

Zusammenfassung Software-orientierte Informatik

Henrik Tscherny

10. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Systeme	1
1.1	Verknüpfung von Systemen	3
1.2	Grundsysteme	4
2	Faltung/Konvolution	4
2.1	Beispiel	5
3	Fourier	6
3.1	Fourier Reihe	7
3.2	Fourier Transformation	10
3.2.1	Beispiel FT eines Rechteckimpulses	11
4	Abtastung	12
4.1	Aliasing	12
5	Filter	13
6	Laplace Transformation	14

1 Systeme

Ein System ist ein natürliches oder künstliches Gebilde, welches aus Eingangssignalen (E) ein Ausgangssignal (A) macht. Das System besitzt zudem einen inneren Zustand, der durch Zustandsgrößen (\vec{Z}) beschrieben wird. Eine Systemfunktion (F) legt fest wie das Eingangssignal in das Ausgangssignal umgewandelt wird ($\vec{A} = F(\vec{E}, \vec{Z}, \dots)$)

Statische Systeme Der Output zum Zeitpunkt t ($y(t)$) ist nur von dem zu gleichen Zeitpunkt am Input anliegenden Wert ($x(t)$) abhängig. Innere Zustände (\vec{Z}) sind egal, die dazugehörige Funktion $y = f(x)$ nennt man statische Kennlinie.

Dynamische Systeme Der Output ($y(t)$) ist von dem am Input anliegenden Signal ($x(t)$) und dem inneren Zustand des Systems (\vec{Z}) abhängig. Dabei kann man sich den inneren Zustand als eine Art Gedächtnis vorstellen

Lineare Systeme Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz/Superpositionsprinzip gilt, bzw nicht-linear falls dieser nicht gilt, d.h. Stellt man den Input als die Summe von zwei verschiedenen Inputs dar, so kann man auch den Output als die Summe der beiden Outputs darstellen.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Rightarrow y(t) = f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$$

lineare Systeme werden durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben

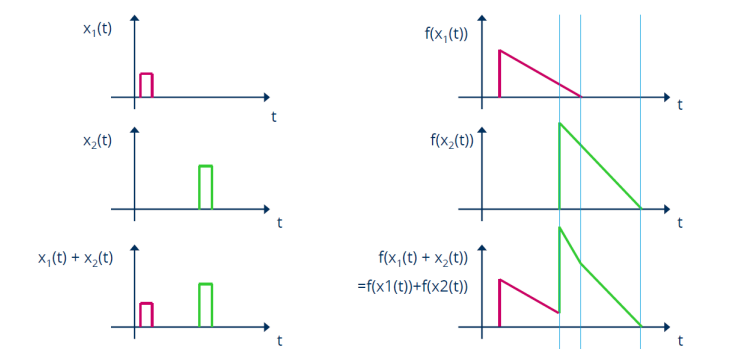


Abbildung 1: Veranschaulichung des Superpositionsprinzips

Zeit(in)variante Systeme Ändern sich die Systemeigenschaften sich nicht mit der Zeit, d.h. es gilt das Verschiebungsprinzip ($y(t - t_0) = f(x(t - t_0))$), ist das System zeitinvariant, andernfalls ist es zeitvariant

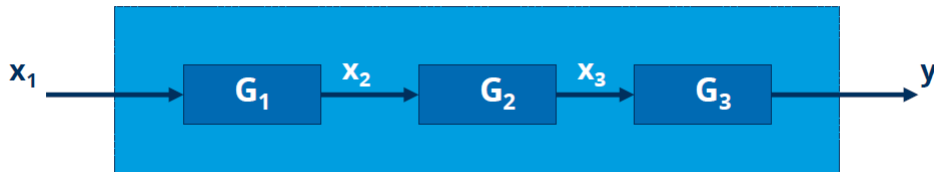
Kausales System Der Output ist nur von den aktuellen und vergangenen Inputs abhängig, Sprung- und Impulsantwort sind gleich 0 für $t < 0$, gilt dies nicht ist das System akausal.

