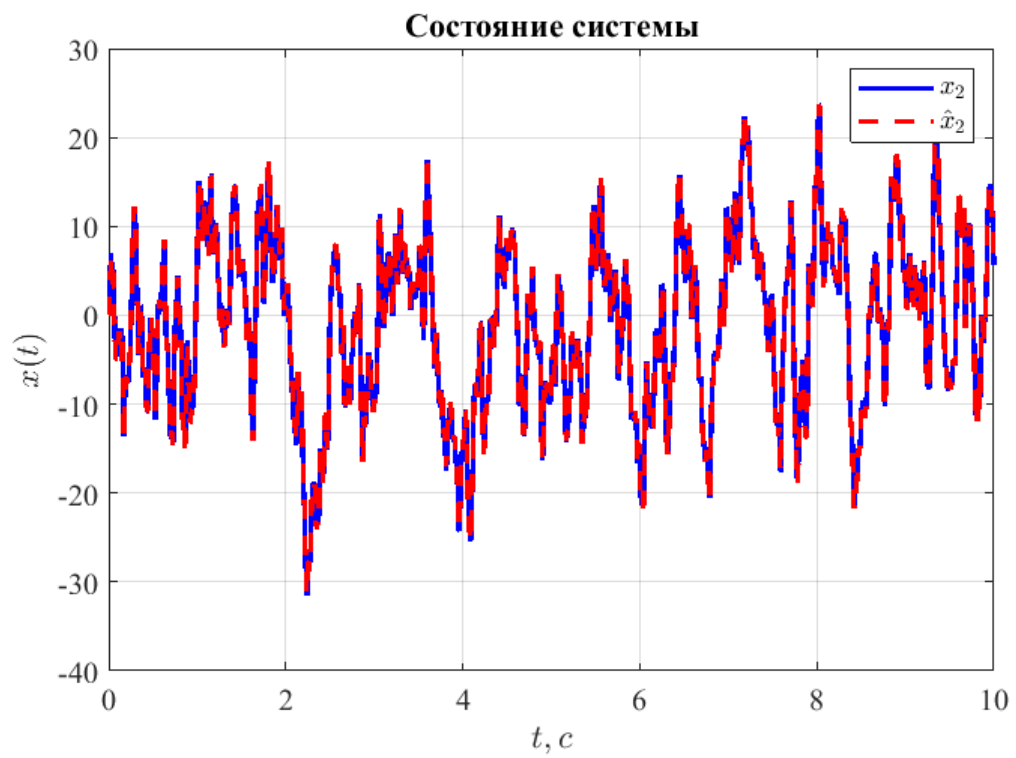


Рис. 50. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

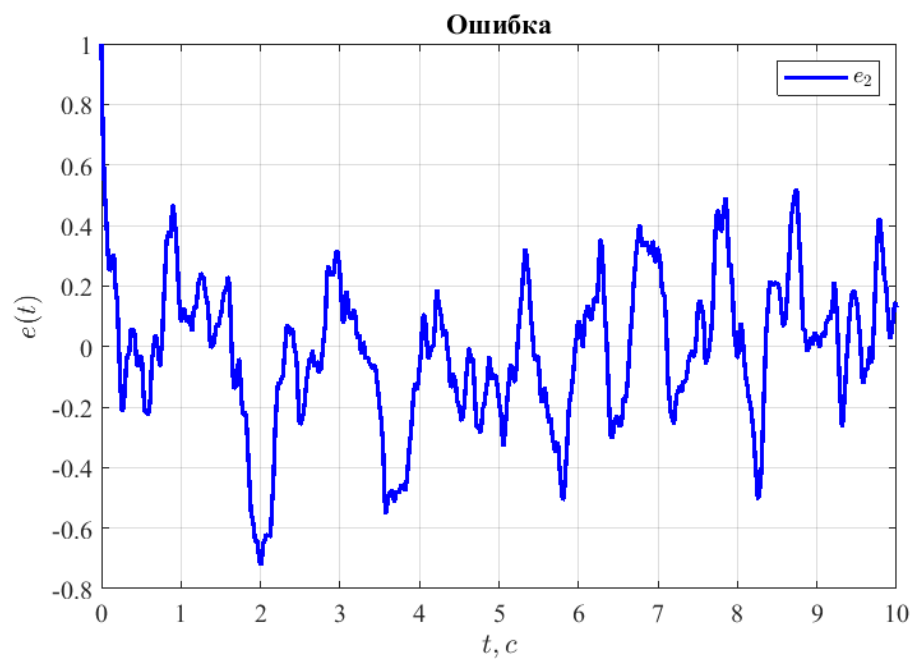


Рис. 51. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

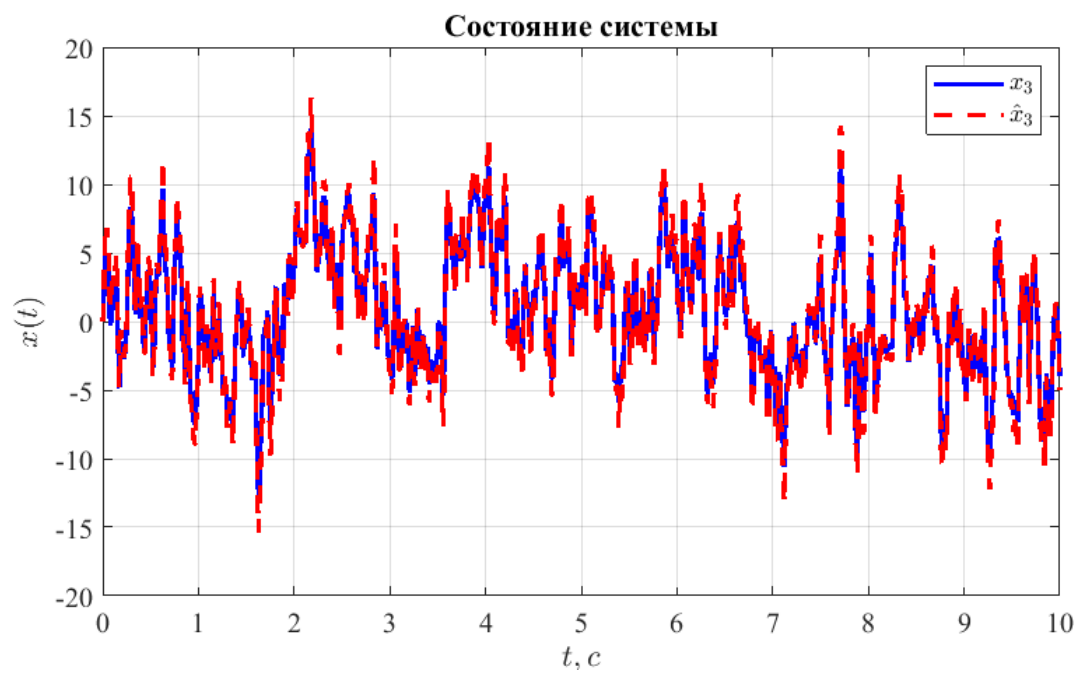


Рис. 52. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

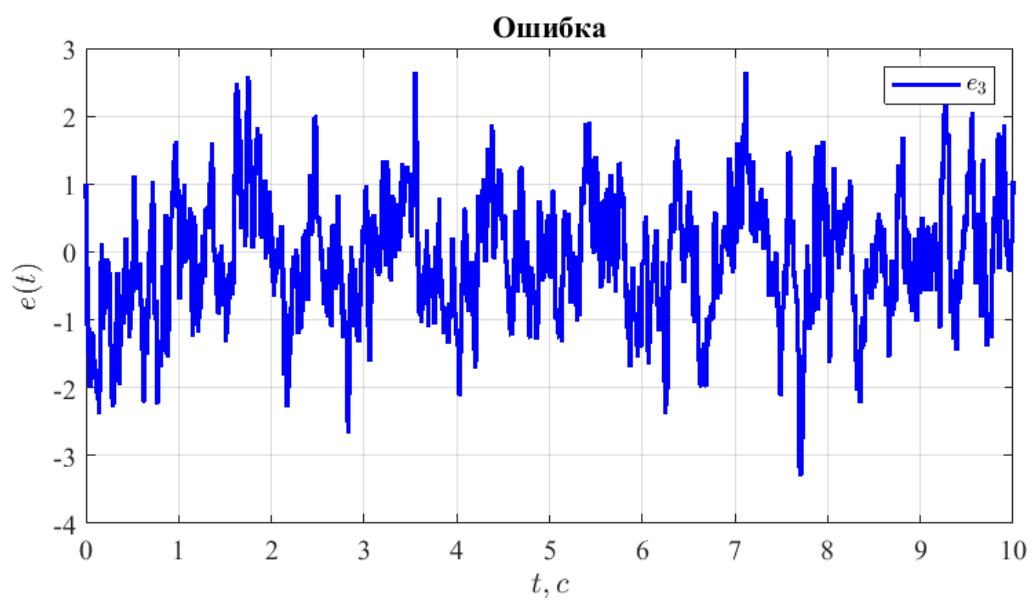


Рис. 53. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

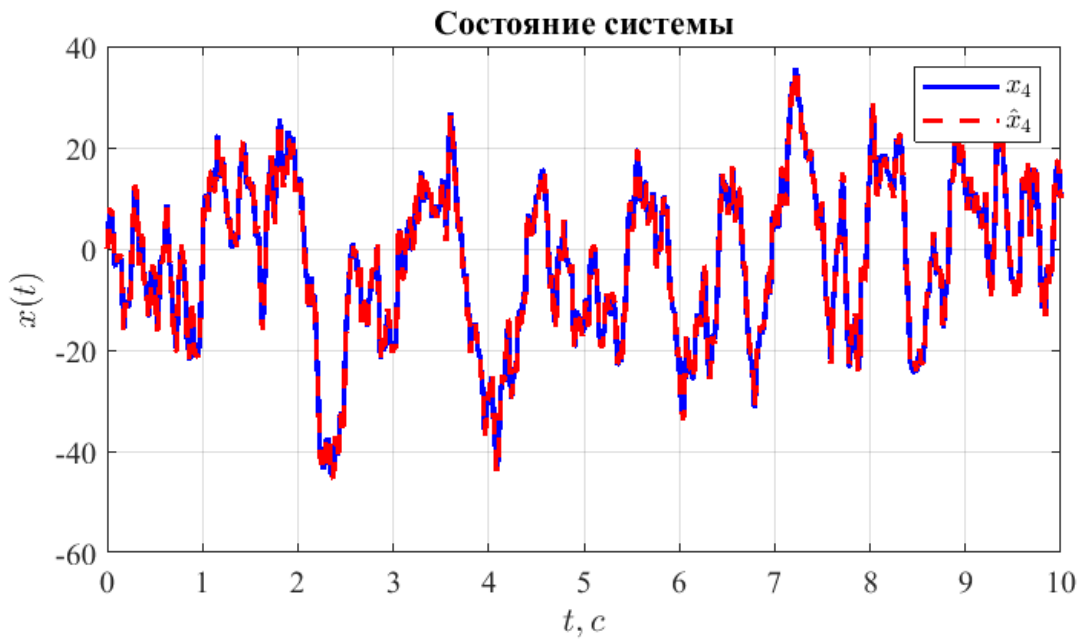


Рис. 54. Сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

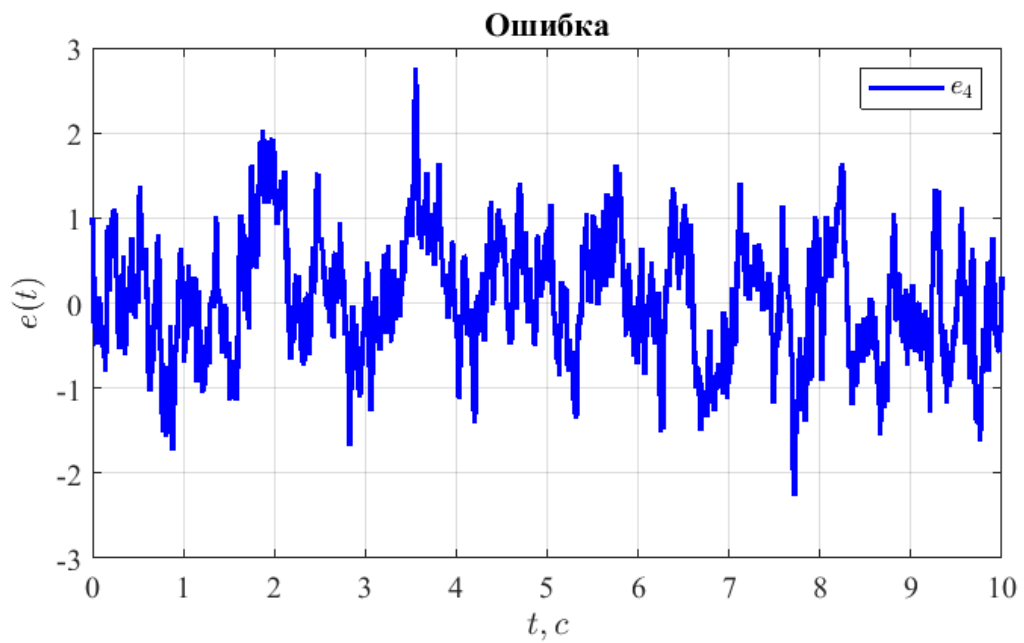


Рис. 55. График ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

Выводы:

Как можно заметить ошибку свести к нулю не удалось, но за счёт маленького значения R у регулятора, нам удалось сделать её меньше, так как уменьшив R , уменьшилось ограничение на управление.

Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы я познакомился с новыми методами синтеза регулятора и наблюдателя линейных систем, в которых можно учитывать желаемые параметры скорости процесса и величину затраченного управления. Провёл синтез данных регуляторов, а также LQR и LQE – моделей вместе взятых.

Приложение

Вариант	Задания		Вариант	Задания		Вариант	Задания	
	1 и 2	3		1 и 2	3		1 и 2	3
1	№ 1	№ 6	11	№ 6	№ 11	21	№ 11	№ 1
2	№ 2	№ 7	12	№ 7	№ 12	22	№ 12	№ 2
3	№ 3	№ 8	13	№ 8	№ 13	23	№ 13	№ 3
4	№ 4	№ 9	14	№ 9	№ 14	24	№ 14	№ 4
5	№ 5	№ 10	15	№ 10	№ 15	25	№ 15	№ 5
6	№ 1	№ 11	16	№ 6	№ 1	26	№ 11	№ 6
7	№ 2	№ 12	17	№ 7	№ 2	27	№ 12	№ 7
8	№ 3	№ 13	18	№ 8	№ 3	28	№ 13	№ 8
9	№ 4	№ 14	19	№ 9	№ 4	29	№ 14	№ 9

Таблица 1: Распределение Заданий по Вариантам

№	A	B	№	A	B	№	A	B
