” Теория автоматического управления ”

Лабораторная работа №4

Слежение и компенсация: виртуальный выход

Выполнил: Бухарев Святослав Андреевич

Факультет: СУиР

Группа: R3381

Вариант 9

Преподаватели: Перегудин А. А., Пашенко А. В.

Санкт-Петербург

Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию

В соответствии с вариантом (9) по **Таблице 1** возьму матрицы A, B, B_f и C_z из **Таблицы 2** и матрицу Г из **Таблицы 3**:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \; B_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -35 & 11 & 6 & 11 \\ -56 & 17 & 10 & 18 \\ -22 & 7 & 5 & 6 \\ -42 & 12 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_f w_f, \; x(0) = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T ,$$

генератор внешнего возмущения

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \qquad w_f(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$$

и виртуальный выход вида

$$z \; = C_z x$$

Выполним следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы Г и определить характер внешнего возмущения:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -35 & 11 & 6 & 11 \\ -56 & 17 & 10 & 18 \\ -22 & 7 & 5 & 6 \\ -42 & 12 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i$$

Определим характер внешнего возмущения по модам системы:

$$w_f = (cos3t + sin3t) + (cost + sint) = cos3t + sin3t + cost + sint$$

Получаем гармонический характер возмущения системы, где частоты равны:

$$w = 3$$

$$w = 1$$

- Построить схему моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором:

$$u = K_1 x + K_2 w_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия:

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = 0 \qquad (1)$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором:

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \qquad w_f(0) = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$$

Построим схему (расширенную версию смотреть в приложении):

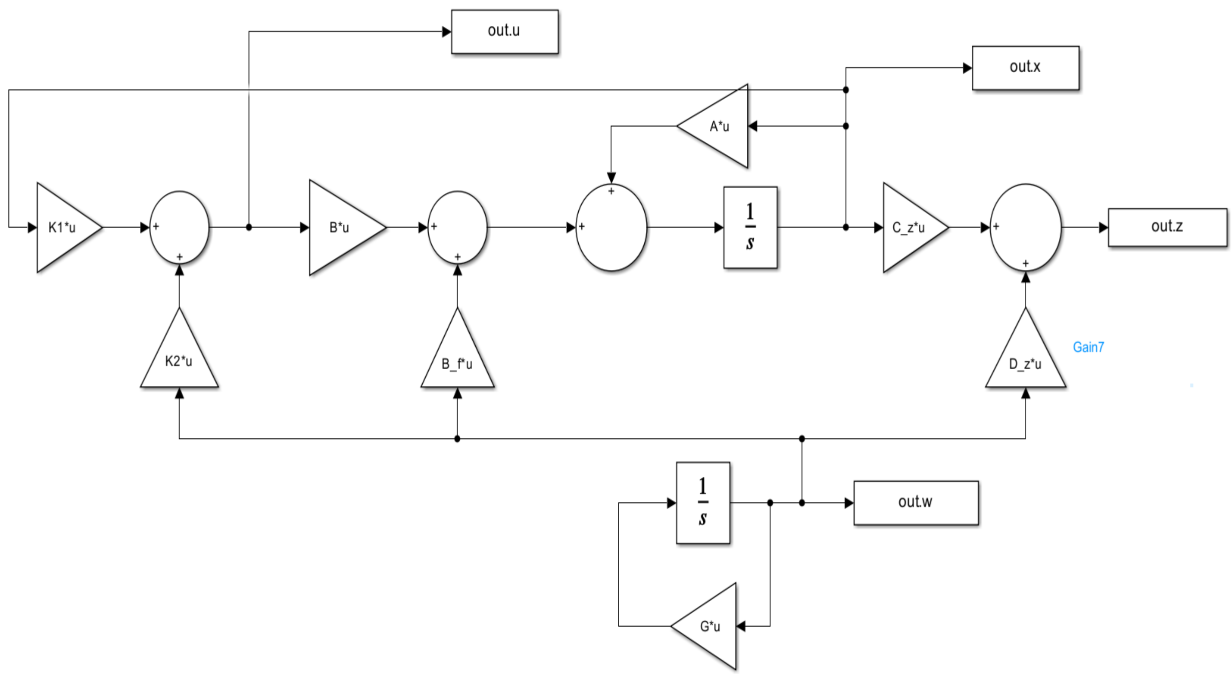

Рисунок 1. Схема моделирования системы.

- Синтезировать «feedback»-компоненту K_1 компенсирующего регулятора любым пройденным на курсе способом. Привести выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу K_1.

Синтезируем «feedback»-компоненту K_1 с помощью матричных уравнений Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - PG = BY \\ K_1 = -YP^{-1} \end{cases}$$

Матрицы Γ и Y в данном случае возьмём равные:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = [1\ 1\ 1\ 1],$$

где желаемый спектр $\sigma(A + BK_1)$ будет равен $\{-3, -3, -3\}$

Получаем значение K_1:

$$K_1 = [-3.5385 \quad 0.9737 \quad -3.4878]$$

- Синтезировать «feedforward»-компоненту K_2 компенсирующего регулятора. Привести выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу K_2.

Синтезируем «feedforward»-компоненту K_2 компенсирующего регулятора:

1) Выбираем K_1 так, чтобы $\sigma(A + BK_1) \epsilon \mathbb{C}_{-}$
2) Находим P и Y как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_z P + D_z = 0 \end{cases}$$

3) Вычислим K_2 по формуле:

$$K_2 = Y - K_1 P$$

В данном случае $D_z = 0,$ так как $w -$ внешнее возмущение и мы решаем задачу компенсации.

Получаем значение K_2:

$$K_2 = [-8.8154 \quad 2.7788 \quad 1.8259 \quad 4.7882]$$

- Выполним компьютерное моделирование
-

Разомкнутая системы ($u = 0$):

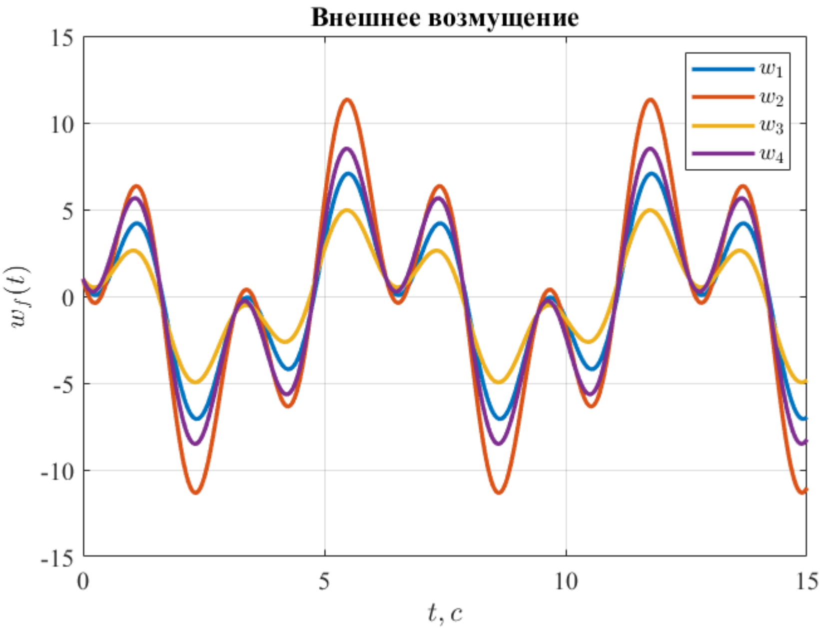

Рисунок 2. Вектор состояния генератора внешнего возмущения $w_f(t)$

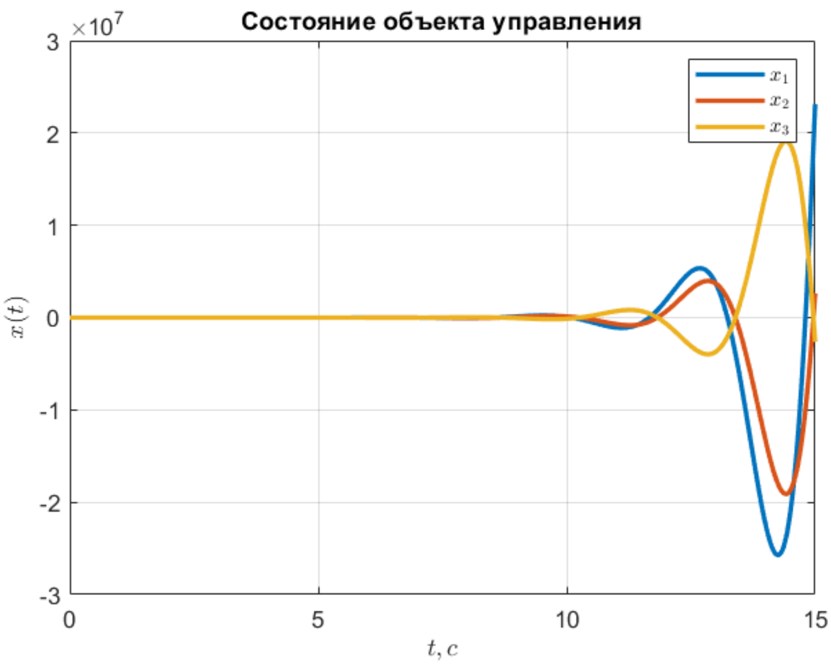

Рисунок 3. Вектор состояния объекта $x(t)$

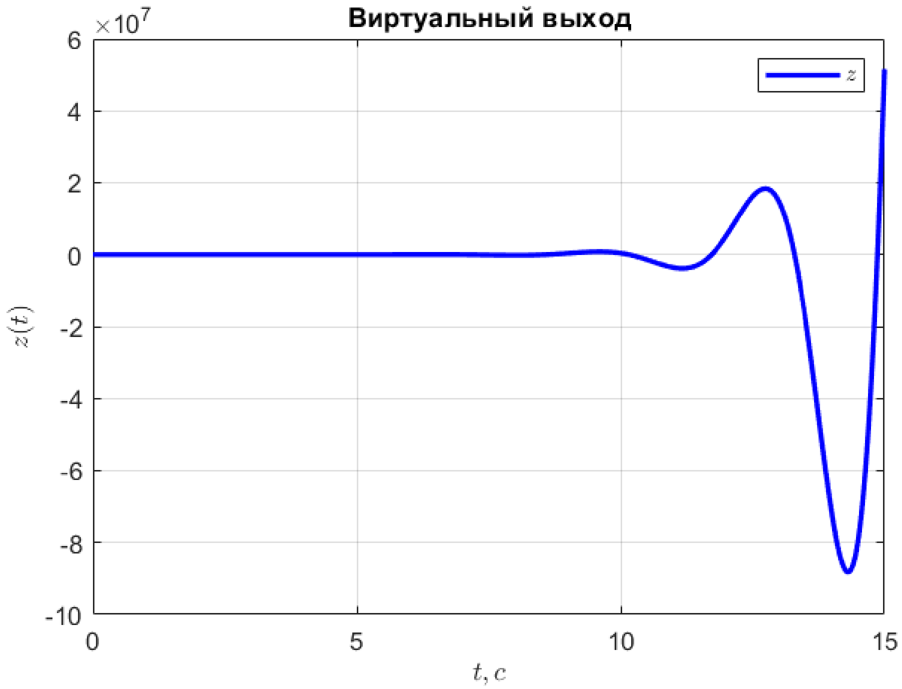

Рисунок 4. Виртуальный выход $z(t)$

Как мы видим, обнуляя регулирующее воздействие $u = 0$, мы получаем неустойчивые графики, так как система изначально была неустойчива.

