Zusammenfassung Optinum

Henrik Tscherny

16. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Basics

1.1 Begriffe

- Zielfunktion f
- zulässiger Bereich G
- $x \in G$ zulässiger Punkt

1.2 Wann ist ein(e) Punkt/Lösung optimal ?

x* sei eine optimale Lösung in zulässigen Bereich gdw.

- Es gibt keinen Wert f(x) welcher echt kleiner ist als f(x*)
- x* liegt in G

$f(x*) \leq f(x)$ für $x \in G$

1.3 Wann ist ein Optimierungsproblem linear ?

ein OP sei linear gdw.

- G ist durch lineare Bedingungen beschreibbar
- die ZF kann durch $c^{\mathsf{T}}x$ beschrieben werden. e.g. $f = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} x = \begin{bmatrix} 2x & -3x & 7x \end{bmatrix}$

1.4 Was ist eine Relaxation ?

eine Funktion g heißt Relaxation von f gdw.

- g(x) ist für alle x kleiner oder gleich f(x)
- der optimale ZF der Relaxation ist der Schrankenwert
- $g(x) \leq f(x)$

1.5 Wann ist eine Lösung einer Relaxation auch Lösung der nicht-Relaxation ?

Wenn gilt:

- $\bar{x}$ löst die Relaxation
- $\bar{x}$ liegt auch im zulässigen Bereich von f
- f($\bar{x}$) = g($\bar{x}$)

Note: Verschiedene Relaxationen liefern verschieden gute Näherungswerte
Eine Relaxation Q1 mit größerem Schrankenwert als Q2 heißt 'stärker'

1.6 Wann existiert eine globale optimale Lösung ?

Es gibt eine globale Lösung des OP gdw.

- G ist kompakt (beschränkt und abgeschlossen)
- G ist nicht leer
- die ZF ist stetig

How To:

- Stelle ZF nach einer beliebigen Variable um
- Kann der ZF nun beliebig klein gewählt werden und trotzdem eine zugehörige Koordinate errechnet werden so gibt es kein Minimum

1.7 Wann ist eine lokale Lösung zugleich eine globale Lösung ?

Eine lokales Optimum ist auch das globale Optimum gdw.

- G ist eine konvexe Menge
- f ist eine konvexe Funktion

Note: Ist f streng konvex so existiert höchstens genau eine Lösung,

1.8 Was ist ein Kegelmenge

Ein Kegelmenge sei:

- alle nicht negativen vielfachen der Elemente einer Menge
- $x \in K \Rightarrow \forall \lambda \geq 0 : \lambda x \in K$

des weiteren ist ein Kegel konvex wenn:

- die Summe zweier Punkte aus der Menge ebenfalls in der Menge liegen
- $x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$

ein Kegel der zulässigen Richtung eines Punktes $\tilde{x}$ ist:

- alle Punkte welche vom Punkt $\tilde{x}$ aus mit der Schrittweite t in die Richtung d, wobei der gesamte Weg dabei in G liegen muss
- die Schrittweite ist abh. von $\tilde{x}$ selbst und der aus $d \in \mathbb{R}^n$ gewählten Richtung
- $Z(\tilde{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n | \exists \tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{t}x, d) > 0, sodass\ \tilde{x} + td \in G \forall t \in [0, \tilde{t}]\}$

1.9 notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung

notwendige Bedingung:

- der Gradient ist am Minimum $\tilde{x}$ für alle Richtungen > 0 $\rightarrow$ es gibt keine Richtung in welche man gehen kann, sodass der ZF-Wert kleiner wird
- $\nabla f(\tilde{x})^\intercal (x - \tilde{x}) \geq 0 \forall x \in G$
- ist $G \in \mathbb{R}^n$ so gilt das $\tilde{x}$ ein Minimum ist wenn der Gradient 0 ist
- $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

hinreichende Bedingung:

- f ist konvex
- f ist stetig differenzierbar
- es existiert ein $\tilde{x} \in G$ welches die notwendigen Bedingungen erfüllt

Sind die notwendigen und hinreichenden OB erfüllt, so ist $\tilde{x}$ ein globales Minimum

1.10 Was ist eine polyedrische Menge ?

Eine Menge heißt polyedrisch gdw.