1	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 11 & -2 & 13 \\ 6 & -1 & 6 \\ -6 & -1 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 7 & 10 & 5 \\ -10 & -13 & -10 \\ 10 & 10 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -6 & -9 & -8 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 17 & -5 & 20 \\ 10 & -3 & 10 \\ -10 & 0 & -13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 15 \\ 6 & 1 & 6 \\ -6 & -3 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ -4 & -6 & -6 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 12 & -1 & 14 \\ 6 & 0 & 6 \\ -6 & -2 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$

Таблица 2: Исходные данные для Задания 1

№	A	C^T	№	A	C^T
1	$\begin{bmatrix} 25 & 8 & -20 & 13 \\ -38 & -11 & 30 & -18 \\ 40 & 13 & -33 & 21 \\ 38 & 12 & -32 & 19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 20 & 5 & -16 & 9 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 32 & 9 & -25 & 14 \\ 8 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 & -1 \\ -34 & -9 & 26 & -14 \\ -8 & -1 & 5 & -1 \\ 18 & 4 & -16 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 35 & 9 & -28 & 16 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ 56 & 16 & -44 & 25 \\ 18 & 8 & -14 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 25 & 40 & 18 & -30 \\ -17 & -27 & -13 & 20 \\ -10 & -14 & -7 & 14 \\ -7 & -10 & -6 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Таблица 3: Исходные данные для Задания 2

№	A	B	C	D
11	$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -5 & 7 \\ -3 & 3 & -7 & 5 \\ -5 & -7 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 12 & 0 \\ 12 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} 5 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Таблица 4: Исходные данные для Задания 3