Kombinatorik

Henrik Tscherny

9. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Graphen

Notation/Definition

- Menge aller k-elementigen Teilmengen von S: $\binom{S}{k}$
  es gilt: $\left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k}$
- Graph: $G = (V, E)$
- komplementärer Graph: $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$
  es gilt: $\bar{\bar{G}} = G$ (tausche Kanten mit nicht-Kanten)
- Knotenmenge: $V(G)$
- Kantenmenge: $E(G) \subseteq \binom{V}{2}$
- Nachbarschaft: $N(s) = \{n \in V(G) \,|\, \{n, s\} \in E(G),\ s \in S \subseteq V(G)\}$
- Grad von v in G: $deg_G(v) = |N(v)|$
- k-regulärer G: $\forall v \in V(G) : deg_G(v) = k$ (Jeder Knoten hat den Grad k)

- Graphen-Isomorphie: $f : V(G) \rightarrow V(H)$ mit
$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$ und f Bijektion

- Subgraph: $V(H) \subseteq V(G),\ E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$
$\cap\binom{V(H)}{2}$ = keine neuen Kanten (solche nicht in G) erlaubt

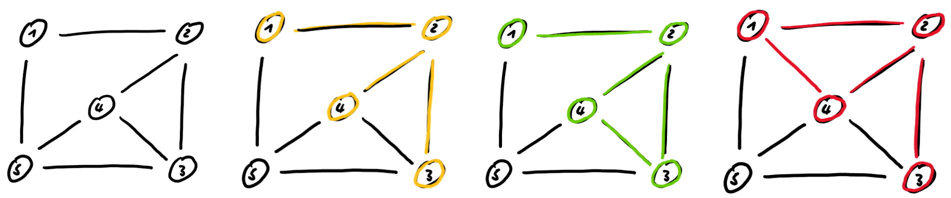
- induzierter Subgraph: Enthält der Subgraph H einen Knoten auf G so enthält H auch alle mit diesem Knoten in Verbindung stehenden Kanten aus G, sofern der jeweilige Partnerknoten ebenfalls in H liegt
$E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$
man schreibt $G[V]$ für den Subgraph G induziert durch die Knotenmenge V
Sei $G - x$ der Subgraph von G induziert durch $V(G) \setminus \{x\}$

- Walk: Weg von einem Knoten zu einem anderen
offen: Startpunkt ≠ Endpunkt, geschlossen: Startpunkt = Endpunkt

- Pfad: Ein weg ohne Schleifen mit der Länge 1

- Verbundener Graph: Es ex. ein Walk von jeden jedem zu jedem Knoten
Ein Graph G ist verbunden gdw. er nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nicht-leeren Teilgraphen erzeugt werden kann

- k-verbundener Graph: Es existiert für alle $a, b \in V$ k paarweise unabhängige Pfade von a nach b



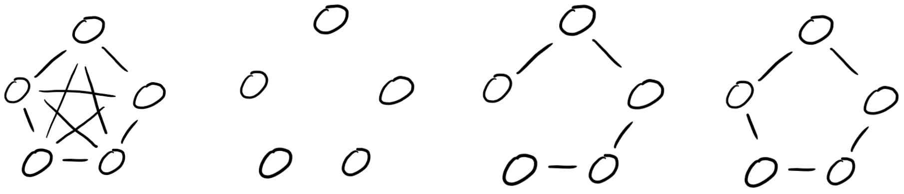
(a) Graph (b) Subgraph (c) ind. Subgraph (d) kein Subgraph

Spezielle Graphen

- **Clique (vollst. Graph)**: $K_n = G = (V, E)$ mit
$V := \{1, ..., n\},\ E = \binom{V}{2}$
es gilt: $\bar{K}_n = I_n$

- **Unabhängiger Graph**: $I_n = G = (V, E)$ mit $V = \{1, ..., n\}$ $E = \emptyset$
es gilt: $\bar{I}_n = K_n$

