Zusammenfassung Software-orientierte Informatik

Henrik Tscherny

7. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Systeme

Ein System ist ein natürliches oder künstliches Gebilde, welches aus Eingangssignalen (E) ein Ausgangssignal (A) macht. Das System besitzt zudem einen inneren Zustand, der durch Zustandsgrößen ($\vec{Z}$) beschrieben wird. Eine Systemfunktion (F) legt fest wie das Eingangssignal in das Ausgangssignal umgewandelt wird ($\vec{A} = F(\vec{E}, \vec{Z}, ...)$)

Statische Systeme Der Output zum Zeitpunkt t ($y(t)$) ist nur von dem zu gleichen Zeitpunkt am Input anliegenden Wert ($x(t)$) abhängig. Innere Zustände ($\vec{Z}$) sind egal. die dazugehörige Funktion $y = f(x)$ nennt man statische Kennlinie.

Dynamische Systeme Der Output ($y(t)$) ist von dem am Input anliegenden Signal ($x(t)$) und dem inneren Zustand des Systems ($\vec{Z}$) abhängig. Dabei kann man sich den inneren Zustand als eine Art Gedächtnis vorstellen

Lineare Systeme Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz/Superpositionsprinzip gilt, bzw nicht-linear falls dieser nicht gilt, d.h. Stellt man den Input als die Summe von zwei verschiedenen Inputs dar, so kann man auch den Output als die Summe der beiden Outputs darstellen.
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Rightarrow y(t) = f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$
lineare Systeme werden durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben

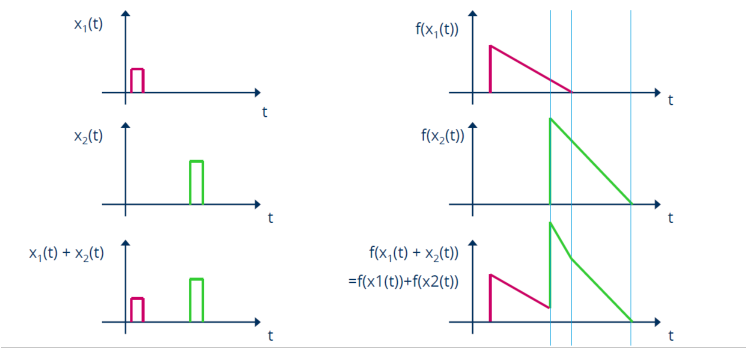


Abbildung 1: Veranschaulichung des Superpositionsprinzips

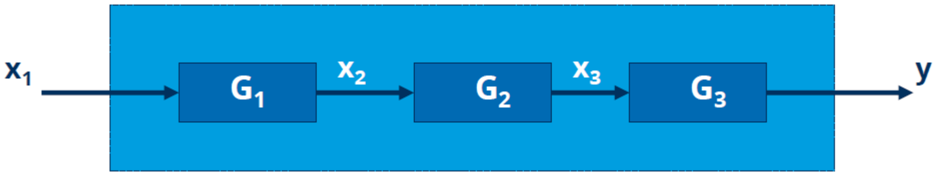
Zeit(in)variante Systeme Ändern sich die Systemeigenschaften sich nicht mit der Zeit, d.h. es gilt das Verschiebungsprinzip ($y(t - t_0) = f(x(t - t_0))$), ist das System zeitinvariant, andernfalls ist es zeitvariant

Kausales System Der Output ist nur von den aktuellen und vergangenen Inputs abhängig, Sprung- und Impulsantwort sind gleich 0 für $t < 0$, gilt dies nicht ist das System akausal.