Система, замкнутая регулятором с «feedback»-компонентой:

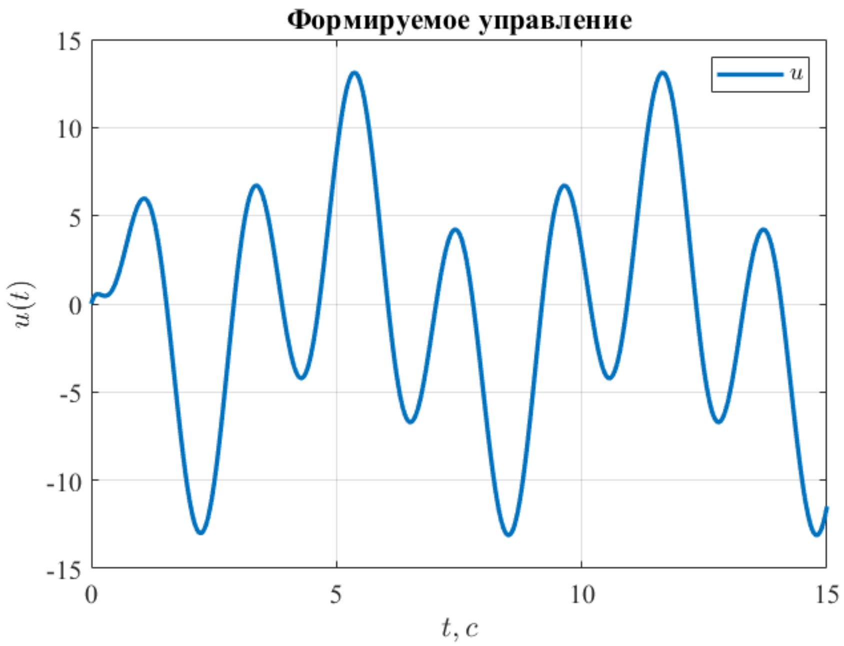

Рисунок 5. Управление регулятора $u(t)$

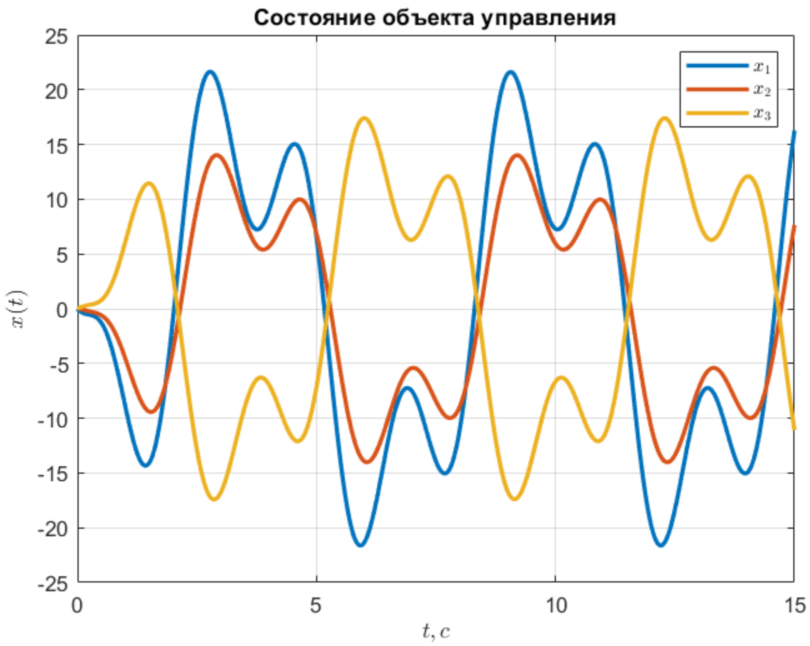

Рисунок 6. Вектор состояния объекта $x(t)$

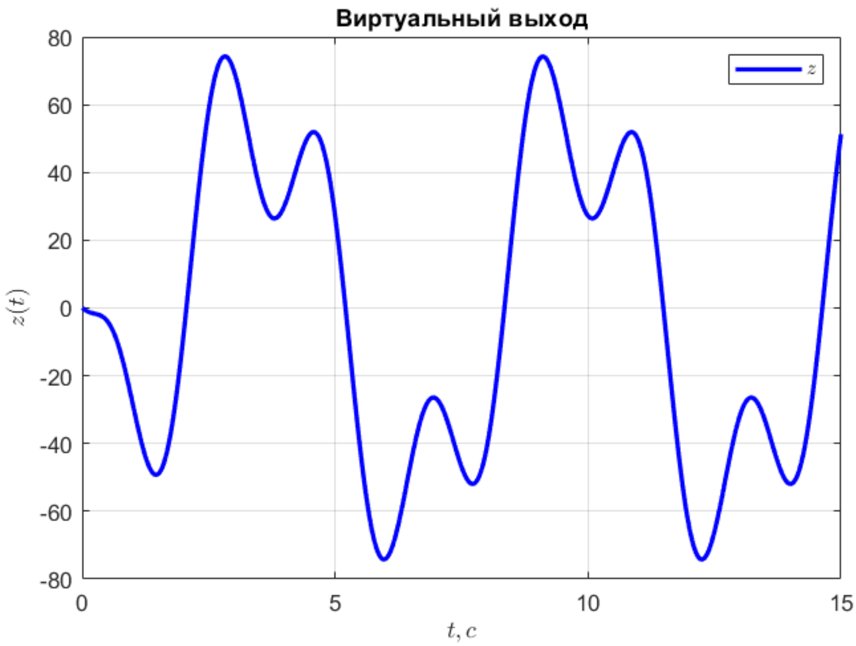

Рисунок 7. Виртуальный выход $z(t)$

Как мы видим, управления $u = K_1 x$ всё ещё не достаточно, чтобы скомпенсировать внешние возмущения, система стала устойчивой, но не асимптотически, поэтому выход $z(t)$ не уходит в ноль.

Система, замкнутая компенсирующим регулятором $u = K_1 x + K_2 w_f$:

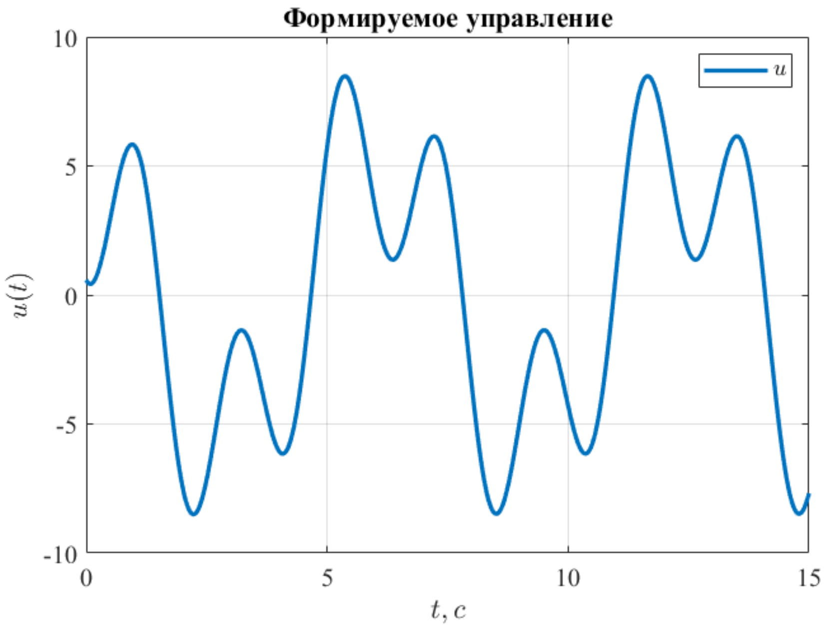

Рисунок 8. Управление регулятора $u(t)$

Рисунок 9. Вектор состояния объекта $x(t)$

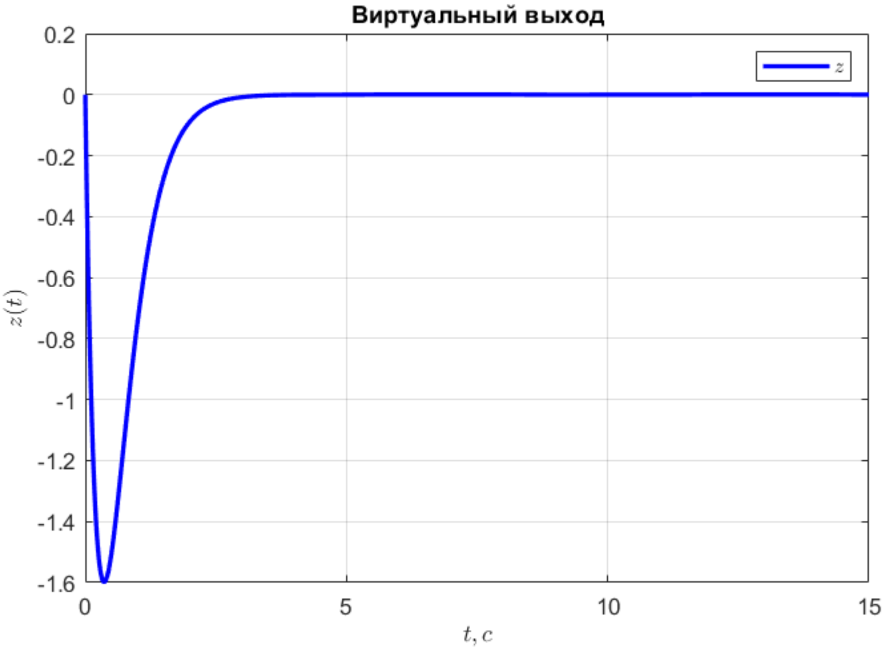

Рисунок 10. Виртуальный выход $z(t)$

Теперь, с помощью регулятора $u = K_1 x + K_2 w_f$ наша цель управления достигнута $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Вывод:

Проделав компьютерное моделирование при разных $u(t)$, мы убедились в том, что только при помощи feedback-компоненты (обратной связи) и feedforward-компоненты (прямой связи) вместе взятыми, можно добиться полной компенсации внешнего возмущения системы.

Задание 2. Следящий регулятор по состоянию

В соответствии с вариантом (9) по **Таблице 1** возьму матрицы A, B и C_z из **Таблицы 2** и матрицы Г и D_z из **Таблицы 3**:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_z^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -35 & 11 & 6 & 11 \\ -56 & 17 & 10 & 18 \\ -22 & 7 & 5 & 6 \\ -42 & 12 & 10 & 13 \end{bmatrix} \quad D_z^T = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \;\; x(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T \, ,$$

генератор задающего сигнала

$$\dot{w}_g = \Gamma w_g, \qquad w_g(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_z x + D_z w_g$$

Выполним следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы Г и определить характер задающего сигнала.

