” Теория автоматического управления ”

Лабораторная работа №1

Управляемость и наблюдаемость

Выполнил: Бухарев Святослав Андреевич

Факультет: СУиР

Группа: R3381

Вариант 9

Преподаватели: Перегудин А. А., Пашенко А. В.

**Задание 1. Исследование управляемости**

Как говорится Here we go again…

В соответствии с моим вариантом (9) по Таблице 1 возьмём матрицы A и B и точку из Таблицы 2 для Заданий 1, 2 и 5 (Таблицы см. в приложении):

Рассмотрим систему:

и выполним следующие шаги.

**Исследование управляемости системы**

* Найдём матрицу управляемости системы, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы в целом:

Так как наши матрицы имеют размерности A - n × n (3×3), B - n × m (3×1), то получим матрицу управляемости размерности n × nm (3×3):

– матрица управляемости системы.

Ранг:

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система полностью управляема.***

* Найдём собственные числа матрицы A, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для управляемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом:

1. :

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

1. :

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы A управляемы, значит система полностью управляема.***

* Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом:

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

В вещественном виде:

Получаем, что все собственные числа матрицы A различны (-1; -1-2i; -1+2i), а также, все элементы матрицы не равны нулю, сл-но, ***каждое собственное число управляемо и вся система полностью управляема.***

* Найдём Грамиан управляемости системы относительно времени , далее вычислим его собственные числа:

Грамиан управляемости относительно

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан управляемости:

Собственные числа будут равны:

- все положительные, значит , а это значит ***матрица Грамиана невырождена.***

* Найдём управление, переводящее систему из в ) за время .

Для этого с помощью Матлаба посчитаем данную формулу:

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

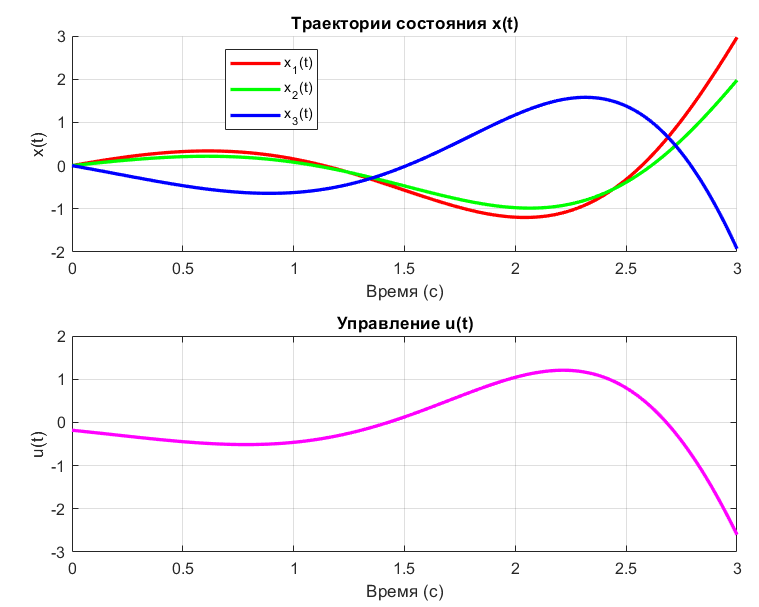


Рисунок 1. Моделирование системы.

Выводы:

Как итог, проделав ряд вычислений и проверок, я убедился, что моя система является управляемой, и не просто управляемой, а полностью управляемой.

**Задание 2. Еще одно исследование управляемости**

Возьмём матрицу A из таблицы 2 и матрицу B и точки x′ и x′′ из Таблицы 3:

Рассмотрим систему:

и выполним следующие шаги.

* Проверим обе точки x′ и x′′ на принадлежность управляемому подпространству системы:

Составим матрицу управляемости системы и найдём её ранг:

А теперь расширенную матрицу управляемости с нашим состоянием :

Получаем:

И точка x′ не принадлежит управляемому подпространству системы.

Теперь составим расширенную матрицу управляемости с нашим состоянием :

Получаем:

Точка принадлежит управляемому подпространству системы.