- kann durch eine Menge linearer Restringtionen definiert werden.
- die linearen Resringtionen bilden einen Polyeder
- $G = \{x \in G\mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$

Note: eine polyedrische Menge ist konvex und abgeschlossen aber nicht immer beschränkt

1.11 Was besagt das Lemma von Farkas ?

das Lemma von Farkas besagt:

- Es ist eine m x n Matrix A gegeben
- dann ist genau ein der folgenden Gleichungen Lösbar:
  - $Az \leq 0, a^\intercal z > 0$
  - $A^\intercal u = a, u \geq 0$

2 Ecken und Simplex

2.1 Definitionen

- die allgemeine Form einer OP ist:
  $z = c^\intercal x \to min, x \in G. = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$
- G ist dabei eine polyedrische Menge
- Alle Spalten der Basismenge sind linear unabhängig
- I_B ist die Menge der Basisindices
- $_N$ ist die Menge der Nichtbasisindices mit $I_N = I \backslash I_N$
- $A_B = (A^i_{i \in I_B}, A_N = (A^i_{i \in I_N}$
- $c_B = (c_i)_{i \in I_B}, c_N = (c_i)_{i \in I_N}$
- $x_B = (x_i)_{i \in I_B}, x_N = (x_i)_{i \in I_N}$

2.2 Basislösung und Ecken

Basislösungen:

- Ein Punkt x heißt Basislösung zu wenn eine gültige Belegung für jedes x_B gefunden werden kann und dabei jedes $x_N = 0$ ist
- Eine Basislösung heißt zulässig gdw.alle $x_B \geq 0$

Ecken:

- Eine Ecke ist ein Punkt in G wenn er nicht als Mittelpunkt zweier anderer Punkte in G dargestellt werden kann
- $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), x_1, x_2 \in G \Rightarrow x = x_1 = x_2$
- Zu jeder Ecke gibt es mindestens eine zulässige Basislösung
- degenerierte Ecke: Ecke mit mehreren zulässigen Basislösungen
- ist eine Wert in der Basis 0 so ist die Ecke degeneriert
- nicht-degenerierte Ecke: Ecke mit genau einer zulässigen Basislösung
- in G gibt es mindestens eine aber maximal endlich viele Ecken

Es reicht bei einer linearen OP die Ecken nach der optimalen Lösung zu durchsuchen, da die Ecken die zulässigen Basislösungen sind

Eine Basislösung löst das OP gdw.

- Die Koeffizienten der Nichtbasis minus der Koeffizienten der Basis mal der Basismatrix mal der Nichtbasismatrix größer gleich 0 sind
- $c_N^\intercal - c_B^\intercal (A_B)^{-1} A_N \geq 0$

2.3 Primaler Simplex

Besteht aus 2 Phasen:
1. Finden einer zul. Lösung 2. Finden der optimalen Lösung

- finden einer optimalen Lösung durch Wahl einer zulässigen Richtung mit maximaler Schrittweite $\rightarrow$ Verringerung des Zielfunktionswertes
- x ist Optimal wenn alle $q \geq 0, q = c_B^\intercal (A_B)^{-1} b$
- alle p müssen größer gleich 0 sein für eine Zulässigkeit
- Solange ein Element in q < 0 gehe vom Punkt $x = (p^\intercal, 0^\intercal)^\intercal)$ in Richtung d mit $d_i = \begin{cases} P_{i\tau}, & \text{wenn i in der Basisindexmenge liegt} \\ 1, & \text{i = } \tau \text{ ist} \\ 0, & \text{i in der Nichtbasisindexmenge ohne } \tau \text{ liegt} \end{cases}$
- τ sei der Index eines in q liegenden Elements kleiner 0
- die maximale Schrittweite ergibt sich aus $\bar{t}(x, d) := min\{\frac{p_i}{P_{i\tau}} : P_{i\tau} < 0, i \in I_B\}$
- ist die maximale Schrittweite unendlich, gibt es keine Lösung da die ZF unbeschränkt ist
- für entartete Ecken kann man eine Schrittweite von 0 erhalten

Entscheidbarkeit

- alle ZF-Koeffizienten sind größer gleich 0, d.h. es ist eine optimale Lösung
- min ein Eintrag in q ist negativ, alle Einträger in P sind jedoch größer gleich 0, d.h. die ZF ist unbeschränkt und das Problem ist nicht lösbar

- liegt keiner der beiden Fälle vor ist das Tableau nicht-entscheidbar, d.h. es muss ein Austauschschritt durchgeführt werden