- schwach kausal
  - reagiert auf Input x immer mit gleichem Output y
- stark kausal
  - reagiert auf ähnlichen Input x mit ähnlichem Output y

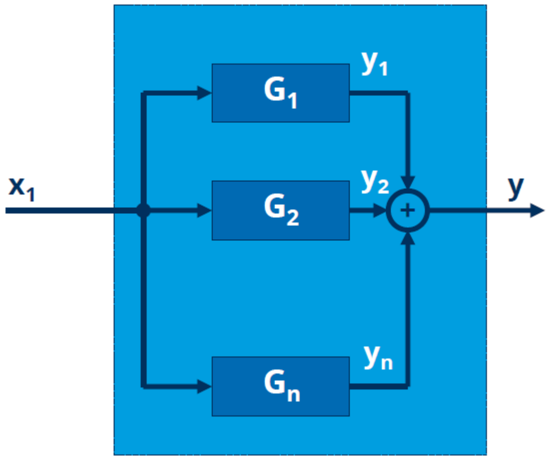
1.1 Verknüpfung von Systemen

Reihenschaltung



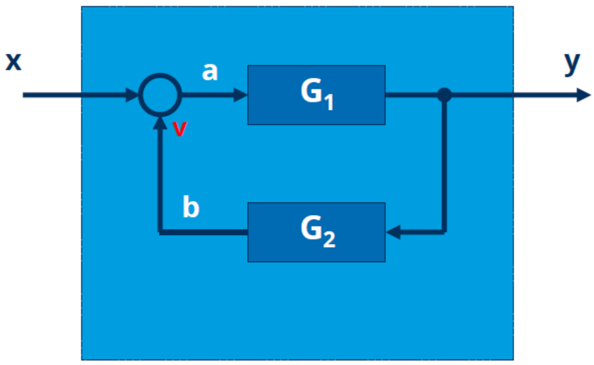
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \prod_{i=1}^{n} k_i = \frac{\text{output}}{\text{input}}$	$G_{ges}(f) = \prod_{i=1}^{n} G_i(f) = \frac{\text{input}(f)}{\text{output}(f)}$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Parallelschaltung



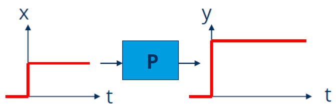
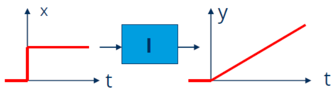
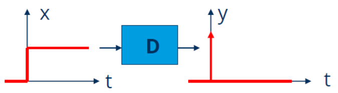
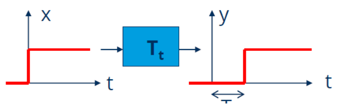
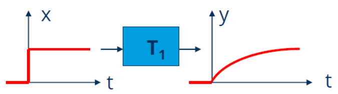
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \sum_{i=1}^{n} k_i$	$G_{ges}(f) = \sum_{i=1}^{n} G_i(f)$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Rückkopplungsschaltung



statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \frac{y}{x} = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2}$	$G_{ges}(f) = \frac{G_1(f)}{1 \pm G_1(f) G_2(f)}$

1.2 Grundsysteme

Type	Differenzialgleichung	Differenzengleichung
Proportionalsystem (P) 	$\frac{dy}{dx} = K_p$	$y(i) = K_p x(i)$
Integralsystem (I) 	$\frac{dy}{dt} = K_I x(t)$ $y(t) = K_I \int_0^t x(\tau) d\tau$	$y(i) = T K_I x(i) + y(i-1)$
Differentialsystem (D) 	$\frac{dx}{dt} K_D = y(t)$	$y(i) = \frac{K_D}{T}(x(i) - x(i-1))$
Totzeitsystem (T_t) 	$y(t) = x(t - T_t)$	$y(i) = x(i-n)$ $n = \frac{T_t}{T}$
Verzögerunssystem (T_1) 	$\frac{dy}{dt} T_1 + y(t) = x(t)$	$y(i) = (1-\alpha)x(i) + \alpha y(i-1)$ $\alpha = \frac{T_1}{T+T_1}$

2 Faltung/Konvolution

Die Faltung beschriebt einen mathematischen Operator ($*$) welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion $f * g$ liefert.