Примем целевой точкой .

* Выполним все шаги **Задания 1** для рассматриваемой системы и выбранной целевой точки :

Найдём матрицу управляемости системы, определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы в целом:

Матрица управляемости размерности n × nm (3×3):

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система не полностью управляема.***

Найдём собственные числа матрицы A, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для управляемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом:

:

Матрица Хаутуса:

- неуправляемое собственное число.

:

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

Как итог, ***не все собственные числа матрицы A управляемы, а значит система является только частично управляемой.***

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

В вещественном виде:

Получаем, что все собственные числа матрицы A различны (-1; -1-2i; -1+2i), а также, один элемент матрицы равен нулю, сл-но, ***только два собственных числа управляемы, а одно – неуправляемо, и вся система частично управляема.***

Найдём Грамиан управляемости системы относительно времени , далее вычислим его собственные числа:

Грамиан управляемости относительно

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан управляемости:

Собственные числа будут равны:

- не все они положительные, значит ***матрица Грамиана вырождена***

В связи с чем придётся считать псевдообратную матрицу для нахождения управления.

Найдём управление, переводящее систему из в ) за время .

Для этого с помощью Матлаба посчитаем данную формулу (где обратную матрицу заменим на псевдообратную):

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

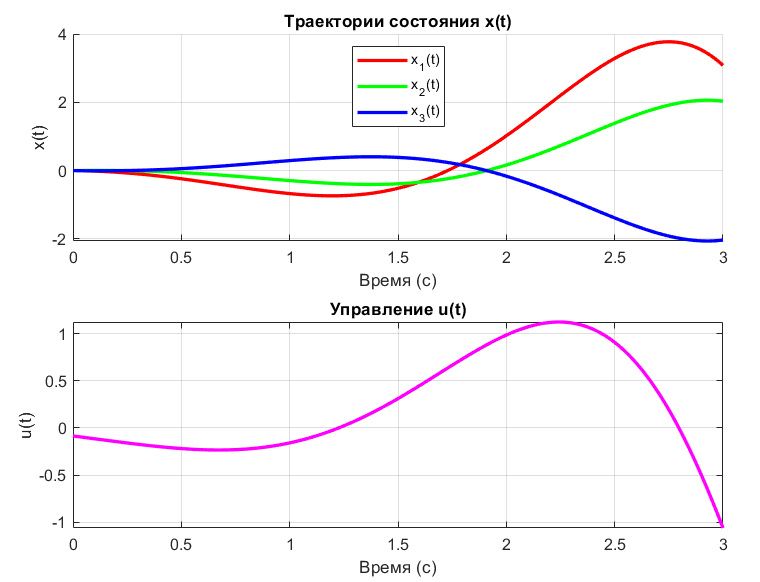


Рисунок 2. Моделирование системы.

Выводы:

Как итог, я выяснил, что система не является полностью управляемой, и поэтому, чтобы найти управление для состояния которое лежит в подпространстве управления, мы должны использовать псевдообратную матрицу для поиска управления чем я в итоге и воспользовался.

**Задание 3. Исследование наблюдаемости**

В соответствии с моим вариантом возьмём матрицы A, C и сигнал из Таблицы 4 (№14):

Рассмотрим систему:

и выполним следующие шаги.

**Исследование наблюдаемости системы**

* Найдём матрицу наблюдаемости системы, определим ее ранг, сделаем вывод о наблюдаемости системы в целом:

Так как наши матрицы имеют размерности A - n × n (3×3), C - k × n (1×3), то получим матрицу наблюдаемости размерности nk × n (3×3):

– матрица наблюдаемости системы.

Ранг:

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система полностью наблюдаема.***

* Найдём собственные числа матрицы A, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

:

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

:

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы A наблюдаемы, а значит система является полностью наблюдаемой.***

* Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

В вещественном виде:

Получаем, что все собственные числа матрицы A различны (1; -4-2i; -4+2i), а также, все элементы матрицы не равны нулю, сл-но, ***каждое собственное число наблюдаемо и вся система полностью наблюдаема.***

* Найдём Грамиан наблюдаемости системы относительно времени = 3, вычислим его собственные числа. Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы:

Грамиан наблюдаемости относительно

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан наблюдаемости:

Собственные числа будут равны:

- все положительные, значит , а это значит ***матрица Грамиана наблюдаемости невырождена.***

* Считая, что выход системы подчиняется закону на временном интервале определим начальные условия системы.