Simplex-Rechenregeln

- Pivotspalte: Zeile mit kleinstem negativen ZF-Koeffizient
- Pivotzeile: $-\frac{EintragrechteSeite}{EintragPivotspale}$ für alle negativen Elemente der Pivotspalte, davon den kleinen Wert wählen
- Pivorelement: Kreuzung aus PS und PZ
- $PE_{neu} = \frac{1}{PE_{alt}}$
- $PS_{neu} = \frac{PS_{alt}}{PE_{alt}}$
- $PZ_{neu} = -\frac{PZ_{alt}}{PE_{alt}}$
- $Rest_{neu} = Rest_{alt} - \frac{PS_{alt} PZ_{alt}}{PE_{alt}}$

Note: ist ein Element in q negativ, aber in der zugehörigen Spalte in A kein negatives Element, so ist die ZF unbeschränkt, die Abstiegsrichtung ist dabei $(x_i, s_i)^\intercal$ wobei das negative Element 1 gesetzt wird

Finden einer zul. Ausgangslösung (Hilfszielfunktionsmethode)
Sei das Problem $z = c^\intercal x \to min,\ \ Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+$ gegeben

- Definiere Hilfsfunktion $h = e^\intercal y \to y$ mit $y + Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \mathbb{R}^m_+$
- e ist ein Vektor aus Einsen in der Dimension von y $e = (1, ...1)^\intercal \in \mathbb{R}^{>}$
- Erste Basislösung in Tableau mit $P = -A$, $p = b$, $q = -e^\intercal A$ und $ZFW = e^\intercal b$

2.4 Dualer Simplex

- Das Verfahren startet mit einem unzulässigen Punkt (anders als primaler Simplex)
- die Folge der ZFW ist nicht monoton fallend (anderes als primaler Simplex)
- Wird eine zul. Basislösung gefunden, wird diese auch optimal
- Ist optimal wenn $p \geq 0, q \geq 0$

- zulässig wenn alle Elemente in q größer gleich 0
- p darf anderes als beim primalen Simplex Elemente kleiner 0 enthalten, sind alle Elemente in p > 0 ist es optimal

Entscheidbarkeit

- die rechte Seite sind alle größer gleich 0 $p \geq 0$, d.h. das Tableau ist optimal
- eine Zeile in p ist negativ und alle Einträge in $p \leq 0$, d.h. das Problem ist nicht lösbar, der zulässige Bereich ist leer
- trifft keine von beiden Aussagen zu ist das Tableau nicht-entscheidbar, d.h. es muss ein Austauschschritt durchgeführt werden

Simplex-Rechenregeln

- Pivotzeile: kleinster negativer Wert aus p
- Pivotspalte: bilde $\frac{EintragZF(q)}{EintragPZ}$ für alle positiven Werte der PZ, wähle den kleinsten Wert
- Pivorelement: Kreuzung aus PZ und PS
- $PE_{neu} = \frac{1}{PE_{alt}}$
- $PS_{neu} = \frac{PS_{alt}}{PE_{alt}}$
- $PZ_{neu} = -\frac{PZ_{alt}}{PE_{alt}}$
- $Rest_{neu} = Rest_{alt} - \frac{PS_{alt}PZ_{alt}}{PE_{alt}}$

Dualität

- Sei (P) eine OA mit $z = c^\intercal x \rightarrow min,\ \ Ax \leq b$
- Sei (D) eine OA mit $z_D = -b^\intercal u \rightarrow max,\ \ , A^\intercal u \geq -c$
- um also ein primales in ein duales Problem umzuwandeln: Transponiere das vorhergehende Tableau, $p \leftrightarrow q^\intercal, A \leftrightarrow A^\intercal$

Dann ist (D) die duale OA zu (P)

2.5 Branch and Bound

Vorgehensweise:

- Benutzen einer Relaxation der zu optimierenden Funktion f durch Erweiterung des zulässigen Bereiches
- Zerlegen des zulässigen Bereiches in Teilmengen $\rightarrow$ Zerlegung in Teilprobleme
- Finden einer unteren Schranke $b(P_i)$ für jedes Teilproblem
- für die untere Schranke muss gelten:
  - muss kleiner gleich allen Funktionswerten von f(x) sein im Teilbereich
  - $b(P_i) \leq min\{f(x) : x \in D \cap E_i\}$
  - die untere Schranke ist gleich dem Optima von f wenn das Teilproblem nur das Optima enthält
  - $b(P_i) = f(\hat{x}$, falls $D \cap E_i = \{\hat{x}\}$
  - die untere Schranke eines Teilbereiches E_i ist kleiner gleich der eines Teilbereiches E_j wenn E_j Teil von E_i ist
  - $b(P_i) \leq b(P_j)$, falls $E_j \subset E_i$

Algorithmus:

Sei R Menge der noch zu bearbeitenden Teilprobleme
Sei z der ZF Wert der bisher besten gefundenen Lösung

