Zusammenfassung Software-orientierte Informatik

Henrik Tscherny

23. Januar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Systeme

Ein System ist ein natürliches oder künstliches Gebilde, welches aus Eingangssignalen (E) ein Ausgangssignal (A) macht. Das System besitzt zudem einen inneren Zustand, der durch Zustandsgrößen ($\vec{Z}$) beschrieben wird. Eine Systemfunktion (F) legt fest wie das Eingangssignal in das Ausgangssignal umgewandelt wird ($\vec{A} = F(\vec{E}, \vec{Z}, ...)$)

Statische Systeme Der Output zum Zeitpunkt t ($y(t)$) ist nur von dem zu gleichen Zeitpunkt am Input anliegenden Wert ($x(t)$) abhängig. Innere Zustände ($\vec{Z}$) sind egal. die dazugehörige Funktion $y = f(x)$ nennt man statische Kennlinie.

Dynamische Systeme Der Output ($y(t)$) ist von dem am Input anliegenden Signal ($x(t)$) und dem inneren Zustand des Systems ($\vec{Z}$) abhängig. Dabei kann man sich den inneren Zustand als eine Art Gedächtnis vorstellen

Lineare Systeme Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz/Superpositionsprinzip gilt, bzw nicht-linear falls dieser nicht gilt, d.h. Stellt man den Input als die Summe von zwei verschiedenen Inputs dar, so kann man auch den Output als die Summe der beiden Outputs darstellen.
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Rightarrow y(t) = f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$
lineare Systeme werden durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben

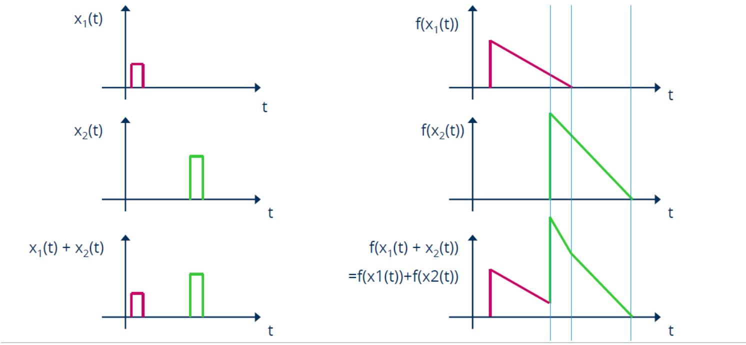


Abbildung 1: Veranschaulichung des Superpositionsprinzips

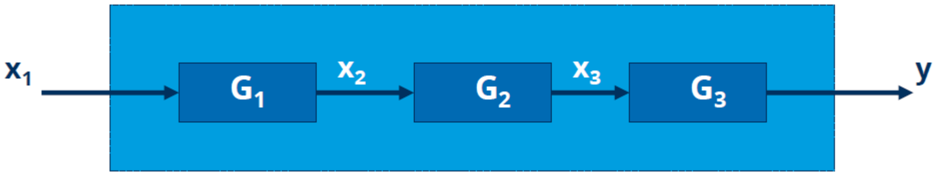
Zeit(in)variante Systeme Ändern sich die Systemeigenschaften sich nicht mit der Zeit, d.h. es gilt das Verschiebungsprinzip ($y(t - t_0) = f(x(t - t_0))$), ist das System zeitinvariant, andernfalls ist es zeitvariant

Kausales System Der Output ist nur von den aktuellen und vergangenen Inputs abhängig, Sprung- und Impulsantwort sind gleich 0 für $t < 0$, gilt dies nicht ist das System akausal.

- schwach kausal
  - reagiert auf Input x immer mit gleichem Output y
- stark kausal
  - reagiert auf ähnlichen Input x mit ähnlichem Output y

