

Zusammenfassung Software-orientierte Informatik

Henrik Tscherny

10. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Systeme	1
1.1	Verknüpfung von Systemen	3
1.2	Grundsysteme	5
2	Faltung/Konvolution	5
2.1	Beispiel	6
3	Fourier	7
3.1	Fourier Reihe	7
3.2	Beispiel Rechteckfunktion	10
3.3	Fourier Transformation	10
3.3.1	Beispiele	10

1 Systeme

Ein System ist ein natürliches oder künstliches Gebilde, welches aus Eingangssignalen (E) ein Ausgangssignal (A) macht. Das System besitzt zudem einen inneren Zustand, der durch Zustandsgrößen (\vec{Z}) beschrieben wird. Eine Systemfunktion (F) legt fest wie das Eingangssignal in das Ausgangssignal umgewandelt wird ($\vec{A} = F(\vec{E}, \vec{Z}, \dots)$)

Statische Systeme Der Output zum Zeitpunkt t ($y(t)$) ist nur von dem zu gleichen Zeitpunkt am Input anliegenden Wert ($x(t)$) abhängig. Innere Zustände (\vec{Z}) sind egal. die dazugehörige Funktion $y = f(x)$ nennt man statische Kennlinie.

Dynamische Systeme Der Output ($y(t)$) ist von dem am Input anliegenden Signal ($x(t)$) und dem inneren Zustand des Systems (\vec{Z}) abhängig. Dabei kann man sich den inneren Zustand als eine Art Gedächtnis vorstellen

Lineare Systeme Ein System ist linear, wenn der Überlagerungssatz/Superpositionsprinzip gilt, bzw nicht-linear falls dieser nicht gilt, d.h. Stellt man den Input als die Summe von zwei verschiedenen Inputs dar, so kann man auch den Output als die Summe der beiden Outputs darstellen.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Rightarrow y(t) = f(x_1(t) + x_2(t)) = f(x_1(t)) + f(x_2(t))$$

lineare Systeme werden durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben

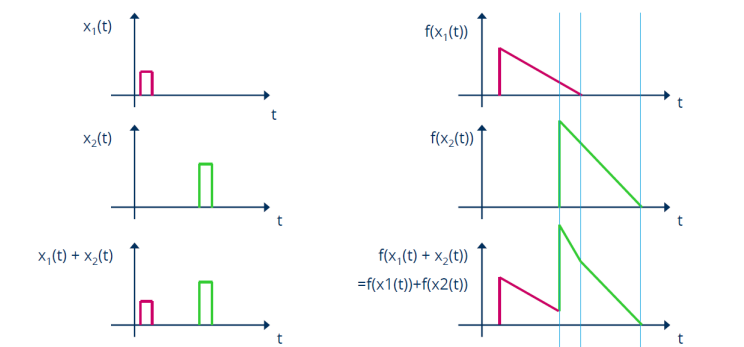


Abbildung 1: Veranschaulichung des Superpositionsprinzips

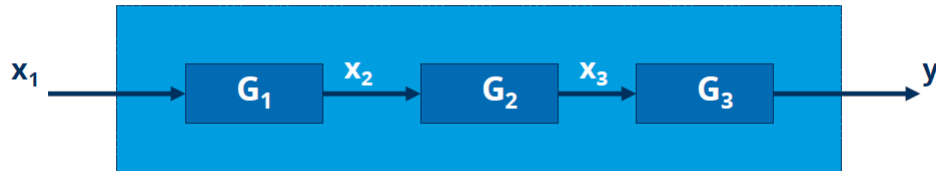
Zeit(in)variante Systeme Ändern sich die Systemeigenschaften sich nicht mit der Zeit, d.h. es gilt das Verschiebungsprinzip ($y(t - t_0) = f(x(t - t_0))$), ist das System zeitinvariant, andernfalls ist es zeitvariant

Kausales System Der Output ist nur von den aktuellen und vergangenen Inputs abhängig, Sprung- und Impulsantwort sind gleich 0 für $t < 0$, gilt dies nicht ist das System akausal.