Initialisierung

- berechne untere Schranke
- ist ein x für f(x) bekannt was gleich dieser Schranke ist, STOP: x löst P
- Setze $R = \{P_0\}, z := +\infty$ oder wenn ein x bekannt ist $z := f(x)$

Abbruchtest

- ist $R = \emptyset$ STOP
- ist $z = +\infty$, dann ist P nicht lösbar
- andernfalls ist x die Lösung von P

Strategie

- wähle ein $P_i \in R$ und entferne dieses aus R ($R := R \setminus \{P_i\}$)
- verschiedene Auswahlstrategien sind möglich z.B. Minimalsuche, DFS, BFS

Branch

- Zerlegung von P_i in Teilprobleme
- setze j:=1

Bound

- berechne untere Schranke für das erste Teilproblem ($b(P_{ij})$
- wird dabei ein x mit f(x) mit einem kleineren ZF z, setze z auf den neuen Wert
- ist die untere Schranke kleiner als der ZF z dann füge das Teilproblem R hinzu ($R := R \cup \{P_{ij}\}$)
- wdh. für jedes Teilproblem den Bound Schritt
- entferne alle Teilprobleme welche eine größere oder gleiche untere Schranke wie z haben ($R := R \setminus \{P_k\}, b(P_k) \geq z$)
- gehe zu Initialisierung

3 Optimierung auf Graphen

3.1 Graphen

Ein Graph ist:

- Menge an Tupeln $G = (V, E)$
- V... Knotenmenge
- E... Kantenmenge
- sind die Kanten gerichtet (Bogen), so ist E ein Tupel aus Knoten (u,v), (von u nach v)

- Zwei Knoten heißen adjazent, wenn sie durch eine Kannte verbunden sind
- $N(v)$ sei die Menge der Nachbarknoten von v
- ein Knoten ohne Nachbarn heißt isoliert
- $\delta(v) := |\{u \in V : (u, v) \in E\}|$, ist der Knotengrad, also die Anzahl der Nachbarn
- Sei $\delta^+(v)$ der Ausgangsgrad und $\delta^-(v)$ der Eingangsgrad eines Knoten v
- Ein Knoten ohne Vorgänger heißt Quelle
- Ein Knoten ohne Nachfolger heißt Senke
- ein Zyklus ist eine Folge von Kanten, wobei mindestens der Start und Endpunkt der Selbe sind
- ein Kreis ist eine Folge von Kanten, wobei nur der Start und Endpunkt der Selbe sind

Man unterscheidet folgende Graphen:

- schlichter Graph: keine Schleifen oder Mehrfachkanten
- vollständiger Graph: besitzt alle möglichen Kannten
- gewichteter Graph: jede Kannte $e \in E$ besitzt ein Gewicht $c(e)$

3.2 Minimum Spanning Tree

Ein Spannbaum/Gerüst ist:

- eine Teilmenge T eines Graphen G
- G ist zusammenhängend, ungerichtet und gewichtet
- der induzierte Subgraph von T soll kreisfrei sein
- es ist also ein Graph welcher alle Knoten eines Graphen kreisfrei verbindet

Ziel:
Finde T mit kleinstmöglichem Gesamtgewicht $\sum_{e \in T} c(e)$

3.2.1 Kruskal

- Initialisiere eine leere Kantenmenge T
- füge der Kantenmenge den kürzesten (von den Kosten geringsten) Weg hinzu
- überprüfe ob T nun einen Kreis enthält
  - wenn Ja, entferne diesen Weg wieder und fahre mit den nächst größeren fort
  - wenn Nein, fahre mit den nächst größeren Weg fort

3.3 Max Flow

Problem:

- gerichteter Graph G mit Kapazitäten k an allen Kanten $G = (V, E, k)$
- es gibt eine Quelle und eine Senke
- eine Funktion $x : E \to \mathbb{R}$ heißt Fluss, wenn eingehende Flüssigkeit"gleich der ausgehenden Flüssigkeitïst, für alle Knoten
- Es gilt Flusserhaltung, d.h. Die Menge welche an der Quelle austritt, muss in der Senke eingehen

Ziel: Finde einen Graphen G mit einem Fluss welcher die maximale Flussstärke besitzt

3.3.1 Residualgraph (Restkapazitätsgraph)

- r(e) ist die Restkapazität (Residuum) einer Kannte, Kapazität der Kannte minus ausgehender Fluss plus eingehende Flüsse
- $r(e) = k_e - x_e + x_{(v,u)}$
- E(x) sei die Menge aller Kanten mit positiver Restkapazität
- $E(x) = \{e \in E | r(e) > 0\}$
- Sei G(x) der Residualgraph
- $G(x) := (V, E(x), r(e)_{e \in E(x)})$