C помощью Матлаба найдём начальные условия системы, используя формулу:

Получаем начальные условия:

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

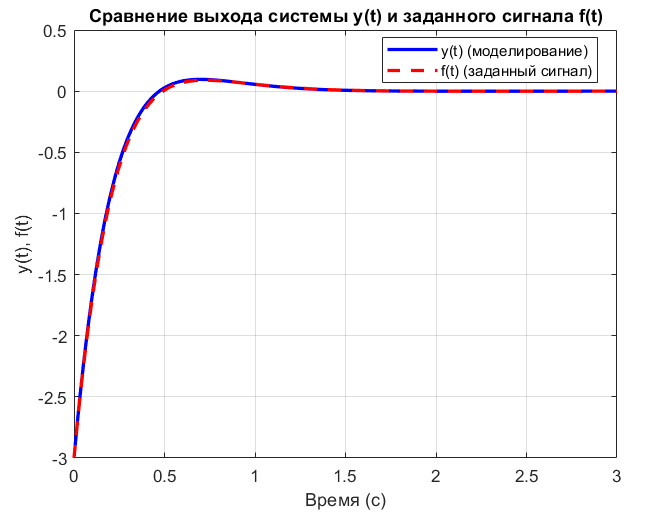


Рисунок 3. Моделирование выхода системы.

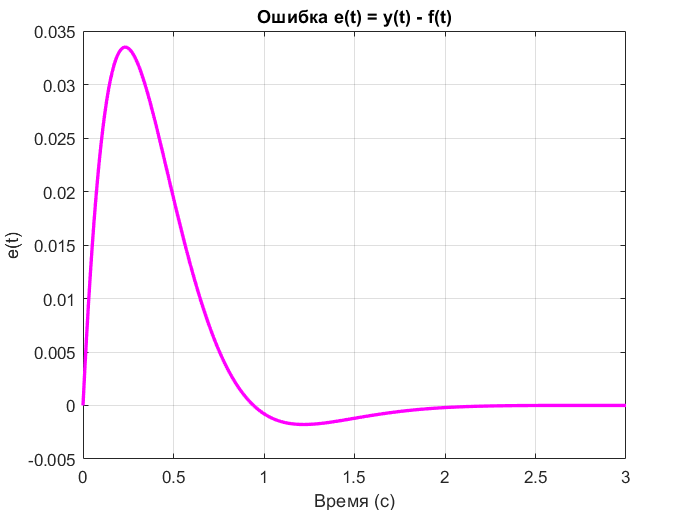


Рисунок 4. Моделирование ошибки

Выводы:

Как итог, проделав ряд вычислений с помощью Матлаба, я выяснил, что система является полностью наблюдаемой, благодаря чему я нашёл единственный вектор, соответствующий начальным условиям этой системы, зная её выход.

**Задание 4. Еще одно исследование наблюдаемости**

Возьмём матрицу A и сигнал из Таблицы 4 (№14) и матрицу C из Таблицы 5 (№14):

Рассмотрим систему:

и выполним следующие шаги.

**Исследование наблюдаемости системы**

* Найдём матрицу наблюдаемости системы, определим ее ранг, сделаем вывод о наблюдаемости системы в целом:

Так как наши матрицы имеют размерности A - n × n (3×3), C - k × n (1×3), то получим матрицу наблюдаемости размерности nk × n (3×3):

– матрица наблюдаемости системы.

Ранг:

Следовательно, получаем, что ***по критерию Калмана система не полностью наблюдаема.***

* Найдём собственные числа матрицы A, найдём для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определим ранги матриц, сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом:

:

Матрица Хаутуса:

- ненаблюдаемое собственное число.