- schwach kausal
 - reagiert auf Input x immer mit gleichem Output y
- stark kausal
 - reagiert auf ähnlichen Input x mit ähnlichem Output y

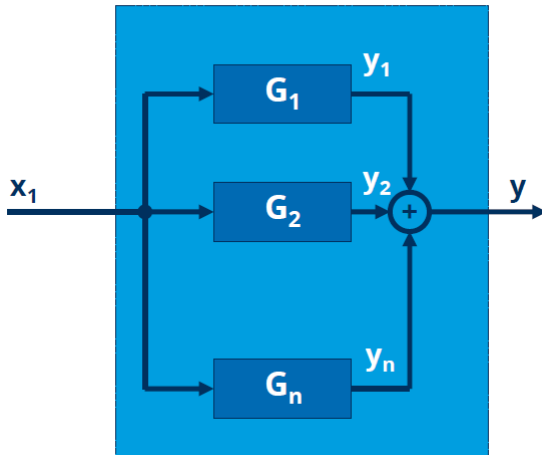
1.1 Verknüpfung von Systemen

Reihenschaltung



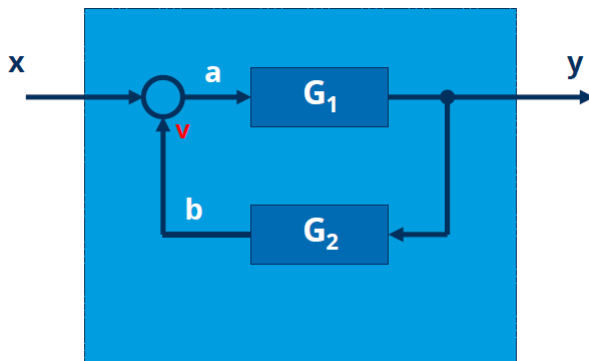
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \prod_{i=1}^n k_i = \frac{\text{output}}{\text{input}}$	$G_{ges}(f) = \prod_{i=1}^n G_i(f) = \frac{\text{input}(f)}{\text{output}(f)}$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Parallelschaltung



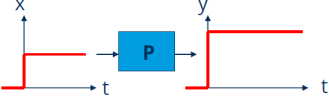
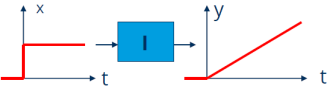
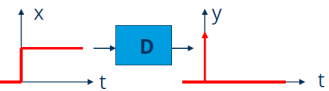
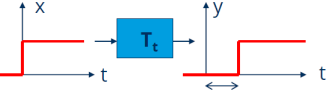
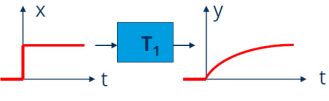
statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \sum_{i=1}^n k_i$	$G_{ges}(f) = \sum_{i=1}^n G_i(f)$
$G_i = k_i$: statische Übertragungsfaktor	$G_i(f)$: Übertragungsfunktion des Teilsystems i

Rückkopplungsschaltung



statisches System	dynamisches System
$k_{ges} = \frac{y}{x} = \frac{k_1}{1 \pm k_1 k_2}$	$G_{ges}(f) = \frac{G_1(f)}{1 \pm G_1(f)G_2(f)}$

1.2 Grundsysteme

Type	Differenzialgleichung	Differenzengleichung
Proportionalssystem (P) 	$\frac{dy}{dx} = K_p$	$y(i) = K_p x(i)$
Integralsystem (I) 	$\frac{dy}{dt} = K_I x(t)$ $y(t) = K_I \int_0^t x(\tau) d\tau$	$y(i) = T K_I x(i) + y(i-1)$
Differentialsystem (D) 	$\frac{dx}{dt} K_D = y(t)$	$y(i) = \frac{K_D}{T} (x(i) - x(i-1))$
Totzeitsystem (T_t) 	$y(t) = x(t - T_t)$	$y(i) = x(i - n)$ $n = \frac{T_t}{T}$
Verzögerungssystem (T_1) 	$\frac{dy}{dt} T_1 + y(t) = x(t)$	$y(i) = (1 - \alpha)x(i) + \alpha y(i-1)$ $\alpha = \frac{T_1}{T+T_1}$