$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$

Intuitiv kann man sich die Faltung von zwei Funktionen f und g so vorstellen, dass man die Funktion g entlang der x-Achse schiebt (daher $x - \tau$) und dabei diese über die Funktion f hinweg schiebt. Dabei berechnet man dann in jedem Schritt die Fläche in welcher sich die beiden Funktionen überlappen. Der Flächeninhalt der Überlappung ist dann der Funktionswert der Funktionswert der Funktion $(f * g)(x)$. Die Funktion f wird also mit der Funktion g an jedem Punkt x gewichtet.

Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativität: $f * g = g * f$

- Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Assoziativ mit Skalarmultiplikation: $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

Für den zeitdiskreten Fall gibt es äquivalent zum Faltungsintegral die Faltungssumme:

$$f(kT) * g(kT) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{j=0}^{k} f((k-j)T)g(jT) & k \geq 0 \end{cases}$$

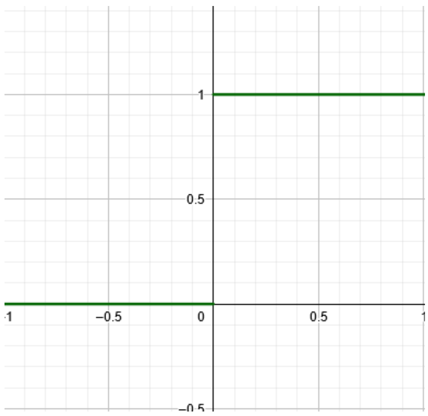
$k \in \mathbb{Z}$, T: Abtastperiode

Stabilität Ein System ist **BIBO-stabil**, wenn es für jeden beschränkten Input Wert auch nur maximal einen beschränkten Output wert liefert

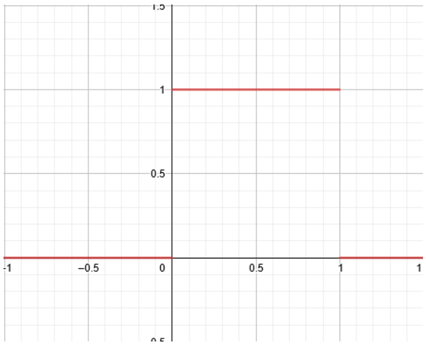
- zeitkontinuierlich: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$
- zeitdiskret: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(kT)|T < \infty$

2.1 Beispiel

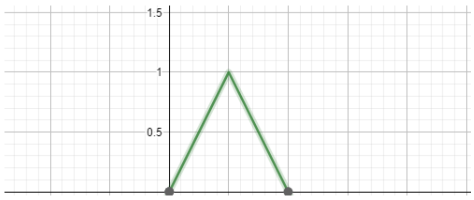
Faltung der Rechteckfunktion mit sich selbst:



Sei $u(x) = \begin{cases} 0, & x < \tau \\ 1, & x \geq \tau \end{cases}$
der Einheitssprung beginnend ab $x = \tau$



Stelle die Rechteckfunktion als die Differenz von zwei Einheitssprüngen dar
$r(x) = u(x) - u(x-1)$



Faltung mit sich selbst:
$$(r * r)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} r(\tau) r(x-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2(x-1), & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Man kann leicht sehen, dass der Wert von $(f * f)(0.5) = 1$, da sich dort die beiden Rechteckfunktionen exakt überlagern, somit ist die Fläche gleich 1

3 Fourier

3.1 Fourier Reihe

Die Fourier Reihe ist eine Funktion welche aus einer unendlichen Summe von gewichteten Sinus- und Kosinusschwingungen besteht.
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$
Man kann so eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, als eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen. Die Frequenzen der einzelnen Funktionen müssen dabei ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sein, da sonst die Grundperiodizität verletzt wird.

