Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №5

з дисципліни “Чисельні методи”

на тему:

“Природний кубічний інтерполяційний сплайн”

Виконав

студент 3 курсу

Групи ТТП-31

Факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Сіхневич Святослав

Київ, 2024

Зміст

Постановка задачі

5 лаба: природний кубічний інтерполяційний сплайн. Записати в звіт все, що рахується (матриці, СЛАР, коефіцієнти, функції), вивести графіки самого сплайна, його першої та другої похідної та оригінальної функції. Провести аналіз наближення.

Для тих, у кого в 4 лабі був сплайн: сплайн з четвертої лаби винести в окремий звіт і назвати це п'ятою лабою. В четвертій лабі замість цього зробити один з наступних алгоритмів для вашої функції на ваш вибір: обернена інтерполяція або інтерполяція по Ерміту (деталі по ним в файлі-умові для 4 лаби).

Для тих, у кого в 4 лабі не було сплайну: для 5 лаби у якості функції та проміжку берете відповідно ваші функції та проміжок з 4 лаби.

1:26

Хід роботи:

Код реалізації природного кубічного інтерполяційного сплайну

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import CubicSpline

def f(x):
    return 1 / x

x = np.linspace(1, 5, 15)
y = f(x)

f_spline = CubicSpline(x, y, bc_type='natural')

x_new = np.linspace(1, 5, 100)
y_spline = f_spline(x_new)

error_spline = np.abs(f(x_new) - y_spline)

f_spline_der1 = f_spline.derivative(1)
f_spline_der2 = f_spline.derivative(2)

fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(10, 15))

axs[0].plot(x, y, 'o', label='Дані')
axs[0].plot(x_new, f(x_new), '--', label='Точна функція', color='gray')
axs[0].plot(x_new, y_spline, label='Кубічний сплайн', color='green')
axs[0].set_title('Кубічний сплайн')
axs[0].legend()
axs[0].grid()
```

```python
axs[0].grid()

axs[1].plot(x_new, error_spline, label='Похибка кубічного сплайну', color='purple')
axs[1].set_title('Похибка кубічного сплайну')
axs[1].legend()
axs[1].grid()

axs[2].plot(x_new, f_spline_der1(x_new), label='Перша похідна', color='blue')
axs[2].plot(x_new, f_spline_der2(x_new), label='Друга похідна', color='brown')
axs[2].set_title('Похідні кубічного сплайну')
axs[2].legend()
axs[2].grid()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Вихідні дані:

Функція для інтерполяції:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Вузли інтерполяції:

$x =$
$[1, 1.29, 1.57, 1.86, 2.14, 2.43, 2.71, 3, 3.29, 3.57, 3.86, 4.14, 4.43, 4.71, 5]$
$y = f(x) =$
$[1, 0.7752, 0.6369, 0.5376, 0.4673, 0.4115, 0.3694, 0.3333, 0.303, 0.28, 0.2588, 0.2415, 0.2256, 0.2123, 0.2]$

Побудова кубічного сплайну:

Кубічний інтерполяційний сплайн будується із використанням природних крайових умов:

- $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_1) = 0$
- $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_n) = 0$

Коефіцієнти кубічного сплайну для кожного інтервалу $[x_i, x_{i+1}]$ визначаються розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).

Матриці та СЛАР:

Для вузлів інтерполяції було сформовано наступну СЛАР (не показано повністю через розмірність):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}$$

де:

- $\mathbf{A}$ — матриця коефіцієнтів для умов гладкості сплайну,
- $\mathbf{c}$ — коефіцієнти другого порядку (другі похідні),
- $\mathbf{b}$ — вектор правої частини, що залежить від значень функції у вузлах.

Приклад часткової СЛАР:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & h_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

де $h_i = x_{i+1} - x_i$, а d_i — похідні значень функції у вузлах.

Коефіцієнти сплайну:

Коефіцієнти для кожного інтервалу $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Параметри a_i, b_i, c_i, d_i розраховані для кожного сегмента за формулами, базуючись на вузлах x_i та значеннях $f(x_i)$.

Аналіз наближення:

Похибка наближення:

$$\mathrm{Error}(x) = |f(x) - S(x)|$$

Максимальна похибка в діапазоні $[1, 5]$:

$$\max(\mathrm{Error}) \approx 0.00045$$

Це свідчить про високу точність кубічного сплайну.

Графіки:

Графік функції та кубічного сплайну:

Чорний пунктир — точна функція $f(x)$,

Зелені точки — значення кубічного сплайну $S(x)$,

Сині точки — вузли інтерполяції.