2 Faltung/Konvolution

Die Faltung beschreibt einen mathematischen Operator (*) welcher für zwei Funktionen f und g eine dritte Funktion $f * g$ liefert.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)g(x - \tau)d\tau$$

Intuitiv kann man sich die Faltung von zwei Funktionen f und g so vorstellen, dass man die Funktion g entlang der x-Achse schiebt (daher $x - \tau$) und dabei diese über die Funktion f hinweg schiebt. Dabei berechnet man dann in jedem Schritt die Fläche in welcher sich die beiden Funktionen überlappen. Der Flächeninhalt der Überlappung ist dann der Funktionswert der Funktion $(f * g)(x)$. Die Funktion f wird also mit der Funktion g an jedem Punkt x gewichtet.

Eigenschaften der Faltung:

- Kommutativität: $f * g = g * f$

- Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
- Assoziativ mit Skalarmultiplikation: $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

Für den zeitdiskreten Fall gibt es äquivalent zum Faltungsintegral die Faltungssumme:

$$f(kT) * g(kT) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{j=0}^k f((k-j)T)g(jT) & k \geq 0 \end{cases}$$

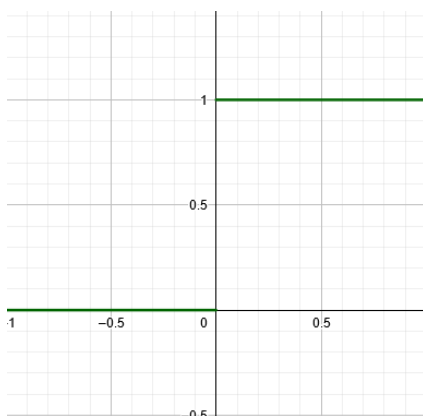
$k \in \mathbb{Z}$, T: Abtastperiode

Stabilität Ein System ist **BIBO-stabil**, wenn es für jeden beschränkten Input Wert auch nur maximal einen beschränkten Output wert liefert

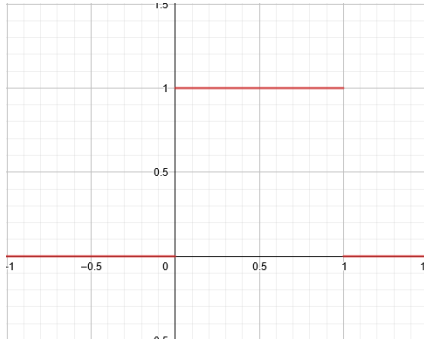
- zeitkontinuierlich: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$
- zeitdiskret: $\sum_{-\infty}^{+\infty} |g(kT)|T < \infty$

2.1 Beispiel

Faltung der Rechteckfunktion mit sich selbst:

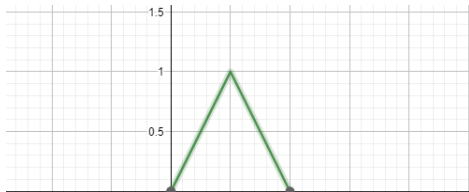


Sei $u(x) = \begin{cases} 0, & x < \tau \\ 1, & x \geq \tau \end{cases}$
 der Einheitssprung beginnend ab
 $x = \tau$



Stelle die Rechteckfunktion als die Differenz von zwei Einheitssprüngen dar

$$r(x) = u(x) - u(x - 1)$$



Faltung mit sich selbst:

$$(r * r)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} r(\tau)r(x - \tau)d\tau = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -2(x - 1), & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Man kann leicht sehen, dass der Wert von $(f * f)(0.5) = 1$, da sich dort die beiden Rechteckfunktionen exakt überlagern, somit ist die Fläche gleich 1

