

” Теория автоматического управления ”

Лабораторная работа №2

Модальные регуляторы и наблюдатели

Выполнил: Бухарев Святослав Андреевич

Факультет: СУиР

Группа: R3381

Вариант 9

Преподаватели: Перегудин А. А., Пашенко А. В.

Санкт-Петербург

Задание 1. Модальный регулятор

В соответствии с моим вариантом (9) по Таблице 1 (см. приложение) возьму матрицы A и B из Таблицы 2 и рассмотрю систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Далее выполню следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости и стабилизируемости системы:

Воспользуемся критерием Хаутуса:

1) $\lambda_1 = -3$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_1 = 2 \neq n$$

- неуправляемое собственное число.

2) $\lambda_2 = 1 - 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 - 2i & 0 & 10 & 1 \\ 4 & -2 - 2i & 4 & -1 \\ -4 & -2 & -8 - 2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_2 = 3 = n$$

- управляемое собственное число.

3) $\lambda_3 = 1 + 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = [A - \lambda I \quad B] = \begin{bmatrix} 6 + 2i & 0 & 10 & 1 \\ 4 & -2 + 2i & 4 & -1 \\ -4 & -2 & -8 + 2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_3 = 3 = n$$

- управляемое собственное число.

Как итог, **2 собственных числа матрицы A управляемы, одно нет, значит система неполностью управляема.**

Также, неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -3$ – устойчивое, следовательно, **система стабилизируемая и данное число входит в подпространство неуправляемых состояний данной системы.**

- Построить схему моделирования системы (1), замкнутой регулятором $u = Kx$:

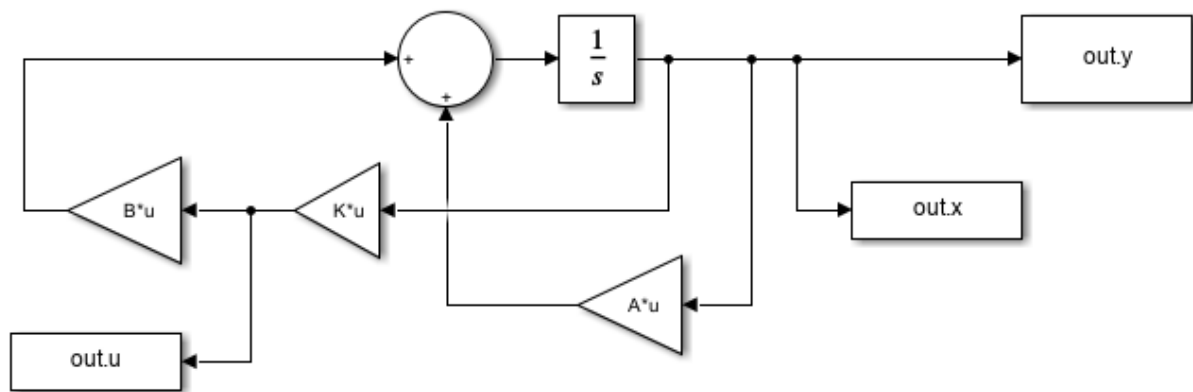


Рисунок 1. Схема моделирования системы.

- Рассмотреть предложенные в соответствии с вариантом Таблицей 2 желаемые спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определить, какие из них достижимы, а какие нет. Обосновать выбор.

Варианты спектра $\sigma(A + BK)$:

$$\begin{aligned} &\{-2, -2, -2\}, \quad \{-3, -3, -3\}, \\ &\{-2, -20, -200\}, \quad \{-3, -30, -300\}, \\ &\{-2, -2 \pm 6i\}, \quad \{-3, -3 \pm 9i\} \end{aligned}$$

Так как мы выяснили, что неуправляемым является только число -3 , то это значит, что его нельзя поменять с помощью преобразований матрицы K и, следовательно, спектр системы $(A + BK)$ должен содержать данное собственное число.

Поэтому достижимыми спектрами будут считаться спектры:

$$\begin{aligned} &\{-3, -3, -3\} \\ &\{-3, -30, -300\} \\ &\{-3, -3 \pm 9i\} \end{aligned}$$

- Для каждого из достижимых спектров вашего варианта из Таблицы 2:
 - Найти соответствующую матрицу регулятора K , приводящий спектр замкнутой системы к желаемому.
 - Определить собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и сравнить с желаемым спектром в подтверждение корректности синтеза регулятора.
 - Выполнить компьютерное моделирование и построить графики формируемого регулятором управления $u(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$.

Первый достижимый спектр

$$\{-3, -3, -3\}$$

Так как наша система не полностью управляема, то по сути надо воспользоваться методом “усечения”, но, как я выяснил, Матлаб справился с полной системой, поэтому обойдёмся без него.

Воспользуемся уравнением модального регулятора:

$$\begin{cases} AP - PG = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

где матрица G – матрица нашего желаемого спектра;

K – матрица регулятора;

P – вспомогательная матрица;

Y – матрица выхода такая, чтобы (Y, G) – наблюдаемая пара.

Получаем:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = [1 \ 1 \ 1]$$

При помощи специального кода в Матлабе и библиотеки `svh` решаем систему и получаем K :

$$K = [-3.5385 \quad 0.9737 \quad -3.4878]$$

И при проверке получаю, что собственные числа матрицы $(A + B * K)$ равны:

$$\text{eig}(A + B * K) = \{-3, -3, -3\}$$

- как и наш желаемый нами спектр, регулятор синтезирован корректно.

Построим графики:

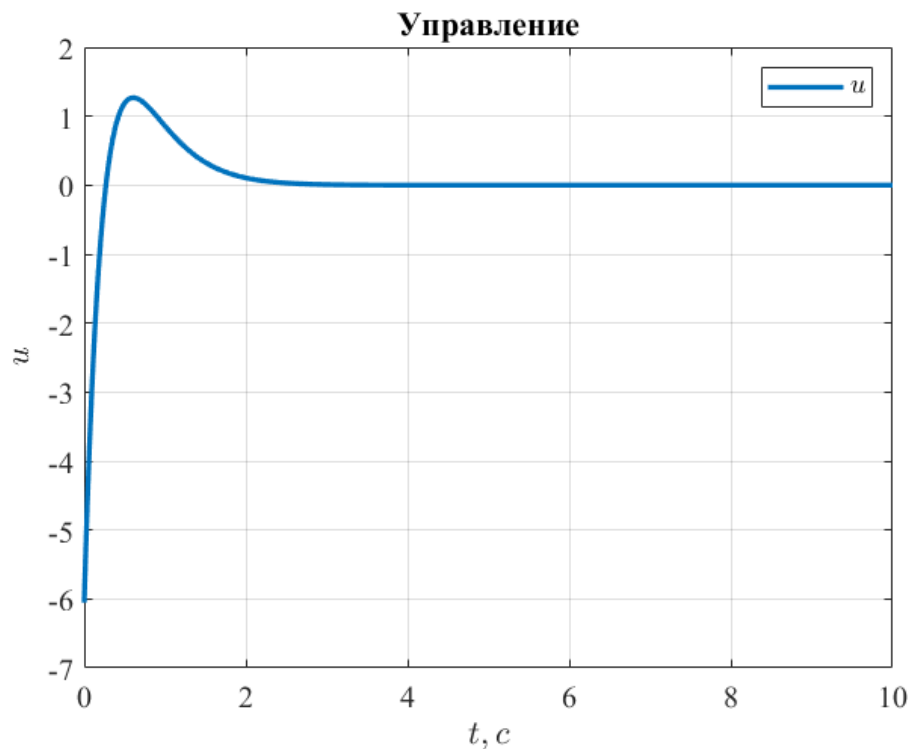


Рисунок 2. Управляющее воздействие

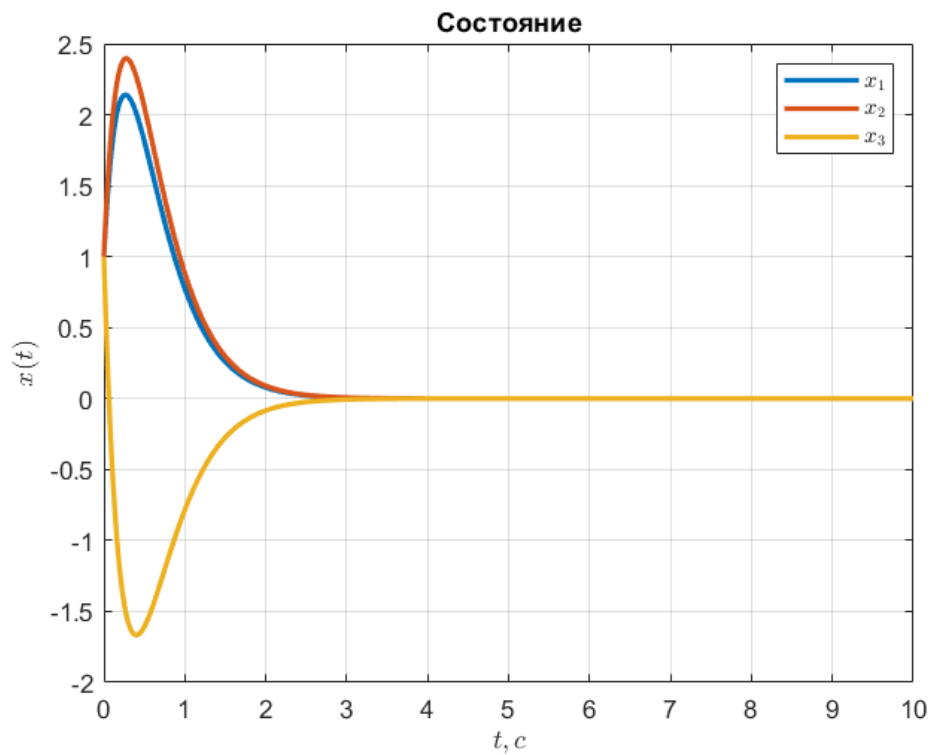


Рисунок 3. Состояние системы.

Второй достижимый спектр

$$\{-3, -30, -300\}$$

Наши матрицы:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{bmatrix}, \quad Y = [1 \ 1 \ 1]$$

При помощи специального кода в Матлабе и библиотеки svx решаем систему и получаем К:

$$K = [-486.4231 \quad 27.4038 \quad 181.8269]$$

И при проверке получаю, что собственные числа матрицы $(A + B * K)$ равны:

$$eig(A + B * K) = \{-3, -30, -300\}$$

- как и желаемый спектр, регулятор синтезирован корректно.

Графики:

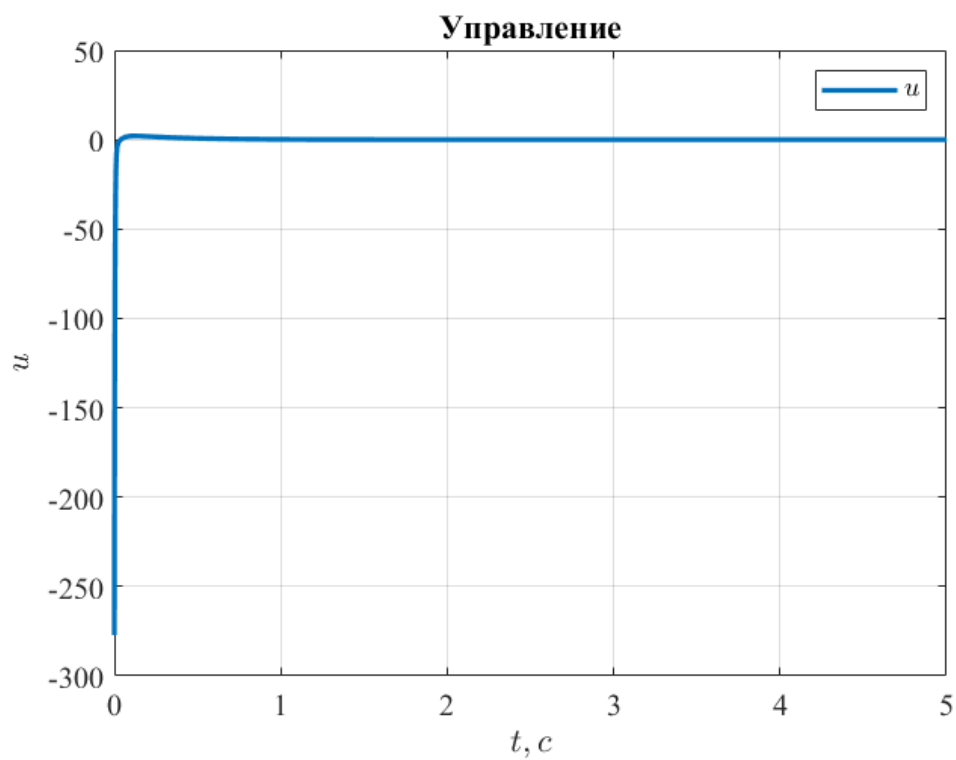


Рисунок 4. Управляющее воздействие

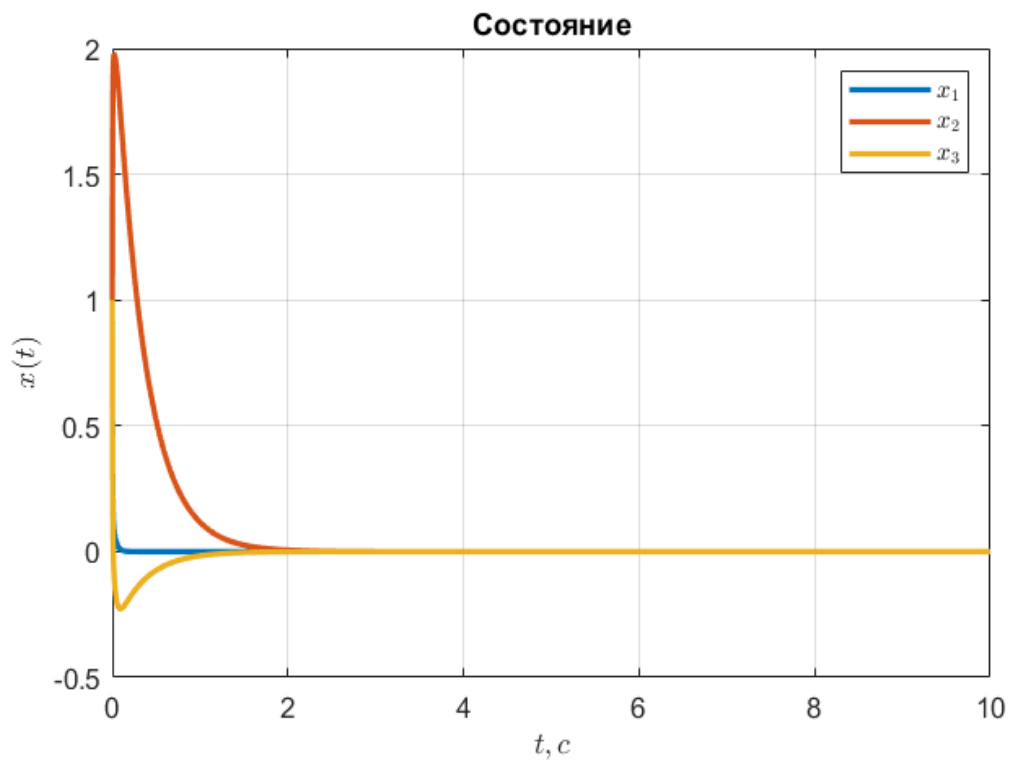


Рисунок 5. Состояние системы.