:

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

Как итог, ***одно собственное число матрицы A ненаблюдаемо, остальные два наблюдаемы, система не полностью наблюдаема.***

* Найдём Жорданову (или диагональную) форму системы и сделаем выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

Найдём Жорданову форму нашей матрицы:

В вещественном виде:

Получаем, что все собственные числа матрицы A различны (1; -4-2i; -4+2i), а также, один элемент матрицы равен нулю, сл-но, ***только два собственных числа наблюдаемы, а одно – ненаблюдаемо, и вся система частично наблюдаема.***

* Найдём Грамиан наблюдаемости системы относительно времени = 3, вычислим его собственные числа. Проанализируем полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы:

Грамиан наблюдаемости относительно

С помощью функций Матлаба gram и expm, посчитаем наш Грамиан наблюдаемости:

Собственные числа будут равны:

- одно собственное число равно 0, значит ***матрица Грамиана наблюдаемости вырождена.***

* Считая, что выход системы подчиняется закону на временном интервале определим начальные условия системы.

C помощью Матлаба найдём начальные условия системы, используя формулу:

Получаем начальные условия:

Выполним моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов:

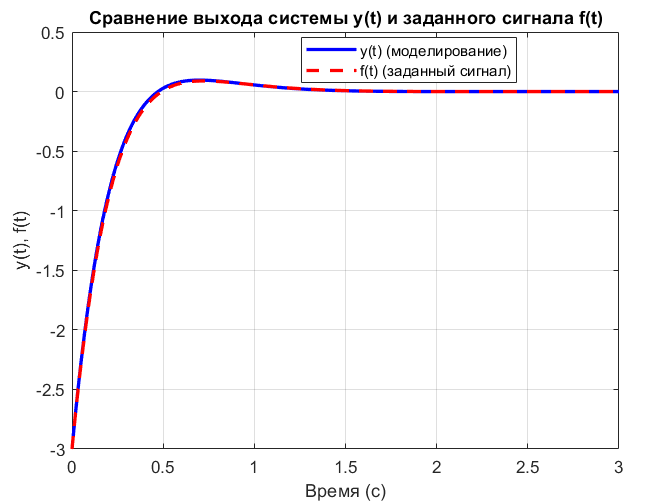


Рисунок 5. Моделирование выхода системы.

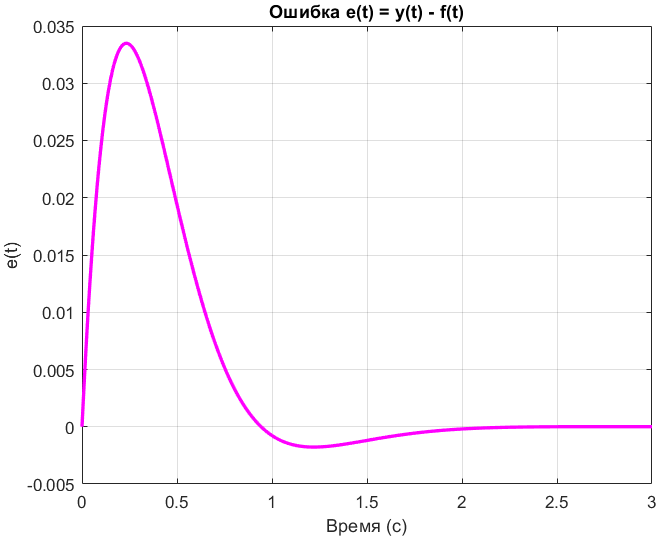


Рисунок 6. Моделирование ошибки

Выводы:

Заменив матрицу C, я получил не полностью наблюдаемую систему, из-за чего нельзя было точно восстановить начальные условия, только приблизительно, за счёт использования псевдообратной матрицы. Так как мы считаем, что на временном интервале , но сама система не полностью наблюдаема, то мы получаем небольшую ошибку между .

* Определить, мог ли выход вида быть порожден начальными условиями, отличными от найденных. Если да, то привести хотя бы три таких вектора начальных условий и выполнить для каждого из них (включая изначально найденный) моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов (одинаковые выходы при разном поведении векторов состояния систем).