3 Fourier

In diesem Kapitel fassen wir Techniken zusammen, welche es erlauben eine gegebene Funktion f in ein Spektrum, bzw. in eine Spektralfunktion zu zerlegen. Man kann die Zerlegung am Beispiel eines gespielten Akkords veranschaulichen. Jeder Ton des Akkords ist eine Schwingung mit seiner eigenen Frequenz. Diese Frequenzen überlagern sich dann alle zusammen zu einer neuen Schwingung und bilden so den Akkord. Man kann nun FT benutzen um aus der Akkordschwingung die Schwingungen der einzelnen Noten zurückzugewinnen. Die Spektralfunktion welche man erhält, hat dann für jeden Ton des Akkords einen Ausschlag mit x =Frequenz. und mit der Höhe je nachdem wie laut, d.h. wie groß die Amplitude des jeweiligen Tons ist y =Amplitude.

3.1 Fourier Reihe

Die Fourier Reihe ist eine Funktion welche aus einer unendlichen Summe von gewichteten Sinus- und Kosinusschwingungen besteht.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t))$$

Man kann so eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, als eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen. Die Frequenzen der einzelnen Funktionen müssen dabei ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sein, da sonst die Grundperiodizität verletzt wird.



Abbildung 2: $\cos(2x)$, $\sin(x)$, $\sin(2.5x)$

Die **grüne** Funktion kann unmöglich aus der **pinken** Funktion bestehen, da diese die Grundperiodizität derer verletzt.

$$\frac{4\pi}{3} = T_{\text{pink}} \nmid 2\pi = T_{\text{grün}}$$

Jedoch **kann** die **grüne** Funktion aus der **orangenen** oder der **blauen** Funktion bestehen.

$$\pi = T_{\text{blau}} \mid 2\pi = T_{\text{orange}} \mid 2\pi = T_{\text{grün}}$$

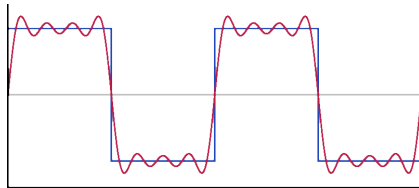
Außerdem ist die Entwicklung nur möglich wenn die Dirichletschen Bedingungen erfüllt sind:

- Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele stetig-monotone Teilintervalle zerlegen
- An Diskontinuitäten existiert der rechts und links-seitige Grenzwert, d.h. es kommen nur endliche Sprünge in Betracht (z.B. nicht der Fall für $\tan(x)$)

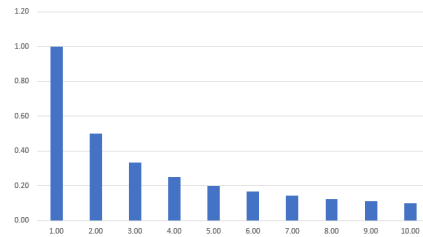
Die Koeffizienten der Entwicklung von f können dann wie folgt berechnet werden:

- $a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt$ (Absolut-Anteil)
- $a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$ (Cosinus-Anteil)
- $b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$ (Sinus-Anteile)
- c ist die Verschiebung des Intervalls und kann beliebig gewählt werden (auch $c = 0$)

Note: Ist die Funktion nicht über eine ganze Periode integrierbar, z.B. wegen einer Sprungstelle, dann müssen mehrere Integrale benutzt werden, jeweils für die Teile in denen die Funktion integriert werden kann
 Trägt man die a_n 's bzw. b_n 's in Abhängigkeit der Frequenz ab so erhält man eine dazugehörige **diskrete Spektralfunktion**



(a) 4x approximierte Rechteckfunktion



(b) Spektrum der a_n 's bis $n = 10$

Herleitung der Koeffizientenformeln:

Um die Gleich für Koeffizienten zu erhalten benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen, welche wie folgt lauten:

$$1. \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$2. \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$3. \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