Третий достижимый спектр

$$\{-3, -3 \pm 9i\}$$

Наши матрицы:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -9 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = [1 \ 1 \ 1]$$

При помощи специального кода в Матлабе и библиотеки `svx` решаем систему и получаем K :

$$K = [-6.6538 \quad 1.4423 \quad 0.0962]$$

И при проверке получаю, что собственные числа матрицы $(A + BK)$ равны:

$$\text{eig}(A + BK) = \{-3, -3 \pm 9i\}$$

- как и желаемый спектр, а значит регулятор синтезирован корректно.

Графики:

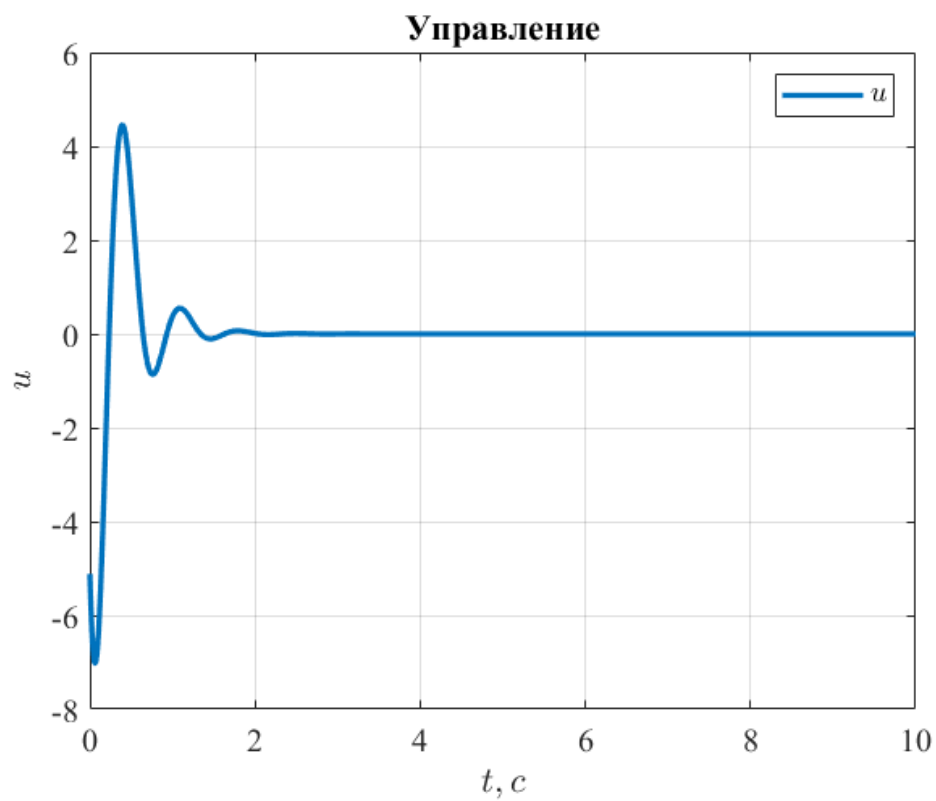


Рисунок 6. Управляющее воздействие

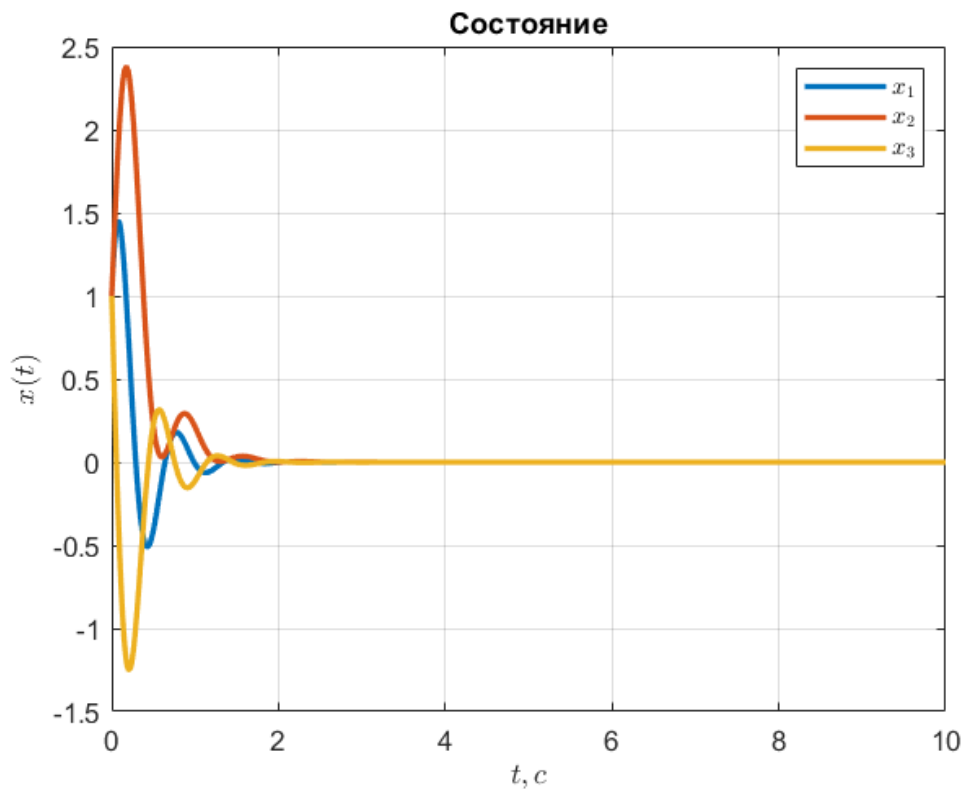


Рисунок 7. Состояние системы.

Выводы:

Используя сравнительно малые устойчивые значения спектра, мы получаем, что система достаточно быстро и с определённым перерегулированием сходится к нулю. В сравнение с первым спектром, во втором мы использовали большие отрицательные значения, и именно поэтому управление в начале такое больше, но система практически сразу приходит к устойчивому состоянию и время перерегулирования системы близко к нулю. Но в реальном мире это может привести к выходу из строя объекта, так как практически не реально задать такие большие значения и не сжечь при этом оборудование. В третьей системе мы имеем в спектре комплексные числа, именно поэтому наши графики имеют большие колебания в сравнении с двумя предыдущими.

Задание 2. Наблюдатель полного порядка

Возьмём матрицы A и C из Таблицы 3:

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

Выполним следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

Воспользуемся критерием Хаутуса:

1) $\lambda_1 = 3i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 - 3i & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 - 3i & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 - 3i & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 - 3i \\ -7 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_1 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

2) $\lambda_2 = -3i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 + 3i & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 + 3i & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 + 3i & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 + 3i \\ -7 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_2 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

3) $\lambda_3 = 2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 - 2i & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 - 2i & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 - 2i & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 - 2i \\ -7 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_3 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

4) $\lambda_3 = -2i$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 + 2i & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 + 2i & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 + 2i & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 + 2i \\ -7 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_3 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

Построить сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Мы имеем спектры:

$$\{-4, -4, -4, -4\}$$

$$\{-4, -40, -400, -4000\}$$

$$\{-4 \pm 5i, -4 \pm 6i\}$$

Первый спектр

$$\{-4, -4, -4, -4\}$$

Чтобы найти такую L , чтобы динамика ошибки имела желаемый спектр, составим и решим уравнение модального наблюдателя:

$$\begin{cases} GQ - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

где матрица G – матрица желаемого спектра;

L – матрица наблюдателя;

Q – вспомогательная матрица;

Y – матрица выхода такая, чтобы (G, Y) – управляемая пара.

Желательно, чтобы при этом выполнялись все эти условия:

$$\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(G) = \emptyset \\ (G, Y) - \text{управляема} \\ (C, A) - \text{наблюдаема} \end{cases}$$

Получаем:

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

При помощи специального кода в Матлабе и библиотеки svx решаем систему и получаем L:

$$L = \begin{bmatrix} 11.0838 \\ 16.9940 \\ 9.7415 \\ -15.6224 \end{bmatrix}$$

При проверке получаю, что собственные числа матрицы $(A + LC)$ равны:

$$\text{eig}(A + LC) = \begin{bmatrix} -4.0045 + 0.0045i \\ -4.0045 - 0.0045i \\ -3.9955 + 0.0045i \\ -3.9955 - 0.0045i \end{bmatrix}$$

- с небольшой погрешностью вычислений можно сказать, что это почти что наш спектр и синтез наблюдателя выполнен корректно.

Построим графики:

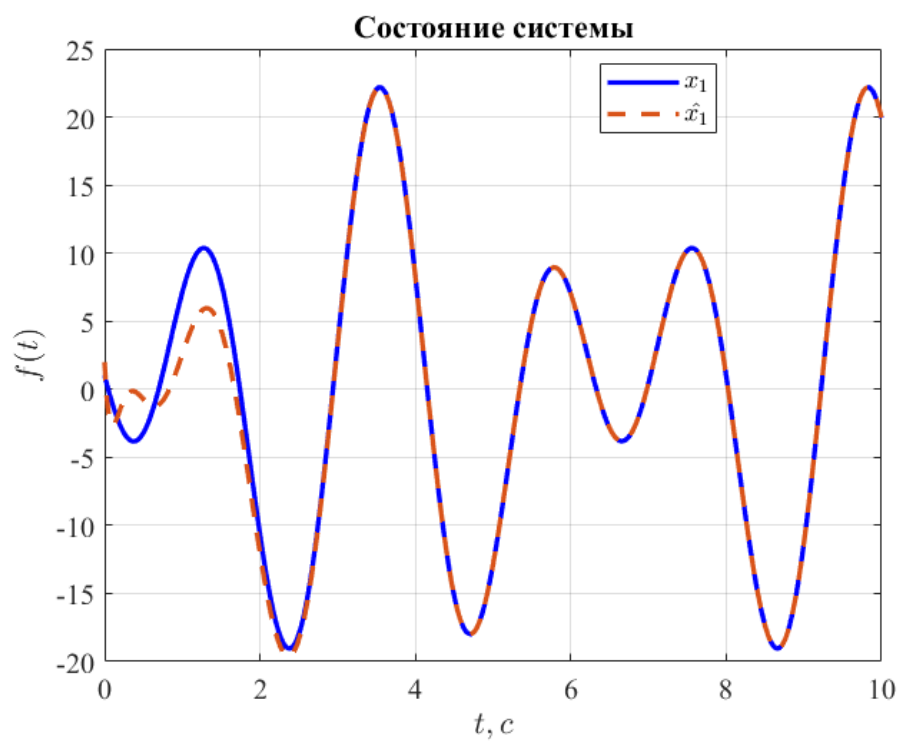


Рисунок 9. Графики сигналов $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$

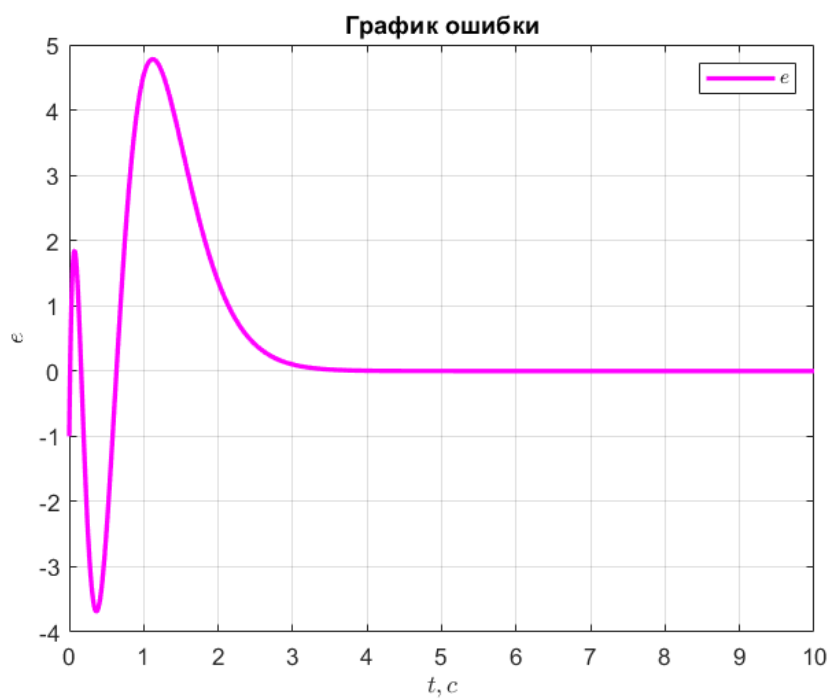


Рисунок 10. Ошибка наблюдателя e_1 .