Воспользуемся данными предыдущего задания:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -35 & 11 & 6 & 11 \\ -56 & 17 & 10 & 18 \\ -22 & 7 & 5 & 6 \\ -42 & 12 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i$$

Определим характер сигнала по модам системы:

$$w_f = (cos3t + sin3t) + (cost + sint) = cos3t + sin3t + cost + sint$$

Получаем гармонический характер задающего сигнала системы с частотой:

$$w = 3$$

$$w = 1$$

- Построить схему моделирования системы, замкнутой следящим регулятором $u = K_1 x + K_2 w_g$, обеспечивающим выполнение целевого условия (1) при внешнем воздействии, задаваемом генератором.

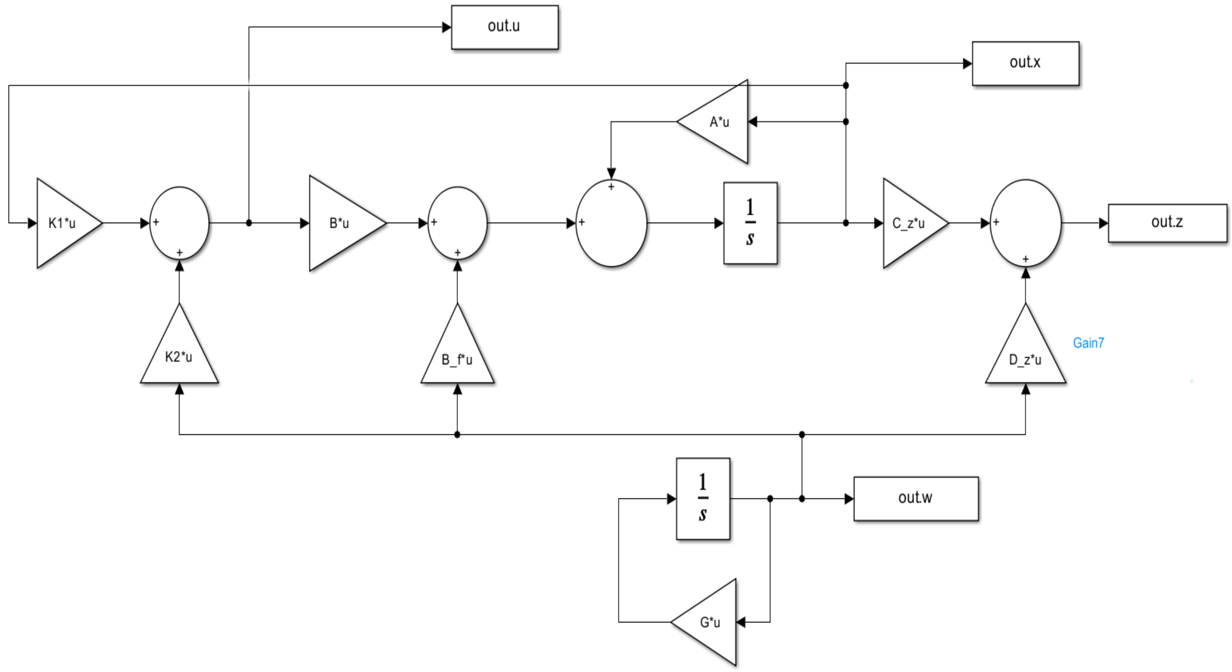

Рисунок 11. Схема моделирования системы.

- Синтезировать «feedback»-компоненту K_1 следящего регулятора $u = K_1 x + K_2 w_g$ любым пройденным на курсе способом. Привести выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу K_1.

Синтезируем «feedback»-компоненту K_1 при помощи матричных уравнений Сильвестра:

$$\begin{cases} AP - PG = BY \\ K_1 = -YP^{-1} \end{cases}$$

Матрицы Γ и Y :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = [1\ 1\ 1\ 1],$$

Получаем матрицу K_1 равную:

$$K_1 = [-3.5385 \quad 0.9737 \quad -3.4878]$$

- Синтезировать «feedforward»-компоненту K_2 следящего регулятора $u = K_1 x + K_2 w_g$. Привести выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу K_2.

Синтезируем «feedforward»-компоненту K_2 следящего регулятора:

1) Выбираем K_1 так, чтобы $\sigma(A + BK_1) \in \mathbb{C}_-$
2) Находим P и Y как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_z P + D_z = 0 \end{cases}$$

3) Вычислим K_2 по формуле:

$$K_2 = Y - K_1 P$$

Здесь уже $B_f = 0$, так как $w -$ задающее воздействие и мы решаем задачу слежения.

Получаем значение K_2:

$$K_2 = [4.0769 \quad -0.6154 \quad 0.6923 \quad -2.8077]$$

- Выполнить компьютерное моделирование

Разомкнутая системы ($u = 0$):

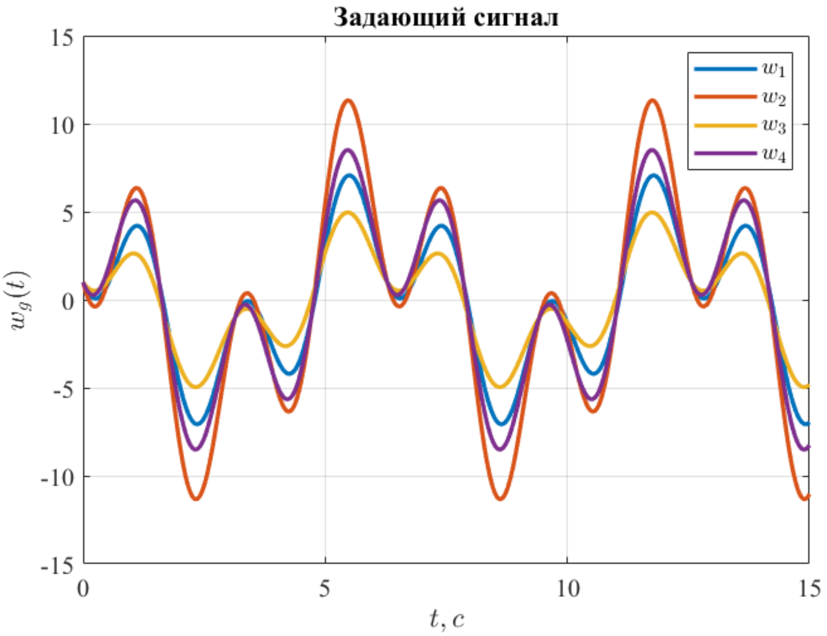

Рисунок 12. Вектор состояния генератора задающего сигнала $w_g(t)$

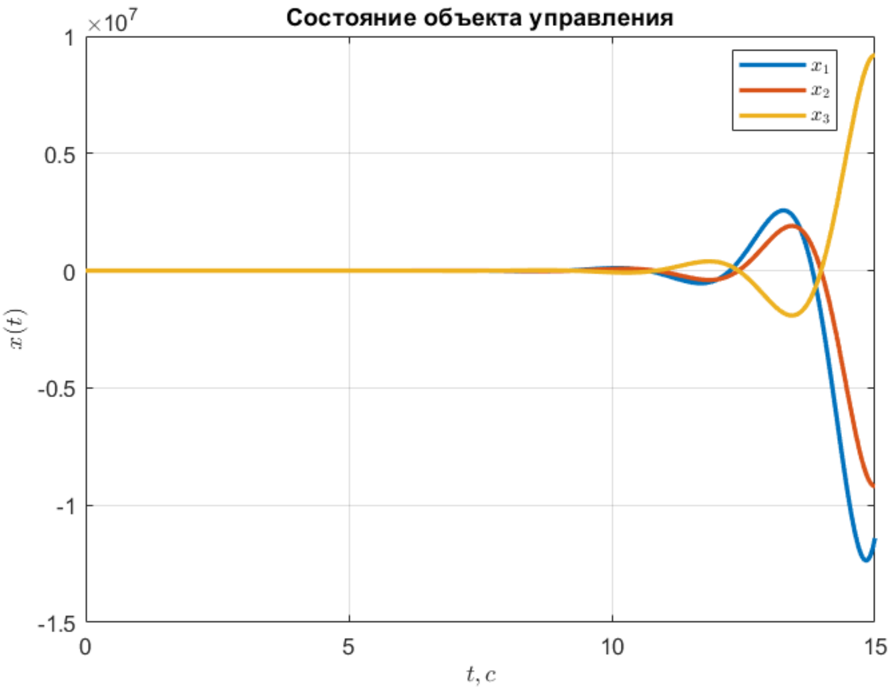

Рисунок 13. Вектор состояния объекта $x(t)$

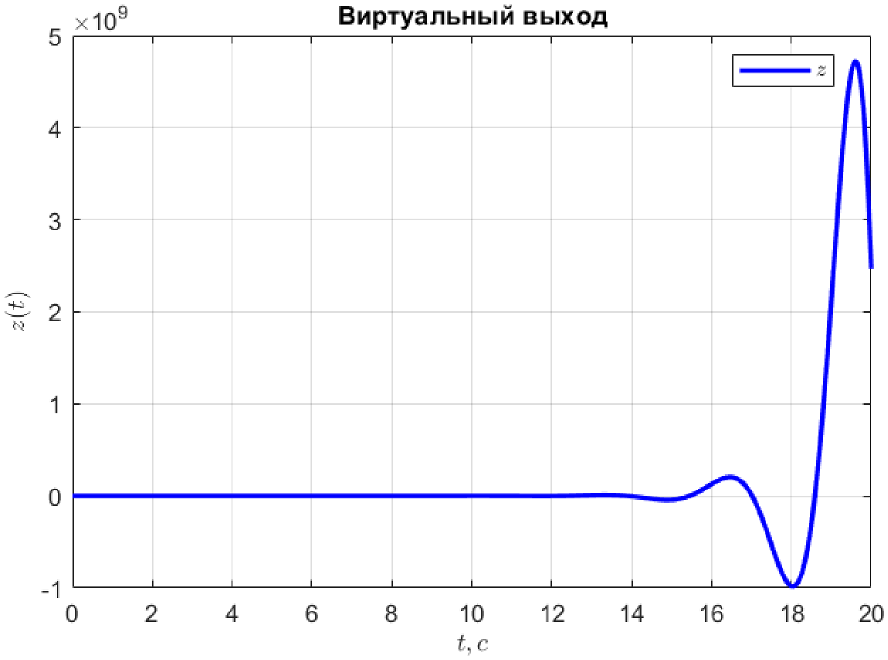

Рисунок 14. Виртуальный выход $z(t)$

Как мы видим, обнуляя регулирующее воздействие $\mathrm{u} = 0$, мы получаем неустойчивые графики, потому что система изначально была неустойчива.