С помощью Матлаба найдём другие вектора начальных условий:

И выполним моделирование:

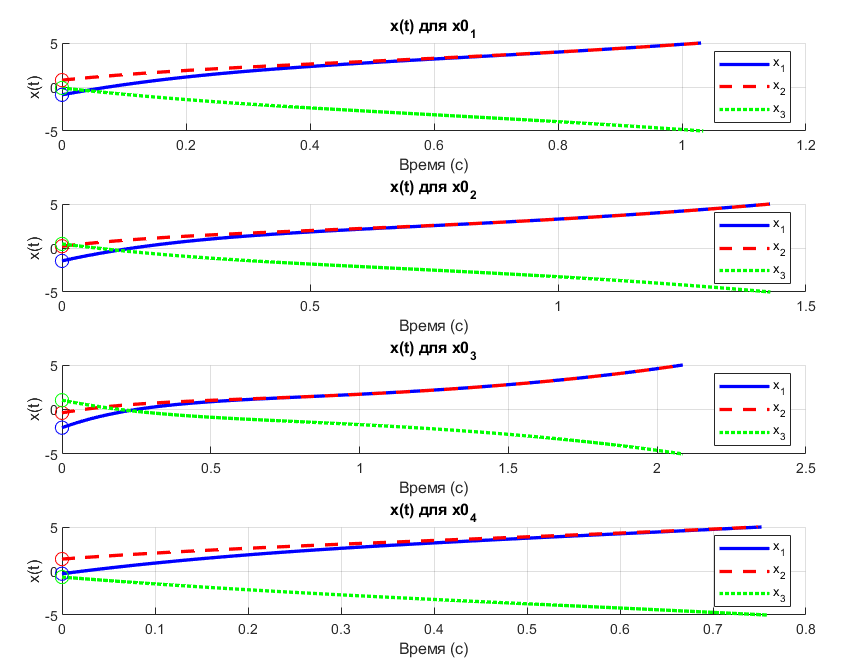


Рисунок 7. Графики векторов состояния систем с начальными условиями

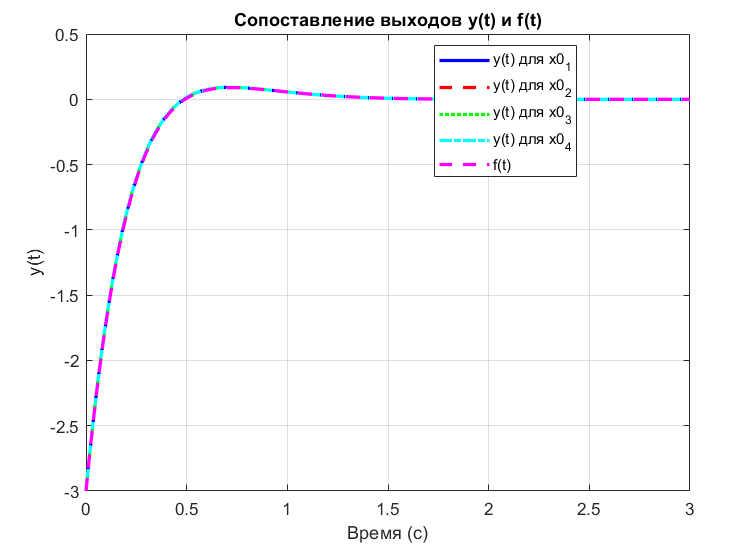
****

Рисунок 8. Графики выходов системы .

**Задание 5. Исследование управляемости по выходу**

Возьмём матрицу А из Таблицы 2 и матрицы B и C из Таблицы 6:

Рассмотрим систему:

и выполним следующие шаги:

* Найдём Жорданову форму нашей системы:

Теперь её вещественную часть:

* Определим управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел и системы в целом:

Управляемость:

:

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

:

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

Матрица Хаутуса:

- управляемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы A управляемы, значит вся система полностью управляема.***

Наблюдаемость:

:

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

:

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

Матрица Хаутуса:

- наблюдаемое собственное число.