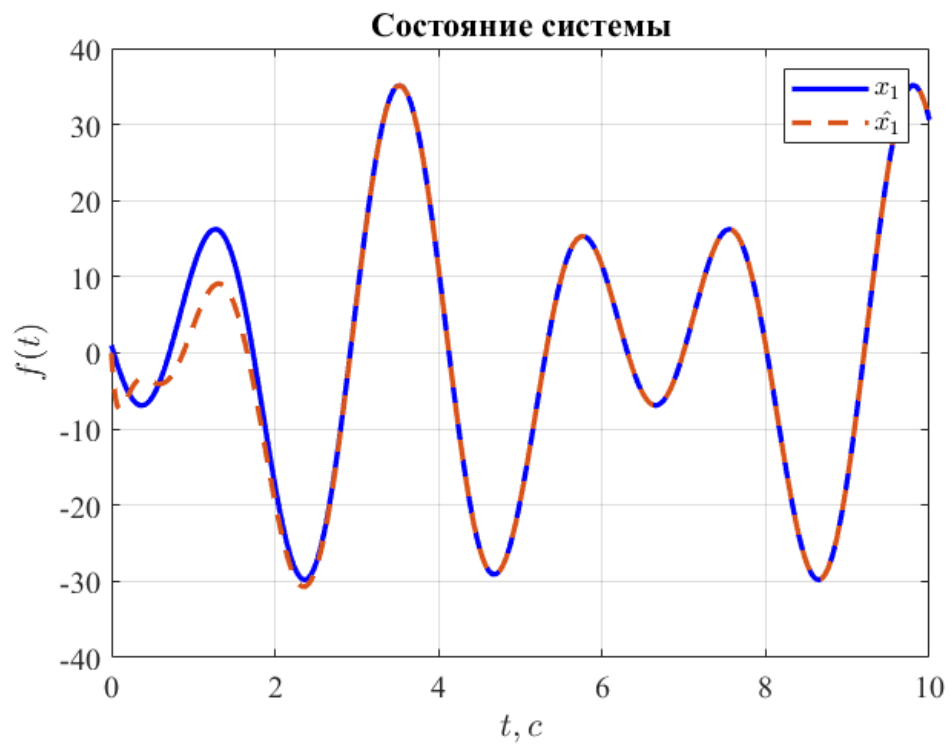


Рисунок 11. Графики сигналов $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$

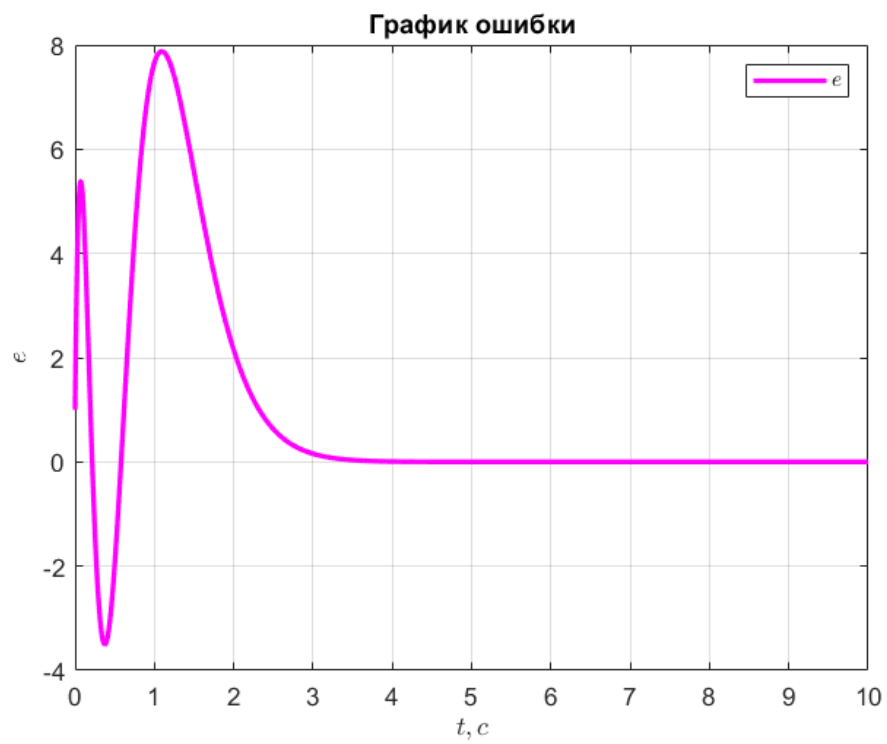


Рисунок 12. Ошибка наблюдателя e_2 .

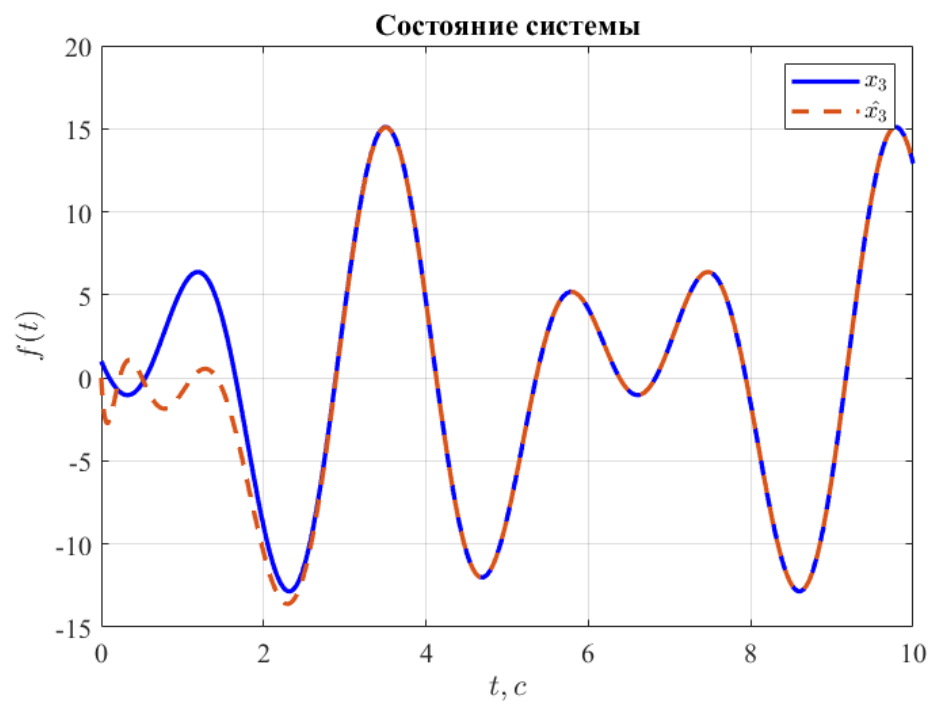


Рисунок 13. Графики сигналов $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$

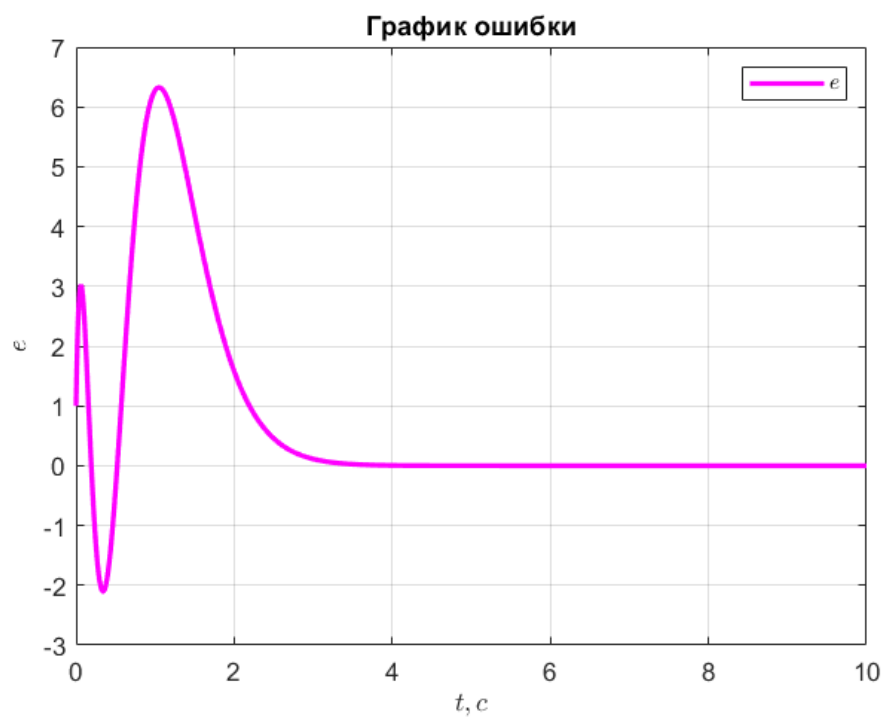


Рисунок 14. Ошибка наблюдателя e_3 .

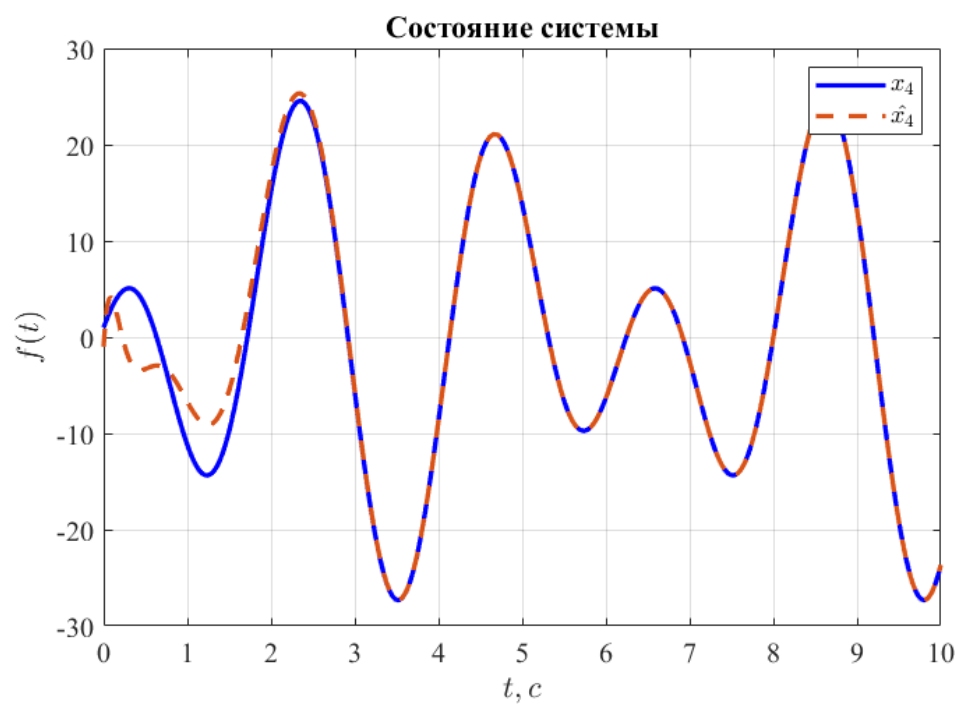


Рисунок 15. Графики сигналов $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$

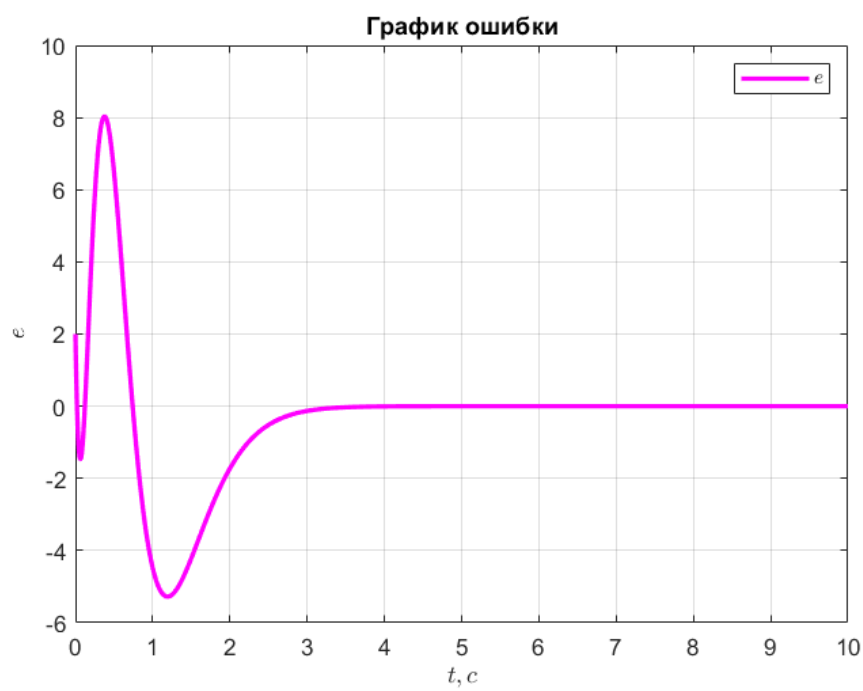


Рисунок 16. Ошибка наблюдателя e_4 .