Система, замкнутая регулятором с «feedback»-компонентой $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K_1 x}$:

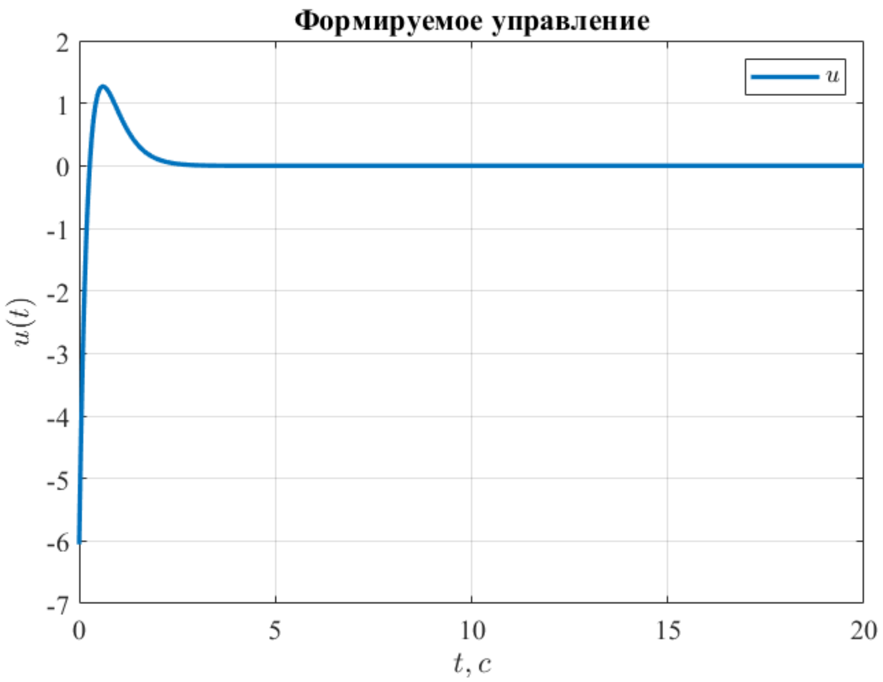

Рисунок 15. Управление регулятора $u(t)$

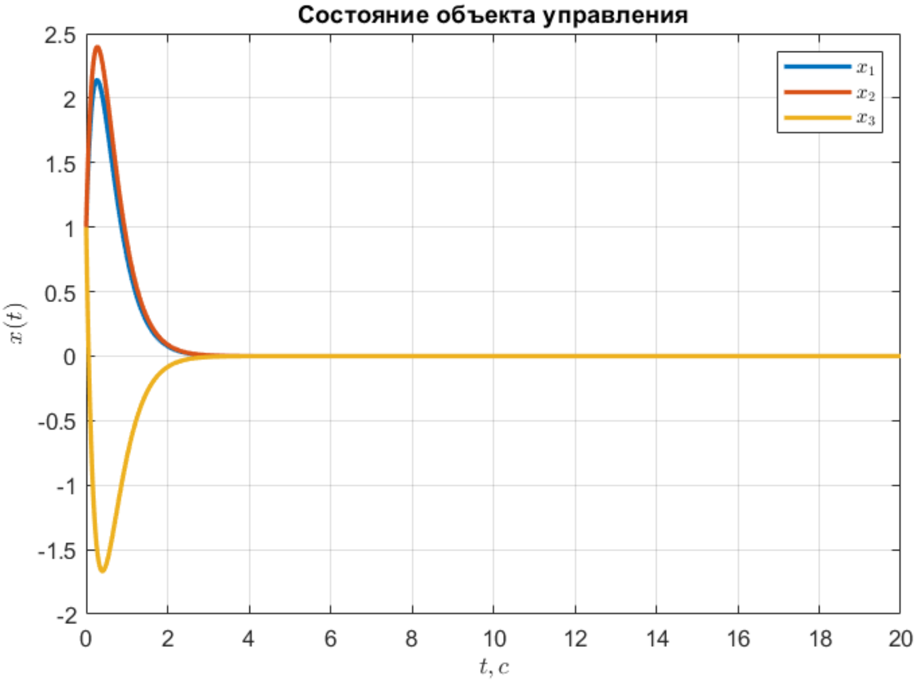

Рисунок 16. Вектор состояния объекта $x(t)$

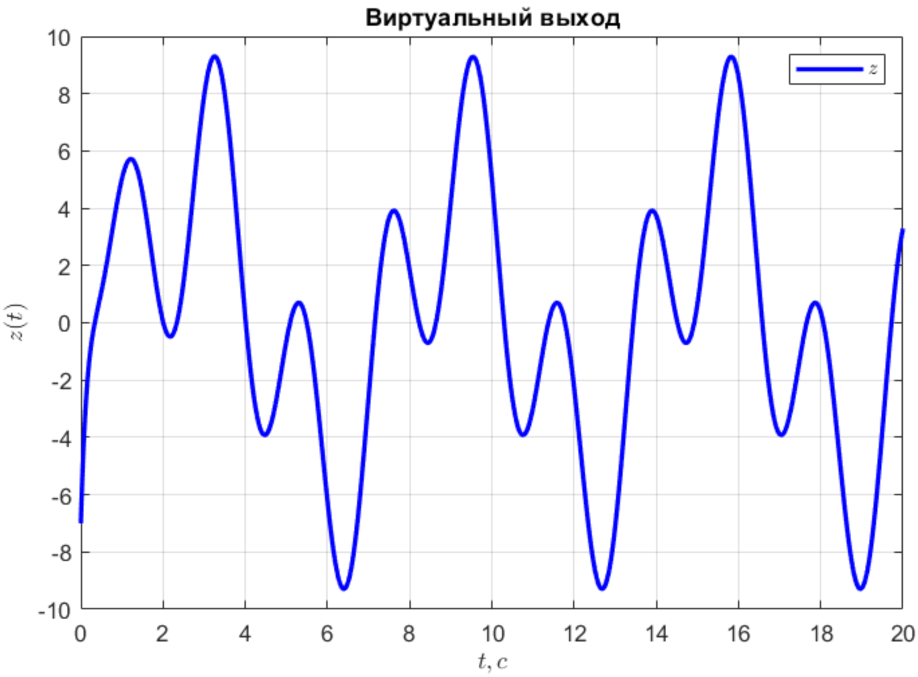

Рисунок 17. Виртуальный выход $z(t)$

В данном случае у нас уже нет заданного на объекте внешнего воздействия, поэтому наш регулятор формирует управление сходящееся к 0, но не выполняет задачу слежения за эталонной моделью w_g.

Система, замкнутая компенсирующим регулятором $\boldsymbol{u = K_1 x + K_2 w_g}$**:**

Рисунок 18. Управление регулятора $u(t)$

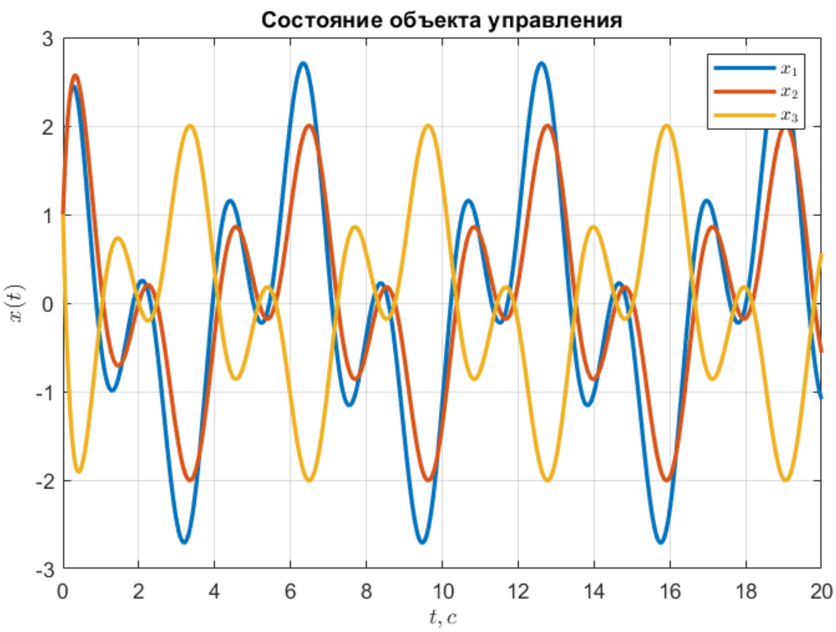

Рисунок 19. Вектор состояния объекта $x(t)$

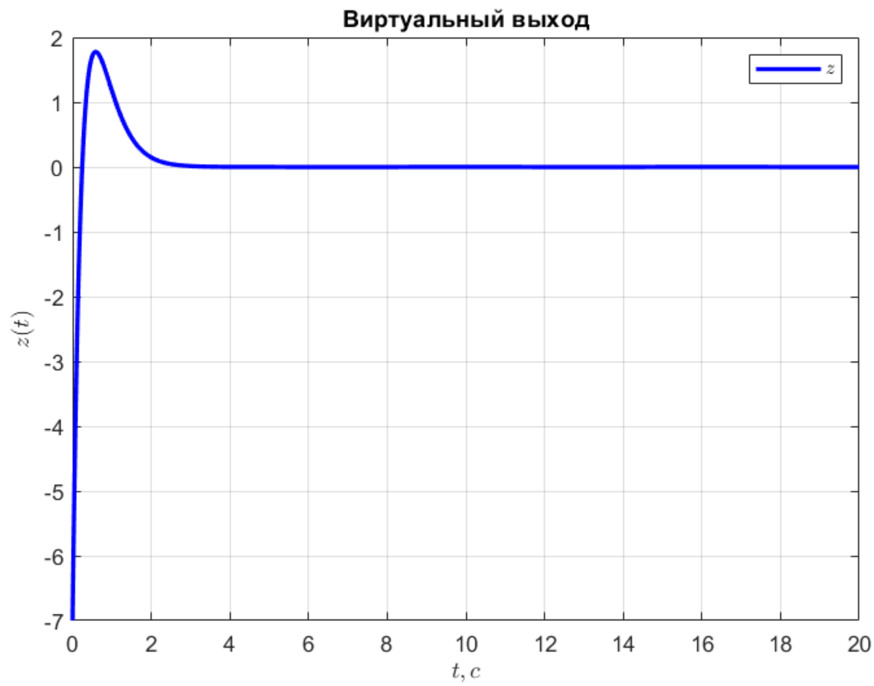

Рисунок 20. Виртуальный выход $z(t)$

Теперь, с помощью регулятора $u = K_1 x + K_2 w_f$ мы достигли цели управления и наш сигнал справляется с задачей слежения за внешним сигналом w_g и $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Вывод:

В нашем случае синтез следящего регулятора был почти аналогичным синтезу компенсирующего регулятора, но в данном случае мы не компенсировали поданное на объект внешнее возмущение, а изменяли наш исходный сигнал до совпадения с эталонным гармоническим воздействием.

Задание 3. Слежение и компенсация по выходу

В соответствии с вариантом (9) по **Таблице 1** возьму матрицы A, B, B_f, C и C_z из **Таблицы 2** и матрицы Γ, D и D_z из **Таблицы 3**:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \; C_z^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -35 & 11 & 6 & 11 \\ -56 & 17 & 10 & 18 \\ -22 & 7 & 5 & 6 \\ -42 & 12 & 10 & 13 \end{bmatrix} \; D^T = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad D_z^T = \begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f w \\ y = Cx + Dw \end{cases}, \; x(0) = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T,$$

генератор внешнего воздействия

$$\dot{w} = \Gamma w, \qquad w(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$$

Выполним следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы Γ и определить характер внешнего возмущения (допускается использовать результаты, полученные в предыдущих Заданиях).

Собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i$$

Определим характер внешнего возмущения по модам системы:

$$w_f = (cos3t + sin3t) + (cost + sint) = cos3t + sin3t + cost + sint$$

Получаем гармонический характер возмущения системы с частотами $w = 3$, $w = 1$.

- Проверить пару $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$ на обнаруживаемость и сделать вывод о возможности осуществления слежения и компенсации по выходу.