Как итог, ***все собственные числа матрицы A наблюдаемы, а значит система является полностью наблюдаемой.***

* Найдём матрицу управляемости системы по выходу при , определим её ранг, сделаем вывод об управляемости системы по выходу:

Матрица выхода у нас:

Получаем:

Следовательно, ***система является полностью управляемой по выходу***.

Получается, что в нашем случае достаточно иметь матрицу , чтобы обеспечить полную управляемость по выходу.

Выводы:

Причиной управляемости или неуправляемости по выходу является ранг матрицы управляемости по выходу, если он меньше, чем ранг матрицы выхода, то мы не сможем контролировать каждый выход системы, а именно, не сможем повлиять на какой-то выход с помощью заданного управления. Напротив, если же ранги данных матриц равны, мы за любой промежуток времени можем добиться любого выхода, использую ограниченное управление.

**Выводы:**

В ходе выполнения данной лабораторной работы, я разбирался с такими понятиями, как управляемость и наблюдаемость системы. По исходным данным я определял насколько хорошо можно управлять объектом и восстанавливать его начальное состояние, зная конечное. Также, я разобрался с таким понятием, как управляемость по выходу, с помощью которого можно судить, насколько точно мы можем повлиять на выход системы с помощью заданного управления.

**Приложение**

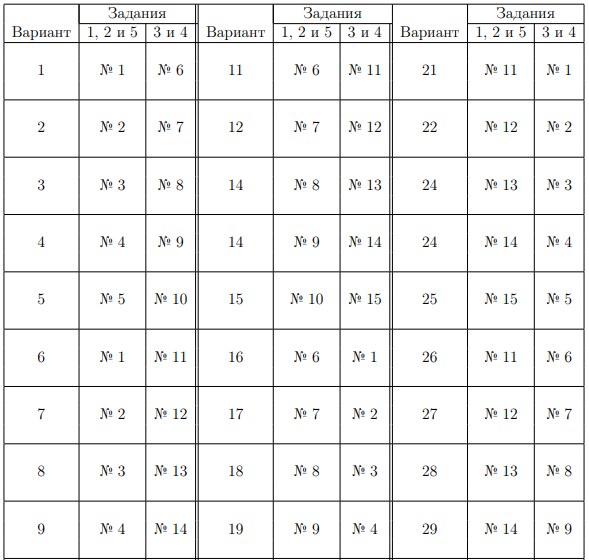


Таблица 1: Распределение Заданий по Вариантам.

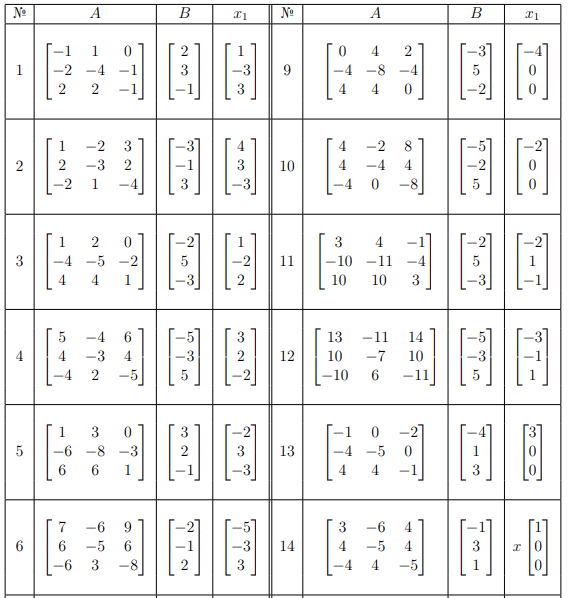
****

Таблица 2: Исходные данные для Задания 1 и Задания 2.