Второй спектр

$$\{-4, -40, -400, -4000\}$$

Составим и решим уравнение модального наблюдателя:

$$\begin{cases} GQ - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

Желательно, чтобы при этом выполнялись все эти условия:

$$\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(G) = \emptyset \\ (G, Y) - \text{управляема} \\ (C, A) - \text{наблюдаема} \end{cases}$$

Получаю:

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4000 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

При помощи специального кода в Матлабе и библиотеки svx решаем систему и получаем L:

$$L = 10^6 * \begin{bmatrix} 0.3157 \\ 0.9717 \\ 1.2754 \\ 0.7427 \end{bmatrix}$$

При проверке получаю, что собственные числа матрицы $(A + LC)$ равны:

$$eig(A + LC) = 10^3 * \begin{bmatrix} -4 \\ -0.4 \\ -0.04 \\ -0.004 \end{bmatrix}$$

- что полностью совпадает с заданным спектром, поэтому синтез наблюдателя выполнен корректно.

Построим графики:

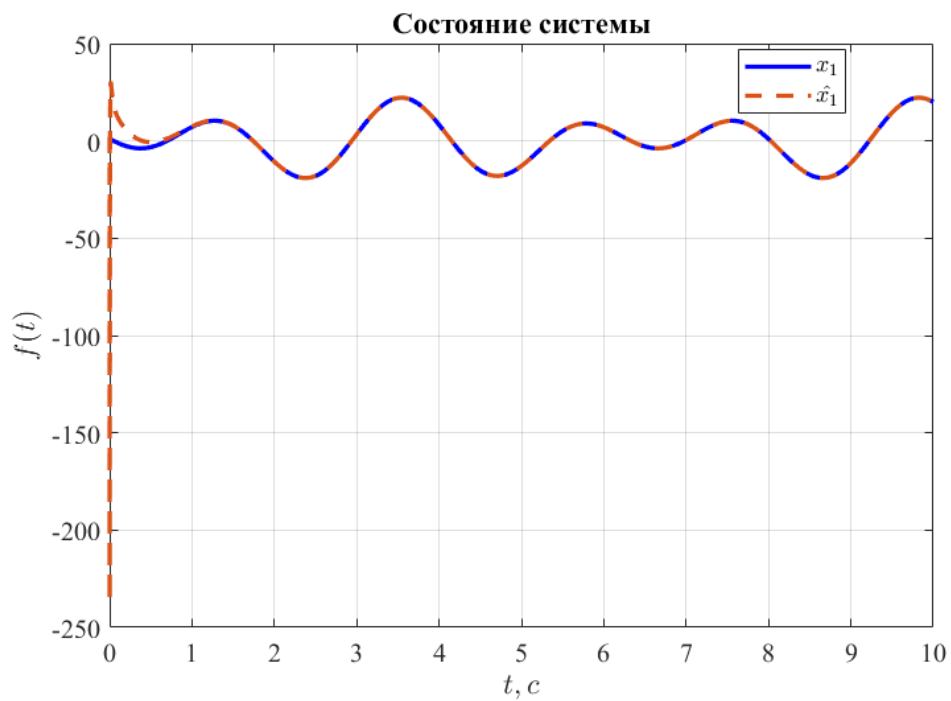


Рисунок 17. Графики сигналов $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$

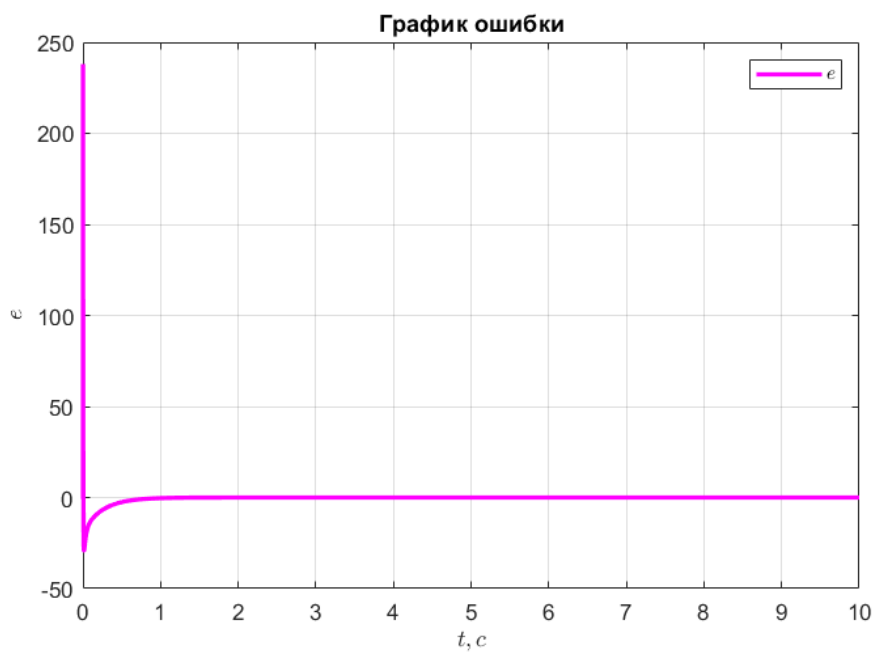


Рисунок 18. Ошибка наблюдателя e_1 .

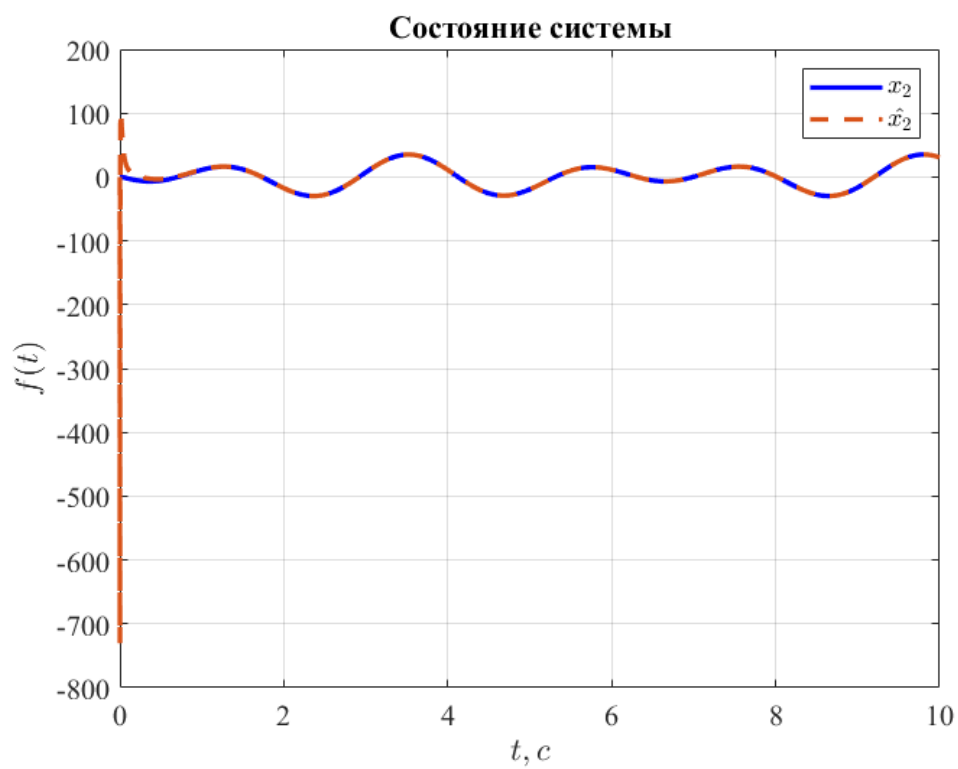


Рисунок 19. Графики сигналов $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$

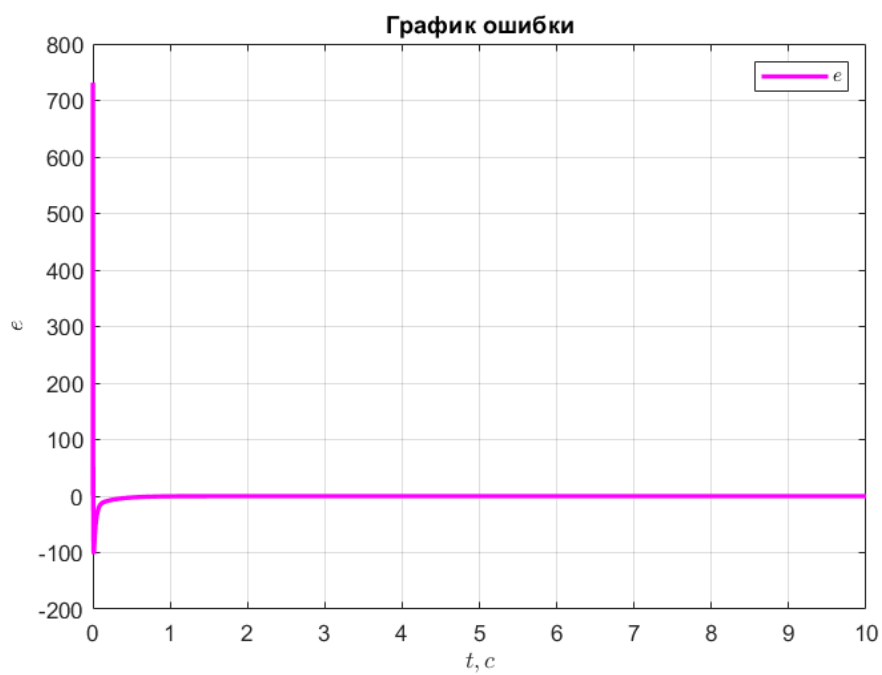


Рисунок 20. Ошибка наблюдателя e_2 .

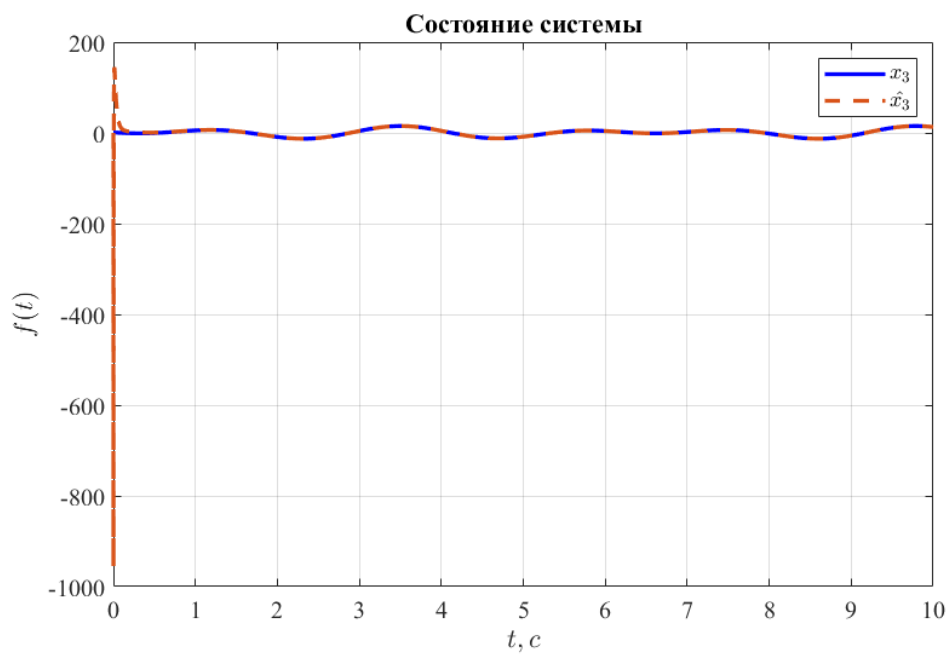


Рисунок 21. Графики сигналов $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$

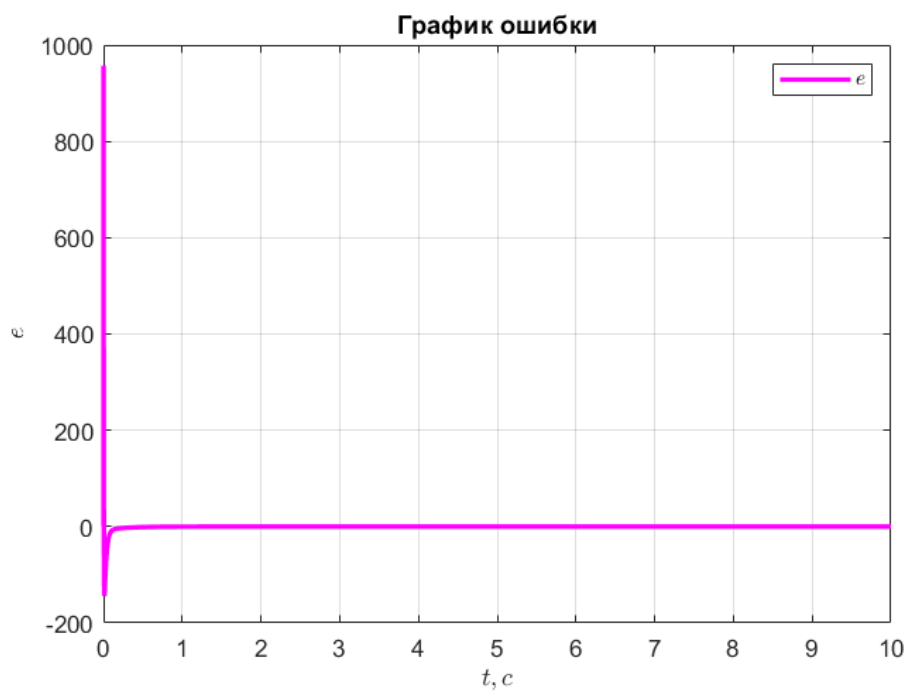


Рисунок 22. Ошибка наблюдателя e_3 .