Составим матрицу наблюдаемости пары (C, A), где $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$ и $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}$ по формуле:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -6 & 6 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & -1 & -6 & 4 & -6 & -2 \\ -8 & -2 & -17 & 82 & -28 & -16 & -1 \\ 4 & 36 & 31 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 48 & -98 & 319 & -4 & 4 & -1 & -2 \\ 76 & 164 & 319 & -8 & -2 & -17 & -1 \\ -88 & -802 & -817 & 15682 & -508 & -10336 & -5525 \end{bmatrix}$$

$$rank(V) = n = 7$$

Составив матрицу наблюдаемости, и вычислив её ранг, мы убедились в том, что система полностью наблюдаемая и соответственно обнаруживаемая. А значит, мы можем сделать вывод о том, что возможно осуществить слежение и компенсацию системы по выходу.

- Построить схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из расширенного наблюдателя:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - Ly$$

и закона управления:

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором:

$$\dot{w} = \Gamma w, \qquad w(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$$

Построим схему моделирования (расширенную версию можно посмотреть в приложении):

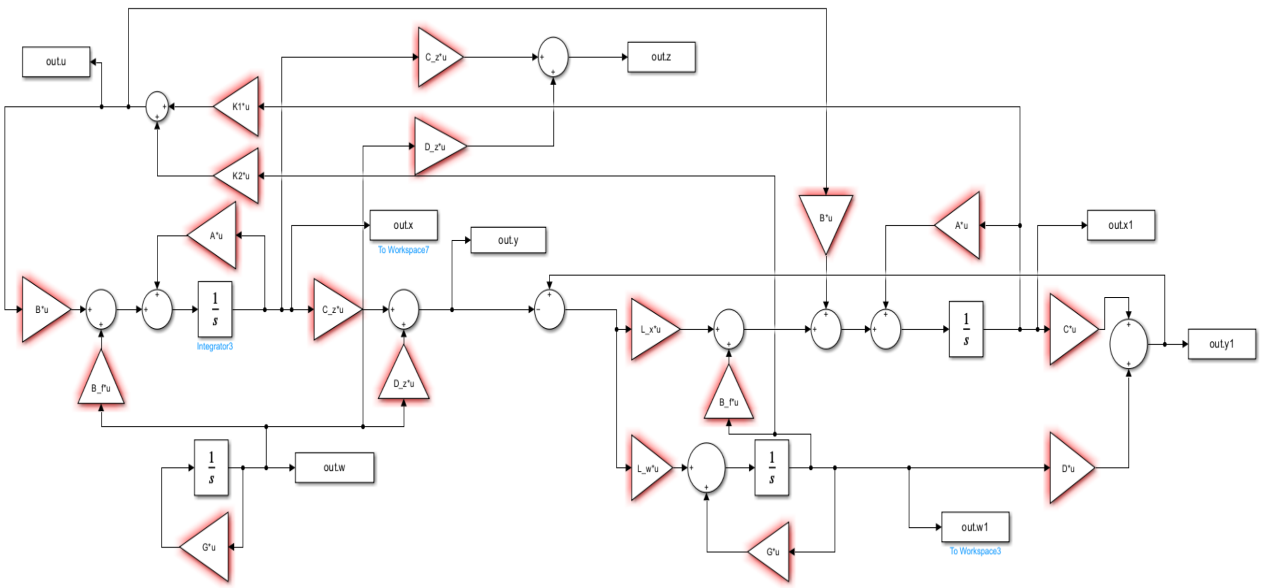

Рисунок 21. Схема моделирования системы

- Синтезировать «feedback»-компоненту K_1 следящего регулятора любым пройденным на курсе способом. Привести выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу K_1.

При помощи матричных уравнений Сильвестра найдём компоненту K_1:

$$\begin{cases} AP - PG = BY \\ K_1 = -YP^{-1} \end{cases}$$

Желаемый спектр:

$$\{-3, -3, -3\}$$

Получаем матрицу K_1 равную:

$$K_1 = [-3.5385 \quad 0.9737 \quad -3.4878]$$

- Синтезировать матрицу коррекции L наблюдателя. Привести выкладки процедуры синтеза и полученную матрицу L.

Синтезируем матрицу L с помощью LQR-регулятора:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\, dt$$

$$R = 1, \;\; Q = eye(7)$$

Получаем:

$$L = \begin{bmatrix} L_x \\ L_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85.2509 \\ 23.5032 \\ -31.6071 \\ -21.8252 \\ -35.2910 \\ -15.6231 \\ -27.5573 \end{bmatrix}$$

- Рассмотреть два случая виртуального выхода:
  - $z = C_z x + D_Z w$
  - $z = y$

Первый случай $\boldsymbol{z = C_z x + D_z w}$

Синтезируем «feedforward»-компоненту K_2 следящего регулятора:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ C_z P + D_z = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

Получаем:

$$K_2 = [-4.7385 \quad 2.1634 \quad 2.5182 \quad 1.9805]$$

Далее, представим уравнения регулятора в форме Вход-Состояние-Выход, где вход это $y(t)$, а выход $u(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + B_f\hat{w} + L_x(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = \Gamma\hat{w} + L_w(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + D\hat{w} \\ u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_xC & BK_2 + B_f + L_xD \\ L_wC & \Gamma + L_wD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_x \\ L_w \end{bmatrix} y \\ u = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Теперь найдём собственные числа матрицы системы и сравним с собственными числами матрицы генератора Г.

Собственные числа матрицы Г:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i, \lambda_{3,4} = \pm i$$

Собственные числа матрицы системы:

$$\lambda_{1,2} = -13.7 \pm 18.9i, \lambda_{3,4} = 0.1 \pm 2.9i, \lambda_{5,6} = 0.15 \pm 0.8i, \lambda_7 = -3$$

Как мы видим матрица системы не содержит в себе собственных чисел генератора Г.

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателя:

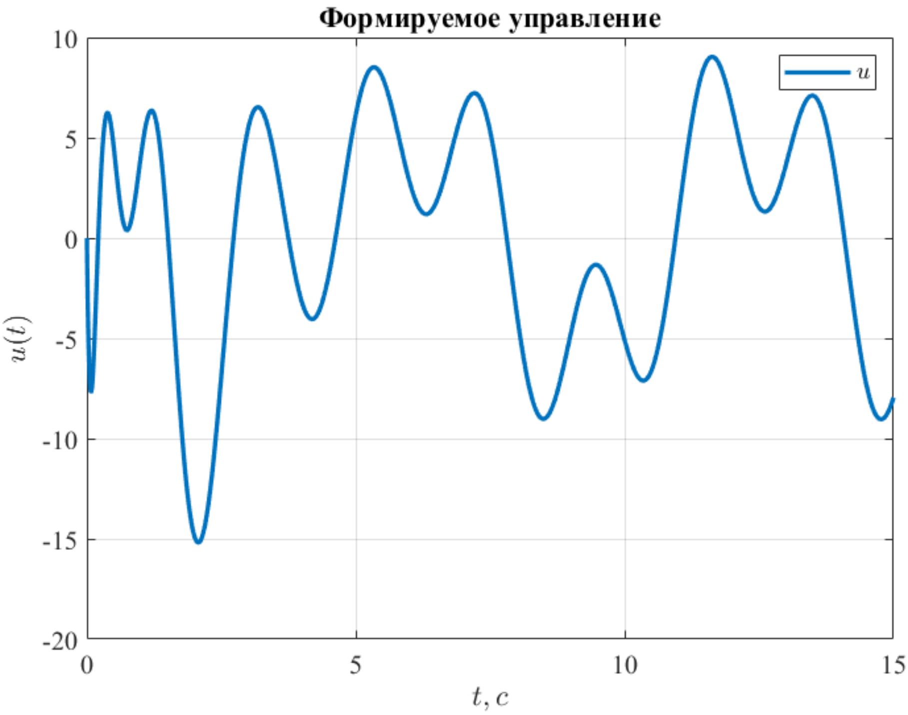

Рисунок 22. График формируемого регулятором управления $u(t)$.

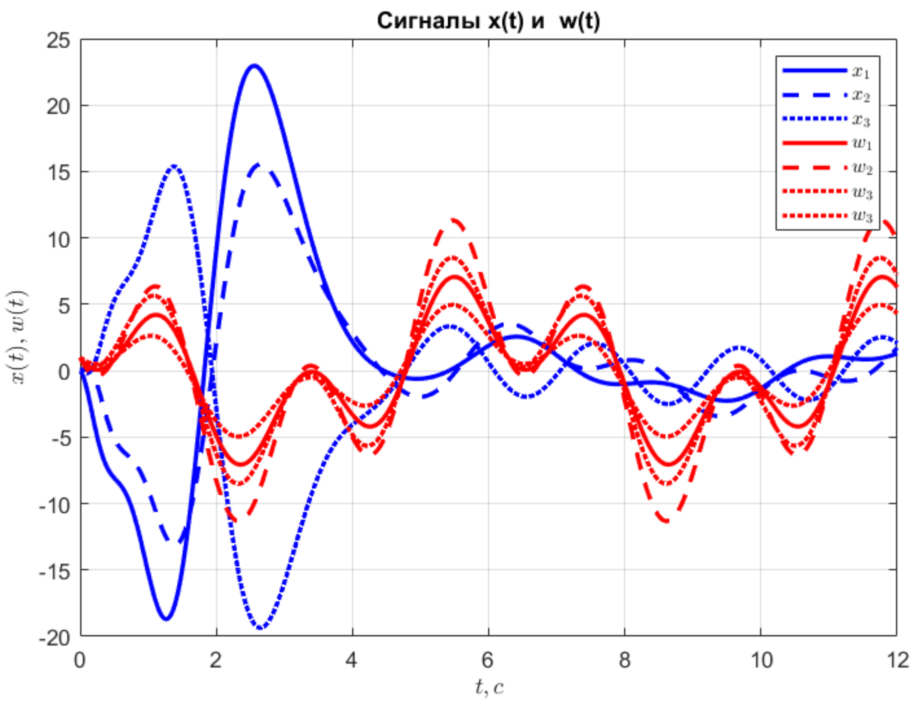

Рисунок 23. График сигнала $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$

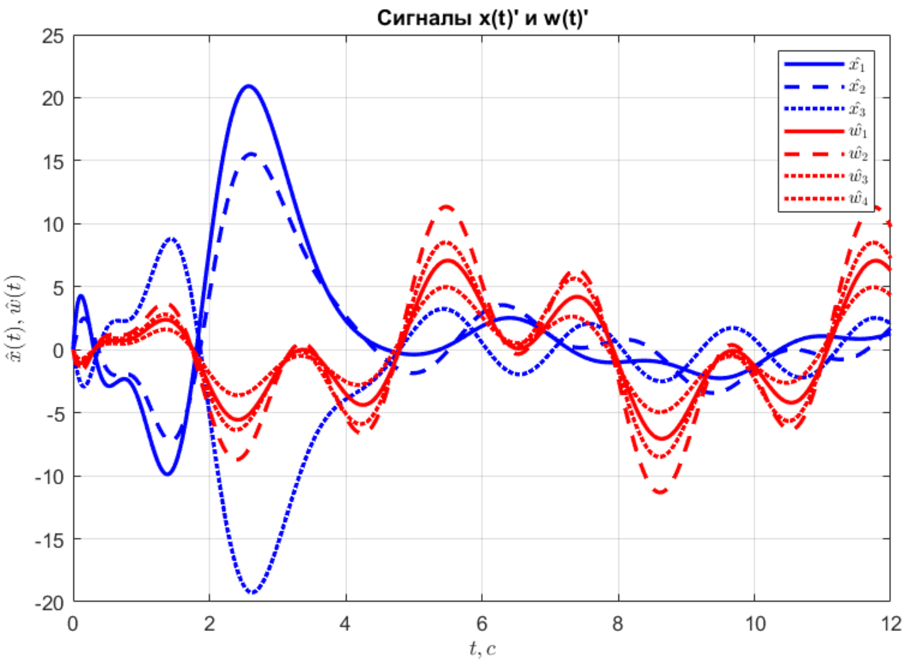

Рисунок 24. График сигнала $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \widehat{w}(t) \end{bmatrix}$

