Zusammenfassung Software-orientierte Informatik

Henrik Tscherny

17. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Systeme

Ein System ist ein natürliches oder künstliches Gebilde, welches aus Eingangssignalen (E) ein Ausgangssignal (A) macht. Das System besitzt zudem einen inneren Zustand, der durch Zustandsgrößen ($\vec{Z}$) beschrieben wird. Eine Systemfunktion (F) legt fest wie das Eingangssignal in das Ausgangssignal umgewandelt wird ($\vec{A} = F(\vec{E}, \vec{Z}, ...)$)

Statische Systeme Der Output zum Zeitpunkt t ($y(t)$) ist nur von dem zu gleichen Zeitpunkt am Input anliegenden Wert ($x(t)$) abhängig. Innere Zustände ($\vec{Z}$) sind egal. Die dazugehörige Funktion $y = f(x)$ nennt man statische Kennlinie. D.h. ändert sich $y(t)$ aber $x(t)$ nicht, so ist das System statisch.

Dynamische Systeme Der Output ($y(t)$) ist von dem am Input anliegenden Signal ($x(t)$) und dem inneren Zustand des Systems ($\vec{Z}$) abhängig. Dabei kann man sich den inneren Zustand als eine Art Gedächtnis vorstellen

Lineare Systeme Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz/Superpositionsprinzip gilt, bzw nicht-linear falls dieser nicht gilt, d.h. Stellt man den Input als die Summe von zwei verschiedenen Inputs dar, so kann man auch den Output als die Summe der beiden Outputs darstellen.
$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Rightarrow y(t) = f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$
lineare Systeme werden durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben

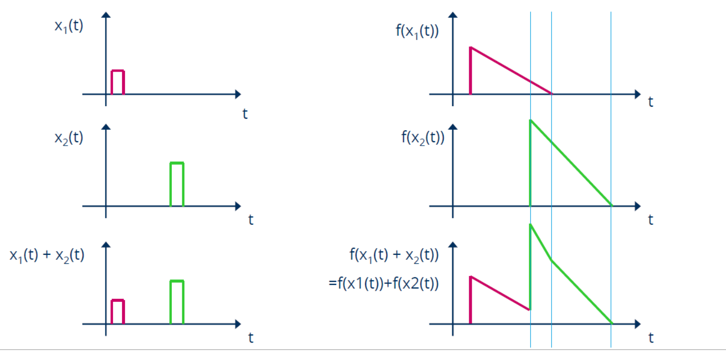


Abbildung 1: Veranschaulichung des Superpositionsprinzips

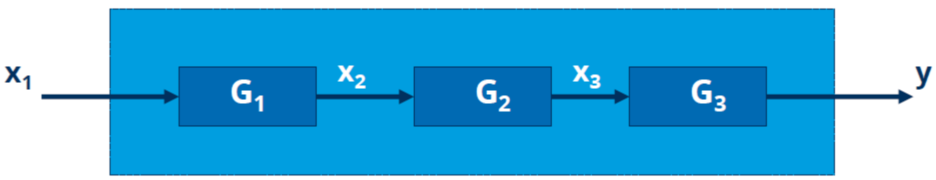
Zeit(in)variante Systeme Ändern sich die Systemeigenschaften sich nicht mit der Zeit, d.h. es gilt das Verschiebungsprinzip ($y(t - t_0) = f(x(t - t_0))$), ist das System zeitinvariant, andernfalls ist es zeitvariant

Kausales System Der Output ist nur von den aktuellen und vergangenen Inputs abhängig, Sprung- und Impulsantwort sind gleich 0 für $t < 0$, gilt dies nicht ist das System akausal.