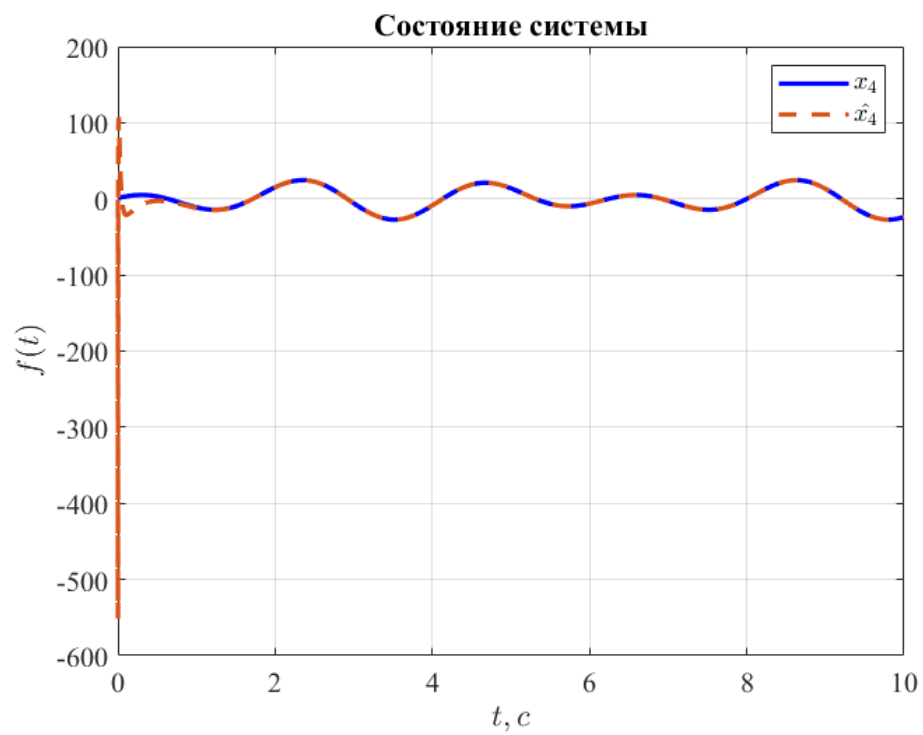


Рисунок 23. Графики сигналов $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$

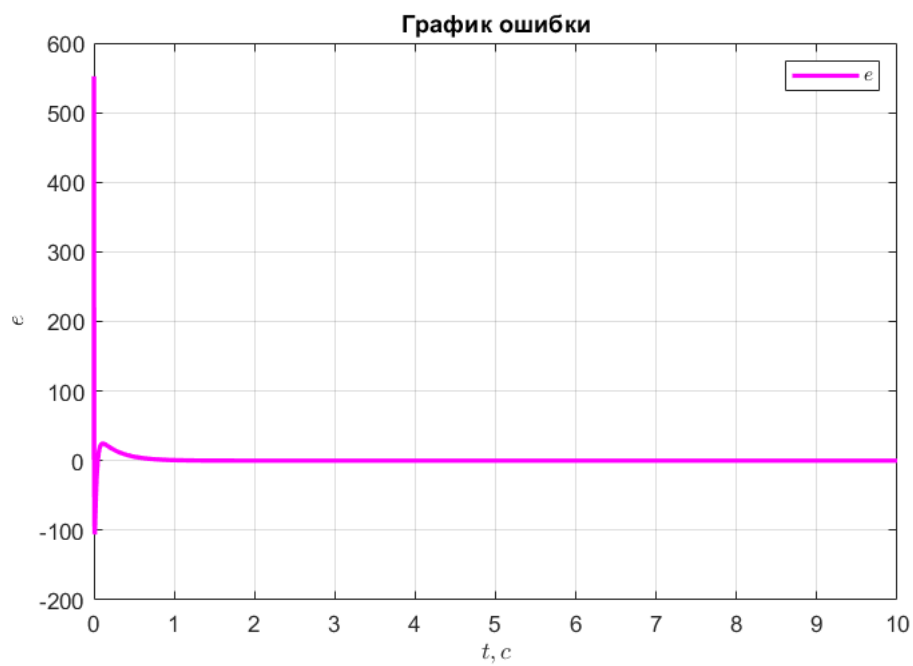


Рисунок 24. Ошибка наблюдателя e_4 .

Третий спектр

$$\{-4 \pm 5i, -4 \pm 6i\}$$

Составим и решим уравнение модального наблюдателя:

$$\begin{cases} GQ - QA = YC \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

Желательно, чтобы при этом выполнялись все эти условия:

$$\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(G) = \emptyset \\ (G, Y) - \text{управляема} \\ (C, A) - \text{наблюдаема} \end{cases}$$

Получаю:

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

При помощи специального кода в Матлабе и библиотеки svx решаем систему и получаем L:

$$L = \begin{bmatrix} 14.5661 \\ 25.8784 \\ 19.6058 \\ -13.2300 \end{bmatrix}$$

При проверке получаю, что собственные числа матрицы $(A + LC)$ равны:

$$\text{eig}(A + LC) = \begin{bmatrix} -4 + 6i \\ -4 - 6i \\ -4 + 5i \\ -4 - 5i \end{bmatrix}$$

- что полностью совпадает с нашим спектром, поэтому синтез наблюдателя выполнен корректно.

Построим графики:

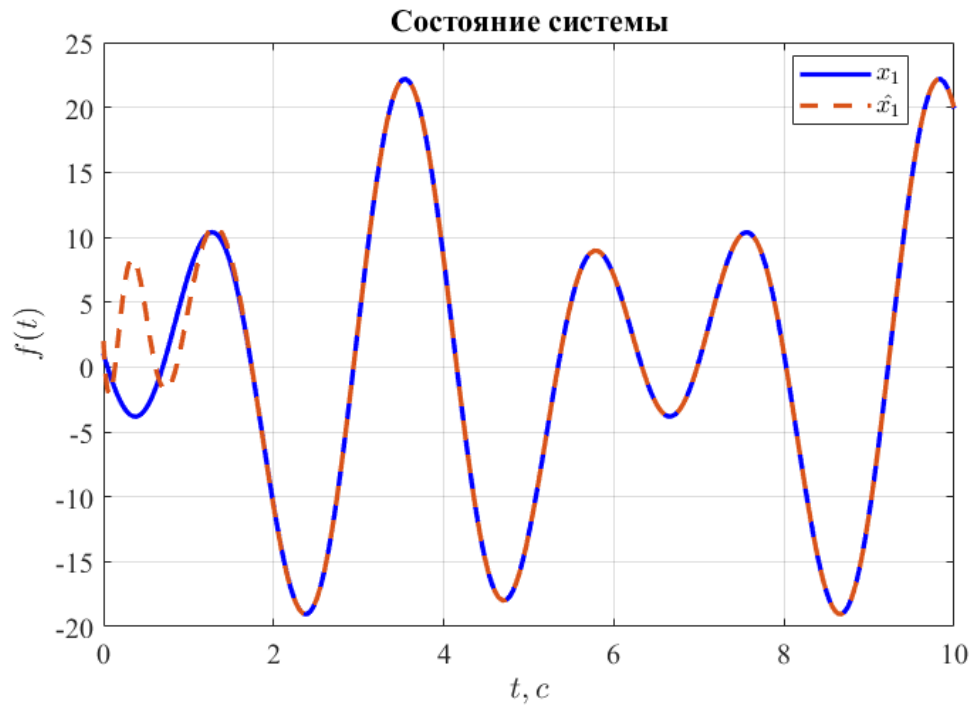


Рисунок 25. Графики сигналов $x_1(t)$ и $\hat{x}_1(t)$

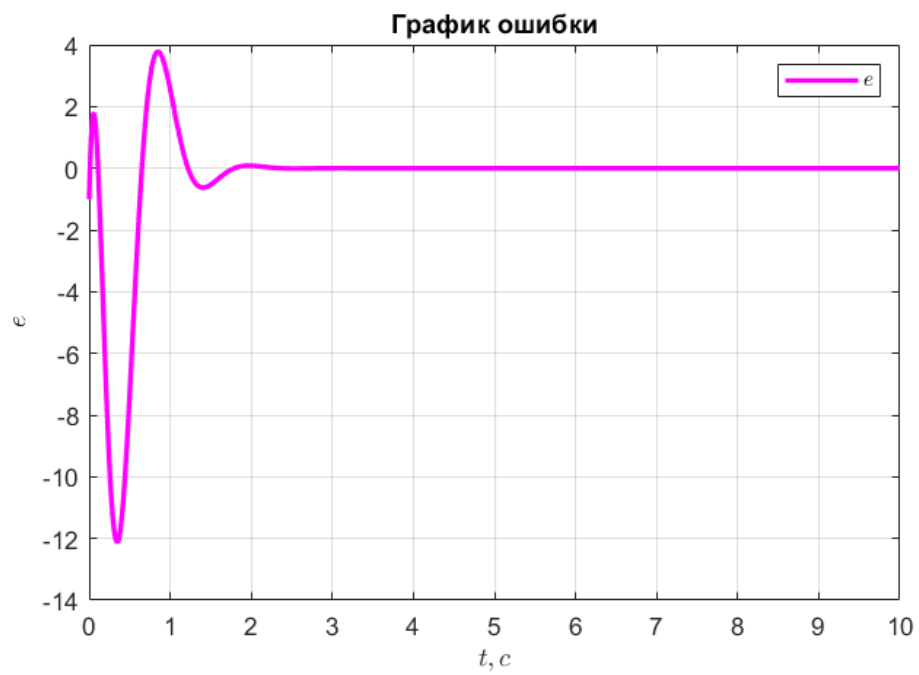


Рисунок 26. Ошибка наблюдателя e_1 .

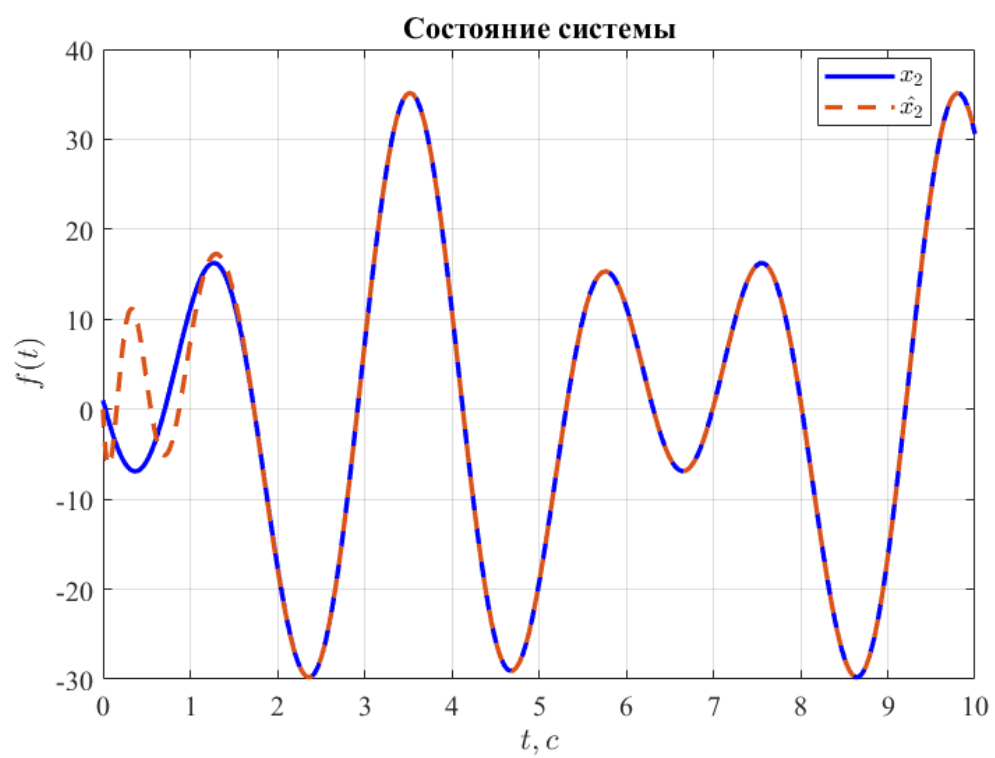


Рисунок 27. Графики сигналов $x_2(t)$ и $\hat{x}_2(t)$

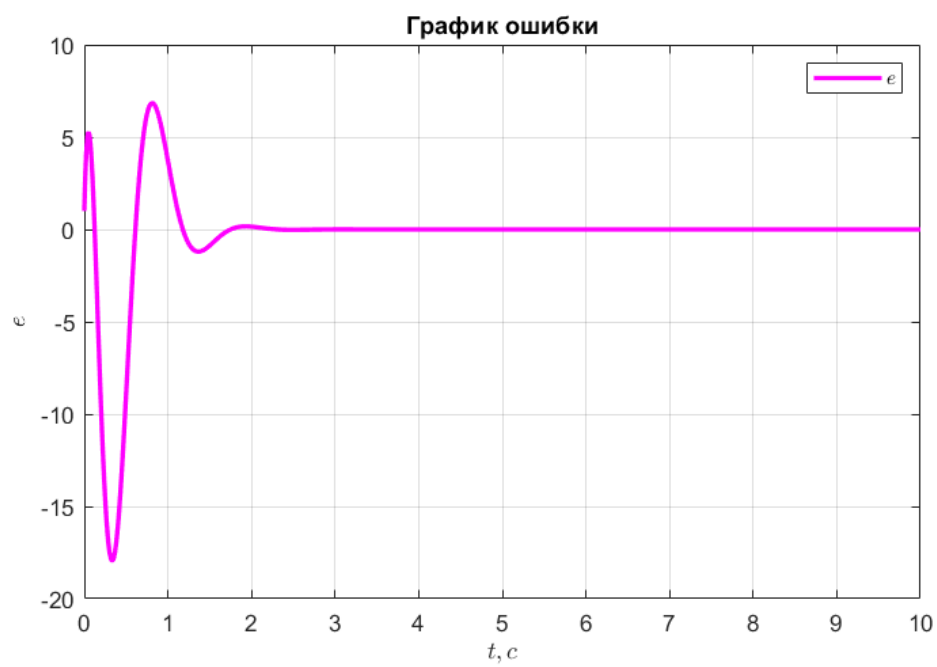


Рисунок 28. Ошибка наблюдателя e_2 .