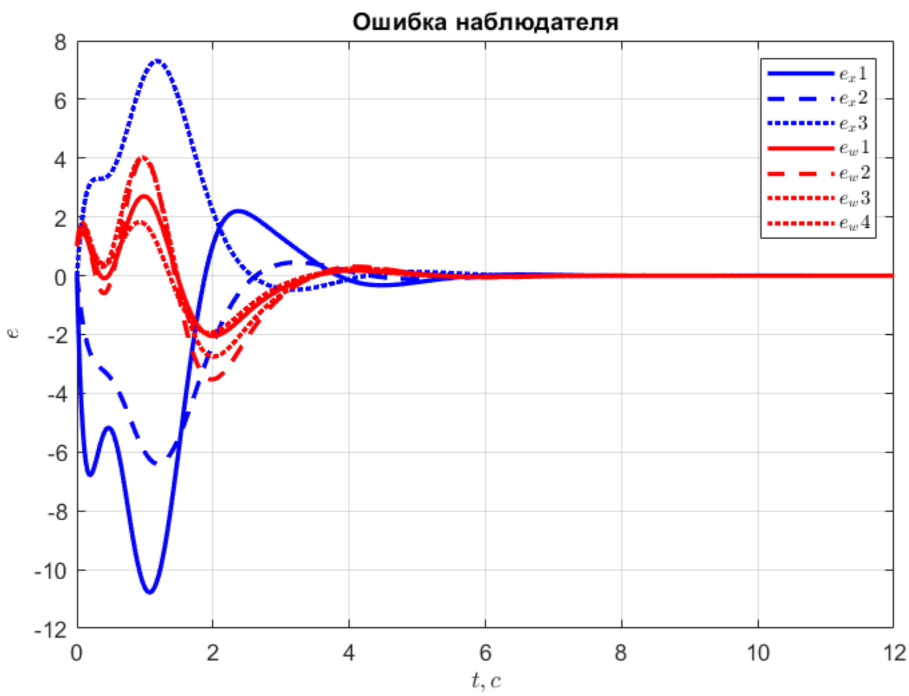

Рисунок 25. График ошибки наблюдателя.

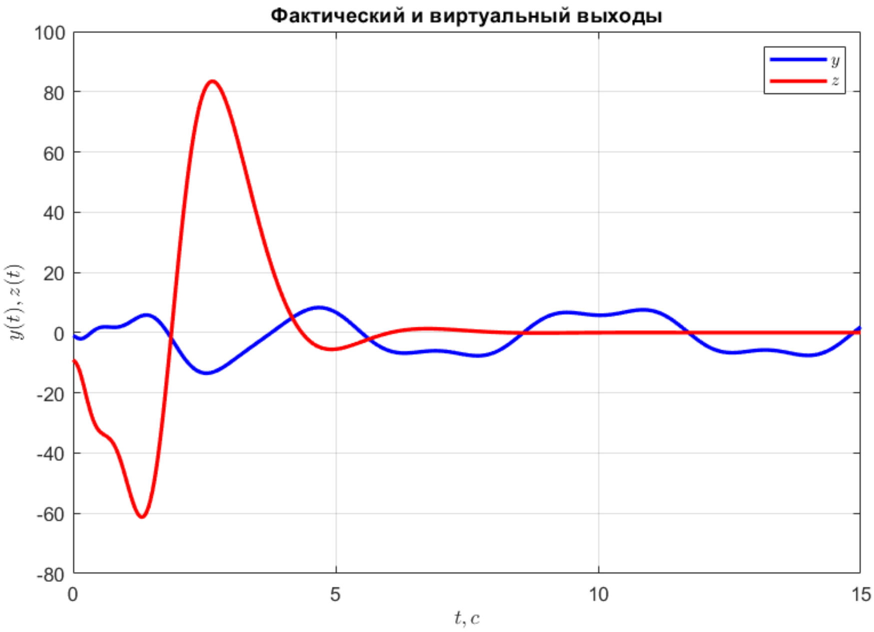

Рисунок 26. Графики фактического и виртуального выходов $y(t)$ и $z(t)$.

Второй случай $z = y$

Синтезируем «feedforward»-компоненту K_2 следящего регулятора:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f \\ CP + D = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

Получаем:

$$K_2 = [-6.8352 \quad 6.2643 \quad -0.5444 \quad -0.8614]$$

Далее, представим уравнения регулятора в форме Вход-Состояние-Выход, где вход это $y(t)$, а выход $u(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + B_f\hat{w} + L_x(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{w}} = \Gamma\hat{w} + L_w(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + D\hat{w} \\ u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_xC & BK_2 + B_f + L_xD \\ L_wC & \Gamma + L_wD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_x \\ L_w \end{bmatrix} y \\ u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Теперь найдём собственные числа матрицы системы и сравним с собственными числами матрицы генератора Г.

Собственные числа матрицы Г:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i, \lambda_{3,4} = \pm i$$

Собственные числа матрицы системы:

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i \;\; \lambda_{5,6} = -13.5 \pm 17.9i, \qquad \lambda_7 = -3$$

Как мы видим в данном случае спектр матрицы системы содержит в себе собственные числа генератора Г. Этот явление называется принципом внутренней модели.

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателя:

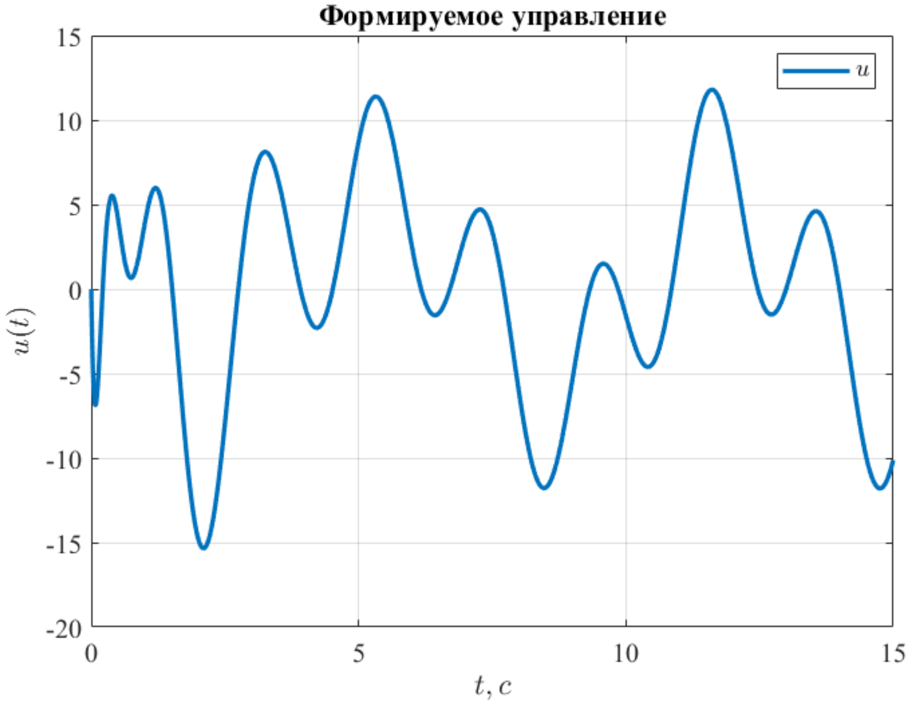

Рисунок 27. График формируемого регулятором управления $u(t)$.

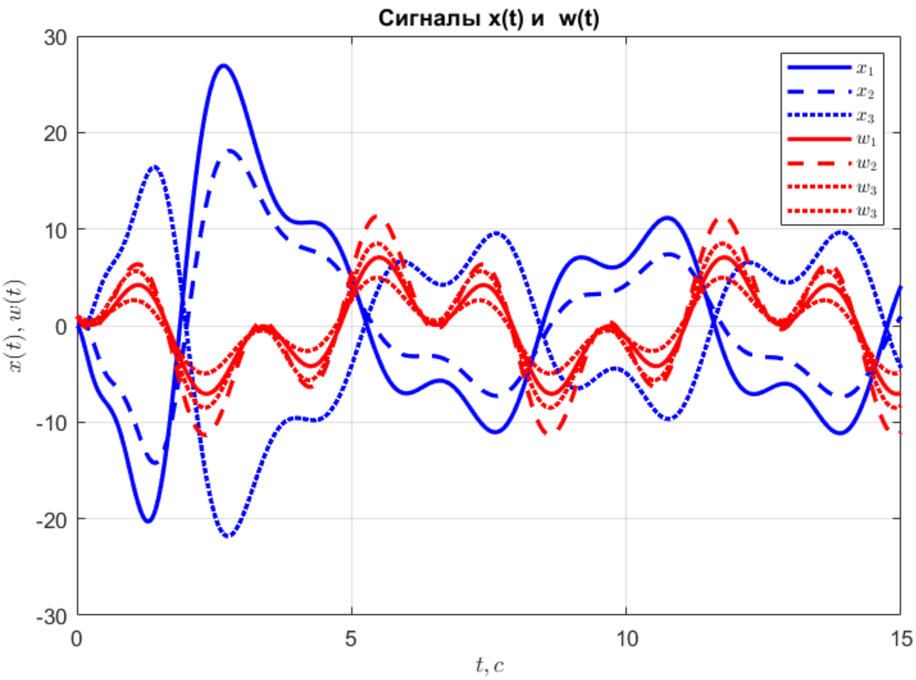

Рисунок 28. График сигнала $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$

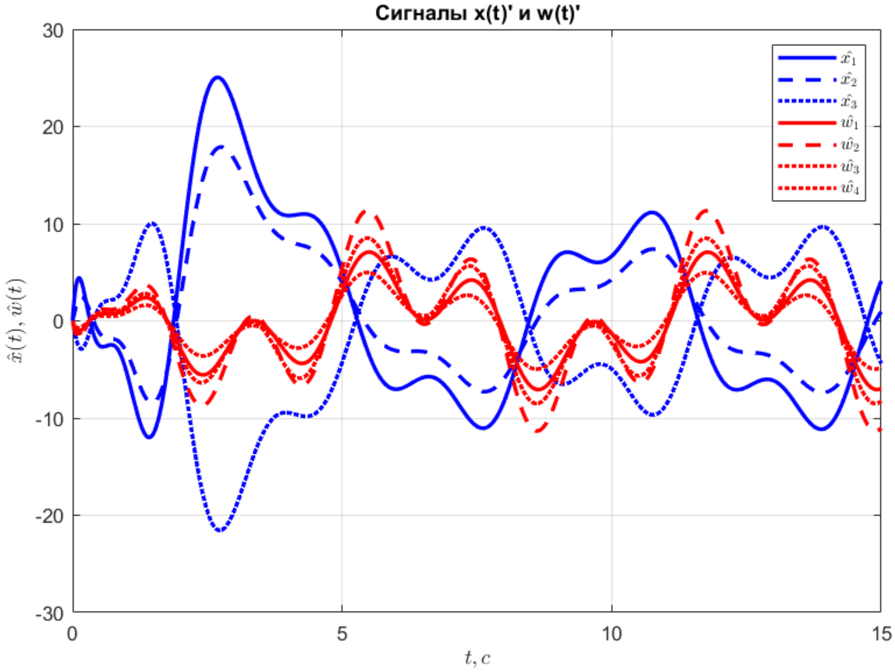

Рисунок 29. График сигнала $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \widehat{w}(t) \end{bmatrix}$