- schwach kausal
  - reagiert auf Input x immer mit gleichem Output y
- stark kausal
  - reagiert auf ähnlichen Input x mit ähnlichem Output y

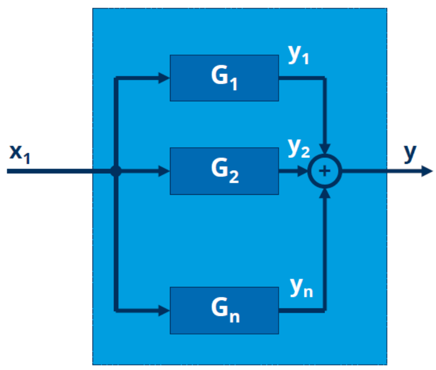
1.1 Verknüpfung von Systemen

Reihenschaltung



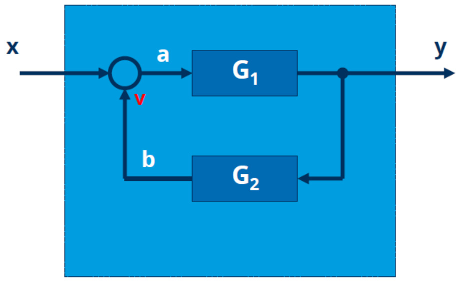
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \prod_{i=1}^{n} k_i = \frac{\text{output}}{\text{input}}$	$G_{ges}(f) = \prod_{i=1}^{n} G_i(f) = \frac{\text{input}(f)}{\text{output}(f)}$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Parallelschaltung



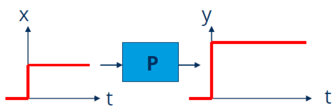
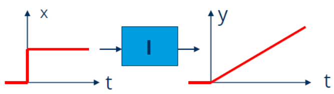
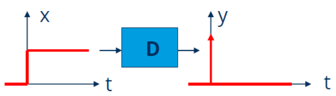
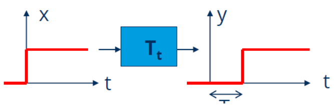
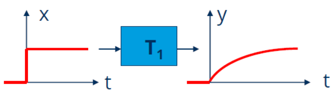
statisches System
$k_{ges} = \sum_{i=1}^{n} k_i$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor
dynamisches System
$G_{ges}(f) = \sum_{i=1}^{n} G_i(f)$
$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Rückkopplungsschaltung



statisches System
$k_{ges} = \frac{y}{x} = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2}$
dynamisches System
$G_{ges}(f) = \frac{G_1(f)}{1 \pm G_1(f)G_2(f)}$

1.2 Grundsysteme

Type	Differenzialgleichung	Differenzengleichung
Proportionalsystem (P) 	$\frac{dy}{dx} = K_p$	$y(i) = K_p x(i)$
Integralsystem (I) 	$\frac{dy}{dt} = K_I x(t)$ $y(t) = K_I \int_0^t x(\tau) d\tau$	$y(i) = T K_I x(i) + y(i-1)$
Differentialsystem (D) 	$\frac{dx}{dt} K_D = y(t)$	$y(i) = \frac{K_D}{T}(x(i) - x(i-1))$
Totzeitsystem (T_t) 	$y(t) = x(t - T_t)$	$y(i) = x(i-n)$ $n = \frac{T_t}{T}$
Verzögerunssystem (T_1) 	$\frac{dy}{dt} T_1 + y(t) = x(t)$	$y(i) = (1-\alpha)x(i) + \alpha y(i-1)$ $\alpha = \frac{T_1}{T + T_1}$

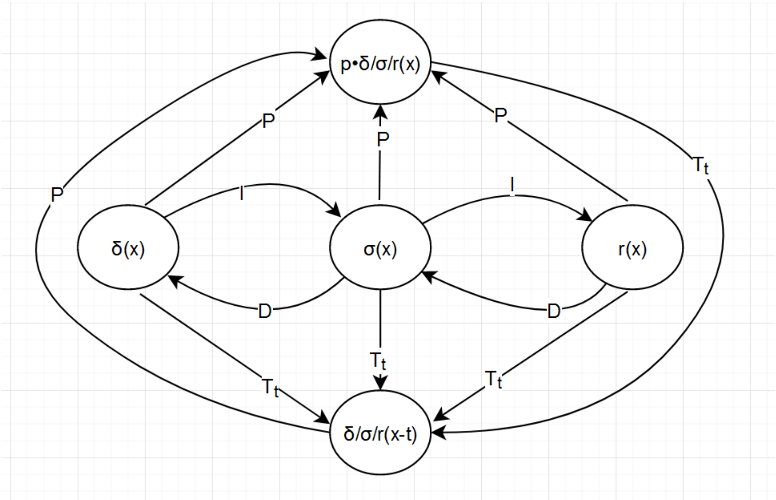


Abbildung 2: Beziehungen zwischen den Grundsystemen

2 Faltung/Konvolution

Die Faltung beschriebt einen mathematischen Operator ($*$) welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion $f * g$ liefert.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)g(x - \tau)d\tau$$