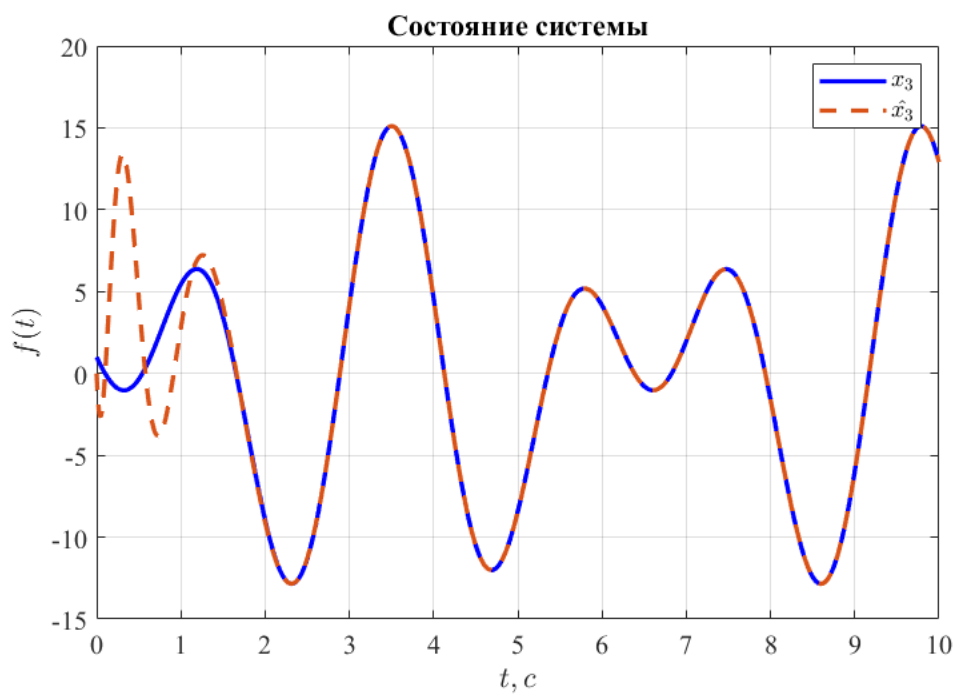


Рисунок 29. Графики сигналов $x_3(t)$ и $\hat{x}_3(t)$

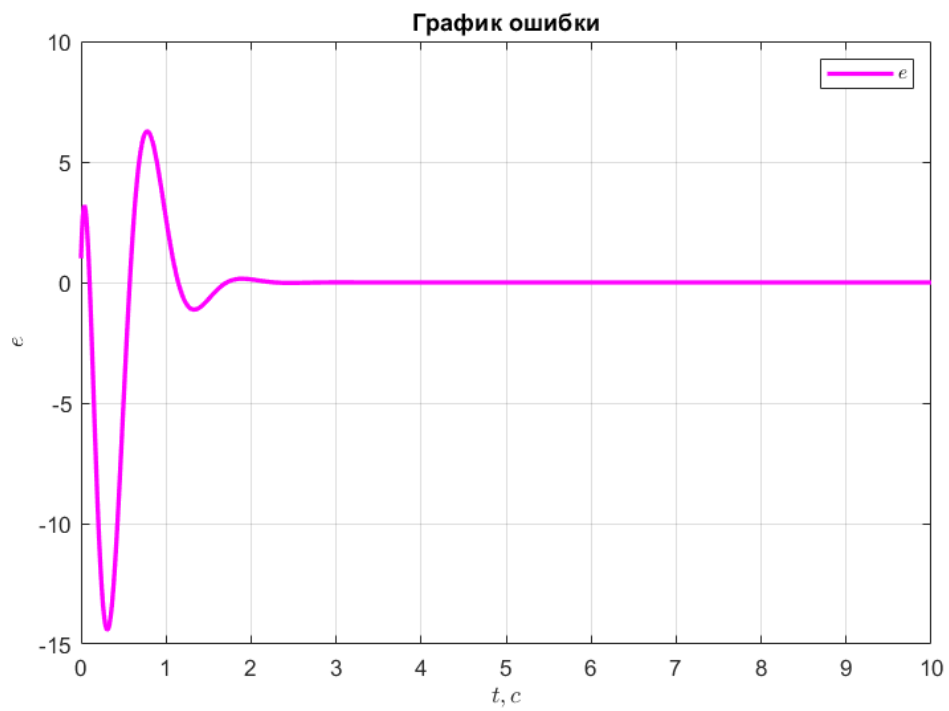


Рисунок 30. Ошибка наблюдателя e_3 .

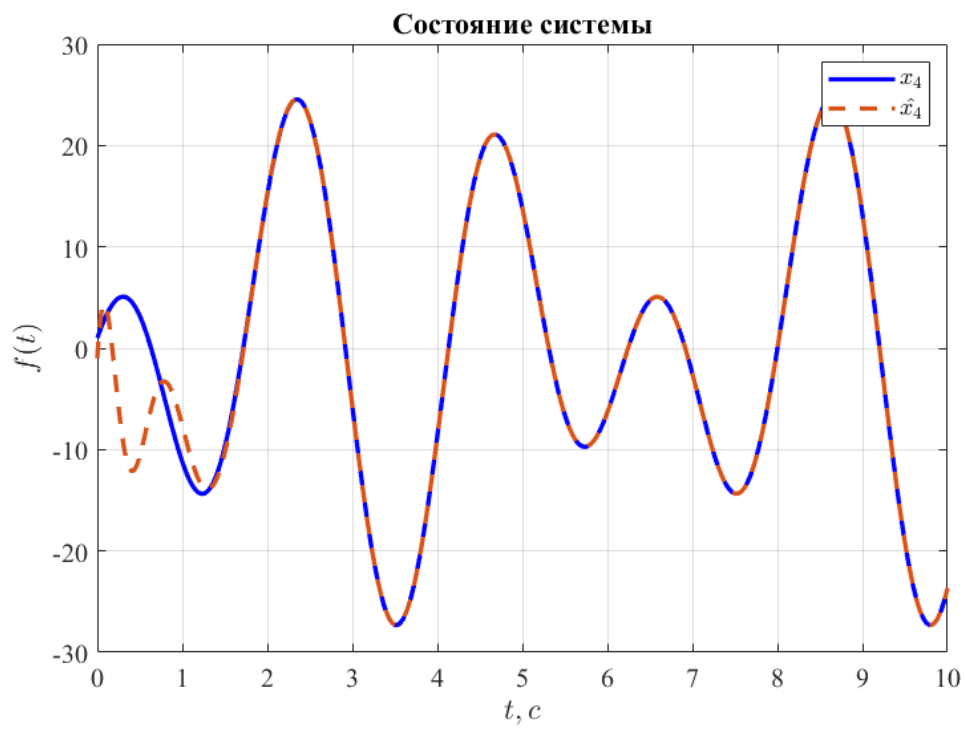


Рисунок 31. Графики сигналов $x_4(t)$ и $\hat{x}_4(t)$

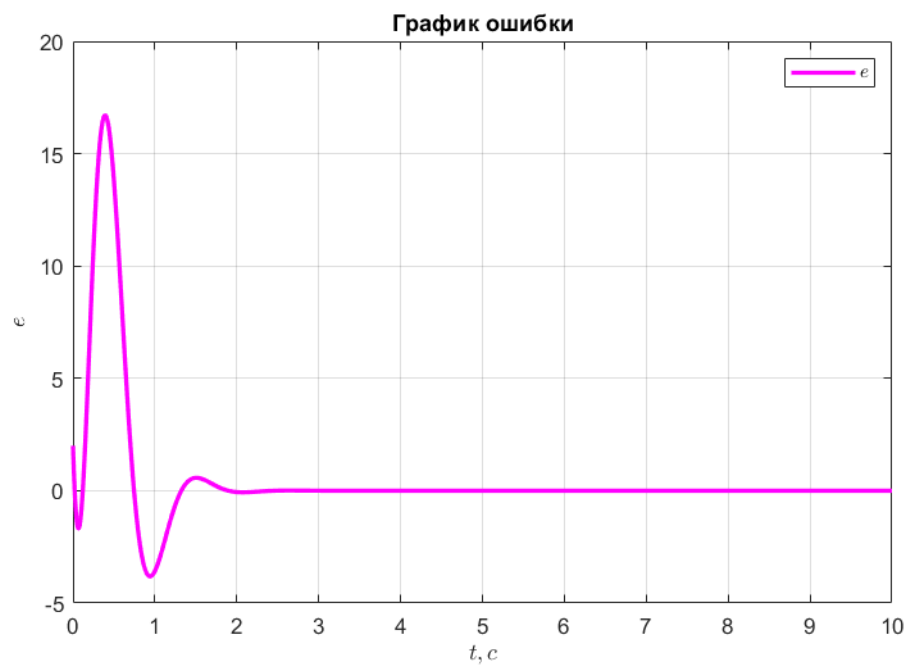


Рисунок 32. Ошибка наблюдателя e_4 .

Выводы:

Как можно видеть по графикам в первом спектре, где небольшие вещественные числа, состояние $\hat{x}(t)$ довольно быстро справляется с наблюдением изначального состояния $x(t)$ и мы имеем достаточное перерегулирование.

Смотря на поведение системы при заданном втором спектре, мы видим, насколько большая ошибка в самом начале и насколько быстро она компенсируется, за счёт слишком жёсткого управления (сильно-устойчивых мод), что, как и в случае с модальным регулятором вряд ли реализуемо.

Говоря про систему с третьим спектром собственных чисел, имеющих комплексные моды, мы можем заметить, что увеличиваются колебания нашей ошибки, а также её перерегулирование.

Задание 3. Модальное управление по выходу

Возьмём матрицы A, B, C и D из Таблицы 4:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (3)$$

Выполним следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

Найдём матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$U = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -56 & -960 & -25088 \\ 5 & 48 & 1312 & 21888 \\ 3 & 48 & 1376 & 22656 \\ 5 & 88 & 1152 & 26368 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } U = 4 = n$$

Система полностью управляема и соответственно стабилизируема.

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -88 & 112 & 88 & 112 \\ 16 & -16 & 16 & 16 \\ -1952 & 2048 & 1952 & 2048 \\ 128 & -128 & 128 & 128 \\ -39808 & 40192 & 39808 & 40192 \\ 1024 & -1024 & 1024 & 1024 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } V = 3 \neq n$$

Система не полностью наблюдаема, а, следовательно, нужно выяснить наблюдаемость собственных чисел:

1) $\lambda_1 = -12$:

Матрица Хаутуса:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 12 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 + 12 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 + 12 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 + 12 \\ -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_1 = 3 \neq n$$

- не наблюдаемое собственное число.

2) $\lambda_2 = 4$:

Матрица Хаутуса:

$$X_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 4 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 - 4 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 - 4 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 - 4 \\ -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_2 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

3) $\lambda_3 = 8$:

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 8 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 - 8 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 - 8 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 - 8 \\ -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_3 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

$$4) \lambda_3 = 20:$$

Матрица Хаутуса:

$$X_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 20 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 - 20 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 - 20 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 - 20 \\ -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } X_3 = 4 = n$$

- наблюдаемое собственное число.

Одно собственное число – не является наблюдаемым, но оно является устойчивым, поэтому система обнаруживаемая.

- Построить схему моделирования системы (3), замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния и закона управления $u = K\hat{x}$.