3.3.2 Ford-Fulkerson

Der Ablauf ist wie folgt:

- Setzte alle Flüsse im Graphen auf 0
- X: Erstelle den Residualgraphen
- gibt es keinen Weg von Quelle nach Senke mit positiver Flussstärke, dann STOP
- sonnst, finde einen Weg von Quelle nach Senke mit maximaler Flussstärke f' entlang des Weges,
- aktualisiere dabei $x_e = x_e + x'_e$ für alle Kannten mit positivem Fluss
- gehe zu X

Note: bei irrationalen Zahlen muss der Algorithmus nicht terminieren
Note: der Algorithmus verbessert die Lösung pro Iteration um min 1

4 Auswahl an OP

4.1 Transportoptimierung

gegeben ist:

- Erzeuger $i \in I = \{|I|\}$
- Verbraucher $j \in J = \{|J|\}$
- Kosten c_{ij} für 1 Einheit von i nach j
- Vorrat $a_i > 0$
- Bedarf $b_j > 0$

Ziel: minimiere die Gesamtkosten
Sei $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$ Transportmenge von i nach j

Constraints:

gelieferte Einheiten zum Verbraucher dürfen dessen Bedarf nicht überschreiten

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \qquad , j \in J$$

vom Vorrat verbrauchte Einheiten dürfen nicht größer als der Vorrat sein

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \qquad , i \in I$$

es gibt nur positive Transportmengen

$$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \qquad , (i,j) \in I \times J$$

Zielfunktion: Kosten mal transportierte Einheiten für alle Transportwege

$$z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

4.2 Rucksackproblem

gegeben ist:

- Rucksack mit Kapazität $b \in \mathbb{Z}_+$
- m zu verpackende Teile
- Gewicht eines Teiles $a_i \in \mathbb{Z}_+$
- Nutzwert eines Teiles $c_i \in \mathbb{Z}_+$
- $i \in I = \{|I|\}$

Ziel: wähle Teile für maximalen Nutzwert

Sei $x_i = \begin{cases} 0, & \text{Teil i wird nicht mitgenommen} \\ 1, & \text{Teil i wird mitgenommen} \end{cases}$

Constraints:

dürfen nicht mehr Teile mitgenommen werden als in den Rucksack passen

$$\sum_{i \in I} a_i x_i \leq b$$

0-1 Rucksackproblem

ein Teil kann nur mitgenommen werden oder nicht

$$x_i \in \mathbb{B} \qquad , i \in I$$

klassisches Rucksackproblem

ein Teil kann nur ganzzahlig positiv oft mitgenommen werden

$$x_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad , i \in I$$

Zielfunktion: Wertsumme der mitgenommen Teile maximieren

$$\sum_{i \in I} c_i x_i \rightarrow max$$

4.3 Bin Packing Problem

gegeben ist:

- unendlich viele Behälter mit Kapazität $L \in \mathbb{N}$
- Teile $b_i, i \in I = \{|I|\}$
- Gewicht eines Teils $l_i, i \in I = \{|I|\}$
- Packung $a_i, i \in I = \{|I|\}$

Ziel: minimal benötige Behälteranzahl

Constraints:

Gewicht einer Packung darf die Kapazität des Behälters nicht überschreiten

$$\sum_{i \in I} l_i a_i \leq L$$

4.4 Standortplanung

gegeben ist:

- Kunden $k \in K = \{|K|\}$
- Standorte $s \in S = \{|S|\}$

Ziel:

- minimale Baukosten
- minimale Laufkosten
- Bedarf aller Kunden Bedienen

Seien:

- $d_{ks} \in \mathbb{R}$ Kosten um Kunde k am Standort s zu bedienen
- $c_s \in \mathbb{R}$ Baukosten für den Standort
- $x_s = \begin{cases} 0, & \text{Standort wird nicht genommen} \\ 1, & \text{Standort wird genommen} \end{cases}$
- y_{ks} Teil des Bedarfs des Kunden k welcher durch den Standort s gedeckt wird