Intuitiv kann man sich die Faltung von zwei Funktionen f und g so vorstellen, dass man die Funktion g entlang der x-Achse schiebt (daher $x - \tau$) und dabei diese über die Funktion f hinweg schiebt. Dabei berechnet man dann in jedem Schritt die Fläche in welcher sich die beiden Funktionen überlappen. Der Flächeninhalt der Überlappung ist dann der Funktionswert der Funktionswert der Funktion $(f * g)(x)$. Die Funktion f wird also mit der Funktion g an jedem Punkt x gewichtet. Der Einheitsimpuls $\delta(t)$ mit der Fläche $A = 1$ verhält sich bei der Faltung wie ein neutrales Element.

Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativität: $f * g = g * f$
- Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Assoziativ mit Skalarmultiplikation: $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

Für den zeitdiskreten Fall gibt es äquivalent zum Faltungsintegral die Faltungssumme:

$$f(kT) * g(kT) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{j=0}^{k} f((k-j)T)g(jT) & k \geq 0 \end{cases}$$

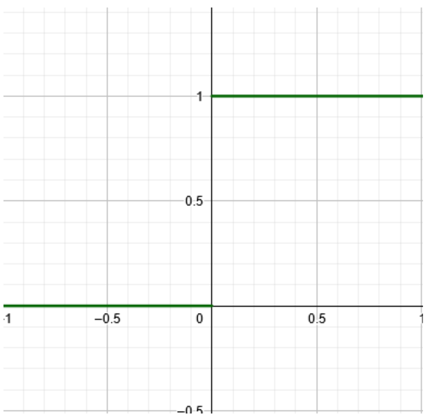
$k \in \mathbb{Z}$, T: Abtastperiode

Stabilität Ein System ist **BIBO-stabil**, wenn es für jeden beschränkten Input Wert auch nur maximal einen beschränkten Output wert liefert

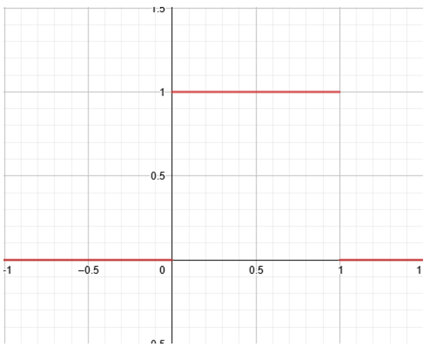
- zeitkontinuierlich: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$
- zeitdiskret: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(kT)| T < \infty$

2.1 Beispiel

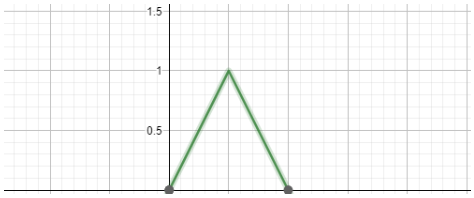
Faltung der Rechteckfunktion mit sich selbst:



Sei $u(x) = \begin{cases} 0, & x < \tau \\ 1, & x \geq \tau \end{cases}$
der Einheitssprung beginnend ab $x = \tau$



Stelle die Rechteckfunktion als die Differenz von zwei Einheitssprüngen dar
$r(x) = u(x) - u(x-1)$



Faltung mit sich selbst: $(r * r)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} r(\tau) r(x-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2(x-1), & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Man kann leicht sehen, dass der Wert von $(f * f)(0.5) = 1$, da sich dort die beiden Rechteckfunktionen exakt überlagern, somit ist die Fläche gleich 1