Nun machen wir folgende Umformung:

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin mt \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \sin mt \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \sin mt \, dt = 0$, Sinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \sin mt \, dt = 0$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \sin mt \, dt = b_n \pi$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (2)

daraus folgt: $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) \cos mt \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cdot \cos mt \, dt = 0$, Cosinus über eine Periode mal Konstante = 0
- $\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin nt \cdot \cos mt \, dt = 0$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (3)
- $\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos nt \cdot \cos mt \, dt = 0$, \rightarrow Folgt aus Gleichung (1)

daraus folgt: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$

$$\int_0^{2\pi} f(t) 1 \, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\omega t + b_n \cdot \sin n\omega t) \right) 1 \, dt$$

- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nt = 0$ Cosinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nt = 0$ Sinus über eine Periode = 0
- $\int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0\pi$

daraus folgt: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) 1 \, dt$

3.2 Fourier Transformation

Die Fourier Transformation ist eine Erweiterung der Fourier Reihen, welche man erhält wenn man erlaubt, dass die Periode der zu approximierenden Funktion gegen unendlich geht (d.h. es muss in der Praxis keine Wiederholungen innerhalb der Funktion geben). Wie auch bei den Fourier Reihen, erhält man bei der Fourier Transformation wieder ein Spektrum welches nun jedoch **kontinuierlich** ist.

3.2.1 Beispiel FT eines Rechteckimpulses

Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- Setze $f(t)$ die Formel für FT ein

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \begin{cases} \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt} dt & t \in [0, 1[\\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- Umformung mittels partieller Integration

Using: $u = 1, u' = 0, v' = e^{iwt}, v = \frac{-e^{-iwt}}{iw}$

$$\int_0^1 u \cdot v' = \int_0^1 1 \cdot e^{-iwt} dt \Rightarrow u \cdot v - \int_0^1 u' \cdot v dt \Rightarrow 1 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw} - \int_0^1 0 \cdot \frac{-e^{-iwt}}{iw}$$

$$F(w) = \left[\frac{-e^{-iwt}}{iw} \right]_0^1 = \frac{1}{w}(e^{-iwt} - 1)$$

- Berechne Real- und Imaginärteil von $F(w)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}(e^{-iwt} - 1) &= \frac{1}{w}(\cos(w) - i \cdot \sin(w) - 1) \\ &= \frac{\cos(w)}{w} - \frac{1}{w} - \frac{i \sin(w)}{w} = \frac{\cos(w)-1}{w} - \frac{i \sin(w)}{w} \end{aligned}$$

$$- \Re(F(w)) = \frac{\cos(w)-1}{w}$$

$$- \Im(F(w)) = \frac{\sin(w)}{w}$$

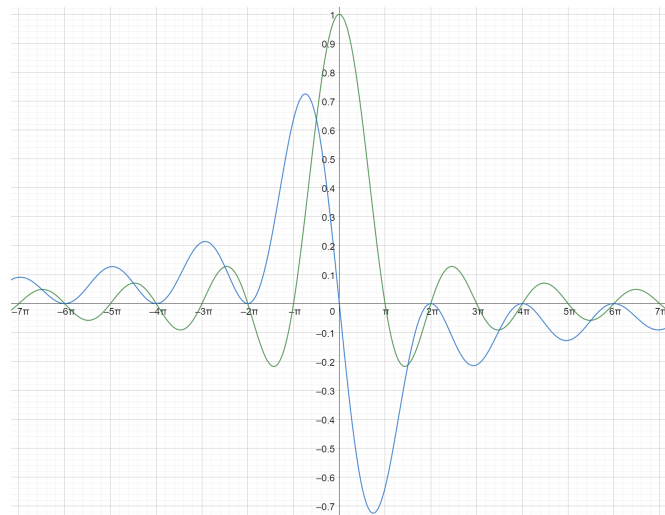


Abbildung 4: $\Re(F(w))$: Blau, $\Im(F(w))$: Grün