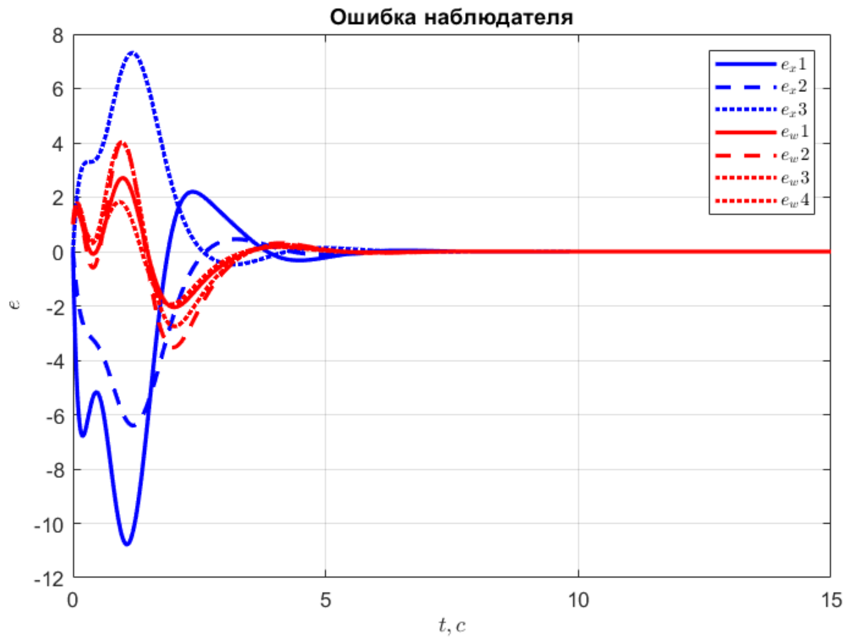

Рисунок 30. График ошибки наблюдателя.

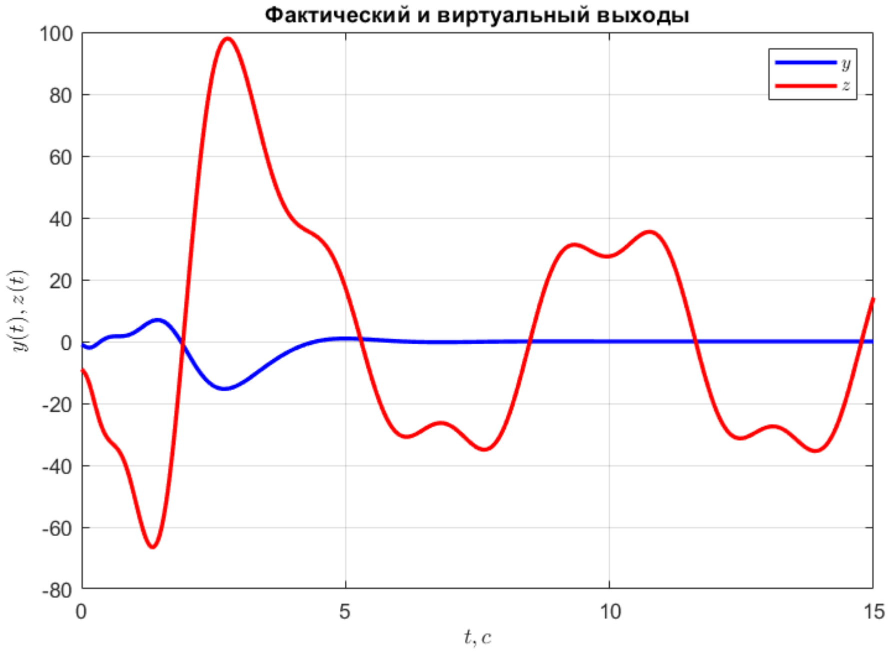

Рисунок 31. Графики фактического и виртуального выходов $y(t)$ и $z(t)$.

Выводы:

В данном задании мы выполняли слежение и компенсацию по выходу, добавив к нашему объекту расширенный наблюдатель. В результате мы справились с нашими задачами, свели z к 0, а также синтезировали регулятор, в котором содержатся задаваемые внешние возмущения.

Задание 4. Тележка и меандр

Рассмотрим объект управления «тележка» и выполним следующие шаги:

- Синтезировать математическую модель «тележки», приняв в качестве выхода линейную координату $y(t) \ = \ x_1(t)$.
- Принять задающий сигнал $g(t)$ меандром (англ. square wave) с произвольной ам плитудой и периодом (выбрать самостоятельно).
- Разложить сигнал $g(t)$ в ряд Фурье и задаться конечным числом гармоник m для использования конечной суммы ряда в качестве приближенного сигнала $g(t)$.
- Сформировать генератор типа, способный порождать выбранные гармоники компоненты $g(t)$. Необходимый порядок генератора определить самостоятельно.
- Задаться виртуальным выходом $z(t)$ в форме и задать матрицы C_Z и D_Z такими, чтобы при выполнении целевого условия было справедливо:

$$\bar{g}(t) = D_Z w_g(t), \quad \lim_{t\to\infty} |\,\bar{g}(t) - \ y(t)| \ = \ 0$$

Рассмотрим объект управления ”тележка”:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Примем задающий сигнал $g(t)$ меандром с амплитудой 1 и периодом π.

Разложим этот сигнал в ряд Фурье и выберем конечное число гармоник

$m = 3$ для использования конечной суммы ряда в качестве приближенного сигнала:

$$\bar{g}(t) = \frac{4}{\pi}(\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t))$$

Сформируем генератор, способный порождать выбранные гармоники-компоненты $\bar{g}(t)$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Зададим матрицы C_Z и D_Z при условиях:

$$\bar{g}(t) = D_Z w_g(t), \quad \lim_{t\to\infty} |\,\bar{g}(t) - y(t)| = 0$$

$$C_Z = [1 \quad 0], \qquad D_Z = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\pi} & 0 & \frac{4}{3\pi} & 0 & \frac{4}{5\pi} \end{bmatrix}$$

В нашем случае мы решаем задачу слежения.

Синтезируем следящий регулятор, обеспечивающий выполнение целевого условия (1).

Синтезируем «feedback»-компоненту K_1. При помощи матричных уравнений Сильвестра найдём компоненту K_1:

$$\begin{cases} AP - PG = BY \\ K_1 = -YP^{-1} \end{cases}$$

Желаемый спектр:

$$\{-1, -1\}$$

Получаем матрицу K_1 равную:

$$K_1 = [-1 \quad -2]$$

Синтезируем «feedforward»-компоненту K_2 следящего регулятора:

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY \\ C_z P + D_z = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

Получаем:

$$K_2 = [0 \quad 2.5465 \quad 3.3953 \quad 2.5465 \quad 6.1115 \quad 2.5465]$$

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы:

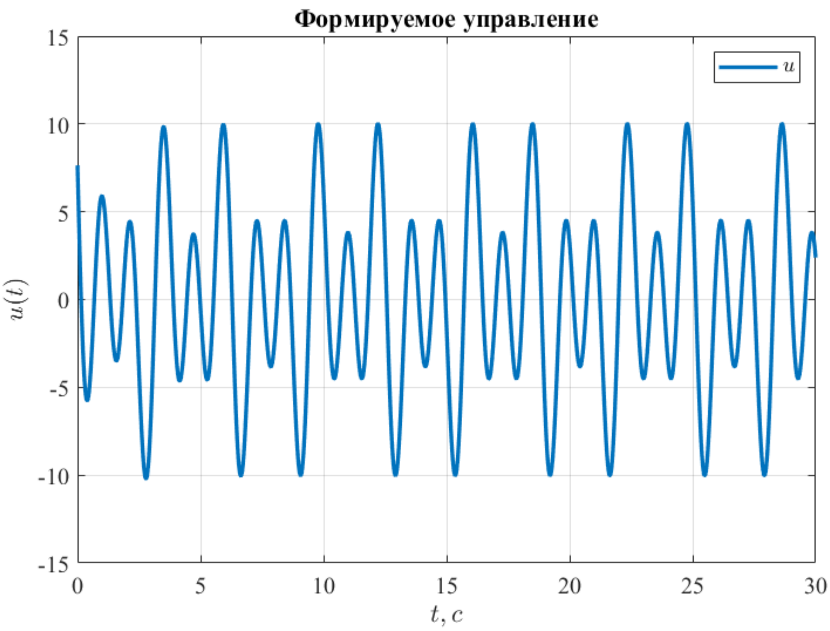

Рисунок 32. График формируемого регулятором управления $u(t)$.

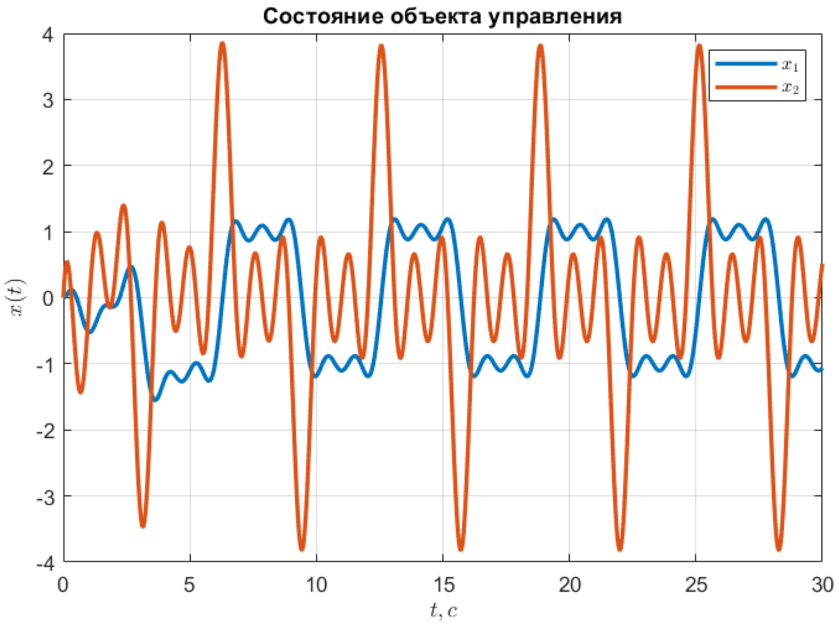

Рисунок 33. График замкнутой системы $x(t)$.