3 Fourier

In diesem Kapitel fassen wir Techniken zusammen, welche es erlauben eine gegebene Funktion f in ein Spektrum, bzw. in eine Spektralfunktion zu zerlegen. Man kann die Zerlegung am Beispiel eines gespielten Akkords veranschaulichen. Jeder Ton des Akkords ist eine Schwingung mit seiner eigenen Frequenz. Diese Frequenzen überlagern sich dann alle zusammen zu einer neuen Schwingung und bilden so den Akkord. Man kann nun FT benutzten um aus der Akkordschwingung die Schwingungen der einzelnen Noten zurückzugewinnen. Die Spektralfunktion welche man erhält, hat dann für jeden Ton des Akkords einen Ausschlag mit x=Frequenz. und mit der Höhe je nachdem wie laut, d.h. wie groß die Amplitude des jeweiligen Tons ist y=Amplitude.

3.1 Fourier Reihe

Die Fourier Reihe ist eine Funktion welche aus einer unendlichen Summe von gewichteten Sinus- und Kosinusschwingungen besteht.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Man kann so eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, als eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen. Die Frequenzen der einzelnen Funktionen müssen dabei ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sein, da sonst die Grundperiodizität verletzt wird.

Abbildung 3: $\cos(2x)$, $\sin(x)$, $\sin(2.5x)$

Die grüne Funktion kann unmöglich aus der pinken Funktion bestehen, da diese die Grundperiodizität derer verletzt.
$\frac{4\pi}{3} = T_{pink} \nmid 2\pi = T_{grün}$
Jedoch **kann** die grüne Funktion aus der orangenen oder der blauen Funktion bestehen.
$\pi = T_{blau} \mid 2\pi = T_{orange} \mid 2\pi = T_{grün}$
Außerdem ist die Entwicklung nur möglich wenn die Dirichletschen Bedigungen erfüllt sind:

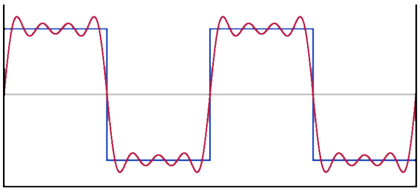
- Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele stetig-monotone Teilintervalle zerlegen
- An Diskontinuitäten existiert der rechts und links-seitige Grenzwert, d.h. es kommen nur endliche Sprünge in Betracht (z.B. nicht der Fall für $\tan(x)$

Die Koeffizienten der Entwicklung von f können dann wie folgt berechnet werden:

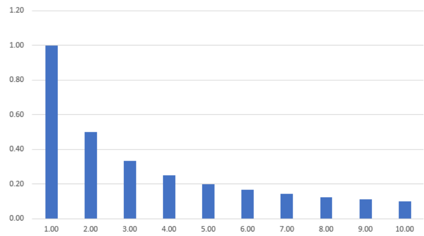
- $a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_c^{c+T} f(t)\,dt$ (Absolut-Anteil)
- $a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(n\omega t)\,dt$ (Cosinus-Anteil)
- $b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(n\omega t)\,dt$ (Sinus-Anteile)
- c ist die Verschiebung des Intervalls und kann beliebig gewählt werden (auch $c = 0$)

Note: Ist die Funktion nicht über eine ganze Periode integrierbar, z.B. wegen einer Sprungstelle, dann müssen mehrere Integrale benutzt werden, jeweils für die Teile in denen die Funktion integriert Werden kann

Trägt man die a_n's bzw. b_n's in Abhängigkeit der Frequenz ab so erhält man eine dazugehörige **diskrete Spektralfunktion**



(a) 4x approximierte Rechteckfunktion



(b) Spektrum der a_n's bis $n = 10$

Herleitung der Koeffizientenformeln:
Um die Gleich für Koeffizienten zu erhalten benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen, welche wie folgt lauten:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0$

Nun machen wir folgende Umformung:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin mt\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \sin mt\, dt$$