- **Graph mit Pfad der Länge n**: $P_n = G = (V, E)$ mit $V = \{1, ..., n\}$ $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{n-1, n\}\}$
- **Graph mit Kreis der Länge n** $C_n = G = (V, E)$ mit $V = \{1, ..., n-1\}$ $E = \{\{i, j\}|(i-j) \equiv 1\, (mod\ n)\}$ (n Knoten und n Kanten)



(e) K_5 (f) I_5 (g) P_5 (h) C_5

Färbbarkeit

- k-Färbbarkeit: $f : V(G) \to \{0, ..., k-1\}$, sodass
  $f(u) \neq f(v)\, \forall \{u, v\} \in E(g)$
  direkt miteinander Verbundene Knoten haben unterschiedliche Farben
- **Lemma**: Jeder endliche Graph G ist bipartit gdw. er keine Kreise ungerader Länge enthält

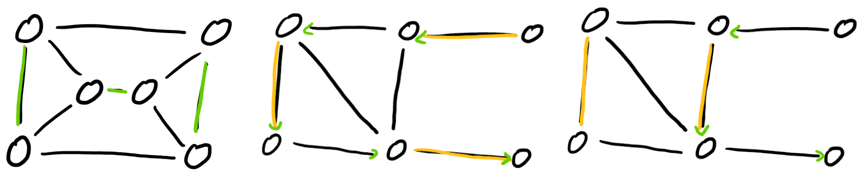
Bäume

- Ein Graph ohne Kreise ist ein Wald
- Ein Verbundener Graph ohne Kreise ist ein Baum
- Ein Wald ist eine disjunkte Vereinigung von Bäumen
- Jeder Baum ist bipartit
- Folgende Definitionen sind Äquivalent:
  - G ist ein Baum
  - $|E| = |V| - 1$
  - $|E| \leq |V| - 1$
  - G hat maximal viele Kanten ohne Kreise zu enthalten
  - G hat minimal viele Kanten und ist zusammenhängend
  - für alle Knoten in G existiert paarweise ein eindeutiger Pfad

1.1 Matchings

Definitionen

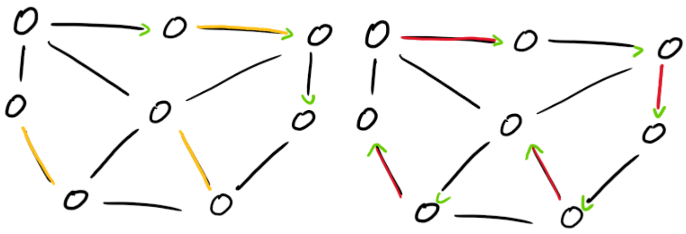
- Ein Matching ist eine Teilmenge der Kantenmenge von G, sodass diese **paarweise disjunkt** sind, d.h. jeder nur max. einen Partner hat ($\forall u, v \in M : u \cap v = \emptyset$)
- gilt $2|M| = |V|$, d.h. es gibt doppelt so viele Knoten wie Kanten in M (jeder hat genau einen Partner, d.h. jeder Knoten wurde gematched), dann ist es ein **perfektes Matching**
- **für jeden bipartiten k-regulären Graphen** mit $k \geq 1$ gibt es ein **perfektes Matching**
- für $\{x, y\} \in M$ heißt y der **Partner** von x
- Sei S $\subseteq V(G)$, dann ist M ein Matching in S wenn für jedes $s \in S$, s in M vorkommt, d.h. jeder Knoten aus S kommt in einer Kante von M vor
- Ein Pfad bzgl. M heißt **alternierend**, wenn er abwechselnd Kanten über $E(G) \setminus M$ und M verläuft
- Ein alternierender Pfad heißt **augmentierend** wenn Start und Endpunkt keinen Partner in M haben



(i) ein mögl. M auf G (j) alternierender Pfad (k) augmentierender Pfad

Lemma

Sei P ein augmentierender Pfad und $M' = M \Delta P$, dann ist M' wieder ein Matching und $|M'| > |M|$



(l) M in G mit augm. P (m) $P \Delta M$

Lemma von Berge

Sei G ein endlicher Graph und M ein Matching in G. M ist **maximal** gdw. es **keine augmentieren Pfade in G bzgl. M gibt**
Beweis:

- TODO

Heiratssatz

Ein bipartiter Graph G hat ein Matching $A \subseteq V(G)$ gdw.
$\forall S \subseteq A : |N(S)| \geq |S|$ **mögliche Darstellungen**:

- als Funktion
  - Sei $A = (A_i)_{i \in I}$ eine Menge von endlichen Mengen
  - Gibt es eine *injektive Auswahlfunktion* $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$, sodass $\forall i \in I\, f(i) \in A_i$ gilt ?
  - Hall-Bedingung: $I_0 \subseteq I : \left|\bigcup_{i \in I_0} A_i\right| \geq |I_0|$
- als Realbeispiel
  - Sei I eine Menge von Frauen
  - Sei X eine Menge von Männern, welche mit diesen Frauen befreundet sind
  - Lassen sich die Frauen mit den Männern so verheiraten, dass jede Frau einen befreundeten Mann heiratet
  - Note: Es gibt nur Monogame Beziehungen
  - Notwendige Bedingung: je k Frauen müssen mit mindestens k Männern befreundet sein (Hall-Bedingung)

- Graphentheoretisch
  - Sei G ein bipartiter Graph
  - Seien A, B Bipartionen von G, d.h. $A \cup B = G$ und $A \cap B = \emptyset$
  - Es gilt nun durch die Bipartitheit, dass jeder Nachbar eines Knotens aus A zu B gehört
  - Gibt es ein Matching in dem alle Knoten aus A vorkommen ?
- aus dem Heiratssatz folgt ebenso:
  - Sei F eine Menge an endlichen Teilmengen einer Menge X
  - F hat einen **Durchschnitt** gdw. F die Hall-Bedingung erfüllt
  - Beweis:
    * TODO

Satz von König

Sei G ein endlicher bipartiter Graph, dann ist die **Größe des größten Matchings** in G **gleich** der **minimalen Anzahl an Überdeckungen** in G
Überdeckung

- U ist eine Teilmenge der Knotenmenge V, wobei jede Kante aus G einen Knoten in G enthält
- $U \subseteq V(G)$ mit $\forall e \in E(G) : e \in V(U)$
- kurz: alle Knoten von G müssen mit U abgedeckt werden

Beweis

- TODO

2 Dualität

Die Essenz dualer Probleme liegt darin, dass immer gezeigt werden kann, dass sofern ein Sachverhalt gilt, ein dazu dualer Sachverhalt gilt und umgekehrt
(P) ⇒ ¬ (D) und ¬ (P) ⇒ (D)

2.1 Dualität in der linearen Algebra

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ x = (x_1, ..., x_n)$ und $b \in \mathbb{R}^m$
Dann ist die Gleichung $Ax = b$ **unerfüllbar** gdw. das System
$(A|b)^\top y = (0, ..., 0, 1)^\top$ **erfüllbar** ist **Beweis**

- $(\Leftarrow)$
  - TODO
- $(\Rightarrow)$
  - TODO

2.2 gewichtete Matchings

Sei $G = (V, E)$ ein Graph wobei $\forall e \in E(G)$ zusätzlich ein Gewicht $w_e \in \mathbb{R}$ festgelegt wird
Das **Gewicht eines Matchings** ist dann $w(M) := \sum_{e \in M} w_e$
Suche nach einem Matching mit maximalem Gewicht
Dazu wird das Matchingproblem in G in ein LP umgeformt:

- $\forall e \in E(G) \mid x_e = \begin{cases} x_e = 0, & e \notin M \\ x_e = 1, & e \in M \end{cases}$
- x_e gibt also an ob eine Kante e in G im Matching M liegt
- Damit erhält man folgende **objective function**: $w(x) = \sum_{e \in M} w_e x_e$
  $\rightarrow$ nur die Gewichte der ausgewählten Kanten ($x_e = 1$) werden summiert
- **Nebenbedingung**: $w(M) = \sum_{\substack{e \in E(G) \\ v \in e}} x_1 = 1$
  $\rightarrow$ jeder Knoten taucht nur in genau einer Kante in M auf

2.3 Relaxation