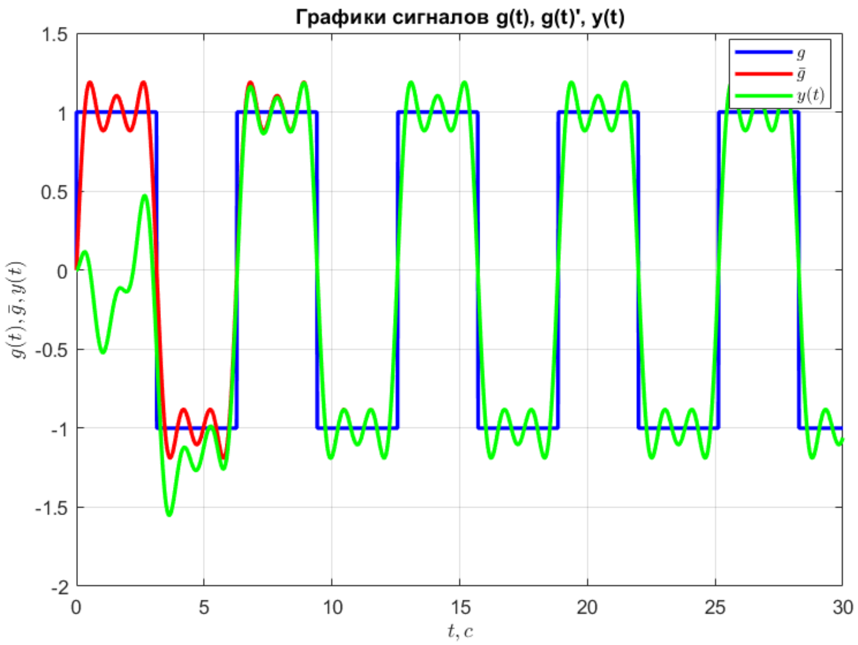

Рисунок 34. График сигналов $g(t), \hat{g}(t), y(t)$.

Выводы:

В данном задании необходимо было выполнить задачу слежения за движением тележки. Путём расчёта компонент K_1 и K_2 по ранее используемым формулам, мы получили следящий регулятор, который повторяет сигнал похожий на меандр.

Вывод:

В ходе выполнения данной лабораторной работы мы решали задачи слежения за виртуальным выходом системы и его компенсации. В начале мы работали с заданными матрицами объекта и генератора, а в последнем задании проверили наши методы на реальном объекте тележки, при случайно выбранном внешнем воздействии. В результате получили решения, работающие на существующем объекте.

Приложение

Вариант	ОУ	Генератор
1	№ 1	№ 6
2	№ 2	№ 7
3	№ 3	№ 8
4	№ 4	№ 9
5	№ 5	№ 10
6	№ 1	№ 11
7	№ 2	№ 12
8	№ 3	№ 13
9	№ 4	№ 14

Таблица 1: Распределение условий Заданий по Вариантам.

№	A	B	B_f	$C^\intercal$	$C_Z^\intercal$
1	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Таблица 2: Исходные данные для Заданий (объект).

№	Γ	$D^{\intercal}$	$D_Z^{\intercal}$
11	$\begin{bmatrix} 35 & 56 & 22 & -42 \\ -11 & -17 & -7 & 12 \\ -6 & -10 & -5 & 10 \\ 11 & 18 & 6 & -13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} -25 & 17 & 10 & -7 \\ -40 & 27 & 14 & -10 \\ -18 & 13 & 7 & -6 \\ -30 & 20 & 14 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \\ 22 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} -25 & 9 & 5 & 6 \\ -40 & 14 & 8 & 10 \\ -16 & 6 & 4 & 3 \\ -30 & 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} -35 & 11 & 6 & 11 \\ -56 & 17 & 10 & 18 \\ -22 & 7 & 5 & 6 \\ -42 & 12 & 10 & 13 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -8 \\ 8 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix}$

Таблица 3: Исходные данные для Заданий (генератор).

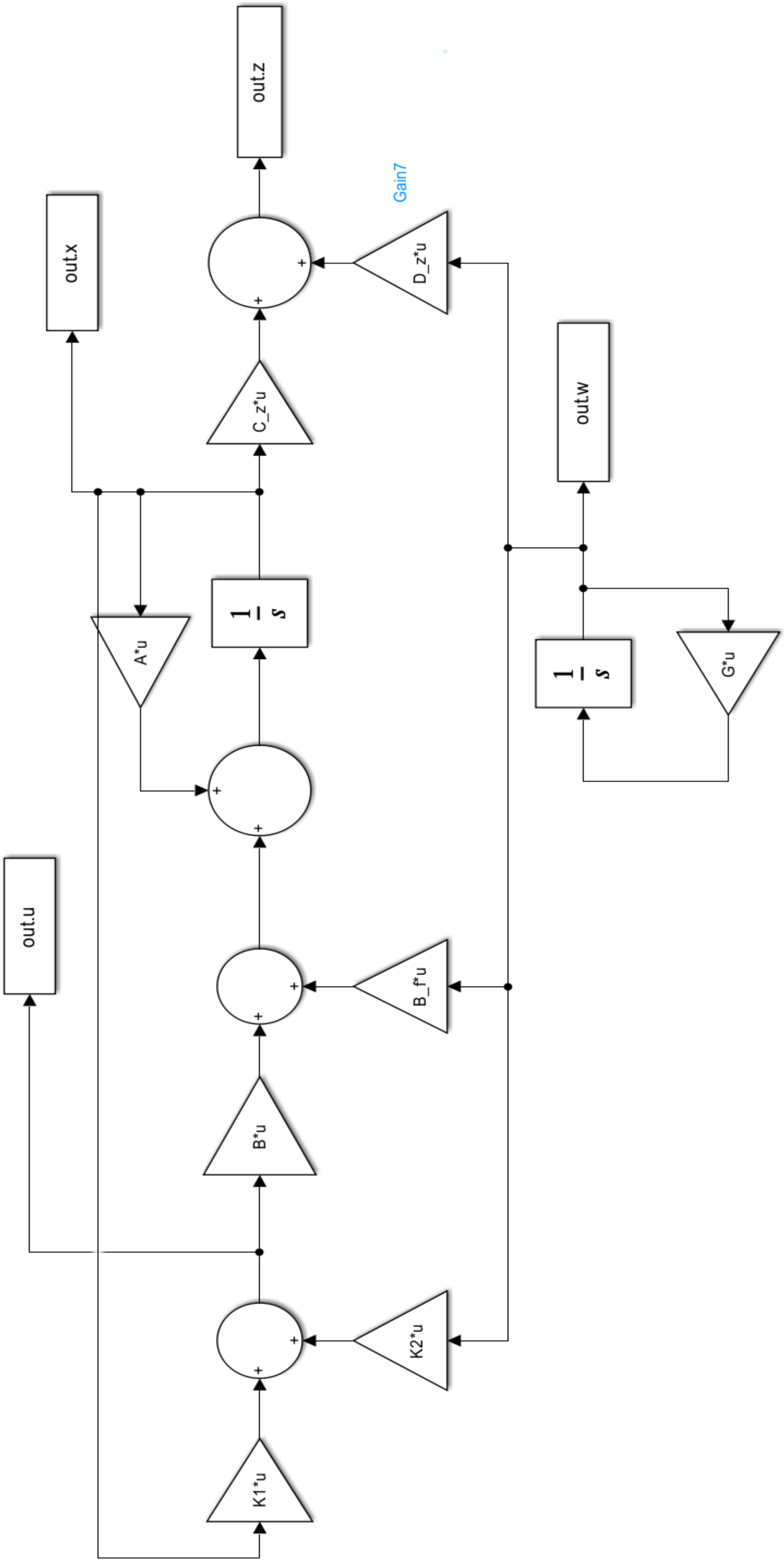

Рисунок 35. Расширенная схема моделирования системы (Задание 1)

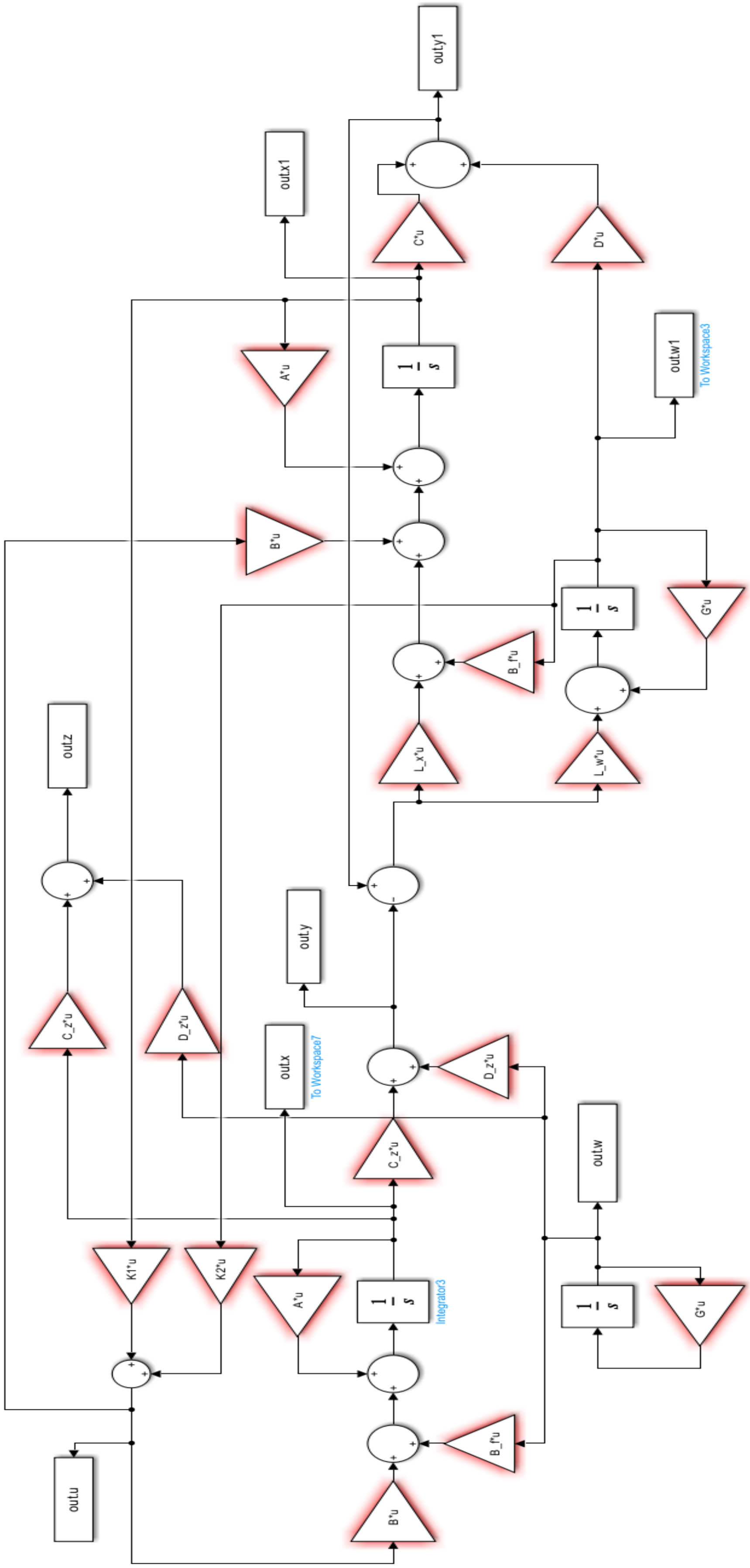

Рисунок 36. Расширенная схема моделирования системы (Задание 3).