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \sin mt\, dt = 0,$ Sinus über eine Periode mal Konstante $= 0$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \sin mt\, dt = 0,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (3)
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \sin mt\, dt = b_m \pi,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (2)

daraus folgt: $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos mt\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \cos mt\, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos mt \, dt = 0,$ Cosinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \cos mt \, dt = 0,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \cos mt \, dt = 0,$ $\rightarrow$ Folgt aus Gleichung (1)

daraus folgt: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \, 1 \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) 1 \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nt = 0$ Cosinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nt = 0$ Sinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \pi$

daraus folgt: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) 1 \, dt$

3.2 Fourier Transformation

Die Fourier Transformation ist eine Erweiterung der Fourier Reihen, welche man erhält wenn man erlaubt, dass die Periode der zu approximierenden Funktion gegen unendlich geht (d.h. es muss in der Praxis keine Wiederholungen innerhalb der Funktion geben). Die Fourier Transformation ist also eine Art Scanner welcher eine Funktion nach Frequenzanteilen abscannt. Wie auch bei den Fourier Reihen, erhält man bei der Fourier Transformation wieder ein Spektrum welches nun jedoch **kontinuierlich** ist. Damit eine Funktion fourier-transformierbar ist, muss sie absolut integrierbar sein, d.h. dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche muss auch im unendlichen endlich sein

Man kann nun das Spektrum erhalten indem man die Funktion $f(t)$ Fourier Transformiert:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

Hat man dagegen ein Spektrum gegeben, so kann man dies mittel der inversen Fourier Transformation wieder in die ursprüngliche Funktion umwandeln:

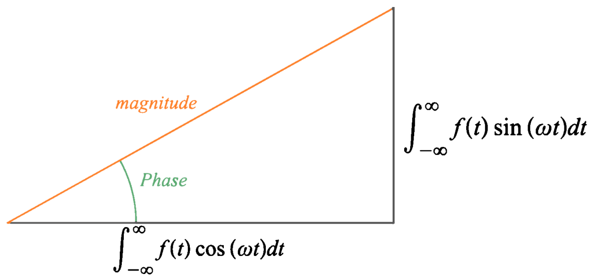
$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,dt$$

Intuition

Nach der Eulerschen Formel gilt: $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$,
damit kann man die Formel der Fourier Transformation wie folgt umformen:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt$$

Man kann sich die beiden Anteile nun auch als Dreieck in der Komplexen Zahlenebene vorstellen, wobei die Länge der Hypotenuse dem Funktionswert der Fourier Transformation entspricht:



1. multipliziere $f(t)$ jeweils einmal mit $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$
2. setze $\omega = 0$
3. berechne die Gesamtfläche unter beiden Funktionen
4. berechne mit Satz des Pythagoras die Länge, diese ist gleich $F(\omega)$
5. erhöhe ω infinitesimal
6. GOTO (3)

Note: Der Algorithmus erzeugt nur die eine Hälfte der Fourier Transformation, durch infinitesimales reduzieren von ω erhält man die andere Seite

3.2.1 Beispiel FT eines Rechteckimpulses

Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- Setze $f(t)$ die Formel für FT ein

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = \begin{cases} \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt} dt & t \in [0, 1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- Umformung mittels partieller Integration

Using: $u = 1, u' = 0, v' = e^{iwt}, v = \frac{-e^{-iwt}}{iw}$

$$\int_0^1 u \cdot v' = \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt} dt \Rightarrow u \cdot v - \int_0^1 u' \cdot v dt \Rightarrow 1 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw} - \int_0^1 0 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw}$$

$$F(w) = [\frac{-e^{-iwt}}{iw}]_0^1 = \frac{1}{w}(e^{-iwt} - 1)$$

- Berechne Real- und Imaginärteil von $F(w)$

$\frac{1}{w}(e^{-iwt} - 1) = \frac{1}{w}(\cos(w) - i \cdot \sin(w) - 1)$

$= \frac{\cos(w)}{w} - \frac{1}{w} - \frac{i \sin(w)}{w} = \frac{\cos(w)-1}{w} - \frac{i \sin(w)}{w}$