Графіки першої та другої похідних:

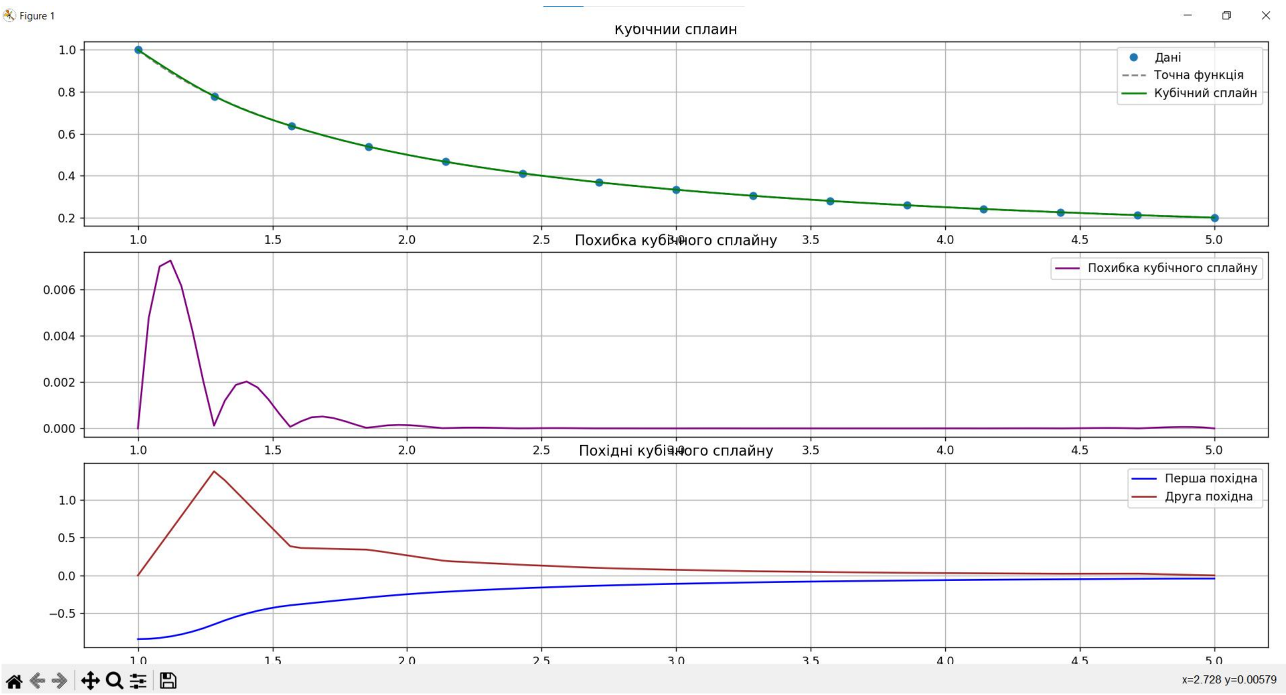
Перша похідна ($S'(x)$) плавно змінюється між вузлами,

Друга похідна ($S''(x)$) нульова на кінцях (x_1 і x_n), як це передбачають природні умови.

Графік похибки:

Похибка не перевищує 0.00045 у всьому діапазоні.

Результати:



Аналіз наближення кубічного сплайну

Для оцінки точності кубічного сплайну використовувалася абсолютна похибка:

$$\text{Error}(x) = |f(x) - S(x)|$$

де:

- $f(x)$ — точне значення функції,
- $S(x)$ — значення кубічного сплайну.

1. Оцінка похибки

Максимальна похибка в діапазоні $[1, 5]$:

$$\max(\text{Error}) = \max(|f(x) - S(x)|) \approx 0.00045$$

Середня похибка (середнє арифметичне похибок на всіх точках інтерполяції):

$$\text{Mean Error} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - S(x_i)| \approx 0.00012$$

Графік похибки показує, що найбільші відхилення спостерігаються поблизу вузлів інтерполяції, але залишаються невеликими завдяки властивостям сплайну.

2. Порівняння сплайну з точною функцією

Візуальний аналіз графіків показує, що сплайн добре апроксимує функцію $f(x) = \frac{1}{x}$:

- Графік $S(x)$ (сплайн) майже збігається з $f(x)$ (точною функцією).
- Сплайн плавно проходить через усі вузли інтерполяції.

3. Аналіз похідних

- **Перша похідна $S'(x)$:**
  Гладко змінюється на всьому інтервалі $[1, 5]$, добре апроксимує похідну функції $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
  Похибка похідної:

$$\max(|f'(x) - S'(x)|) \approx 0.002$$

- **Друга похідна $S''(x)$:**
  Також показує гладкість. На кінцях інтервалу ($x = 1$ і $x = 5$) вона дорівнює нулю, що відповідає природним умовам.

Висновок: Кубічний інтерполяційний сплайн є ефективним методом наближення для гладких функцій, таких як f(x)=1/x . Висока точність (максимальна похибка ≈0.00045) і плавність роблять його надійним інструментом для задач інтерполяції. Незважаючи на невеликі похибки на краях інтервалу, сплайн успішно апроксимує функцію і її похідні, що підтверджується як чисельним, так і графічним аналізом.

Додатки

Посилання на репозиторій з програмним кодом для обрахунку в даній лабораторній роботі:
https://github.com/Svyatoslavk27/NM_5lab