Constraints:

der Gesamtbedarf des Kunden muss gedeckt sein

$$\sum_{k \in K} y_{ks} = 1 \qquad , k \in K$$

Ein Standort kann maximal den gesamten Bedarf eines Kunden decken

$$y_{ks} \leq x_s \qquad , (k, s) \in K \times S$$

Der Bedarf kann nicht negativ sein (und nicht größer als 1 durch constraint 1)

$$y_{ks} \in \mathbb{R}_+ \qquad , (k, s) \in K \times S$$

Ein Standort kann nur liefern oder nicht liefern

$$x_s \in \mathbb{B} \qquad , s \in S$$

Zielfunktion:

- Baukosten der Standorte (erster Summand) Summe der zu bauenden Standorte (selektiert durch $x_s = 1$)
- Laufkosten der Standorte (zweiter Summand) Summe Bedienkosten des Kunden mal Anteil des von Kunden geforderten gesamt Bedarfs

$$\sum_{s \in S} c_s x_s + \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} d_{ks} y_{ks} \to min$$

5 How to solve

5.1 Ermitteln ob eine Richtung zulässig im Punkt x ist

gegeben:

- Punkt x
- Menge G mit Restringtionen a
- Richtung d

Ermittle alle in x aktiven Restringtionen I_0
Errechne $I(x,d) := \{i \in I : a_i^\intercal d \leq 0\}$

Überprüfe ob die Richtung zulässig ist
Für alle $i \in I$ (aus step 1) rechne $a_i^\intercal d$

- wenn > 0: keine zulässige Richtung
- wenn $\leq$ 0: zulässige Richtung

5.2 Ermitteln der Intervall von $\tilde{t}$

gegeben:

- Punkt x
- Menge G mit Restringtionen ax = b
- Richtung d

Errechne M
Berechne $M = A^\intercal(x + td)$ A ist die Matrix welche sich aus allen a_i ergibt

Ermittle untere Grenze für t

- Vergleiche M und b zeilenweise mit $\forall t \in \mathbb{R}^+$
- Maximale Schrittweite ist das Maximum für t wobei $m_i \leq b_i$ noch gilt
- Oder: Stelle Zeile $m_i \leq b_i$ nach t um = untere Schranke $t \in [s, \inf)$

Ermittle obere Grenze für t ($\tilde{t}$)

- Errechne $(x + td)$
- Löse $(x + td) \geq \vec{0}$ nach t auf für jede Zeile
- der kleine erhaltene Wert ist die obere Grenze $\tilde{t}$

5.3 Ermitteln des Kegels der zulässigen Richtung

gegeben:

- Restringtionsmatrix A
- Absolutteil der Restingtionen b
- Punkte x^i

Berechne Z(x)

- berechne $A * x^i \leq b, i \in I$
- überprüfe Spaltenweise ob das Ergebnis kleiner gleich dem Vektor b ist
- Folge Fälle können für $a_i * x^i$ und b_i eintreten:
  - alle Elemente sind kleiner: es handelt sich um einen inneren Punk, alle Richtungen sind zulässig
  - alle Elemente sind größer: es gibt keine valide Richtung, es handelt sich um einen äußeren Punkt
  - eine/alle Zeile(n) erfüllt(en) die Bedingung mit Gleichheit: es sind alle Richtung valide, welche die Restringtion der entsprechenden Zeile(n) verletzen

5.4 Finden einer zulässigen Anfangslösung für Transportalgorithmus

5.4.1 NW-Regel

- Starte oben links und weise maximale Kapazität zu
- wenn alle zu vergebenden Einheiten der Zeile oder benötigten Einheiten der Spalte verbraucht sind, setzte entsprechende Spalte (oder Zeile) auf 0
- bewege nur nach rechts oder unten, gehe nie nach links oder oben

5.4.2 Minimale-Kosten-Regel

- suche kleinen Kostenwert
- weise dort maximal mögliche Kapazität zu
- gehe zum nächst größerem Wert
- ist Verbraucher/Erzeuger leer, fülle Zeile (oder Spalte) mit 0

5.5 Lösen des Transportplans

Anfangend mit einer zulässigen Lösung:

- berechne für alle Basiszellen (alles wo keine 0 drin steht) $u_i + v_k = c_{ik}$
- berechne für den Rest $w_{ik} = c_{ik} - u_i - v_k$, sind alle $w_{ik} \geq 0$ ist der Plan optimal
- wähle das kleinste errechnete Element der Nichtbasiszellen
- bilde von diesem Element aus einen Zyklus durch 3 andere Basiszellen
- markiere die Nichtbasiszelle des Zyklus mit einem (+)
- markiere nun abwechselnd alle Zellen des Zyklus mit (-) und (+)
- bilde δ, dass Minimum der (-) Zellen
- rechne je nach Markierung Zelle +/- δ
- dadurch wird ein Element des Zyklus 0, dieses wird Teil der Nichtbasis, das andere nun größer als 0 Element wird dafür Teil der Basis