  - $\Re(F(w)) = \frac{\cos(w)-1}{w}$
  - $\Im(F(w)) = \frac{\sin(w)}{w}$

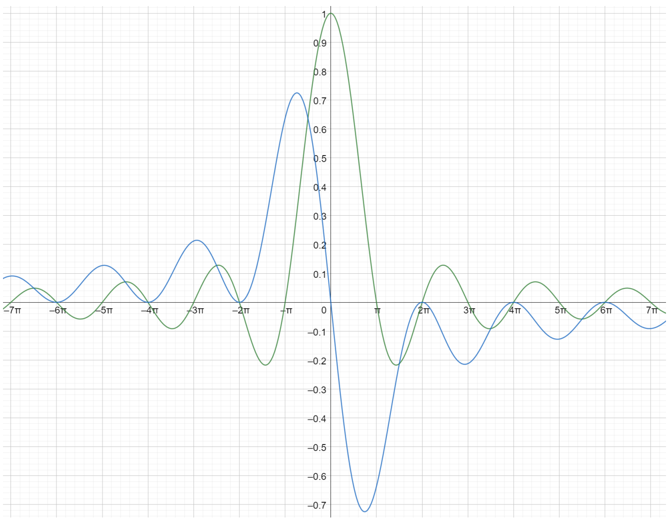
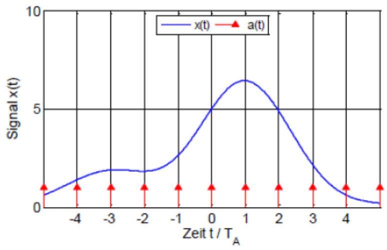


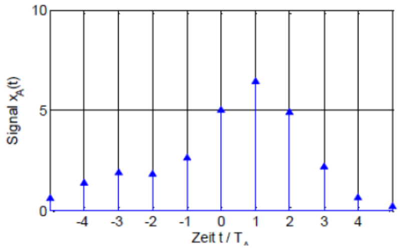
Abbildung 5: $\Re(F(w))$: Blau, $\Im(F(w))$: Grün

4 Abtastung

Abtasten eines Signals $x(t)$ durch regelmäßiges multiplizieren (T_A: Abtastfrequenz) mit der Dirac-Delta-Funktion $\delta(x)$, es gilt:

- $a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_A \cdot k)$
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - T_A \cdot k)$





4.1 Aliasing

Beim Abtasten eines Signals mit einer Frequenz f_g, und einer Abtastperiode $T_A = \frac{1}{f_g}$, werden weitere Signale mit Aliasfrequenzen $f_{al} = n * f_a$ erzeugt
Man kann die Aliasfrequenzen bspw. mit einem Tiefpassfilter herausfiltern

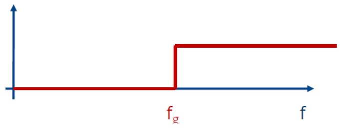
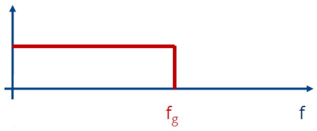
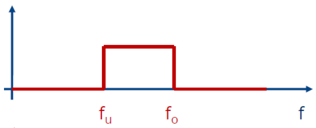
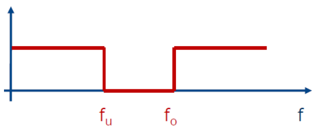
Nyquist-Shannon-Abtasttheorem ($\mathbf{f_a > 2f_g}$) Ein Signal mit einer maximalen Frequenz f_g kann nur dann aus äquidistanten Abtastwerten exakt rekonstruiert werden, wenn das Signal mit einer Abtastfrequenz f_a echt größter als $2 \cdot f_g$ abgetastet wurde.

5 Filter

Filter können das Spektrum eines Signals beeinflussen durch:

- Herausfiltern
- Dämpfen

Arten von Filtern:

Type	Diagramm
Hochpass	
Tiefpass	
Bandpass	
Bandsperre	

Finite Impulse Response (FIR)

- zeitlich begrenzte Impulsantwort auf Input
- beinhalten keinen Informationsspeicher
- können nur eine begrenzte Anzahl von Daten am Eingang zu Berechnung der Antwort benutzten
- sind stabil und können nicht selbst zu Schwingungen anregen
- keine Rekursion, bzw. Rückkopplung

Infinite Impulse Response (IIR)

- linear und verschiebungsinvariant
- kann eine unendlich lange Impulsantwort auf Input erzeugen
- rekursiv

6 Laplace Transformation

Die Laplace Transformation versucht das Problem zu lösen, dass nur absolut integrierbare Funktionen fourier-transformiert werden können.