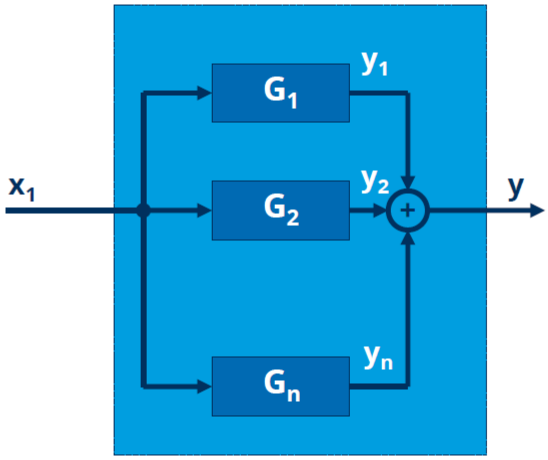
1.1 Verknüpfung von Systemen

Reihenschaltung



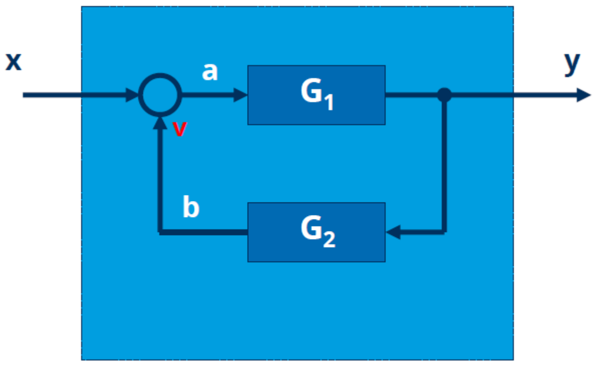
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \prod_{i=1}^{n} k_i = \frac{\text{output}}{\text{input}}$	$G_{ges}(f) = \prod_{i=1}^{n} G_i(f) = \frac{\text{input}(f)}{\text{output}(f)}$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Parallelschaltung



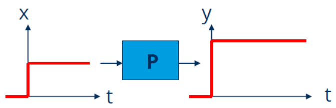
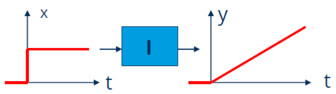
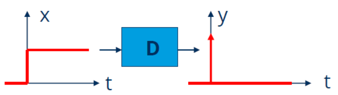
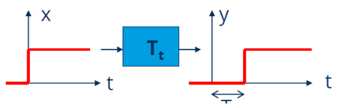
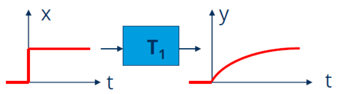
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \sum_{i=1}^{n} k_i$	$G_{ges}(f) = \sum_{i=1}^{n} G_i(f)$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Rückkopplungsschaltung



statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \frac{y}{x} = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2}$	$G_{ges}(f) = \frac{G_1(f)}{1 \pm G_1(f) G_2(f)}$

1.2 Grundsysteme

Type	Differenzialgleichung	Differenzengleichung
Proportionalsystem (P) 	$\frac{dy}{dx} = K_p$	$y(i) = K_p x(i)$
Integralsystem (I) 	$\frac{dy}{dt} = K_I x(t)$ $y(t) = K_I \int_0^t x(\tau) d\tau$	$y(i) = T K_I x(i) + y(i-1)$
Differentialsystem (D) 	$\frac{dx}{dt} K_D = y(t)$	$y(i) = \frac{K_D}{T}(x(i) - x(i-1))$
Totzeitsystem (T_t) 	$y(t) = x(t - T_t)$	$y(i) = x(i-n)$ $n = \frac{T_t}{T}$
Verzögerunssystem (T_1) 	$\frac{dy}{dt} T_1 + y(t) = x(t)$	$y(i) = (1-\alpha)x(i) + \alpha y(i-1)$ $\alpha = \frac{T_1}{T+T_1}$

2 Faltung/Konvolution

Die Faltung beschriebt einen mathematischen Operator ($*$) welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion $f * g$ liefert.

$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) g(x - \tau) dt$

In einem linearen System kann der Input als eine unendliche Summe von Input-Impulsen betrachtet werden, woraus das System dann wiederum eine unendliche Summe von Output-Funktionen macht, wobei jede der Output-Funktionen mit dem dazugehörigen Input-Impuls multipliziert wird, die Output-Funktionen können sich dabei auch überlagern

Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativität: $f * g = g * f$

- Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Für den zeitdiskreten Fall gibt es äquivalent zum Faltungsintegral die Faltungssumme:

$$f(kT) * g(kT) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{j=0}^{k} f((k-j)T)g(jT) & k \geq 0 \end{cases}$$

Stabilität Ein System ist **BIBO-stabil**, wenn es für jeden beschränkten Input Wert auch nur maximal einen beschränkten Output wert liefert

- zeitkontinuierlich: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$
- zeitdiskret: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(kT)| T < \infty$