- schwach kausal
 - reagiert auf Input x immer mit gleichem Output y
- stark kausal

- reagiert auf ähnlichen Input x mit ähnlichem Output y

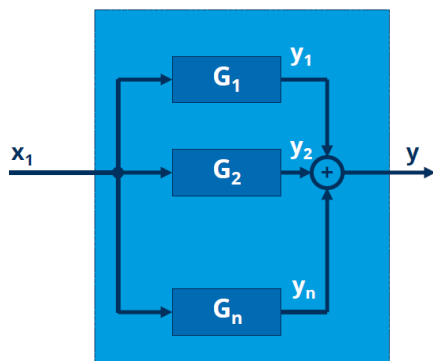
1.1 Verknüpfung von Systemen

Reihenschaltung



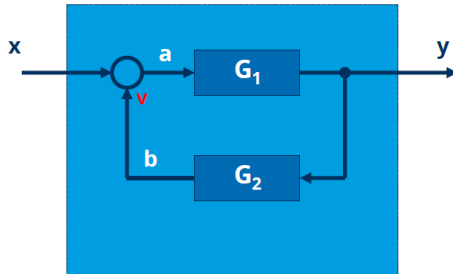
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \prod_{i=1}^n k_i = \frac{\text{output}}{\text{input}}$	$G_{ges}(f) = \prod_{i=1}^n G_i(f) = \frac{\text{input}(f)}{\text{output}(f)}$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Parallelschaltung



statisches System
$k_{ges} = \sum_{i=1}^n k_i$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor
dynamisches System
$G_{ges}(f) = \sum_{i=1}^n G_i(f)$
$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Rückkopplungsschaltung



statisches System
$k_{ges} = \frac{y}{x} = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2}$
dynamisches System
$G_{ges}(f) = \frac{G_1(f)}{1 \pm G_1(f)G_2(f)}$

1.2 Grundsysteme

Type	Differenzialgleichung	Differenzengleichung
Proportionsystem (P) 	$\frac{dy}{dx} = K_p$	$y(i) = K_p x(i)$
Integralsystem (I) 	$\frac{dy}{dt} = K_I x(t)$ $y(t) = K_I \int_0^t x(\tau) d\tau$	$y(i) = T K_I x(i) + y(i-1)$
Differentialsystem (D) 	$\frac{dx}{dt} K_D = y(t)$	$y(i) = \frac{K_D}{T} (x(i) - x(i-1))$
Totzeitsystem (T_t) 	$y(t) = x(t - T_t)$	$y(i) = x(i - n)$ $n = \frac{T_t}{T}$
Verzögerungssystem (T_1) 	$\frac{dy}{dt} T_1 + y(t) = x(t)$	$y(i) = (1 - \alpha)x(i) + \alpha y(i-1)$ $\alpha = \frac{T_1}{T+T_1}$

2 Faltung/Konvolution

Die Faltung beschreibt einen mathematischen Operator (*) welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion $f * g$ liefert.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)g(x - \tau)d\tau$$

Intuitiv kann man sich die Faltung von zwei Funktionen f und g so vorstellen, dass man die Funktion g entlang der x -Achse schiebt (daher $x - \tau$) und dabei diese über die Funktion f hinweg schiebt. Dabei berechnet man dann in jedem Schritt die Fläche in welcher sich die beiden Funktionen überlappen. Der Flächeninhalt der Überlappung ist dann der Funktionswert der Funktion $(f * g)(x)$. Die Funktion f wird also mit der Funktion g an jedem Punkt x gewichtet.

Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativität: $f * g = g * f$
- Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Assoziativ mit Skalarmultiplikation: $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

Für den zeitdiskreten Fall gibt es äquivalent zum Faltungsintegral die Faltungssumme:

$$f(kT) * g(kT) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{j=0}^k f((k-j)T)g(jT) & k \geq 0 \end{cases}$$

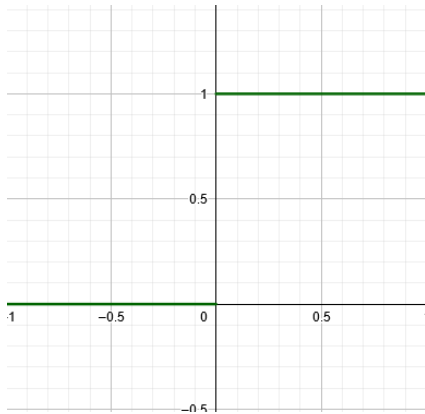
$k \in \mathbb{Z}$, T : Abtastperiode

Stabilität Ein System ist **BIBO-stabil**, wenn es für jeden beschränkten Input Wert auch nur maximal einen beschränkten Output wert liefert

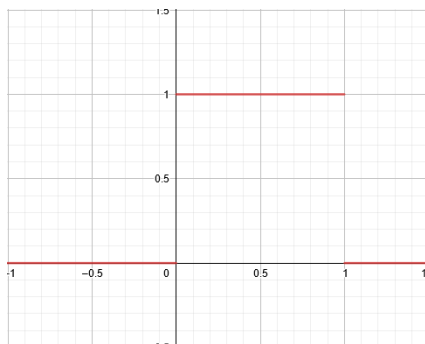
- zeitkontinuierlich: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$
- zeitdiskret: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(kT)|T < \infty$

2.1 Beispiel

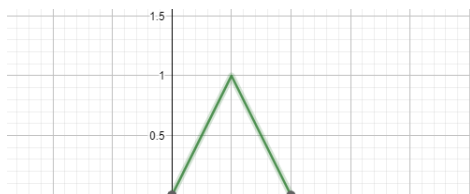
Faltung der Rechteckfunktion mit sich selbst:



Sei $u(x) = \begin{cases} 0, & x < \tau \\ 1, & x \geq \tau \end{cases}$
 der Einheitssprung beginnend ab
 $x = \tau$



Stelle die Rechteckfunktion als die
 Differenz von zwei Einheitssprüngen
 dar
 $r(x) = u(x) - u(x - 1)$



Faltung mit sich selbst:

$$(r * r)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} r(\tau)r(x - \tau)d\tau = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2(x - 1), & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Man kann leicht sehen, dass der Wert von $(f * f)(0.5) = 1$, da sich dort die beiden Rechteckfunktionen exakt überlagern, somit ist die Fläche gleich 1

3 Fourier

In diesem Kapitel fassen wir Techniken zusammen, welche es erlauben eine gegebene Funktion f in ein Spektrum, bzw. in eine Spektralfunktion zu zerlegen. Man kann die Zerlegung am Beispiel eines gespielten Akkords veranschaulichen. Jeder Ton des Akkords ist eine Schwingung mit seiner eigenen Frequenz. Diese Frequenzen überlagern sich dann alle zusammen zu einer neuen Schwingung und bilden so den Akkord. Man kann nun FT benutzen um aus der

Akkordschwingung die Schwingungen der einzelnen Noten zurückzugewinnen. Die Spektralfunktion welche man erhält, hat dann für jeden Ton des Akkords einen Ausschlag mit x =Frequenz. und mit der Höhe je nachdem wie laut, d.h. wie groß die Amplitude des jeweiligen Tons ist y =Amplitude.

3.1 Fourier Reihe

Die Fourier Reihe ist eine Funktion welche aus einer unendlichen Summe von gewichteten Sinus- und Kosinusschwingungen besteht.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Man kann so eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, als eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen. Die Frequenzen der einzelnen Funktionen müssen dabei ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sein, da sonst die Grundperiodizität verletzt wird.