Die Laplace Transformation konvertiert eine Funktion aus einer (Zeit)Domäne in eine andere komplexe Frequenzdomäne. So können Differenzialgleichungen mittels einfacherer algebraischer Ausdrücke beschrieben werden. Ähnlich wie die Fourier Transformation kann man sich auch die Laplace Transformation als eine Art Scanner vorstellen, nur dass dieser nun zusätzlich nach Exponentialanteilen scannen kann.
Die Laplace Transformation einer Funktion $x(t)$ nach $X(s)$ lautet:
$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty \left(x(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-i\omega t}\right) dt$
using $s := \delta + i\omega$
$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty \left(x(t) \cdot e^{-st}\right) dt$
Eigenschaften:

- Linearität (Skalar):
  $\mathcal{L}\{k \cdot x(t)\} = k \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} = k \cdot X(s)$
- Linearität (Überlagerung):
  $\mathcal{L}\{x_1(t) \pm x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} \pm \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_1(s) \pm X_2(s)$
- Verschiebungsatz:
  $\mathcal{L}\{x(t - T_t)\} = e^{-T_t \cdot s} \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} = e^{-T_t \cdot s} \cdot X(s), \quad T_t > 0$
- Ähnlichkeitssatz:
  $\mathcal{L}\{x(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{s}{a}\right) \;\rightarrow\; \mathcal{L}\{x\left(\frac{1}{a} \cdot t\right)\} = a \cdot X(a \cdot s)$
- Integrationssatz:
  $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$
- Differenzialsatz:
  $\mathcal{L}\left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = s^n \cdot X(s) - \sum_{i=1}^{n} \left(s^{n-i} \cdot \left.\frac{d^{(i-1)}x(t)}{dt^{(i-1)}}\right|_{t=0} \right)$
  - Für $n = 1$: $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s \cdot X(s) - x(0)$
- Faltungssatz:
  $\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau)\, d\tau \right\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$

Transformation der Grundsysteme:

Type	Zeitdomain	Frequenzdomain	Übertragungsfunktion
P-System	$y(t) = k_P \cdot x(t)$	$Y(s) = k_P \cdot X(s)$	$G(s) = k_P$
I-System	$y(t) = k_I \cdot \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$Y(s) = \frac{k_I}{s} \cdot X(s)$	$G(s)\frac{k_I}{s}$
D-System	$y(t) = k_D \cdot \frac{dx(t)}{dt}$	$Y(s) = k_D \cdot s \cdot X(s)$	$G(s) = k_D \cdot s$
T_1-System	$y(t) + \frac{dy(t)}{dt} \cdot T_1 = x(t)$	$Y(s) + T_1 \cdot s \cdot Y(s) = X(s)$	$G(s) = \frac{1}{T_1 \cdot s+1}$
$T - t$-System	$y(t) = x(t - T_t)$	$Y(s) = e^{-sT_t} \cdot X(s)$	$G(s) = e^{-sT_t}$

Note: Die Übertragungsfunktion beschreibt die Beziehung zwischen dem Ein- und Ausgangssignal des Systems