5.6 Ganzzahlige Optimierung mit Simplex

- löse Simplextableau ganz normal mit primalen Simplex
- für alle nicht ganzzahligen erzeuge zwei Teilprobleme, einmal auf bzw. abgerundet
- führe neue Schlupfvariable ein und setze bekannte Werte ein
- überprüfe ob zulässiger Bereich dadurch leer wird, wenn ja STOP
- erstelle neues Tableau und löse mit dualem Simplex
- wdh. bis alle Werte ganzzahlig
- bei mehreren möglichen Verzweigungen schauen welche in einem kleineren ZF resultiert

5.7 Branch and Bound mit TSP

Zeilen/Spalten Reduktion

- Ziehe von jedem Element der Zeile/Spalte den Wert des kleinsten Elementes der Zeile/Spalte ab
- Addiere die Abgezogenen Werte, dies ist die untere Schranke b
- je nachdem ob erst Zeilen oder Spalten reduziert werden kann eine andere untere Schranke entstehen

Aufstellen der Kostenmatrix

- Errechne Kosten für alle Nulleinträge
- Kosten ergeben sich aus dem kleinem Wert der Spalte und dem kleinem Wert der Zeile des Elementes, das Element selbst zählt nicht
- $w_{ik} = \min d_{ik} + \min d_{pk}, q \neq k, p \neq i$

Branch Verzweige für das Element mit den größten Kosten, es gibt folgende Optionen

- $x_{ik} = 0$ benutze diesen Weg nicht
  - setze das Element auf ∞
  - führe Spalten/Zeilenreduktion aus
  - errechne neue Schranke
  - Ist die Schranke größer als der bekannte ZF muss diese Verzweigung nicht weiter untersucht werden
- $x_{ik} = 1$ benutze diesen Weg
  - setze alle Elemente in der Zeile und Spalte, außer das Element selbst auf ∞
  - setze ebenfalls das Element welches eine Subtour erzeugt auf ∞ z.B. bei x_{32} setze x_{23} auf ∞
  - führe Zeilen/Spaltenreduktion aus und berechne neue untere Schranke
  - Ist die Schranke größer als der bekannte ZF muss diese Verzweigung nicht weiter untersucht werden
- führe diese Verzweigungen solange aus bis der ZFW mit der unteren Schranke erreicht wird, oder feststeht das es nicht besser geht

5.8 ganzzahlige Lösung mittel Gomory-Schnitt

- ersetze eine Zeile mit ungerader Lösung im gelösten Simplextableaus mit einer Gomory Zeile
- für die Einträge in A, runde die Einträge auf und ziehe davon den ungerundeten Einträg ab
- für den Eintrag in p, ziehe den abgerundeten Wert vom ungerundeten ab
- $$p_i - \lfloor p_i \rfloor \leq \sum_{j \in N} (\lceil P_{ij} \rceil - P_{ij}) x_j$$
- führe Schlupfvariable ein, stelle nach dieser um und füge sie dem Tableau hinzu
- löse das neue Simplextableau

wdh. bis alle Variablen ganzzahlig sind

5.9 Erstellung eines Residualgraphen

- für jede benutzte Kapazitätseinheit einer kannte geht im Residualgraph eine Kannte entgegengesetzt dazu
- als Kapazität steht dann das Residuum, also das was zuvor noch übrig war
- bei einer zuvor voll belasteten Kante ist es also (0/(Kapazität)) sonst (0/(Kapazität - untere Schranke))
- war die Kante zuvor nicht voll ausgelastet, so bleibt eine Kante in die ursprüngliche Richtung bestehen
- die Kapazität davon ist dann (0/(zuvor ungenutzte Kapazität))

6 Beispiele

6.1 Welche Richtungen d sind vom Punkt x aus zulässig, was ist die maximale Schrittweite

gegeben:

- Punkt $x = (1, 1, 1)^\intercal$

- Richtungen $d^i = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- Restringtionsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:
Für d_1
$A^\intercal d_1 \leq \vec{0} = (4,5)^\intercal \leq (00)^\intercal$ ist nicht erfüllt, keine zulässige Richtung
Für d_2
$A^\intercal d_2 \leq \vec{0} = (-6,-6)^\intercal \leq (00)^\intercal$ ist erfüllt, d2 ist eine zulässige Richtung
$M = A^\intercal(x+dt) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} t) = \begin{pmatrix} -4t+4 \\ -6t+5 \end{pmatrix}$
Stelle $m_i \leq b_i$ nach t um:
$-4t + 4 \leq 4 \Leftrightarrow t \geq 0$
$-6t + 5 \leq 6 \Leftrightarrow t \geq \frac{-1}{6}$