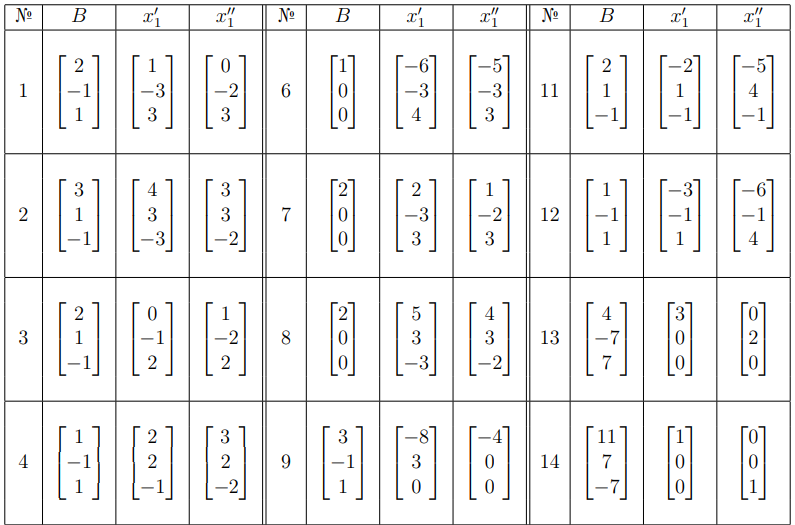
****

Таблица 3: Исходные данные для Задания 2

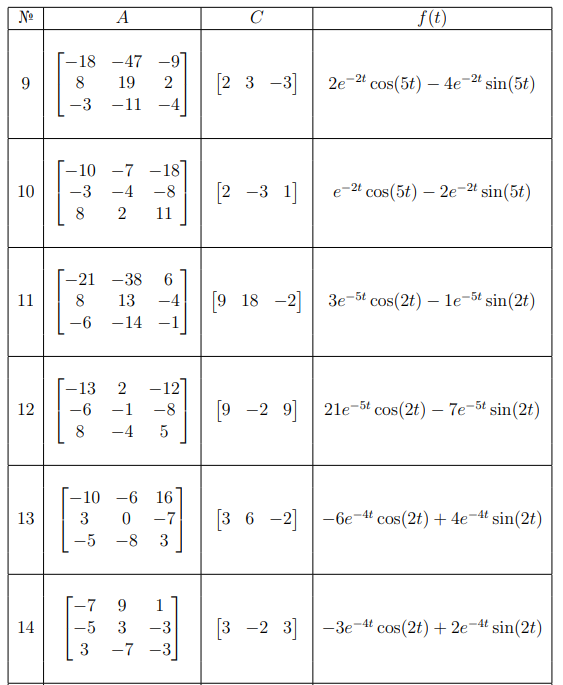
****

Таблица 4: Исходные данные для Задания 3 и Задания 4 (номера 9-15)

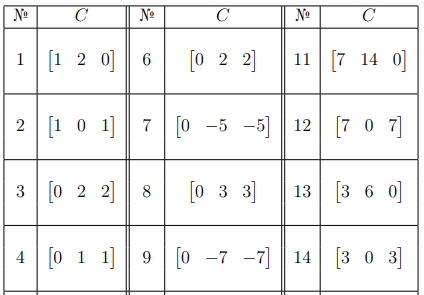


Таблица 5: Исходные данные для Задания 4

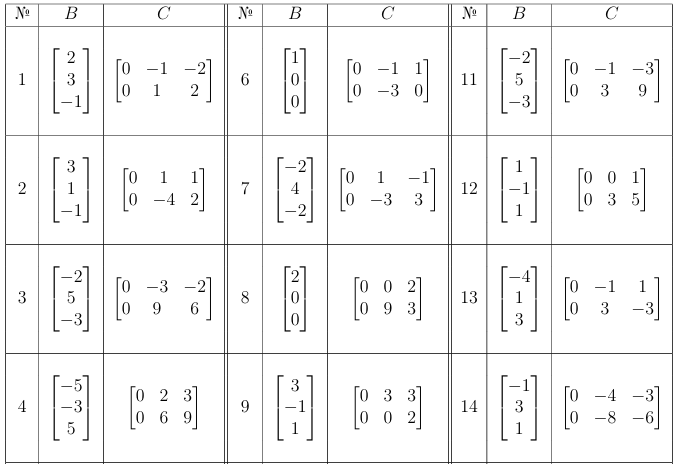


Таблица 6: Исходные данные для Задания 5