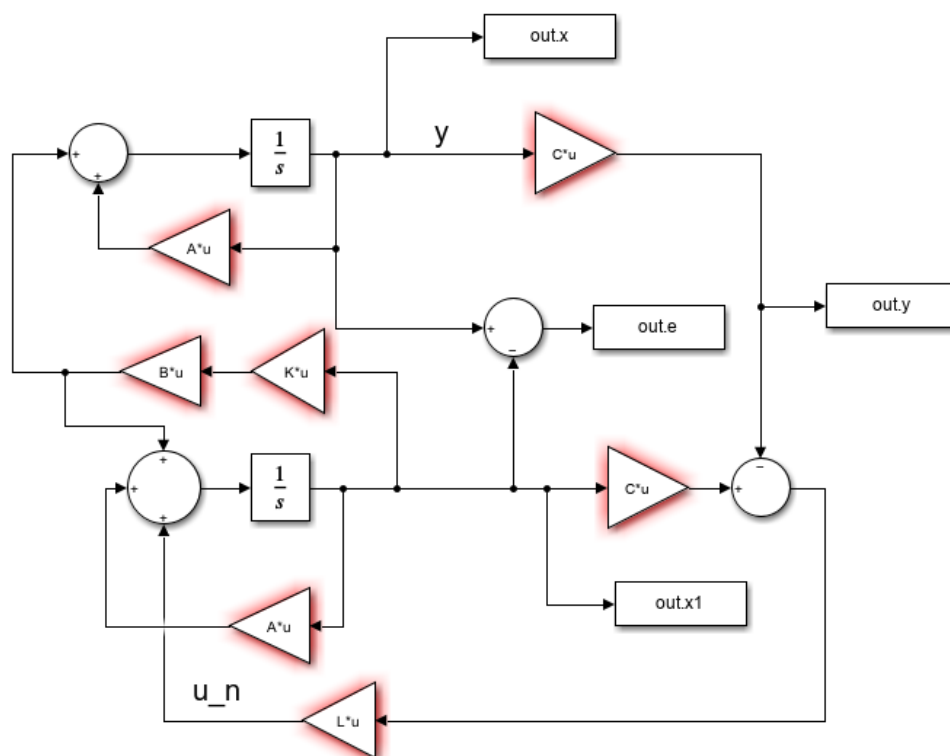


Рисунок 33. Схема моделирования системы.

- Задаться парой достижимых желаемых спектров для регулятора и наблюдателя, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.
- Синтезировать регулятор K на основании выбранного желаемого спектра, определить собственные числа матрицы $(A + BK)$ и сравнить с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.
- Синтезировать матрицу коррекции наблюдателя L на основании выбранного желаемого спектра, определить собственные числа матрицы $(A + LC)$ и сравнить с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.

Зададимся парой достижимых желаемых спектров для регулятора и наблюдателя, синтезируем матрицы K, L и определим собственные числа матриц $(A + BK)$, $(A + LC)$:

Для регулятора:

$$\{-1, -2, -3, -4\}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Y = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$K = [6.5410 \ -6.5645 \ 0.0332 \ -0.7637]$$

$$eig(A + BK) = \{-1, -2, -3, -4\}$$

Получившийся спектр совпал с желаемым, значит синтез регулятора был выполнен корректно.

Для наблюдателя включим ненаблюдаемое собственное число в желаемый спектр:

$$\{-12, -3, -3, -3\}$$

$$G = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 6.1880 & 6.1880 \\ -7.0812 & -7.0812 \\ 0.7443 & 0.7443 \\ -0.1490 & -0.1490 \end{bmatrix}$$

$$eig(A + LC) = \{-2.9995, -3.0003 + 0.0005i, -3.0003 - 0.0005i, -12\}$$

Получившийся спектр с небольшой погрешностью совпал с желаемым, поэтому синтез наблюдателя был выполнен корректно.

Графики системы:

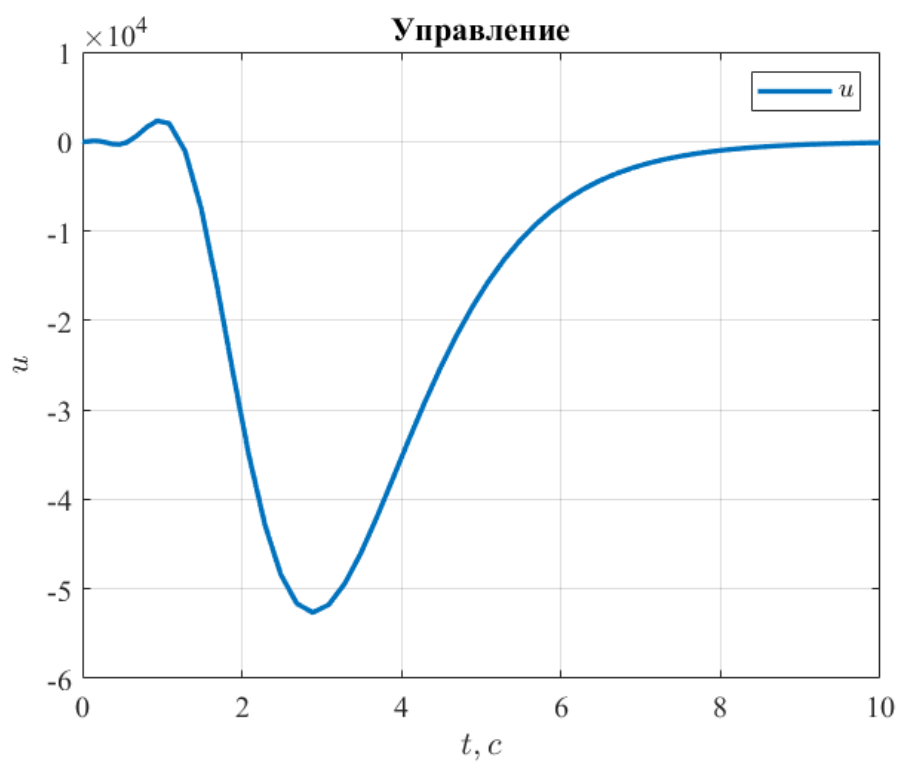


Рисунок 34. Управление регулятора $u(t)$.

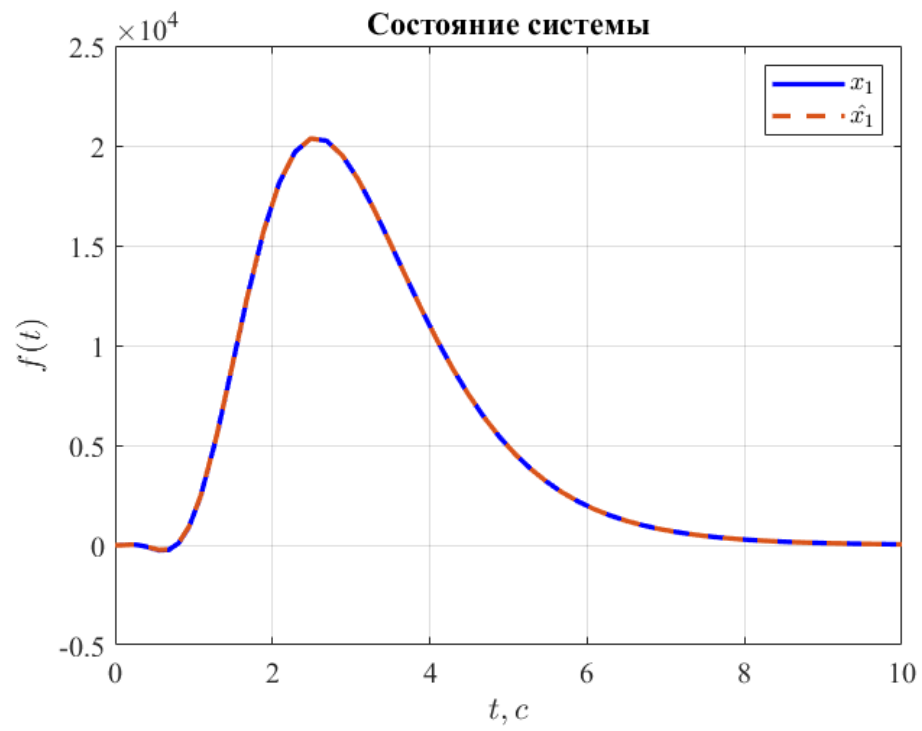


Рисунок 35. Сравнение графиков состояния $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

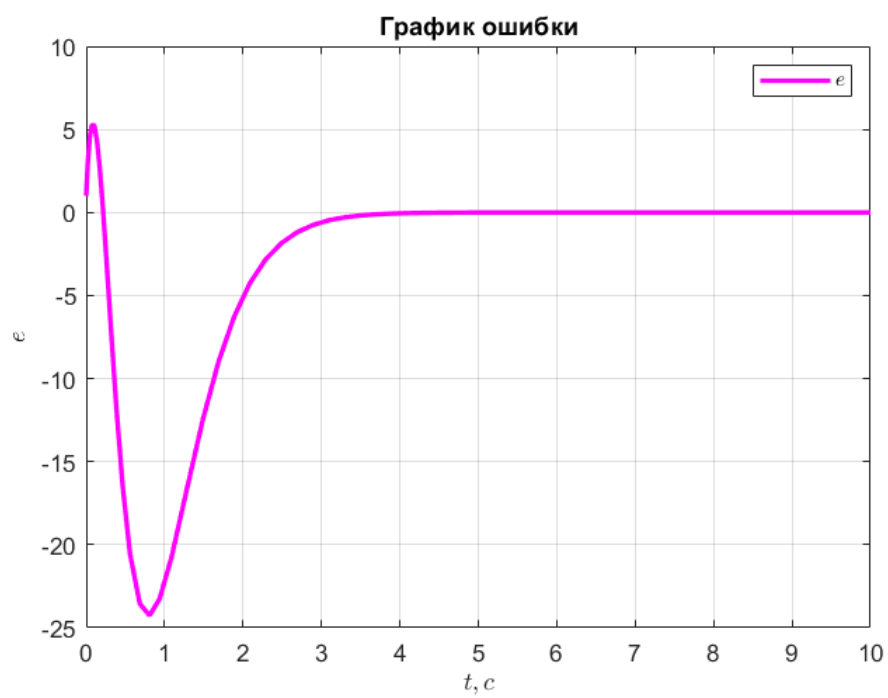


Рисунок 36. Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

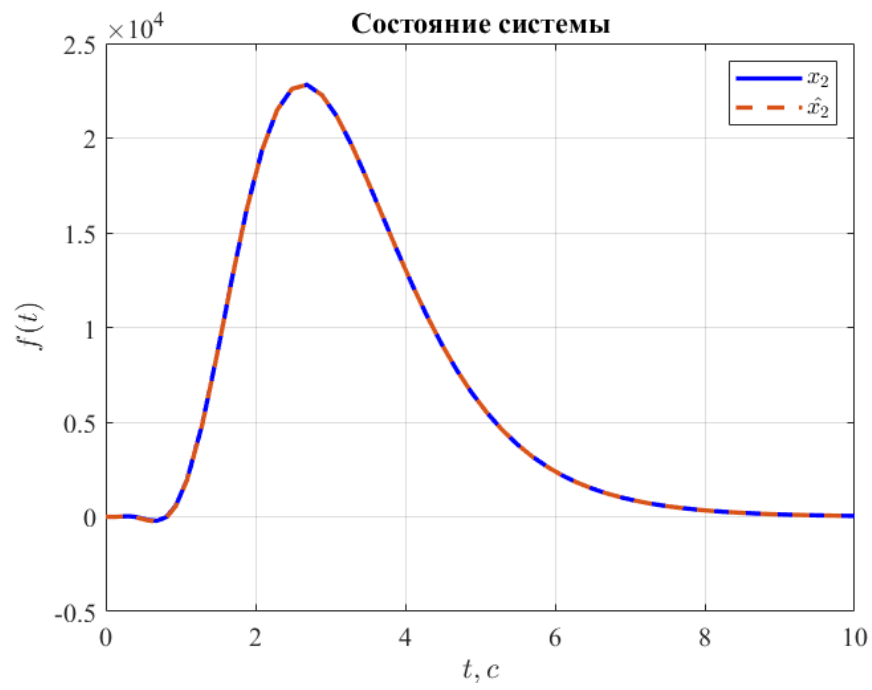


Рисунок 37. Сравнение графиков состояния $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