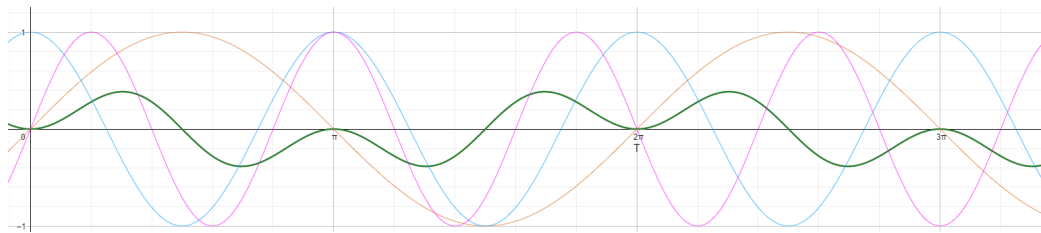


Abbildung 2: $\cos(2x)$, $\sin(x)$, $\sin(2.5x)$

Die **grüne** Funktion kann unmöglich aus der **pinken** Funktion bestehen, da diese die Grundperiodizität derer verletzt.

$$\frac{4\pi}{3} = T_{\text{pink}} \nmid 2\pi = T_{\text{grün}}$$

Jedoch **kann** die **grüne** Funktion aus der **orangenen** oder der **blauen** Funktion bestehen.

$$\pi = T_{\text{blau}} \mid 2\pi = T_{\text{orange}} \mid 2\pi = T_{\text{grün}}$$

Außerdem ist die Entwicklung nur möglich wenn die Dirichletschen Bedingungen erfüllt sind:

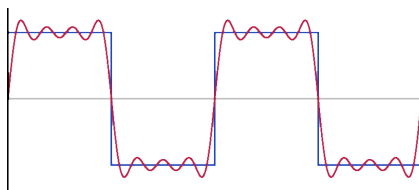
- Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele stetig-monotone Teilintervalle zerlegen
- An Diskontinuitäten existiert der rechts und links-seitige Grenzwert, d.h. es kommen nur endliche Sprünge in Betracht (z.B. nicht der Fall für $\tan(x)$)

Die Koeffizienten der Entwicklung von f können dann wie folgt berechnet werden:

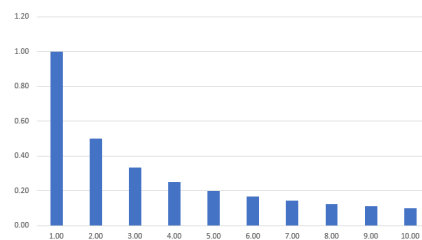
- $a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt$ (Absolut-Anteil)
- $a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$ (Cosinus-Anteil)
- $b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$ (Sinus-Anteile)
- c ist die Verschiebung des Intervalls und kann beliebig gewählt werden (auch $c = 0$)

Note: Ist die Funktion nicht über eine ganze Periode integrierbar, z.B. wegen einer Sprungstelle, dann müssen mehrere Integrale benutzt werden, jeweils für die Teile in denen die Funktion integriert werden kann

Trägt man die a_n 's bzw. b_n 's in Abhängigkeit der Frequenz ab so erhält man eine dazugehörige **diskrete Spektralfunktion**



(a) 4x approximierte Rechteckfunktion



(b) Spektrum der a_n 's bis $n = 10$

Herleitung der Koeffizientenformeln:

Um die Gleich für Koeffizienten zu erhalten benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen, welche wie folgt lauten:

$$1. \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$2. \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$3. \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0$$