Abbildung 2: $\cos(2x)$, $\sin(x)$, $\sin(2.5x)$

Die grüne Funktion kann unmöglich aus der pinken Funktion bestehen, da diese die Grundperiodizität derer verletzt.
$\frac{4\pi}{3} = T_{pink} \nmid 2\pi = T_{grün}$
Jedoch **kann** die grüne Funktion aus der orangenen oder der blauen Funktion bestehen.
$\pi = T_{blau} \mid 2\pi = T_{orange} \mid 2\pi = T_{grün}$
Die Koeffizienten der Entwicklung von f können dann wie folgt berechnet werden:

- $a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$
- $b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$
- c ist die Verschiebung des Intervalls und kann beliebig gewählt werden (auch $c = 0$)

Note: Ist die Funktion nicht über eine ganze Periode integrierbar, z.B. wegen einer Sprungstelle, dann müssen mehrere Integrale benutzt werden, jeweils für die Teile in denen die Funktion integriert Werden kann
Herleitung:
Um die Gleich für Koeffizienten zu erhalten benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen, welche wie folgt lauten:

1. $\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$
2. $\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

3. $\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$

Nun machen wir folgende Umformung:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \sin mt \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \sin mt \, dt = 0,$ Sinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \sin mt \, dt = 0,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \sin mt \, dt = b_m \pi,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (2)

daraus folgt: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \cos mt \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos mt \, dt = 0,$ Cosinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \cos mt \, dt = 0,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \cos mt \, dt = 0,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (1)

daraus folgt: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \, 1 \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) 1 \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nt = 0$ Cosinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nt = 0$ Sinus über eine Periode = 0

- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0\pi$

daraus folgt: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)1\,dt$

3.2 Beispiel Rechteckfunktion

3.3 Fourier Transformation

Die FT erlaubt es eine gegebene Funktion f in ein Spektrum, bzw. in eine Spektralfunktion zu zerlegen. Man kann die Zerlegung am Beispiel eines gespielten Akkords veranschaulichen. Jeder Ton des Akkords ist eine Schwingung mit seiner eigenen Frequenz. Diese Frequenzen überlagern sich dann alle zusammen zu einer neuen Schwingung und bilden so den Akkord. Man kann nun FT benutzten um aus der Akkordschwingung die Schwingungen der einzelnen Noten zurückzugewinnen. Die Spektralfunktion welche man erhält, hat dann für jeden Ton des Akkords einen Ausschlag mit x=Frequenz. und mit der Höhe je nachdem wie laut, d.h. wie groß die Amplitude des jeweiligen Tons ist y=Amplitude.
$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

3.3.1 Beispiele

FT eines Rechtecks Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- Setze $f(t)$ die Formel für FT ein
  $$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \begin{cases} \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt}dt & t \in [0,1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$$
- Umformung mittels partieller Integration
  Using: $u = 1, u' = 0, v' = e^{iwt}, v = \frac{-e^{-iwt}}{iw}$
  $$\int_0^1 u \cdot v' = \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt}dt \Rightarrow u \cdot v - \int_0^1 u' \cdot v dt \Rightarrow 1 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw} - \int_0^1 0 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw}$$
  $$F(w) = [\frac{-e^{-iwt}}{iw}]_0^1 = \frac{1}{w}(e^{-iwt} - 1)$$
- Berechne Real- und Imaginärteil von $F(w)$

$$\frac{1}{w}(e^{-iwt} - 1) = \frac{1}{w}(\cos(w) - i \cdot \sin(w) - 1)$$
$$= \frac{\cos(w)}{w} - \frac{1}{w} - \frac{i\sin(w)}{w} = \frac{\cos(w)-1}{w} - \frac{i\sin(w)}{w}$$

- $\Re(F(w)) = \frac{\cos(w)-1}{w}$
- $\Im(F(w)) = \frac{\sin(w)}{w}$

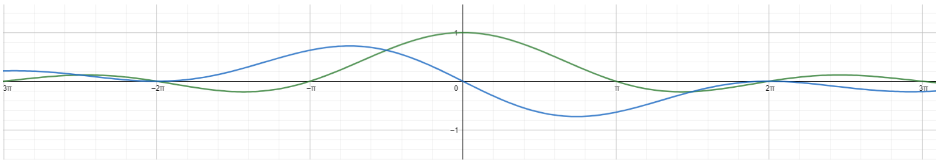


Abbildung 3: $\Re(F(w))$: Blau, $\Im(F(w))$: Grün