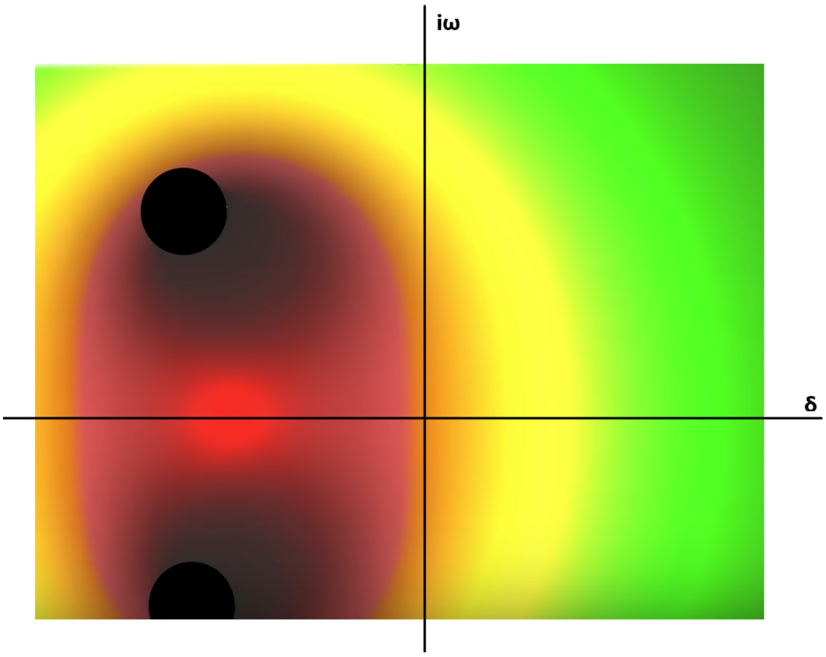


Abbildung 7: Contour-Plot der Laplace Transformation von $e^{-t}\sin(t)$
je dunkler/röter desto größer der Funktionswert, Polstellen bei $(-1, \pm i)$

Die Fourier Transformation der Funktion befindet sich ebenfalls in diesem Plot wieder, nämlich genau entlang der y-Achse. Betrachtet man des Weiteren die Polstellen (schwarz) der Laplace Transformation, so kann man an diesen ablesen, aus was für Anteilen die Funktion besteht. Je Weiter die Polstelle links ist, desto größer der negative Exponentialanteil der Funktion (exponentielle Dämpfung), je weiter rechts, desto der positive Exponentialanteil (exponentielles Wachstum der Funktion). Punkte genau auf der y-Achse haben keinen Exponentialanteil → wie bei der Fourier Transformation. Die Werte entlang der y-Achse entsprechen den Frequenzanteilen der Funktion.

6.1 Z-Transformation

Die Z-Transformation ist das **zeitdiskrete Analog zur Laplace Transformation**

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t - kT)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x[k](e^{Ts})^{-k}$$

using: $z = e^{Ts} \rightarrow e^{-kTs} = z^{-k}$

$$\mathcal{Z}\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

Eigenschaften:

- Linearität (Skalar):
  $\mathcal{Z}\{ax_k\} = a\mathcal{Z}\{x_k\} = aX(z)$
- Linearität (Überlagerung):
  $\mathcal{Z}\{x_{1,k} \pm x_{2,k}\} = \mathcal{Z}\{x_{1,k}\} \pm \mathcal{Z}\{x_{2,k}\} = X_1(z) \pm X_2(z)$
- Ähnlichkeitssatz:
  $\mathcal{Z}\{a^k x_k\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$
- Rechtsverschiebung:
  $\mathcal{Z}\{x_{k-n}\} = \mathcal{Z}\{x(kT - nT)\} = z^{-n}\mathcal{Z}\{x(kT)\} = z^{-n}X(z)$
- Linksverschiebung:
  $$\mathcal{Z}\{x_{k+n}\} = \mathcal{Z}\{x(kT + nT)\} = z^n X(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} x[k]z^{-k}$$
- Rückwärtsdifferenz:
  $\mathcal{Z}\{x_k - x_{k-1}\} = \frac{z-1}{z}X(z)$
- Vorwärtsdifferenz:
  $\mathcal{Z}\{x_{k+1} - x_k\} = (z - 1)X(z) - zx(0)$
- Faltunssatz:
  $\mathcal{Z}\{x_{1,k} * x_{2,k}\} = X_1(z) \cdot X_2(z)$

Die Z-Transformation kann auch umgekehrt werden, d.h. man überführt eine Funktion aus der Frequenzdomain in die Zeitdomain, das geht wie folgt:

$$x_k = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint X(z) z^{k-1} \, dz$$