Nun machen wir folgende Umformung:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \sin mt \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \sin mt \, dt = 0$, Sinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \sin mt \, dt = 0$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \sin mt \, dt = b_n \pi$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (2)

daraus folgt: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \cos mt \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos mt \, dt = 0$, Cosinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \cos mt \, dt = 0$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \cos mt \, dt = 0$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (1)

daraus folgt: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) 1 \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) 1 \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nt \, dt = 0$ Cosinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nt \, dt = 0$ Sinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \pi$

daraus folgt: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) 1 \, dt$

3.2 Fourier Transformation

Die Fourier Transformation ist eine Erweiterung der Fourier Reihen, welche man erhält wenn man erlaubt, dass die Periode der zu approximierenden Funktion gegen unendlich geht (d.h. es muss in der Praxis keine Wiederholungen innerhalb der Funktion geben). Wie auch bei den Fourier Reihen, erhält man bei der Fourier Transformation wieder ein Spektrum welches nun jedoch **kontinuierlich** ist. Damit eine Funktion fourier-transformierbar ist, muss sie absolut integrierbar sein, d.h. dass die von der Funktion eingeschlossene Fläche muss auch im unendlichen endlich sein

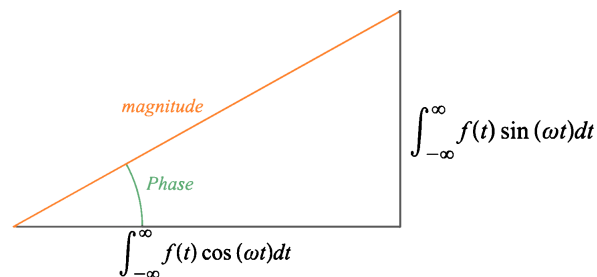
Man kann nun das Spektrum erhalten indem man die Funktion $f(t)$ Fourier Transformiert:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Nach der Eulerschen Formel gilt: $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$, damit kann man die Formel wie folgt umformen:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Man kann sich die beiden Anteile nun auch als Dreieck in der Komplexen Zahlenebene vorstellen, wobei die Länge der Hypotenuse dem Funktionswert der Fourier Transformation entspricht:



1. multipliziere $f(t)$ jeweils einmal mit $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$
2. setze $\omega = 0$
3. berechne die Gesamtfläche unter beiden Funktionen
4. berechne mit Satz des Pythagoras die Länge, diese ist gleich $F(\omega)$
5. erhöhe ω infinitesimal
6. GOTO (3)

Hat man dagegen ein Spektrum gegeben, so kann man dies mittel der inversen Fourier Transformation wieder in die ursprüngliche Funktion umwandeln:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} dt$$

3.2.1 Beispiel FT eines Rechteckimpulses

Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- Setze $f(t)$ die Formel für FT ein

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = \begin{cases} \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt} dt & t \in [0, 1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- Umformung mittels partieller Integration

Using: $u = 1, u' = 0, v' = e^{-iwt}, v = \frac{-e^{-iwt}}{iw}$

$$\int_0^1 u \cdot v' = \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt} dt \Rightarrow u \cdot v - \int_0^1 u' \cdot v dt \Rightarrow 1 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw} - \int_0^1 0 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw}$$

$$F(w) = \left[\frac{-e^{-iwt}}{iw} \right]_0^1 = \frac{1}{w} (e^{-iwt} - 1)$$

- Berechne Real- und Imaginärteil von $F(w)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} (e^{-iwt} - 1) &= \frac{1}{w} (\cos(w) - i \cdot \sin(w) - 1) \\ &= \frac{\cos(w)}{w} - \frac{1}{w} - \frac{i \sin(w)}{w} = \frac{\cos(w)-1}{w} - \frac{i \sin(w)}{w} \end{aligned}$$