$\Rightarrow t \in [-1/6, \inf)$
Stelle $(x + dt) \geq \vec{0}$ nach t um:
$t \leq 1$
$t \leq \frac{1}{2}$
$t \leq 1$
$\Rightarrow$ nehme das Minimum $\tilde{t}$ = 1/2

6.2 finden des Kegels der zulässigen Richtung

gegeben:

- ZF: $z = -x_1 - x_2 \rightarrow min$
- Restingtionen:
  - $x_1 + 2x_2 \leq 8$
  - $x_1 + x_2 \leq 5$
  - $x_1, x_2 \geq 0$
- Punkte: $x^1 = (1,1)^\intercal, x^2 = (3,3)^\intercal, x^3 = (4,1)^\intercal, x^4 = (2,3)^\intercal, x^5 = (0,0)^\intercal$

Lösung:

- schreibe die Punke in Matrix $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- stelle Restringtionsmatrix A und Absolutvektor b auf:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- rechne und vergleiche Spaltenweise $A \cdot X \leq b$: $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ergebnis:

- x^1 ist ein innerer Punk, da beide Koordinaten kleiner b: $Z(x^1) = \mathbb{R}^2$
- x^2 ist außerhalb des zulässigen Bereichs, da beide Koordinaten größer b: $Z(x^2) = \emptyset$
- x^3 erfüllt Zeile 2 mit Gleichheit, d.h. $Z(x^3) = \{d \in \mathbb{R}^2 | d_1 + d_2 \leq 0\}$
- x^4 erfüllt die ersten beiden Zeilen mit Gleichheit, d.h. $Z(x^4) = \{d \in \mathbb{R}^2 | d_1 + d_2 \leq 0, d_1 + 2d_2 \leq 0\}$
- x^5 erfüllt die letzte Restingtion, d.h. $Z(x^5) = \{d \in \mathbb{R}^2 | d_1 \geq 0, d_2 \geq 0\}$

6.3 finden einer Ganzzahligen Lösung

gegeben:

- $\bar{z} = -z = -7x_1 - 2x_2 \rightarrow min$ mit,
- $-x_1 + 2x_2 + s_3 = 4 \Rightarrow s_3 = x_1 - 2x_2 + 4$
- $5x_1 + x_2 + s_4 = 20 \Rightarrow s_4 = -5x_1 - x_2 + 20$
- $x_1, x_2, s_3, s_4 \geq 0$

Schritt 1, Simplex. Lösung mit primalem Simplex ergibt

- $x_1 = \frac{36}{11}$
- $x_2 = \frac{40}{11}$
- $s_3, s_4 = 0$
- $z = -\frac{332}{11}$

Schritt 2, Branch Verzweige für x_2 da nicht ganzzahlig (und am wenigsten an einer ganzen Zahl dran)

- x_2 liegt zwischen 3 und 4
- 1. TP $x_2 \geq 4 \Rightarrow s_3 = x_2 - 4$
- 2. TP $x_2 = \leq 3 \Rightarrow s_3 = 3 - x_2$
- setzte x_2 in jeweiliges TP ein und überprüfe ob zul. Bereich leer ist
- TP 1 ist leer da TP 1 < 0 für $s_4, s_3 \geq 0$, TP 2 ist nicht leer, verzweige
- nehme neue Gleichung für TP 2 in Simplextableau auf
  ($s_3 = \frac{1}{11} + \frac{5}{11} + -\frac{7}{11}$)

Schritt 3, dualer Simplex Nach lösung mit dualem Simplex

- $x_2 = 3$
- $x_1 = \frac{17}{5}$
- $s_3 = \frac{7}{5}$

Wdh Schritt 2 und 3 für $x_1 \geq 4$ Nach Verzweigung und Simplex ist

- $x_2 = 0$
- $x_1 = 4$
- $x_3 = 8$
- $s_2 = 3$

der ZFW beträgt bei dieser Wahl -28
Wdh Schritt 2 und 3 für $x_1 \leq 3$ Nach Verzweigung und Simplex ist

- $x_2 = 3$
- $x_1 = 3$
- $x_3 = 2$
- $s_2 = 1$

der ZFW beträgt bei dieser Wahl -27
Die optimale Lösung ist $z_{max} = 28, x_1 = 4, x_2 = 0$