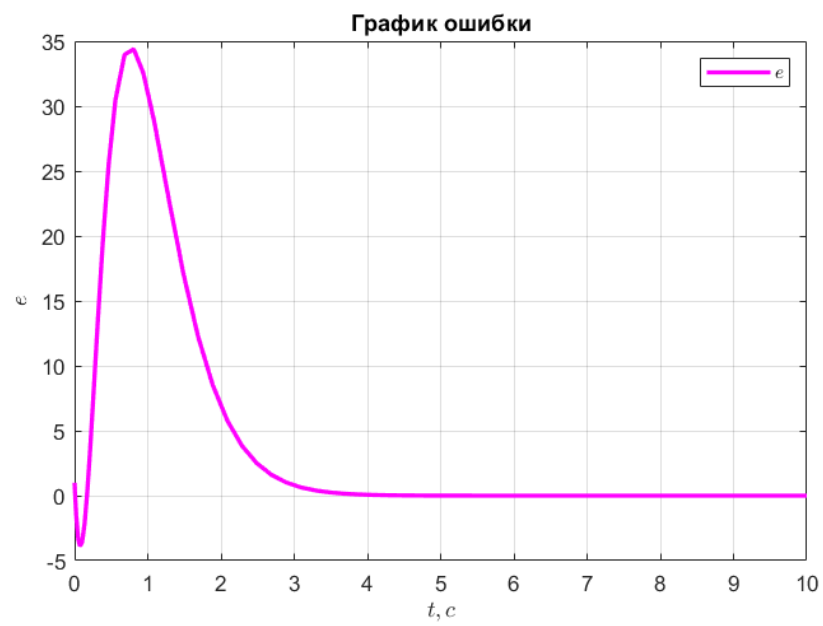


Рисунок 38. Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

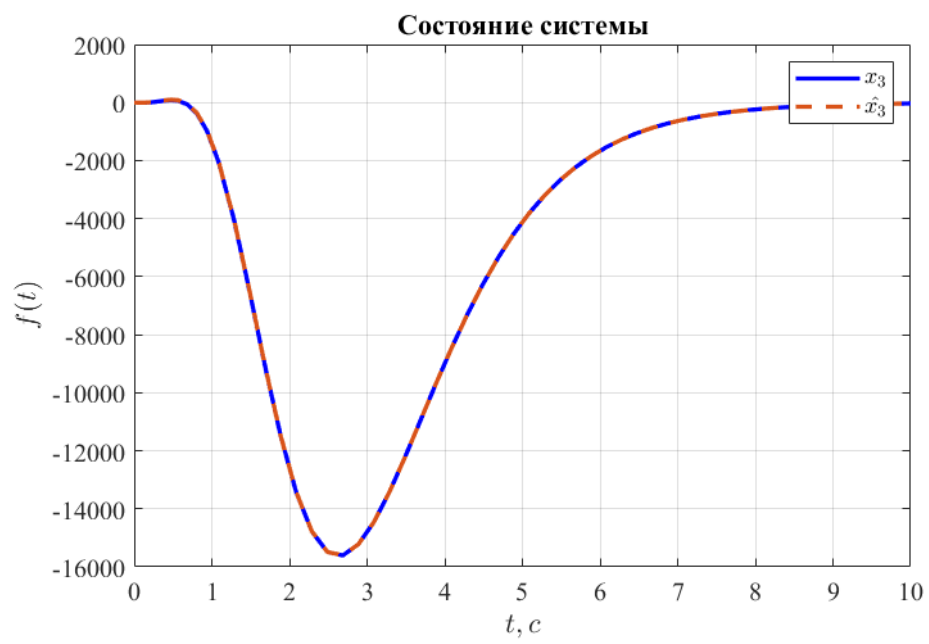


Рисунок 39. Сравнение графиков состояния $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

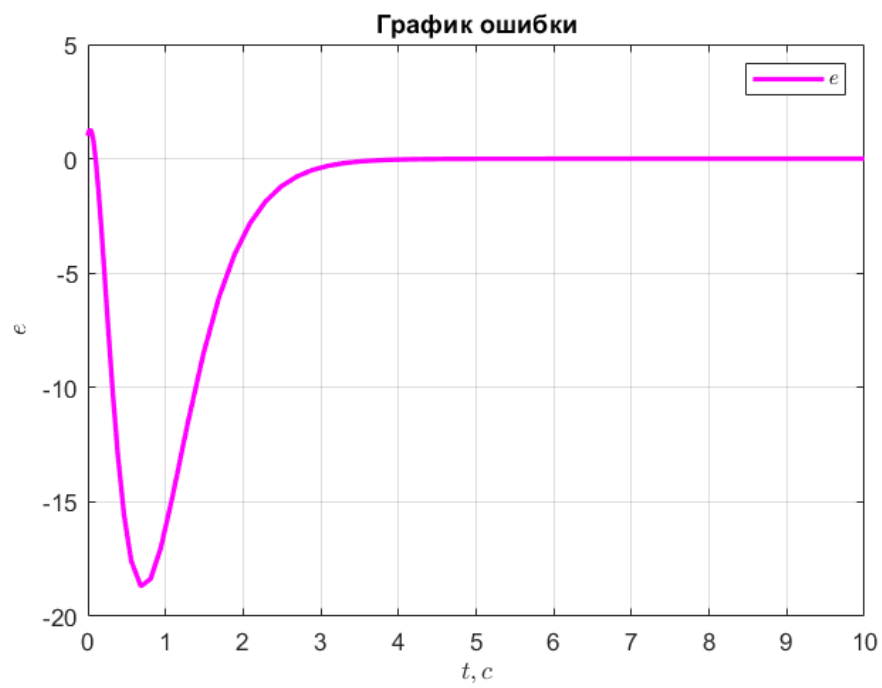


Рисунок 40. Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

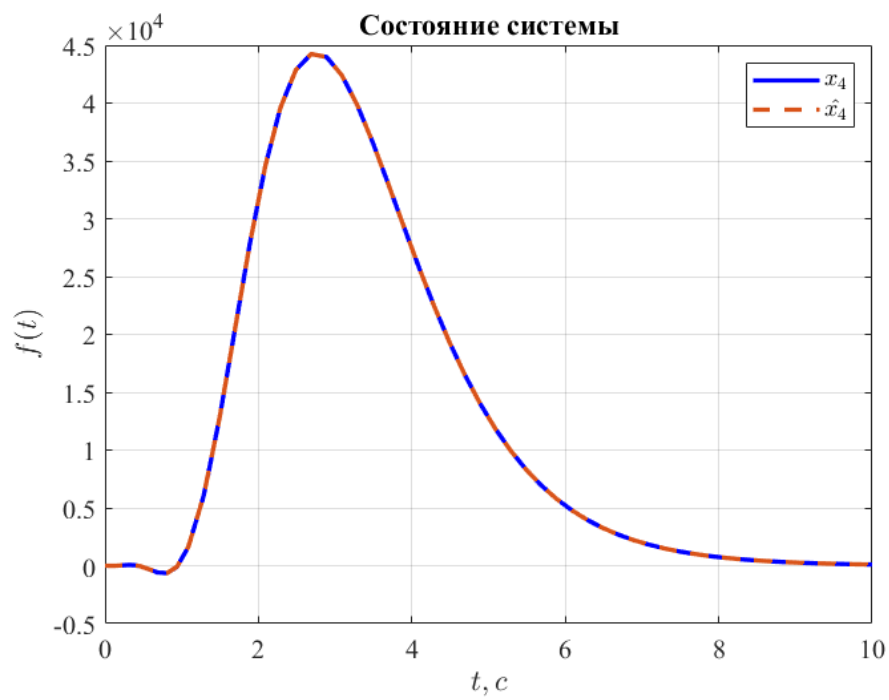


Рисунок 41. Сравнение графиков состояния $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

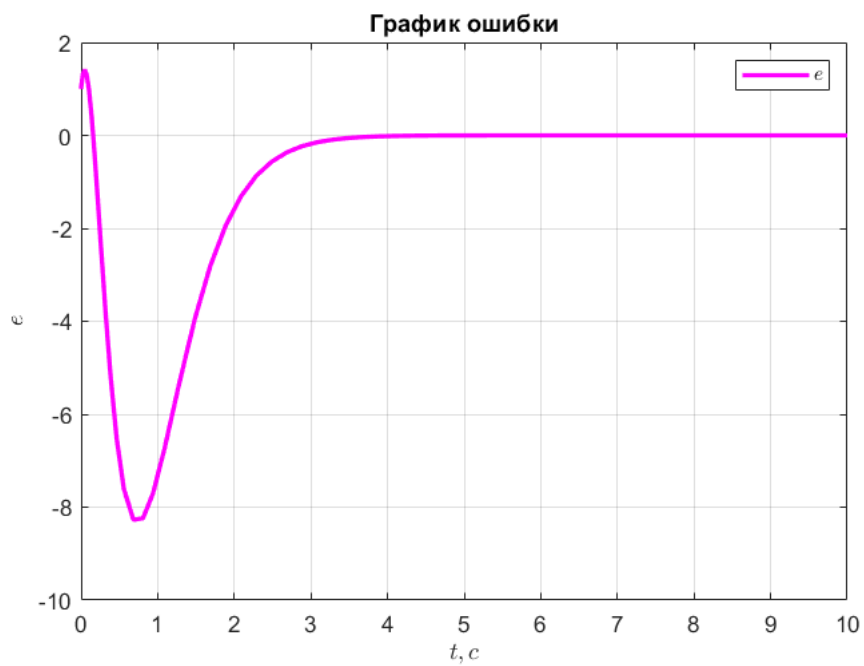


Рисунок 42. Ошибка наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Выводы:

В данном случае мы моделировали управление системой по выходу, использовали и регулятор, и наблюдатель. В результате чего добились хорошего результата, так как наши состояния $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ мало отличаются.

Задание 4. Наблюдатель пониженного порядка

Возьмём матрицы A, B и D из Таблицы 4 и матрицу C из Таблицы 5 и рассмотрим систему (3):

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживаемости системы.

Собственные числа:

$$\lambda_1 = -12, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 8, \lambda_4 = 20$$

Найдём матрицы управляемости и наблюдаемости:

$$U = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$$

$$\text{rank } U = 4 = n$$

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } V = 4 = n$$

Так как $\text{rank } U = \text{rank } V = 4 = 4$, то система полностью управляема и наблюдаема, а также, стабилизируема и обнаруживаема.

- Задаться желаемым спектром матрицы наблюдателя пониженного порядка Γ , обеспечивающим асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Зададимся желаемым спектром матрицы наблюдателя пониженного порядка Γ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Синтезировать матрицу преобразования Q на основании выбранного желаемого спектра Γ .

С помощью библиотеки `svx`, решаем уравнение Сильвестра и находим матрицу Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0688 & 0.0212 & 0.0212 & 0.0212 \\ 0.0727 & 0.0273 & 0.0273 & -0.0727 \end{bmatrix}$$

Выводы:

В ходе выполнения данной лабораторной работы мы научились синтезировать модальные регуляторы и наблюдатели по отдельности. А также, совмещать их для более точного управления и слежения за системой. Узнали, как с помощью уравнения Сильвестра рассчитывать параметры для данного синтеза.

Приложение

Вариант	Задания		Вариант	Задания		Вариант	Задания	
	1 и 2	3 и 4		1 и 2	3 и 4		1 и 2	3 и 4
1	№ 1	№ 6	11	№ 6	№ 11	21	№ 11	№ 1
2	№ 2	№ 7	12	№ 7	№ 12	22	№ 12	№ 2
3	№ 3	№ 8	13	№ 8	№ 13	23	№ 13	№ 3
4	№ 4	№ 9	14	№ 9	№ 14	24	№ 14	№ 4
5	№ 5	№ 10	15	№ 10	№ 15	25	№ 15	№ 5
6	№ 1	№ 11	16	№ 6	№ 1	26	№ 11	№ 6
7	№ 2	№ 12	17	№ 7	№ 2	27	№ 12	№ 7
8	№ 3	№ 13	18	№ 8	№ 3	28	№ 13	№ 8
9	№ 4	№ 14	19	№ 9	№ 4	29	№ 14	№ 9

Таблица 1: Распределение Заданий по Вариантам.

№	A	B	Варианты спектра $\sigma(A + BK)$
1	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\{-1, -1, -1\}, \{-2, -2, -2\},$ $\{-1, -10, -100\}, \{-2, -20, -200\},$ $\{-1, -1 \pm 3i\}, \{-2, -2 \pm 6i\}$
2	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\{-2, -2, -2\}, \{-3, -3, -3\},$ $\{-2, -20, -200\}, \{-3, -30, -300\},$ $\{-2, -2 \pm 6i\}, \{-3, -3 \pm 9i\}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$	$\{-1, -1, -1\}, \{-3, -3, -3\},$ $\{-1, -10, -100\}, \{-3, -30, -300\},$ $\{-1, -1 \pm 3i\}, \{-3, -3 \pm 9i\}$
4	$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\{-2, -2, -2\}, \{-3, -3, -3\},$ $\{-2, -20, -200\}, \{-3, -30, -300\},$ $\{-2, -2 \pm 6i\}, \{-3, -3 \pm 9i\}$
5	$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -6 & -7 & -6 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\{-1, -1, -1\}, \{-3, -3, -3\},$ $\{-1, -10, -100\}, \{-3, -30, -300\},$ $\{-1, -1 \pm 3i\}, \{-3, -3 \pm 9i\}$

Таблица 2: Исходные данные для Задания 1 (номера 1-5).

№	A	C^T	Варианты спектра $\sigma(A + LC)$
1	$\begin{bmatrix} 25 & 8 & -20 & 13 \\ -38 & -11 & 30 & -18 \\ 40 & 13 & -33 & 21 \\ 38 & 12 & -32 & 19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-1, -1, -1, -1\} \\ &\{-1, -10, -100, -1000\} \\ &\{-1 \pm 2i, -1 \pm 3i\} \end{aligned}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-2, -2, -2, -2\} \\ &\{-2, -20, -200, -2000\} \\ &\{-2 \pm 3i, -2 \pm 4i\} \end{aligned}$
3	$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 & -1 \\ -34 & -9 & 26 & -14 \\ -8 & -1 & 5 & -1 \\ 18 & 4 & -16 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-3, -3, -3, -3\} \\ &\{-3, -30, -300, -3000\} \\ &\{-3 \pm 4i, -3 \pm 5i\} \end{aligned}$
4	$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} &\{-4, -4, -4, -4\} \\ &\{-4, -40, -400, -4000\} \\ &\{-4 \pm 5i, -4 \pm 6i\} \end{aligned}$

Таблица 3: Исходные данные для Задания 2 (номера 1-5).

№	A	B	C	D
11	$\begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -5 & 7 \\ -3 & 3 & -7 & 5 \\ -5 & -7 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} 5 & -9 & -7 & 1 \\ -9 & 5 & -1 & 7 \\ -7 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ -12 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Таблица 4: Исходные данные для Задания 3 и Задания 4 (номера 11-15)

№	C	№	C	№	C
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Таблица 5: Исходные данные для Задания 4