$$- \Re(F(w)) = \frac{\cos(w)-1}{w}$$

$$- \Im(F(w)) = \frac{\sin(w)}{w}$$

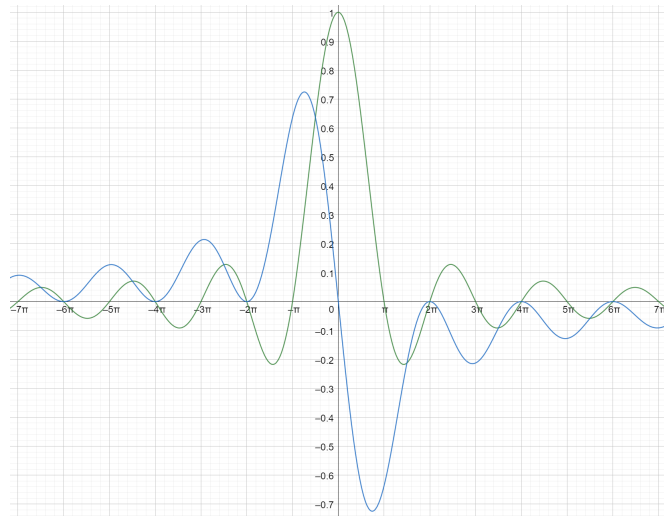
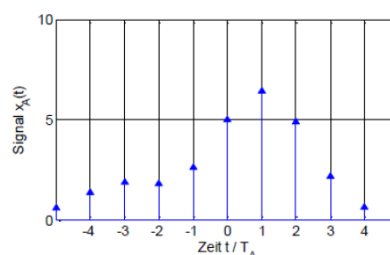
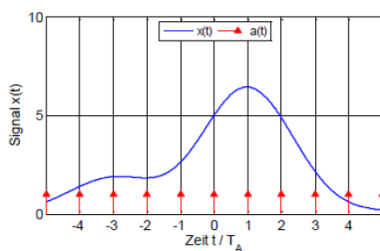


Abbildung 4: $\Re(F(w))$: Blau, $\Im(F(w))$: Grün

4 Abtastung

Abtasten eines Signals $x(t)$ durch regelmäßiges multiplizieren (T_A : Abtastfrequenz) mit der Dirac-Delta-Funktion $\delta(x)$, es gilt:

- $$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - T_A \cdot k)$$
- $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - T_A \cdot k)$$



4.1 Aliasing

Beim Abtasten eines Signals mit einer Frequenz f_g , und einer Abtastperiode $T_A = \frac{1}{f_g}$, werden weitere Signale mit Aliasfrequenzen $f_{al} = n * f_a$ erzeugt

Man kann die Aliasfrequenzen bspw. mit einem Tiefpassfilter herausfiltern

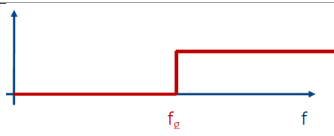
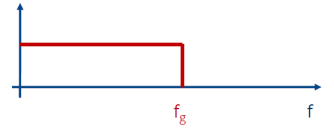
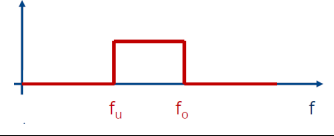
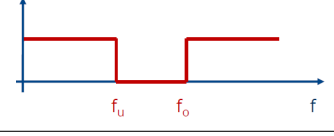
Nyquist-Shannon-Abtasttheorem ($f_a > 2f_g$) Ein Signal mit einer maximalen Frequenz f_g kann nur dann aus äquidistanten Abtastwerten exakt rekonstruiert werden, wenn das Signal mit einer Abtastfrequenz f_a echt größer als $2 \cdot f_g$ abgetastet wurde.

5 Filter

Filter können das Spektrum eines Signals beeinflussen durch:

- Herausfiltern
- Dämpfen

Arten von Filtern:

Type	Diagramm
Hochpass	
Tiefpass	
Bandpass	
Bandsperre	

Finite Impulse Response (FIR)

- zeitlich begrenzte Impulsantwort auf Input
- beinhalten keinen Informationsspeicher
- können nur eine begrenzte Anzahl von Daten am Eingang zu Berechnung der Antwort benutzen
- sind stabil und können nicht selbst zu Schwingungen anregen

- keine Rekursion, bzw. Rückkopplung

Infinite Impulse Response (IIR)

- linear und verschiebungsinvariant
- kann eine unendlich lange Impulsantwort auf Input erzeugen
- rekursiv

6 Laplace Transformation

Die Laplace Transformation versucht das Problem zu lösen, dass nur absolut integrierbare Funktionen fourier-transformiert werden können.